Problema 1 – Provocare – Descriere solutie – Autor Andrei Heidelbacher

10 puncte

Pentru `N, A, B ≤ 100`, problema admite o soluție simplă ce presupune căutarea liniară a inălțimii minime si construirea unui arbore binar cu număr maxim de noduri cu înălțimea fixată. Complexitatea acestei soluții este `O(N * H)`, unde `H` este înălțimea minimă a arborelui.

20 de puncte

Pentru `N ≤ 100 000`, putem efectua o căutare binară a înălțimii minime și să construim arborele ca în soluția precedentă. Complexitatea este `O(N * log H)`.

30 de puncte

Pentru `N ≤ 1 000 000`, putem face o dinamică `D[i]` = înălțimea minimă a unui arbore binar care are `i` noduri. Recurența va fi `D[i] = min(max(A + D[j], B + D[i - j - 1]), 0 ≤ j < i)`. Putem observa că șirul `D` este crescător, iar pentru a găsi valoarea minimă din recurență, ne vom plimba cu doi iteratori. Complexitatea este `O(N)`.

45 de puncte

Pentru `A, B ≤ 10 000`, vom face o altă dinamică, `D[i]` = numărul maxim de noduri pe care îl poate conține un arbore cu înălțime i. Recurența va fi `D[i] = 1 + D[i - A] + D[i - B]`. Această soluție are complexitate `O(H)`, înălțimea fiind aproximată cu `max(A, B) * log N`.

100 de puncte

Vom folosi o altă abordare pentru rezolvarea problemei. În primul rând, vom căuta binar înălțimea arborelui, apoi am dori să numărăm toate nodurile care au pe drumul până la rădăcină `x` muchii de lungime `A` și `y` muchii de lungime `B` (adâncimea acestor noduri fiind `x * A + y * B`). Răspunsul la această întrebare este `C(x + y, x) = C(x + y, y)`. Astfel, numărul maxim de noduri pe care îl poate conține un arbore cu înălțime `H` este `sum(C(x + y, x), x * A + y * B ≤ H)`. Putem presupune fără a pierde din generalitatea soluției că `A ≤ B`. Vom fixa `y` numărul de muchii de lungime `B`, iar numărul maxim de muchii de lungime `A` va fi `x = (H - y * B) / A`. Astfel, numărul nodurilor situate la adâncime cel mult `H` care au exact `y` muchii de lungime `B` pe drumul până la rădăcină va fi `sum(C(i + y, i), 0 ≤ i ≤ x) = C(x + y + 1, y + 1)`. Este suficient să observăm că pentru orice `n > 100` și `k > 5`, avem `C(n, k) > 1 000 000 000`, deci sumele descrise mai sus vor conține un număr foarte mic de termeni mai mici decat `N`. Complexitatea finală este aproximativ `O(T * log H * log N + C)`, unde `C` reprezintă numărul combinărilor precalculate (aproximativ `10 000`).