Soluţie PEG

Teoremă

Mulţimea configuraţiilor pentru care jocul se termină este un limbaj regulat 0*L0*; unde

L = 1 + 011 + 110
+ 11(01)* [00 + 00(11)$^+$ + (ll)$^+$00 + (ll)*1011 + 1101(11)*] (10)*ll
+ ll(01)*(ll)*01 + 10(ll)*(10)*ll.

w* indică faptul că w se repetă de 0 sau mai multe ori, iar w$^+$ indică faptul că w se repetă de 1 sau mai multe ori.

Demonstraţie

Pentru a demontra terorema, Leibniz a început cu un singur jeton 1 şi a jucat jocul în sens invers.
Primul salt înapoi generează secvenţa 011 sau 110.
Al doilea salt înapoi generează: 1101 sau 1011.
Observăm că 11 este singură configuraţie care nu poate fi redusă la un singur jeton fără a utiliza o gaură din afara mulţimii de jetoane. Ca urmare pentru configuraţii mai mari vom ignora 0 aflate la capete.
Configuraţiile 1101 şi 1011 au două capete: 10... şi respectiv ... 11.
Cel de al doilea se poate propaga oricât, efectuând salturi înapoi din dreapta:
1010101011 (deci se obţin configuraţii de forma (10)*11)
Când pentru primul capăt facem un salt înapoi pot apărea două situaţii:
a. devine un capăt de forma 11;
b. lăsă în spate două poziţii libere alăturate.
110010101011.
Mai mult, acesta este singurul mod de a obţine 00. Putem deplasa acest 00 către dreapta, executând salturi înapoi.
111111110011.
Totuşi, deoarece în stânga se formează o secvenţă numai din 1, nu putem muta 00 la loc în stânga. Orice încercare reduce 00 la o singură poziţie liberă:
111111101111.
Deducem că dacă un jeton are un alt jeton în stânga sa, atunci saltul înapoi nu se face din stânga. Putem demonstra acest lucru prin inducţie.
De asemenea, într-o configuraţie validă nu putem avea mai multe perechi 00 (exceptând zerourile iniţiale sau finale) (pentru că orice pereche 00 care apare trebuie să o deplasăm spre un capăt, pentru a obţine un capăt 10... sau 01).
111111111101
Concluzionând, orice configuraţie cu 3 sau mai multe jetoane poate fi redusă la un singur jeton dacă ea poate fi obţinută prin salturi înapoi plecând de la 1 astfel:
1. Începem cu 1011. Prin salturi înapoi din dreapta se obţin configuraţii de forma 10(10)* 11.
Dacă dorim, atunci:
2. Efectuăm salturi înapoi din stânga, creând perechi de poziţii libere şi obţinând ll(01)*00(10)*ll.
Apoi putem:
3. Muta 00 către dreapta, obţinând ll(01)*(ll)*00(10)* 11.
Ne putem opri aici sau
4. Mutăm 00 către dreapta obţinând 11(01)*(ll)*01
Sau
5. Umplem perechea, executând salt înapoi din stânga, obţinând ll(01)*(ll)* 1011(10)* 11.
Teorema spune că mulţimea configuraţiilor convenabile este reuniunea tuturor acestor configuraţii, plus 1, 011 şi 110, cu oricâte poziţii libere în stânga sau îndreapta dorim.