

Tabăra de pregătire a lotului național de informatică

Baia Mare, 7-14 mai 2013

Baraj 5 - Seniori



dssets - solutie

Lector dr. Mugurel-Ionuț Andreica – Universitatea Politehnica din București

Să considerăm că fiecărui punct (x,y) îi atașăm un nou punct, $(x+y,x-y)$ (practic, considerăm sistemul de coordonate al diagonalelor). Distanța Manhattan maximă dintre 2 puncte ale unei submulțimi de puncte este egală cu diferența dintre valoarea maximă și cea minimă a valorilor $(x+y)$ sau $(x-y)$ (se consideră maximumul dintre ele).

Pentru a rezolva problema este necesar calculul a 6 valori $CNT(A,B)$ ($A=D$, $D-1$ sau $D-2$ și $B=0,1$).

$CNT(A,B)$ = numărul de submulțimi în care o pereche de diagonale (fixate - să le numim diagonalele principale) este la "distanță" D și cealaltă pereche de diagonale (să le numim secundare) este la "distanță" mai mică sau egală cu A , iar paritatea primei diagonale secundare este egală ($B=0$) sau diferită ($B=1$) de paritatea primei diagonale principale. Această paritate este importantă: de ex., dacă au aceeași paritate, atunci cele 2 diagonale menționate au un punct în comun, altfel nu.

Pentru a calcula $CNT(A,B)$ avem nevoie să știm câte puncte se află pe fiecare dintre cele 2 diagonale principale (fie aceste numere u și v) și câte puncte se află în rest (între cele 2 perechi de diagonale și pe diagonalele secundare, dar nu și pe diagonalele principale) - fie acest număr w . $CNT(A,B)$ este egal cu $(2^u - 1) * (2^v - 1) * 2^w$ (primii doi factori asigură faptul că avem cel puțin un punct selectat pe fiecare din cele 2 diagonale principale).

Pentru a calcula $CNT(A,B)$ trebuie să considerăm 4 cazuri, ce depind de paritatea lui D și valoarea B (calculul valorilor u , v și w se realizează în timp $O(1)$ în fiecare din cazuri).

Pentru a rezolva problema vom calcula cele 6 valori menționate $CNT(D,0)$, $CNT(D,1)$, $CNT(D-1,0)$, $CNT(D-1,1)$, $CNT(D-2,0)$ și $CNT(D-2,1)$, fiecare în timp logaritm (este necesară ridicarea la putere în timp logaritm : u și v sunt numere de ordinul lui D , iar w este de ordinul D^2).

Din $CNT(D,0)$, unele submulțimi au ambele perechi de diagonale la distanță D , iar altele au diagonalele secundare la distanță mai mică decât D . Submulțimile cu diagonale secundare la distanță mai mică decât D trebuie numărate de 2 ori (deoarece putem alege diagonalele principale în 2 moduri), iar cele în care atât diagonalele principale cât și cele secundare sunt la distanță D trebuie numărate o singură dată.

Pentru a determina câte submulțimi au ambele perechi de diagonale la distanță egală cu D se folosește principiul includerii și excluderii (sunt necesare doar valorile corespunzătoare pentru $CNT(D-1,*)$ și $CNT(D-2,*)$).

Se procedează în mod similar cu $CNT(D,1)$, având grijă să nu numărăm de mai multe ori aceeași submulțime.