

Problema Permutare, Autori: Andrei Dragus, Marius Dragus

Descrierea solutiei

Notam:

$N = 2 \cdot K + 1$ nr de elemente

S = solutia la pasul curent

V = vectorul de semne (are $K+1$ elemente dar avand in vedere ca ultima valoare din V este 0 o putem neglija, deci are K elemente).

Notam [A x y ...] vectorul obtinut prin concatenarea vectorului A cu valorile x y ...

Notam (A+1) incrementarea tuturor valorilor din A cu 1

1. Solutie $O(N^2)$

Presupunem ca avem o solutie S, care are printre ultimele 2 elemente unul mai mare decat mediana si unul mai mic, pentru un N dat si un vector V. Deci $S = [S' \ a \ b]$, unde $a < \text{mediana}$ si $b > \text{mediana}$. Vom construi o solutie pentru $N+2$ si un $V' = [V \ x]$, unde x poate fi 0,-1,1 cu aceeasi proprietate. Daca incrementam toate elementele din S mediana la fiecare pas creste cu 1 si media cu 1 si devin $K + 2$ deci V nu se modifica. Evident $a+1 > 1$ si $b+1 < N+2$. Consideram atunci vectorii (vorbim de mediana si media la pasul N):

- a) $[(S' + 1) \ a+1 \ b+1 \ 1 \ N+2]$. Acesta este o permutare valida, si ii corespunde vectorul $V' = [V \ 0]$.
- b) $[(S' + 1) \ 1 \ b+1 \ a+1 \ N+2]$. Fiindca $a+1 < \text{noua mediana}$ daca inversam a+1 si 1 pozitia medianei nu se schimba, dar media scade, deci $V' = [V \ -1]$
- c) $[(S' + 1) \ a+1 \ N+2 \ 1 \ b+1]$. Fiindca $b+1 > \text{noua mediana}$ daca inversam b+1 si N+2 pozitia medianei nu se schimba, dar media creste deci $V' = [V \ 1]$

Evident cele 3 exemple vor avea proprietatea ca ultimele 2 elemente sunt unul mai mare si unul mai mic decat mediana.

Solutia:

Pornim de la $N = 3$, $S = [2 \ 1 \ 3]$, $V = [0]$.

```
for ( i = 3; i <= N ; i += 2 )
{
    increment(S);
    S.push_back( 1 );
    S.push_back( N+2 );
    switch_last_elements_to_desired_position(S);
}
```

print S;

Complexitate $O(N^2)$ din cauza incrementarilor la fiecare pas. Solutia poate fi si transformata recursiv si cu putina atentie adusa la $O(N)$.

Tabăra de pregătire a Lotului Național de Informatică
Focșani, 15-22 mai, 2010
Baraj 2 Seniori

2. Solutie $O(N)$. Ideea seamana cu cea de $O(N^2)$ dar difera solutia de la care pornim.

Pornim cu solutia $S = [K+1 \ 1 \ N \ 2 \ N-1 \ 3 \ N-2 \ \dots \ K \ K+2]$. Evident ii corespunde vectorul $V = [0 \ 0 \ 0 \dots 0]$. Vom construi treptat o solutie care are pana la pasul i aceeasi proprietate ca mai sus (un element mai mare decat mediana si unul mai mic), mediana egala cu $K+1$, si valoarea $V[i]$ exact cea pe care o vrem, iar valorile $V[j]$ cu $j > i$ puse pe 0.

La pasul i ne uitam la elementele de pe pozitiile $2*i$, $2*i+1$, $2*i+2$, $2*i+3$, sa le zicem a, b, c, d . Vom avea $a < c < K+1 < d < b$. Folosind interschimbarile prezentate la 1 putem sa micșoram/marim media fara a misca mediana, deci putem sa punem orice valoare dorim in $V[i]$. Elementele din $V[j]$ cu $j > i$ nu se vor modifica deoarece ele nu depind de ordinea primelor elemente, ci doar de care sunt.

Exemplu:

$N = 9$
 $V = [0 \ 1 \ 0 \ -1]$

Pornim de la

$S = [5 \ 1 \ 9 \ 2 \ 8 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6]$

pas 1) consideram $1 \ 9 \ 2 \ 8$, vrem sa marim media , deci inversam 1 cu 2, $S = [5 \ 2 \ 9 \ 1 \ 8 \ 3 \ 7 \ 4 \ 6]$

pas 2) consideram $1 \ 8 \ 3 \ 7$ vrem sa ramana media egala cu mediana nu facem nimic

pas 3) consideram $3 \ 7 \ 4 \ 6$ vrem sa micșoram media , deci inversam 6 si 7, $S = [5 \ 2 \ 9 \ 1 \ 8 \ 3 \ 6 \ 4 \ 7]$, am obtinut solutia finala

Complexitate $O(N)$.