Cazino - descriere solutiei

Stud. Andrei Ciupan - Harvard University

Este evident ca fiecare din cele T intrebari sunt independete, asadar vom descrie solutia pentru un X si Y fixat.

Fie a_n probabilitatea ca jucatorul sa ajunga la suma de n lei inainte sa ajunga la suma de 0 lei, si facem conventia $a_0 = a_{-1} = 0$ şi $a_Y = a_{Y+1} = 1$. (daca omul porneste cu 0 lei sansa lui de a ajunge la Y lei inainte sa ajunga la 0 este de 0, iar daca porneste cu Y lei atunci sansa lui sa ajunga la Y inainte sa ajunga la 0 este de 1.)

La fiecare minut, jucatorul nostru poate sa castige la ambele rulete, sa piarda la amandoua, sau sa castige la una si sa piarda la cealalta. Daca castiga la ambele rulete atunci ajunge de la n lei la $n+2$ lei, daca pierde la amandoua ajunge de la n lei la $n-2$ lei, iar daca castiga la una si pierde la cealalta ramane la suma de n lei. Probabilitatea sa castige la ambele rulete este de $\frac{1}{4}$, probabilitatea sa piarda la amandoua este de $\frac{1}{4}$, iar probabilitatea sa castige la una si sa piarda la cealalta este de $\frac{1}{2}$.

Astfel, din cele de mai sus obtinem relatia de recurenta

$a_n = \frac{1}{4}a_{n+2} + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}a_{n-2}$, relatie echivalenta cu $a_n = \frac{1}{2}(a_{n+2} + a_{n-2})$, pentru orice n natural.

Astfel, daca notam $a_{2k} = b_k$ şi $a_{2k-1} = c_k$, obtinem relatiile de recurenta

$b_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} + b_{k+1})$, şi $c_k = \frac{1}{2}(c_{k-1} + c_{k+1})$, iar daca s este cel mai mare numar natural mai mic sau egal cu $\frac{y}{2}$ (adica $s = \left[\frac{y}{2}\right]$) şi t este cel mai mic numar natural mai mare sau egal cu $\frac{y}{2}$ (adica $t = y - \left[\frac{y}{2}\right]$), atunci $b_0 = 0$ şi $b_t = 1$, iar $c_0 = 0$ şi $c_{s+1} = 1$.

Prin inductie obtinem cu usurinta ca $b_k = k \cdot b_1$, pentru orice k natural, si deoarece $b_t = 1$, obtinem $b_1 = \frac{1}{t}$, deci $b_k = \frac{k}{t}$, pentru orice $0 \le k \le t$, deci $a_{2k} = \frac{k}{t}$, pentru orice $0 \le 2k \le y$.

In mod analog, $c_k = k \cdot c_1$, pentru orice $0 \le k \le s+1$, deci deoarece $c_{s+1} = 1$, avem $c_k = \frac{k}{s+1}$, pentru orice $0 \le k \le s+1$, deci $a_{2k+1} = \frac{k+1}{s+1}$, pentru orice $0 \le 2k+1 \le y$.

Deci raspunsul final este: $a_{2k} = \frac{k}{y - \left[\frac{y}{2}\right]}$, pentru $0 \le k \le \frac{y+1}{2}$, şi $a_{2k+1} = \frac{k}{\left[\frac{y}{2}\right]}$, pentru orice $0 \le k \le \frac{y}{2}$.

Asadar putem raspunde in complexitate de $O(1)$ la o intrebare, complexitatea finala fiind $O(T)$.