borcane - soluţie

prof. Marinel Şerban, Liceul de Informatică "Grigore Moisil" Iaşi

În primul rând vom demonstra că problema are întotdeauna soluţie.

Să notăm cu

$m=b_1+b_2+...b_n$ numărul total de bomboane.

Vom demonstra prin inducţie după `m`:

`P(m)`= "pentru orice configuraţie de `m` (`m>=4`) bomboane plasate în `n>=4` borcane există o secvenţă de mutări prin care putem plasa toate bomboanele într-un singur borcan".

`P(4)`

Există `4` borcane care conţin cele `4` bomboane. Distribuţiile posibile (în diferite cazuri) în borcane sunt:

1. `(1,1,1,1)`
2. `(1,3,0,0)`, evident pot fi şi `(0,1,0,3)`, …
3. `(2,2,0,0)` , evident pot fi şi `(0,2,0,2)`, …
4. `(1,2,1,0)` , evident pot fi şi `(1,1,0,2)`, …

Cazul (1):

`(1,1,1,1)->(3,1,0,0)->(2,0,2,0)->(1,0,1,2)->(0,0,0,4)`

Se observă că toate celelalte distribuţii apar în această secvenţă de mutări, deci în orice situaţie toate bomboanele pot fi puse în acelaşi borcan.

Să presupunem acum că **`P(m)`** este adevărată.

Să demonstrăm **`P(m+1)`**.

Vom alege o bomboană oarecare şi o vom marca (s-o numim bomboana specială). Din ipoteza inductivă deducem că toate celelalte bomboane pot fi plasate printr-o secvenţă de mutări într-un singur borcan.

a. Dacă acest borcan conţine bomboana specială - am rezolvat problema.
b. În caz contrar, alegem două borcane goale şi se poate proceda, de exemplu, astfel:

`(1,m,0,0)->(0,m-1,2,0)->(0,m-2,1,2)->(2,m-3,0,2)->(1,m-1,0,1)->(0,m+1,0,0)`

Acum toate bomboanele sunt într-un singur borcan.
Algoritmul de determinare a secvenţei de mutări se poate deduce din demonstraţie: se aduc toate bomboanele în `4` borcane oarecare (pentru comoditate se aleg primele `4`). Se disting aici `4` cazuri:

1. `n=4`, se trece la final
2. `n=5`, se alege câte o bomboană din borcanul `5` şi din borcanul care are maximul de bomboane dintre primele `4`, şi se mută în borcanul care are minimul de bomboane dintre primele `4`
3. `n=6`, se alege câte o bomboană din borcanele `5` şi `6` şi se mută în borcanul care are minimul de bomboane dintre primele `4`; acest lucru se face până când se goleşte un borcan; acum suntem în cazul `2`, …
4. `n>6`, se alege câte o bomboană din borcanele cu cele mai multe bomboane dintre borcanele `5, 6, …, n` şi se mută în borcanul care are minimul de bomboane dintre primele `4`; acest lucru se face până când se ajunge la cazul `2`, …

Odată ajunse toate bomboanele în primele `4` borcane, le aducem la forma din demonstraţie mutând de fiecare dată din borcanele care au maxim de bomboane (dintre borcanele `1`, `2`, `3`) în borcanul `4`, de exemplu, apoi, dacă este cazul, se urmează paşii din demonstraţie.