Problema matcnt (Autor Dan Pracsiu, Liceul „Ştefan Procopiu” Vaslui)

Soluţia O(n^4)

Se construieşte matricea 4-dimensională a, definită astfel:
a(i, j, p, q) = numărul posibilităţilor de a construi primele i linii din matrice, în care j coloane au deja completaţi cei doi de 1, iar p + q coloane au un singur 1 (evident, rămân n – j – p – q coloane fără niciun 1), p fiind numărul coloanelor care au un 1 „neîmperecheat”, adică celălalt 1 de pe aceeaşi linie apare pe o coloană care are doi de 1 (în imaginea de mai jos, p=2, fiind vorba de coloanele 3 şi 4); q este numărul coloanelor care au tot câte un 1, dar aceşti 1 sunt „pereche” (în imagine, q=2, fiind vorba de coloanele 5 şi 6)

1		1			
1			1		
				1	1

Iniţializarea matricei 4-dimensionale: a(1, 0, 0, 2) = C(n,2) (combinări de n luate câte 2), asta deoarece pe prima linie punem în orice poziţii doi de 1 care se contorizează la q.
Relaţii de recurenţă: (notăm cu n0 = numărul coloanelor fără 1, n0 = n – j – p – q)

- Valoarea a(i, j, p, q) influenţează valoarea lui a(i+1, j, p, q+2) dacă se aleg pentru linia i+1 două coloane fără 1 (pot alege în C(n0, 2) moduri)
- Valoarea a(i, j, p, q) influenţează valoarea lui a(i+1, j+2, p–2, q) dacă se aleg pentru linia i+1 două coloane cu un singur 1 din cele p coloane (pot alege în C(p, 2) moduri)
- Valoarea a(i, j, p, q) influenţează valoarea lui a(i+1, j+2, p, q–2) dacă se aleg pentru linia i+1 o coloană din cele p cu un 1 şi una din cele q (pot alege în p*q moduri)
- Valoarea a(i, j, p, q) influenţează valoarea lui a(i+1, j+1, p+2, q–2) dacă se aleg pentru linia i+1 o coloană din cele q cu un 1 şi una din n0 (pot alege în n0*q moduri)
- Valoarea a(i, j, p, q) influenţează valoarea lui a(i+1, j+1, p, q) dacă se aleg pentru linia i+1 o coloană din cele p cu un 1 şi una din n0 (pot alege în p*n0 moduri)
- Valoarea a(i, j, p, q) influenţează valoarea lui a(i+1, j+2, p+2, q–4) dacă se aleg pentru linia i+1 două coloane din cele q, astfel încât să nu se formeze un dreptunghi având colţurile cu 1 (pot alege în (q-2)*q / 2 moduri)

Soluţia se află în a(n, n, 0, 0).

Soluţia O(n) – Adrian Panaete

Plecăm de la observaţia că pentru o soluţie cunoscută prin schimbarea intre ele a două linii se obţine o nouă soluţie. Mai general, deducem că o permutare a liniilor pentru o soluţie conduce tot la o soluţie corectă. In acest fel putem grupa soluţiile in clase de echivalenţă folosind drept relaţie de echivalenţa între doua soluţii faptul că utilizează aceleaşi linii eventual în altă ordine.

Orice clasă de echivalenţa este caracterizată de mulţimea liniilor pe care le utilizează iar fiecare soluţie din clasa respectivă se obţine prin permutarea liniilor ce definesc clasa respectivă. Deducem de aici că o clasă de echivalenţă conţine exact `n!` soluţii.
Deci în final numărul soluţiilor este produsul între numărul claselor de echivalenţă şi `n!`.

Rămâne să numărăm clasele de echivalenţă.

Se observă că fiecare linie reprezintă o pereche de numere distincte de la `1` la `n` (cele două coloane pe care avem valorile de `1`).

Deoarece două linii nu pot forma dreptunghi cu colţuri de `1` deducem că liniile sunt distincte deci vom avea `n` perechi distincte.

Deoarece pe fiecare coloană apar exact doi de `1` rezultă că fiecare număr de la `1` la `n` apare exact în două perechi.

Privim mulţimea numerelor de la `1` la `n` ca mulţimea vârfurilor unui graf neorientat şi perechile ce definesc liniile ca muchiile grafului. Se observă că în graful obţinut din fiecare nod pleacă exact două muchii deci putem identifica o clasă de echivalenţa cu un graf 2-regulat (o reuniune de cicluri disjuncţi de lungime minim 3) .

Notăm A_n numărul grafurilor etichetate, 2-regulate, cu n vârfuri.

Soluţia devine $n!*A_n$.

Pentru a număra grafurile 2-regulate vom analiza cum putem forma un graf 2-regulat cu n+1 vârfuri.

Cazul 1.

Vârful etichetat cu n+1 face parte dintr-un ciclu de lungime 3. Pentru fiecare dintre cele `n*(n-1)/2` perechi de varfuri din cele n vom forma ciclul de lungime 3 iar cu cele n-2 vârfuri ramase vom construi oricare graf 2-regulat . Deci A_{n+1} conţine $A_n-2*n*(n-1)/2$

Cazul 2.

Vârful etichetat cu n+1 face parte dintr-un ciclu de lungime cel putin 4. Plecăm de la fiecare graf 2 – regulat format cu primele n vârfuri şi transformăm o muchie `[i,j]` în perechea de muchii `[i,n+1]` şi `[n+1,j]`. Pentru că grafurile 2-regulate cu n vârfuri au exact `n` muchii, există exact `n` moduri de a obtine grafuri 2 regulate cu `n+1` varfuri plecând de la unul cu `n` varfuri. Deci A_{n+1} conţine A_n*n.

Se deduce formula de recurenţă

$$A_{n+1} = A_{n-2}*n*(n-1)/2 + A_n*n.$$

Analiza complexităţii. Evident că algoritmul are complexitate `O(n)`(calculul pentru `n!` şi pentru A_n au complexitate liniară)