Tabăra de pregătire a Lotului Naţional de Informatică
Focşani, 15-22 mai, 2010
Baraj 3 Seniori

Problema PPcover, Autor: Mugurel Ionuţ Andreica
Descrierea soluţiei

O soluţie evidentă, dar care are o complexitate de timp mare, este următoarea: se încearcă toate posibilităţile de amplasare a primului paralelipiped (întrucât un paralelipiped este definit de 6 parametri, există $O(N^6)$ astfel de posibilităţi) şi, pentru fiecare posibilitate, se determină al doilea paralelipiped ca fiind paralelipipedul minim ce include celulele cu valoare 1 neacoperite de primul paralelipiped. Determinarea celui de-al doilea paralelipiped poate fi realizată într-o complexitate $O(N^3)$, parcurgând întreg cubul şi reţinând coordonatele minime şi maxime în fiecare dimensiune ale unei celule cu valoare 1 neincluse în primul paralelipiped. Astfel, complexitatea acestei soluţii este $O(N^9)$ pentru fiecare test.

Ambele componente ale soluţiei descrise anterior (amplasarea primului paralelipiped şi determinarea paralelipipedului minim ce include punctele neacoperite de primul paralelipiped) pot fi optimizate independent.

Să considerăm paralelipipedul minim `PP` ce include toate celulele cu valoare 1 din cub. Unul dintre cele două paralelipipede amplasate trebuie neapărat să aibă cel puţin 3 feţe (din 6) în comun cu acesta. Astfel, vom considera că primul paralelipiped este cel care are în comun 3 feţe cu `PP`. Vom considera toate combinaţiile de 3 feţe (există 20 astfel de combinaţii) şi, pentru fiecare combinaţie, vom fixa cele 3 feţe selectate ale primului paralelipiped. Pentru celelalte 3 feţe "libere" ale primului paralelipiped, vom încerca toate cele $O(N^3)$ posibilităţi.

Să considerăm acum că primul paralelipiped este fixat. Trebuie să determinăm coordonatele minime şi maxime în fiecare dimensiune ale unei celule cu valoarea 1 din afara primului paralelipiped. Să observăm că paralelipipedul fixat determină 6 zone (nu disjuncte) în exteriorul său: zona "de deasupra", zona "de dedesubt", zona "din stânga", zona "din dreapta", zona "din faţă" şi zona "din spate". Mai formal, să presupunem că primul paralelipiped este definit de intervalul `[a(i),b(i)]` în dimensiunea `i` ($1 \le i \le 3$). Relativ la dimensiunea `i`, există două zone în exteriorul paralelipedului: zona celulelor cu coordonate în dimensiunea `i` mai mici decât `a(i)` şi zona celulelor cu coordonate în dimensiunea `i` mai mari decât `b(i)`. Astfel, iniţial, vom precalcula, pentru fiecare dimensiune `i` ($1 \le i \le 3$) şi fiecare coordonată posibilă `j` ($0 \le j \le N-1$), următoarele 12 valori:

- `xminLeft[i][j]` = coordonata `x` minimă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai micâ decât `j`
- `xminRight[i][j]` = coordonata `x` minimă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai mare decât `j`
- `yminLeft[i][j]` = coordonata `y` minimă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai micâ decât `j`
- `yminRight[i][j]` = coordonata `y` minimă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai mare decât `j`
- `zminLeft[i][j]` = coordonata `z` minimă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai micâ decât `j`
- `zminRight[i][j]` = coordonata `z` minimă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai mare decât `j`
- `xmaxLeft[i][j]` = coordonata `x` maximă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai micâ decât `j`

- `xmaxRight[i][j]` = coordonata `x` maximă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai mare decât `j`
- `ymaxLeft[i][j]` = coordonata `y` maximă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai micâ decât `j`
- `ymaxRight[i][j]` = coordonata `y` maximă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai mare decât `j`
- `zmaxLeft[i][j]` = coordonata `z` maximă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai micâ decât `j`
- `zmaxRight[i][j]` = coordonata `z` maximă a unei celule (cu valoarea 1) având coordonata în dimensiunea `i` mai mare decât `j`

Putem considera, în mod arbitrar, că dimensiunea 1 corespunde coordonatelor `x`, dimensiunea 2 coordonatelor `y`, iar dimensiunea 3 coordonatelor `z`. Toate aceste `3xNx12=36xN` valori pot fi calculate într-o complexitate $O(N^3)$ (cu constanta 36). Să luăm, de exemplu, `xminLeft[i][j]`. Vom avea `xminLeft[i][j] = min{xminLeft[i][j-1], min{coordonata x a unei celule cu valoare 1 având coordonata din dimensiunea i egală cu j-1}}`.

Cu aceste valori precalculate, putem determina coordonatele `x`, `y`, şi `z` minime şi maxime ale paralelipipedului al doilea, în felul următor. Să presupunem că primul paralelipiped este determinat de intervalul `[a(i),b(i)]` în dimensiunea `i` ($1 \le i \le 3$). Coordonata `x` minimă va fi egală cu $\min_{1 \le i \le 3}$`{xminLeft[i][a(i)],xminRight[i][b(i)]}`.
Pentru celelalte coordonate (minime sau maxime) se procedează într-un mod similar. Astfel, o dată ce primul paralelipiped este fixat, putem determina în timp `O(1)` amplasarea celui de-al doilea paralelipiped (constanta din `O(1)` este tot `36`).

Pentru obţinerea punctajului maxim cele două tipuri de optimizări trebuie implementate împreună, obţinându-se o soluţie de complexitate $O(N^3)$ pe test (dar cu o constantă de ordinul `36x20=720`).