DESCRIEREA SOLUțIILOR, OLIMPIADA JUDEțEANă DE INFORMATICă, CLASA A VI-A

Problema CMMDC

Propusă de: prof. Dan Pracsiu – Liceul Teoretic „Emil Racoviță"

Deoarece sunt folositori în rezolvarea celor trei cerințe, construim de la început doi vectori de lungime n, st și dr cu semnificația următoare:

- st_i va reține cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_i$
- dr_i va reține cel mai mare divizor comun al numerelor $a_i, a_{i+1}, \ldots a_n$.

Vectorul st se va construi de la stânga la dreapta, iar vectorul dr de la dreapta la stânga, după relațiile:

- $st_1 = a_1$
- $st_i = cmmdc(st_{i-1}, a_i)$, pentru $2 \le i \le n$
- $dr_n = a_n$
- $dr_i = cmmdc(dr_{i+1}, a_i)$, pentru $1 \le i \le n-1$

Cerința 1.

Soluție brută. Se calculează cmmdc-ul prin factorizare, sau se caută manual cmmdc-ul și se verifică dacă acesta este divizor pentru fiecare element din șir și se păstrează maximul găsit dintre toți candidații.

Pentru această rezolvare brută a primei cerințe, se pot obține 16 puncte.

Soluție optimă. Dacă se folosește algoritmul lui Euclid pentru calcularea soluției, răspunsul este st_n (sau dr_1).

Complexitatea temporală este $\mathcal{O}(n \cdot log_2(max))$.

Pentru rezolvarea corectă a primei cerințe, se pot obține 36 de puncte.

Cerința 2.

Soluție brută. Se calculează pentru fiecare $1 \le i \le n$, care este cmmdc-ul dacă eliminăm elementul a_i și se păstrează rezultatul maxim.

Complexitatea temporală este $\mathcal{O}(n^2 \cdot log_2(max))$.

Pentru rezolvarea brută a celei de-a doua cerințe, se pot obține 20 de puncte.

Soluție optimă. Trebuie să aflăm cmmdc-ul maxim dacă se elimină exact un număr din șir.

Pentru a realiza acest lucru, parcurgem șirul și pentru fiecare poziție i:

- dacă se elimină a_1, atunci cel mai mare divizor comun este dr_2
- dacă se elimină a_n, atunci cel mai mare divizor comun este st_{n-1}
- dacă se elimină a_i, pentru $2 \le i \le n-1$, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor rămase este $cmmdc(st_{i-1}, dr_{i+1})$

Dintre toate aceste valori determinate aflăm maximul.

Complexitatea temporală este $\mathcal{O}(n \cdot log_2(max))$.

Pentru rezolvarea corectă a celei de-a doua cerințe, se pot obține 42 de puncte.

Cerința 3.

Soluție brută. Se calculează pentru fiecare pereche ordonată $1 \le i < j \le n$, care este cmmdc-ul dacă eliminăm elementul a_i și a_j și se păstrează rezultatul maxim.

Complexitatea temporală este $\mathcal{O}(n^3 \cdot log_2(max))$.

Pentru rezolvarea brută a celei de-a doua cerințe, se pot obține 10 puncte.

Soluție optimă. Pentru a putea face calculele mai ușor, e bine să știm faptul că $cmmdc(x,0) = x$, pentru orice număr natural x.

Trebuie să aflăm cmmdc-ul maxim dacă se elimină exact două elemente ale șirului.

Fie a_i și a_j elementele pe care le eliminăm, unde $i < j$. Ne vor trebui atunci valorile lui $cmmdc(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$, lui $cmmdc(a_{i+1}, \ldots, a_{j-1})$ și lui $cmmdc(a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Știm însă că $cmmdc(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}) = st_{i-1}$, iar $cmmdc(a_{j+1}, \ldots, a_n) = dr_{j+1}$.

Mai trebuie să aflăm $c = cmmdc(a_{i+1}, \ldots, a_{j-1})$ în mod eficient.

Parcurgem șirul de la primul până la penultimul element și pentru fiecare a_i, $1 \le i \le n-1$:

- plecăm cu $c = 0$
- parcurgem cu j secvența $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$
- când $j = i+1$, atunci $c = 0$
- când $j = i+2$, atunci $c = cmmdc(c, a_{i+1})$
- când $j = i+2, atuncic = cmmdc(c, a_{i+1})$
- ...
- la un pas oarecare j, $c = cmmdc(c, a_{j-1})$

La fiecare pas j se actualizează valoarea maximă obținută din eliminarea lui a_i și a_j:
$M = max(cmmdc(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}), cmmdc(a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}), cmmdc(a_{j+1}, \ldots, a_n))$

Complexitatea temporală este $\mathcal{O}(n^2 \cdot log_2(max))$.

Pentru rezolvarea corectă a primei cerințe, se pot obține 22 de puncte.

Problema Vecine

Propusă de: prof. Rodica Pintea – Liceul Teoretic „Radu Vlădescu”

Cerința 1. Două cifre alăturate din șir, c_i și c_{i+1}, sunt consecutive dacă $c_i + 1 = c_{i+1}$, pentru orice $1 \le i \le n-1$. Se parcurge șirul de cifre și se contorizează aceste perechi.

Complexitatea temporală este $\mathcal{O}(n)$.

Pentru rezolvarea corectă a primei cerințe, se pot obține 20 de puncte.

Cerința 2. Două numere sunt vecine dacă sunt consecutive și dacă primul număr este cu exact 1 mai mare decât cel de-al doilea.

O observație ce trebuie făcută este că două numere consecutive au fie același număr de cifre, fie diferă prin 1. Cazurile când numărul cifrelor diferă sunt când primul număr este de forma $\underbrace{99\ldots9}_{\text{de } k \text{ ori}}$, iar cel de-al doilea este de forma $1\underbrace{00\ldots0}_{\text{de } k \text{ ori}}$.

Astfel, problema se poate rezolva cu următorul algoritm:

(1) Pentru fiecare $1 \le k \le 10$ fixăm lungimea primului număr la k.
(2) Pentru fiecare poziție posibilă $1 \le i \le n-2k+1$, se verifică dacă $X+1=Y$, unde $X = \overline{c_i c_{i+1} c_{i+2} \ldots c_{i+k-1}}$ și $Y = \overline{c_{i+k} c_{i+k+1} c_{i+k+2} \ldots c_{i+2k-1}}$, dacă X și Y au aceeași lungime
(3) Pentru fiecare poziție posibilă $1 \le i \le n-2k$, se verifică dacă $X+1=Y$, unde $X = \overline{c_i c_{i+1} c_{i+2} \ldots c_{i+k-1}}$ și $Y = \overline{c_{i+k} c_{i+k+1} c_{i+k+2} \ldots c_{i+2k}}$, dacă Y are cu o cifră mai mult decât X.
(4) dacă unul dintre cazurile de mai sus sunt adevărate se actualizează maximul găsit cu X, dacă este cazul.

Complexitatea temporală a acestui algoritm este $\mathcal{O}(n \cdot k_{max})$, unde $k_{max} = 10$, reprezintă lungimea maximă posibilă a unui număr.

Echipa

Problemele pentru această etapă au fost pregătite de:

- prof. Dan Pracsiu – Liceul Teoretic ,,Emil Racoviță"
- prof. Alina Pintescu – Colegiul Național ,,Gheorghe Șincai"
- prof. Violeta Grecea – Colegiul Național de Informatică ,,Matei Basarab"
- prof. Cerasela Daniela Cardaș – Colegiul Național ,,A.T. Laurian"
- prof. Dan Octavian Dumitrașcu – Colegiul Național ,,Dinicu Golescu"
- prof. Georgeta Balacea – Colegiul Național Vasile Alecsandri
- prof. Dorin-Mircea Rotar – Colegiul Național ,,Samuil Vulcan"
- prof. Flavius Boian – Colegiul Național ,,Spiru Haret"
- prof. Costineanu Raluca – Colegiul Național ,,Ștefan cel Mare"
- stud. Liviu Armand Gheorghe – Universitatea București, Facultatea de Matematică și Informatică
- stud. Ioan Cristian Pop – Universtiatea Politehnica București
- prof. Rodica Pintea – Liceul Teoretic ,,Radu Vlădescu"
- stud. Theodor Gabriel Tulbă Lecu – Universitatea Politehnica Bucuresti
- Cristian Frâncu – Nerdvana