Descrierea soluției – pascal

autor prof. Cheşcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Costin Nenițescu" Buzău

Varianta 1 ("brute force")

Se generează termenii triunghiului lui Pascal folosind o matrice sau 2 vectori, cu ajutorul binecunoscutei formule de recurență C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1). Se verifică apoi câți dintre aceștia sunt multipli de p. Acesta variantă are complexitate $O(n^2)$.

Varianta 2 (teorema lui Legendre)

Pentru fiecare termen al triunghiului se calculeaza exponentul la care apare p în n!, în k! și respectiv în (n-k)! adică, cu alte cuvinte care este exponentul lui p în C(n,k). Dacă această valoare este nenulă înseamnă că termenul respectiv este multiplu de p. Acesta variantă are complexitate $O(n^2)$.

Varianta 3

Se utilizează următorul rezultat matematic:

Numărul termenilor din șirul numerelor C(n,0),C(n,1), … ,C(n,n) care sunt multipli de p este egal cu:

$$n+1 - (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$$ [1]

unde n_1, n_2,…, n_k sunt cifrele scrierii lui n în baza p.

Spre exemplu dacă n = 7 și p = 2 atunci în șirurile:

- C(2,0),C(2,1), C(2,2) sunt 2+1−(1+1)(0+1)=**1** multipli de 2, deoarece 2(în baza 2) = 10
- C(3,0),C(3,1),...,C(3,3) sunt 3+1−(1+1)(1+1)=**0** multipli de 2, deoarece 3(în baza 2) = 11
- C(4,0),C(4,1),...,C(4,4)sunt 4+1−(1+1)(0+1)(0+1)=**3** multipli de 2, deoarece 4(în baza 2) = 100
- C(5,0),C(5,1),...,C(5,5)sunt 5+1−(1+1)(0+1)(1+1)=**2** multipli de 2, deoarece 5(în baza 2) = 101

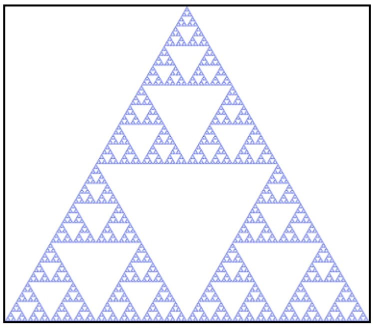
[1] Gazeta Matematica nr. 4/1983, pag. 176, Probleme pregătitoare pentru O.I.M., autor Ioan Tomescu

- C(6,0),C(6,1),...,C(6,6)sunt 6+1−(1+1)(1+1)(0+1)=**3** multipli de 2, deoarece 6(în baza 2) = 110
- C(7,0),C(7,1),...,C(7,7)sunt 7+1−(1+1)(1+1)(1+1)=**0** multipli de 2, deoarece 8(în baza 2) = 111

În total vor fi 1+0+3+2+3+0 = 9 multipli de 2 în primele 8 rânduri ale triunghiului lui Pascal.

Acest rezultat matematic reduce ordinul de complexitate de la $O(n^2)$ în cazul variantelor anterioare, la O(n*log n).

Varianta 4



Se calculează termenii din triunghiul lui Pascal modulo p şi se observă apariţia unor „modele” în formarea acestuia. Mai precis elementele nule din triunghi împreună cu elementele nenule formează un fractal cunoscut sub numele de triunghiul lui **Sierpinski.**

Acum se poate explica şi restricţia impusă şi anume că n+1 trebuie să fie o putere a lui p, astfel încât fractalul să se încheie cu un triunghi complet. Determinarea numărului cerut de problemă se poate face acum recurent cu relaţia:

$$M(x) = \begin{cases} 0, dacă\ x = 0 \\ p*(p+1)/2*M(x-1)+(p-1)*p/2*t*(t-1)/2, dacă\ x > 0 \end{cases}$$

unde t este o putere a lui p, iar x este un nivel complet al fractalului. Ordinul de complexitate al acestei soluţii este O(log n).

Varianta 5

Prof. Pit-Rada Ionel-Vasile
Colegiul Naţional "Traian"

Complexitate timp : O(logpn)
Complexitate spatiu : O(1)

Se observă următoarea relaţie de recurenţă :

$$y[1] = p - 1$$

$$y[i] = \frac{p \cdot (p+1)}{2} y[i-1] + p - 1 + \frac{p \cdot (p-1)}{2} \cdot \frac{(p^{i-1} - 1) \cdot (p^{i-1} - 2)}{2}$$

pentru i = 2, 3, …, $\log_p(n+1)$

Se va afişa y[$\log_p(n+1)$]-n