cover - soluţie

Problema se rezolvă prin metoda programării dinamice.

În mod evident, intervalele care le conţin pe altele sunt redundante şi pot fi eliminate printr-o sortare. Intervalele rămase $[a_1, b_1]$ $[a_2, b_2]$ ... $[a_K, b_K]$ vor satisface inegalităţile $a_i<a_{i+1}$ şi $b_i<b_{i+1}$ pentru orice $1\le i<K$. Vom calcula elementele vectorului A cu următoarea semnificaţie:

`A[i]` = costul minim pentru a introduce elementul `i` în acoperire astfel încât toate intervalele `x` cu $b_x<i$ să fie acoperite.

`A[i]` se calculează interând după cel mai mare `j<i` care poate fi introdus în acoperire astfel încât să nu existe intervale $[a_x, b_x]$ cu $j<a_x$ şi $b_x<i$. Această soluţie are complexitatea `O(N lg N + NL)` şi ar fi obţinut 40 de puncte. O îmbunătăţire constă în folosirea faptului că acel `j` se află pe o poziţie cuprinsă între extremitatea stângă a ultimului interval având $b_x < i$ şi `i-1`. Astfel problema se reduce la efectuarea unui query de minim pe interval. O rezolvare ce foloseşte arbori de intervale ar fi obţinut 70-80 de puncte.

O ultimă observaţie este aceea că datorită inegalităţilor care permit o relaţie de ordine totală între intervalele rămase, odată cu incrementarea lui i, poziţia de început a intervalului pe care se face query poate cel mult să crească. Aceasta permite folosirea unui deque cu ajutorul căruia timpul necesar query-ului este `O(1)`. Această soluţie are complexitatea `O(N lg N + L)` şi obţine punctajul maxim.

munte – soluţie

Secvenţa de numere
1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049, 518859, 2646723, 13648869, 71039373, 372693519, 1968801519, 10463578353, 55909013009, 300159426963, 1618362158587, 8759309660445, 47574827600981, 259215937709463, 1416461675464871, ...
se numeşte "secvenţa numerelor mici ale lui Schroder" sau "a numerelor Calalan generalizate" şi ele contorizează numărul de drumuri laticiale de semilungime `n-1` de la `(0,0)` la `(2n-2,0)` cu paşi de tipurile `O=(2,0)`, `S=(1,1)`, şi `J(1,-1)`, drumuri care nu trec sub axa OX şi nu au vârfuri de înălţime 1. Astfel:

`Sch[1]=3`, deoarece dintre cele 6 drumuri de semilungime 2: `OO`, `SOJ`, `SSJJ`, `OSJ`, `SJO` şi `SJSJ`, numai primele 3 nu au vârfuri de înălţime 1.

Formula de recurenţă care furnizează aceste valori este dată de:
`Sch[1]=Sch[2]=1`
`Sch[n]=(3(2n-3)Sch[n-1]-(n-3)Sch[n-2])/n   n>2`

O altă modalitate de a determina aceste valori este următoarea:
- se porneşte de la valoarea 1
- fiecare valoare `k` din şirul precedent se înlocuieşte cu secvenţa 1,2,...,k,k+1,k,...,2,1

lungimea şirului obţinut după `n` paşi este chiar `Sch[n+2]`.

Exemplu:

1	lungime 1
121	lungime 3
121 12321 121	lungime 11
121 12321 121 121 12321 1234321 12321 121 121 12321 121	lungime 45
...	

Resurse bibliografice:
http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A001003

role – soluţie

Algoritmul propriu-zis:

Considerând că pe rola goală se găseşte o bandă fictivă numerotată cu 0 şi ignorând sensul de bobinare, aşezarea benzilor pe role este o permutare de *N*+1 elemente. Transferul unei benzi de pe o rolă pe alta corespunde cu o transpoziţie.

Soluţia cuprinde două etape:

1. În prima etapă, reunim ciclurile permutării iniţiale, cu excepţia celor formate din benzile aşezate normal (neinversat) pe rola proprie. Observăm că, în general, prin interschimbarea a două elemente din cicluri diferite, ciclurile se unesc, iar prin interschimbarea a două elemente din acelaşi ciclu, ciclul se desparte in două.

Luăm deci pe rând toate ciclurile şi încercăm să le unim cu ciclul ce cuprinde banda 0. Avem patru cazuri:

a) ciclu de lungime 1 (adică banda e pe rola proprie) cu banda înfăşurată invers. În acest caz mutăm singura banda din ciclu pe rola goală.

b) ciclu de lungime 1 cu banda înfăşurată normal. Aceste benzi le lăsăm pe loc pâna la final.

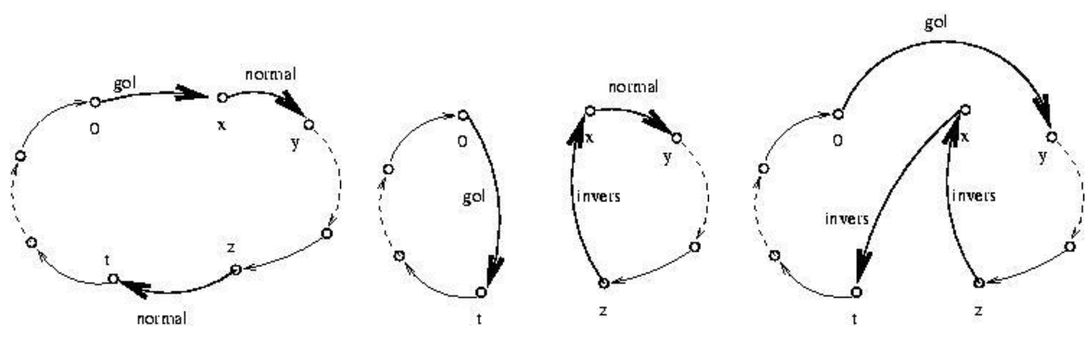
c) ciclu de lungime mai mare decât 1, în care există cel puţin o bandă înfăşurată normal (dar evident nu pe rola proprie). În acest caz mutăm pe rola goală banda înfăşurată normal găsită.

d) ciclu de lungime mai mare decât 1, în care toate benzile sunt înfăşurate invers. În acest caz alegem o bandă oarecare din ciclu şi o mutăm pe rola goală.

2. În a doua etapă, eliminăm elementele din ciclu fomând cicluri de lungime 1. Luăm în mod repetat banda ce şi-ar avea locul pe rola goală. Avem două cazuri:

a) banda este bobinată invers. În acest caz o transferăm pe rola goală şi o eliminăm din discuţie.

b) banda este bobinată normal (vezi figurile de mai jos; un arc de la *x* la *y* arată faptul că banda *x* se află pe rola *y*; rola *x* este goală iar banda *x* este bobinată normal pe rola *y*). În acest caz, căutăm încă o bandă bobinată normal (o notăm cu *z*); existenţa acesteia este demonstrată mai jos. Mutăm banda *z* pe rola goală şi apoi mutăm banda *x* pe rola astfel eliberată. În urma acestor două mutări, rămâne tot un singur ciclu cu aceleaşi benzi, dar cu două benzi bobinate normal în minus.



Condiţiile de existenţă a soluţiei:

Observăm că fiecare operaţie este o transpoziţie între elementul 0 şi un alt element al permutării. Ştim că fiecare transpoziţie inversează paritatea permutării. De asemenea, fiecare operaţie inversează paritatea numărului de benzi inversate. Configuraţia finală este permutarea identică, care este pară, cu toate benzile dispuse normal, adică numărul benzilor inversate egal cu zero şi deci par. Prin urmare, deoarece configuraţia iniţială are soluţie, rezultă că paritatea permutării coincide cu paritatea numărului de benzi inversate, atât în configuraţia iniţială cât şi după fiecare operaţie.

Să demonstrăm acum existenţa celei de-a doua benzi bobinate normal la punctul 2b din algoritmul de rezolvare. Paritatea unei permutări este egală cu paritatea sumei dintre numărul elementelor şi numărul ciclurilor. La pasul 2b din algoritm există un singur ciclu de lungime diferită de 1; ca urmare paritatea permutării se vede imediat că este inversa parităţii numărului de elemente din ciclu, adică, deoarece elementul 0 face parte din ciclu, paritatea permutării este egală cu paritatea numărului de benzi reale din ciclu. Aceasta coincide, conform condiţiei necesare de existenţă a soluţiei, cu paritatea numărului de benzi inversate, de unde rezultă că numărul de benzi neinversate din ciclu este par. În consecinţă, dacă există o bandă neinversată în ciclu, sigur mai există cel puţin una.

Ca urmare a raţionamentului de până aici, o condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa soluţiei este ca paritatea permutării să coincidă cu paritatea numărului de benzi inversate. Necesitatea a fost demonstrată aici iar suficienţa este demonstrată prin algoritmul de construcţie a soluţiei.

Numărul de operaţii:

Pentru o configuraţie notăm:

N_{00} – numărul de benzi situate pe rola proprie şi înfăşurate normal;

N_{01} – numărul de benzi situate pe rola proprie şi înfăşurate invers;

N_{10} – numărul de benzi situate pe altă rolă şi înfăşurate normal;

N_{11} – numărul de benzi situate pe altă rolă şi înfăşurate invers;

N_b – numărul ciclurilor „rele”. Un ciclu îl numim „rău” dacă nu este de lungime 1, nu conţine rola goală şi toate benzile componente sunt inversate.

$M = 2 \cdot N_b + 3 \cdot N_{01} + 2 \cdot N_{10} + N_{11}$.

1. Soluţia prezentată efectuează M operaţii. Analizăm pentru fiecare pas al algoritmului numărul de operaţii efectuate şi diferenţa dintre M-ul configuraţiei iniţiale şi M-ul configuraţiei rezultate:

- 1a) o operaţie, N_{01}scade cu 1, N_{10} creşte cu 1, ca urmare M scade cu 1;
- 1b) nu se schimbă nimic;
- 1c) o operaţie, N_{10} scade cu 1, N_{11} creşte cu 1, rezultat M scade cu 1;
- 1d) o operaţie, N_b scade cu 1, N_{11} scade cu 1, N_{10} creşte cu 1, rezultat M scade cu 1;
- 2a) o operaţie, N_{11} scade cu 1, N_{00} creşte cu 1, rezultă că M scade cu 1;
- 2b) două operaţii, N_{10} scade cu 2, N_{11} creşte cu 2, rezultă că M scade cu 2.

2. Orice rezolvare are nevoie de cel puţin M operaţii. Termenii $3 \cdot N_{01} + 2 \cdot N_{10} + N_{11}$ rezultă din faptul că fiecare bandă inversată ce nu se află pe rola proprie are nevoie de cel puţin o operaţie pentru a ajunge pe rola proprie, fiecare bandă neinversată ce nu se află pe rola proprie are nevoie de cel puţin două operaţii, iar fiecare bandă inversată aflată pe rola proprie are nevoie de cel puţin trei operaţii. Termenul $2 \cdot N_b$ rezultă din faptul că pentru fiecare ciclu „rău” există o primă bandă a ciclului ce trebuie mutată; aceasta nu poate fi mutată direct pe rola ei deoarece rola ei este ocupată în acel moment. Ca urmare, banda respectivă ajunge neinversată pe altă rolă şi ca urmare mai are nevoie de încă cel puţin două operaţii. Rezultă cel puţin trei operaţii, una cuprinsă in termenul N_{11} şi celelalte două în termenul N_b.