Problema Sport – Radu Voroneanu – O(T * 2^N) – 40 puncte

De acum încolo ne vom referi la N și la K pentru o anumită zi, algoritmul fiind repetat de T ori pentru fiecare dintre zile. Vom nota cu A un șir de N elemente reprezentând ordinea în care elevii sunt eliminați din șir.

Pornim de la o mică observație: O condiție necesară și sufiecientă pentru ca A[1] să fie eliminat prima dată este :

K = A[1] (mod 2*N) sau(exclusiv) K = 2 * N – A[1] + 1 (mod 2 *N).

Acest lucru este observat deoarece modul în care numărăm până în eliminarea primul are o perioadă de 2*N, iar A[1] poate fi eliminat fie venind în cursul primei parcurgeri de la stânga la dreapta, fie la revenirea numărătorii de la dreapta la stânga. O dată cu eliminarea acestuia din șir, întâlnim aceeași situație pentru A[2], ... A[N] cu două mici schimbări : poziția și direcția de start se schimbă, iar dimensiunea șirului nu mai este N ci este N – i + 1 (pentru un A[i] general). Cu alte cuvinte, pentru fiecare dintre A[1], A[2], A[3], ... A[N] vom obține două ecuații posibile de genul

K = X_i (mod 2 * (N – i + 1)) sau(exclusiv) K = Y_i (mod 2 * (N – i + 1))

Unde X_i = numărul de pași necesari pentru a ajunge la A[i] după eliminarea primilor (i - 1) elevi și Y_i = numărul de pași necesari pentru a ajunge a doua oară prin A[i] după eliminarea primilor (i - 1) elevi. Este de remarcat faptul că X_i și Y_i nu sunt constante, ci depind de alegerile pe care le-am făcut în cadrul primelor (i - 1) eliminări.

Ne vine acum ideea să folosim metoda backtracking pentru a alege ecuațiile la fiecare pas și să calculăm pe parcurs X și Y. Fie Z_i alegerea la pasul i. La final rămâne să rezolvăm un set de N ecuații. Din teorema chineză a resturilor, avem că:

Dacă există soluție care satisface setul de ecuații atunci soluția va satisface și o formă mai generală:

K = A (mod B) , unde B = cel mai mic multiplu comun al numerelor (2 * N) , (2 * N - 2),..., 2

Tot ce ne rămâne acum de făcut e să calculăm acel A pentru fiecare set posibil de ecuații și să alegem minimul dintre toate soluțiile.

Fie K = C(i) (mod D(i)) ecuația generală care satisface primele i ecuații. Dorim acum să obținem una generală care satisface primele i+1 ecuații.

K = C(i) (mod D(i))
K = Z_{i+1} (mod 2 * (N – i))

⇨ K = C(i + 1) (mod D(i + 1))

O condiție necesară și suficientă pentru a obține soluție este ca (tot din teorema chineză a resturilor)

C(i) = Z_{i+1} (mod cmmdc(D(i), 2 * (N - i))) (*)

Acum pentru a rezolva efectiv cele două ecuații și să le restrângem într-una singură nu este nevoie să folosim formula de la teorema chineză a resturilor. O observație foarte importantă este ca 2 * (N - i) <= 2 * N <= 2 * 42 (deci mici). Din prima ecuație setul de soluții bune sunt C(i), C(i) + D(i), C(i) + 2 * D(i), ... Dacă pentru fiecare vom calcula restul împărțirii lor la 2 * (N – i) se garantează din principiul cutiei și din existența unice a soluției că vom găsi un rest Z_{i+1} în primele 2 * (N - i) numere. Tot ce rămâne acum de făcut este să adăugăm D(i) la C(i) până ce acesta satisface și ecuația 2. Evident, D(i+1) = cmmmc(D(i), 2 * (N - i)).

Problema Sport – Radu Voroneanu – $O(T * N^2)$ – 100 puncte

O mică optimizare a metodei backtracking reprezintă calcularea valorilor C(i) si D(i) pe parcursul algoritmului, și oprirea recursiei dacă (*) nu este satisfăcută. De altfel la fiecare pas al recursiei, doar una dintre cele 2 ecuații vor fi corecte. Cum la fiecare pas vom alege fix o ecuație, backtrackingul va deveni liniar. Un factor de N este necesar pentru a determina efectiv Z_i și pentru determinarea C(i)-ului la fiecare pas al backtrackingului aducând soluția la o complexitate de $O(T * N^2)$.

Vom demonstra acum de ce la fiecare pas al recursiei doar una din ecuații poate fi satisfăcută.

Să presupunem că am calculat C(i) și D(i). Știm că acesta înglobează o ecuație de genul

$$K = C(i) \pmod{2 * (N – i + 1)}$$

Și dorim să adăugăm o ecuație

$$K = Z_{i+1} \pmod{2 * (N - i)}.$$

Să ne uităm la ce se întâmplă cu (*). Cmmdc-ul între 2 * (N – i + 1) și 2 * (N - i) este 2. Ceea ce înseamnă că (*) devinde $C(i) = Z_{i+1} \pmod 2$ (condiție necesară pentru ca ecuația generală să fie satisfăcută). Vom demonstra că $X_{i+1} \neq Y_{i+1} \pmod 2$, ceea ce înseamnă că numai una din ecuații este o posibilă soluție. Reamintim ca X_{i+1} reprezintă numărul de numărări necesare pentru a atinge pentru prima dată A[i+1] si Y_{i+1} reprezintă numărul de numărări necesare pentru a atinge a doua oară A[i+1]. Pentru a atinge a doua oara A[i+1] este necesar ca după prima atingere (in X_{i+1} mutări) să ajungem la o margine apoi să ne întoarcem pe aceeași poziție. Dacă până ajungem la margine facem R mutări, atunci la întoarecere vom face R+1 mutări. Deci $Y_{i+1} – X_{i+1} = 2 * R + 1$ ceea ce înseamnă că au parități diferite. Să luăm un exemplu

Dacă elevii rămași ar fi 1 3 5 6 7 iar poziția care tocmai este eliminată este 1. Să presupunem că următorul eliminat este 5. Avem de ales între a face 2 mutări și a ajunge pe 5, sau să trecem de 5 și să il atingem la întoarcere. Asta înseamnă că trebuie să numărăm în felul următor 6 7 (prin notație R) 7 6 5 (prin notație R + 1). Deci fie facem 2 fie facem 7 pași (care au parități diferite).