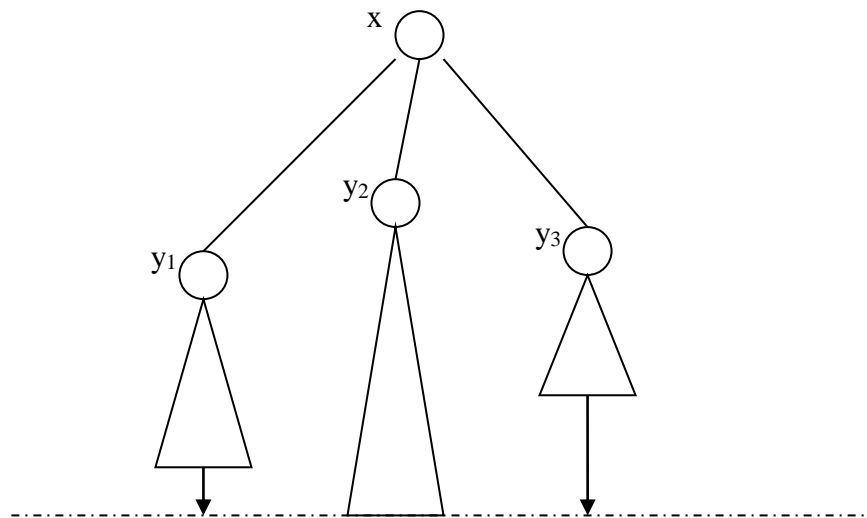


Problema Arb, studenți Marius Stroe și Airinei Adrian **Descrierea soluției**

Vom rezolva întâi problema pentru cazul în care costurile sunt toate egale cu 1, după care o vom modifica pentru a rezolva și cazul costurilor diferite.

Numim un arbore pentru care distanțele de la rădăcină la orice frunză sunt egale ca fiind un arbore echilibrat.

Fie H_x înălțimea arborelui cu rădăcina în x , adică distanța maximă de la nodul x la o frunză. Se observă că nu are niciodată sens să mărim înălțimea arborelui. Cum la sfârșit vrem ca arborele să fie echilibrat, vom încerca să aducem toate frunzele la distanța H_x față de rădăcină. Într-un arbore echilibrat, orice subarbore al lui va fi tot echilibrat. Pentru a echilibra arborele cu rădăcina în nodul x , vom încerca întâi pentru fiecare fiu y , al lui x , să echilibrăm subarborii cu rădăcina în y astfel încât distanța de la y la orice frunză din subarborii y să fie egală cu H_y . După ce toți subarborii lui x sunt echilibrați vom încerca să echilibrăm nodul x , măbind înălțimea fiilor lui x . Altfel spus, vom mări toate muchiile (x, y) , unde y este fiu al lui x , astfel încât $d + H_y = H_x$, unde d este distanța muchiei (x, y) . Vezi figura de mai jos. Aceasta soluție are complexitate $O(N)$ și obține 50% din punctaj.



Pentru 100% din punctaj, vom folosi aceeași strategie dar puțin modificată. Pentru fiecare arbore cu rădăcina în nodul x , vom echilibra fiecare subarbore cu rădăcina în y , unde y este fiu al lui x , și apoi echilibrăm arborele lui x măbind înălțimea fiilor săi. Singura problemă este că acum nu suntem siguri că obținem costul minim pentru a mări înălțimea arborelui y , măbind muchia (x, y) . Pentru a rezolva această problemă vom calcula $Cinc[x]$ costul minim pentru a incrementa (a mări cu o unitate) înălțimea arborelui cu rădăcina în nodul x . Astfel, costul pentru a mări cu K unități înălțimea arborelui lui x va fi $K * Cinc[x]$. Având aceste valori putem ușor aplica strategia de mai sus dar cu costurile puțin modificate. Vom calcula aceste valori $Cinc$ într-o manieră "bottom-up", de la frunze la rădăcină. Când suntem în nodul x și vrem să aflăm $Cinc[y]$, unde y este fiu al lui x , putem observa că $Cinc[y]$ ori este costul muchiei (x, y) ori $Cinc[y]$ aflat înainte. Astfel când suntem la x , $Cinc[y] =$

$\text{MIN}(C_{(x, y)}, \text{Cin}[y])$, unde $C_{(x, y)}$ este costul muchiei de la x la y . De asemenea, când ne aflăm la nodul x , $\text{Cinc}[x] = \text{Sumă din Cinc}[y]$, unde y este fiu al lui x .

Per total complexitatea soluției va fi $O(N)$.