center – soluție

Mugurel Andreica

Solutie 1 - O(N·log(distanta)) (50 puncte)

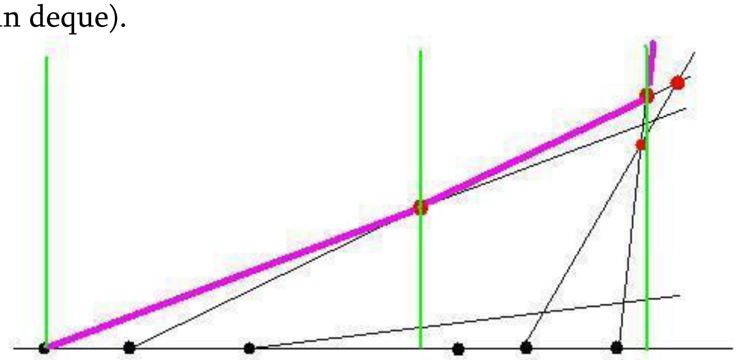
Se cauta binar distanta mini-maxima DW. Fiecarui punct i i se asociaza un interval $[x_i - L - DW/w_i, x_i + DW/w_i]$, reprezentand intervalul pe axa OX in care se poate afla capatul stanga al intervalului de lungime L ce trebuie amplasat, pentru ca distanta ponderata pana la punctul i sa fie cel mult DW. Se verifica apoi daca exista un punct care sa fie inclus in toate cele N intervale determinate (comparand cel mai mic capat dreapta al unui interval cu cel mai mare capat stanga al unui interval).

Solutie 2 - O(N·log(x)) (50 puncte)

Capatul stanga x al intervalului de lungime L este, evident, undeva in intervalul $[0,x_N-L]$. Definim o functie D(x)=distanta ponderata maxima de la unul din cele N puncte la intervalul [x,x+L]. Aceasta functie este *unimodala* (are un singur minim, undeva la un $x=x_0$, iar pentru $x<x_0$, functia este descrescatoare, iar pentru $x>x_0$, functia este crescatoare). Se poate folosi cautare ternara sau cautare binara pe "derivata" functiei dD (dD(x)=D(x+ε)-D(x)).

Solutie 3 - O(N) (100 puncte)

In prima etapa, vom asocia fiecarui punct i o semidreapta in plan care pleaca de la punctul $(x_i,0)$ si are panta w_i: $y(x)=x_i+w_i\cdot(x-x_i)$. Vom parcurge punctele de la stanga la dreapte si vom determina « upper envelope »-ul celor N semidrepte in timp O(N) (folosind un deque).



"Upper envelope"-ul celor N semidrepte consta din K=O(N) puncte $a_1, a_2, \ldots, a_K$ si K-1 indici $f_1, f_2, \ldots, f_{K-1}$, unde:

- $a_1=x_1$
- $a_K=x_N$
- oricare 2 intervale $[a_i,a_{i+1}]$ sunt disjuncte

- reuniunea intervalelor $[a_i,a_{i+1}]$ este intervalul $[x_1,x_N]$
- semidreapta asociata punctului f_i are valoarea y maxima pe intervalul $[a_i,a_{i+1}]$

Acest "upper envelope" este folositor pentru a determina in O(1) distanta ponderata maxima de la un punct din stanga unui interval I=[x,x+L] pana la I, pentru orice valoare a lui x (daca x este in intervalul $[a_i,a_{i+1}]$, atunci distanta ponderata maxima este egala cu valoarea y a semidreptei f_i in punctul x).

Vom realiza apoi aceeasi operatie de determinarea a "upper envelope"-ului, pentru cazul cand semidreptele sunt orientate in sensul negativ al axei OX (y-ul lor creste pe masura ce x-ul scade) si vom obtine un set de intervale $[b_i,b_{i+1}]$ si un set de indici g_i. Intervalele $[b_i,b_{i+1}]$ sunt folositoare pentru a determina in O(1) distanta ponderata maxima de la un punct din dreapta unui interval I=[x-L,x] pana la I, pentru orice valoare a lui x (daca x este in intervalul $[b_i,b_{i+1}]$, atunci distanta ponderata maxima este egala cu valoarea y a semidreptei g_i in punctul x).

Vom parcurge acum cele O(N) intervale $[a_i,a_{i+1}]$ cu un capat stanga x, iar capatul dreapta x+L va parcurge intervalele $[b_j,b_{j+1}]$. Vom avea O(N) intervale candidate de forma [xleft, xleft+d] si [xright, xright+d], complet incluse in intervalele $[a_i,a_{i+1}]$, respectiv $[b_j,b_{j+1}]$ si va trebui sa determinam pozitia capatului stanga in intervalul [xleft, xleft+d], astfel incat maximul dintre distantele ponderate ale unui punct din stanga si din dreapta intervalului de lungime L sa fie minim. Vom avea 3 cazuri – in 2 din ele, minimul se afla in capete, iar in al treilea caz, minimul se gaseste cand valoarea y a semidreptei ce determina distanta ponderata maxima din stanga este egala cu valoarea y a semidreptei ce determina distanta ponderata maxima din dreapta. Dintre cele O(N) distante candidate considerate, vom alege minimul.