Problema 1 buldo

Descriere a unei/unor soluții posibile

Propunător:
Prof. Marius Nicoli – C.N. “Frații Buzești” - Craiova

Soluția 1

Pentru fiecare înălțime posibilă la care se poate fixa lama la prima fâșie simulăm deplasarea la dreapta. Timp de executare de ordin H*N (H = înălțimea maximă pentru fâșii iar N = numărul de fâșii). Aceteastă soluție nu se încadrează în timp pe toate testele.

Soluția 2

Observăm că putem căuta binar rezultatul, având o înbunătățire semnificativă deoarece nu mai suntem obligați să testăm toate înălțimile posibile.

Soluția 3

Dacă la poziția curentă i considerăm s = suma valorilor din șir, de la început și până la poziția i, atunci s/i este înălțimea maximă la care putem trece cu lama pe acolo. Soluția este reprezentată minimul dintre valorile s/i. Timpul de executare este de ordin N.

Implementarea corectă a unor abordări ca a doua și a treia de mai sus aduc punctaj maxim.

Problema 2 cetate

Descriere a unei/unor soluții posibile

Propunător:
stud. Iordache Ioan-Bogdan, Universitatea din București

Soluție cerința 1

Pentru cerința 1 este suficient să precalculăm pentru fiecare poziție (i, j) din matrice suma submatricii determinate de colțurile (1, 1)-(i, j). Acest lucru se poate face ușor în O(N*M) aplicând formula

sum[i][j] = mat[i][j] + sum[i-1][j] + sum[i][j-1] – sum[i-1][j-1]

Fixăm colțul stânga jos pentru matricea pătrată de dimensiune **K**, iar suma corespunzătoare va fi

sum[i][j] – sum[i-k][j] – sum[i][j-k] + sum[i-k][j-k]

Complexitate: O(N*M)

Soluție cerința 2

Dacă fixăm în toate modurile posibile cele 2 colțuri ale submatricii și ne folosim de sumele parțiale de mai sus, obținem o complexitate de O(N*M*K^2) care obține în jur de 25 puncte.

Ideea rezolvării constă în fixarea liniilor submatricei căutate în O(N*K). Tot ce mai rămâne de făcut este găsirea coloanelor optime. Folosind sume parțiale pe coloane, putem reduce acum problema la determinarea unei subsecvențe de lungime maxim K de sumă maximă. Ne vom referi de acum la această problemă mai simplă: „dându-se un vector cu M elemente să se determine subsecvența de sumă maximă, de lungime maxim K”.

Pentru fiecare poziție *i* din vector, reținem suma primelor *i* elemente (sume parțiale pe prefix). Având fixat capătul dreapta al secvenței căutate (*i*), ne intereseaza suma parțială minimă corespunzătoare unei poziții aflate între *i-K* și *i-1* (fie aceasta poziție *j*). Astfel subsecvența de suma maximă, care are capătul dreapta *i,* are capătul stânga *j+1*, iar suma ei este diferența dintre suma parțială de la poziția *i* și cea de la poziția *j*. Rămâne de văzut cum putem determina această sumă parțială minimă în timp optim.

Considerăm șirul sumelor parțiale pe prefix. Îl împărțim în secvențe de câte K elemente. Pentru fiecare secvență calculăm minim parțial pe sufix și minim parțial pe prefix. Orice subsecvență de dimensiune K poate fi scrisă ca reuniunea dintre un sufix și un prefix a două secvențe consecutive. Astfel putem afla minimul orcărei subsecvențe în timp constant, iar precalcularea se poate face liniar. Obținem astfel complexitatea finala: O(N*M*K) și punctajul maxim.

Problema 3 spiralmatrix

Descriere a unei/unor soluții posibile

Autor: prof. Marcel Drăgan
Colegiul Național “Samuel von Brukenthal” - Sibiu

Varianta 1 – 45p

Complexitate $O(n^2)$

Structuri de date utilizate: matrice

Declarăm o matrice de dimensiune **n x n** și o parcurgem în spirală conform enunțului completând valorile. Când ajungem la $[n^2/2]$ păstrăm numărul liniei și al coloanei curente, aceasta este poziția ultimului element al primului subșir. Pentru a găsi poziția primului element al celui de al doilea subșir, mai parcurgem încă unul sau doi pași in funcție de paritatea lui n:

- dacă n este par mai parcurgem un singur pas
- dacă n este impar mai parcurgem doi pași

Matricea poate fi parcursă si fără să fie efectiv declarată în memorie, deoarece elementele a[i][i] ale fiecărei spire k respectă condiția: k ≤ i, j ≤ n-k+1

Varianta 2 – 75p

Complexitate O(n)

În loc să parcurgem matricea element cu element o parcurgem sărind de pe o spiră pe următoarea până când găsim spira pe care se află elementul căutat (adică $[n^2/2]$). După ce am găsit spira, o parcurgem element cu element până găsim valoarea respectivă.

Pentru calculul valorii de început a fiecărei spire folosim următorul raționament:

Primul element de pe prima spiră este 1.

Prima spiră are 4*(n-1) elemente, deci primul element de pe spira a doua, a[2][2] are valoarea egală cu a[1][1]+ 4*(n-1).

A doua spiră are 4*(n-3) elemente, deci primul element de pe spira a treia a[3][3] are valoarea egală cu a[2][2]+ 4*(n-3)

…

In general se poate demonstra prin inducție că: a[i+1][i+1]= a[i][i]+ 4*(n-(2*i-1)), pentru i=1,2,…, [n/2]

Varianta 3 – 90p

Complexitate O(log n)

În loc să parcurgem matricea sărind de pe o spiră pe următoarea, vom folosi căutarea binară pentru a găsi spira pe care se află elementul căutat (adică $[n^2/2]$). După ce am găsit spira, putem calcula pe care dintre cele 4 laturi ale spirei se găsește valoarea căutată și apoi locul exact.

Pentru calculul valorii de început a fiecărei spire folosim următorul raționament:

a[i+1][i+1]= 1+ 4*(n-1)) + 4*(n-3)) +…+ 4*(n-(2*i-1))=

$=1+4*i*n-4*i^2$

Varianta 4 – 90p

Complexitate O(log n)

Deoarece cele două subșiruri au aceeași lungime, indiferent în ce direcție parcurgem spirala fie că o parcurgem de la exterior către interior (ca în enunț) fie că o parcurgem de la interior către exterior locul de împărțire în cele două subșiruri se va afla în același loc în matrice, doar că inversat (adică în locul ultimului element al primului subșir se va afla primul element al celui de al doilea subșir și viceversa). Asta înseamnă că ne putem folosi de o matrice în care valorile sunt dispuse în spirală de la interior spre exterior. Într-o astfel de matrice primul element al matricei este n^2 , al doilea n^2-1 ș.a.m.d., iar elementul de început al fiecărei spire este un pătrat perfect:

$a[1][1]=n^2$

$a[2][2] =a[1][1]-4*(n-1) =n^2-4*(n-1)=n^2-4*n+4=(n-2)^2$

…

Pentru a găsi spira pe care se află elementul $n^2/2$ folosim căutarea binară.

Odată găsită spira prin calcul direct putem calcula pe care dintre cele 4 laturi ale spirei se găsește valoarea căutată și apoi locul exact.

Varianta 5 – 90p

Complexitate O(1)

În loc să folosim căutarea binară pentru a găsi spira pe care se află elementul căutat o calculăm direct prin împărțirea lui n^2 la radical din 2.