Problema 3 - PATRATE

Descrierea soluţiei

O primă idee, greu de implementat este de a genera toate submulţimile de 2,3,...,n elemente ale mulţimii numerelor naturale şi apoi de ale căuta pe acelea cu proprietatea că dau aceeaşi sumă a pătratelor. Acesta idee este inutilizabilă din punct de vedere practic deoarece numărul de submulţimi este foarte mare.

Soluţia se bazează pe o idee constructivă, mai precis pe construirea din aproape în aproape a soluţiei.

Să demonstrăm pentru început, din punct de vedere matematic că există un număr natural m care se poate scrie, simultan ca suma de 2,3,...,n pătrate perfecte nenule, de numere întregi.

Vom demonstra prin inducţie această proprietate.

P(1) Pentru n=2 se găseşte $m_2 = 1^2 + 1^2 = 2$

n=3 se găseşte $m_3 = 1^2 + 4^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 = 17$

P(k) Presupunem relaţia adevărată pentru n=k, cu alte cuvinte există un număr m care se scrie ca suma de 2,3,...,k pătrate de numere întregi nenule. Aşadar $m_k = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = ... = l_1^2 + l_2^2 + ...+l_k^2$

P(k+1) Vom demonstra acum ca şi relaţia P(k+1) este adevărată.

Mai întâi vom utiliza un alt rezultat, uşor de demonstrat şi anume că orice număr natural $p \geq 7$ poate fi scris sub forma $p = a^2 + b^2 - c^2$. Vom aplica acest rezultat pentru m_k şi vom obţine 3 numere întregi a,b,c, astfel încât $m_k = a^2 + b^2 - c^2$.

Odată m_k scris sub acesta formă avem :

$$m_{k+1} = m_k + c^2 = a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 + c^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 = ... = l_1^2 + l_2^2 + ...+ l_k^2 + c^2.$$

Exemplu $m_3 = 17 = 3^2 + 3^2 - 1^2$,

de unde $m_4 = 17 + 1^2 = 3^2 + 3^2 = 1^2 + 4^2 + 1^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 18$

Aşadar P(k+1) este adevărată deci P(n) este adevărată pentru orice n natural.

Soluţia urmăreşte mecanismul descris anterior, cu observaţia că pentru a genera un număr m cât mai mic, fără a avea pretenţia că este cel mai mic, facem descompunerea $m_k = a^2 + b^2 - c^2$ în aşa fel încât c să fie minim.