PROBLEMA 1 – `crescător`

Autor: Vlad Tudose, inginer software

Solutia 1 - 20 de puncte

Se foloseste metoda backtracking pentru a genera toate sirurile.

Solutia 2 - 40 de puncte

Se foloseste metoda programarii dinamice.
Fie **`Pd[v][sum]`** = numarul de siruri crescatoare, cu numere naturale nenule, care au suma **`sum`** si nu au valori mai mari decat **`v`**.
Pentru a calcula **`Pd[v][sum]`**, putem sa iteram dupa numarul de aparitii ale valorii **`v`** la sfarsitul sirului. Obtinem relatia de recurenta:
`Pd[v][sum] = Pd[v - 1][sum] + Pd[v - 1][sum - v] + Pd[v - 1][sum - 2 * v] + ...`

Raspunsul la problema este **`Pd[S][1] + Pd[S][2] + ... + Pd[S][S].`**
Pentru a optimiza memoria folosita, observam ca avem nevoie sa retinem doar doua linii din matrice la un moment dat (linie curenta si linia precedenta).
Complexitatea timp: **`O(S^3)`**. Complexitatea memorie: **`O(S)`**.

Solutia 3 - 60 de puncte

Putem optimiza solutia precedenta. Pentru a calcula **`Pd[v][sum]`** luam in calcul doar doua cazuri: folosim valoarea **`v`** sau nu.
Avem **`Pd[v][sum - v]`** siruri care folosesc valoare **`v`** si **`Pd[v - 1][sum]`** siruri care nu folosesc valoarea **`v`**.
Obtinem relatia de recurenta: **`Pd[v][sum] = Pd[v][sum - v] + Pd[v - 1][sum]`**.
O alta metoda de a deduce relatia de recurenta este sa observam ca
`Pd[v][sum - v] = Pd[v - 1][sum - v] + Pd[v - 1][sum - 2 * v] + ...`
in relatia de recurenta de mai sus. Complexitatea timp: **`O(S^2)`**.

Solutia 4 – 100 de puncte

Putem descompune un sir crescator cu suma **`sum`** in doua parti: un prefix cu valori mai mici sau egale cu **`sqrt(S)`** si un sufix cu valori strict mai mari decat **`sqrt(S).`**
Numarul de siruri crescatoare cu suma **`sum`** este dat de numarul de moduri de a construi un prefix * numarul de moduri de a construi un sufix.
Pentru a numara prefixele, calculam **`Pd[v][sum]`** exact ca mai sus dar doar pentru **`v ≤ sqrt(S)`**.
Pentru a numara sufixele, observam intai ca lungimea sufixului este cel mult **`sqrt(S)`**. O alta observatie este ca daca avem un sufix de lungime **`k`** si suma **`sum,`** putem scadea **`sqrt(S)`** din fiecare element si sa obtinem un sir crescator de lungime **`k`** si suma **`sum - sqrt(S) * k`** (exista o bijectie intre cele doua multimi de siruri).
Deci, putem calcula **`Pd2[k][sum]`** = numarul de siruri crescatoare de lungime **`k`**, cu numere naturale nenule si suma **`sum`**. Pentru a calcula **`Pd2[k][sum]`** observam ca daca scadem 1 din fiecare valoare a unui sir crescator de lungime **`k`** si suma **`sum`** obtinem un sir crescator cu suma **`sum - k`** care poate sa aiba pe prima pozitie valoarea 0.
Numarul de astfel de siruri care incep cu valoarea 0 este **`Pd2[k - 1][sum - k]`** iar numarul de siruri care incep cu valoarea 1 este **`Pd2[k][sum - k]`**.
Obtinem relatia de recurenta **`Pd2[k][sum] = Pd2[k][sum - k] + Pd2[k - 1][sum - k]`**.
Se pot combina rezultatele din matricile **`Pd`** si **`Pd2`** pentru a obtine raspunsul la problema.

Complexitatea timp: **`O(S*sqrt(S))`**. Complexitatea memorie: **`O(S)`**.