Fibodiv - Descrierea soluției

Varianta 1

Prof. Cheșcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil" Buzău

Analizând termenii Fibonacci % n, cu n număr natural, constatăm că **termenii divizibili cu n se repetă periodic.**

Spre exemplu:

- șirul Fibonacci % 2 este 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0 și apariția 0-urilor are perioada 3.
- șirul Fibonacci % 3 este 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, și apariția 0-urilor are perioada 4.

Această perioadă se mai numește și perioada restrânsă sau rangul primei apariții a lui k, cu F(k)%n=0, se notează cu a(n) și este secvența A001177 din OEIS.
Mai multe informații despre acest subiect se găsesc la:
http://webspace.ship.edu/msrenault/fibonacci/FibThesis.pdf

Iată care este perioada restransă pentru numerele n ∈ {1,…,50}.

Rangul primei apariții a lui k, cu F(k)%n=0,
1, 3, 4, 6, 5, 12, 8, 6, 12, 15, 10, 12, 7, 24, 20, 12, 9, 12, 18, 30, 8, 30, 24, 12, 25, 21, 36, 24, 14, 60, 30, 24, 20, 9, 40, 12, 19, 18, 28, 30, 20, 24, 44, 30, 60, 24, 16, 12, 56, 75.
(sequence A001177 in the OEIS)

Perioada restrânsă este un divizor al perioadei Pissano.

Făcând aceste considerații putem spune acum cu ușurință câte numere divizibile cu n se găsesc în primii T termeni Fibonacci.
Acest număr este partea întreagă a lui T/a(n).
Se aplică în continuare principiul includerii și al excluderii (PINEX) pentru a afla câte numere sunt divizibile cu $\mathbf{A_1}$ sau $\mathbf{A_2}$ sau .... sau $\mathbf{A_n}$.

Atunci când se generează o submulțime cu un număr par de elemente se calculează lcm al perioadelor elementelor și se adună la rezultatul final iar când se generează o submulțime cu un număr impar de elemente același rezultat se scade din rezultatul final. Această soluție are complexitatea O(2^n).

Varianta 2

Prof. Ionel-Vasile Piț-Rada
Colegiul Național "Traian" Drobeta-Turnu Severin

Pentru fiecare valoare a[i] există și se determină perioada cea mai mică p[i] pentru care periodic termenii șirului Fibonacci sunt divizibili cu a[i].

Din șirul acestor perioade, care sunt numere mici cel mult egale cu 75, se elimina valorile q[j] pentru care exista q[i] cu i<j care divide pe q[j].

Pentru aceste perioade se determină cel mai mic multiplu comun v=cmmmc(q[1],…,q[m]), care este mai mic decât 8000000.

Se calculează L=T/v și w=T%v

Se vor număra pentru un interval de lungime v și respectiv pentru un interval de lungime w toate valorile distincte care sunt divizibile cu cel puțin o valoare dintre q[1],…,q[m]. Fie Q și W aceste două numere. Rezultatul căutat este egal cu Q*L+W.