



Problema Para - Descrierea soluției

Autor: prof. Constantin Gălățan

Colegiul Național „Liviu Rebreanu” Bistrița

Pentru un dreptunghi având i linii și j coloane, format din $i \times j$ parcele, numărul de posibilități de a plasa k câini conform restricțiilor nu depinde de poziția dreptunghiului în matricea care codifică terenul, cu excepția situației când dreptunghiul conține parcela de coordonate N și M . Fie $a[i][j][k]$ acest număr. Vom utiliza un algoritm de programare dinamică și noțiuni de combinatorică.

În configurația (a, i, j, k) se poate ajunge din stările următoare:

- a) $(a, i-1, j, k)$ - Nu se plasează câini pe linia i .

$a[i-1][j][k]$ - numărul de posibilități de a plasa toți cei k câini pe $i-1$ linii și j coloane.

1	C		C			
2		C		C		
$i-1$	C					C
i						
	1	2	3	4	5	j

- b) $(a, i-1, j-1, k-1)$ - se plasează un câine pe linia i care nu este „atacat” pe coloană.

$a[i-1][j-1][k-1]$ - numărul de posibilități de a plasa $k-1$ câini pe $i-1$ linii și $j-1$ coloane. În acest caz pe linia i se poate plasa un câine în j moduri posibile, iar acesta **nu se atacă cu alt câine aflat pe coloana sa**:

1	C					
2				C	C	
3	C					C
i			C			
	1	2	3	4	5	j

Remarcați că cele două dreptunghiuri hașurate se comportă ca unul singur având $i-1$ linii și $j-1$ coloane.

Avem deci $j * a[i-1][j-1][k-1]$ posibilități de a plasa în acest mod un câine pe linia i a dreptunghiului.

- c) $(a, i-2, j-1, k-2)$ - se plasează un câine pe linia i care se „atacă” cu alt câine pe coloană.

$a[i-2][j-1][k-2]$ - numărul de posibilități de a plasa $k-2$ câini pe $i-2$ linii și $j-1$ coloane. În acest caz pe linia i se poate plasa un câine în j moduri posibile, iar acesta este **„atacat” de un altul aflat pe coloana sa**. Aceasta se face în $j*(i-1)$ moduri.

1	C				C	
2			C			
3	C					C
i			C			
	1	2	3	4	5	j

Observați că cele patru dreptunghiuri hașurate se comportă ca unul singur având $i-2$ linii și $j-1$ coloane.

Avem deci $j*(i-1) * a[i-2][j-1][k-2]$ posibilități de a plasa în acest mod k câini.



d) $(a, i-1, j-2, k-2)$ - se plasează doi câini pe linia i iar pe coloanele lor nu mai există alți câini.

$a[i-1][j-2][k-2]$ - numărul de posibilități de a plasa $k-2$ câini pe $i-1$ linii și $j-2$ coloane. În acest caz pe linia i se pot plasa doi câini în $j*(j-1)/2$ moduri posibile, iar acestia **sunt singuri pe coloanele lor**.

1	C				C	
2						
3	C					C
i		C		C		
	1	2	3	4	5	j

Cele trei dreptunghiuri hașurate se comportă ca unul singur având $i-1$ linii și $j-2$ coloane.

Avem deci $j*(j-1)/2 * a[i-1][j-2][k-2]$ posibilități de a plasa în acest mod k câini.

Deci, la cazul general:

$$a[i][j][k] = a[i-1][j][k] + \\ j * a[i-1][j-1][k-1] + \\ j * (i-1) * a[i-2][j-1][k-2] + \\ (j * (j-1) / 2) * a[i-1][j-2][k-2];$$

Pentru cazul special în care $i = N$ și $j = M$, avem:

- pentru situația a) se menține relația.
- În cazul b) rămân numai $j-1$ posibilități de a plasa un câine pe linia N care să nu fie atacat pe coloana sa.
- În cazul c) sunt $(j-1) * (i-1)$ posibilități de a plasa un câine pe linia N care să fie "atacat" de un altul aflat pe coloana sa.
- În cazul d) există $(j-1) * (j-2) / 2$ posibilități de a plasa doi câini pe linia N care să nu fie atacați pe coloane.

$$a[i][j][k] = a[i-1][j][k] + \\ (j-1) * a[i-1][j-1][k-1] + \\ (j-1) * (i-1) * a[i-2][j-1][k-2] + \\ (j-1) * (j-2) / 2 * a[i-1][j-2][k-2];$$

Soluția finală se obține din $a[N][M][K]$. Complexitate: $O(N*M*K)$