Problema bile - Descriere soluţie

Autor prof. Szabo Zoltan, ISJ Mures Tg Mures

Vom nota cele mai mari elemente din cele n urne cu x1, x2, …, xn.

Astfel în urnele U1, U2, …, Un putem insera aceste bile

U1={x1,...}

U2={x2,...}

…

Un={xn,...}

Numerele x1, x2, …, xn sunt convenabil alese ca să putem obține numărul x1+x2+...xn=p^n

Observăm că dacă alegem convenabil elementele din urne, folosindu-ne de baza de numerație p, am obține mulțimi care satisfac condiția de posibilitatea generării a tuturor numerelor de la 1 la p^n, însă nu garantează că toate elementele sunt distincte, respectiv că maximul bilelor are valoare minimă:

U1={x1, x1-1, x1-2, … , x1-(p-1)}

U2={x2, x2-p, x2-2p, … , x2-(p-1)p}

U3={x3, x3-p^2, x3-2p^2, … , x3-(p-1)p^2}

…

Un={xn, xn-p^{n-1}, xn-2p^{n-1}, … , xn-(p-1)p^{n-1}}

Alegând convenabil valorile de pornire x1, x2, …, xn putem să obținem ca toate bilele să fie numerotate distinct, dar chiar și în acest caz nu avem garanția că valoarea maximului este minimă.

O altă soluție putem genera folosindu-ne de observația că pentru orice divizor d al lui p există o combinație de bile în urne astfel ca să se poată genera numerele de la p^n- d^n+1 la p^n.

U1’={x1, x1-1, … , x1-(d-1)}

U2’={x2, x2-d, … , x2-(d-1)d}

U3’={x3, x3-d^2,… , x3-(d-1)d^2}

…

Un’={xn, xn-d^{n-1},… , xn-(d-1)d^{n-1}}

Această mulțime este capabilă să genereze d^n numere distincte. Știind că p=d*q, vom putea genera toate cele p^n=d^n*q^n numere naturale. Astfel conținutul urnelor va deveni:

U1={x1, x1-1, … , x1-(d-1), x1-d^n, x1-1-d^n, … , x1-(d-1)-d^n,...,x1-(q-1)d^n, x1-1-(q-1)d^n, … , x1-(d-1)-(q-1)d^n }

U2={x2, x2-d, … , x2-(d-1)d,   x2-q*d^n, x2-d-q*d^n, … , x2-(d-1)d-q*d^n, … , x2-(q-1)q*d^n, x2-d-(q-1)q*d^n, … , x2-(d-1)d-(q-1)q*d^n}

…

Un= {xn, xn-d^{n-1}, … , xn-(d-1)d^{n-1},   xn-q^{n-1}*d^n, xn-d^{n-1}-q^{n-1}*d^n, … , xn-(d-1)d^{n-1}-q^{n-1}*d^n, … , xn-(q-1)q*d^n, xn-d^{n-1}-(q-1)q*d^n, … , xn-(d-1)d^{n-1}-(q-1)q*d^n}

Pentru un n=2 soluția nu se supune acestor reguli..

Se poate demonstra că pentru orice n>=3, pentru n urne există soluție în care cele mai mari elemente sunt numere consecutive iar ultimul număr este distanțat de celelalte cu o valoare mai mare sau egală cu d.

Exemplu de soluție pentru n=3 urne și p=6 bile. Avem p^n=216

Nu avem soluţie pentru 216=73+72+71

Avem soluţii pentru 216=74+73+69.

cel mai mic divizor este d=2, cu care putem crea o baza care genereaza 8 numere naturale distincte

U1’={74,70}.

U2’={73,72},

U3’={69,67},

Configurația completă a urnelor este:

U1={74,70,66,62,58,54}.

U2={73,72,49,48,25,24},

U3={69,67,-3,-5,-75,-77},