echival1 - descriere soluţie

autor: prof. Zoltan Szabo – I.S.J Mureş- Tg. Mureş

Observăm, că orice bipermutare se compune din cicluri de lungimi $l_1, l_2 \ldots l_k$, cu orice $l_i \geq 2$ şi $l_1+l_2+\ldots+l_k=n$.

Două bipermutări sunt echivalente, dacă cele două şiruri ale lungimilor ciclurilor sunt formate din aceleaşi elemente, indiferent de ordine. Deci va trebui să verificăm, dacă pentru două bipermutări date, şirurile lungimilor ciclurilor sunt identice, după ce le-am ordonat.

echival2 - descriere soluţie

autor: prof. Zoltan Szabo – I.S.J Mureş- Tg. Mureş

SOLUŢIA 1. (50 de puncte - punctaj maxim)

soluţie de prof. Adrian Panaete – C.N. „A.T. Laurian” Botoşani

Se observă că două bipermutări sunt echivalente dacă şi numai dacă ele se pot descompune în cicli de aceeaşi lungime. În aceste condiţii o clasă de echivalenţă este definită de o partiţie a numărului N. Datorită restricţiei din enunţ - o bipermutare nu va conţine acelaşi număr pe aceeaşi coloană deducem ca orice ciclu are lungimea cel puţin 2, deci ne interesează numărul partiţiilor lui N cu termeni mai mari sau egali cu 2.
Observăm că partiţiile lui N pot fi împărţite în două tipuri – cele care conţin cel puţin un 1 şi cele care nu conţin niciun 1 (cele care reprezintă soluţia problemei). Dar partiţiile care conţin măcar un 1 se pot obţine alegând partiţii ale lui N-1 şi adăugând la acestea o valoare de 1.
În concluzie dacă notăm cu p[N] numărul de partiţii ale lui N şi cu SOL soluţia problemei vom avea: p[N]= p[N-1]+SOL deci SOL= p[N]- p[N-1].
Pentru a calcula p[N] optim vom folosi formula de recurenţă a partiţiilor cu numere pentagonale.

p[N]=p[N-1]+p[N-2]-p[N-5]-p[N-7]+…

unde termenii sumei sunt mai precis numerele de forma p[N-x_k] luate cu semne ++--++--...(alternate din 2 în 2 termeni) şi în care x_k reprezintă şirul generalizat al numerelor pentagonale Acest şir poate fi precalculat pentru toate valorile x_k <= N folosind formula de recurenţă $x_k=3+2x_{k-2}-x_{k-4}$.
(Formula de recurenţă se deduce din formulele care definesc numerele pentagonale $x_{2k-1}=k(3k-1)/2$ şi $x_{2k}=k(3k+1)/2$).

De remarcat că deşi pare o metodă artificială şi matematizată această tehnică este probabil una dintre cele mai eficiente metode de calcul al numărului de partiţii ale unui număr.
(Complexitate O(N*sqrt(N)).

SOLUŢIA 2 (10- 20 puncte în funcţie de implementare)

Metoda descrisă în soluţia optimă este o alternativă mult mai rapidă de calcul al numărului de partiţii la alte metode mai puţin eficiente dintre care vom descrie mai jos una dintre cele mai frecvent utilizate:

Notăm p[n][k] = numărul de partiţii ale lui n care folosesc numere mai mari sau egale decât k. Avem formula de recurenţă p[n][k] = p[n][k+1] + p[n-k][k]. Justificare: avem două cazuri:

- Folosim numărul k şi astfel ne rămâne să partiţionăm n-k folosind numere mai mari sau egale decât k
- Nu folosim numărul k, deci avem partiţii ale lui n cu termini mai mari strict decât k.

Numărul de partiţii va fi p[n][1] iar soluţia problemei va fi p[n][2]
(Complexitate $O(N^2)$.