TENIS – Descrierea soluţiei (prof. Stelian Ciurea)

În cele ce urmează, voi denumi jucătorii prin poziţile lor în clasament.

Să presupunem că notăm cu *a* jucătorul cel mai salb care ar putea câştiga turneul.

Rezolvarea problemei are la bază următoarea afirmaţie:

"Cea mai mare valoare a lui *a* se obţine dacă el întâlneşte în finală pe *a-k*."

Demonstraţia afirmaţiei se face prin reducere la absurd: presupunem că în finală *a* joacă cu alt jucător, fie acesta *b*. *b* nu poate fi mai bine clasat decât *a-k* (în acest caz *a* nu l-ar putea învinge!). Deci *b* > *a-k*. Apar două situaţii:

1) *a* îl întâlneşte pe *a-k* într-o etapă anterioară finalei. În acest caz, putem interschimba pe *a-k* cu *b*.Dacă *a-k* joacă la un moment dat cu un adversar pe care *b* nu îl poate invinge, interschimbăm şi respectivul adversar cu un adversar a lui *b* şi repetăm respectivul procedeu şi pentru adversarii adversarilor etc. (în cel mai rău caz, interschimbăm întreg subarborele corespunzător adversarului lui *a-k* pe care *b* nu îl poate invinge cu un subarbore al unui adversar a lui *b* de aceeaşi adâncime (evident vom găsi un astfel de subarbore, deoarece *b* se află pe un nivel superior lui *a-k*)

2) *a* nu îl întâlneşte pe *a-k* într-o partidă directă. În acest caz, turneul ar putea fi câştigat de *a+1*, deoarece în arborele binar care reprezintă schema de desfăşurare a turneului în această situaţie, putem înlocui pe *a* cu *a+1: a+1* poate să învingă toţi jucătorii pe care îi poate invinge *a* cu exceţia lui *a-k,* iar cum *a* nu îl întâlneşte pe *a-k*, rezultă că putem face interschimbarea între *a* şi *a+1*.

Am ajuns deci la o contradicţie – o valoare mai mare pentru câştigătorul turneului, deci afirmaţia este adevărată.

Putem face o afirmaţie asemănătoare şi pentru adversarul lui *a-k* din semifinală: acesta va fi *a-2k*, apoi pentru adversarul lui *a-2k* în sfertul de finală, acesta fiind *a-3k* s.a.m.d.

Putem să extindem afirmaţia şi mai mult, ajungând la concluzia că dacă completăm schema de desfăşurare a turneului începând de la finală, apoi semifinalele etc şi la un moment dat trebuie să alegem un adversar pentru un jucător oarecare *j*, atunci din adversarii "disponibili" pe care *j* îi poate învinge, cel mai avantajos este să îl alegem pe cel mai bine clasat în clasamentul ATP.

Având în vedere schema de desfăşurare a turneului care rezultă din afirmaţiile de mai sus, putem să calculăm valoarea lui *a* în modul următor:

- *a* are nevoie de x adversari (x=numărul de tururi) pe care să-i învingă iar aceştia sunt
  - *a-k* în finală,
  - *a-k+1,* în semifinală
  - ....
  - *a-k+x-1* (dacă k<x) sau *a-k+x* dacă (k>=x) în primul tur.

Rezultă a-k+x<=n (sau a-k+x-1<=n), iar cum valoarea cea mai mare pentru *a* rezultă la egalitate, deducem

$$a = n + k - x \quad (1)$$

- învinşii lui *a* au un număr de x(x-1)/2 adversari pe care îi înving: *a-k* joacă x-1 tururi până să foe eliminat, *a-k+1* joacă x-2 tururi etc iar aceşti adversari trebuie să fie cât mai bine clasaţi, primul dintre ei fiind *a-2k.*

Rezultă a- 2k + x + x(x-1)/2 <= n deci a = n + 2k - x - x(x-1)/2 sau notând cu G(x-1) = x(x-1)/2,

$$a = n + 2k - x - G(x-1) \quad (2)$$

- învinşii învinşiilor lui *a* au un număr de adversari pe care îi înving egal cu G(x-2) + G(x-3) + ... + G(2) + 1 iar aceştia trebuie să fie cât mai bine clasaţi începând cu *a-3k* rezultând

$$a = n + 3k - x - G(x-1) - G(x-2) - ... - G(2) - G(1) \quad (3)$$

Se continuă, după un raţionament asemănător, calculul numărului de adversari de care au nevoie învinşii învinşilor învinşilor ..., în calculul acestui număr observându-se că dacă în etapa precedentă a calculului a apărut un termen de genul G(x-i), atunci în etapa curentă acesta generează o sumă de termeni

$$G(x-i-1) + G(x-i-2) + ... + G(2) + G(1).$$

Evident, din formulele (1), (2), (3) se va reţine valoarea cea mai mică pentru *a*, aceasta fiind soluţia problemei. Completarea schemei de desfăşurare a turneului se va face apoi exact pe baza raţionamentului anterior.

În program, pentru a evita calculul repetat al unor valori, am folosit formule de genul

$$a_1 = n + k - x \quad (1)$$
$$a_2 = a_1 + k - G(x-1) \quad (2)$$
$$a_3 = a_2 + k - G(x-2) - ... - G(2) - 1 \quad (3)$$
$$a_4 = a_3 + k - G(x-3) - 2G(x-4) - 3G(x-5) \quad (4)$$

...

iar pentru calculul coeficienţilor care apar la un moment dat în expresiile (i) am folosit o matrice (notată m) şi o procedură denumită "derivare" prin care am implementat observaţia că G(x-i) învinşi au nevoie de G(x-i-1) + G(x-i-2) + ... +G(2) + G(1) adversari pe care să-i întâlnească până în momentul când sunt la rândul lor învinşi.