Problema 2 – Partiție

prof. Cheşcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Costin Neniţescu" Buzău

Varianta 1 – soluție de 100 puncte

- Să demonstrăm pentru început că dacă din tabloul de mai jos alegem la întâmplare n numere, astfel încât oricare două să nu fie situate pe aceeași linie sau coloană suma lor este egală întotdeauna cu $n*(n^2+1)/2$.

1	2	3	...	n
n+1	n+2	n+3	...	n+n
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
n^2-n+1	n^2-n+2	n^2-n+3	...	n^2

Se observă că un element a_{ij} al tabloului este dat de formula $a_{ij} = (i-1)*n+j$.
Fie $a_{1j1}, a_{2j2}, \ldots, a_{njn}$ unde $j_1, j_2, \ldots, j_n$ este o permutare a numerelor 1,2,..., n.

Avem : $\sum_{k=1}^{n} a_{kjk} = \sum_{k=1}^{n}((k-1)*n + j_k) = n\sum(k-1) + \sum_{k=1}^{n} j_k$

Dar $\sum_{k=1}^{n} j_k = \frac{n*(n+1)}{2}$ și deci $\sum_{k=1}^{n} a_{kjk} = \frac{n*(n^2+1)}{2}$

- Un al doilea element important în prezentarea soluției este că odată ce o fost stabilită o prim[alegere (astfel încât oricare două elemente să nu fie situate pe aceeași linie sau coloană), să zicem $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n$ (acestea reprezentând coloanele de pe care se aleg elementele – iar liniile sunt întotdeauna 1,2,3,4,5,...,n), următoarele alegeri se fac utilizând permutări circulare (adică $p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n, p_1$, etc) și în felul acesta se generează toate submulțimile partiției.

- Făcând această observație este necesar pentru a respecta condițiile cerute de problemă (diferențe diferite de n+1 și n – 1) să alegem inițial o secvență de pornire de genul $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, astfel încât diferențele dintre două elemente consecutive să nu fie 1 sau -1.

O astfel de secvență poate fi 1,3,5,..., 2,4,6,..... (în total n elemente). Se generează apoi, toate permutările circulare ale secvenţei și în felul acesta toate submulțimile partiției. Se poate demonstra uşor că plecând de la o astfel de secvenţă de pornire şi efectuând permutări circulare se păstrează proprietatea că diferenţele dintre oricare două elemente consecutive nu sunt 1 sau -1.

Varianta 2 – soluție de 100 puncte

Prof. Nicu Vlad-Laurenţiu
Liceul Teoretic „M. Kogălniceanu”, Vaslui

Se observă că elementele de pe coloane se încadrează între intervale de forma [1+(i-1)*n, i*n]. Se construieşte un vector care verifică proprietăţile din enunţ din mulţimea {1,2,..n}, care va fi permutat ciclic şi modificat cu ajutorul unei formule de calcul v[i]=v[i]+n*(i-1) şi afişat de fiecare dată.