Tabăra de pregătire a lotului naţional de informatică
Reşiţa, 2 iunie – 9 iunie 2012
Baraj 5 - Seniori

Problema pingpong

Autor: Csaba Pătcaş, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca

Prima dată calculăm probabilităţile p_{ij}, reprezentând probabilitatea ca jucătorul j să câştige un schimb de mingi, dacă jucătorul i este la serviciu. Aceste probabilităţi se pot calcula cu ajutorul unor formule simple şi eventual folosindu-ne de relaţiile $p_{11} + p_{12} = 1$ şi $p_{21} + p_{22} = 1$. De exemplu $p_{11} = p_1 + (1\text{-}p_1)\cdot(1\text{-}q_2)\cdot p_3 + (1\text{-}p_1)\cdot(1\text{-}q_2)\cdot(1\text{-}p_3)\cdot(1\text{-}q_4)\cdot p_5 +$

$(1\text{-}p_1)\cdot(1\text{-}q_2)\cdot(1\text{-}p_3)\cdot(1\text{-}q_4)\cdot(1\text{-}p_5)\cdot p$, iar restul probabilităţilor se poate calcula în mod simetric.

În al doilea pas calculăm probabilităţile $prob_i$, semnificând probabilitatea ca primul jucător să câştige un set întreg, dacă primul serviciu din set este executat de jucătorul i. Pentru obţinerea acestor valori, aplicăm metoda programării dinamice şi calculăm probabilităţile $dp_{i,j}$, semnificând probabilitatea ca setul să ajungă la scorul $i – j$ (adică primul jucător are i puncte şi al doilea jucător j puncte). Recurenţele sunt iarăşi foarte uşor de dedus:

$dp_{i+1,j} = dp_{i,j} \cdot p_{11}$ şi, $dp_{i,j+1} = dp_{i,j} \cdot p_{12}$ dacă serveşte primul jucător la scorul $i – j$, iar

$dp_{i+1,j} = dp_{i,j} \cdot p_{21}$ şi, $dp_{i,j+1} = dp_{i,j} \cdot p_{22}$ dacă serveşte al doilea jucător la scorul $i – j$

Teoretic există o probabilitate strict pozitivă ca un set să ajungă la un scor foarte mare, însă fiindcă rezultatul se cere doar cu trei zecimale, este mai mult ca suficient să calculăm probabilităţile cât timp scorul unui jucător nu depăşeşte 100. Având valorile dp calculate, obţinem rezultatul $prob_i = dp_{11,1} + \ldots + dp_{11,9} + dp_{12,10} + \ldots + dp_{100,98}$

Menţionăm că în urma unor teste practice am constatat că $prob_1 = prob_2$ de fiecare dată, adică nu contează cine începe serviciul într-un set, probabilitatea ca primul jucător să-l câştige este aceeaşi. Autorul n-a găsit o explicaţie pentru acest fenomen, care pare contra-intuitiv.

În al treilea pas calculăm probabilităţile sol_i ca primul jucător să câştige partida, dacă în primul set serviciul este început de jucătorul i. Pentru aceasta aplicăm iarăşi metoda programării dinamice într-un mod similar celui din pasul doi, cu diferenţa că nu este nevoie ca jucătorul care câştigă să aibă un avantaj de două seturi, în locul probabilităţilor p_{ij}, folosim probabilităţile $prob_i$ şi $1 – prob_i$ şi jucătorul care începe serviciul se schimbă cu fiecare set.

Soluţia finală va fi $(sol_1 + sol_2) \cdot 0.5$, fiindcă la început s-a dat cu moneda, aşadar ambele cazuri pot apărea cu probabilitate egală. Iarăşi, se pare, că $sol_1 = sol_2$ de fiecare dată.