

**Problema liniei (autor: student Alexandru Cazacu)**

Această problema poate fi rezolvată prin mai multe abordări greedy.

Pentru început, se poate observa că dacă există o configurație optimă formată din linii frânte care se întretaie, o putem transforma în una în care nu, păstrându-se astfel o „ordine” între acestea. De aici, ne vine următoarea idee: putem forma pe rând liniile frânte, plecând de la cea mai din stânga. La pasul curent, trebuie să unim cât mai multe puncte astfel încât să nu rămână nici un punct neacoperit în partea stângă. Pentru a face acest lucru trebuie să sortăm crescător punctele după ordonată și să le menținem într-o stivă. Dacă putem ajunge în punctul curent, atunci îl adăugăm în stivă. În caz contrar, dacă este mai în stânga decât punctul din vârful stivei, scoatem elemente din stivă până îl putem adăuga sau până ajunge în dreapta.

Pentru soluția în $O(N * \log N)$ pentru fiecare punct o să menținem punctele în care semidreptele paralele cu prima bisectoare și perpendiculara pe aceasta, care pornesc din punctul respectiv, intersectează axa OX ; fie acestea $left[i]$ și $right[i]$. O dreaptă care pleacă de pe OX din unul din punctele cu abscisa cuprinsă între $left[i]$ și $right[i]$ poate ajunge în punctul i .

Mai mult, din punctul i putem să ajungem în punctul j dacă $left[j] \leq left[i]$ și $right[i] \leq right[j]$. Astfel ținem punctele sortate după $right[i]$ crescător, și în caz de egalitate descrescător după $left[i]$. La pasul curent pentru a adăuga punctul i la o linie deja existentă trebuie ca ultimul punct (P) de pe această linie să aibă $left[P] \geq left[i]$. Pentru obținerea numărului optim de linii frânte trebuie să alegem cea mai din stânga linie, pe care o putem cauta binar. În caz că nu există o astfel de linie, formăm una nouă. Aceasta soluție obține 100 de puncte.

Soluție alternativă $O(N \log N)$ (Mugurel Andreica, aprox. 85 puncte):

Pentru început, să observăm că problema nu se schimbă dacă permitem oricărui drum să avanseze în cele 3 direcții date cu orice lungime la un moment dat (inclusiv lungimi reale).

În acest caz, nu mai avem nevoie ca drumul să meargă drept în sus, deoarece aceasta mișcare se poate obține prin avansarea dreapta-sus, urmată de avansarea stânga-sus. Astfel, vom păstra doar mișcările „dreapta-sus” și „stânga-sus” (la unghiuri de 45 de grade față de verticală), însă efectuate pe orice lungime.

Dacă rotim punctele cu 45 de grade la dreapta, cele două direcții de mișcare sunt acum echivalente cu a merge la dreapta sau în sus. Astfel, după rotația punctelor, orice drum începe într-un punct și apoi continuă doar în direcțiile la dreapta și în sus. În acest caz, numărul minim de drumuri este egal cu numărul minim de „straturi de puncte dominante” (un strat de puncte dominante are forma unei „scărițe”). Considerăm că un punct „domină” un altul dacă are coordonata x strict mai mică și coordonata y strict mai mare.

Există mai multe modalități de a calcula numărul de straturi de puncte dominante. O variantă este următoarea. Construim, conceptual, un graf orientat în care avem muchie de la un punct A la un punct B dacă punctul A îl domină pe B . Graful obținut este un graf orientat aciclic, iar lungimea maximă (ca număr de puncte) a unui drum în acest graf este egală cu numărul minim de straturi de puncte dominante. Pentru a determina drumul de lungime maximă în acest graf vom baleia punctele de la dreapta la stânga (iar la coordonate x egale, vom considera mai întâi punctele cu coordonata y mai mare). Pentru fiecare punct P vom calcula $lmax(P)$ = lungimea maximă a unui drum care începe în punctul P . Când ajungem la un punct A în timpul baleierii, vrem să determinăm un punct B care are $x(B) > x(A)$, $y(B) < y(A)$ și $lmax(B)$ este maxim dintre toate punctele cu această proprietate.

Observăm că este suficient să menținem o structură de date (de exemplu un arbore de intervale) peste coordonatele y ale punctelor. Această structură va fi actualizată după parcurgerea fiecărui punct. Pentru a găsi valoarea maximă a lui $lmax(B)$ este suficient să determinăm valoarea maximă dintre toate punctele cu coordonata y strict mai mică decât $y(A)$ care au fost deja parcurse. Avem apoi $lmax(A) = 1 + lmax(B)$ ($lmax(B)$ poate fi și 0, dacă punctul A nu domină niciun alt punct).

În încheiere, putem observa că nu este necesar să efectuăm rotația punctelor cu 45 de grade la dreapta, ci este suficientă următoarea transformare. Dacă un punct are coordonatele inițiale (x, y) , putem să îi asociem noile coordonate $(x' = x + y, y' = y - x)$.

Complexitatea acestei soluții este $O(N * \log(N))$.