Desc (Stelian Ciurea)
Fie o kx-descompunere, adică

$$N = a1+a2+\ldots+ak$$

În aceasta vom presupune că

$$a1 < a2 < a3 <\ldots ak$$

sau

$$a1\leq a2'+x \leq a3'+x \leq \ldots\leq ak'+(k-1)x$$

în care $a1 \leq a2' \leq a3'\leq ak'$

Dacă o rescriem, rezultă

$$N = a1+a2'+a3'+\ldots+ak' + x + 2x+\ldots+(k-1)x$$

adică

$$N-x(1+2+\ldots+(k-1)) = a1+a2'+a3'+\ldots+ak'$$

ceea ce reprezintă o posibilitate de a scrie numărul N-x*k(k-1)/2 ca sumă de k numere naturale care pot fi şi egale. Aceste transformări sunt bijective, adică oricărei kx-descompuneri a numărului N îi corespunde o descompunere în k numere care pot fi şi egale a numărului N-x*k(k-1)/2.

Numarul de posiblităţi de a scrie un număr oarecare – să îl notăm A - ca o sumă de k numere naturale nenule care pot fi şi egale este dat de o formulă cunoscută (care apare şi în unele manuale mai vechi de clasa a X-a) denumită formula Stirling:

$$S(A,k) = S(A-k,1) + S(A-k,2) + \ldots S(A-k,k)$$

Aplicând această formulă pentru A=N-x*k(k-1)/2 obţinem rezultatul cerut.

Felinare (Tiberiu Florea)
Pornind de la graful iniţial, construim un nou graf bipartit, după cum urmează: în stânga N noduri corespunzătoare felinarelor de tipul 1, iar în dreapta N noduri corespunzătoare felinarelor de tipul 2. O muchie i -> j în graful iniţial devine o muchie între nodul i din stânga şi nodul j din dreapta în noul graf bipartit. Se observă că o stradă i -> j este complet iluminată dacă şi numai dacă atât felinarul corespunzător nodului i din stânga cât şi felinarul corespunzător nodului j din dreapta sunt aprinse. În concluzie, având dat un graf bipartit vrem să alegem un număr maxim de noduri astfel încât să nu existe nicio muchie cu ambele noduri adiacente alese.

Pentru a rezolva problema, avem nevoie mai întâi de câteva definiţii. Într-un graf bipartit, un "suport minim" reprezintă o mulţime de noduri cu cardinal minim pentru care orice muchie a grafului este adiacentă cu cel puţin unul dintre nodurile mulţimii. Unul dintre cele mai importante rezultate de teoria grafurilor, Teorema lui König, spune că într-un graf bipartit cuplajul maxim şi suportul minim sunt egale. Pe baza acestei teoreme, un suport minim se poate determina relativ uşor pornind de la orice cuplaj maxim. O "mulţime independentă maximală" (ceea ce ne cere, de fapt, problema), este complementul oricărui suport minim.

Suportul minim se poate calcula în modul următor:

```
// presupunem că a fost calculat deja un cuplaj maxim
// S este suportul minim, iniţial mulţime vidă
// C(j-dreapta) e nodul i-stânga cu care e cuplat j-dreapta (daca există)

procedura calculează(i-stânga) // doar pt. noduri care nu sunt în suport
     pentru j-dreapta vecin al lui i-stânga
          dacă j-dreapta nu e în S
               S <- S+{j-dreapta}
               S <- S-{ C(j-dreapta) } // există mereu C(j-dreapta)
               calculează( C(j-dreapta) )

pentru fiecare i din stânga
     daca i e cuplat
          S <- S+{i}

pentru fiecare i din stânga
     daca i nu e cuplat
          calculează(i)
```

Pentru 40 de puncte este suficient să calculăm un cuplaj maxim şi soluţia egală cu 2*N-valoarea cuplajului. Pentru celelalte 60 de puncte trebuie să determinăm un suport minim şi apoi o mulţime independentă maximală pornind de la acest cuplaj. Complexitatea totală a algoritmului este O(N*M).

Joc (Tiberiu Florea)
Se pot obţine 50 de puncte cu diverse soluţii exponentiale (bazate, eventual, pe arbori de joc), fără să ţinem cont de modul în care este obţinută matricea.

Pentru punctajul maxim, facem următoarea observaţie: în graful iniţial (care nu este citit), pentru a ajunge de la nodul i la nodul j trebuie să plătim cel puţin taxa din nodul i şi taxa din nodul j. Astfel, fiecare matrice A respectă condiţia A[i, j] >= A[i, i]+A[j, j] pentru orice i diferit de j. Această proprietate se pastrează şi în urma operaţiilor permise, de scădere a unui număr de pe o linie sau coloană. Un jucător pierde atunci când pe fiecare linie şi pe fiecare coloana există cel puţin câte un zero şi, ţinând cont de proprietatea precedentă, primele elemente ale matricii care devin nule sunt elementele diagonalei principale.

Indiferent dacă la un anumit pas scădem k de pe o linie sau de pe o coloană, un singur element de pe diagonala principală va scădea cu k. Se observă că jocul este echivalent cu NIM în varianta clasică pe elementele diagonalei principale. Complexitate: O(N^2).