Descrierea soluţiei pentru problema “numere”

Prof. Piţ-Rada Ionel-Vasile
Colegiul Naţional “Traian”, Drobeta Turnu Severin

Fie $2 \le k \le 5$ şi $1 \le s \le 2^{30}$. Se observă că orice număr scris cu cifre din {1,2,…,k} şi având suma cifrelor egală cu S poate avea ultima cifră egală cu 1,2,…,k.
Notăm cu x[s] ultima cifră a numărului de numere cu suma cifrelor egală cu s şi cu cifre din {1,2,…,k}.
Putem scrie atunci x[s] = (x[s-1] + x[s-2] + … + x[s-k]) % 10. Deoarece s poate fi foarte mare, complexitatea O(s) nu este acceptabilă.
Şirul x[1],x[2],…,x[s] este un şir de cifre şi orice valoare x[i], cu i>k, se obţine din secvenţa x[i-k], x[i-k+1] ,…, x[i-1] . Presupunem calcularea următoarelor 10^k+1 numere: nr[k+1],nr[k+2],…,nr[$k+10^k+1$] şi observăm că valorile nr[i]=x[i-1]$*10^0$+x[i-2]$*10^1$+…+x[i-k]$*10^{k-1}$ sunt numere naturale din intervalul [0;10^k-1]. Conform principiului lui Dirichlet există $k \le p1 < p2 \le k+10^k$ cu p1 şi p2 minime şi nr[p1]=nr[p2].
Şirul x este deci periodic cu perioada p2-p1. Va fi astfel suficientă calcularea primilor k+p2-p1 termeni din şirul x. Complexitatea va fi O(T$*10^k$).