

Masina

Având în vedere că prașele sunt așezate și parcurse circular, putem dubla orașele, iar apoi să le considerăm așezate liniar:

$$a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2, \dots, a_{n+k}=a_k, \dots, a_{2n}=a_n$$

$$b_{n+1}=b_1, b_{n+2}=b_2, \dots, b_{n+k}=b_k, \dots, a_{2n}=b_n$$

Cantitatea de benzina pe care PAM o castiga (o pierde) in urma opririi in orasul i si parcurgerii drumului catre orasul $i+1$ este $c_i = a_i - b_i$.

In continuare vom lucra numai cu aceste valori c_i .

Definim sirul sumelor partiale astfel:

$$s_i = \sum_{k=1}^i c_k$$

Datorita faptului ca PAM poate efectua turul, rezulta ca suma cantitatii de benzina acumulate (consumate) este nenegativa, adica:

$$0 \leq c_1 + \dots + c_n = s_n \quad (s_n \geq 0)$$

Rezolvarea problemei consta in a gasi un x astfel incat:

$$c_x \geq 0; \quad c_x + c_{x-1} \geq 0; \quad \dots, \quad c_x + \dots + c_{x+n-1} \geq 0, \text{ adica}$$

$$s_x - s_{x-1} \geq 0; \quad s_{x+1} - s_{x-1} \geq 0; \quad \dots; \quad s_{x+n-1} - s_{x-1} \geq 0$$

Cautam $1 \leq m \leq n$ astfel incat s_m sa fie minim.

Fie $m < k \leq n$; avem $s_k \geq s_m$ (din definitia lui m)

Fie $n < k$; avem

$$s_k = c_1 + \dots + c_n + c_{n+1} + \dots + c_k = s_n + c_1 + \dots + c_k = s_n + s_k - s_n \geq s_n \geq s_m$$

In concluzie $x=m+1$ este o solutie pentru problema.

Detalii de implementare

Se poate folosi un singur vector pentru a rezolva problema (adica c). In plus elementele lui c pot fi memorate pe intregi cu semn pe 16 biti, iar totalul memoriei folosite de sub 60 kb. (adica se poate lucra foarte usor si in DOS/Windows folosindu-se un singur segment de date).

Complexitate

Sirul sumelor partiale se poate gasi in $O(n)$ pentru ca $s_i = s_{i-1} + a_i$. Minimul din acest sir se poate gasi tot in $O(N)$, deci complexitatea programului va fi $O(N)$.

Cu un program naiv in $O(N^2)$ se vor obtine in jur de 40 de puncte

Criptare

Pentru decriptarea mesajului, se utilizeaza algoritmul de criptare descris in sens invers:

- se imparte mesajul in fragmente de lungimea cuvintului cheie
- se aseaza intr-o matrice de caractere
- se determina in cuvintul cheie ordinea caracterelor din alfabet
- se afiseaza pe rand coloanele corespunzatoare in ordine