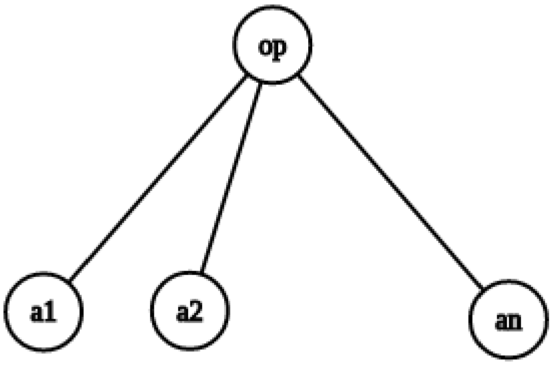
Problema expresie - 100p – clasele XI-XII
Descrierea soluției
Cristian Vîntur - Universitatea ”Al.I.Cuza” Iași

Vom construi un arbore al expresiei in felul urmator: fiecare operator va avea asociat un nod intern, iar fiecare numar un nod frunza. Un nod care contine un operator poate avea oricati fii (spre deosebire de exact 2 la arborele clasic) pentru a trata cazurile care folosesc asociativitatea operatorilor. Pentru o expresie de tipul (a1 op a2 op … op an) maximala (nu poate fi extina la stanga / dreapta cu operatorul op), pentru care operatorul op este asociativ, arborele arata in felul urmator:



unde nodurile a1, a2, …, an reprezinta arborii corespunzatori expresiilor.
Se observa ca arborele construit astfel este unic pentru o expresie.

Solutia este sa calculam urmatoarea dinamica: **dp[node]** = numarul de moduri de a evalua expresia corespunzatoare subarborelui cu radacina in nodul node.

Aratam mai intai cum aflam raspunsul daca radacina are 2 fii. Presupunem ca expresia din primul fiu poate fi evaluata in **x** moduri si contine **a** operatori, iar cea din al doilea fiu in **y** moduri si contine **b** operatori. Evident nu putem evalua operatorul din radacina pana cand nu am evaluat ambele expresii din fii. Avem **x*y** moduri de alege modurile de evaluare pentru cei doi fii si **C(a+b,a)** moduri de a interclasa operatiile efectuate, unde **C(n,k)** reprezinta combinari de n luate cate k.

Consideram acum cazul general, cand radacina are n fii. Vom construi o alta dinamica: **nr[i][j]**, numarul de moduri de a evalua expresia formata din fiii i, i+1, …, j, adica (a_i op a_{i+1} op …,op a_j). Raspunsul va fi **nr[0][n-1]**. Pentru a rezolva aceasta dinamica, fixam k cu semnificatia ca expresia va fi evaluata astfel: (a_i op a_{i+1} op …,op a_k) op (a_{k+1} op …,op a_j). Pentru un k fixat, avem nevoie de valorile nr[i][k], nr[k+1][j], de numarul de operatori din expresiile din cele doua paranteze (se pot mentine in dinamica), iar combinarea lor se face ca in cazul cu radacina cu 2 fii. Facand suma pentru k=i, i+1,…,j-1, obtinem **nr[i][j]**.

Complexitate:
Pot exista cel mult m noduri, unde $m \leq 1000$este lungimea expresiei, iar fiecare dinamica se afla in n^3, unde n este numarul de noduri fii, complexitatea este $O(m^3)$(fiecare nod ‘participa’ la cel mult o dinamica).

PS. o sa incerc sa arat ca in cel mai rau caz sunt 500^3operatii, deci ar trebui sa intre intr-o secunda.