

profil – descrierea soluției

Numărul de profiluri distincte de lungime $2x$ ce pot fi formate cu mutări definite de vectorii de deplasare $(1, 1)$ (S), $(1, -1)$ (J) și $(2, 0)$ (O) este numărul lui Schroder (x) (notăm $S(x)$).

Observăm că:

$S(1) = 1$ (profilul de lungime 2 cu deplasările SJ).

$S(2) = 2$ (profilurile de lungime 4 de forma SSJJ, SOJ).

Numerele lui Schroder satisfac relația:

$$S(n+1) = \sum_{i=0}^n \text{Comb}(2n-i, i) \cdot \text{Catalan}(n-i)$$

Justificare:

Un profil Schroder de lungime $2n+2$ se poate obține astfel:

- cu i deplasări orizontale O ($i=0, \dots, n$); acestea ocupă $2i$ poziții (oricare dintre cele $2n$ poziții existente, obligatoriu un O pe câte două poziții adiacente) $\Rightarrow \text{Comb}(2n-i, i)$ posibilități.
- pe celelalte poziții se intercalează toate combinațiile de SJ posibile, astfel încât în orice prefix numărul de J nu depășește numărul de S $\Rightarrow \text{Catalan}(n-i)$ posibilități.
- încadrăm secvența obținută între S și J.