Prof. Szabo Zoltan

ISJ Mureș

Problema bomboane

Descrierea solutiei

**Soluţia brută – complexitate O (n*k*k)**

Observăm că dacă pe primele două poziţii sunt fixate numărul de bomboane, automat s-a fixat si poziţia următoare.

Astfel pentru toate configuraţiile de la 0..k-1 pentru primele două poziţii simulă un şir de comenzi, până găsim o soluţie.

**Soluţie prin construcţie – complexităţi O(n+k), O(n+log k), O(n)**

Observăm că dacă adăugăm un număr convenabil de bomboane, se pot elimina cu siguranţă numărul de bomboane din n-2 orificii. Să considerăm că eliminăm bomboanele de la n spre 1, şi rămân cantităţi nenule în pungile 1 şi 2.

De asemenea observăm că aplicarea mai multor comenzi asupra aceleiaşi poziţii este cumulativă.

Spre exemplu (2 1) (2 1) (2 1) este echivalent cu (2 3).

Ne interesează cum putem elimina bomboanele de pe primele două poziţii.

Putem construi câteva şabloane de eliminare bomboane.

Considerăm că fiecare mutare pe poziţia i are efect şi pe poziţiile i-1 şi i+1

Dacă n%3==1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | ... | ... | n-2 | n-1 | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 1 pe primele două poziţii | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| -2 -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 |
| 3 pe prima poziţie | 1 | 1 | -2 | 1 | 1 | -2 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| -3 | -1 | -1 | 2 | -1 | -1 | 2 | -1 | -1 | 2 | -1 |

Se observă că din 3 în 3 se repetă comenzile, pe care le putem scrie cumulativ peste comenzile anterioare.

În tabelul de mai sus am notat cu -1 numărul k-1, iar cu -2 numărul k-2

Observăm că toate elementele se pot elimina cu uşurinţă, cu excepţia elementului de pe poziţia 1.

Pentru eliminarea acestui element avem următoarele cazuri:

K%3 !=0 avem întotdeauna soluţie, aplicăm formula până când se obţine golirea pungii

K%3==0

- Dacă valoarea de pe prima poziţie este divizibilă cu 3 există mai multe soluţii
- Dacă valoarea de pe prima poziţie nu este divizibilă cu 3, nu avem soluţie.

Dacă n%3==2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | ... | ... | n-2 | n-1 | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 1 pe primele două poziţii | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| -2 -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| 3 pe prima poziţie | -1 | 2 | -1 | -1 | 2 | -1 | -1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| -3 | 1 | -2 | 1 | 1 | -2 | 1 | 1 | -2 | 1 | 1 | -2 |

Regulile de lucru sunt asemănătoare cu cazul anterior.

Dacă n%3==0

În acest prima etapă a eliminărilor bomboanelor rezolvă problema instantaneu.

Dacă bomboanele toate s-au eliminat, atunci avem soluţie, altfel nu există soluţie.

**Soluţie prin sistem de ecuaţii – complexităţi O(n+k), O(n+log k), O(n)**

Operatiile se pot cumula (adica in loc sa facem O(x, a) si O(x, b), putem face O(x, a+b)) si se pot face in orice ordine, asadar se pot face n operatii: O(1, X[1]),… O(n, X[n]).

Dupa ce se aplica operatiile, fiecare valoare din sir va deveni:

a[i] -> a[i] + X[i] + X[i-1] + X[i-2]

Fiindca vrem sa fie sir vid la final, se obtine sistemul:

a[1] + X[1] + X[n] + X[n-1] = 0 (mod K)

a[2] + X[2] + X[1] + X[n] = 0

…

a[i] + X[i] + X[i-1] + X[i-2] = 0

…

$a[n] + X[n] + X[n-1] + X[n-2] = 0$

Putem scadea doua linii consecutive si sa obtinem un sistem cu relatii de forma:

$X[i+3] = X[i] + a[i+2] - a[i+3] \pmod{K}$

Se obtin “cicli” in care daca stim un element, se pot afla celelalte elemente din ciclu. Asa ca se determina ciclii (maxim 3), se fixeaza un element cu orice valoare (de exemplu 0) si se determina restul elementelor.

Totusi, din cauza ca scadem doua linii cu acelasi termen liber (aici 0, dar ar fi putut fi altceva), termenul liber va deveni 0. Din aceasta cauza, in urma determinarii elementelor de mai sus, se obtine o serie de operatii pentru care toate pungile vor avea acelasi numar de bomboane C, nu neaparat 0. Pentru a obtine 0, putem face cate operatie cu aceeasi valoare in plus pe fiecare element. Pentru a afla valoarea cu care sa facem operatiile, putem itera de la 0 la K-1 si sa vedem daca primul element ajunge 0 (atunci si celelalte vor ajunge), sau putem determina cu invers modular (daca $K\%3 \neq 0$) sau prin impartire la 3 (daca $K\%3 = 0$), sau prin aplicarea unei formule in functie de K%3.