tablou – soluţie

Varianta 1

Notam cu A[n][p] numarul de termeni nenuli pentru instanta n, p a problemei.
Pentru n sau p mici, problema e triviala (A[1][0] = 0, A[1][1] = 1, A[N][0] = A[N – 1][0] * N)
Pentru n si p mai mari (adica n >= 2, p >= 1), gasim doua scurte, frumoase si la obiect relatii de recurenta :

A[n][p = 1] = (n – p) * A[n – 1][p – 1]
A[n][p >= 2] = (p – 1) * A[n – 1][p – 2] + (n – p) * A[n – 1][p – 1]

Este evident ca locul 0-urilor in tablou nu conteaza, deci putem presupune fara sa restrangem generalitatea si pentru a simplifica explicatia ca tabloul arata cam asa :

0 1 1 1 1
1 0 1 1 1
1 1 0 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

unde 0 este 0 si 1 este orice diferit de 0 (desigur pot avea diverse dimensiuni ale tabloului si numarul de 0-uri poate sa difere de cel din exemplul de mai sus).

Fie tabloul din exemplul de mai sus notat cu t si indexat t[i][j] elementul de la linia i si coloana j.

Toti termenii in care apare t[0][0] = 0 sunt nuli si deci nu-i numar.
Toti termenii care folosesc t[0][j] = 1 (j=1,2,…,p) si care sunt nenuli sunt exact numarul de termeni din tabloul format prin eliminarea din t a liniei 0 si coloanei j. (acest numar este a[n – 1][p – 2] – fiindca pierd o coloana si un rand, si doua zero-uri).
Toti termenii care folosesc t[0][j] = 1 (j=p+1,p+2,…,n) si care sunt nenuli sunt exact numarul de termeni din tabloul format prin eliminarea din t a liniei 0 si coloanei j. (acest numar este a[n – 1][p – 1]) – fiind pierd o coloana, un rand si un zero).

Complexitatea timp si spatiu este $O(N^2)$. Desigur pentru 100 de puncte trebuie implementate numere mari, trebuie redusa complexitatea spatiu la O(N) (adica se folosesc doar ultimele doua linii din matrice) si nu trebuie calculata toata matricea. De asemenea, ar trebui ca la implementarea numerelor mari baza in care se lucreaza sa fie babană.

Varianta 2

Notăm cu $(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_p, j_p)$, indicii elementelor nule din tabloul a şi cu P_n mulţimea tuturor permutărilor $x=(x_1, ..., x_n)$ ale mulţimii $\{1,2, \dots, n\}$.
Definim mulţimile $A_1, \dots, A_p$ astfel:
$A_k = \{x \in P_n \mid x_{i_k} = j_k\}$, pentru $k \in \{1,2, \dots, p\}$. Obţinem $card(A_k) = (n-1)!$, pentru $k \in \{1,2, \dots, p\}$,
$card(A_k \cap A_i) = (n-2)!$, $k \neq i$, $card(A_k \cap A_i \cap A_j) = (n-3)!$, $k \neq i$, $k \neq j$, $j \neq i$. etc.
Din modul de definire al sumei s(a), avem: $s(a) = \sum_{x \in P_n} a_{1x_1} a_{2x_2} ... a_{nx_n}$ (*).

Din (*) rezultă, termenii nuli din s(a) sunt cei pentru care $x \in A_k$, $k \in \{1,2, \dots, p\}$. Folosind principiul includerii şi excluderii, găsim că numărul acestor termeni este

$$card(\bigcup_{i=1}^{p} A_i) = C_p^1 (n-1)! - C_p^2 (n-2)! + ... + (-1)^{p-1} C_p^p (n-p)!.$$

De aici obţinem că numărul căutat este $n! - C_p^1 (n-1)! - C_p^2 (n-2)! + ... + (-1)^{p-1} C_p^p (n-p)!$.
Calculul acestui număr se va face folosind operaţii cu numere mari.