Descrierea soluţiei maxmaxmax **100 puncte**

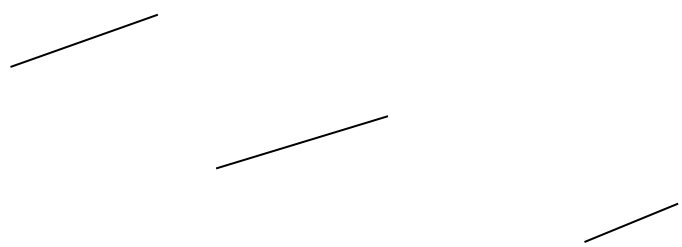
(Autori: Prof. Szabó Zoltan ISJ Mureş

Stud. Oprică Dragoş – Universitatea Bucureşti)

Pentru a calcula numărul şirurilor de **`n`** elemente cu valori din mulţimea {**`x, x+1, ... , y`**} ce admit un număr maxim de subşiruri strict descrescătoare de lungime maximă, vom avea în vedere următoarele cunoştinţe:

1. pe mulţimea {**`x, x+1, ... , y`**} există tot atâtea şiruri care admit un număr maxim de subşiruri strict **descrescătoare** de lungime maximă câte admit un număr maxim de subşiruri strict **crescătoare** de lungime maximă.

2. un şir neordonat va conţine mai puţine subşiruri de lungime maximă decât un şir **ordonat pe trepte**.
   Vom spune că un şir este **ordonat pe trepte,** dacă este un şir strict descrescător de secvenţe crescătoare.

   Exemplu: şirul (10, 10, 13, 7, 7, 7, 8, 4, 4, 5, 6, 6, 1, 2) conţine patru trepte, şi anume:

   treapta 1: (10,10,13) cu cardinalul 3
   treapta 2: (7, 7, 7, 8) cu caradinalul 4
   treapta 3: (4, 4, 5, 6, 6) cu cardinalul 5
   treapta 4: (1,2) cu cardinalul 2

   Făcând produsul cartezian al acestor mulţimi, obţinem câte un subşir strict descrescător de lungime maximă, Vom avea 3 * 4 * 5 * 2=120 de soluţii distincte.
   Suma cardinalelor este **`n`**.

3. pentru a maximiza acest număr trebuie să avem o partiţie optimă a numărului n.

   Adică ne interesează $\prod \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{max}$ cu $\sum x_i = n$.

   Astfel avem 3 cazuri, în funcţie de valoarea lui n:

   a. dacă n=3k,
      atunci cea mai bună partiţie este (3, 3, ... ,3) şi ne oferă maximul 3 * 3 * ... * 3= 3^k

b. dacă n=3k+1, atunci avem două partiţii optime, şi anume:

   (4, 3, 3, ... , 3) cu cardinalul k

   (2, 2, 3, 3, ... , 3) cu cardinalul k+1

   ambele partiţii au produsul $4 * 3^{k-1}$

c. dacă n=3k+2,
   atunci cea mai bună partiţie este (2, 3, 3, ... ,3) şi are cardinalul k+1, şi produsul $2*3^{k}$

Mulţimea valorilor {**`x, x+1, ... , y`**} are cardinalul**`y-x+1.`**
Scopul nostru este să calculăm numărul **şirurilor treaptă** cu cardinalul secvenţelor încadrându-se în cazul corespunzător.

d. Există şi un al patrulea caz: dacă valorile posibile disponibile **`x, x+1, ... , y`** sunt mai puţine decât numărul treptelor la cazurile a, b şi c atunci, cardinalul submultimilor trebuie sa fie cat mai omogen, adica diferenta oricaror doua numere cardinale sa fie mai mică sau egală cu 1.

4. Deci ne interesează câte şiruri ordonate pe **t** trepte avem cu proprietăţile de mai sus?

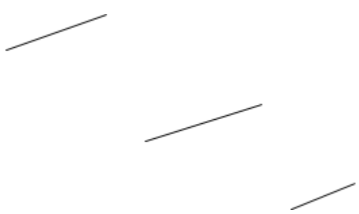


fig. a.
sir pe trepte

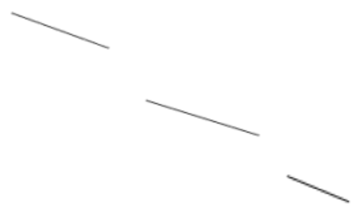


fig. b.
sir descrescator

fig. c.
din care am eliminat treptele

Avem tot atâtea şiruri descrescătoare pe o mulţime, câte şiruri crescătoare, deci numărul şirurilor ordonate pe **t** trepte este egal cu numărul şirurilor descrescătoare ce au cel puţin **t valori distincte** pe mulţimea{**`x, x+1, ... , y`**}.

Adică numărul şirurilor treaptă este egal cu numărul şirurilor descrescătoare, cu cel puţin **t** valori distincte (figurile a şi b).

Cum două trepte învecinate trebuie să aibă o diferenţă de cel puţin 1. Dacă modificăm elementele şirului prin adăugarea pe trepte, începând cu a doua traptă, valorile **`1, 2, ... , t-1`**, vom obţine un şir descrescător pe intervalul {**`x+t-1, ... , y`**} (fig c.)

5. Problema se reduce la următoarea problemă: câte şiruri **descrescătoare** cu **n** elemente avem pe mulţimea {**`x+t-1, ... , y`**}?
   Rezultatul este egal cu numărul şirurilor **crescătoare** pe intervalul**`{0, ... , y-x-t+1},`** sau, mai simplu, pe un interval {0, ... , p} , cu p=y-x-t+1.

Numărul şirurilor crescătoare este egal cu C_{n+p}^{n}.

Revenind la problemă, cele 4 cazuri au următoarele soluţii:

1. n=3k , n/3<=y-x+1
   n/3 grupe, deci numărul de trepte (spaţii dintre grupe) t=n/3-1

   rezultatul este $C_{n+y-x-t}^{n}$

2. n=3k+2, (n+1)/3<=y-x+1 ,
   avem (n-2)/3+1 grupe, deci numărul de trepte t=(n-2)/3
   în acest caz avem o secvenţă de lungime 2, ce poate avea (n+1)/3 poziţii distincte în şir.

   rezultatul este $\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{3}} * C_{n+y-x-t}^{n}$

3. n=3k+1, (n-1)/3<= y-x
   avem două cazuri:
   a) 4,3,3, ... 3 – avem (n-1)/3 grupe dec inumărul de trepte **t**=(n-1)/3-1
      în acest caz avem o secvenţă de lungime 4, ce poate avea **t** pozitii distincte în şir.

   $$\boldsymbol{t} * C_{n+y-x-t}^{n}$$

   b) 2,2,3,3, ... ,3 – avem (n-1)/3+1 grupe, deci numărul de trepte este **t+1**
      în acest caz avem două secvenţe de lungime 2, ce pot fi pozitionate în şir în (t+1)*t/2 moduri.

   $$\frac{\boldsymbol{t} * (\boldsymbol{t}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}} * C_{n+y-x-t-1}^{n}$$

   rezultatul cumulativ este

   $$\boldsymbol{t} * C_{n+y-x-t}^{n} + \frac{\boldsymbol{t} * (\boldsymbol{t}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}} * C_{n+y-x-t-1}^{n}$$

4. celelalte cazuri:
   fiecare grupă este un şir constant, ce permite combinarea rezultatului astfel:

   $$C_{y-x+1}^{n\%(y-x+1)}$$