fractii2 – descrierea soluției

Prof. Adrian Panaete – Colegiul Național "A. T. Laurian" Botoșani

Pentru prima cerință o soluție corectă este

$$1 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{N-3}} + \frac{1}{2^{N-2}} + \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^{N-1}}$$

Deci se pot afișa pe prima linie numerele $1, 2, 3, \ldots N-3, N-2, N-1, N-1$ în orice ordine și separate prin spațiu. Evident că aceasta nu este singura soluție corectă.

Orice scriere va fi de forma $1 = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2^{k-1}} + \frac{a_k}{2^k}$ cu $a_k \neq 0$. Prin înmulțire cu 2^k se deduce imediat că a_k este număr par deci există p natural nenul cu $a_k = 2p$ deci avem $\frac{a_k}{2^k} = \frac{2p}{2^k} = \frac{p}{2^{k-1}}$ și avem în cele din urmă o altă descompunere forma $1 = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}+p}{2^{k-1}}$. Deci se poate spune că descompunerea va fi obținută alegând o altă descompunere care fracția de numitor maxim este $\frac{1}{2^{k-1}}$ de cel puțin p ori prin înlocuirea a p astfel de fracții cu $2p$ fracții $\frac{1}{2^k}$ și se observă că descompunerea astfel obținută conține cu exact p fracții mai mult.
Observăm că astfel avem o metodă standard prin care se poate forma scrierea dorită.
Initial plecăm de la scrierea unică $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2^1}$ apoi pentru fiecare $i, 1 \leq i < k$ păstrăm exact a_i fracții $\frac{1}{2^i}$ iar pe fiecare dintre cele rămase le transformăm în câte două fracții $\frac{1}{2^{i+1}}$.
Numărarea descompunerilor se poate face prin metoda programării dinamice plecând de la observatia de mai sus.
Notăm $D[m][i]$ numărul de descompuneri formate din m fracții dintre care $2i$ au numitor maxim.
Pentru oricare astfel de descompunere putem alege acum orice $j, 1 \leq j \leq 2i$ și scriem j dintre fracțiile de numitor maxim ca sumă de două fracții cu numitorul dublat. Se va obține o nouă descompunere formată din $m + j$ fracții dintre care $2j$ au numitor maxim.
Aplicăm dinamică înainte adunând $D[m][i]$ la $D[m + j][j]$ pentru orice j cu $1 \leq j \leq 2i$ dacă $m + j < N$
Soluția finală va obține prin adunarea valorii $D[m][i]$ de fiecare dată când obținem $m + j = N$.