Problema **pete** – Descrierea soluției
Prof. Cristina SICHIM
Colegiul Național ”Ferdinand I”Bacău

Putem reprezenta fiecare coloană a matricei ca o mască de biți (bit 1 – pentru culoarea roșie și bit 0 – pentru culoarea albă).
Pentru o lățime m, avem 2^m stări posibile pentru fiecare dintre coloane.

- Cazul p=2

O pată de dimensiuni 2x2 se formează prin alăturarea a două configurații x și y ce conțin, în aceeași poziție, doi biți consecutivi, cu aceeași valoare.
Dacă notăm C(n,u) numărul șirurilor de lungime n, în care pe coloana n avem configurația u, atunci putem obține ușor recurența
$C(n,u) = \sum_{q=1}^{1\ll m} C(n-1,q)$/ cu proprietatea că u și q nu formează o pată, prin alăturare.

- Cazul m=p=3

Fiecare coloană a matricei poate avea una dintre următoarele 8 configurații:

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7

Acest lucru presupune numărarea tuturor șirurilor de lungime n care nu conțin secvențe de forma 0,0,0 și 7,7,7, secvențe care ar conduce la formarea unor pete de dimensiuni 3x3.
Notăm:
Z_1^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 0 și înaintea lui se află o valoare nenulă
Z_2^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimele două numere din șir sunt 0 și înaintea acetora se află o valoare nenulă
S_1^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 7 și înaintea lui se află o valoare diferită de 7
S_2^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimele două numere din șir sunt 7 și înaintea acestora se află o valoare diferită de 7
A^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este diferit de 0 și 7

Obținem, așadar:
$Z_1^1 = 1, Z_2^1 = 0,\ S_1^1 = 1, S_2^1 = 0, A^1 = 6$

$$Z_1^k = S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + A^{k-1}$$
$$Z_2^k = Z_1^{k-1}$$
$$S_1^k = Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + A^{k-1}$$
$$S_2^k = S_1^{k-1}$$
$$A^k = \left(Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + A^{k-1}\right) * 6$$

Configurațiile fiind complementare, rezultă că $Z_1^k = S_1^k, Z_2^k = S_2^k$, ceea ce conduce la următorul rezultat:

$$Z_1^k = Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + A^{k-1}$$
$$Z_2^k = Z_1^{k-1}$$
$$A^k = \left(2 * (Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1}) + A^{k-1}\right) * 6$$

Valoarea determinată: $2(Z_1^n + Z_2^n) + A^n$

- Cazul m=p=4

Fiecare coloană a matricei poate avea una dintre următoarele 16 configurații:

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Acest lucru presupune numărarea tuturor șirurilor de lungime n care nu conțin secvențe de forma 0,0,0,0 și 7,7,7,7 secvențe care ar conduce la formarea unor pete de dimensiuni 4x4.
Notăm:
Z_1^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 0 și înaintea lui se află o valoare nenulă
Z_2^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimele două numere din șir sunt 0 și înaintea acetora se află o valoare nenulă
Z_3^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimele trei numere din șir sunt 0 și înaintea acetora se află o valoare nenulă

S_1^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 7 și înaintea lui se află o valoare diferită de 7
S_2^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimele două numere din șir sunt 7 și înaintea acestora se află o valoare diferită de 7
S_3^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimele trei numere din șir sunt 7 și înaintea acestora se află o valoare diferită de 7

A^k = numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este diferit de 0 și 7

Obținem, așadar:
$Z_1^1 = 1, Z_2^1 = 0,\ Z_3^1 = 0,\ S_1^1 = 1, S_2^1 = 0, S_3^1 = 0, A^1 = 14$

$$Z_1^k = S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + S_3^{k-1} + A^{k-1}$$
$$Z_2^k = Z_1^{k-1}$$
$$Z_3^k = Z_2^{k-1}$$
$$S_1^k = Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + Z_3^{k-1} + A^{k-1}$$
$$S_2^k = S_1^{k-1}$$
$$S_3^k = S_2^{k-1}$$
$$A^k = \left(Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + Z_3^{k-1} + S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + S_3^{k-1} + A^{k-1}\right) * 14$$

Configurațiile fiind complementare, rezultă că $Z_1^k = S_1^k, Z_2^k = S_2^k$, $Z_3^k = S_3^k$, ceea ce conduce la următorul rezultat:

$$Z_1^k = Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + Z_3^{k-1} + A^{k-1}$$
$$Z_2^k = Z_1^{k-1}$$
$$Z_3^k = Z_2^{k-1}$$
$$A^k = \left(2 * (Z_1^{k-1} + Z_2^{k-1} + Z_3^{k-1}) + A^{k-1}\right) * 14$$

Valoarea determinată: $2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n) + A^n$

- Cazul m=4, p=3

Fiecare coloană a matricei poate avea una dintre următoarele 16 configurații:

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Atunci când se completează o coloană k, trebuie să avem grijă să nu obținem o pată de dimensiuni 3x3, conform imaginilor următoare:

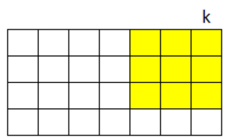

figura 1

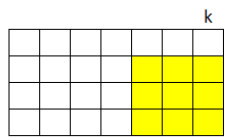

figura 2

- Pata din figura 1 poate fi obținută din alipirea numerelor 0, 1 sau a numerelor 14 și 15, configurații similare (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,1) – (15,15,15), (15,15,14), (15,14,15), (15,14,14), (14,15,15), (14,15,14),(14,14,14)
- Pata din figura 2 poate fi obținută din alipirea numerelor 0, 8 sau a numerelor 7 și 15, configurații similare (0,0,0), (0,0,8), (0,8,0), (0,8,8), (8,0,0), (8,0,8), (8,8,8) – (15,15,15), (15,15,7), (15,7,15), (15,7,7), (7,15,15), (7,15,7),(7,7,7)

- Se observă că avem două configurații comune {(0,0,0) și (15,15,15)}

Este suficient să analizăm cazul petelor albe.
Pentru coloana k, notăm:

- x_0=numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 0 și înaintea lui se află o valoare $x \notin \{0,1,8\}$
- x_1=numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 1 și înaintea lui se află o valoare $x \notin \{0,1\}$
- x_8=numărul șirurilor de lungime k cu proprietatea că ultimul număr din șir este 8 și înaintea lui se află o valoare $x \notin \{0,8\}$
- x_{00} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 00 și $x \notin \{0,1,8\}$
- x_{01} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 01 și $x \notin \{0,1\}$
- x_{08} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 08 și $x \notin \{0,8\}$
- x_{10} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 10 și $x \notin \{0,1\}$
- x_{11} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 11 și $x \notin \{0,1\}$
- x_{80} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 80 și $x \notin \{0,8\}$
- x_{88} = numărul șirurilor de lungime k cu sufix 88 și $x \notin \{0,8\}$
- a= numărul șirurilor de lungime k care nu se termină cu elemente din mulțimea $\{0,1,8,7,14,15\}$

Este evident că $x_1=x_8$, $x_{01}=x_{08}$, $x_{10}=x_{80}=x_{11}=x_{88}$

Pentru pata roșie, avem notațiile similare x_{15} x_7 x_{14} $x_{15,15}$ $x_{15,7}$ $x_{15,14}$ $x_{7,15}$ $x_{14,15}$ $x_{7,7}$ $x_{14,14}$ cu

Inițial
$x_0=x_1=x_8=1$
$x_{00}=x_{01}=x_{10}=x_{11}=0$
a=10

Pentru coloana k+1, vom avea valorile corespondente:

Notăm cu $S_x^k=x_0+x_1+x_8+x_{00}+x_{01}+x_{08}+x_{10}+x_{80}+x_{11}+x_{80}+x_{88}$ corespunzătoare coloanei k
Pentru petele roșii, notăm suma corespunzătoare $S_y^k = S_x^k$

$$S_x^k = x_0^k + 2x_1^k + x_{00}^k + 2x_{01}^k + 4x_{10}^k$$

$$x_0^{k+1} = A^k + S_x^k$$

$$x_1^{k+1} = A^k + S_y^k + x_8^k + x_{08}^k + x_{88}^k = A^k + S_x^k + x_1^k + x_{01}^k + x_{10}^k$$

$$x_{00}^{k+1} = x_0^k$$

$$x_{01}^{k+1} = x_0^k + x_{80}^k = x_0^k + x_{10}^k$$

$$x_{10}^{k+1} = x_1^k$$

$$a^{k+1} = (2 * S_x^k + a^k)*10$$

Valoarea determinată: $2S_x^n + A^n$