Descrierea soluției - ecuatie

Prof. Cheşcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Costin Neniţescu" Buzău

Varianta 1 (recursivitate)

O soluție recursivă se poate realiza astfel:

Notăm cu sol(N,T) numărul de soluții al ecuației care are n necunoscute și produsul necunoscutelor este T.

Desigur sol(1,T) = 1 și sol(N,1) = 1.

Numărul de soluții ale ecuației cu 2 necunoscute poate fi rezolvat parcurgând toți divizorii lui T, cu alte cuvinte sol(2,T) = sol(1,T/d_1) + sol(1,T/d_2) + ... + sol(1,T/d_k), unde d_1, d_2 , ..., d_k sunt divizorii lui T.

Printr-un raționament asemănător deducem că

sol(N,T) = $\sum_{d_k|t} sol(N-1,T/d_k)$

Soluția obține aproximativ 1/2 din punctaj.

Varianta 2 (backtracking)

Se generează pe stivă toate soluțiile ecuației. Pentru eficiență se generează doar soluții crescătoare și cu ajutorul formulei permutărilor cu repetiție se calculează numărul soluțiilor similare cu cea generată pe stivă. Tot pentru eficientizare se precalculează k! cu 1

≤ k ≤ 10. Soluția este mai eficientă decât recursivitatea descrisă anterior și obține aproximativ 3/4 din punctaj.

Varianta 3 (inducție matematică)

Vom demonstra că numărul de soluții ale ecuației de mai sus este calculabil utilizând relația :

$$s(n,T) = \prod_{i=1}^{k} C_{\alpha_i+n-1}^{n-1} \qquad (1)$$

unde $\alpha_i, 1 \le i \le k$, reprezintă exponenții descompunerii numărului T în factori primi, T = $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_k^{\alpha_k}$.

<u>Inducție matematică după n.</u>

- n = 1

Ecuația X_1 = T are, în mod evident, o singură soluție, iar formula (1) de furnizează

$$s(1,T) = \prod_{i=1}^{k} C_{\alpha_i}^{0} = 1 \text{.}$$

- n = 2.

Ecuația $X_1X_2 = T$ are desigur $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)....(\alpha_k+1)$ soluții, adică $\tau(T)$, iar formula (1) de furnizează

$$s(2,T)=\prod_{i=1}^{k} C_{\alpha_i+1}^{1}=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)....(\alpha_k+1)$$

- Să presupunem acum că ecuația $X_1 \cdot X_2 \ldots X_n = T$ are numărul de soluții dat de relația (1) și să demonstrăm că ecuația $X_1 \cdot X_2 \ldots X_n \cdot X_{n+1} = T$, are numărul de soluții dat de relația $s(n+1,T)=\prod_{i=1}^{k} C_{\alpha_i+n}^{n}$ (2).

Ecuația $X_1 \cdot X_2 \ldots X_n \cdot X_{n+1} = T$ se poate scrie $X_1 \cdot X_2 \ldots X_n = \frac{T}{X_{n+1}}$ și cum $X_1, X_2, \ldots, X_n \in N$, atunci $\frac{T}{X_{n+1}} \in N$ și deci $\frac{T}{X_{n+1}}$ este unul dintre divizorii lui T.

Așadar numărul de soluții este suma tuturor soluțiilor date de relația (1) ale ecuației $X_1 \cdot X_2 \ldots X_n = d$, unde d este un divizor al lui T.

Un divizor al lui T este un număr de forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$ unde $\beta_i \in [0,1,..,\alpha_i]$, $1 \le i \le k$, deci:

$$s(n+1,T)=\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2}....\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k} C_{\beta_i+n-1}^{n-1}.$$

Să analizăm prima sumă din această relație

$$\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k} C_{\beta_i+n-1}^{n-1} = \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}\left(\prod_{i=1}^{k-1} C_{\beta_i+n-1}^{n-1}\right) C_{\beta_k+n-1}^{n-1} = \ldots$$

și cum termenul din paranteză este independent de β_k

$$\ldots = \left(\prod_{i=1}^{k-1} C_{\beta_i+n-1}^{n-1}\right)\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} C_{\beta_k+n-1}^{n-1} = \ldots$$

$$\ldots = \left(\prod_{i=1}^{k-1} C_{\beta_i+n-1}^{n-1}\right)\left(C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + \ldots + C_{\alpha_k+n-1}^{n-1}\right)$$

Însă $C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + \ldots + C_{\alpha_k+n-1}^{n-1} = C_{n-1}^{0} + C_{n}^{1} + \ldots + C_{\alpha_k+n-1}^{\alpha_k}$

Se poate demonstra folosind proprietățile triunghiului lui Pascal (formula "crosei de hochei") că

$$C_{n-1}^{0} + C_{n}^{1} + \ldots + C_{\alpha_k+n-1}^{\alpha_k} = C_{\alpha_k+n}^{\alpha_k} = C_{\alpha_k+n}^{n}$$

Acest termen nu depinde de β_i, $1 \le i \le k-1$ și "migrează" în fața tuturor sumelor.

Analog se calculează și celelalte sume și obținem

$$s(n+1,T) = \prod_{i=1}^{k} C_{\alpha_i+n}^{n} .$$

Așadar conform principiului inducției matematice putem afirma că numărul de soluții ale ecuației $X_1 \cdot X_2 \ldots X_n = T$, cu n, T ∈ N este calculabil cu relația (1), unde $\alpha_i, 1 \le i \le k$,

reprezintă exponenții descompunerii numărului T în factori primi, T = $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_k^{\alpha_k}$.

Ordinul de complexitate al acestei soluții este O($\sqrt{T}$) și obține punctaj maxim