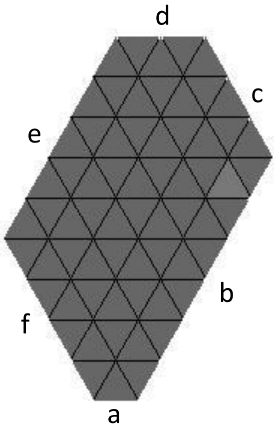
Problema equicover (Autor Adrian Panaete)

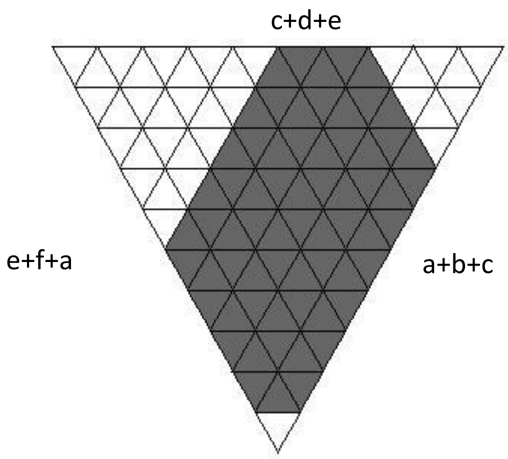
Un poligon care se poate descompune in triunghiuri echilaterale de latura 1 are laturile de lungimi numere naturale. Orice unghi poate fi de 120° (in vârful respectiv se lipesc 2 triunghiuri) sau de 60°(in vârful respectiv avem exact un triunghi).

Se poate observa că formele posibile de poligoane pot fi doar următoarele:

- Triunghi echilateral (3 unghiuri de 60°)
- Paralelogram (doua unghiuri opuse de 60° celelalte doua opuse de 120°)
- Romb (forma particulara a paralelogramului)
- Trapez isoscel (unghiurile de la baza mica de 60° si cele de la baza mare de 120°)
- Pentagon (un unghi de 30 de grade si celelalte patru de 120°)
- Hexagon (cu toate unghiurile de 120°)

Vom analiza iniţial hexagonul si vom observa ulterior ca de fapt celelalte cazuri sunt situaţii degenerate ale hexagonului.





Sa notam cele 6 laturi cu a,b,c,d,e,f unde a =latura minima. Daca prelungim laturile din doua in doua se va obţine un triunghi echilateral de latura L=a+b+c=c+d+e=e+f+a.

Deducem ca a+b=d+e ; b+c=e+f; c+d=f+a. In plus deoarece orice triunghi echilateral de latura naturala L se descompune in exact L^2 triunghiuri de latura 1 se poate calcula imediat numărul de triunghiuri din hexagon cu formula $n=L^2-a^2-c^2-e^2$ deoarece hexagonul se obţine eliminând din triunghiul de latura L trei triunghiuri echilaterale de laturi a,c si respectiv e (cele 3 triunghiuri colorate in alb in a doua figura).

Pentru a fi siguri ca nu exista riscul sa repetam aceeaşi soluţie fixăm următoarele condiţii (fără a reduce din generalitatea problemei):

- a este latura de lungime minima
- $c \le e$

Odată impuse aceste condiţii, vom introduce următoarele notaţii:

$a=x\geq 0$

d-a=y≥0
c-a=z≥0
e-c=t≥0
si imediat se pot calcula laturile
a=x
b=x+y+z+t
c=x+z
d=x+z
e=x+z+t
f=x+y+z
L=a+b+c=3x+y+2z+t
Deci pentru n triunghiuri echilaterale soluţia va fi exact numărul de soluţii naturale ale ecuaţiei:
$(3x+y+2z+t)^2-x^2-(x+z)^2-(x+z+t)^2=n$
Care poate fi reformulata astfel
$6x^2+y^2+2z^2+6xy+8xz+4xt+4yz+2yt+2zt=n$ care este ecuaţie de gradul 1 in t si se poate scoate t un funcţie de valoarea cunoscuta n si de parametrii naturali x,y,z cu formula
$t=(n-6x^2-y^2-2z^2-6xy-8xz-4yz)/ (4x+2y+2z)$.
Condiţiile de existenţă a soluţiei sunt:
1. $n>6x^2+y^2+2z^2+6xy+8xz+4yz$
2. y de aceeaşi paritate cu n (pentru ca numitorul este par)
3. 4x+2y+2z divide $n-6x^2-y^2-2z^2-6xy-8xz-4yz$/.
4. 4x+2y+2z>0.

Obţinem următorul algoritm
Pentru x>=0 si $6x^2$<=n x++
    Pentru y>=0 si $6x^2+y^2+6xy$<=n y++
        Pentru z>=0 si $6x^2+y^2+2z^2+6xy+8xz+4yz$<n z++
            Daca se verifica toate condiţiile 3. si 4.
                Incrementează soluţia (numărul de poligoane)

Observaţie: În funcţie de anularea valorilor x,y,z, t se obţin următoarele tipuri de poligoane(eventual poligoane degenerate):

	a=x	b=x+y+z+t	c=x+z	d=x+y	e=x+z+t	f=x+y+z	Poligon
x=y=z=t=0	0	0	0	0	0	0	Punct(degenerat)
x=y=z=0	0	t	0	0	t	0	Segment de lungime t (degenerat)
x=y=t=0	0	z	z	0	z	z	Romb de latura z
x=z=t=0	0	y	0	y	0	y	Triunghi ehilateral de latura y
y=z=t=0	x	x	x	x	x	x	Hexagon regulat de latura x
x=y=0	0	z+t	z	0	z+t	z	Paralelogram cu laturile z si z+t

x=z=0	0	y+t	0	y	t	y	Trapez isoscel cu baza mare y+t, baza mica y si laturile neparalele y
x=t=0	0	y+z	z	Y	z	y+z	Pentagon (simetric)
y=z=0	x	x+t	x	x	x+t	x	Hexagon(simetric) Cu doua laturi opuse egale mari si celelalte 4 egale mici
y=t=0	x	x+z	x+z	x	x+z	x+z	Hexagon(simetric) Cu doua laturi opuse egale mici si celelalte 4 egale mari
z=t=0	x	x+y	x	x+y	x	x+y	Hexagon(simetric) cu laturi egale din doua in doua
x=0	0	y+z+t	z	y	z+t	y+z	Pentagon(asimetric)
y=0	x	x+z+t	x+z	x	x+z+t	x+z	Hexagon cu laturile egale din trei in trei
z=0	x	x+y+t	x	x+y	x+z+t	x+y	Hexagon(simetric) format din doua trapeze isoscele cu baza mare comuna dar cu baze mici diferite
t=0	x	x+y+z	x+z	x+y	x+z	x+y+z	Un alt hexagon simetric
x,y,z,t≠0							Hexagon asimetric