Lant – descriere solutie

Prof. Zoltan Szabo, Gr. Sc. "Petru maior" Reghin
Asist. dr. ing. Mugurel Ionut Andreica, Universitatea "Politehnica" Bucuresti

Solutie – 30 puncte

Vom numara cazurile distincte de partiţionare a unui număr n în `2k-1` numere, dintre care numerele de pe poziţii impare sunt ≥ 3 iar de pe poziţiile pare ≥ 0 pe care îl vom nota cu `P(n,k)`.
Acest număr conţine toate partiţionările asimetrice de două ori şi toate partiţionările simetrice o singură dată. Numărul partiţionărilor simetrice se poate calcula cu ajutorul numerelor de forma `P(..., k div 2)`. Dacă aceste valori le adunăm la `P(n,k)` şi împărţim la `2`, obţinem răspunsul la problemă.

Complexitate : O(N^2*K)

Solutie – 50-60 puncte

Procedam ca in solutia de mai sus si reducem complexitatea folosindu-ne de niste sume partiale pentru a calcula P (n, k).

Complexitate: O(N*K)

Solutie – 100 puncte

Sa remarcam mai intai ca segmentele ce unesc ochiurile intre ele pot fi "atasate" unor noduri ale ochiurilor. Apoi, sa observam ca putem atasa aceste segmente de ochiuri astfel incat, daca eliminam cate un segment din fiecare ochi, obtinem un lant format din **`m-k`** segmente. Cele `k` ochiuri se pot forma prin trasarea a `k` muchii care nu se intersecteaza (decat, cel mult, in capete) intre perechi de noduri ale lantului (exista `m-k+1` varfuri pe lant), cu conditia ca primul si ultimul nod de pe lant sa faca parte din aceste perechi. Consideram ca doua muchii se intersecteaza si daca una din ele o "imbratiseaza" pe cealalta.

Sa observam apoi ca pentru a determina numarul de modalitati de formare a ochiurilor, este suficient sa rezolvam urmatoarea problema: in cate moduri putem trasa `k` muchii care nu se intersecteaza intre perechi de noduri ale unui lant format din `m-k` noduri, cu conditia ca oricare `2` muchii sa aiba capete disjuncte si ca primul si ultimul nod de pe lant sa faca parte dintr-o pereche. Aceasta problema este echivalenta cu problema initiala. Trebuie observat ca avem urmatoarele diferente fata de problema initiala (care, impreuna, genereaza echivalenta intre cele doua probleme):

- un lant cu un nod mai scurt (`m-k` noduri in loc de `m-k+1`)
- ochiurile pot avea si doar doua noduri (in loc de cel putin `3`)
- ochiurile nu pot avea noduri comune (in timp ce in problema initiala doua ochiuri consecutive pot avea un nod comun)

Va lasam ca exercitiu demonstrarea echivalentei intre cele doua probleme.

Numarul de modalitati de formare a ochiurilor (incluzand si repetitiile) pentru noua problema este `C(m-k-2, 2*k-2)` (combinari de `m-k-2` luate cate `2*k-2`). Demonstratia echivalentei intre aceste combinari si numarul dorit este simpla: O combinare selecteaza `2*k-2` noduri, la care noi adaugam la inceput primul nod si la final ultimul nod (in total avem acum `2*k` noduri). Apoi, cele `k` muchii se traseaza astfel: unim primul nod cu al doilea, al treilea cu al patrulea, etc.

Dintre modalitatile numerate, unele sunt numerate de doua ori (intrucat sunt echivalente daca le privim din stanga sau din dreapta), iar altele doar o singura data (modalitatile "palindrom"). Numarul de modalitati palindrome este egal cu: `C((m-k-2)/2,k-1)` , daca `(m-k-2)` este par, respectiv `C((m-k-3)/2,k-1)`, daca `(m-k-2)` este impar.

Sa notam cu `A` numarul total de posibilitati si cu `B` numarul de posibilitati palindrom. Rezultatul este `B+(A-B)/2=(A+B)/2`.

Pentru a calcula eficient `C(x,y) modulo MOD` (in cazul nostru `MOD=666013`), vom proceda dupa cum urmeaza. Stim ca `C(x,y) = x!/(y!*(x-y)!)`. Calculam `U=(x!) modulo MOD`, `V=(y!) modulo MOD` si `T=((x-y)! modulo MOD)`. Daca `V` si `T` sunt diferite de `0`, atunci rezultatul este `(U*((V*T) modulo MOD)`$^{-1}$`) modulo MOD`. Sa observam ca in problema noastra `V` si `T` sunt mereu nenule deoarece:

- `x`, `y` si `(x-y)` sunt strict mai mici decat `MOD`
- `MOD` este numar prim

Avem nevoie de calculul a cel mult trei inverse modulare in aceasta problema: pentru cele doua combinari calculate si pentru impartirea finala la `2`. Aceste inverse modular pot fi calculate in mai multe moduri:

- in timp logaritmic
- in timp liniar (`O(MOD)`)
- se pot precalcula toate inversele modulare (pentru numerele de la `1` la `MOD-1`) in timpul concursului, apoi acestea pot fi incluse in sursa si citite in timp `O(1)`

Avem, de asemenea, nevoie sa calculam restul impartirii unui factorial la `MOD`. Acest lucru trebuie realizat de cel mult `6` ori (de cate `3` ori pentru fiecare din cele `2` combinari), sau se poate precalcula un vector cu resturile tuturor factorialelor (de la `0` la `MOD-1`) la impartirea la `MOD`.