Problema - Trasee – propunator Ionel-Vasile Pit-Rada

Solutie O(N^2) - realizata de Mihail-Cosmin Pit-Rada

Sa presupunem nodurile etichetate 0, 1, ... N-1, pentru a putea facilita calcularea vecinilor unui nod modulo N.

Astfel din nodul de start, nodul 0, avem doua potentiale continuari, spre nodul 1 sau spre nodul N-1. Orice alta continuare 0->i (i diferit de 0 si N-1) va divide nodurile nevizitate in doua multimi nevide, cele de o parte a dreptei 0->i si cele de partea cealalta, si va fi imposibil sa le vizitam pe toate fara a intersecta diagonala 0->i.

Folosind observatia de mai sus, se observa ca la fiecare pas, nodurile vizitate vor constitui o secventa contigua de varfuri ale poligonului: j, j+1, ..., N-1, 0, 1, ... i-1, i. Vom numi aceasta secventa pe scurt [j..i]. Continuarile posibile din aceasta secventa sunt urmatoarele:

a) daca ne aflam in nodul j: j->j-1 sau j->i+1
b) daca ne aflam in nodul i: i->i+1 sau i->j-1

Evident, unele continuari vor fi imposibile datorita faptului ca unele diagonale sunt interzise.
Sa consideram matricea A[x][y] = 0, daca segmentul x<->y e interzis
1, in caz contrar.

Fie urmatoarele definitii:

dp[i][j][0] = numarul de posibilitati de vizitare a nodurilor, respectand conditiile din enunt, ce conduc la formarea secventei [j..i], iar nodul curent este nodul i.
dp[i][j][1] = similar cu definitia de mai sus, cu diferenta ca nodul curent este nodul j.

Folosind toate observatiile anterioare si analizand prin ce "continuari" se poate ajunge in configuratia curenta [j..i] deducem urmatoarele recurente:

```
dp[i][j][0]= A[i-1][i]* dp[i-1][j][0]+ A[j][i]* dp[i-1][j][1], i > 0
dp[i][j][1]= A[j+1][j]* dp[i][j+1][1]+ A[i][j]* dp[i][j+1][0], j < N-1

    dp[0][0][0] = 1
    dp[0][0][1] = 0
```

Desi poate parea neintuitiv, dp[0][0][0] si dp[0][0][1] nu pot fi ambele 1, intrucat secventa [0..0] este redusa la un nod si in acelasi timp j=i=0 si ne situam practic in ambele noduri simultan, insa este una si aceeasi configuratie si trebuie evitata contributia redundanta spre exemplu la
dp[1][0][0] = A[0][1] * dp[0][0][0] + A[0][1] * dp[0][0][1].

Evident calculele se vor face modulo N pentru noduri, iar in dp[][][] se vor stoca modulo 1.000.000.007 .

In ce ordine se vor calcula valorile dp[i][j][*]? Se poate observa ca o secventa [j..i] se bazeaza pe secventele [j..i-1] si [j+1..i], secvente ce au cu un element mai putin decat [j..i]. Asadar, daca rezolvam secventele in ordinea crescatoare a lungimilor (cu conditia sa contina nodul de start 0), toate valorile dp[][][] folosite in recurenta lui dp[i][j][*] vor fi deja calculate, pentru ca reprezinta secvente de lungime mai mica.

Exista totusi o potentiala capcana, si anume ca la un moment dat, cand i si j devin vecine, segmentul i->i+1 va fi identic cu segmentul i->j, si este posibil sa se numere redundant configuratiile, dupa cum i->j este considerata muchie, sau diagonala. Calculul se va opri, cand distanta dintre i si j devine 2, i.e. j - i = 2.
Dintr-o astfel de configuratie finala, in mod unic se va putea vizita singurul nod ramas nevizitat, cel dintre i si j, intrucat muchiile nu sunt interzise.

Rezultatul final va fi suma tuturor configuratiilor finale, adica a valorilor

    dp[i][i + 2][0], dp[i][i + 2][1] cu i=0..N-2

(nodurile vor fi considerate modulo N).

<u>Solutie O(2^N)</u> - realizata de Mihail-Cosmin Pit-Rada

Deoarece din fiecare varf i, cu 0<i<N putem avea continuare pe muchie sau pe diagonala se vor genera toate configuratiile binare de lungime N-1 si se vor contoriza cele care conduc la solutii .

<u>Solutie O(N!)</u> - realizata de Ionel-Vasile Pit-Rada

Se construiesc permutarile de ordin N care pornesc cu 0 si se verifica pe parcurs sa nu fie trasate diagonalele nepermise.