

Soluție Xortransform

Autor: Bogdan Iordache, Bogdan Ciobanu

Considerăm matricea extinsă cu 0-uri la infinit în jos și către dreapta.

Pentru un K fixat, ne uităm la pozițiile (i, j) care influențează răspunsul pentru poziția $(0, 0)$.

Se poate observa (și demonstra) că (i, j) influențează valoarea din $(0, 0)$ după K transformări dacă și numai dacă atât i , cât și j sunt submăști ale lui K . (*)

Putem reduce problema de la 2D la 1D, concatenând poziția (i, j) în numărul $i\#j$ ($\#$ reprezintă operația de concatenare). Astfel pentru a determina pozițiile care influențează colțul stângasus iterând prin submăștile lui $K\#K$.

Observăm că fiecare membru al concatenării $K\#K$ poate fi trunchiat la K_N și K_M în funcție de numărul de linii, respectiv coloane, astfel $K_N\#K_M$ are lungimea de ordinul $O(N\#M)$.

Am redus problema inițială la următoarea: pentru un șir de valori V , vrem să calculăm:

$$D[k] := \sum_{i = \text{submasca a lui } k} V[i].$$

Pentru aceasta există mai multe abordări, dintre care menționăm:

- $O(NM \cdot \sqrt{NM})$: pentru k fixat iterăm prin toate submăștile lui în $O(\text{numărul de submăști})$ folosind iterații de forma $\text{submasca}_i = (\text{submasca}_{i-1} - 1) \& \text{masca}$. Aceasta soluție ar trebui să obțină în jur de 50 de puncte.
- $O(NM \cdot \log(NM))$: calculăm $\text{dp}[i][\text{masca}] := \text{sumă după } V[i]$ cu i submască a lui **mască** unde doar cei mai nesemnificativi i biți ai lui **masca** au voie să difere de biții lui i . $\text{dp}[0][\text{masca}] = v[\text{masca}]$, iar
$$\text{dp}[i][\text{masca}] = \begin{cases} \text{dp}[i-1][\text{masca}] & \text{dacă bitul } i-1 \text{ din masca este } 0 \\ \text{dp}[i-1][\text{masca}] + \text{dp}[i-1][\text{masca} \wedge (1 \ll (i-1))] & \text{altfel} \end{cases}$$

Această soluție ar trebui să obțină 100 de puncte.

Schiță de demonstrație pentru (*)

După K pași, valoarea de la poziția (i, j) s-a adăugat direct sau indirect la poziția $(0, 0)$ de $C(K, i) \cdot C(K, j)$ ori.

Adăugările fiind operații de xor, ne interesează doar paritatea acestui număr.

$$C(K, i) \cdot C(K, j) = 1 \pmod{2} \Leftrightarrow C(K, i) = 1 \pmod{2} \text{ și } C(K, j) = 1 \pmod{2} \quad (1)$$

Acum pentru un $C(N, K)$ oarecare, ne interesează paritatea. Folosind teorema lui Lucas, putem arăta că este impară dacă și numai dacă fiecare bit din reprezentarea binară a lui K este mai mic sau egal decât fiecare bit din reprezentarea binară a lui N . Altfel zis, K este o submască a lui N . (2)

Din (1) și (2) obținem proprietatea căutată: considerând i și j în reprezentarea binară, acestea trebuie să fie submăști ale lui K .