Centru – descrierea solutiei

Problema se rezolva in doua etape. In prima etapa vom calcula pentru fiecare nod al caroiajului distanta pana la cel mai apropiat centru de prim ajutor. In a doua etapa vom determina solutia ceruta bazandu-ne pe informatiile de la primul pas.

Calculul distantelor pana la cel mai apropiat punct de prim ajutor se realizeaza in $O(N^2)$. In acest sens, vom explicita formula distantei Manhattan intre un punct (x, y) si un centru de prim ajutor (x_c, y_c). Din formula $|x-x_c|+|y-y_c|$ se obtin patru cazuri :

1. $x \geq x_c$, $y \geq y_c \rightarrow$ distanta $= x+y-x_c-y_c$
2. $x \geq x_c$, $y < y_c \rightarrow$ distanta $= x-y-x_c-y_c$
3. $x < x_c$, $y \geq y_c \rightarrow$ distanta $= -x+y+x_c-y_c$
4. $x < x_c$, $y < y_c \rightarrow$ distanta $= -x-y+x_c+y_c$

Astfel, pentru un nod oarecare caroiajul se va imparti in patru cadrane, pentru fiecare dintre ele fiind necesar sa se minimizeze una dintre expresiile $-x_c-y_c$, $-x_c-y_c$, x_c-y_c, x_c+y_c.Acest lucru se rezolva in $O(N^2)$ folosind patru parcurgeri. Distantele minime calculate se introduc intr-o matrice M.

Sa consideram ca dupa introducerea noului punct de prim ajutor distanta maxima parcursa in cazul cel mai defavorabil este k. Asta inseamna ca toate nodurile (x, y) pentru care $M[x][y] > k$ sunt *acoperite* de noul centru, altfel spus distanta pana la acesta este mai mica decat k. De aici se contureaza prima idee de rezolvare folosind cautarea binara: se fixeaza un k si se verifica daca toate nodurile pentru care $M[x][y] > k$ pot fi acoperite cu un singur centru. De remarcat ca multimea nodurilor acoperite de un centru (x, y) este inclusa intr-un romb centrat in (x, y). Ramane astfel suficient sa verificam daca rombul minim care contine toate nodurile cu $M[x][y] > k$ pot fi incluse intr-un romb care sa satisfaca o restrictie de dimensiune (din centrul sau sa se poata ajunge in orice al nod inclus in acesta parcurgand o distanta de cel mult k). Acesta se determina in $O(N^2)$ ducand la o complexitate finala de $O(N^2 \lg N)$.

Pentru reducerea complexitatii la $O(N^2)$ se observa ca odata cu decrementarea lui k apar noi puncte care trebuie acoperite, in timp ce dimensiunea rombului care trebuie sa le acopere scade. Ramane astfel sa se considere nodurile caroiajului in ordinea descrescatoare a distantelor calculate in M si la fiecare pas sa se calculeze in $O(1)$ rombul minim care contine toate punctele considerate pana in momentul respectiv. Aceasta se realizeaza mentinand valorile $\min(x+y)$, $\max(x+y)$, $\min(x-y)$, $\max(x-y)$ pentru coordonatele nodurilor deja considerate si verificarea corespunzatoare in $O(1)$.

Pentru mai multe detalii consultati sursa oficiala.