



Problema 3 – Solutie xcmmdc

Soluția 1 – 100 de puncte, Radu Voroneanu

Observăm întâi că numărul de query-uri este mult mai mare decât dimensiunea maximă a unui query, așa că este necesar să precalculeăm răspunsul pentru fiecare latură posibilă.

Vom construi întâi o dinamică de forma: $DP[l][i][j] = \text{cmmdc}$ -ul unei submatrice pătratice de latură 2^l care are colțul stânga sus pe poziția (i, j) . Recurența acestei dinamici este:

$$DP[l+1][i][j] = \text{cmmdc}(DP[l][i][j], DP[l][i+2^l][j], DP[l][i][j+2^l], DP[l][i+2^l][j+2^l])$$

Pentru a continua, trebuie să facem următoarea observație: dacă A este cmmdc -ul unei submatrice de latură l cu colțul stânga sus în (x, y) și B este cmmdc -ul unei submatrice de latură $l+1$ cu colțul stânga sus în (x, y) , atunci $A \geq B$. Acest lucru este ușor de demonstrat întrucât adăugând elemente la o submatrice nu îi putem crește cmmdc -ul ($\text{cmmdc}(a, b) \leq a, b$).

Astfel, pentru fiecare poziție (x, y) putem căuta binar care este latura minimă și latura maximă a unei submatrice care are cmmdc -ul K . Ne vom folosi de dinamica DP pentru a determina în $O(1)$ răspunsul la întrebări de forma: care este cmmdc -ul C al unei submatrice de latură L cu colțul stânga-sus în poziția (x, y) . Fie P cel mai mare număr natural astfel încât $2^P \leq X$. Atunci,

$$C = \text{cmmdc}(DP[P][x][y], DP[P][x+L-2^P][y], DP[P][x][y+L-2^P], DP[P][x+L-2^P][y+L-2^P])$$

Știind latura minimă L_{\min} și latura maximă L_{\max} a unei submatrice de cmmdc K pentru fiecare poziție (x, y) , putem să ne folosim de un arbore de intervale pentru a incrementa numărul de soluții pentru toate laturile din intervalul $[L_{\min}, L_{\max}]$, folosindu-ne apoi de același arbore pentru a reține răspunsul final pentru toate laturile din intervalul $[1, \min(N, M)]$. Alternativ, ne putem folosi de tehnica lui Mars în locul arborelui de intervale pentru a implementa această parte din soluție.

Complexitatea finală a acestei soluții este $O(N \cdot M \cdot \log(N \cdot M) \cdot \log(\text{MAX}))$ ca timp și ca spațiu.

Soluția 2 – 50 puncte, Vlad Gavrilă

Vom construi o dinamică $D[l][i][j] = \text{cmmdc}$ -ul unei submatrice de latură l cu colțul stânga sus în poziția (i, j) . Recurența acestei dinamici va fi:

$$D[l+1][i][j] = \text{cmmdc}(D[l][i][j], D[l][i+1][j], D[l][i][j+1], D[l][i+1][j+1])$$

Pentru fiecare latură l între 1 și $\min(N, M)$ vom număra cu ajutorul acestei dinamici câte submatrice de latură l au cmmdc -ul K . Observăm că este necesar să ținem doar ultimele 2 linii ale acestei dinamici pentru a ne încadra în limita de memorie.

Complexitatea acestei soluții este $O(N \cdot M \cdot \min(N, M) \cdot \log(\text{MAX}))$ ca timp și $O(N \cdot M)$ ca memorie.

Președinte,
Radu Eugen Boriga

Vicepreședinte subcomisia clasele XI-XII,
Doru Anastasiu Popescu