Olimpiada Societății pentru Excelență și Performanță în Informatică, Etapa Națională

Descrierea Soluțiilor

Clasa a VIII-a

1 Problema Bile

Propunător: Diana Ghinea
Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) Zürich

Cerința 1 (20 puncte)

Notăm cu $\mathbf{S}$ suma numerelor bilelor din cutia $\mathbf{A}$: $\mathbf{S} = 0 + 1 + \cdots + (\mathbf{N} - 1) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{N}-1)}{2}$. Fie $\mathbf{X}$ numărul bilei speciale din cutia $\mathbf{A}$. Atunci, $\mathbf{X} = (\mathbf{S} - \mathbf{X})/(\mathbf{N} - \mathbf{1})$, din care rezultă că $\mathbf{X} = (\mathbf{N} - \mathbf{1})/\mathbf{2}$. Astfel, cutia $\mathbf{A}$ conține o bilă specială doar dacă $\mathbf{2} \mid (\mathbf{N} - \mathbf{1})$, deci dacă $\mathbf{N}$ este impar.

Complexitatea soluției: $\mathcal{O}(1)$.

Cerința 2 (40 puncte)

- Dacă $\mathbf{K^2} - \frac{\mathbf{(K-2)(K-1)}}{\mathbf{2}} \leq \mathbf{N} - \mathbf{1}$, atunci răspunsul pentru cerința 2 este șirul de numere:

$$\underbrace{0, 1, 2, 3, \ldots, \mathbf{K} - 2,}_{\substack{\text{cele mai mici } \mathbf{K}-1 \\ \text{numere naturale distincte}}} \mathbf{K}^2 - \frac{(\mathbf{K}-2)(\mathbf{K}-1)}{2}.$$

- Dacă $\mathbf{K^2} - \frac{\mathbf{(K-2)(K-1)}}{\mathbf{2}} > \mathbf{N} - \mathbf{1}$, notăm soluția acestei cerințe cu s.

  Inițializăm $s[i] = i$ pentru $i = 0, 1, \ldots, \mathbf{K} - 1$ și notăm cu S suma valorilor inițiale din s: $S = s[0] + s[1] + \cdots + s[\mathbf{K} - 1] = \mathbf{K}(\mathbf{K} - 1)/2$.

  Pentru ca media aritmetică a șirului s să fie $\mathbf{K}$, trebuie să distribuim diferența $\mathit{dif} = \mathbf{K}^2 - S$ la elementele din șir. Întrucât dorim să obținem cea mai mică soluție din punct de vedere lexicografic, vom utiliza această diferență pentru a maximiza ultimele elemente ale lui s.

  Șirul s trebuie să conțină numere distincte mai mici sau egale cu $\mathbf{N} - 1$. Astfel, cea mai mare valoare posibilă pentru $s[\mathbf{K} - 1]$ este $\mathbf{N} - 1$, cea mai mare valoare posibilă pentru $s[\mathbf{K} - 2]$ este $\mathbf{N} - 2$, ..., iar cea mai mare valoare posibilă pentru $s[0]$ este $\mathbf{N} - \mathbf{K}$. Deci, diferența dintre valoarea actuală a oricărui element din s și valoarea maximă a acelui element este $\mathbf{N} - \mathbf{K}$.

  Întrucât putem distribui doar diferența dif, vom adăuga $\mathbf{N} - \mathbf{K}$ la ultimele $g = [\mathit{dif}/(\mathbf{N} - \mathbf{K})]$ elemente din șir. Rămâne să adăugăm restul $\mathit{rest} = \mathit{dif} \ \% \ (\mathbf{N} - \mathbf{K})$. Încercăm să adăugăm restul la elementul $s[\mathbf{K} - (g + 1)]$. Dacă $s[\mathbf{K} - (g + 1)] + \mathit{rest} \neq \mathbf{K}$, adăugăm restul astfel:

Indice i	0	1	2	...	$\mathbf{K}-g-2$	$\mathbf{K}-g-1$	$\mathbf{K}-g$	$\mathbf{K}-g+1$	...	$\mathbf{K}-2$	$\mathbf{K}-1$
s[i]	0	1	2	...	$\mathbf{K}-g-2$	$\mathbf{K}-g-1+rest$	$\mathbf{N}-g$	$\mathbf{N}-g+1$		$\mathbf{N}-2$	$\mathbf{N}-1$

Altfel, dacă $s[\mathbf{K}-(g+1)]+rest=\mathbf{K}$, atunci șirul se modifică astfel:

Indice i	0	1	2	...	$\mathbf{K}-g-2$	$\mathbf{K}-g-1$	$\mathbf{K}-g$	$\mathbf{K}-g+1$	...	$\mathbf{K}-2$	$\mathbf{K}-1$
s[i]	0	1	2	...	$\mathbf{K}-g-2$	$\mathbf{K}-g+rest$	$\mathbf{N}-g-1$	$\mathbf{N}-g+1$		$\mathbf{N}-2$	$\mathbf{N}-1$

Complexitatea soluției: $\mathcal{O}(\mathbf{K})$.

Cerința 3 (40 puncte)

Notăm soluția acestei cerințe cu s. Întrucât s trebuie să fie cea mai mare soluție din punct de vedere lexicografic, încercăm să maximizăm primele elemente din s. Putem construi s astfel:

- **K par**
  Fie $\mathbf{M}=\mathbf{K}/2$. Cea mai mare valoare posibilă pentru $s[0]$ astfel încât media valorilor din șir să fie $\mathbf{K}$ este $\mathbf{K}/2$. Alegem valorile celorlalți termeni din șir astfel încât:
  - suma termenilor situați pe poziții simetrice față de mijlocul șirului să fie egală cu $2\mathbf{K}$: $s[0]+s[\mathbf{K}-1]=2\mathbf{K}, s[1]+s[\mathbf{K}-2]=2\mathbf{K},\ldots,s[\mathbf{M}-1]+s[\mathbf{M}]=2\mathbf{K}$.

  Deci, pentru **K** par, obținem următoarea soluție.

Indice i	0	1	2	...	$\mathbf{M}-1$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{M}+1$	...	$\mathbf{K}-1$
s[i]	$\mathbf{K}/2$	$\mathbf{K}/2+1$	$\mathbf{K}/2+2$	...	$\mathbf{K}-1$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{K}+2$	...	$3\cdot\mathbf{K}/2$

- **K impar**
  Fie $\mathbf{M}=[\mathbf{K}/2]$. Cea mai mare valoare posibilă pentru $s[0]$ astfel încât media valorilor din șir să fie $\mathbf{K}$ este $[\mathbf{K}/2]$. Alegem valorile celorlalți termeni din șir astfel încât:
  - $s[0]+s[\mathbf{K}-1]=2\mathbf{K}+1$;
  - $s[\mathbf{M}]=\mathbf{K}-1$;
  - suma termenilor situați pe poziții simetrice față de mijlocul șirului să fie egală cu $2\mathbf{K}$: $s[1]+s[\mathbf{K}-2]=2\mathbf{K}, s[2]+s[\mathbf{K}-3]=2\mathbf{K},\ldots,s[\mathbf{M}-1]+s[\mathbf{M}+1]=2\mathbf{K}$;

  Deci, pentru **K** impar, obținem următoarea soluție.

Indice i	0	1	2	...	$\mathbf{M}-1$	$\mathbf{M}$	$\mathbf{M}+1$	...	$\mathbf{K}-1$
s[i]	$[\mathbf{K}/2]$	$[\mathbf{K}/2]+\mathbf{1}$	$[\mathbf{K}/2]+2$	...	$\mathbf{K}-2$	$\mathbf{K}-1$	$\mathbf{K}+2$	...	$2\mathbf{K}+1-[\mathbf{K}/2]$

Complexitatea soluției: $\mathcal{O}(\mathbf{K})$.

Observații

- Nu este necesar să se utilizeze un tablou unidimensional pentru a memora termenii lui s.
- O soluție care generează toate modalitățile de a scrie pe $\mathbf{K}^2$ ca o suma de $\mathbf{K}$ numere cu proprietatea cerută va obține un punctaj parțial.

2 Problema Secvențe

Propunător: Stelian Ciurea
Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu

O soluție, cu complexitate $\mathcal{O}(\mathbf{N})$ se poate obține astfel: odată cu citirea elementelor șirului $\mathbf{v[1], v[2], ..., v[N]}$ se construiesc sumele parțiale $\mathbf{S[k] = v[1] + v[2] + ... + v[k] = S[i-1] + v[k]}$. Se va utiliza un vector de frecvență **Rest**[] a valorilor resturilor împărțirilor acestor sume parțiale la **N**. La fiecare rest negativ se va aduna **N**, rezultând un rest pozitiv din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, \mathbf{N}-1\}$.

Cerința 1 (30 puncte)

Se observă că orice N-secvenţă se poate construi cu elementele aflate între oricare două poziţii cu sumele cu acelaşi rest. Numărul de secvențe pentru un rest dat este egal cu numărul de perechi pe care îl putem forma cu pozițiile care au dat sume având acel rest (dacă avem **x** poziții, numărul de perechi este $\mathbf{x(x-1)/2}$). Facem suma acestor valori pentru fiecare rest iar din această sumă scădem numărul de secvențe banale care este egal cu numărul de valori din șirul v care sunt multiplii ai numărului **N**.

Cerința 2 (30 puncte)

Pentru fiecare valoare distinctă a resturilor se va memora poziția p_1 a primei apariții a unei sume cu acest rest și poziția p_2 a ultimei apariții a unei sume cu acest rest. Astfel, numerele din șir situate între p_1 (exclusiv) și p_2 (inclusiv) formează o N-secvență de lungime $p_2 - p_1$ care este maximală relativ la valoarea restului respectiv. Căutăm apoi maximul dintre aceste lungimi.

Cerința 3 (40 puncte)

În timp ce se construiesc cei doi vectori (vectorul sumelor parțiale și vectorul frecvențelor de apariție) se păstrează pentru fiecare rest posibil poziția unde începe o potențială secvență de sumă maximă. Pentru fiecare element din șirul dat se calculează suma maximă a secvenței care se termină în el si se compară cu o variabilă în care memorăm suma maximă (inițializată cu 0 deoarece se garantează că există cel puțin o **N**-secvență de sumă pozitivă).

Pentru fiecare element $\mathbf{v[k]}$ din șir ($k = 1, 2, ..., \mathbf{N}$) vom proceda astfel:

- se calculează suma parțială $\mathbf{S[k] = S[k-1] + v[k]}$;
- se calculează restul $\mathbf{r = S[k]\ \%\ N}$;
- dacă $\mathbf{r < 0}$ atunci $\mathbf{r = r + N}$;
- $\mathbf{Rest[r] = Rest[r] + 1}$;
- dacă $\mathbf{v[k]\ \%\ N = 0}$ atunci $\mathbf{Smax = max(Smax, v[k])}$;
- dacă $\mathbf{S[k]\ \%\ N = 0}$ atunci $\mathbf{Smax = max(Smax, S[k]}$;
- dacă $\mathbf{Rest[r] = 1}$ (adică, **r** apare pentru prima dată) atunci $\mathbf{SumaRest[r] = s[k]}$
- altfel
  - dacă $\mathbf{S[k] - SumaRest[r] < 0}$ (adică suma **N**-secvenței curente este negativă), atunci $\mathbf{SumaRest[r] = S[k]}$;
  - $\mathbf{Smax = max(Smax, S[k] - SumaRest[k])}$

La final, se va afișa **Smax**.

3 Problema Valoare

PROPUNĂTOR: RALUCA COSTINEANU
COLEGIUL NAȚIONAL ”ȘTEFAN CEL MARE”, SUCEAVA

O soluție se poate obține astfel:

Cerința 1 (10 puncte)

- folosim un vector caracteristic pentru a identifica literele distincte care apar în textul special.
- Complexitate $\mathcal{O}(n)$, unde n este lungimea textului

Cerința 2 (20 puncte)

- se parcurge șirul pentru a identifica secvențele formate doar din cifre, fiecare secvență se transformă în valoare numerică și se adună la suma generală
- Complexitate $\mathcal{O}(n)$, unde n este lungimea textului

Cerința 3 (70 puncte)

- folosim o stivă (simulată cu un vector) în care vom adăuga pe rând elemente după cum urmează:

  ◦ dacă în text urmează o paranteză deschisă adăugăm pe stivă un element care să marcheze acest lucru, de exemplu o valoare negativă (pentru a ști că aici începe repetiția unei secvențe)

  ◦ dacă în text urmează o literă atunci adăugăm pe stivă valoarea ei

  ◦ dacă urmează o paranteză închisă atunci sumăm și eliminăm elementele de pe stivă, până la prima paranteză deschisă pe care o întâlnim, și înlocuim paranteza cu valoarea sumei calculate (pentru a păstra pe stivă valoarea pe care o are textul cuprins între paranteze)

  ◦ dacă întâlnim un număr atunci valoarea din vârful stivei se înmulțește cu numărul și este înlocuită de acest produs (valoarea din vârful stivei reprezintă valoarea secvenței de text care trebuie repetat de număr ori)

- valoarea textului este dată de suma elementelor rămase la sfârșit pe stivă.

- Complexitate $\mathcal{O}(n)$, unde n este lungimea textului

Cerința 3 - soluție alternativă

Propusă de prof. Stelian Ciurea (ULB Sibiu)

- folosim o funcție recursivă în care parsăm șirul:
  - caracterele alfanumerice le tratăm în același mod ca în descrierea precedentă;
  - când întâlnim o paranteză deschisă apelăm recursiv funcția;
  - când întâlnim o paranteză închisă returnăm valoarea calculată în funcție.
  - rezultatul returnat de primul apel al acestei funcții reprezintă rezultatul problemei. Ideea de rezolvare este similară celei din descrierea precedentă cu singura diferență că folosim stiva sistemului prin mecanismul de apel și revenire în cazul funcțiilor recursive și nu o stivă implementată efectiv în program.

- folosim funcții de eliminare și inserare în șir (foarte simplu de utilizat dacă folosim string-uri) după cum urmează:
  - determinăm poziția primei ")" din șir;
  - apoi parcurgem șirul în sens invers și determinăm poziția parantezei "(" pereche;
  - construim un subșir cu elementele din șir aflate între aceste două poziții;
  - evaluăm acest subșir (care deci nu conține decât litere și cifre);
  - înmulțim rezultatul obținut cu valoarea numărului aflat după ")" ;
  - stergem din șirul inițial subșirul evaluat (cel cuprins între paranteze și numărul aflat după ")";
  - construim un șir format din litera A (deoarece A are valoarea 1) urmată de valoarea obținută în pasul precedent;
  - inserăm acest șir în poziția de unde am efectuat eliminarea;
  - reluăm acești pași până am eliminat toate parantezele din șir;
  - evaluăm șirul astfel obținut care nu mai conține decât litere și cifre;
  - algoritmul se incadrează în timp pentru toate testele chiar dacă parcurge în mod repetat șirul dat.
  - pentru a ilustra algoritmul arătăm transformările prin care trece șirul dat ca exemplu în enunțul problemei:
    (**ABAC**)**2E2**(**CD**)**2E**: prima pereche de paranteze este (**ABAC**), calculăm $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{A}$ $+\mathbf{C}=\mathbf{7}$, înmulțim cu **2**, obținem **14**; eliminăm subșirul (**ABCD**)**2** și în locul lui inserăm **A14**; rezultă șirul
    A14E2(**CD**)**2E**: analog (**CD**): $\mathbf{C}+\mathbf{D}=\mathbf{7}$ înmulțim cu **2**, obținem **14**, eliminăm (**CD**)**2**, inserăm **A14**, rezultă șirul
    A14E2A14E : la acesta calculăm prin parsare $\mathbf{1}\cdot\mathbf{14}+\mathbf{5}\cdot\mathbf{2}+\ \mathbf{1}\cdot\mathbf{14}+\mathbf{5}=\mathbf{43}$

Echipa

Setul de probleme pentru această rundă a fost pregătit de:

☺ prof. Flavius Dumitru Boian - Colegiul Național "Spiru Haret" , Târgu-Jiu

☺ prof. Veronica Raluca Costineanu - Colegiul Național "Ștefan cel Mare", Suceava

☺ prof. Mirela Mlisan - Colegiul Național "Mircea cel Bătrân", Râmnicu Vâlcea

☺ prof. Mircea Dorin Rotar - Colegiul Național "Samuil Vulcan", Beiuș

☺ stud. Bogdan Ioan Iordache - Universitatea din București

☺ stud. Ioan Cristian Pop - Universitatea Politehnică București

☺ drd. Diana Ghinea - Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) Zürich

☺ prof. Carmen Mincă - Colegiul Național de Informatică "Tudor Vianu", București

☺ ș.l. Stelian Ciurea - Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu