

## Problema Kcons    Autori Adrian Airinei, Gheorghe Cosmin

### Descrierea soluției

Pentru cazul  $K = 1$  rezolvăm problema folosind programare dinamică. Fie  $B[i][j]$  = numărul de permutări cu elementele  $1 \dots i$  astfel încât să avem  $j$  grupuri de câte 2 elemente consecutive adiacente (consecutive și în ordine crescătoare). În funcție de locul în care plasăm elementul  $i$  într-o permutare cu  $i-1$  elemente, avem trei cazuri. Îl putem plasa după elementul  $i-1$  și astfel să formăm un nou grup, să îl plasăm între 2 elemente ale unui grup deja existent și să îl plasăm oriunde altundeva. Recurența va fi:

$$B[i][j] = B[i-1][j] * (i-j-1) + B[i-1][j-1] + B[i-1][j+1] * (j+1).$$

Rezultatul se va afla în  $B[N][0]$ .

Pentru cazul când  $K > 1$ , să privim de exemplu permutarea 2 3 4 1 5 6 8 7 9 10. Observăm că ea este formată din următoarele subsecvențe cu elemente consecutive:

2 3 4, 1, 5 6, 8, 7 și 9 10.

Putem să considerăm că avem scrise numerele de la 1, 2, 3 ... N în ordine și vrem să împărțim șirul în subsecvențe de lungime cel mult K. Apoi aceste subsecvențe pot fi permutate, dar trebuie să avem grijă să nu avem două subsecvențe de genul 2 3 4 și 5 6 una după cealaltă. În cazul acesta s-ar forma subsecvența 2 3 4 5 6 și noi vrem să avem independent în permutare cele două subsecvențe.

Să notăm cu  $A[i][j]$  numărul de posibilități de a împărți șirul  $1, 2 \dots i$  în exact  $j$  subsecvențe de lungime cel mult K. Recurența se obține ușor și putem calcula în  $O(N^2)$  toate stările posibile. Acum pentru fiecare  $j$  dacă ne uităm la  $A[N][j]$  vrem să știm în câte moduri putem permuta subsecvențele formate. Acest număr observăm că este de fapt  $B[j][0]$  (privim subsecvențele ca numere de la 1 la  $j$ ).

Să luăm un exemplu concret: presupunem că  $N = 9, K = 3$ . O împărțire posibilă a șirului 1, 2 .. 9 ar putea fi:

**1 2 3, 4 5, 6 7, 8 9**

Subsecvenței 1 2 3 îi atribuim numărul 1, lui 4 5 numărul 2, lui 6 7 numărul 3 și lui 8 9 numărul 4. Atunci trebuie să găsim de fapt numărul de permutări de 4 elemente astfel încât să nu existe două elemente consecutive și adiacente (consecutive și în ordine crescătoare), practic problema pentru  $K = 1$ .