

Camion – soluția problemei

Soluția problemei: greedy

Din enunțul problemei se observă că rețeaua de drumuri constituie un arbore, iar orașul 1 este rădăcina.

Pentru început, să observăm că într-o planificare care este optimă din punct de vedere al sumei distanțelor parcurse, fiecare cursă trebuie să se termine într-un nod care este frunză. Această afirmație se poate demonstra prin reducere la absurd: să presupunem că o cursă se termină într-un nod care nu e frunză – să îl notăm în continuare cu n_x . Evident că n_x are cel puțin un subarbore în care se află un nod terminal. Deoarece cursele planificate trebuie să treacă prin toate nodurile din arbore, ar rezulta două situații:

- fie cursa care se termină în n_x a vizitat nodurile din acest subarbore și apoi a revenit în n_x , deci drumul de întoarcere de la nodul terminal la n_x a fost parcurs inutil și evident planificarea nu are o sumă a distanțelor minimă.
- fie există o altă cursă care a vizitat subarboarele respectiv, deci drumul de la rădăcină (orașul 1) la n_x a fost parcurs de două ori, ceea ce face ca planificarea să nu fie optimă din punct de vedere al distanțelor parcurse (dacă până în n_x există diferențe între cele două curse, a doua cursă ar fi putut astfel construită încât să viziteze exact aceleași localități ca prima cursă)

O a doua observație – evidentă – este că nu are rost să avem două curse care să se termine în același nod terminal.

O să presupunem că facem o colorare a nodurilor din arbore în două culori:

- roșu = cele care sunt parcurse în „două sensuri” – adică dacă avem un nod n_1 și predecesorul lui p_{n_1} , pentru nodurile roșii muchiile (p_{n_1}, n_1) și (n_1, p_{n_1}) vor apărea în cel puțin o cursă.
- albastru – celelalte (parcurse într-un singur sens).

Din observațiile anterioare rezultă că vom avea cel mult p noduri terminale albastre.

O anumită configurație a curselor va corespunde cu o anumită schemă de colorare a nodurilor din graf. Pentru a calcula suma distanțelor parcurse, să presupunem că avem un nod n_x și un subarbore a lui n_x colorat roșu. Atunci pentru acest subarbore, fiecare muchie va fi parcursă de două ori, având în vedere observațiile anterioare (cursa care parcurge acest subarbore va pleca și se va întoarce în n_x). Rezultă că suma distanțelor parcurse va fi egală cu suma distanțelor de pe muchiile care alcătuiesc căile de la nodul rădăcină la nodurile terminale albastre + $2 \cdot$ (suma distanțelor de pe muchiile celelalte).

Algoritmul va menține pentru fiecare nod terminal, cel mai „apropiat nod albastru” (ultimul nod albastru întâlnit pe calea de la rădăcină la respectivul nod terminal).

La fiecare pas, algoritmul va alege dintre nodurile terminale colorate încă în roșu, un nod care să fie punctul terminus al unei curse (deci pe care să-l coloreze din roșu în albastru). Va fi ales nodul pentru care diferența între lungimea drumului de la el la cel mai apropiat nod albastru și lungimea drumului de la rădăcină la cel mai apropiat nod albastru este maximă. Apoi se vor colora în albastru toate muchiile de pe calea de la nodul albastru cel mai apropiat la nodul terminal selectat și se va actualiza vectorul de „noduri albastre cele mai apropiate” de alte noduri terminale.

Algoritmul se oprește fie în momentul în care au fost selectate p noduri terminale sau în momentul în care diferența în funcție de care selectăm un nod albastru devine 0 sau negativă.