Problema urat

(autor prof. Adrian Panaete – C.N. „A.T.Laurian" Botoşani)

Se observă că înălţimile scândurilor unui gard formează o permutare. Problema cere de fapt permutările care au suma diferenţelor intre 2 termeni consecutivi maximă.

Fie $p_1, p_2, ..., p_n$ o şi $m = (n+1)/2$ media aritmetică a înalţimii gardurilor.

Notăm cu $G[p]$ gradul de urâţenie al gardului.

$G[p]=|p_1-p_2|+|p_2-p_3|+...|p_{i-1}-p_i|+|p_i-p_{i+1}|+...+|p_{n-1}-p_n|$.

Se observă că oricare termen al permutarii cu excepţia lui p_1 şi p_n intervin in exact 2 dintre cei $n-1$ termeni ai sumei.

Fie $p_i=x$ si $p_{i+1}=y$ avem 6 cazuri

1. $x \le y \le m \Rightarrow |x-y| = y-x=m-x-(m-y)=+|m-x|-|m-y|$
2. $x \le m \le y \Rightarrow |x-y| = y-x=m-x+(y-m)$ $\underline{\boldsymbol{=+|m-x|+|m-y|}}$
3. $m \le x \le y \Rightarrow |x-y| = y-x=y-m-(x-m)=-|m-x|+|m-y|$
4. $y \le x \le m \Rightarrow |x-y| = x-y=m-y-(m-x)=-|m-x|+|m-y|$
5. $y \le m \le x \Rightarrow |x-y| = x-y=x-m+(m-y)$ $\underline{\boldsymbol{=+|m-x|+|m-y|}}$
6. $m \le y \le x \Rightarrow |x-y| = x-y=x-m-(y-m)=+|m-x|-|m-y|$

Deducem că pentru fiecare termen din sumă putem scrie $|x-y|=\pm|m-x|\pm|m-y|$. Deci

$G[p]=\pm|m-p_1|\pm|m-p_2|\pm|m-p_2|\pm|m-p_3|\pm...\pm|m-p_{n-2}|\pm|m-p_{n-1}|\pm|m-p_{n-1}|\pm| m-p_n|$
$\le|m-p_1|+|m-p_2|+|m-p_2|+|m-p_3|+...+|m-p_{n-2}|+|m-p_{n-1}|+|m-p_{n-1}|+| m-p_n |$
$=2*(|m-p_1|+|m-p_2|+|m-p_3|+... +|m-p_n |)-|m-p_1|-|m-p_n|$
$= 2*(|m-1|+|m-2|+|m-3|+...+|m-n|)-|m-p_1|-|m-p_n|$

Pentru a maximiza valoarea se observă că p_1 şi p_n ar trebui alese cele mai apropiate de medie.

Pentru $n=2*k$ (n par) media este $m=(n+1)/2=k+1/2$ deci p_1 si p_n se vor alege k şi $k+1$.

Pentru $n=2*k+1$ (n impar) media este $m=(n+1)/2=k+1$ deciuna dintre valorile p_1 şi p_n va fi obligatoriu $k+1$ iar cealalta va fi una dintre valorile k sau $k+2$.

Se deduce că pentru orice n (par sau impar) un majorant al lui $G[p]$ independent de permutare va fi $MAX=2*(|m-1|+|m-2|+|m-3|+...+| m-n|)-1$.

__Cerinţa a.__

Pentru ca o permutare să aiba $G[p]=MAX$ va trebui să indeplinească două condiţii

I. Oricare doi termeni consecutivi sa se găsească în cazurile **2** sau **4** din cele şase cazuri descrise mai sus => permutarea trebuie să alterneze valorile mai mici decat media cu valorile mai mari decât media
II. Primul şi ultimul termen din permutare să fie alese cele mai apropiate posibil de media m=(n+1)/2

Există permutări cu aceste proprietăţi deci MAX este valoarea cerută la punctul a. al problemei. Definitivând calculul lui MAX se poate deduce formula $\boldsymbol{MAX=[\ n^2/2]-1}$

__Cerinţa b.__

In cazul **n=2*k** avem 2 tipuri de permutări

Cele care au $p_1=k$ şi $p_n=k+1$ se obţin prin permutarea valorilor $1,2,3,...,k-1$ pe poziţiile impare şi a valorilor $k+2,k+3,...2*k$ pe pozitiile pare.

Cele care au $p_1=k+1$ şi $p_n=k$ se obţin prin permutarea valorilor $1,2,3,...,k-1$ pe poziţiile pare şi a valorilor $k+2,k+3,...2*k$ pe pozitiile impare.

Cum de fiecare tip se vor obţine (k-1)!* (k-1)! **soluţia va fi 2*(k-1)!*(k-1)!**

In cazul **n=2*k+1** avem 4 tipuri de permutări

Cele care au $p_1=k$ şi $p_n=k+1$ se obţin prin permutarea valorilor $1,2,3,...,k-1$ pe poziţiile impare şi a valorilor $k+2,k+3,...2*k,2*k+1$ pe pozitiile pare.

Cele care au $p_1=k+1$ şi $p_n=k$ se obţin prin permutarea valorilor $1,2,3,...,k-1$ pe poziţiile impare şi a valorilor $k+2,k+3,...2*k,2*k+1$ pe pozitiile pare.

Cele care au $p_1=k+2$ şi $p_n=k+1$ se obţin prin permutarea valorilor $1,2,3,...,k-1$ pe poziţiile pare şi a valorilor $k+2,k+3,...2*k,2*k+1$ pe pozitiile impare.

Cele care au $p_1=k+1$ şi $p_n=k+2$ se obţin prin permutarea valorilor $1,2,3,...,k-1$ pe poziţiile pare şi a valorilor $k+2,k+3,...2*k,2*k+1$ pe pozitiile impare.

Cum de fiecare tip se vor obţine k!* (k-1)! **soluţia va fi 4*k!*(k-1)!**

__Cerinţa c.__

Pentru n=2*k (par) un exemplu de permutare cu G[p] = MAX este

__k__, **k+2**, *1*, **k+3**, *2*, **k+4**, *3*, ... , **2*k-1**, *k-2*, **2*k**, *k-1*, __**k+1**__

Pentru n=2*k+1 (impar) un exemplu este

__k__, **k+2**, *1*, **k+3**, *2*, **k+4**, *3*,..., **2*k-1**, *k-2*, **2*k**, *k-1*, 2***k+1**, *__k+1__*