Solutie pentru problema P2- admitere

Autor Mihai Calancea, student Universitatea Bucuresti

Cerința 1

Vom încerca să plasăm toți elevii privilegiați la clasa de Real. Vom sorta șirul celor N + M note de la Real și vom număra câți elevi privilegiați se află printre primii M elevi în ordinea notelor. Să numim acest număr K. Suntem tentați să considerăm această valoare ca fiind optimă, dar este indicat să investigăm mai în detaliu această ipoteză. Din algoritmul descris rezultă că acești K elevi admiși sunt cei care au cele mai mari note dintre cei N. Este oare posibil ca păstrând unii din elevii de top înafara clasei, să obținem mai mulți elevi admiși în total?

Răspunsul este nu: eliminând un elev dintre cei mai buni K, facem loc *maxim* unui alt elev privilegiat neadmis până acum. Astfel, la fiecare eliminare a unui elev deja admis, numărul total de elevi admiși poate doar să rămână egal cu cel precedent sau să scadă. Valoarea K este deci numărul maxim de elevi pe care-l putem inscrie la clasa de Real.

Vom face acelasi lucru pentru clasa de Uman si vom pastra maximul dintre cele doua valori.

Cerința 2

În primul rând, să notăm că prima cerință trebuie luată în calcul în soluția celei de a doua. Astfel, în continuare vom presupune că există cel puțin un elev privilegiat admis în ambele clase.

La modul informal, dificultatea problemei constă în faptul că avem de făcut multe alegeri, iar acestea se influențează reciproc. În asemenea situații poate fi util să ne restrângem opțiunile, încercând să rezolvăm o problemă mai particulară. Să analizăm, spre exemplu, cum putem rezolva următoarea variantă a problemei:

(1) Este posibil să-i admitem pe *toți* cei N elevi privilegiați?

Este clar că soluția problemei originale trebuie să trateze implicit sau explicit această întrebare (răpsunsul pozitiv ar indica o soluție clar optimă).

În ce fel este mai *ușoară* această problemă? În problema originală exista un factor de nesiguranță în însăși decizia de a încerca să admitem un anumit elev (fără a decide și clasa la care am face acest lucru). Poate că în toate soluțiile optime respectivul elev ar fi rămas înafara liceului. În această variantă *trebuie* să-i admitem pe toți, iar acest lucru ne reduce din opțiuni.

Acum putem intui, în termeni informali, că dificultatea în a-i admite pe *toți* cei N elevi stă în a-i admite pe *cei mai slabi* dintre ei. Ce ar însemna totuși ca un elev să fie mai *slab* decât altul? Putem argumenta credibil că elevul cu notele (4, 4) este mai slab decât elevul cu notele (10, 10), dar se pot compara elevii cu notele (4, 10), respectiv (10, 4)? Faptul că elevii sunt *bidimensionali* pare să ne pună dificultăți, așa că poate fi o idee bună să restrângem din nou problema.

(2) Este posibil să-i admitem pe *toți* cei N elevi privilegiați știind că fiecare dintre aceștia are nota de înscriere de la Uman egală cu cea de la Real?

Beneficiul acestei constrângeri este că acum avem un *cel mai slab* elev! Este clar că indiferent de clasa la care va fi admis, el va fi *ultimul* elev privilegiat admis la clasa respectivă. Vom încerca pe rând să-l admitem la Real, respectiv Uman.

Să presupunem că el va fi admis la Real. Analizând cele M note care există deja la Real, notăm că există P note mai mari decât a sa. Dacă P = M, el nu poate fi admis la Real indiferent de alegerile celorlalți privilegiați. Dacă P < M, el poate fi admis la Real și, mai important, putem admite *încă* M – P – 1 elevi privilegiați la Real fără a-l elimina pe elevul cel mai slab. Să numim valoarea (M – P – 1) SPATIU_REAL.

Este optim să aducem cât mai mulți elevi la Real, respectând acestă limită de SPATIU_REAL, deoarece astfel ușurăm situația elevilor rămași care vor încerca să fie admiși la Uman. Întrebarea este acum *pe care* SPATIU_REAL dintre cei N – 1 elevi este optim să-i admitem la Real? Urmărind din nou să ușurăm situația celor care vor rămâne la Uman, îi vom admite la Real pe cei SPATIU_REAL cu cele mai mici note. Pentru a argumenta că această decizie crește șansele elevilor care se vor înscrie la Uman ne amintim de la cerința 1 că dacă există în general o soluție cu K elevi admiși la o clasă, există și una în care acești K sunt cei cu cele mai mari note dintre cei disponibili. În același timp, nu riscăm nimic prin a aduce elevi cu note mici la Real, deoarece știm că am avut grijă să rămână admis acolo *cel mai slab* elev, fapt care ne asigură că orice alt elev înscris la Real va fi de-asemenea admis.

Dacă acest algoritm nu reușește să admită toți elevii, vom încerca să admitem elevul cel mai slab la clasa de Uman. Dacă nici în acest fel nu se găsește soluție, ea nu există (cel mai slab elev trebuie să fie admis *undeva*, iar în ambele scenarii am luat decizii optime care să faciliteze admiterea celorlalți).

Ce complexitate are acest algoritm? Detaliile variază, dar există implementări simple cu complexitate O(N * M + N * N). Este utilă (dar nu strict necesară) o sortare a celor N elevi, care poate fi făcută în complexitate O(N * N). Este de-asemenea util să știm pentru fiecare elev și fiecare clasă câte dintre cele M note deja înscrise sunt mai mari decât nota elevului respectiv. Acest lucru se poate calcula ușor în O(N * M). Simularea algoritmului descris mai sus și verificarea faptului că toți elevii sunt admiși poate fi făcută combinând aceste două informații precalculate.

Astfel, avem o rezolvare satisfăcătoare ca timp de execuție pentru subproblema (2). Vom încerca acum să folosim ideile de la (2) pentru a rezolva subproblema (1). Dificultatea este bineînțeles că nu mai avem neaparat un cel mai slab elev. Totuși, vom avea încă un *ultim* elev privilegiat admis în clasa de Real. Cine va fi acesta în soluția optimă? Nu știm, dar putem *presupune*, pe rând, despre fiecare dintre cei N elevi că va lua această poziție. Având elevul X fixat ca fiind ultimul privilegiat admis la Real, suntem prezentati cu un scenariu similar celui din (2). Știm că mai putem admite SPATIU_REAL(X) (această valoare variază în funcție de X) elevi la clasa de Real fără să-l eliminăm pe X. Din nou, este de dorit să admitem cât mai mulți elevi la Real (luând în calcul această limită). Trebuie însă să fim mai atenți în a analiza *pe care* din cei N – 1 elevi să-i admitem. În primul rând, aceștia trebuie să aibă nota de la Real strict mai mare decât nota lui X, fiindcă altfel invalidăm poziția sa de ultim admis. Filtrând după acest criteriu, are sens în continuare să alegem elevii cu notele cele mai mici la Uman, din același raționament de a crește șansele celor înscriși la Uman de a fi admiși.

Care este complexitatea acestei rezolvări? Principala schimbare față de algoritmul pentru (2) este că vom varia ultimul elev de la real. Există N variante pe care le luăm în calcul. Astfel, pentru a menține o complexitate pătratică este necesar să calculăm în O(N) componența optimă a claselor, având un ultim elev fixat. Acest lucru se poate face folosind aceleași precalculări de la (2).

Avem astfel o rezolvare pentru subproblema (1). Trecerea către soluția problemei originale se face acum foarte ușor. Rămâne încă adevărat că în orice soluție optimă vom avea un ultim elev înscris la Real și că putem presupune care este acesta. Mai mult, modalitatea de a alege clasa pentru ceilalți N – 1 elevi având acest ultim elev fixat este încă optimă. Se poate observa din argumentele aduse în cadrul discuției subproblemei (1) că dacă metoda eșuează în a-i admite pe toți cei N - 1 elevi rămași, reușește totuși să admită numărul de elevi maxim posibil.

Rămân de soluționat unele detalii de implementare necesare pentru ca algoritmul să aibă complexitate pătratică. Pentru indicii în acest sens puteți consulta sursa oficială.

Este util acum să analizăm procesul prin care am ajuns la soluție. Observăm că ideea critică a problemei este cea de a varia ultimul elev admis la o anumită clasă. Această idee ne-a putut fi utilă din două motive:

- Există un număr restrâns de opțiuni pe care le putem alege (N), deci le putem încerca pe toate, fără a face vreo speculație riscantă în legătură cu cea optimă.
- Odată aleasă o opțiune, multe alte decizii ale algoritmului sunt forțate, iar cele rămase pot fi soluționate ușor.

Pentru a ajunge la această idee, am simplificat problema (impunându-ne constrângeri noi) pâna la punctul în care exista un cel mai slab elev, iar acesta trebuia neaparat să fie admis. Acesta este, bineînțeles, doar un fir de gândire din multe posibile, dar autorul îl consideră educativ în vederea abordării problemelor de acest tip.