Descrierea soluției – nmint

Autor
prof. Cheșcă Ciprian
Liceul Tehnologic „Grigore C. Moisil” Buzău

Considerații preliminare

Numărul minim de termeni ai produsului A·B se obține atunci când se îndeplinesc simultan două condiții:

- Numărul de termeni iraționali să fie cât mai mic.
- Suma termenilor raționali obținuți după desfacerea parantezelor să fie zero.

Analizând prima condiție se observă destul de ușor că numărul termenilor iraționali este minim atunci când există un număr cât mai mare de perechi de numere prime p_i și p_j cu $i \neq j$ de semne diferite. Această situație se obține atunci când numărul de semne '+' și numărul de semne '-' să fie cât mai apropiat, mai precis, numărul de semne '+' să fie N/2 iar numărul de semne '-' să fie N/2+1 sau invers. În acest caz numărul de termeni iraționali care se obțin este $(N/2)^2$.

A doua condiție se îndeplinește când există o succesiune de semne care face ca suma termenilor raționali să fie zero și prima condiție să rămână adevărată.

Exemple: + 2 + 3 – 5 = 0 ; + 2 - 3 + 5 + 7 – 11 = 0

Certitudinea existenței unei partiții a primelor N numere prime (cu N impar) în două partiții de sume egale este dată de un corolar al Teoremei lui Scherk[1] care afirmă:

- Dacă $(q_n)n\geq1$ este un şir strict crescător și $q_{n+1} <2q_n$, atunci pentru orice număr natural impar $m \leq q_{2n+1}$ ($n\geq3$), există o alegere convenabilă a semnelor ‚+’ sau ‚−’ astfel încât $m = \pm q_1 \pm q_2 \pm .... \pm q_{2n-1} + q_{2n}$.

Se poate demonstra că șirul p_k al numerelor prime verifică condițiile corolarului și dacă se alege pentru m valoarea p_{2n} atunci se poate observa că

$\pm p_1 \pm p_2 \pm .... \pm p_{2n-1} = 0$.

Soluția 1 (Greedy + Generare de combinări)

prof. Marius Nicoli, C.N. “Frații Buzești” – Craiova.

Considerăm șirul primelor N numere prime (notat T) pe care îl generăm folosing ciurul lui Eratostene. Pentru numerele aflate după o anumită poziție P (aleasă) folosim următoarea strategie greedy: pornim cu suma = 0 și parcurgând valorile de după poziție p, două câte două, procedăm astfel: dacă suma >= 0 adunăm la scădem din suma valoarea $T_{i+1} - T_i$ iar dacă suma este negativă îi adunăm valoarea $T_{i+1} - T_i$.

Generăm apoi, prin backtracking (combinări) toate modurile de a alege + și – pentru primele P numere prime, cu diferența dintre numărul de valori + și – ca

[1] Dumitru Bușneag, Florentina Chirteș, Dana Piciu – Complemente de Aritmetică și Teoria Elementară a Numerelor, Editura Gil, 2007

fiind 1 sau -1. Când găsim o scriere care anulează suma formată în prima etapă ne oprim. Pentru datele de test, valoarea P = 19 era suficientă pentru obținerea valorii corecte pe toate testele.

Soluția 2 (Greedy)

prof. Cheșcă Ciprian, Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil" Buzău.

Se partiționează (virtual) primele N numere prime în două mulțimi distincte: numerele de pe poziții impare în prima mulțime și numerele de pe poziții pare în a doua mulțime.

Se calculează un vector DIF cu diferențele dintre oricare două numere prime consecutive. Se calculează suma numerelor din prima partiție și suma numerelor din a doua partiție și se face diferența D a acestora. Printr-o strategie Greedy se descompune D ca suma de termeni din vectorul DIF și la fiecare termen ales se face schimbarea în cele doua partiții a numerelor prime în vederea echilibrării sumelor.

Exemplu: n = 7

Se consideră primele 7 numere prime: 2,3,5,7,11,13,17

Se separă cele 7 numere în 2 partiții

P_1: 2,5,11,17 cu suma 35 și P_2 :3,7,13 cu suma 23

Diferența între cele două sume este 12.

Se calculează diferențele între termenii consecutivi:

DIF = {1,2,2,4,2,4}

Începând de la dreapta către stânga în acest șir se scrie 12:2 = 6 ca sumă de termeni (neconsecutivi) ai șirului DIF de mai sus:

- 4 (și se schimbă în partiții 17 cu 13) apoi 2 (de pe poziția a 2-a) și se schimba 5 cu 3.

Partițiile vor deveni P_1: 2,3,11,13 și P_2: 5,7,17 ambele cu sumele egale cu 29.