

**Problema 2 – cuburi**

Autor: Vlad Andrei Tudose

Descrierea soluției (Vlad Andrei Tudose)

Solutia 1 (30 de puncte):

Fie (x, y, z) coordonatele unuia dintre colturile primului cub. Alegem coltul (x, y, z) în toate modurile posibile a.i. $0 \leq x < C_x$ și $0 \leq y < C_y$ și $0 \leq z < C_z$. Pentru un colt fixat, alegem L latura cubului în toate modurile posibile a.i. $0 \leq L < C_x$ sau $0 \leq L < C_y$ sau $0 \leq L < C_z$. În acest mod am fixat primul cub. Mai rămâne să determinăm latura minimă a unui cub care conține toate punctele ce nu sunt continute în primul cub. Această latura se poate determina ușor în timp $O(N)$. Dintre toate modurile de a fixa primul cub alegem amplasarea care minimizează latura cubului de latura maximă. Complexitatea timp este $O(N * C_x * C_y * C_z * \max(C_x, C_y, C_z))$.

Solutia 2 (70 de puncte)

Fie paralelipipedul dreptunghic de volum minim care conține în interiorul lui toate cele N puncte. Fetele paralelipipedului vor fi determinate de coordonatele minime și maxime pentru fiecare din cele 3 coordonate. Observăm că fiecare din cele 6 fete ale paralelipipedului trebuie să fie atinse de cel puțin unul dintre cuburi. Deoarece avem 6 fete și doar două cuburi va exista neapărat cel puțin un cub care să atingă cel puțin 3 fete. Deci va exista cel puțin un cub care să fie amplasat într-un colt al paralelipipedului. Cautăm binar latura cubului de latura maximă. Pentru o anumită latura fixată L , încercăm să amplasăm un cub de latura L în fiecare din cele 8 colturi. Pentru o anumită amplasare, verificăm dacă punctele rămase în afara primului cub pot fi acoperite de un alt cub de latura L . Complexitatea timp este $O(N * \log(\max(C_x, C_y, C_z)))$.

Solutia 3 (100 de puncte)

Observăm că dacă am amplasat un cub într-un colt al paralelipipedului, amplasarea optimă a celui alt cub va fi în coltul opus al paralelipipedului. Putem fixa două colturi opuse ale paralelipipedului în toate cele 4 moduri posibile. Pentru două colturi fixate, putem verifica pentru fiecare punct care este cel mai apropiat colt (distanța dintre două puncte este definită aici ca fiind maximum dintre distanța pe axa Ox , distanța pe axa Oy și distanța pe axa Oz). Pentru fiecare punct calculăm distanța față de cel mai apropiat colt dintre cele două fixate iar latura cubului de latura maximă va fi maximum dintre aceste distanțe. Dintre cele 4 moduri posibile de a alege colturile opuse alegem varianta optimă. Complexitatea timp este $O(N)$.