Problema – complet
Prof. Adrian Panaete – Colegiul Național ”A. T. Laurian” Botoșani

Fie $X(0) = \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ \vdots \\ vn \end{pmatrix}$ matricea coloană a valorilor inițiale din vârfurile grafului, $X(s) = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix}$ matricea coloană a valorilor la o secundă fixată s și $X(s+1)$ matricea valorilor la secunda $s+1$. Se poate observa că $X(s+1) = AX(s)$ unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ este matricea pătratică de ordin n cu 0 pe diagonală și 1 în rest. Se deduce imediat că $X(s) = A^s X(0)$.

Dar se observă că $A = U - I$ unde U este matricea pătratică de ordin n conținând numai 1 iar I este matricea unitate de ordin n . Deoarece U și I comută putem calcula $A^s = (U - I)^s$ folosind binomul lui Newton. În calcule se foloseste si $U^2 = nU$ deci $U^p = n^{p-1}U$.

$$A^s = (U - I)^s = \sum_{j=0}^{s} C_s^j U^{s-j}(-I)^j = \sum_{j=0}^{s-1} C_s^j n^{s-j-1}(-1)^j U + (-1)^s I =$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{s-1} C_s^j n^{s-j}(-1)^j\right) U + (-1)^s I = \frac{1}{n}[(n-1)^s - (-1)^s]U + (-1)^s I$$

Ținând cont de forma matricilor U și I se observă că matricea A^S conține numai două valori și anume $D_s = \frac{1}{n}[(n-1)^s - (-1)^s] + (-1)^s$ pe diagonală și $R_s = \frac{1}{n}[(n-1)^s - (-1)^s]$ în rest.

Pentru a obține valoarea din nodul k dupa s secunde trebuie sa înmulțim linia k din A^s cu coloana $X(0)$ deci valoarea căutată pentru un query (k , s) este

$$R_s v_1 + R_s v_2 + \cdots + R_s v_{k-1} + D_s v_k + R_s v_{k+1} + \cdots + R_s v_n =$$

$$R_s(v_1 + v_2 + \cdots v_n) + (D_s - R_s)v_k =$$

$$= R_s V + (-1)^s v_k$$

$V = v_1 + v_2 + \cdots v_n$ se calculează o singură data la citirea datelor, $(-1)^s$ depinde doar de paritartea lui s iar v_k este citit. Deci pentru un query este necesar sa calculam $R_s = \frac{1}{n}[(n-1)^s - (-1)^s]$.

Inversul modular modulo 100003 al lui n va fi calculat o singura dată pentru toate query –urile.

$(-1)^s$ depinde doar de paritatea lui s. Aplicând Mica Teoremă a lui Fermat pentru $p = 100003$ - număr prim și $a = n - 1$ stim că $a^{p-1} \equiv 1\ modulo\ p$ deci $(n-1)^{100002} \equiv 1\ modulo$ 100003. În aceste condiții putem să înlocuim s din $(n-1)^s$ cu restul sau la împărțirea cu 100002. Deci dacă precalculăm inițial puterile lui $n - 1$ modulo 100003 pentru toți exponenții de la 0 la 100001 se poate răspunde la fiecare query în timp constant.