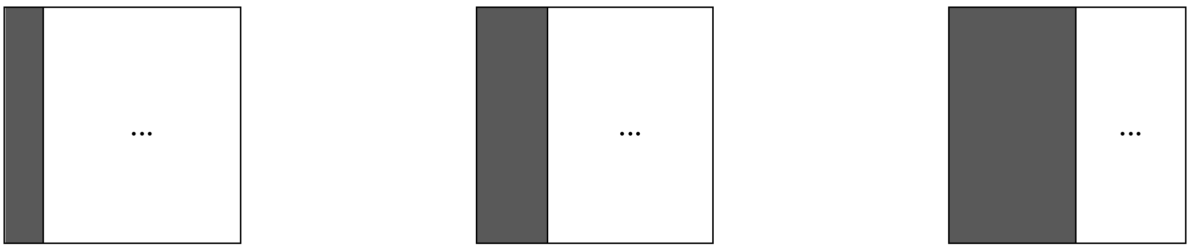
**Trotuar – descrierea soluţiei**
Autor – Prof. Szabó Zoltan

Fie `n` lungimea trotuarului, iar `l` lăţimea trotuarului.
Avem de asemenea dimensiunile dalelor: l lungimea dalei (identică cu lăţimea trotuarului) şi a[i] (i=1..k) lăţimea dalei.

Prima dată să considerăm, că trotuarul nu conţine niciun punct ocupat. În acest caz numărul total de acoperiri diferite se calculează cu metoda rucsacului.

1. Prima dată să calculăm numărul de modalităţi de pavare cu toate dalele paralele. Ne interesează cazurile când lungimea trotuarului `n≤l`, de aceea vom nota această valoare cu *lmic*(*n*):

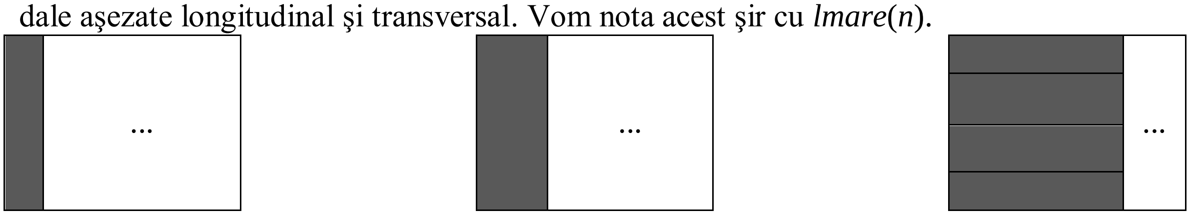


numărul posibilităţilor distincte se calculează recursiv cu formula:

$$lmic(n) = \sum_{a[i]\le n} lmic(n-a[i]), \qquad \text{pt. } n>0$$

$$lmic(0)=1$$

2. Să observăm că pentru un trotuar mai lung decât *l* modalităţile de pavare pot include dale aşezate longitudinal şi transversal. Vom nota acest şir cu *lmare*(*n*).



$lmare(n) = lmic(n)$ , dacă $n<l$

$$lmare(l) = \begin{cases} 2 \cdot lmic(l) & \text{, dacă } a[i]<l,\ \forall\ i=1,k \\ & \text{\{ pătratul se poate pava atât longitudinal cât şi transversal \}} \\ 2 \cdot lmic(l)-1 & \text{, dacă } \exists\ i;\ a[i]=l \\ & \text{\{ dacă avem dală pătratică, aceasta se va număra o singură dată, nu de două ori \}} \end{cases}$$

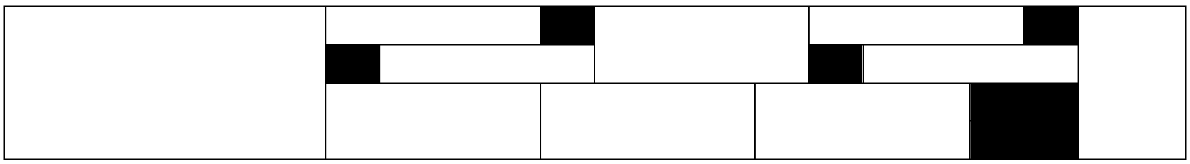
$$lmare(n) = \sum_{\substack{i=1 \\ a[i]<l}}^{k} lmare(n-a[i]) + lmic(l) * lmare(n-l) \qquad \text{, dacă } n>l$$

Se observă din această formulă că dala pătratică (pentru care $a[i]=l$) dacă ea există, nu se va număra intră în numărătoarea $lmic(l)$, deci trebuie exclusă din prima sumă.

Rezolvarea problemei complete:

Dacă trotuarul conţine puncte ocupate, acestea vor împărţi zona în mai multe dreptunghiuri disjuncte, iar soluţia finală se obţine prin înmulţirea acestor valori de soluţii distincte.

Să observăm că existenţa unor puncte vor „deregla" configuraţia trotuarului:



Urmărind cu atenţie desenul de mai sus, şi generalizând, putem deduce următoarele concluzii:

1. zonele dreptunghiulare apărute în urma punctelor ocupate, vor fi disjuncte două câte două (deci produsul soluţiilor parţiale va furniza soluţia finală);
2. o zonă dreptunghiulară va avea întotdeauna lungimea sau lăţimea egală cu $l$ ;
3. diferenţa dintre două puncte de pe aceeaşi linie poate fi :
    a. orice număr natural, dacă cele două puncte cuprind o zonă dreptunghică de lăţimea $l$ (se poate pava transversal);
    b. un multiplu de $l$ dacă avem dreptunghiuri mici „degenerate" (zona se poate pava doar longitudinal);
4. dreptunghiurile vor reveni la lăţimea $l$ numai în cazul în care numărul punctelor ocupate de pe fiecare linie este egal, sau diferenţa lor este divizibilă cu $l$.

Această ultimă condiţie trebuie să se întâmple în cel mai rău caz la lungimea $n$ şi este garantată de enunţul problemei. Deci putem memora starea trotuarului prin diferitele stări ale liniilor, două linii de pe trotuar fiind în aceeaşi stare, dacă restul împărţirii la $l$ al numărului punctelor ocupate este acelaşi.