FAMILII – descrierea soluţiei

Problema cere determinarea numărului maxim de sugrafuri complete maximale (clici) în clasa grafurilor neorientate cu n vârfuri ($n>1$). Să notăm cu $f(n)$ acest număr.

Vom demonstra că pentru orice $n>1$:

$$f(n)=\begin{cases}3^{n/3} & (\text{dacă } n\%3=0)\\ 4*3^{(n-1)/3} & (\text{dacă } n\%3=1)\\ 2*3^{(n-2)/3} & (\text{dacă } n\%3=2).\end{cases}$$

Observăm că:

$f(2)=2$ (pentru graful care are toate vârfurile izolate)

$f(3)=3$ (pentru graful care are toate vârfurile izolate)

$f(4)=4$ (pentru graful care are toate vârfurile izolate sau $K_{2,2}$)

Să considerăm G un graf cu $n>4$ vârfuri care are $f(n)$ clici.

În G există două vârfuri neadicente x şi y (în caz contrar, graful G ar fi complet $\rightarrow$ G are o singură clică, ceea ce contrazice maximalitatea).

Să notăm:

- $V(x)$ mulţimea vârfurilor adiacente cu un vârf x din graful G.
- Graful G_{xy} care se obţine prin eliminarea tuturor muchiilor incidente cu x şi adăugarea de muchii de la vârful x la vârfurile din $V(y)$.
- Graful G_x subgraful obţinut prin eliminarea vârfului x şi a tuturor muchiilor incidente cu acesta
- $c(x)$ numărul clicilor din G care îl conţin pe x
- $a(x)$ numărul clicilor incluse în $V(x)$
- $c(G)$ numărul clicilor din graful G

La trecerea de la graful G la graful G_{xy}, apar $c(y)$ noi clici şi dispar $c(x)-a(x)$ clici. Deci

$$c(G_{xy})=c(G)+c(y)-c(x)+a(x)$$

Putem presupune fără a restrânge generalitate că $c(x)\le c(y)$ (altfel lucram cu graful G_{yx}).

Cum $c(G)$ este maxim $\rightarrow c(Gxy)\le c(G)\ \rightarrow c(y)=c(x)$ şi $a(x)=0$.

Raţionând în mod analog se poate obţine şi relaţia $a(y)=0$ (pentru că deoarece $c(x)=c(y)$ $\rightarrow c(G)=c(G_{xy})=C(G_{yx})$).

Să considerăm acum x un vârf al grafului G şi $\{y_1, y_2, ..., y_p\}$ vârfurile neadiacente cu x.

Vom transforma succesiv graful G în $G_1=G_{y1x}$, apoi G_1 în $G_2=G_{y2x}$, ..., $G_p=G_{yp-1x}$, cu conservarea numărului de clici.

Observăm că în G_p vârfurile $\{x, y_1, y_2, ..., y_p\}$ nu sunt adiacente între ele, iar $V(x)=V(y_1)=V(y_2)=...=V(y_p)$. Dacă V(x) este mulţimea vidă, ne oprim. Altfel considerăm un vârf din V(x) şi repetăm această operaţie.

După un număr finit de paşi se obţine un graf multipartit complet G'. Să considerăm că vârfurile sale sunt partiţionate în k clase, având respectiv $n_1, n_2, ..., n_k$ vârfuri., două vârfuri fiind adiacente dacă şi numai dacă ele nu aparţin aceleiaşi clase.

$f(n)=c(G')=n_1*n_2*...*n_k\ \ (n_1+n_2+...+n_k=n)$.

Pentru ca acest produs să fie maxim factorii sunt de forma $3*3*...*3*rest$.

(restul lipseşte sau este 2 sau este 4, în funcţie de n).