

## Problema Para - Descrierea soluției

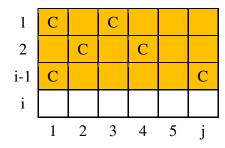
## Autor: prof. Constantin Gălăţan Colegiul Naţional "Liviu Rebreanu" Bistriţa

Pentru un dreptunghi având **i** linii și **j** coloane, format din **i x j** parcele, numărul de posibilități de a plasa **k** câini conform restricțiilor nu depinde de poziția dreptunghiului în matricea care codifică terenul, cu excepția situației când dreptunghiul conține parcela de coordonate **N** și **M**. Fie **a**[i][j][k] acest număr. Vom utiliza un algoritm de programare dinamică și noțiuni de combinatorică.

În configurația (a, i, j, k) se poate ajunge din stările următoare:

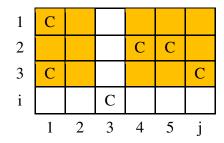
a) (a, i-1, j, k) - Nu se plasează câini pe linia i.

a[i - 1][j][k] – numărul de posibilități de a plasa toți cei k câini pe i-1 linii și j coloane.



b) (a, i-1, j-1, k-1) - se plasează un câine pe linia i care nu este "atacat" pe coloană.

 $\mathbf{a}[\mathbf{i} - \mathbf{1}][\mathbf{j} - \mathbf{1}][\mathbf{k} - \mathbf{1}]$  – numărul de posibilități de a plasa  $\mathbf{k} - \mathbf{1}$  câini pe  $\mathbf{i} - \mathbf{1}$  linii și  $\mathbf{j} - \mathbf{1}$  coloane. În acest caz pe linia  $\mathbf{i}$  se poate plasa un câine în  $\mathbf{j}$  moduri posibile, iar acesta nu se atacă cu alt câine aflat pe coloana sa:

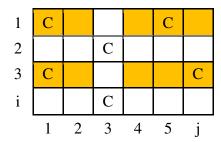


Remarcați că cele două dreptunghiuri hașurate se comportă ca unul singur având i-1 linii si j-1 coloane.

Avem deci j \* a[i - 1][j - 1][k - 1] posibilități de a plasa în acest mod un câine pe linia i a dreptunghiului.

c) (a, i-2, j-1, k-2) - se plasează un câine pe linia **i** care se "atacă" cu alt câine pe coloană.

a[i - 2][j - 1][k - 2] – numărul de posibilități de a plasa k - 2 câini pe i - 2 linii și j - 1 coloane. În acest caz pe linia i se poate plasa un câine în j moduri posibile, iar acesta este "atacat" de un altul aflat pe coloana sa. Aceasta se face în j\*(i - 1) moduri.

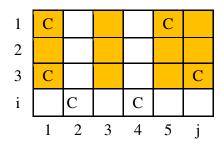


Observați că cele patru dreptunghiuri hașurate se comportă ca unul singur având i-2 linii și j-1 coloane.

Avem deci j\*(i-1)\*a[i-2][j-1][k-2] posibilități de a plasa în acest mod k câini.



- d) (a, i-1, j-2, k-2) se plasează doi câini pe linia **i** iar pe coloanele lor nu mai există alți câini.
  - a[i 1][j 2][k 2] numărul de posibilități de a plasa k 2 câini pe i -1 linii și j 2 coloane. În acest caz pe linia i se pot plasa doi câini în j\*(j-1)/2 moduri posibile, iar acestia sunt singuri pe coloanele lor.



Cele trei dreptunghiuri hașurate se comportă ca unul singur având i-1 linii și j-2 coloane.

Avem deci j\*(j-1)/2 \* a[i-1][j-2][k-2] posibilități de a plasa în acest mod k câini.

Deci, la cazul general:

$$a[i][j][k] = a[i - 1][j][k] + j * a[i - 1][j - 1][k - 1] + j * (i - 1) * a[i - 2][j - 1][k - 2] + (j * (j - 1) / 2) * a[i - 1][j - 2][k - 2];$$

Pentru cazul special în care i = N și j = M, avem:

- pentru sitația a) se menține relația.
- În cazul b) rămân numai  $\mathbf{j} \mathbf{1}$  posiblități de a plasa un câine pe linia  $\mathbf{N}$  care să nu fie atacat pe coloana sa.
- În cazul c) sunt (j 1) \* (i 1) posibilități de a plasa un câine pe linia N care sa fie "atacat" de un altul aflat pe coloana sa.
- În cazul d) există (j 1) \* (j 2) / 2 posibilități de a plasa doi câini pe linia N care să nu fie atacați pe coloane.

$$a[i][j][k] = a[i - 1][j][k] +$$
 $(j - 1) * a[i - 1][j - 1][k - 1] +$ 
 $(j - 1) * (i - 1) * a[i - 2][j - 1][k - 2] +$ 
 $(j - 1) * (j - 2) / 2) * a[i - 1][j - 2][k - 2];$ 

Soluția finală se obține din a [N] [M] [K]. Complexitate: O (N\*M\*K)