

Graf

descrierea soluției

I) Dacă definim distanța între două vârfuri ale unui graf neorientat ca fiind lungimea celui mai scurt lanț dintre care are drept capete vârfurile, atunci putem să observăm că un vârf oarecare Z se află pe un lanț de lungime minimă dintre X și Y dacă și numai dacă $d(X,Z)+d(Z,Y)=d(X,Y)$, pentru cazul în care considerăm lungimea lanțului ca fiind numărul muchiilor și $d(X,Z)+d(Z,Y)=d(X,Y)+1$, pentru cazul în care considerăm lungimea ca fiind numărul vârfurilor.

Stabilim prin câte o parcurgere în lățime distanțele tuturor vârfurilor față de X și respectiv Y (capetele lanțului, citite din fișier). Vedem care dintre vârfurile ce aparțin cel puțin unui lanț de lungime minimă între X și Y au proprietatea ca sunt singurele aflate la o anumită distanță de X . Acestea sunt vârfurile care aparțin tuturor lanțurilor de lungime minimă dintre X și Y .

Algoritmul are complexitate $O(n+m)$.

II) Facem o parcurgere în lățime din X și o parcurgere în lățime pornind din Y , în urma cărora determinăm pentru fiecare vârf z distanța dintre X și z , și Y și z - notate $d(X,z)$ și respectiv $d(Y,z)$ și numărul de drumuri optime dintre X și z , notat $nr(X,z)$ și dintre Y și z - $nr(Y,z)$. Un vârf z are proprietatea de a aparține tuturor drumurilor optime dintre X și Y dacă și numai dacă:

$$d(X,z)+d(Y,z)=d(X,Y) \text{ și } nr(X,z)*nr(Y,z)=nr(X,Y).$$

Această soluție este însă dificil de implementat pentru grafuri cu un număr mare de noduri – se poate ajunge la operații cu numere mari;

III) Calculăm lungimea minimă a unui lanț de la X la Y . Eliminăm apoi succesiv câte un nod din arbore (cu excepția nodurilor X și Y) și re-calculăm lungimea minimă a unui lanț de la X la Y . Dacă această lungime diferă față de cea inițială, rezultă că toate lanțurile de lungime minimă trec prin nodul eliminat. Soluție de complexitate $O(n(n+m))$ care rezolvă corect 50% din teste.

IV) Se pot da și soluții bazate pe backtracking, de exemplu:

- se determină (printr-o parcurgere în lățime a grafului) numărul de vârfuri aflate pe lanțul de lungime minimă dintre X și Y ; fie K numărul de vârfuri „intermediare” (fără X și Y);
- generăm toate lanțurile de lungime minimă dintre X și Y (inclusiv capetele) (algoritm de generare a aranjamentelor de n luate câte K cu verificările corespunzătoare de adiacență) și contorizăm pentru fiecare vârf numărul de lanțuri în care apare;
- vârfurile care formează soluția vor avea contorul egal cu contorii vârfurilor X și Y

În funcție de implementare și de optimizările aduse algoritmilor de backtracking, programele bazate pe astfel de soluții pot primi maxim 40 puncte

În subdirectorul soluției găsiți patru surse care implementează unii algoritmi descriși (I, III și IV). Numărul aflat în numele fișierelor reprezintă numărul de puncte pe care le obțin respectivele programe pentru datele de test – de exemplu, graf100.pas obține 100 puncte.