

shgraf – soluție

autor Andrei Grigorean

O primă observație care ne ajută să rezolvăm problema este că va trebui să calculăm pentru fiecare valoare i între 3 și N câte componente conexe care au proprietatea de „SHGRAF” există, care au în total i noduri și în care orice ciclu are lungimea mai mare sau egală decât K . După ce am calculat aceste valori, putem afla destul de ușor răspunsul cerut cu ajutorul unei dinamici în $O(N^2)$.

În continuare vom studia proprietățile componentelor conexe care ne interesează. Deoarece numărul de noduri este egal cu numărul de muchii, putem trage concluzia că vom avea exact un ciclu elementar.

Soluție în $O(N^4)$ – 40 de puncte

Vom construi componentele conexe începând cu ciclurile, urmând ca apoi să tot adăugăm câte „un nivel” de noduri. Avem nevoie de o dinamică $A[i][j][k]$ – numărul de grafuri conexe cu i „nivele”, în care avem pe ultimul „nivel” j noduri, iar numărul total de noduri este k . Dintr-o stare oarecare putem trece într-o altă stare adăugând un nou „nivel”. Pentru a obține complexitatea de $O(N^4)$, vom avea nevoie de o altă dinamică $B[i][j]$ – numărul de posibilități de a adăuga un „nivel” nou cu j noduri peste un „nivel” cu i noduri.

Soluție în $O(N^3)$ – 100 de puncte

Soluția de 100 de puncte se bazează tot pe programare dinamică: $A[i][j]$ – numărul de grafuri conexe în care nodurile de pe ciclu sunt neetichetate, celelalte sunt etichetate, lungimea ciclului este i , iar în total avem $i+j$ noduri. Dintr-o stare (i, j) putem trece într-o stare $(i+1, j+k)$, adăugând un „arbore” cu rădăcină cu $k+1$ noduri (rădăcina este neetichetată) pe ciclu. Pentru a obține complexitatea dorită trebuie să ne folosim de faptul că numărul total de arbori etichetați cu i noduri este i^{i-2} (vezi codul Prüfer). Folosindu-ne de matricea A , putem deduce destul de ușor care este răspunsul căutat.

Soluțiile prezentate nu sunt complete, ele reprezentând mai degrabă câteva indicații, deoarece detaliile recurențelor ar fi îngreunat înțelegerea ideilor din spatele explicațiilor. Am lăsat pe seama voastră găsirea rezolvărilor complete 😊.