Rez (Doru Popescu Anastasiu)

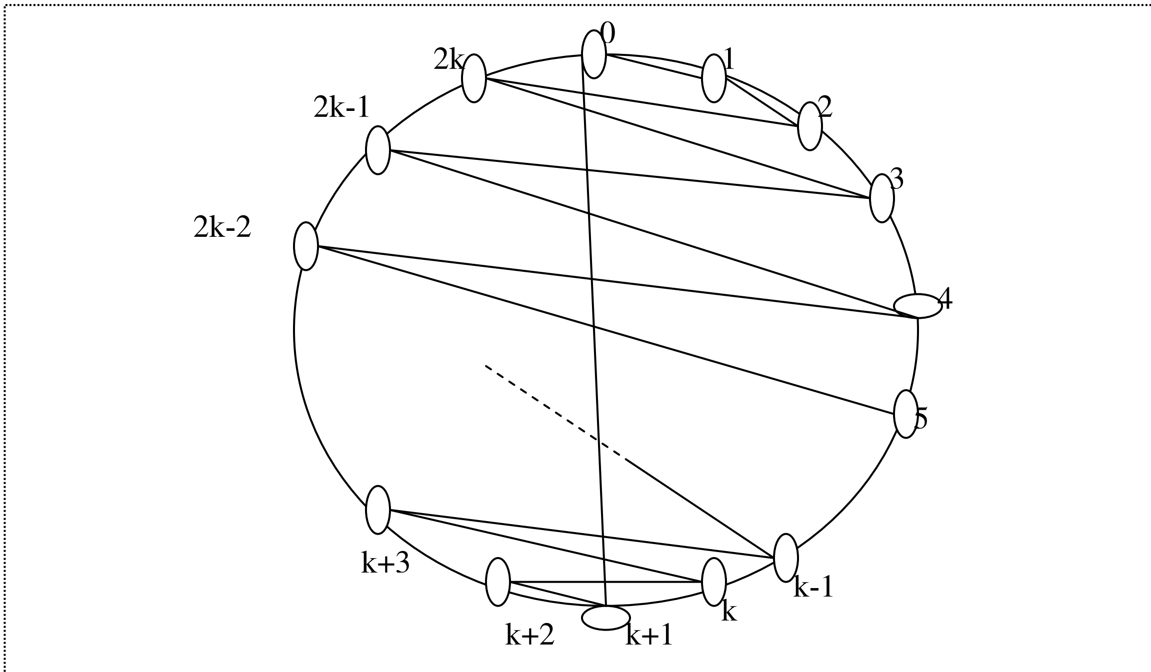
Solutie

Problema este echivalenta cu determinarea unei partii a muchiilor unui graf complet cu n varfuri in (n-1)/2 cicluri hamiltiniene.

Nodurile in graful complet le vom numerota prin 0, 1, ..., 2k (unde k=(n-1)/2).

Initial vom considera ciclul hamiltonian:

c_1=(0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1,4, 2k-2, 5, ..., k+3,k, k+2, k+1,0).



Apoi pentru i=2,...,k, vom construi ciclul c_i, in functie de ciclul c_{i-1}, astfel:

$$c_i[j] = \begin{cases} 0, \mathit{daca}\, c_{i-1}[j] = 0 \\ 1 + c_{i-1}[j], \mathit{daca}\, c_{i-1}[j] = 2k-1 \\ (1 + c_{i-1}[j]) \bmod 2k, \mathit{daca}\;\; c_{i-1}[j] \notin \{0, 2k-1\} \end{cases}$$

Pentru a arata ca ciclurile c_1, c_2, ..., c_k sunt disjuncte relativ la muchii, vom considera suma modulo 2k a oricaror doua numere consecutive nenule din aceste siruri (cicluri hamiltoniene).

Pentru c_1 obtinem ca:

$(c_1[j] + c_1[j+1]) \bmod 2k \in \{2,3\}, \mathit{pentru}\, c_1[j] \neq 0\, \mathit{si}\, c_1[j+1] \neq 0, j \in \{0,1,...,n\}$.

Adunand mereu 2 modulo 2k pentru ciclurile urmatoare obtinem multimile:

{4,5}, {6,7}, ..., {2k-2,k-1}, {0,1}, care sunt disjuncte.

Deci cele k=(n-1)/2 cicluri hamiltoniene sunt disjuncte. Cum graful complet cu n noduri are n(n-1)/2 muchii, rezulta ca ciclurile c_1, c_2, ..., c_k acopera toate muchiile.