

$O(N^2)$ – 100 de puncte

Observatia cheie in aceasta problema este ca orice valoare $d_{\max}[x][y]$ este egala cu capacitatea minima a unei muchii din ciclu, plus o alta valoare. Putem deci presupune ca valoarea muchiei minime este 0, si sa rezolvam problema din acest punct.

O alta observatie importanta este ca pentru orice nod x , exista un nod y vecin cu x pentru care $d_{\max}[x][y] = M = \max(d_{\max}[x][i])$, pentru $1 \leq i \leq N$. Deoarece am presupus ca valoarea muchiei minime este 0, rezulta ca exista o muchie intre x si y de capacitate $d_{\max}[x][y]$.

In fine, mai stim ca, la un moment dat, daca $M = d_{\max}[x][y]$ este valoarea maxima din matrice, stim sigur ca putem reconstitui ciclul incat el sa contina muchia $(x, y, d_{\max}[x][y])$. Vom demonstra acest lucru prin inductie:

Cazul de baza $N = 2$: nodurile x, y sunt singurele din ciclu. Adaugam muchiile $(x, y, d_{\max}[x][y])$ si $(x, y, 0)$, deci reconstituirea e posibila.

Pasul de inductie $N \rightarrow N+1$: Presupunem ca putem reconstitui orice ciclu de dimensiune N . La pasul nostru, ciclul pe care dorim sa-l reconstituim are dimensiune $N+1$. Putem adauga muchia $(x, y, d_{\max}[x][y])$. Observam ca, pentru orice z , $d_{\max}[x][z] = d_{\max}[y][z]$, deoarece muchia $(x, y, d_{\max}[x][x])$ este mai mare sau egala cu orice alta muchie posibila, si deci nu influenteaza in niciun fel capacitatea de la y la z prin x sau de la x la z prin y . Putem deci uni nodurile x si y si reducem astfel cazul nostru la reconstituirea unui ciclu de dimensiune N , posibila din ipoteza de inductie.

Deci, pentru a reconstitui ciclul, vom sorta perechile (x, y) in ordine descrescatoare dupa $d_{\max}[x][y]$. Procesand astfel perechile, daca (x, y) sunt intr-o componenta conexa, sau x sau y au gradul 2 la momentul respectiv, ignoram perechea. Altfel, adaugam muchia $(x, y, d_{\max}[x][x])$, updatam componentele conexa si crestem gradul. Cand am trasat $N-1$ astfel de muchii, ne oprim. Ultima muchie va fi trasata intre cele doua

n
o
d
u
r
i

c
u

g
r
a
d

l

r
a
m
a
s
e
,

s
i