Problema 2 – Multimi

Varianta 1

prof. Cheşcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Costin Neniţescu" Buzău

Vom demonstra afirmaţia :

"Oricare ar fi numerele naturale impare $p \geq 3$ şi $q \geq 3$, mulţimea A = {1,2,3,...., p . q} se poate reprezenta ca o reuniune disjunctă de p – mulţimi A_1, A_2 , ... , A_p cu cardinalele egale cu q şi suma elementelor constantă".

Demonstraţie

- Pentru q = 3 şi p = 2n + 1 mulţimea A = {1, 2, ..., 3p} = {1, 2, ..., 6n + 3} se reprezintă ca $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$ unde $A_i = \{i, 3n + 1 + i, 6n + 5 - 2i\}$ pentru $1 \leq i \leq n+1$ şi $A_i = \{i, n+i, 8n+6-2i \}$ pentru $n+2 \leq i \leq 2n+1$;
- Presupunând afirmaţia demonstrată pentru $q \geq 3$, din descompunerea $\{1, 2, \ldots, p \cdot q\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$ rezultă descompunerea $\{1, 2, \ldots, p(q + 2)\} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p$ unde $B_i = A_i \cup \{pq + i, pq + 2p + 1 - i\}$ oricare ar fi $1 \leq i \leq p$.

Varianta 2

prof. Pit-Rada Ionel-Vasile
Colegiul Naţional "Traian", Drobeta Turnu Severin

Vom completa o matrice cu q linii şi p coloane şi apoi afişăm pe coloane, fiecare coloană conţinând una dintre submulţimile cerute. Complexitatea va fi O(p*q).

Pe primele trei linii vom completa cu numerele 1,2,...,3p astfel încât sumele primelor trei elemente din fiecare coloană să fie egale. O idee ar putea fi următoarea:

De la stânga spre dreapta, în coloanele impare din prima linie, completăm cu 1,2,...,[p/2]+1. Notăm [p/2]+1 cu x.

De la stânga spre dreapta, în coloanele pare din prima linie, completăm cu x+1,x+2,...,x+[p/2]. Notăm x+[p/2] cu y.

De la stânga spre dreapta, în coloanele pare din a doua linie, completăm cu y+1,y+2,...,y+[p/2]. Notam y+[p/2] cu z.

De la stânga spre dreapta, în coloanele impare din a doua linie, completăm cu z+1,z+2,…,z+[p/2]+1. Notăm z+[p/2]+1 cu t

De la dreapta spre stânga, în toate coloanele din a treia linie, completăm cu t+1,t+2,…,t+p.

Începând cu linia a patra vom completa în liniile pare de la stânga spre dreapta şi în liniile impare de la dreapta spre stânga, cu numerele t+p+1,t+p+2,…,q*p. Se observă uşor că datorita completării „şerpuite" din liniile 4,5,…,q sumele ultimelor q-3 elemente din fiecare coloană vor fi egale.

Exemplu: pentru p=5 si q=7 vom avea:

1	4	2	5	3
8	6	9	7	10
15	14	13	12	11
16	17	18	19	20
25	24	23	22	21
26	27	28	29	30
35	34	33	32	31

Observaţie: - Algoritmul se poate scrie şi evitând utilizarea tabloului bidimensional, deci cu spaţiu de memorie O(1).