C3 - Solution

A 奇怪的位运算

难度	考点
1	位运算

题目分析

a_i	b_i	$a_i \odot b_i$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

位运算对于每一位都是独立的，这个奇怪的位运算 $\odot$ 也一样。从 Hint 里得知 $\odot$ 可以看作是按位取反和按位求与的复合运算，即 $a_i \odot b_i = a_i \wedge (\neg b_i)$，其中 $\wedge$ 表示按位求与，$\neg$ 代表按位取反。于是我们可以先对 b 取反，再将此结果与 a 求与，即可直接得到 $a \odot b$ 的值。注意C语言中按位与和按位取反运算符分别是 `&` 和 `~` 。

示例代码

```c
#include <stdio.h>
int main(void)
{
    int a, b;
    while (scanf("%d%d", &a, &b) != EOF)
    {
        printf("%d\n", a & ~b);
    }
    return 0;
}
```

B 置0置1

难度	考点
2	位运算

题目分析

该题主要涉及两个知识点，第一个为 `unsigned int` 的数据范围，第二个知识点是位运算的相关知识。

对于一个二进制的数，将它的第 k 位置 1 的方法是：

先将 1 左移 k 位，这样我们就得到了一个仅有第 k 位为 1 的，其他位均为 0 的二进制数，将输入的数字 n 与它进行或运算。这样，对于第 k 位以外的位上，与 0 进行或运算均为其本身，即仅有第 k 位上与 1 进行或运算，即为 1 。语句为 `x | (1 << k)` 。

同样的，将 n 的第 k 位置 0 的方法是：

先将 1 左移 k 位，这样我们就得到了一个仅有第 k 位为 1 的，其他位均为 0 的二进制数，然后对于该二进制数取反，这样我们就得到了一个仅有第 k 位为 0 的，其他位均为 1 的二进制数。将输入的数字 n与它进行与运算 ，这样，对于第 k 位以外的位上，与 1 进行与运算均为其本身，即仅有第 k 位上与 0 进行与运算，即为 0 。语句为 `x & ~(1 << k)` 。

课件/书上例题3-5和3-6也给出了以上两个操作对应的语句。

特别要注意的是，本题数据在 `unsigned int` 范围内，因此使用 `1u` 表示 `unsigned int` 类型的 1 更为规范。

示例代码

```c
#include <stdio.h>

int main() {
    int  t, k;

    unsigned int n;
    scanf("%u", &n);
    scanf("%d", &t);

    for (int i = 1; i <= t; i++) {

        scanf("%d", &k);

        int choice;

        scanf("%d", &choice);

        if (choice == 0) {
            n = n & ~(1u << k);
        }
        else if (choice == 1) {
            n = n | (1u << k);
        }

        printf("%u\n", n);
    }

    printf("%u\n", n);

    return 0;
}
```

C 高低位对调

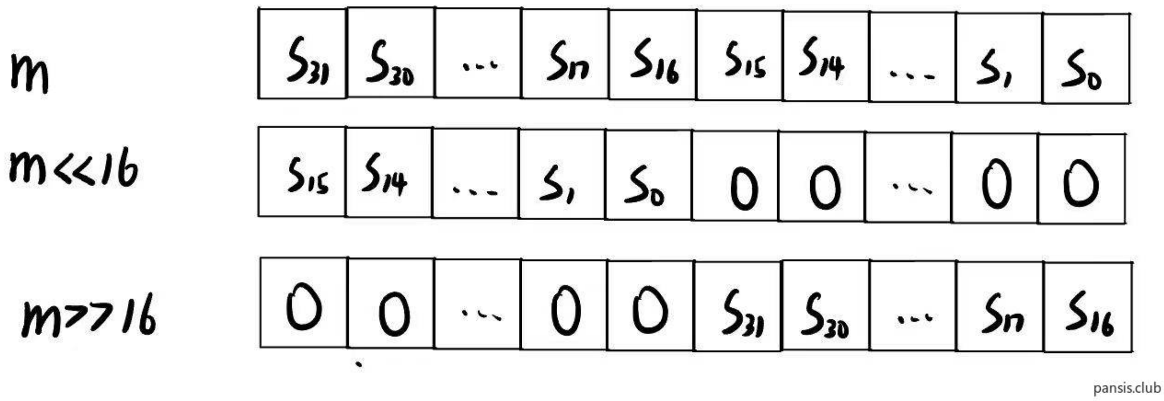
难度	考点
3	位运算

题目分析

根据题意，我们需要将给定数字的高 16 位与低 16 位对调。

尽管在计算机中，整数是以补码形式储存，但 `unsigned int` 类型的变量由于没有负数，原码与补码形式相同。

实现高16位与低16位对调的表达式为 `m = (m << 16) | (m >> 16)`，下图可以帮助大家理解。



示例代码

```
#include <stdio.h>
int main() {
    int n;
    unsigned int m;
    scanf("%d", &n);
    while (n--) { //n次循环
        scanf("%u", &m);
        m = (m << 16) | (m >> 16); //高低位调换
        printf("%u\n", m);
    }
}
```

D 身份证号验证

难度	考点
4	数组，循环

题目分析

首先，我们需要读入身份证号。由于我们需要处理每一位身份证号，而且身份证号并非纯数字，所以我们使用字符数组 `id` 去存储身份证号。

依据题意，我们需要将身份证号码前 17 位数分别乘以不同的系数并求和。这里我们采用 $Hint$ 中的"数组+循环"的方法实现。用数组 w 储存系数 $7, 9, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2$ 。

计算出的结果除余后与校验码存在着对应关系，这个对应关系也可以使用数组进行对应，具体实现方式详见代码。

示例代码

```
#include <stdio.h>

int main() {
    int w[20] = {0, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 6, 3, 7, 9, 10, 5, 8, 4, 2};//不同位数对应的不同系数，w[1]对应第1位，以此类推
    char yu[11] = {'1', '0', 'X', '9', '8', '7', '6', '5', '4', '3', '2'}; //余数与校验码对应关系，yu[i]表示余数为i时对应的校验码
    int n;
    char id[20];
    scanf("%d", &n);
    getchar(); //跳过换行符
    while (n--) { //n次循环
        int sum = 0;
        for (int i = 1; i <= 17; ++i) {
            scanf("%c", &id[i]); //循环读入身份证号的每一位
            sum += ((id[i] - '0') * w[i]); //数组+循环 求和
        }
        sum %= 11;
        scanf("%c", &id[18]);
        getchar(); //跳过换行符
        if (yu[sum] == id[18]) { //利用数组，将余数映射成校验码，与id[18]进行比较
            printf("YES");
        } else {
            printf("NO");
        }
        printf("\n");
    }
    return 0;
}
```

E 质数，异或和一

难度	考点
3~4	异或，质数

题意分析

首先对可能满足 $a \oplus b = 1$ 的两个质数进行分析。

若 $a \oplus b = 1$,说明 $a,\ b$ 在二进制下仅有最低位不同而其余的位皆相同，由此可知 $a,\ b$ 具有不同的奇偶性。

而质数中仅有 2 一个偶数，故 $a,\ b$ 中必定存在 2 。而满足与 2 有最低位不同而其余的位皆相同的数字为 3 。由上可知仅有 $2,\ 3$ 满足题意，其分别为第 1 个质数和第 2 个质数。因此仅需判断 $\{m,\ n\}$ 是否为 $\{1,\ 2\}$ 即可。

示例代码

```c
#include <stdio.h>
int main(void) {
    int m, n;
    while (scanf("%d%d", &m, &n) != EOF) {
        if (((m == 1) && (n == 2)) || ((m == 2) && (n == 1))) {
            puts("YEEEEE!!!");
        } else {
            puts("WOOOOO!!!");
        }
    }
    return 0;
}
```

F 式神们夜里不睡觉mini

难度	**考点**
5	进制转换

问题分析

对于一个任意进制转换的问题，我们首先应当把待转换的数码用我们熟悉的进制来表示，即十进制，否则对于一个字符串我们几乎无法获得任何有效信息。 k 进制转十进制的方法较为容易，可以按如下实现：

```c
    int n, len, M, N, i;
    char s1[100];//转换前的字符串
    scanf("%d%d%s", &M, &N, s1);
    len = strlen(s1);//获取字符串s1的长度
    for (i = 0; i < len; i++)
        n = n * M + (s1[i] - '0');
```

注意到上面使用了一个函数 `strlen()` ，用来获取一个字符串的长度，这个函数包含在 `string.h` 头文件中。

而对于十进制转 k 进制，对于一般正进制的题目来说，基本思路是将待转换的数不停地对 k 取余，然后将余数倒序输出。

当然，我们不能忘记 `0` 这个特殊数字，它在任意进制下的表示都为 `0`，特判一下就可以了。

参考代码

```c
#include <stdio.h>
#include <string.h>

int main()
{
    char s1[100], s2[100] = {};
    int T;
    scanf("%d", &T);
    while (T--) //循环T次
    {
        int n = 0, M, N, i;
        scanf("%d%d%s", &M, &N, s1);
        if (s1[0] == '0') //特殊情况
            printf("0\n");
        else
        {
            int len = strlen(s1);

            //将自然数的M进制表示字符串s1转为int类型的自然数
            for (i = 0; i < len; i++)
                n = n * M + s1[i] - '0';

            //将int类型的自然数转为N进制表示的字符串s2(倒序)
            for (i = 0; n; i++)
            {
                s2[i] = n % N + '0';
                n /= N;
            }

            //逆序输出s2
            while(i > 0)
            {
                i--;
                printf("%c", s2[i]);
            }

            printf("\n");
        }
    }
    return 0;
}
```

G Te：离间计

难度	考点
5	位运算

题目分析

首先，由Hint或者数据范围可以知道这道题应该是用位的状态来表示人的状态，比如 `0 / 1` 分别表示 `G / D` 的人。

因此，对于题目中要求的两种操作：

- 第一种，**士兵身份改变**，可以相当于**位的取反**操作，因此，也就非常轻松了
- 第二种，将最小编号的士兵改变身份，那么，位运算中什么运算什么办法可以取出或者删除一个数的最低位呢？我们想到的是可以从低到高暴力枚举每一位，直到出现当前位上的数为 `0` 为止，我们将它变为 `1` 即可

到此为止，这道题的全部思路就搞定了。

示例代码

```
#include <math.h>

unsigned long long now, test, opt, n, ans;

int main() {
    scanf("%llu %llu", &n, &test);
    // now最初为0
    while(test--) {
        scanf("%llu", &opt);
        if(opt == 1) now = ~now;
        else
        {
            int flag = 0; //flag表示是否找到过为0的位
            int j; //用于存储最低的为0的位是第几位
            for(int i = 0; i < 64; i++)
            {
                if(flag == 0 && ((now >> i) & 1) == 0) //如果没找到过为0的位
                {
                    flag = 1;
                    j = i;
                }
            }
            if(flag == 1) //如果存在为0的位
                now |= (1ull << j);
        }
        // else 下方的代码块可用下列一条语句代替：
        // now = now | (now + 1);
    }
    for(int i = 0; i < n; i++)
    {
        if(((now >> i) & 1) == 1) {
            ans++;
            printf("%d ", i + 1);
        }
    }
    printf("\n%llu\n", ans);
    return 0;
}
```

小拓展

将整数 x 最低的为 `0` 的位置 1：

```
x = x | (x + 1);
```

求整数 x 二进制下最低的为 `1` 的位:

```
low = (x & (-x));
```

将整数 x 最低的为 `1` 的位置 0：

```
x = x & (x - 1);
```

H 非标准进制

难度	考点
5~6	数论

观察

$$n = a_0 + a_1b_1 + a_2b_1b_2 + a_3b_1b_2b_3 + \cdots + a_mb_1b_2\cdots b_m$$

注意到，如果 $a_k \geqslant b_{k+1}$，那么我们构造

$$a'_t = \begin{cases} a_k - b_k & ,t = k \\ a_{k+1} - 1 & ,t = k+1 \\ a_t & ,\text{else} \end{cases}$$

从而

$$n = a'_0 + a_1b_1 + a'_2b_1b_2 + a'_3b_1b_2b_3 + \cdots + a'_mb_1b_2\cdots b_m$$

此时

$$a'_0 + a'_1 + \cdots + a'_m = a_0 + a_1 + \cdots + a_m - (b_{k+1} - 1)$$

这意味着，$a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ 取到最小值时，必然有 $a_k < b_{k+1}$，从而 $a_0 = n \bmod b_1$ 与

$$\eta = \alpha_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3 + \cdots + \alpha_{m-1}\beta_1\beta_2\cdots\beta_{m-1}$$

其中 $\eta = \left\lfloor \frac{n}{b_1} \right\rfloor$ 与 $\alpha_k = a_{k+1}, \beta_k = b_{k+1}$，这个形式与题目给出的如下条件是相似的

$$n = a_0 + a_1b_1 + a_2b_1b_2 + a_3b_1b_2b_3 + \cdots + a_mb_1b_2\cdots b_m$$

因此，我们不需要存储 $b_1, b_2, \cdots, b_m$，只需要按照顺序读取。

此外，$n = 0$ 时我们直接可得答案为 0 而不需要接着读取；实际上，由于 $b_k \geqslant 2, n < 2^{64}$，我们可以发现只有 $b_1, b_2, \cdots, b_{64}$ 可能对答案有影响。

```
#include <stdio.h>
int main(void) {
```

```
    unsigned long long int n;
    unsigned long long int m;
    unsigned long long int x;
    unsigned long long int sum = 0ull;
    scanf("%llu", &n);
    while (n > 0ull && scanf("%llu", &x) != EOF) {
        sum = sum + (n % x);
        n = n / x;
    }
    sum = sum + n;
    printf("%llu", sum);
    return 0;
}
```

I 最小异或和

难度	考点
5~6	位运算

题意分析

给出 n 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，求 $\min\left\{\sum_{i=1}^{n}(x \oplus a_i) | x \in \mathbb{N}\right\}$ 。正如**Hint**中提到的，按位异或运算对于每一位是独立的，计算 $\sum_{i=1}^{n}(x \oplus a_i)$ 我们可以按照每一位的顺序去计算，而不是按照数列 a 的顺序计算。

设 a_i 的32位二进制表示为 $a_{i,31}a_{i,30}\cdots a_{i,1}a_{i,0}$ ，即 $a_i = \sum_{j=0}^{31} a_{i,j} \times 2^j$ ，设 x 的32位二进制表示为 $x_{32}x_{31}\cdots x_0$ ，即 $x = \sum_{j=0}^{31} x_j \times 2^j$ 。

统计第 j 位为 1 的 a_i 个数（即多少个 a_i 的满足 $a_{i,j} = 1$ ），记作 $cnt_{1,j}$ ，则第 j 位为 0 的 a_i 个数 $cnt_{0,j} = n - cnt_{1,j}$ 。

若 $x_j = 1$ ，则第 j 位对答案的贡献为 $cnt_{0,j} \times 2^j$ （即所有第 j 位为 0 的数变成了 1 ）；若 $x_j = 0$ ，则第 j 位对答案的贡献为 $cnt_{1,j} \times 2^j$ （即每个数都不变）。因此要让答案最小，我们只需要对每一位取 $cnt_{0,j} = n - cnt_{1,j}$ 和 $cnt_{1,j}$ 中的较小者，然后计算结果即可。

数学语言描述：

$$\sum_{i=1}^{n}(x \oplus a_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{31}(x_j \oplus a_{i,j}) \times 2^j = \sum_{j=0}^{31} 2^j \times \sum_{i=1}^{n}(x_j \oplus a_{i,j}) = \sum_{j=0}^{31} cnt_{1 \oplus x_j, j} \times 2^j$$

遍历计算即可。

示例代码

```
#include <stdio.h>
#define min(a,b) ((a)<(b)?(a):(b))
int cnt[32]; //记录cnt1j
long long ans; //答案可能在long long范围内
int main()
{
    unsigned int n, a;
```

```
    scanf("%u", &n);
    for(int i = 0; i < n; ++i)
    {
        scanf("%u", &a);
        for(int j = 0; j < 32; ++j)
            if(a >> j & 1) ++cnt[j]; //统计cnt[j]
    }
    for(int j = 0; j < 32; ++j)
        ans += (long long)min(cnt[j], n - cnt[j]) << j; //乘2^j等价于左移j位，这里记得一定要用long long计算。
    printf("%lld", ans);
    return 0;
}
```

Author: 哪吒

J 导弹密码

难度	考点
8	位运算+贪心

题目分析

前置知识

首先我们要先了解关于按位异或的两个基本性质：

1. $0 \bigoplus 1 = 1$, $0 \bigoplus 0 = 0$
2. $b = a \bigoplus b \bigoplus a$

以及按位或的一个性质：多个数按位或，任意一个数的第 `i` 位为1，则结果的第 `i` 位为1

思路分析

题目基本意思比较明确：要求将数列分成 M 段，求每段的异或和，让最后每段异或和的按位或最小。对于两个数比较大小，我们总是优先比较高位数字大小，所以我们很容易想到**贪心算法**：从高位向低位贪心，尽量保证高位为0，要使得最后按位或结果为0，则这M段每段的按位异或都为0。

代码设计

对于第 `j` 位，从前往后计算前缀异或和，统计前缀异或和出现 0 的次数，若小于 M，则说明该位无论怎么分,最后按位或结果都是 1。这里要注意的是，0 的次数可能会大于 M，因为我们用的是前缀和，两个相邻 0 合并之后异或和还是 0，这说明在这里可能存在多种分段方法。

因为贪心思想为尽量保证高位为 0，所以当低位的分发与高位相冲突，并且不能存在其他方案时，最后的按位或结果也是 0。

那么我们需要将高位**不能**作为断点的位置标记下来，用 `tab=1` 标记，在枚举低位的时候，要同时进行判断**异或和是否为 0** 以及该点**是否为高位断点**。

示例代码

```
#include<stdio.h>
int n, m;
unsigned int a[500005], tab[500005], ans;
int main()
{
    scanf("%d %d", &n, &m);
    for(int i = 1; i <= n; i++)
        scanf("%u", &a[i]);
    for(int j = 31; j >= 0; j--) //unsigned int 位数不超过32位
    {
        unsigned int temp = 0, sum = 0; //temp为前缀和，sum为统计temp出现0的次数
        for(int i = 1; i <= n; i++)
        {
            temp = temp ^ ((a[i] >> j) & 1);
            if(!temp && !tab[i]) sum++; //前缀和为0，并且该位置在高位时并未被标记
        }
        if(temp || sum < m) //temp最后如果为1或者无法分成m段，则该位无论怎么分都只能为1
        {
            ans = ans + (1u << j);
            continue;
        }
        //能进行到这一步说明一定能有一种方案使得该位最后按位或结果为0
        temp = 0;
        for(int i = 1; i <= n; i++) //进行标记，如果temp为1，则该点一定不能被断
        {
            temp = temp ^ ((a[i] >> j) & 1);
            if(temp && !tab[i]) tab[i] = 1;
        }
    }
    printf("%u", ans);
    return 0;
}
```

- End -