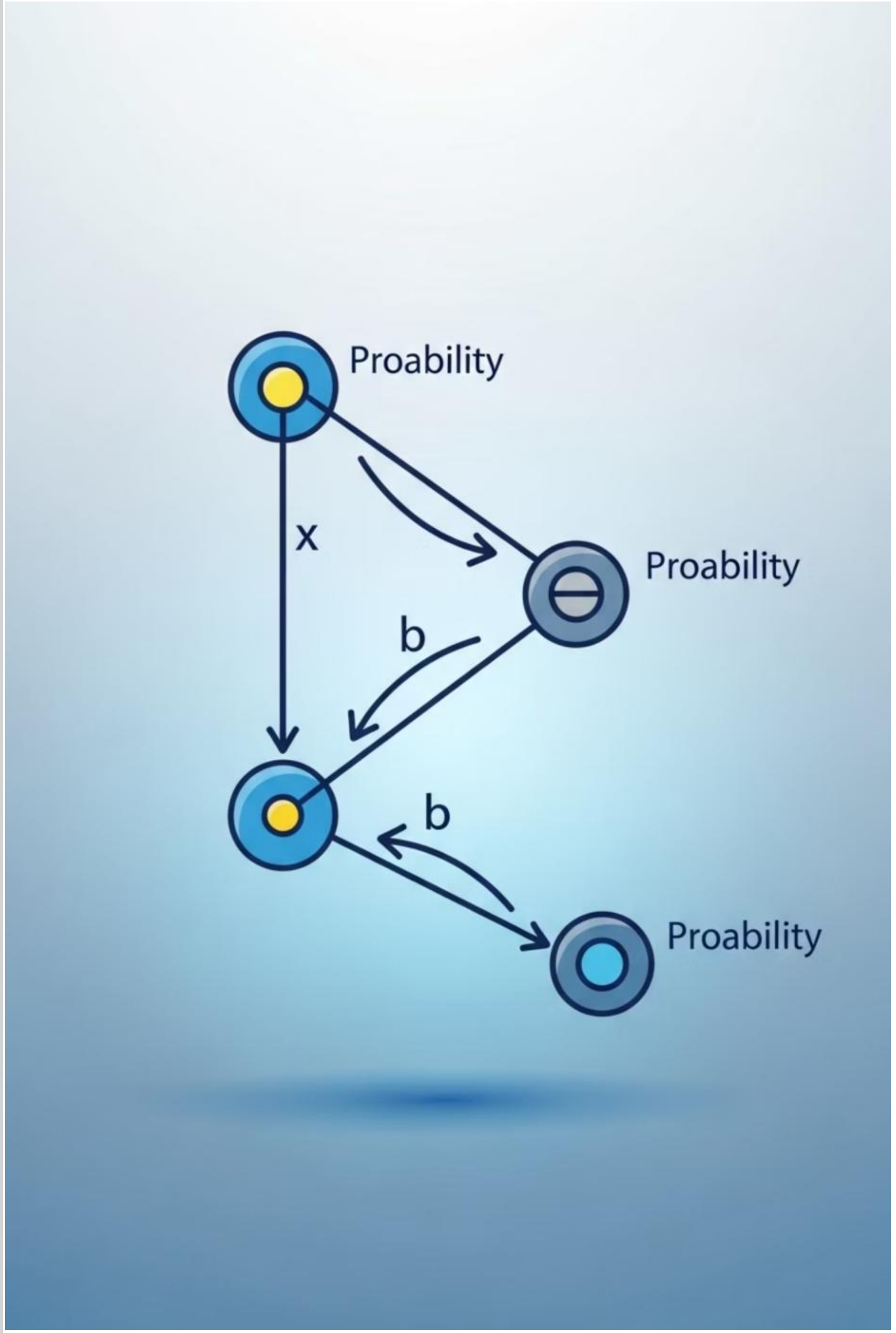
Aprendizado por Reforço
Prof. Domingos Napolitano

Aula 5: Cadeias de Markov - Fundamentos e Aplicações



Cadeias de Markov: Fundamentos e Aplicações

Como as Cadeias de Markov nos permitem modelar sistemas que evoluem probabilisticamente ao longo do tempo, formando a base teórica para o Aprendizado por Reforço.

Agenda da Aula

01

Motivação e Intuição

Por que as Cadeias de Markov são importantes e como elas funcionam intuitivamente

02

Propriedade de Markov

O princípio fundamental: "O futuro depende apenas do presente, não do passado"

03

Definições Formais

Componentes matemáticos e estrutura das Cadeias de Markov

04

Conceitos Fundamentais

Distribuição estacionária, classificação de estados e convergência

05

Aplicações Práticas

Como as Cadeias de Markov são utilizadas em diferentes áreas

06

Dinâmica Interativa

Simulação prática para desenvolver intuição sobre o comportamento das Cadeias

Motivação - "O Presente é Suficiente"

A Pergunta Fundamental

Quanto do histórico passado precisamos conhecer para prever o comportamento futuro de um sistema?

A Resposta Elegante das Cadeias de Markov

Apenas o estado atual é suficiente.

Esta propriedade nos permite modelar sistemas complexos de forma mais simples, capturando a essência de diversos fenômenos naturais, econômicos e sociais.

Propriedade de Markov

A propriedade que define as Cadeias de Markov pode ser expressa formalmente como:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

Interpretação Intuitiva

"O futuro é independente do passado, dado o presente"

O sistema "esquece" sua história e toma decisões apenas com base no estado atual.

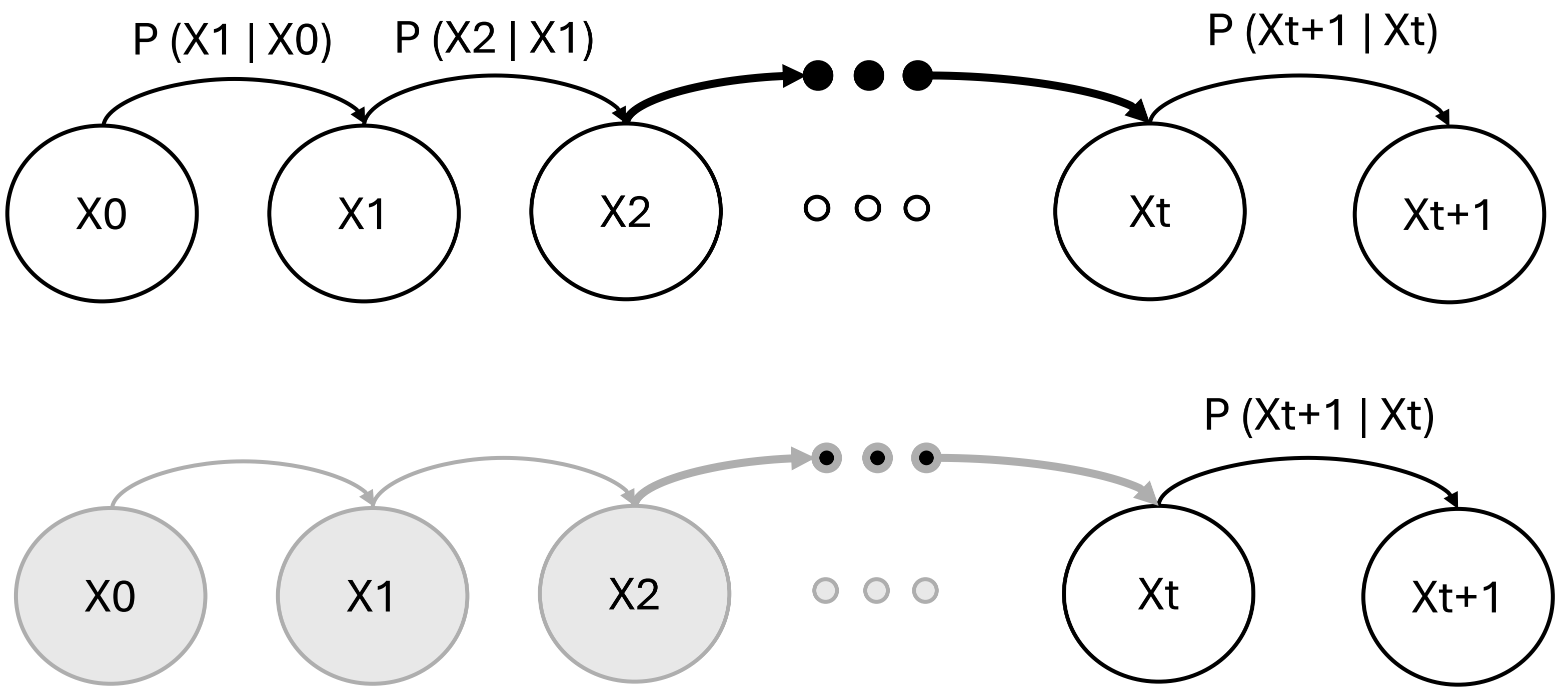
Analogia Prática

Como a previsão do tempo de amanhã que depende principalmente do clima de hoje, não de como estava há uma semana.

Propriedade de Markov

A propriedade que define as Cadeias de Markov pode ser expressa formalmente como:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$



Exemplo Visual
Estados do Tempo

Sol

Se hoje está ensolarado:

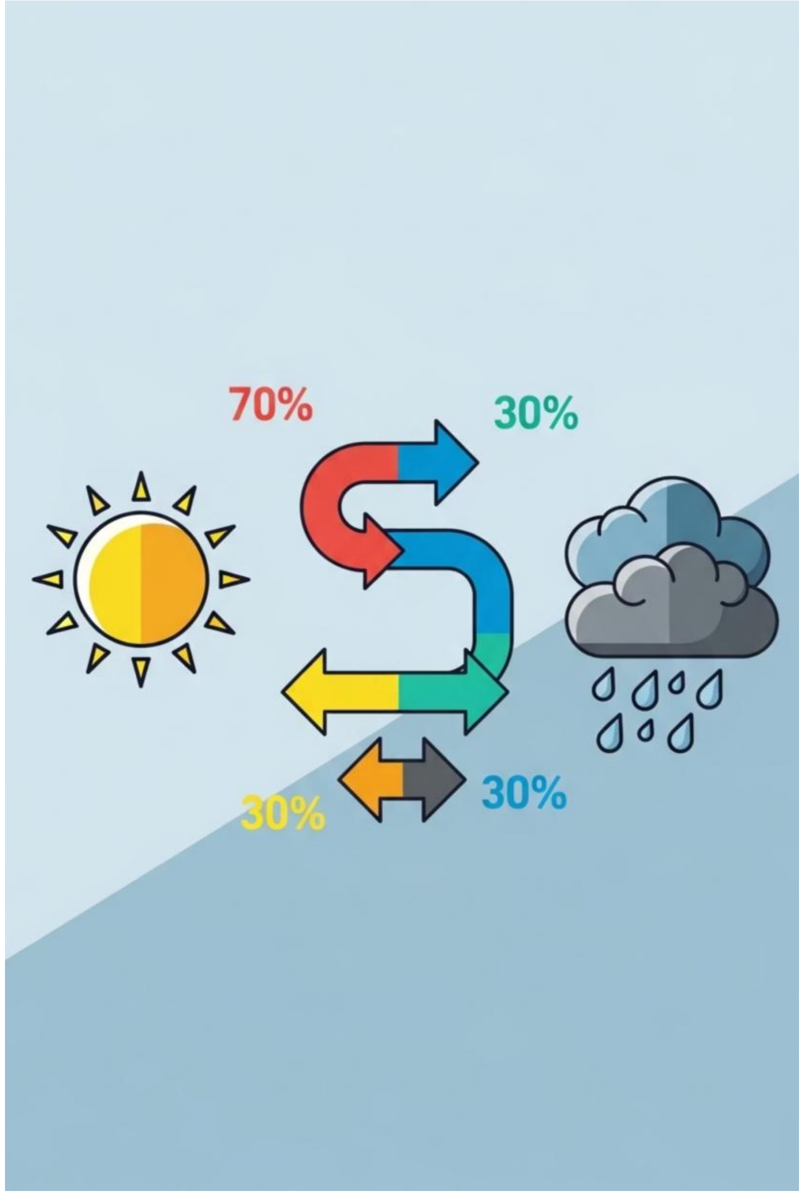
- 70% de chance de sol amanhã
- 30% de chance de chuva amanhã

Chuva

Se hoje está chuvoso:

- 40% de chance de sol amanhã
- 60% de chance de chuva amanhã

A previsão depende **apenas** do estado atual, não dos dias anteriores.



Componentes de uma Cadeia de Markov

Espaço de Estados (S)

Conjunto finito ou enumerável de todos os estados possíveis do sistema.

Exemplo: S = {Sol, Chuva}

Matriz de Transição (P)

Matriz que contém as probabilidades de transição entre estados.

$P_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$

Distribuição Inicial (π_0)

Vetor que representa a probabilidade de começar em cada estado.

Determina o ponto de partida do sistema.

Matriz de Transição

Uma matriz de transição P contém as probabilidades de passar de um estado i (linha) para um estado j (coluna):

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Para o exemplo do tempo:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Propriedades Importantes

- **Não-negatividade:** Pij ≥ 0 para todos i, j
- **Estocasticidade:** Cada linha soma 1
- **Homogeneidade Temporal:** As probabilidades não mudam com o tempo

Definição

Uma distribuição π é **estacionária** se:

$$\pi = \pi P$$

Ou seja, se o sistema está na distribuição π, ele permanecerá nela após qualquer transição.

Interpretação

Representa o **equilíbrio de longo prazo** do sistema - a proporção de tempo que o processo passará em cada estado após muitas transições.

Para o exemplo do tempo, podemos calcular a distribuição estacionária:

$$\pi = [0.571, 0.429]$$

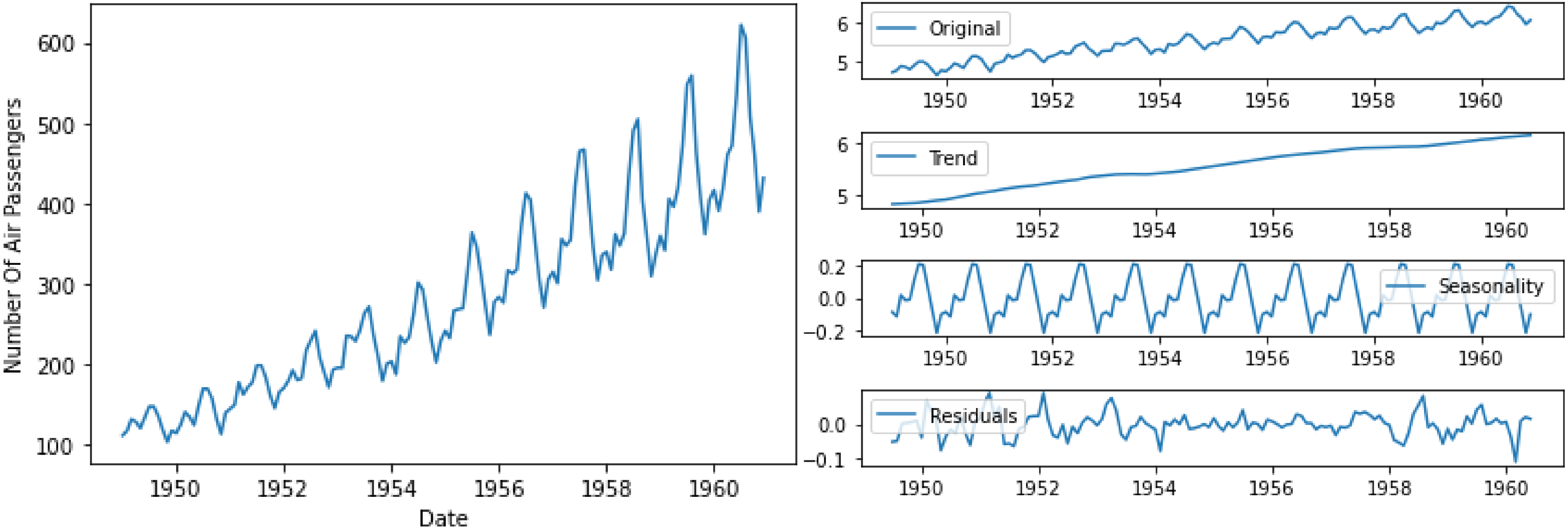
Isso significa que, no longo prazo, teremos aproximadamente 57.1% de dias ensolarados e 42.9% de dias chuvosos.

Cadeias de Markov vs. Séries Temporais Tradicionais

Aspecto	Séries Temporais Clássicas	Cadeias de Markov
Memória	Múltiplos lags (ARIMA)	Apenas estado atual
Natureza dos Estados	Tipicamente contínuos	Tipicamente discretos
Flexibilidade	Geralmente modelos lineares	Captura relações não-lineares
Interpretabilidade	Parâmetros abstratos	Estados com significado intuitivo
Robustez	Sensível a outliers	Mais robusto a valores extremos

As Cadeias de Markov complementam abordagens tradicionais, sendo especialmente úteis para modelar mudanças de regime e transições entre estados discretos.

Séries Temporais Tradicionais



Aplicações - Processamento de Linguagem Natural

Geração de Texto

Modelos de n-gramas tratam sequências de palavras como estados de uma Cadeia de Markov.

1 "O gato subiu no"

2 "telhado" (0.6)

1 "O gato subiu no"

2 "muro" (0.3)

A próxima palavra depende apenas das palavras anteriores (contexto atual).

Outras Aplicações em PLN

- **Correção Ortográfica:** Modelar sequências válidas de caracteres
- **Análise de Sentimentos:** Rastrear mudanças de polaridade emocional
- **Tradução Automática:** Componente em sistemas de tradução estatística
- **Sumarização:** Identificar sequências relevantes

Aplicações - Finanças

1

Rating AAA

Empresas com excelente capacidade de pagamento

Transições: 90% permanece AAA, 9% passa para AA, 1% para A

2

Rating AA

Empresas com forte capacidade de pagamento

Transições: 2% sobe para AAA, 85% permanece AA, 12% passa para A, 1% passa para BBB

3

Rating A

Empresas com boa capacidade de pagamento

Transições: 5% sobe para AA, 80% permanece A, 14% passa para BBB, 1% passa para BB

4

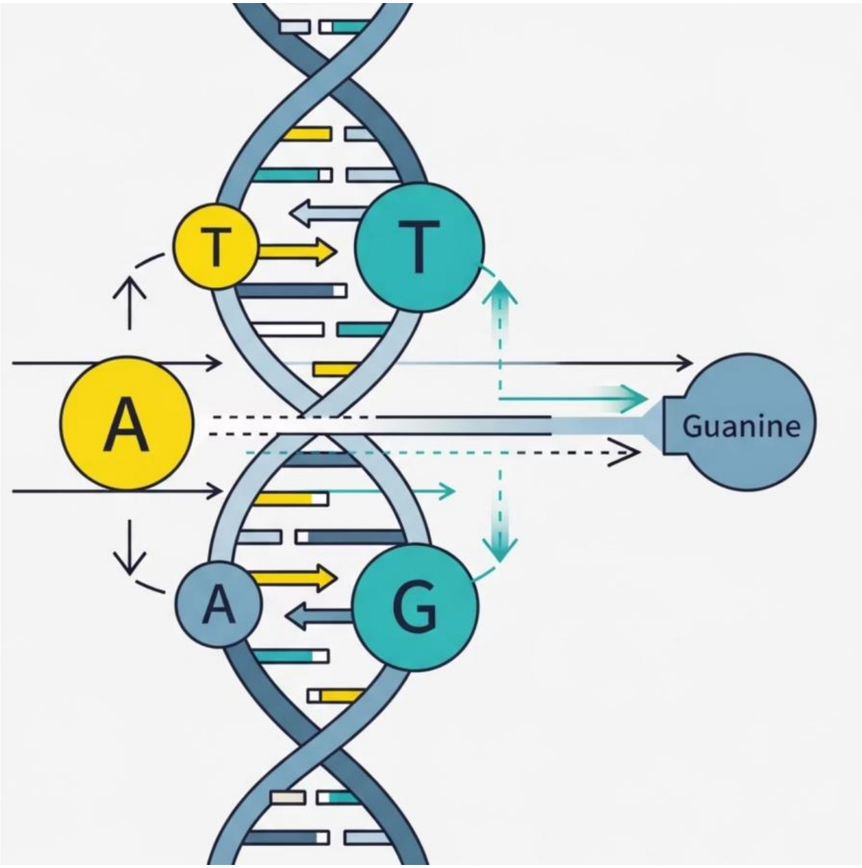
Default

Estado absorvente: uma vez em default, a empresa permanece nele

Transições: 100% permanece em Default

Os modelos de Credit Rating usam Cadeias de Markov para estimar a probabilidade de inadimplência ao longo do tempo.

Aplicações - Bioinformática



Sequências de DNA

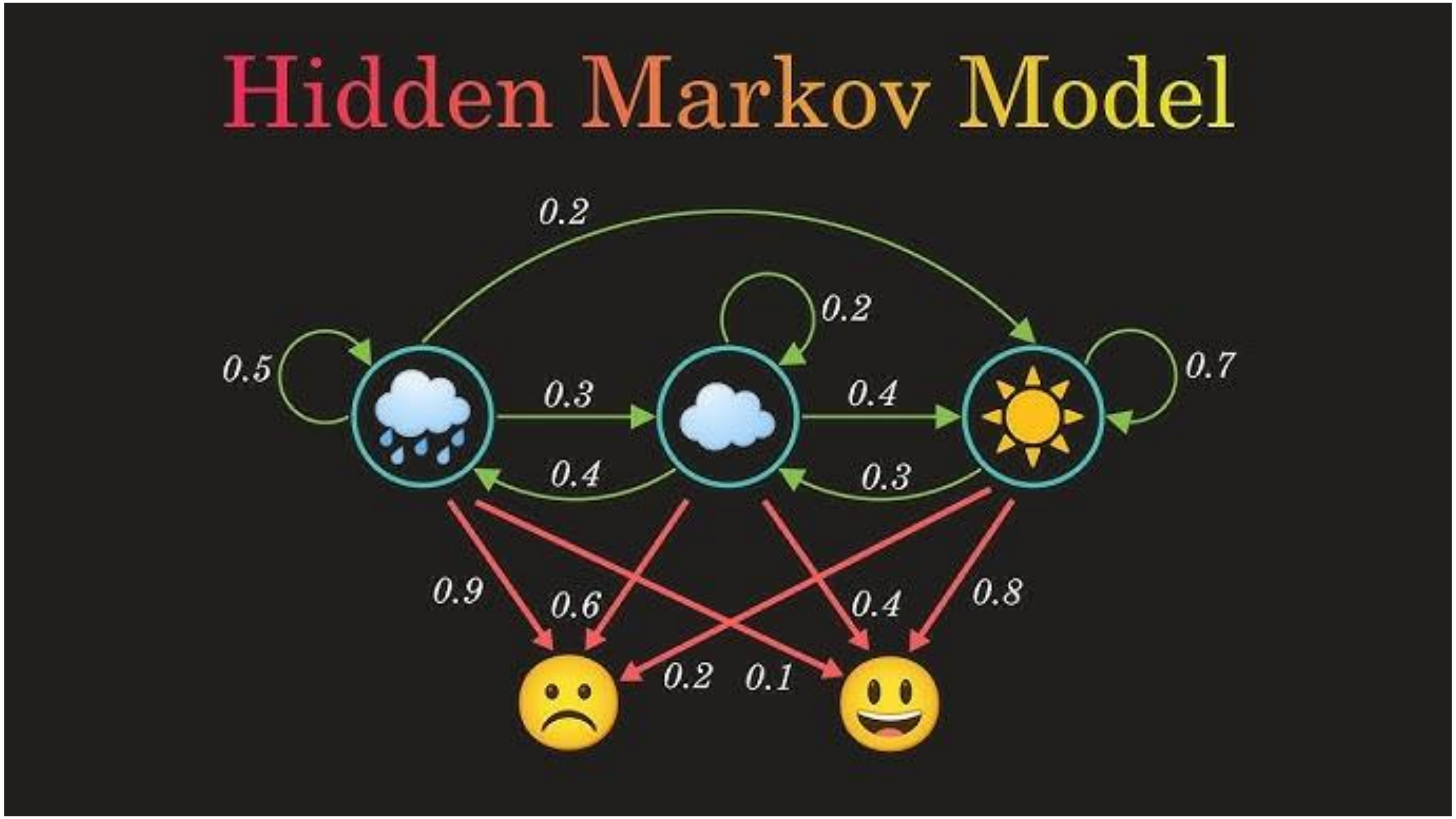
As Cadeias de Markov modelam a ocorrência dos nucleotídeos A, T, G e C em sequências genômicas.

Aplicações Específicas

- **Identificação de Genes:** Regiões codificantes têm padrões estatísticos distintos
- **Modelos de Evolução:** Simulação de mutações genéticas ao longo do tempo
- **Alinhamento de Sequências:** Comparação de genomas de diferentes espécies
- **Predição de Estruturas Proteicas:** Modelagem do dobramento de proteínas

Modelos HMM (Hidden Markov Models) são extensões que permitem estados não observáveis diretamente.

Modelos HMM (Hidden Markov Models) são extensões que permitem estados não observáveis diretamente.



Outras Aplicações Práticas

Marketing

Modelagem da jornada do cliente entre diferentes estados de engajamento: prospect → lead → cliente → cliente fiel → churn.

Permite calcular o Lifetime Value e otimizar estratégias de retenção.

Engenharia

Análise de confiabilidade de sistemas, modelando estados de funcionamento, degradação e falha de equipamentos.

Otimização de cronogramas de manutenção preditiva.

Web Analytics

Modelagem do comportamento de navegação em sites, identificando padrões de fluxo entre páginas.

Otimização de taxas de conversão baseada em trajetórias prováveis.

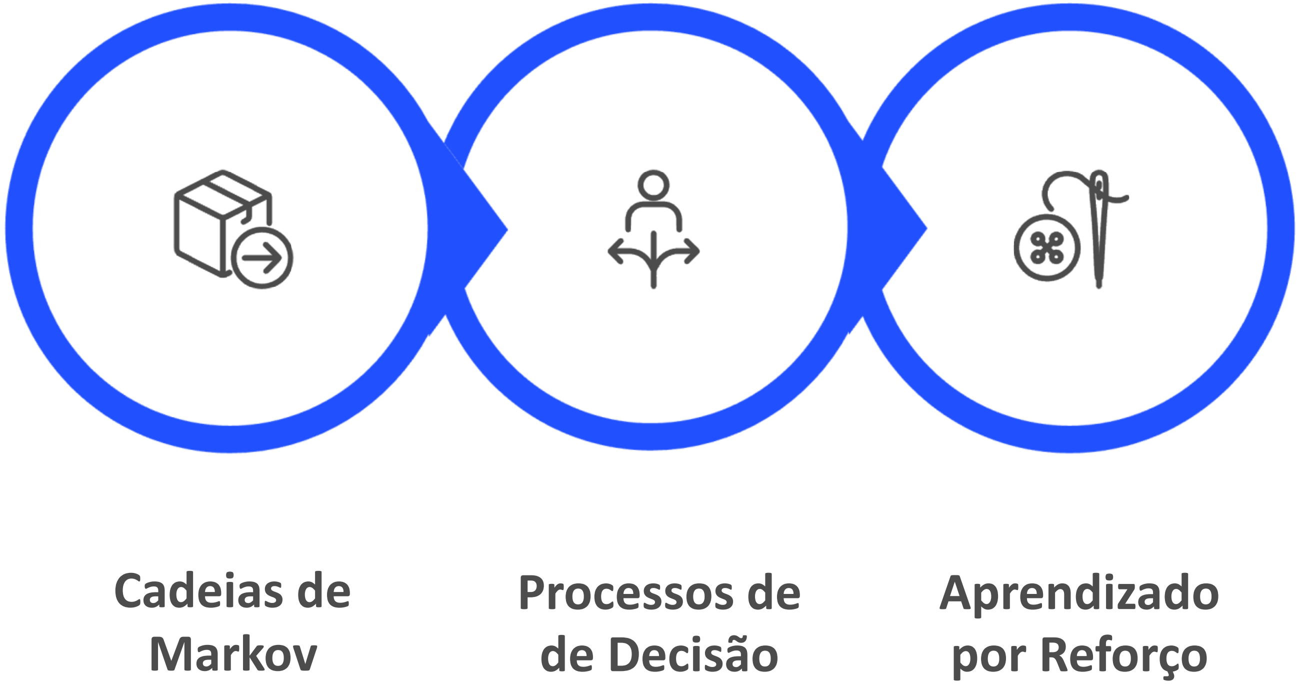
Outras Aplicações Práticas Jornada do Cliente

JORNADA DO CLIENTE EM UM SUPERMERCADO

EMOÇÕES E PENSAMENTOS	FASE 1 Gatilho – Necessidade de comprar: Despesa, receita, festa, etc.	FASE 2 Dirige, caminha para a unidade escolhida.	FASE 3 Estacionar	FASE 4 Encontrar um carrinho/cesto de compras	FASE 5 Encontrar produtos	FASE 6 Pagamento	FASE 7 Saída
	Estou empolgado para preparar esta deliciosa receita!	O trânsito está ótimo, o tempo está uma delícia!	Há vagas! Estão sinalizadas e cobertas!	Encontro carrinhos ou cestos fácil, estão limpos e funcionando bem!	Tudo organizado, precificado, com grande variedade e bom atendimento.	Relação preço valor OK, promoções, caixas s/ filas, processo rápido, sacolinhas de fácil abertura ou empacotador, atendimento simpático.	Tranquila, cancela automatizada, gratuito!
	Conversa com esposa, marido. Elaborar ou mentalizar lista de compras.	O trânsito está normal, o tempo está bom e estou no horário.	Andando um pouco encontro algumas vagas, nem tão perto ou cobertas, mais OK.	Encontro carrinhos, alguns não estão limpos ou funcionando, mas consigo escolher.	Encontro quase tudo sem ajuda, há pessoas para ajudar, encontro o que preciso ou substitutos.	Relação preço valor equilibrada, fila pequena, sem problemas de pagamento, atendimento eficiente, sacolinha OK.	Sem problemas, sistema de pagamento ou validação fácil.
	Que droga, não gostaria se gastar dinheiro nesse momento!	Tráfego pesado, demora no transporte, caminhada extensa, chuva, atrasado.	Tudo lotado, cancela não funciona, vagas descobertas e está chovendo.	Não há carrinhos, ou a maioria está sujo ou em mau estado!	Desorganização, falta de espaço, faltam produtos chave, atendimento ruim.	Relação preço valor ruim, filas extensas, sistema lento, atendimento falho, sacolinhas ruins.	Trânsito interno, caro, validação difícil, cancela ruim.
AÇÕES	COMO PREPARAR TUDO PARA CADA SITUAÇÃO?						

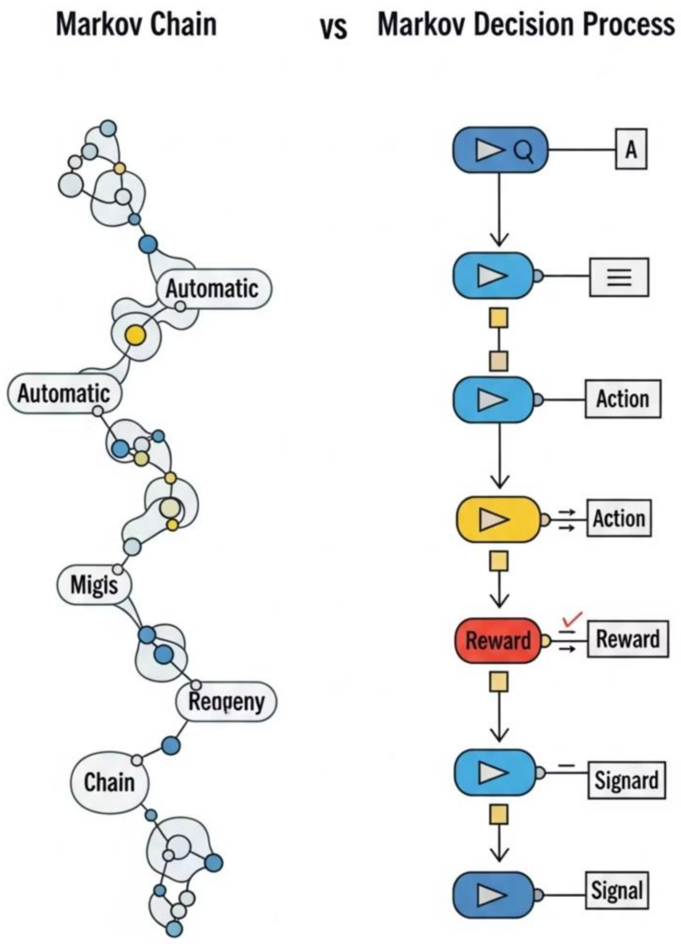
https://blog.qualylife.com.br/a-jornada-do-cliente-em-supermercados/

Conexão com Aprendizado por Reforço



As Cadeias de Markov formam a base teórica para o Aprendizado por Reforço, sendo estendidas para incluir ações e recompensas nos Processos de Decisão de Markov (MDPs).

De Cadeias de Markov para MDPs



Cadeia de Markov

Evolução probabilística sem controle:

$$P(s' \mid s)$$

Componentes:

- **S:** Conjunto de estados
- **P:** Matriz de transição

O sistema evolui naturalmente sem intervenção.

Processo de Decisão de Decisão de Markov

Evolução probabilística com controle:

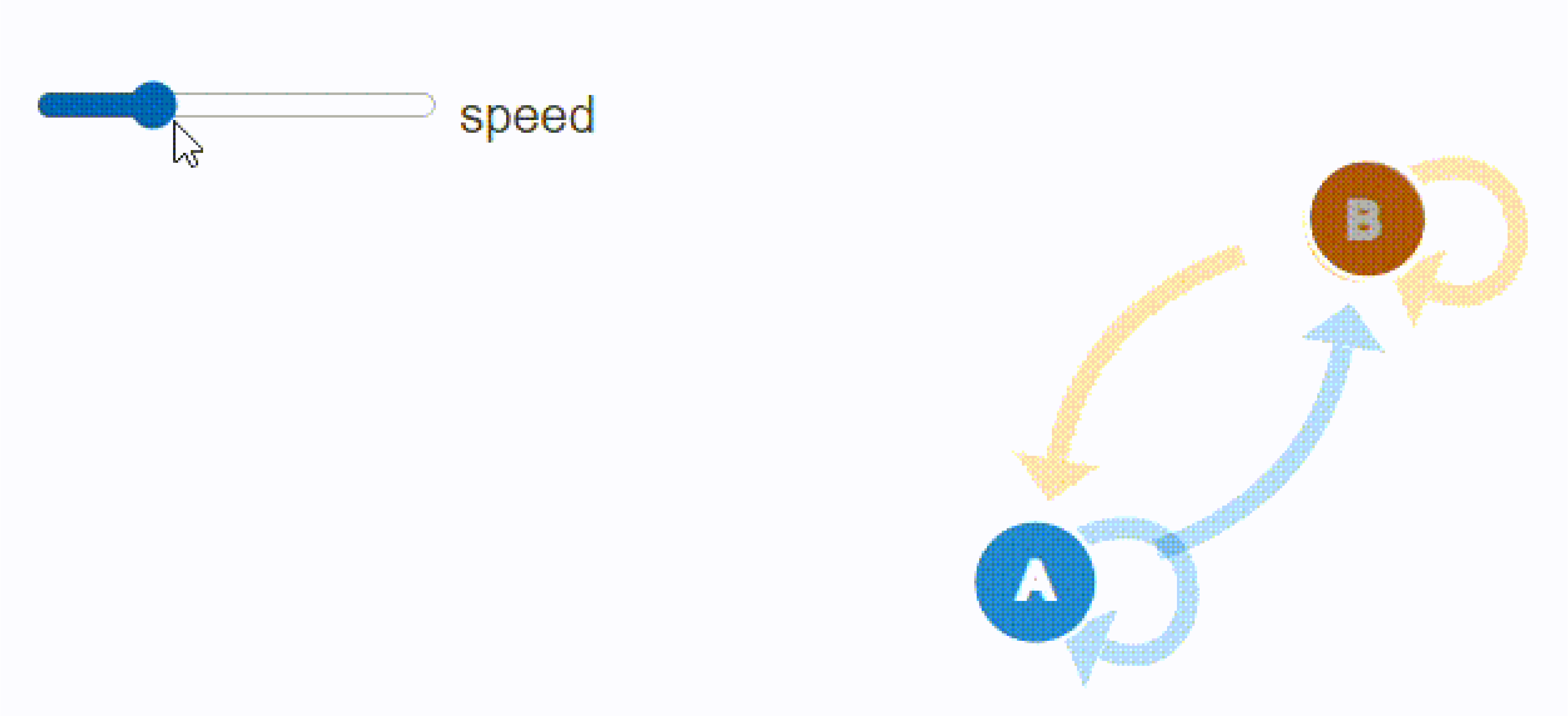
$$P(s' \mid s, a), R(s, a, s')$$

Componentes adicionais:

- **A:** Conjunto de ações
- **R:** Função de recompensa
- **π:** Política (mapeamento de estados para ações)

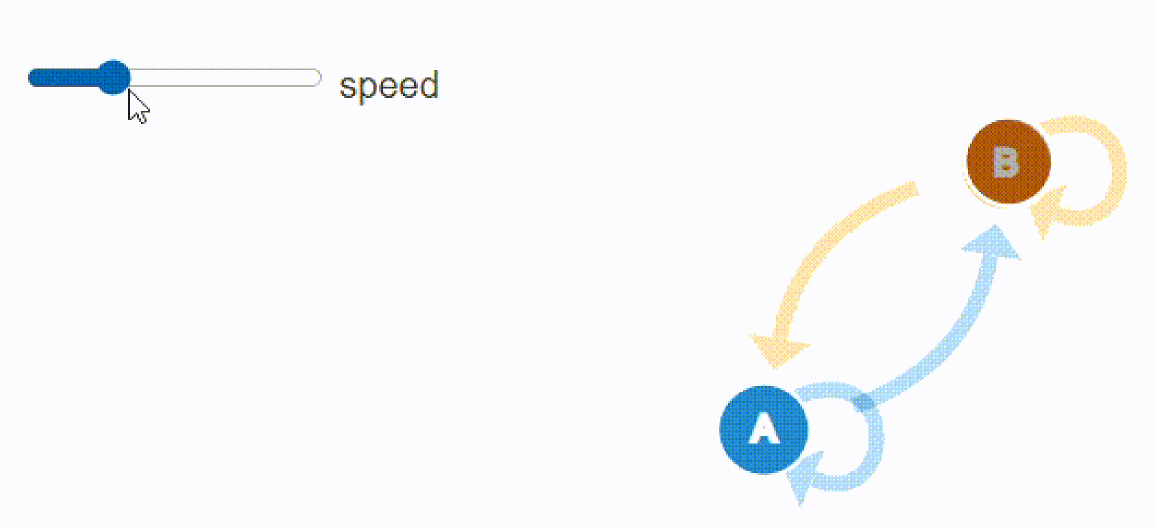
O agente pode influenciar as transições através de ações.

Visualização das Cadeias de Markov"



https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html

Visualização das Cadeias de Markov"



	A	B
A	0,5	0,5
B	0,5	0,5

Com dois estados (A e B) em nosso espaço de estados, há 4 transições possíveis (não 2, porque um estado pode retornar a si mesmo).

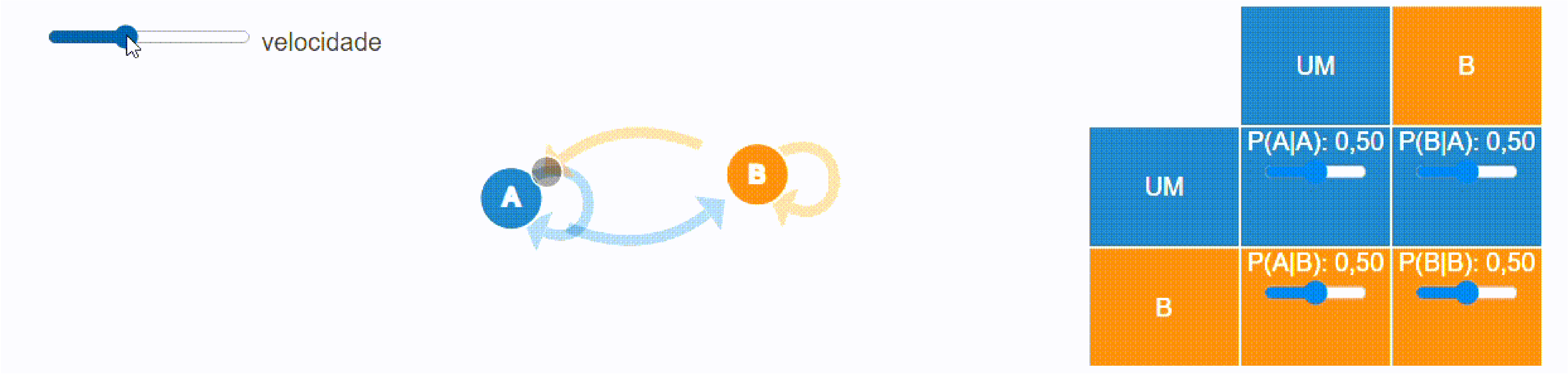
Se estivermos em "A", podemos transitar para "B" ou permanecer em "A".

Se estivermos em "B", podemos transitar para "A" ou permanecer em "B".

Neste diagrama de dois estados, a probabilidade de transição de qualquer estado para qualquer outro é 0,5.

https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html

Visualização das Cadeias de Markov"

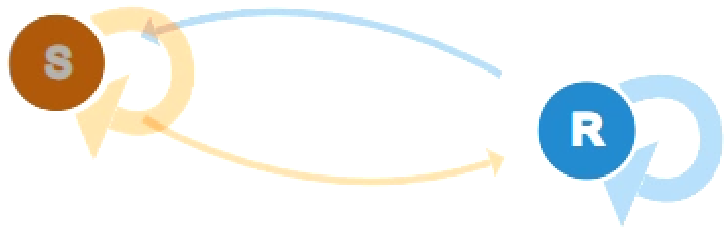


https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html

Visualização das Cadeias de Markov"

velocidade

S R S S S S S S S S S S S S S



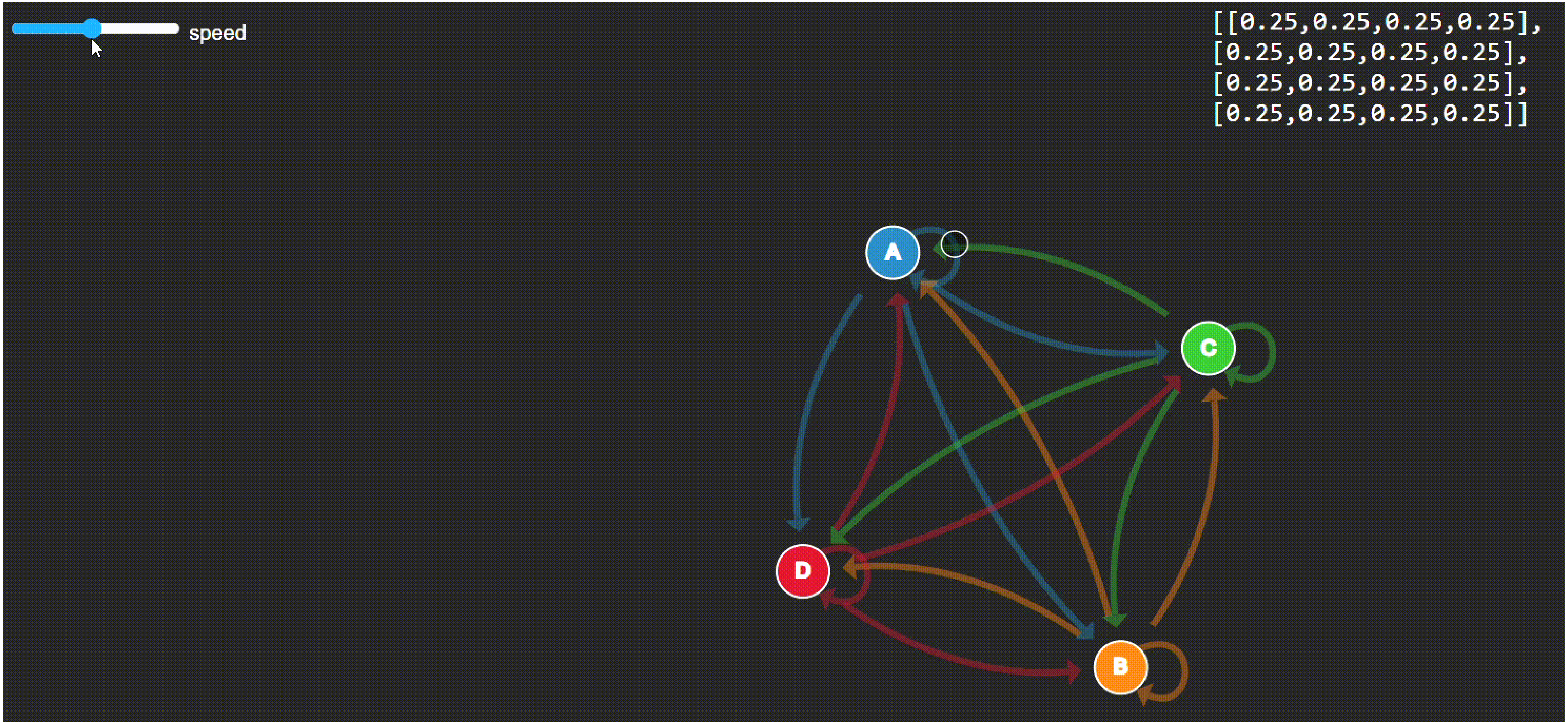
	S	R
S	0,9	0,1
R	0,1	0,9

Quando a cadeia de Markov está no estado "R", ela tem 0,9 de probabilidade de permanecer no estado e 0,1 de chance de passar para o estado "S".

Da mesma forma, o estado "S" tem 0,9 de probabilidade de permanecer no estado e 0,1 de chance de transitar para o estado "R".

https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html

Visualização das Cadeias de Markov"



https://setosa.io/blog/2014/07/26/markov-chains/index.html

Dinâmica Interativa: "Simulador Humano de Cadeia de Markov" Markov"

Estados de Humor em uma Empresa

😊 Motivado

Transições:

- 60% → Motivado
- 30% → Neutro
- 10% → Desmotivado

😐 Neutro

Transições:

- 30% → Motivado
- 40% → Neutro
- 30% → Desmotivado

😔 Desmotivado

Transições:

- 10% → Motivado
- 40% → Neutro
- 50% → Desmotivado

Na atividade prática, simularemos esta cadeia para desenvolver intuição sobre seu comportamento e verificar a convergência para a distribuição estacionária.

Ficarei →

Estou ↓

	😊 Motivado	😐 Neutro	😔 Desmotivado
😊 Motivado	60%	30%	10%
😐 Neutro			
😔 Desmotivado			

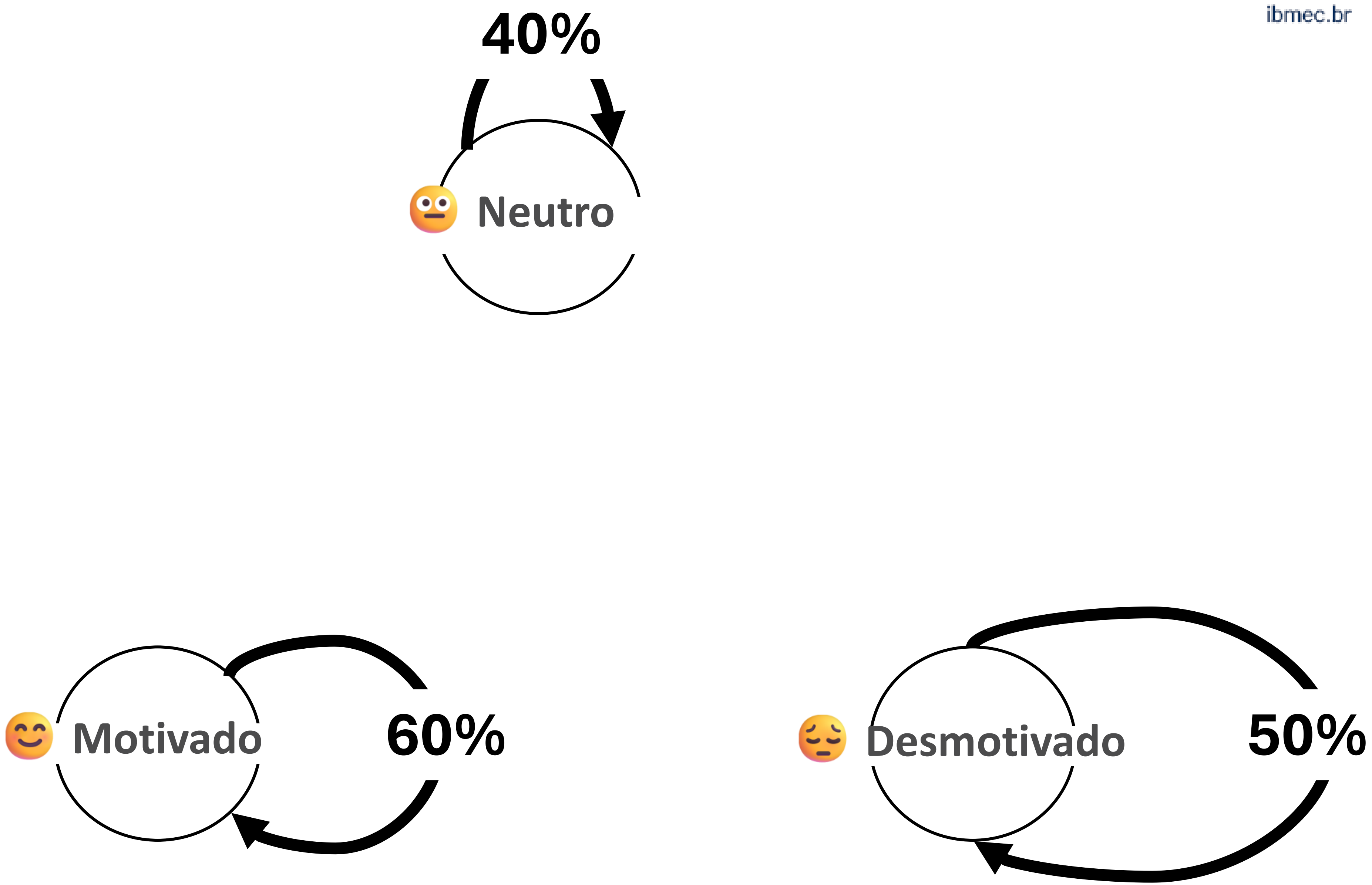
Estou \ Ficarei	😊 Motivado	😐 Neutro	😔 Desmotivado
😊 Motivado	60%	30%	10%
😐 Neutro	30%	40%	30%
😔 Desmotivado			

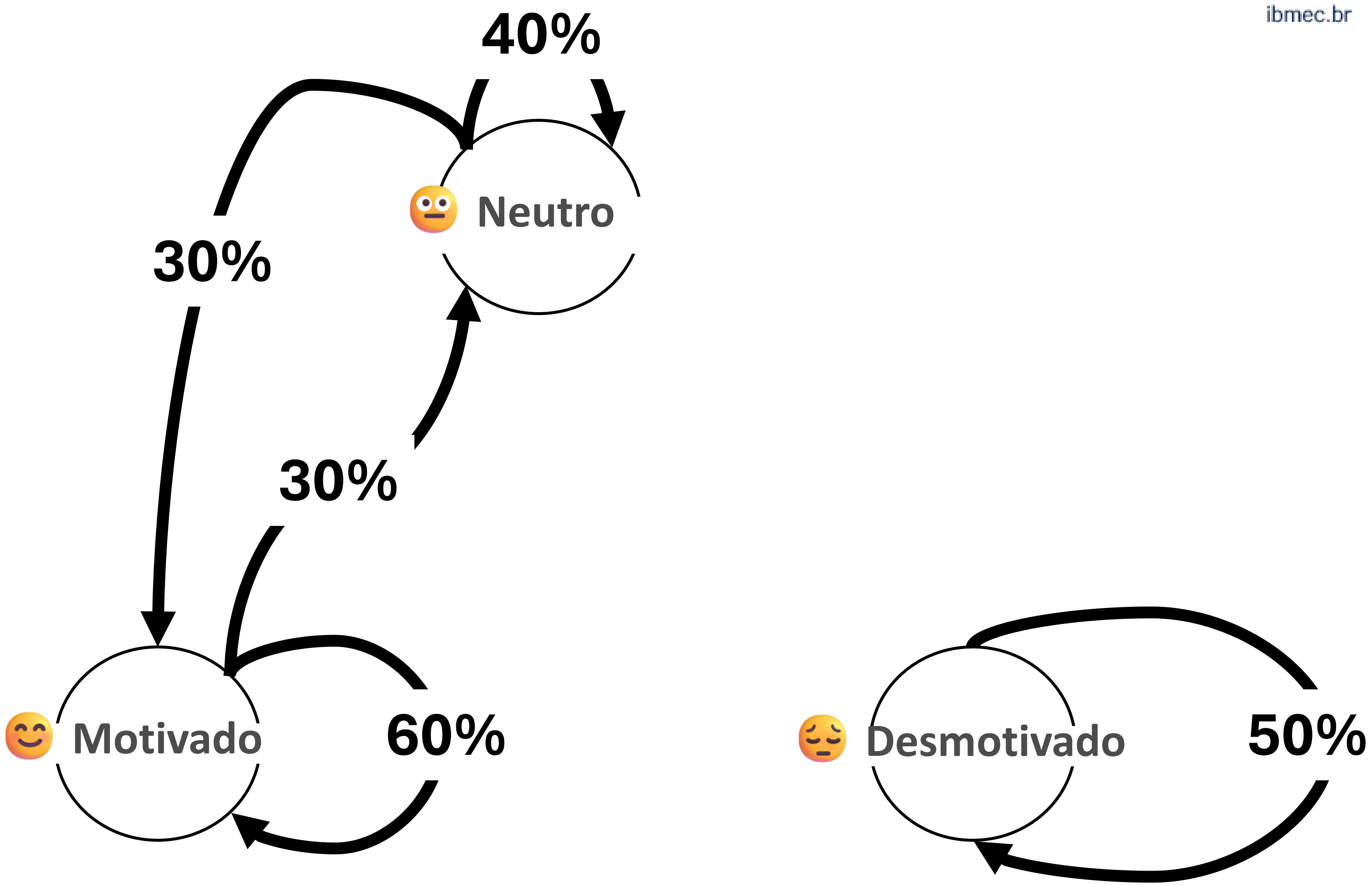
Estou \ Ficarei	😊 Motivado	😳 Neutro	😔 Desmotivado
😊 Motivado	60%	30%	10%
😳 Neutro	30%	40%	40%
😔 Desmotivado	10%	40%	50%

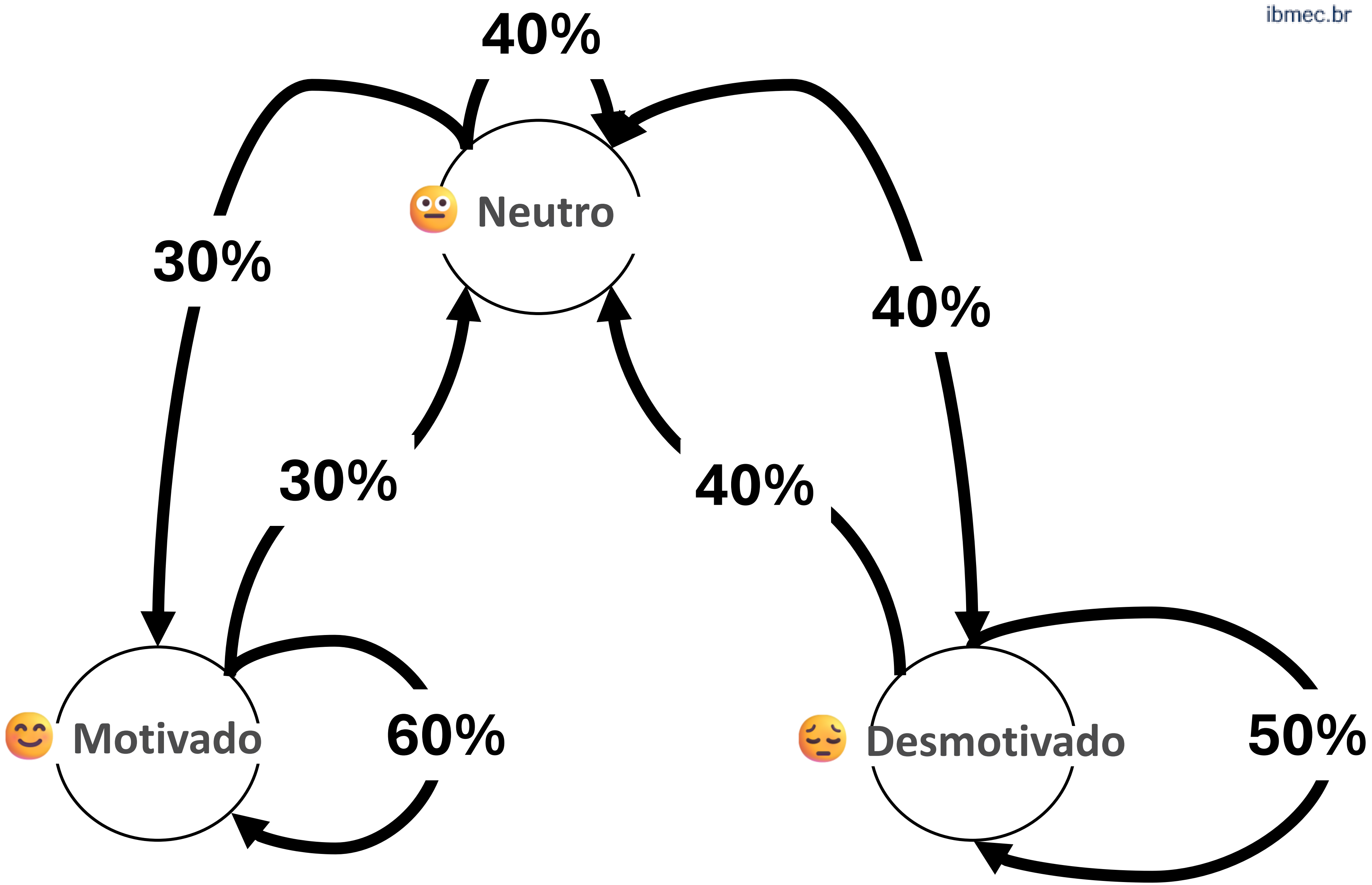
Neutro

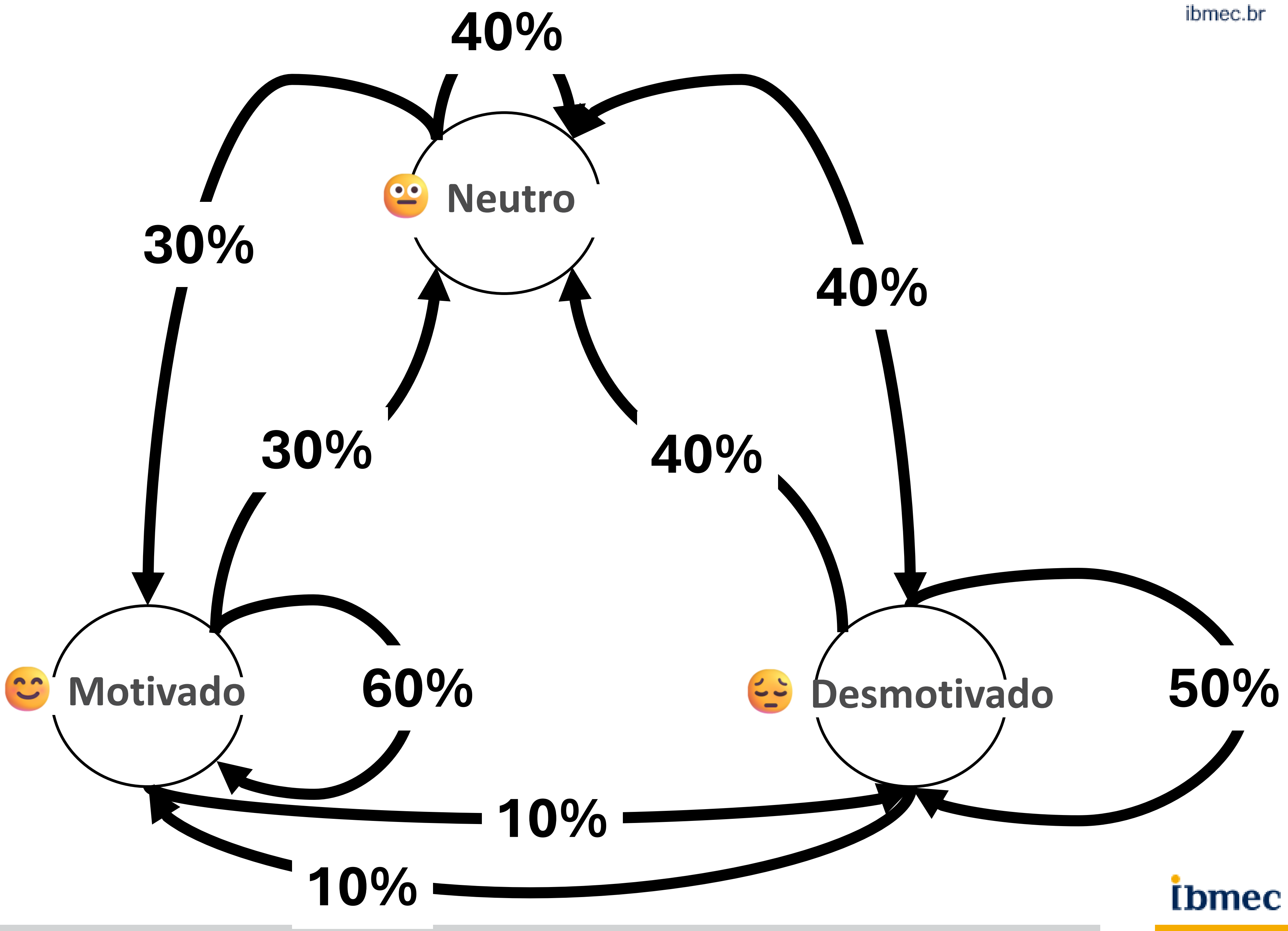
Motivado

Desmotivado


40%
Neutro
Motivado
60%
Desmotivado
50%


40%
30%
Neutro
30%
Motivado
60%
Desmotivado
50%


40%
30%
Neutro
40%
30%
40%
Motivado
60%
Desmotivado
50%


40%
30%
Neutro
40%
30%
40%
Motivado
60%
Desmotivado
50%
10%
10%