

# 재귀 필터

문태봉

2020.01.08 (수)

- 평균 필터
- 이동평균 필터
- 저주파 통과 필터

- 평균값

$$\bar{x}_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$$

- 배치식

모든 데이터 사용

새로운 데이터가 들어오면?

- 평균값

$$\bar{x}_k = \frac{k-1}{k} \bar{x}_{k-1} + \frac{1}{k} x_k$$

- 재귀식

직전에 계산한 평균값 활용하여 현재 평균값 계산

시간, 공간적으로 효율

- 평균 필터

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k$$

$$\alpha \equiv \frac{k-1}{k}$$

- 재귀식

직전에 계산한 평균값 활용하여 현재 평균값 계산

시간, 공간적으로 효율

# 평균 필터: 평균값 계산 예제

- 배치식과 재귀식을 사용하여 평균값 계산

$$x = 10, 20, 30$$

# 평균 필터: 평균값 계산 예제

- 재귀식을 사용하여 평균값 계산

$$x = 10$$

$$\bar{x}_1 = x_1 = 10$$

$$\bar{x}_k = \frac{k-1}{k} \bar{x}_{k-1} + \frac{1}{k} x_k$$

# 평균 필터: 평균값 계산 예제

- 재귀식을 사용하여 평균값 계산

$$x = 10, 20$$

$$\bar{x}_1 = x_1 = 10$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}x_2 = 15$$

$$\bar{x}_k = \frac{k-1}{k}\bar{x}_{k-1} + \frac{1}{k}x_k$$



# 평균 필터: 평균값 계산 예제

- 재귀식을 사용하여 평균값 계산

$$x = 10, 20, 30$$

$$\bar{x}_1 = x_1 = 10$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2}\bar{x}_1 + \frac{1}{2}x_2 = 15$$

$$\bar{x}_3 = \frac{2}{3}\bar{x}_2 + \frac{1}{3}x_3 = 20$$

$$\bar{x}_k = \frac{k-1}{k}\bar{x}_{k-1} + \frac{1}{k}x_k$$

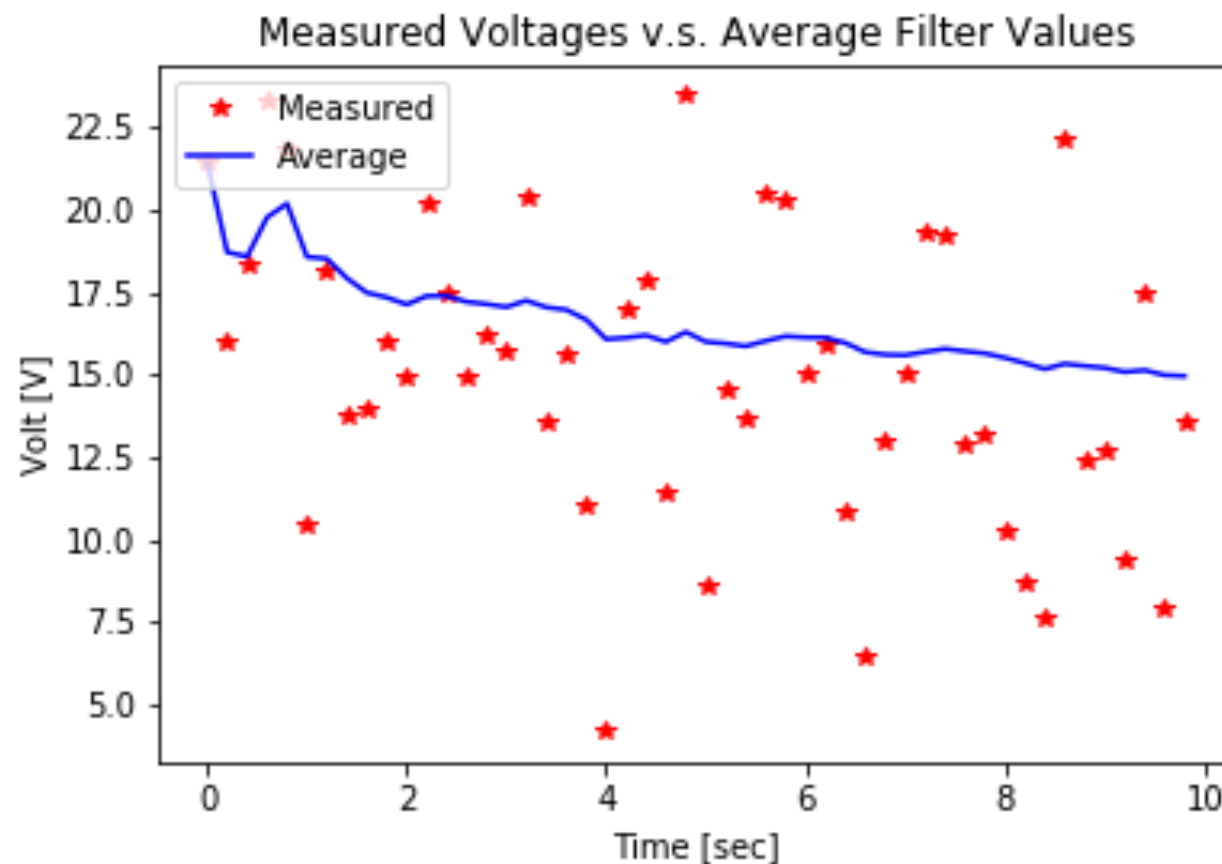
# 평균 필터: 전압 측정 예제

- 10초 동안 0.2초 간격으로 배터리의 전압 측정
  - 배터리의 명목 전압 = 14.4 V
  - 측정 잡음  $\sim \text{Gauss}(0, 2^2)$
- 평균 필터를 사용하여 배터리의 전압을 추정하자!

[https://github.com/tbmoon/kalman\\_filter/blob/master/Ch01.AverageFilter/average\\_filter.ipynb](https://github.com/tbmoon/kalman_filter/blob/master/Ch01.AverageFilter/average_filter.ipynb)

# 평균 필터: 전압 측정 예제

- 10초 동안 0.2초 간격으로 배터리의 전압 측정
  - 배터리의 명목 전압 = 14.4 V
  - 측정 잡음 ~  $\text{Gauss}(0, 2^2)$
- 평균 필터를 사용하여 배터리의 전압을 추정하자!



# 평균 필터: 전압 측정 예제

- 10초 동안 0.2초 간격으로 배터리의 전압 측정
  - 배터리의 명목 전압 = 14.4 V
  - 측정 잡음 ~ Gauss(0, 2<sup>2</sup>)
- 평균 필터를 사용하여 배터리의 전압을 추정하자!
- 20, 30초 동안 전압을 측정해보자!

# 평균 필터: 전압 측정 예제

- 10초 동안 0.2초 간격으로 배터리의 전압 측정
  - 배터리의 명목 전압 = 14.4 V
  - 측정 잡음 ~ Gauss(0, 2<sup>2</sup>)
- 평균 필터를 사용하여 배터리의 전압을 추정하자!
- 20, 30초 동안 전압을 측정해보자!
- 잡음을 제거하고 명목 전압을 알 수 있다!

- 평균 필터는 시간에 따라 변하는 물리량에 적합하지 않다
- n 이동 평균

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-n+1} + x_{k-n+2} + \cdots + x_k}{n}$$

- 배치식

n 개의 데이터를 사용한 k 번째 데이터의 이동 평균

재귀식은 이점이 없다

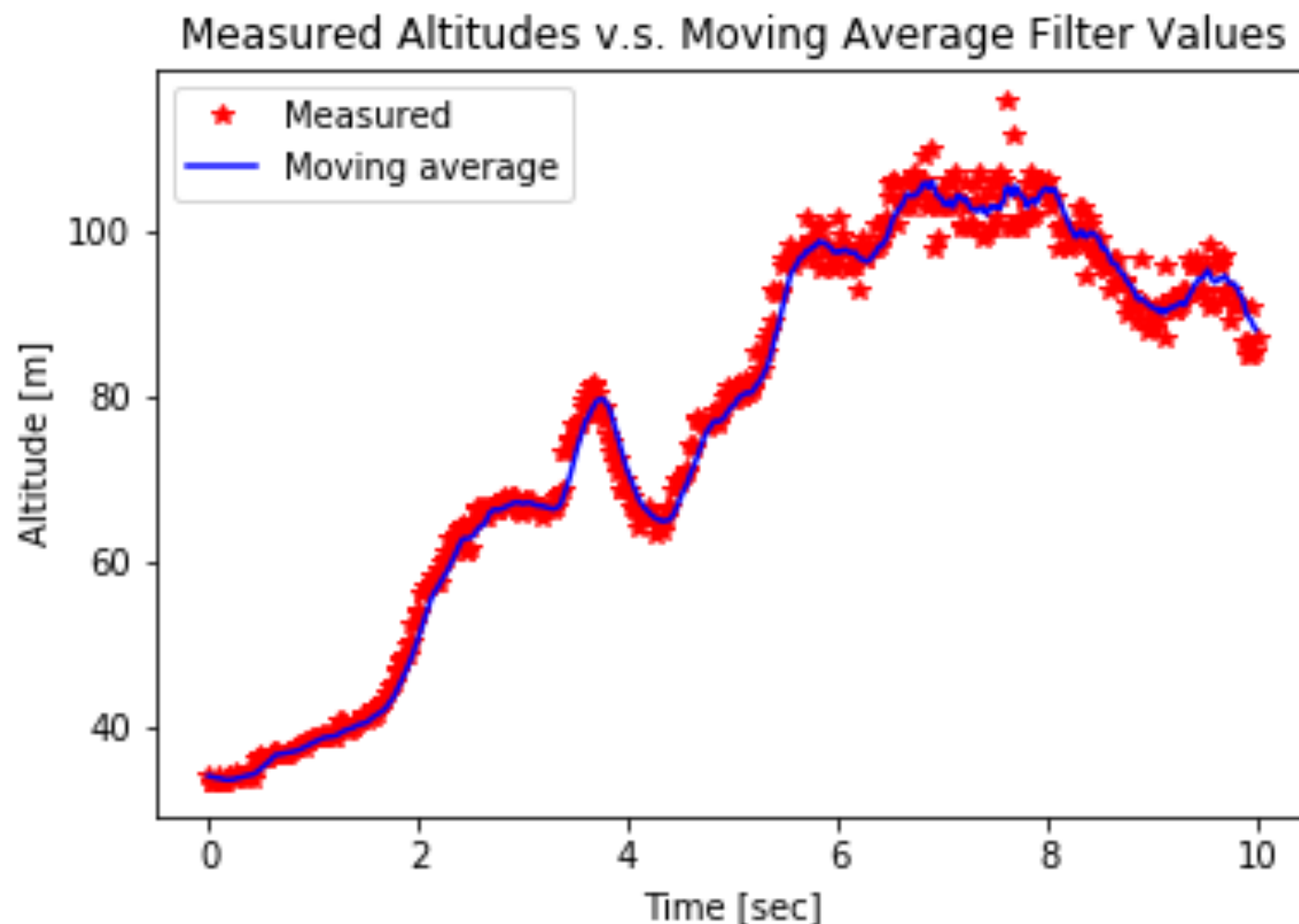
# 이동평균 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- $n(=10)$  이동평균 필터를 사용하여 거리를 추정하자!

[https://github.com/tbmoon/kalman\\_filter/blob/master/Ch02.MovingAverageFilter/moving\\_average\\_filter.ipynb](https://github.com/tbmoon/kalman_filter/blob/master/Ch02.MovingAverageFilter/moving_average_filter.ipynb)

# 이동평균 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- $n(=10)$  이동평균 필터를 사용하여 거리를 추정하자!





# 이동평균 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- $n(=10)$  이동평균 필터를 사용하여 거리를 추정하자!
- $n(=5, 20)$  이동평균은 어떨까?

# 이동평균 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- $n(=10)$  이동평균 필터를 사용하여 거리를 추정하자!
- $n(=5, 20)$  이동평균은 어떨까?
  - $n$  증가: 잡음 제거 효율, 변화에 덜 민감 (시간 지연)
  - $n$  감소: 잡음 제거 비효율, 변화에 민감
  - 하이퍼 파라미터  $n$ 을 적절히 선택해야만 한다!

- 이동 평균 필터의 한계

- n을 적절히 선택해도 잡음 제거와 변화 추이 반영이 어렵다
- 왜?

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-n+1} + x_{k-n+2} + \cdots + x_k}{n}$$

- 이동 평균 필터의 한계

- n을 적절히 선택해도 잡음 제거와 변화 추이 반영이 어렵다
- 왜?

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= \frac{x_{k-n+1} + x_{k-n+2} + \cdots + x_k}{n} \\ &= \frac{1}{n}x_{k-n+1} + \frac{1}{n}x_{k-n+2} + \cdots + \frac{1}{n}x_k\end{aligned}$$

동일한 가중치

- 이동 평균 필터의 한계

- n을 적절히 선택해도 잡음 제거와 변화 추이 반영이 어렵다
- 해결책?

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= \frac{x_{k-n+1} + x_{k-n+2} + \cdots + x_k}{n} \\ &= \frac{1}{n}x_{k-n+1} + \frac{1}{n}x_{k-n+2} + \cdots + \frac{1}{n}x_k\end{aligned}$$

최근 데이터일수록 높은 가중치 부여

- 평균 필터

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k$$

평균값

$$\alpha \equiv \frac{k-1}{k}$$

데이터 수로 고정

- (1차) 저주파 통과 필터

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k$$

추정값

$$0 < \alpha < 1$$

하이퍼 파라미터로 설정

- 저주파 통과 필터: 최근 데이터에 더 높은 가중치

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k \quad 0 < \alpha < 1$$

- 저주파 통과 필터: 최근 데이터에 더 높은 가중치

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k \quad 0 < \alpha < 1$$

$$= \alpha[\alpha \bar{x}_{k-2} + (1 - \alpha)x_{k-1}] + (1 - \alpha)x_k$$



- 저주파 통과 필터: 최근 데이터에 더 높은 가중치

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k \quad 0 < \alpha < 1$$

$$= \alpha [\alpha \bar{x}_{k-2} + (1 - \alpha)x_{k-1}] + (1 - \alpha)x_k$$

$$= \alpha^2 \bar{x}_{k-2} + \alpha(1 - \alpha)x_{k-1} + (1 - \alpha)x_k$$

- 저주파 통과 필터: 최근 데이터에 더 높은 가중치

$$\bar{x}_k = \alpha \bar{x}_{k-1} + (1 - \alpha)x_k \quad 0 < \alpha < 1$$

$$= \alpha[\alpha \bar{x}_{k-2} + (1 - \alpha)x_{k-1}] + (1 - \alpha)x_k$$

$$= \alpha^2 \bar{x}_{k-2} + \alpha(1 - \alpha)x_{k-1} + (1 - \alpha)x_k$$

$$\alpha(1 - \alpha) < (1 - \alpha)$$

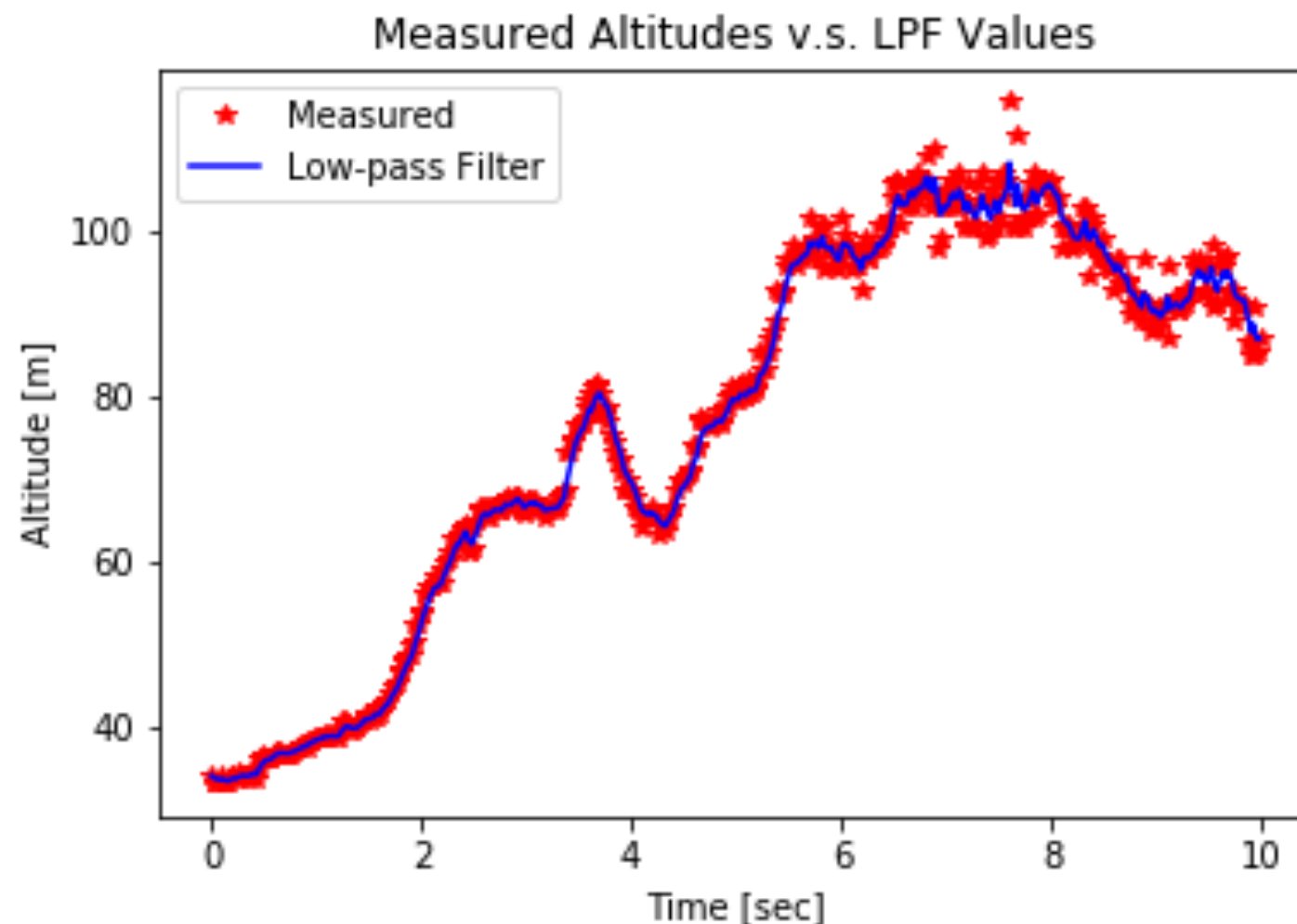
# 저주파 통과 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- 저주파 통과 필터 ( $\alpha = 0.7$ )를 사용하여 거리를 추정하자!

[https://github.com/tbmoon/kalman\\_filter/blob/master/Ch03.LowPassFilter/low\\_pass\\_filter.ipynb](https://github.com/tbmoon/kalman_filter/blob/master/Ch03.LowPassFilter/low_pass_filter.ipynb)

# 저주파 통과 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- 저주파 통과 필터 ( $\alpha = 0.7$ )를 사용하여 거리를 추정하자!



# 저주파 통과 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- 저주파 통과 필터 ( $\alpha = 0.7$ )를 사용하여 거리를 추정하자!
- $\alpha = 0.4, 0.9$ 을 사용하면 어떨까?

# 저주파 통과 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- 저주파 통과 필터 ( $\alpha = 0.7$ )를 사용하여 거리를 추정하자!
- $\alpha = 0.4, 0.9$ 을 사용하면 어떨까?
- $\alpha$ 를 알아서 최적화할 수 있을까?

# 저주파 통과 필터: 초음파 거리계 측정 예제

- 10초 동안 0.02초 간격으로 초음파 거리계 측정
  - 데이터: 측정 거리 + 잡음
- 저주파 통과 필터 ( $\alpha = 0.7$ )를 사용하여 거리를 추정하자!
- $\alpha = 0.4, 0.9$ 을 사용하면 어떨까?
- $\alpha$ 를 알아서 최적화할 수 있을까?

칼만 필터!

- 칼만 필터는 어렵지 않아 (저자: 김성필 님)



# 풀잎 스쿨 11 주간 일정

- 01 주차 1월 08일 - 재귀 필터 (퍼실이)
- 02 주차 1월 15일 - 칼만 필터 기초 & 초간단 칼만 필터 예제 (퍼실이)
- 03 주차 1월 22일 - 칼만 필터 기초 & 위치로 속도 추정하기 (퍼실이)
- 04 주차 1월 29일 - 영상 속의 물체 추정하기
- 05 주차 2월 05일 - 기울기 자세 측정하기
- 06 주차 2월 12일 - 기울기 자세 측정하기
- 07 주차 2월 19일 - 확장 칼만 필터
- 08 주차 2월 26일 - 확장 칼만 필터

완료

- 09 주차 3월 04일 - 무향 칼만 필터
- 10 주차 3월 11일 - 무향 칼만 필터
- 11 주차 3월 18일 - 파티클 필터 혹은 정리/종강 파티

예정

감사합니다