Rapport projet CHP théorie

Table des matières

Introduction

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique.

Elle est défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,y) - D\Delta u(t,x,y) = f(t,x,y) \\ u|\Gamma_0 = g(t,x,y) \\ u|\Gamma_1 = h(t,x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Γ_0 définissant les bords sud et nord et Γ_1 définissant les bords ouest et est.

1 Analyse théorique du problème

Dans la suite du rapport $u(t^n, x_i, y_j)$ sera approximé par u_{ij}^n.

1.1 Question a

On cherche dans cette question à écrire le schéma d'Euler implicite à l'aide de différences finies centrées du second ordre en espace.

Pour cela, on peut commencer par approcher la dérivé partiel en temps :

$$\partial_t u(t^n, x_i, y_j) \simeq \frac{1}{\Delta t}(u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) \tag{2}$$

On peut ensuite approché le gradient d'espace comme avec les différences centré implicite comme il suit :

$$\nabla u(t^n, x_i, y_j) \simeq \frac{1}{\Delta x}(u_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y}(u_{ij+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{ij-\frac{1}{2}}^{n+1}) \tag{3}$$

Sachant que l'opérateur Δ correspond à appliquer 2 fois l'opérateur ∇ :

$$\nabla u_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1} \simeq \frac{1}{\Delta x}(u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}) \tag{4}$$

On doit alors appliqué une deuxième fois l'opérateur gradient à tous les composants, on peut approximer le Laplacien comme il suit :

$$\Delta u(t^n, x_i, y_j) \simeq \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}) \tag{5}$$

Au final, le schéma des différences finies centrées implicite de l'équation de la chaleur peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_{ij}^{n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}) - \frac{D\Delta t}{\Delta y^2}(u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}) = u_{ij}^n + \Delta t f(t^n, x_i, y_j) \\ u|\Gamma_0 = g(t,x,y) \\ u|\Gamma_1 = h(t,x,y) \end{cases} \tag{6}$$

En prenant en compte que les conditions de bords sont des conditions de Diriclet défini par les fonctions g et h.

1.2 Question b

En utilisant la numérotation C++ on peut mettre le schéma sous forme matricielle de la façon suivante :

$$(I + H_x + H_y)U^{n+1} = U^n + F + BC \tag{7}$$

1.3 Question c

Sachant que U, BC, F et les matrice H_x et H_y sont défini de la façon suivante :

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \end{pmatrix} \qquad F = \Delta t \begin{pmatrix} f(t^n, x_1, y_1) \\ f(t^n, x_2, y_1) \\ f(t^n, x_3, y_1) \\ f(t^n, x_4, y_1) \\ f(t^n, x_1, y_2) \\ f(t^n, x_2, y_2) \\ f(t^n, x_3, y_2) \\ f(t^n, x_4, y_2) \\ f(t^n, x_1, y_3) \\ f(t^n, x_2, y_3) \\ f(t^n, x_3, y_3) \\ f(t^n, x_4, y_3) \end{pmatrix}$$

$$BC = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} g(t^{n+1}, x_0, y_1) \\ 0 \\ 0 \\ g(t^{n+1}, x_5, y_1) \\ g(t^{n+1}, x_0, y_2) \\ 0 \\ 0 \\ g(t^{n+1}, x_5, y_2) \\ g(t^{n+1}, x_0, y_3) \\ 0 \\ 0 \\ g(t^{n+1}, x_5, y_3) \end{pmatrix} + \frac{D\Delta t}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} h(t^{n+1}, x_1, y_0) \\ h(t^{n+1}, x_2, y_0) \\ h(t^{n+1}, x_3, y_0) \\ h(t^{n+1}, x_4, y_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(t^{n+1}, x_1, y_4) \\ h(t^{n+1}, x_2, y_4) \\ h(t^{n+1}, x_3, y_4) \\ h(t^{n+1}, x_4, y_4) \end{pmatrix}$$

$$H_x = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

$$H_y = \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

1.4 Question d

Tout d'abord, la matrice $A = I + H_x + H_y$ est très creuse avec maximum 5 coefficients par ligne. De plus, c'est une matrice symétrique. Enfin, c'est une matrice que nous avons pu rencontrer à de multiples occasions et l'on sait par conséquent que la matrice est une matrice symétrique définie positive.