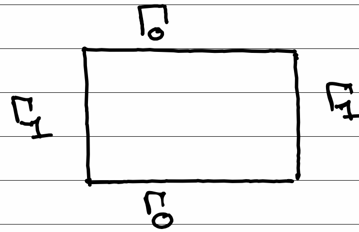
# Théorie

- Équation de la chaleur en 2D :

$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = f \quad (1) \\ u_{\Gamma_0} = g \quad u_{\Gamma_1} = h \end{cases}$$




- Maillage

$(x_i)_{i=0,N_x+1}$ avec $x_i = x_{min} + i h_x$ et $h_x = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{N_x + 1}$

$(y_j)_{j=0,N_y+1}$ avec $y_j = y_{min} + j h_y$ et $h_y = \dfrac{y_{max} - y_{min}}{N_y + 1}$

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$

On pose les approximations suivantes :

$u_{ij}^n \simeq u(t_n, x_i, y_j)$

$f_{ij}^n \simeq f(t_n, x_i, y_j)$

$g_{ij}^n \simeq g(t_n, x_i, y_j)$

$h_{ij}^n \simeq h(t_n, x_i, y_j)$

D'après la méthode d'Euler implicite, on a :

* $\frac{du}{dt} \simeq \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t}$

* $\frac{d^2u}{dx^2} \simeq \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2}$

* $\frac{d^2u}{dy^2} \simeq \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}$

$$(1) : \quad \frac{du}{dt} - D\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}\right) = f$$

Donc on obtient le schéma suivant :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} - D\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)$$

$$= f_{i,j}^{n}$$

$$u_{i,j}^{n} + \Delta t f_{i,j}^{n} = u_{i,j}^{n+1}\left(1 + \frac{2\Delta t D}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t D}{\Delta y^2}\right)$$
$$- \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}\right)$$
$$- \frac{D\Delta t}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}\right)$$

Dans ce système, les $u_{i,j}^{n+1}$ sont les inconnus, saufs aux bords où ils sont connus.

on pose $\left|\begin{array}{l} a = 1 + 2h_x + 2h_x \\ b = -h_x \\ c = -h_y \end{array}\right.$ avec $\left|\begin{array}{l} h_x = \dfrac{1}{\Delta x^2} \\ h_y = \dfrac{1}{\Delta y^2} \end{array}\right.$

Dans un cas général, notre schéma est donc :

$$\begin{cases} u_{ij}^n + \Delta t f_{ij}^n = a u_{ij}^{n+1} + b\left(u_{i+1j}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}\right) + c\left(u_{ij+1}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}\right) \\ u_{0j}^n = h_{0j}^n \; ; \; u_{N_x+1J}^n = h_{N_x+1J}^n \\ u_{i0}^n = g_{i0}^n \; ; \; u_{iN_y+1}^n = g_{iN_y+1}^n \end{cases}$$

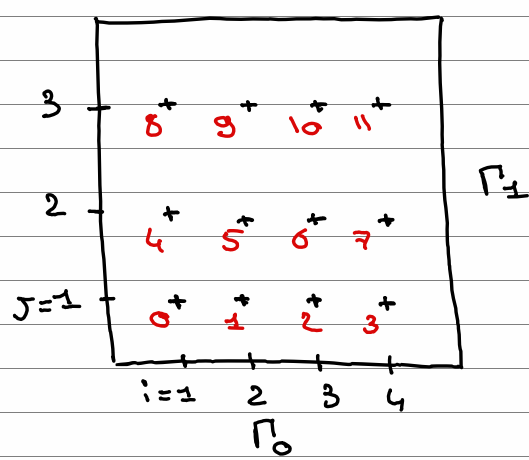
Ce schéma est valable $\forall (i,j) \in [\![0, N_x+1]\!] \times [\![0, N_y+1]\!]$

(b) On veut maintenant mettre notre schéma sous une forme matriciel $AU = F$.

- Prenons un cas simple pour bien visualiser la forme de $A$ et de $F$.

* on prend le cas $N_x = 4$ et $N_y = 3$.

$$U^n = \begin{bmatrix} u_{11}^n \\ u_{21}^n \\ u_{31}^n \\ u_{41}^n \\ u_{12}^n \\ u_{22}^n \\ u_{32}^n \\ u_{42}^n \\ u_{13}^n \\ u_{23}^n \\ u_{33}^n \\ u_{43}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \\ u_6^n \\ u_7^n \\ u_8^n \\ u_9^n \\ u_{10}^n \\ u_{11}^n \end{bmatrix}$$



Posons ainsi les 12 équations de notre cas, au temps $t_n$ :

$$
\begin{cases}
u_{11}^n + \cancel{\Delta t f_{11}^n} = a u_{11}^{n+1} + b\left(u_{21}^{n+1} + \cancel{h_{01}^{n+1}}\right) + c\left(u_{12}^{n+1} + \cancel{g_{10}^{n+1}}\right) \\
u_{21}^n + \cancel{\Delta t f_{21}^n} = a u_{21}^{n+1} + b\left(u_{31}^{n+1} + u_{11}^{n+1}\right) + c\left(u_{22}^{n+1} + \cancel{g_{20}^{n+1}}\right) \\
u_{31}^n + \cancel{\Delta t f_{31}^n} = a u_{31}^{n+1} + b\left(u_{41}^{n+1} + u_{21}^{n+1}\right) + c\left(u_{32}^{n+1} + \cancel{g_{30}^{n+1}}\right) \\
u_{11}^n + \cancel{\Delta t f_{41}^n} = a u_{41}^{n+1} + b\left(\cancel{h_{51}^{n+1}} + u_{31}^{n+1}\right) + c\left(u_{42}^{n+1} + \cancel{g_{40}^{n+1}}\right) \\
\\
u_{12}^n + \cancel{\Delta t f_{12}^n} = a u_{12}^{n+1} + b\left(u_{22}^{n+1} + \cancel{h_{02}^{n+1}}\right) + c\left(u_{13}^{n+1} + u_{11}^{n+1}\right) \\
u_{22}^n + \cancel{\Delta t f_{22}^n} = a u_{22}^{n+1} + b\left(u_{32}^{n+1} + u_{12}^{n+1}\right) + c\left(u_{23}^{n+1} + u_{21}^{n+1}\right) \\
u_{32}^n + \cancel{\Delta t f_{32}^n} = a u_{32}^{n+1} + b\left(u_{42}^{n+1} + u_{22}^{n+1}\right) + c\left(u_{33}^{n+1} + u_{31}^{n+1}\right) \\
u_{42}^n + \cancel{\Delta t f_{42}^n} = a u_{42}^{n+1} + b\left(\cancel{h_{52}^{n+1}} + u_{32}^{n+1}\right) + c\left(u_{43}^{n+1} + u_{41}^{n+1}\right) \\
\\
u_{13}^n + \cancel{\Delta t f_{13}^n} = a u_{13}^{n+1} + b\left(u_{23}^{n+1} + \cancel{h_{03}^{n+1}}\right) + c\left(\cancel{g_{14}^{n+1}} + u_{12}^{n+1}\right) \\
u_{23}^n + \cancel{\Delta t f_{23}^n} = a u_{23}^{n+1} + b\left(u_{33}^{n+1} + u_{13}^{n+1}\right) + c\left(\cancel{g_{24}^{n+1}} + u_{22}^{n+1}\right) \\
u_{33}^n + \cancel{\Delta t f_{33}^n} = a u_{33}^{n+1} + b\left(u_{43}^{n+1} + u_{23}^{n+1}\right) + c\left(\cancel{g_{34}^{n+1}} + u_{32}^{n+1}\right) \\
u_{43}^n + \cancel{\Delta t f_{43}^n} = a u_{43}^{n+1} + b\left(\cancel{h_{53}^{n+1}} + u_{33}^{n+1}\right) + c\left(\cancel{g_{44}^{n+1}} + u_{42}^{n+1}\right)
\end{cases}
$$

On va exprimer $AU = F$ tels que :

$$
\begin{cases}
U = U^{n+1} \\
F = U^n + G^n
\end{cases}
\quad \Rightarrow \underline{G}^n = \begin{pmatrix}
\Delta t f_{11}^n - b h_{01}^{n+1} - c g_{10}^{n+1} \\
\Delta t f_{21}^n - c g_{20}^{n+1} \\
\Delta t f_{31}^n - c g_{30}^{n+1} \\
\Delta t f_{41}^n - c g_{40}^{n+1} - b h_{51}^{n+1} \\
\Delta t f_{12}^n - b h_{02}^{n+1} \\
\Delta t f_{22}^n \\
\Delta t f_{32}^n \\
\Delta t f_{42}^n - b h_{52}^{n+1} \\
\Delta t f_{13}^n - b h_{03}^{n+1} - c g_{14}^{n+1} \\
\Delta t f_{23}^n - c g_{24}^{n+1} \\
\Delta t f_{33}^n - c g_{34}^{n+1} \\
\Delta t f_{43}^n - c g_{44}^{n+1} - b h_{53}^{n+1}
\end{pmatrix}
$$

et ainsi on obtient par identification :

$$A = \begin{pmatrix}
a & b & 0 & 0 & c & & & & & & & \\
b & a & b & 0 & 0 & c & & & & & & \\
0 & b & a & b & 0 & 0 & c & & & & (0) & \\
0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & c & & & & \\
c & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & c & & & \\
 & c & 0 & 0 & b & a & b & 0 & 0 & c & & \\
 & & c & 0 & 0 & b & a & b & 0 & 0 & c & \\
 & & & c & 0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 & c \\
 & & & & c & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\
 & & (0) & & & c & 0 & 0 & b & a & b & 0 \\
 & & & & & & c & 0 & 0 & b & a & b \\
 & & & & & & & c & 0 & 0 & b & a
\end{pmatrix}$$

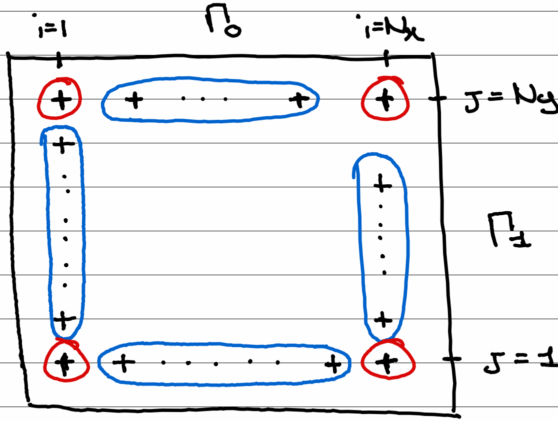
(c) On va maintenant exprimer le schéma dans un cas plus général :

1. On va décomposer $A$ telle que $A = aI + B + C$

$B$ est telle que
$\forall (i,j) \in [\![2, N_x]\!] \times [\![2, N_y]\!]$ : $\begin{cases} b_{i\,j-1} = b_{i-1\,j} = b \;, & \text{si } i = j \\ b_{ij} = 0 \;, & \text{sinon} \end{cases}$

$C$ est telle que
$\forall (i,j) \in [\![2, N_x]\!] \times [\![2, N_y]\!]$ : $\begin{cases} c_{i\,j-4} = c_{i-4\,j} = c \;, & \text{si } i = j \\ c_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2 - On exprime maintenant $G^n$ :




• Les points rouges sont atteints par deux conditions limites, tandis que les points bleus par une seule.

D'après la notation de l'énoncé, on va avoir la représentation en couleur suivante :

$$\underbrace{u_1}_{2CL}\ \underbrace{u_2 \cdots u_{N_x}}_{1CL}\ \underbrace{u_{N_x+1}\ u_{N_x+2}}_{2CL}\ \underbrace{u_{N_x+3}}_{1CL}\ \underbrace{\bullet\bullet\bullet}_{0CL}\ \underbrace{u_{2N_x+1}}_{1CL}\ \underbrace{u_{2N_x+2}}_{2CL}$$

et ainsi de suite jusqu'à $u_{N_xN_y}$. On va donc décomposer $G^n$ tel que :

$$G^n = F^n - BC^n$$

• Le vecteur $F^n$ est définit tel que :

$$\begin{cases} f_k = f_{iJ} \text{ tel que } \forall J \in [\![1, N_y]\!] : \\ k = N_x(J-1) + (i-1) \quad \forall i \in [\![1, N_x]\!] \end{cases} \quad (1)$$

(1) On remplit $F^n$ à l'aide d'une boucle for :

$$
\begin{aligned}
&\text{do for } j = 1, N_y\\
&\quad \text{do for } i = 1, N_y\\
&\qquad k = N_x(j-1) + (i-1)\\
&\qquad f_k = f_{ij}
\end{aligned}
$$

• Le vecteur $BC^n$ s'exprime de cet façon :

(1) Traitons d'abord les coins :

* $(i,j) = (1,1)$ donc $k = 0$ : $bc_k^n = bh_{01}^n + cg_{10}^n$

* $(i,j) = (N_x, 1)$ donc $k = N_x - 1$ : $bc_k^n = bh_{N_x+1\,1}^n + cg_{N_x 0}^n$

* $(i,j) = (1, N_y)$ donc $k = N_x(N_y - 1)$ : $bc_k^n = bh_{0N_y}^n + cg_{1\,N_y+1}^n$

* $(i,j) = (N_x, N_y)$ donc $k = N_x(N_y-1) + (N_x - 1)$ :

$$bc_k^n = bh_{N_x+1, N_y}^n + cg_{N_x N_y+1}^n$$

(2) Ensuite, les bords $\Gamma$ : Lorsque $j = 1$ ou $j = N_y$

alors $\forall i \in [\![2, N_x - 1]\!]$, on a :

$$bc_k^n = cg_{i\,j-1}^n \text{ pour } j = 1 \;;\; bc_k^n = cg_{i\,j+1}^n \text{ pour } j = N_y$$

(3) Enfin, les bords $\Gamma_1$ : Lorsque $i = 1$ ou $i = N_x$

alors $\forall j \in [\![2, N_y - 1]\!]$

$$bc_k^n = bh_{i-1\,j}^n \text{ pour } i = 1 \;;\; bc_k^n = bh_{i+1\,j}^n \text{ pour } i = N_x$$

ainsi, on construit $BC^n$ à l'aide des conditions (1), (2) et (3).

(d) A est une matrice symétrique creuse.
De plus, ses coefficient diagonaux sont strictement positif.

Remarques : Notre système s'écrit $AU = F$. On va pouvoir le résoudre par plusieurs méthodes itératives.
Les plus simples sont la décomposition LU et Cholesky. On pourrait aussi utiliser les méthodes à gradiant optimal pour une meilleure optimisation.