

# No.11 Azimuthal-Radial Pendulum

重庆大学代表队

马祥芸



# Problem 题目

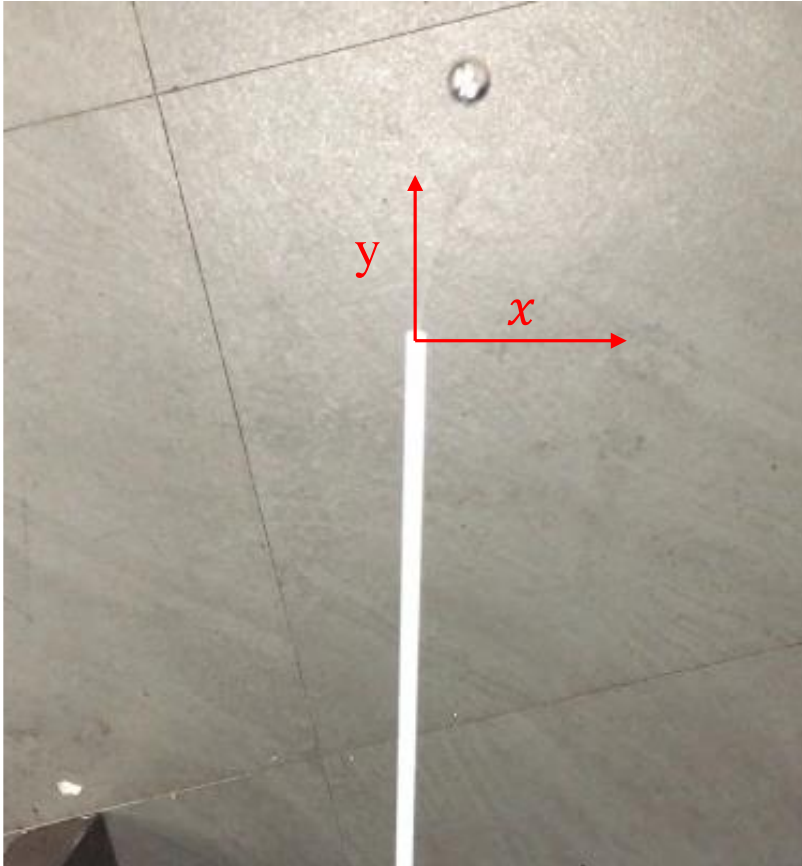


Fix one end of a horizontal **elastic** rod to a rigid stand. Support the other end of the rod with a taut string to avoid vertical deflection and suspend a bob from it on another string. In the resulting pendulum the radial oscillations (**parallel to the rod**) can spontaneously **convert into azimuthal oscillations** (perpendicular to the rod) and vice versa. Investigate the phenomenon.

将水平**弹性**杆的一端固定在刚性支架上。用一根紧绷的绳子支撑弹性杆的另一端以**避免垂直偏转**，并将另一个摆从一根弦上悬挂下来(见图)。在产生的钟摆中，**径向振荡**(平行于杆)可以自发地转变为**方位振荡**(垂直于杆)，反之亦然。研究这个现象。



# Experimental Phenomenon 实验现象



- 沿杆**径向释放**摆球
- 摆球在径向方向近似单摆运动
- 摆球与弹性杆**相互作用**
- **弹性杆**仅在 $x$ 轴方向有明显振荡
- 弹性杆的振荡对摆球在 $x$ 方向有相位调制作用



# Theoretical Analysis

## 理论分析

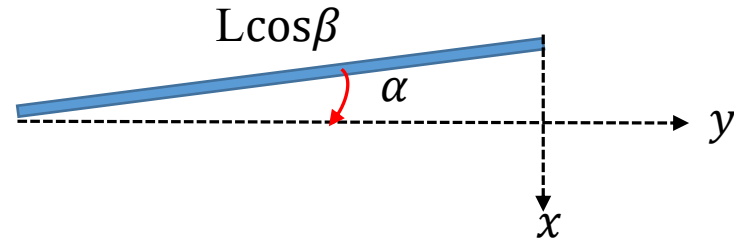
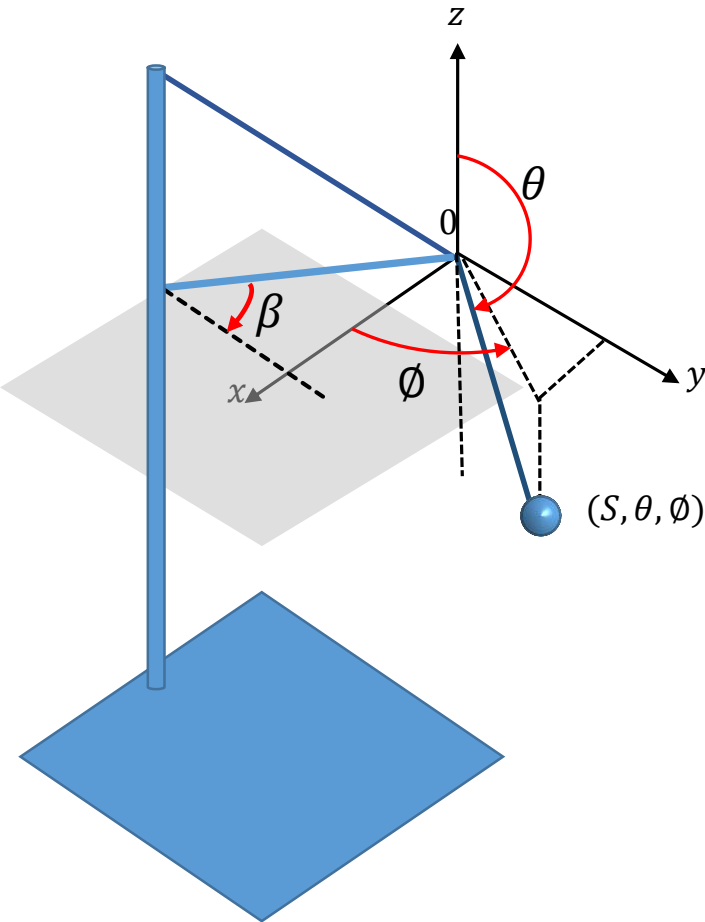
- 抽象模型
- 拉格朗日方程
- 数值求解



# Abstract Model 抽象模型

- 弹性杆的摆动为小角度摆动

符号说明	
L	杆长
S	绳长



$$\Delta y = S - S \cos(\alpha) \approx 0$$

- 以杆的端点为原点建立球坐标系
  - 忽略在y方向上的位移
  - 弹性杆在x方向上振荡并储存弹性势能
  - 弹性杆端点的位移函数 $x(t)$

- 摆球的**位置矢径**可以描述为：

$$\vec{r} = (x(t) + S \sin(\theta) \cos(\phi), L \sin(\theta) \sin(\phi), -L \cos(\theta))$$



# Theoretical Analysis 理论分析

• 利用拉格朗日力学求解：

• 该动力学系统为受完整约束的含耗散系数的拉格朗日力学系统

• 能量：

➤ 小球动能：

$$\bullet E_{k1} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

➤ 杆动能：

• 直杆转动近似：

$$\bullet E_{k2} = \frac{1}{6} M \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{6} M \dot{x}^2$$

➤ 小球势能：

$$\bullet V_1 = mgL_0 \cos(\theta)$$

➤ 弹性杆势能：

$$\bullet V_2$$

$$V = V_1 + V_2$$

• 拉氏量：

$$\bullet L e^{-\lambda t} = T - V$$

系统能量  
耗散系数

## 符号说明

m	摆球质量
M	杆质量

• 广义坐标：  $x, \theta, \phi$

• 保守系拉氏方程：

$$\bullet \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

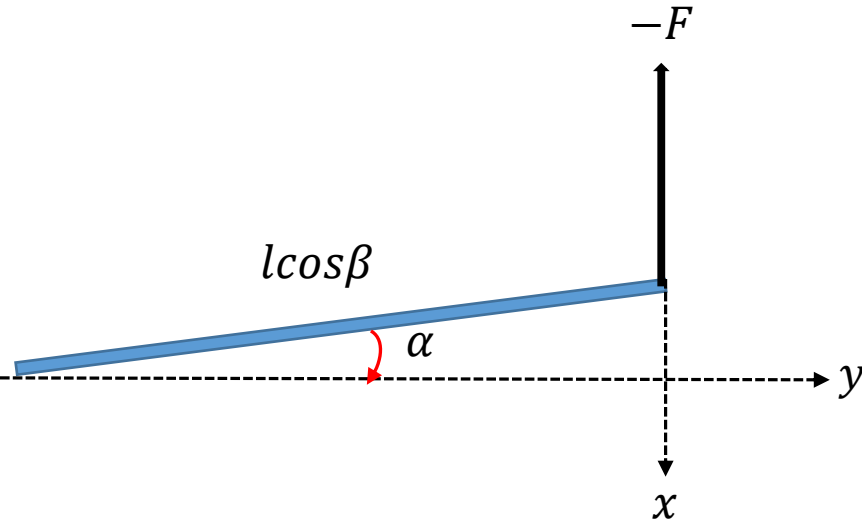
$$\bullet \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$



# Elastic Potential Energy 弹性势能

- 纯弯曲
  - 纤维间无正应力
  - 平面假设
  - 线弹性

符号说明	
E	弹性模量
I	惯性矩



$$\frac{d^2x}{d^2y} = \frac{-F(L-y)}{EI} \begin{cases} x|_{y=0} = 0 \\ \frac{dx}{dy}|_{y=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow F = \frac{3EIx}{L^3}$$

$$V_2 = \int_0^L \frac{(F(L-y))^2}{2EI} dy$$

- 解出弹性势能关于 $x$ 的函数：

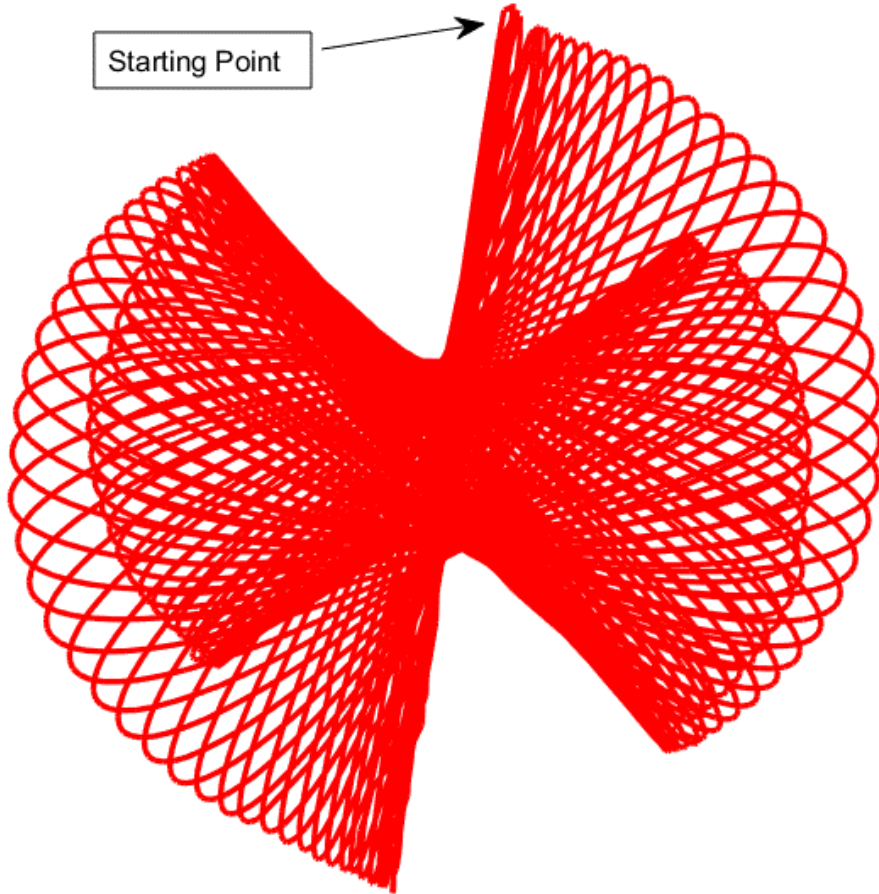
$$V_2 = \frac{EI x_{(t)}^2}{4L^3}$$



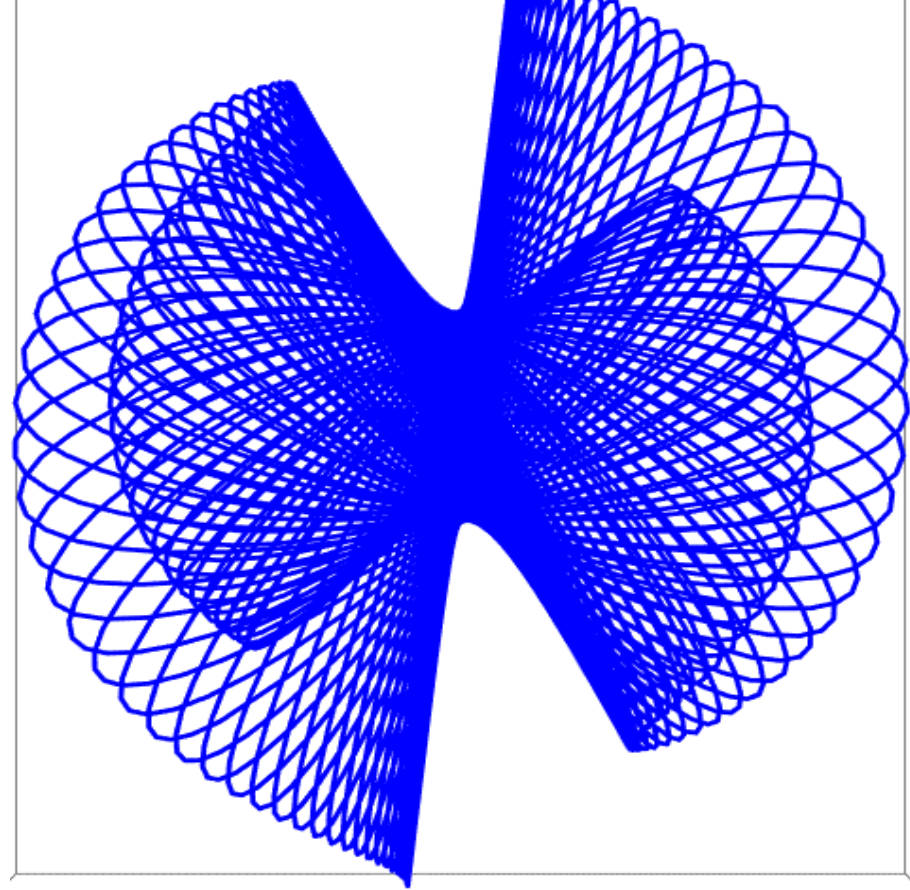


# *Numerical Solution* 数值求解

## Experimental Trajectory



## Theoretical Trajectory



$E(\text{方位角变化误差}) = 8.7\%$   
 $E(\text{同步误差}) = 4.3\%$

2018/8/19

Problem No.3 Dancing Coin

8





# Investigate Parameters

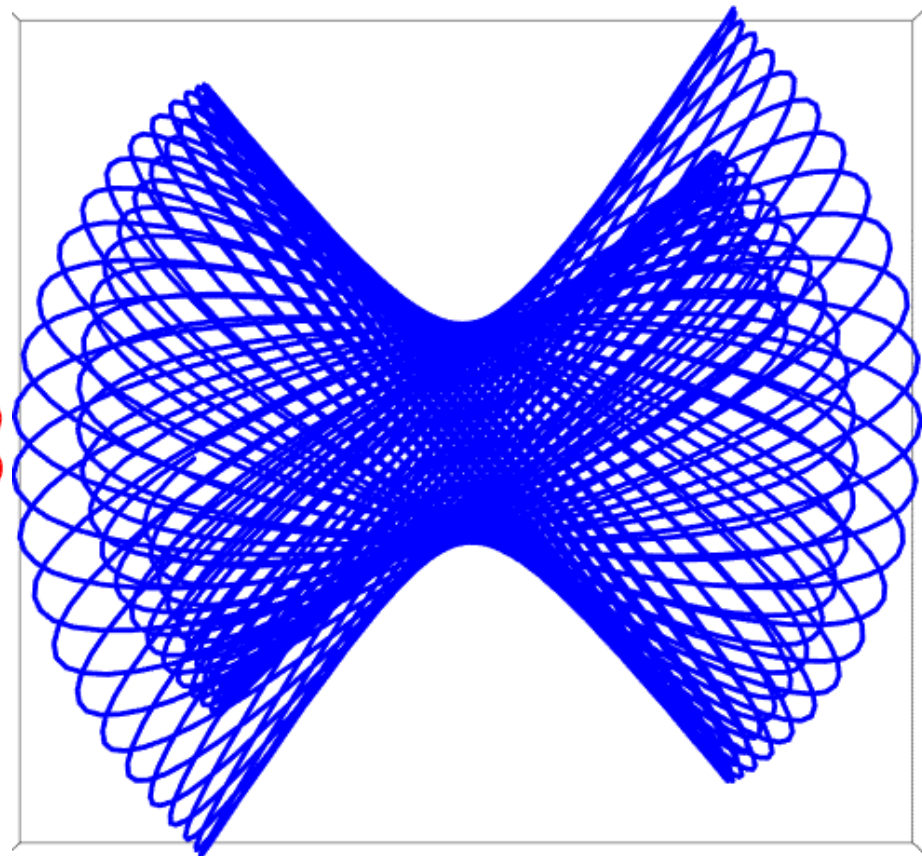
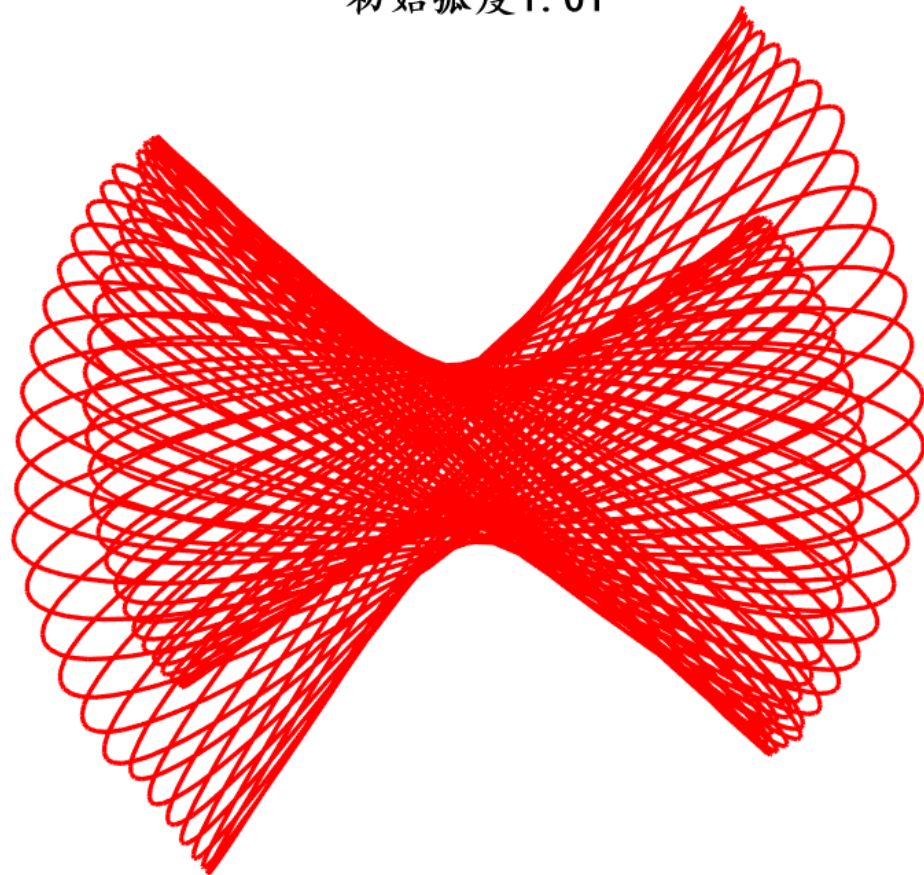
## 研究参数

- 初始方位角
- 绳长

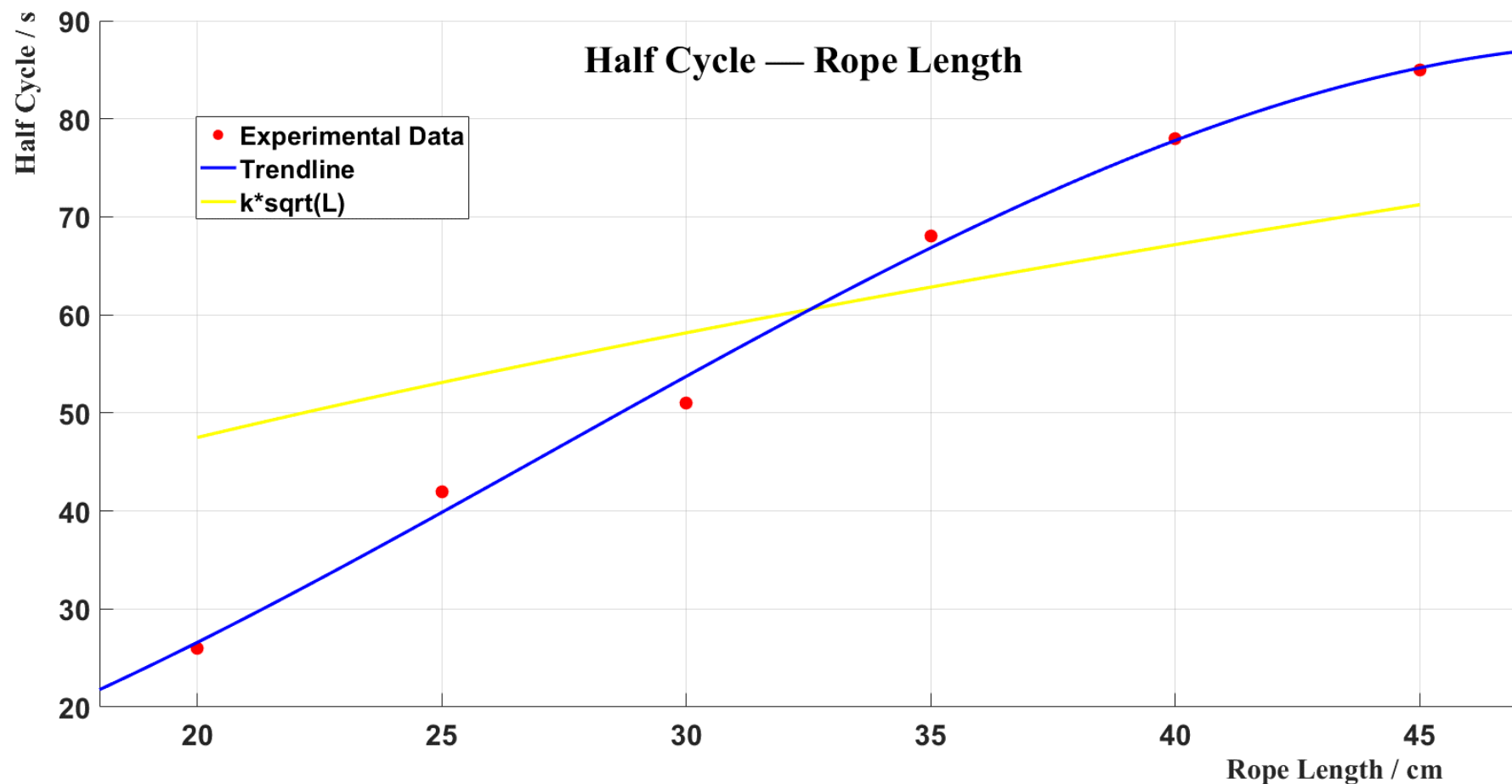


# *Initial Azimuth* 初始方位角

初始弧度1.01



# *Half Cycle — Rope Length* 半周期与绳长关系



- 随着绳长的增加，周期增加，增长速率随着绳长的增长而下降
- 其周期的函数形式并不近似于 $k\sqrt{s}$ ，因此并不近似于单摆的周期函数形式



# Deep Analysis

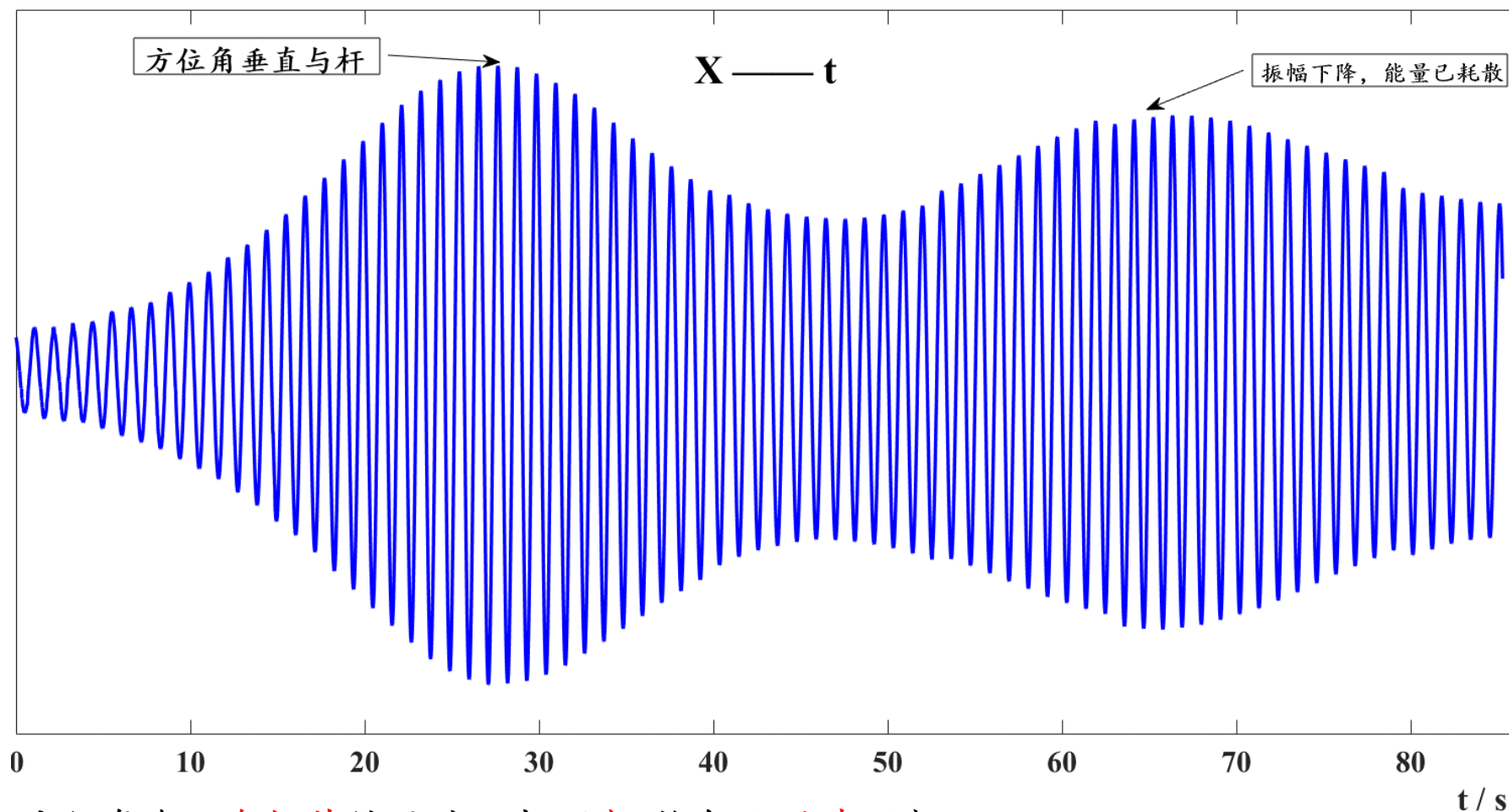
## 深入分析

- $X-t$  振荡分析
- $\phi-t$  方位角调制分析
- 周期分析



$X - t$

## 方位角变化与能量耗散

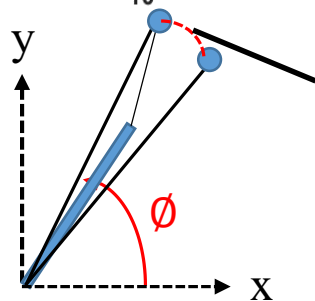
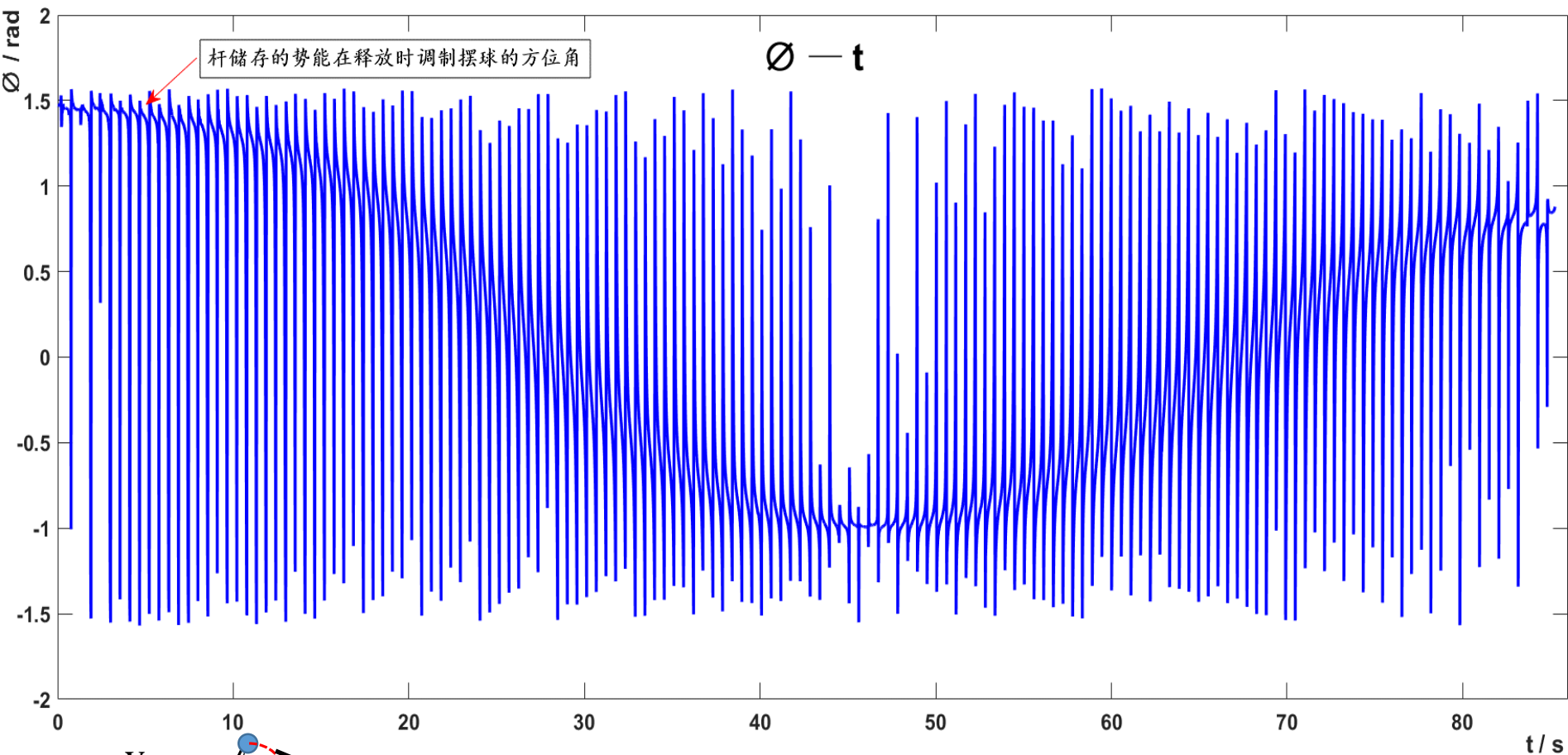


- 方位角在正负振荡的同时，由沿杆趋向于垂直于杆
- 在振荡过程中，系统能量在不断损失



$\varnothing - t$

# 方位角调制作用



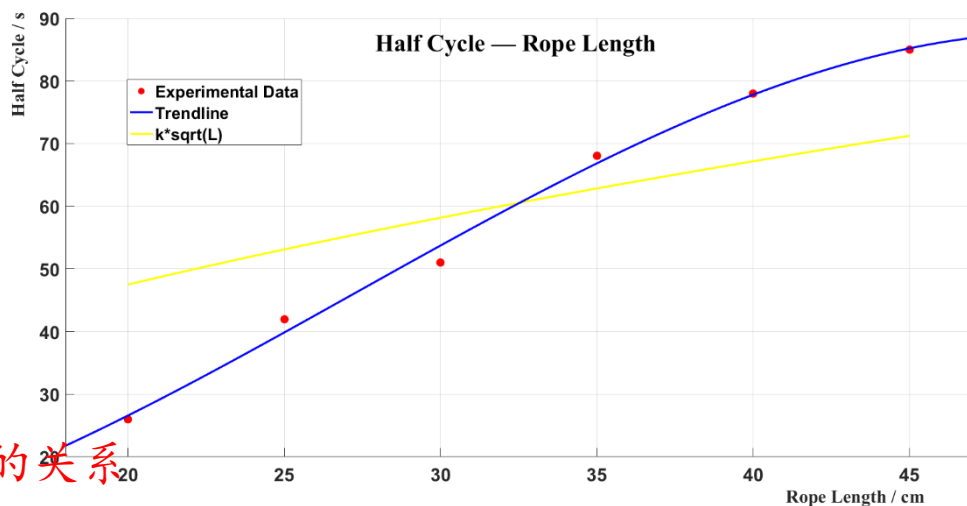
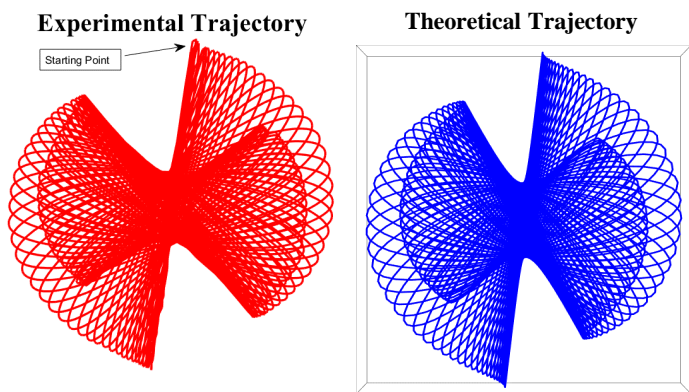
杆的能量释放  
调制方位角

- 摆球并不立刻沿原路摆回  
而是在杆的调制下，方位角发生大小改变
- 这种调制作用在动能的衰减下减弱

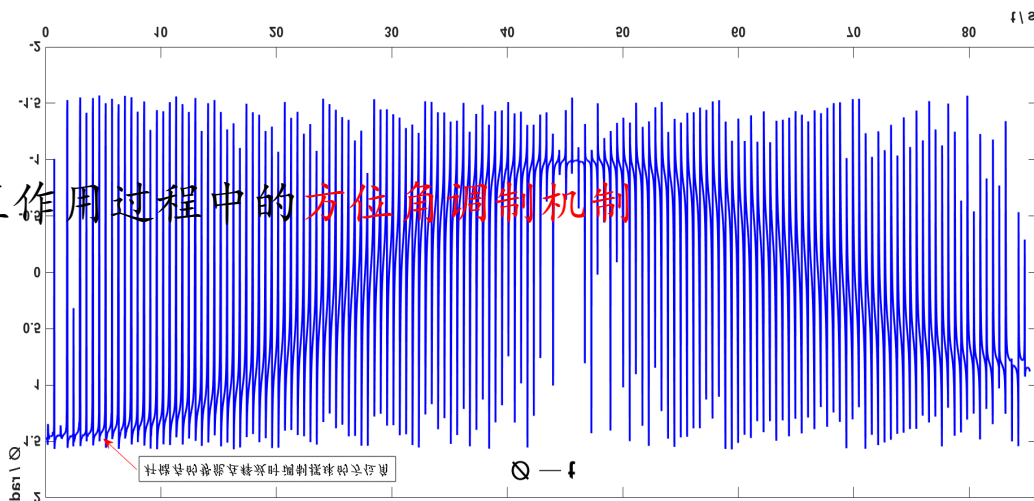


# 总结

- 利用带能量损耗系数的拉格朗日方程数值求解了摆球系统
- 并与一个周期的实验数据进行了对比，符合程度较高



- 研究了初始方位角改变与半周期与摆长的关系
  - 蝴蝶张角增大
  - 区别于单摆系统
- 深入分析了摆球与杆相互作用过程中的方位角调制机制



Problem No. 11 Azimuthal-Radial Pendulum

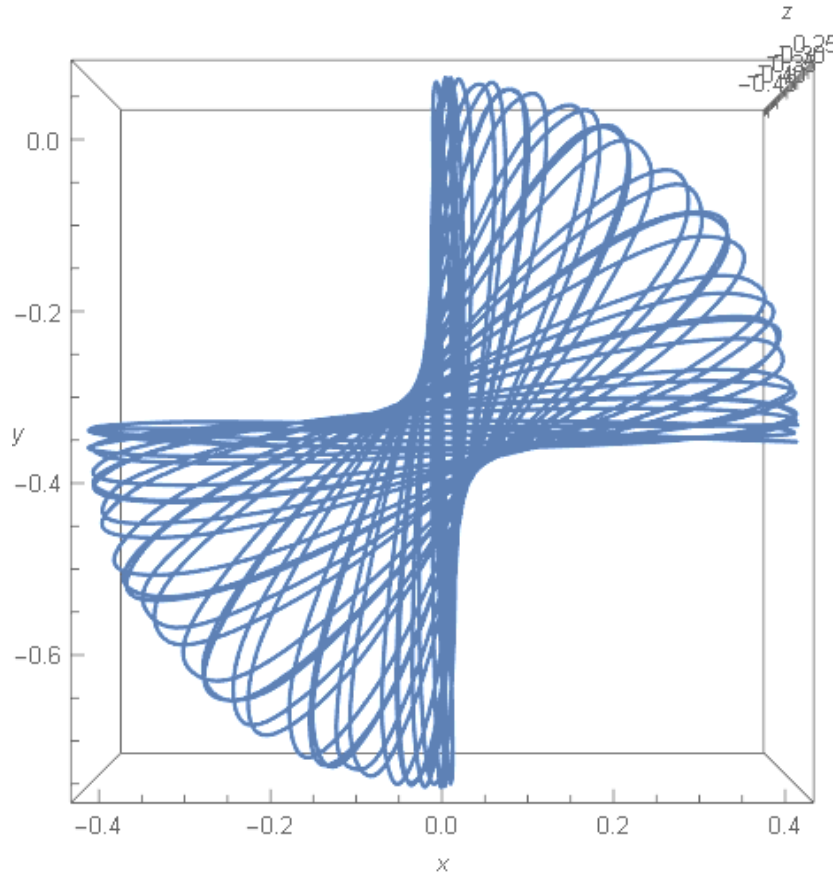




*Thanks For Listening !*

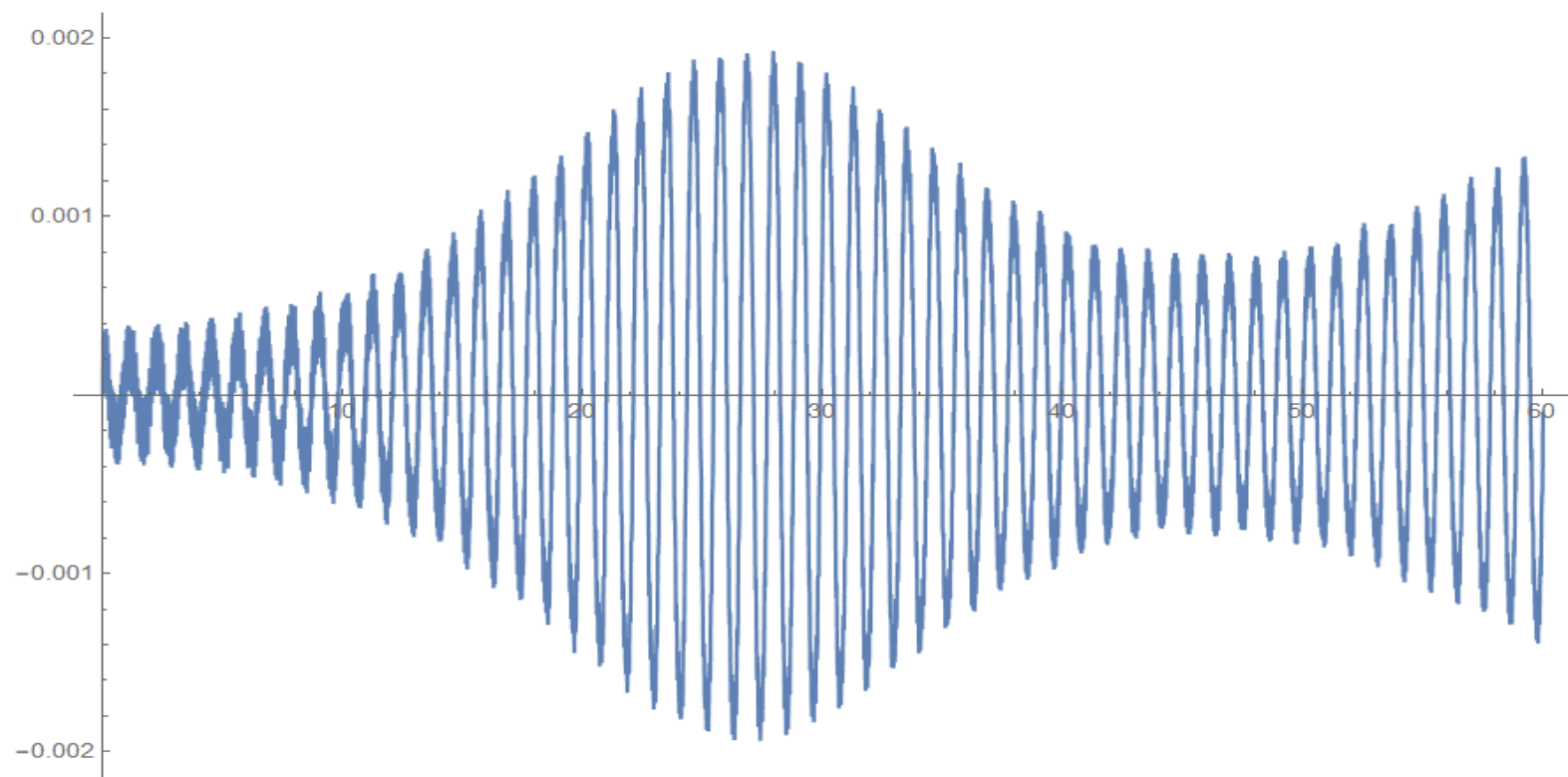
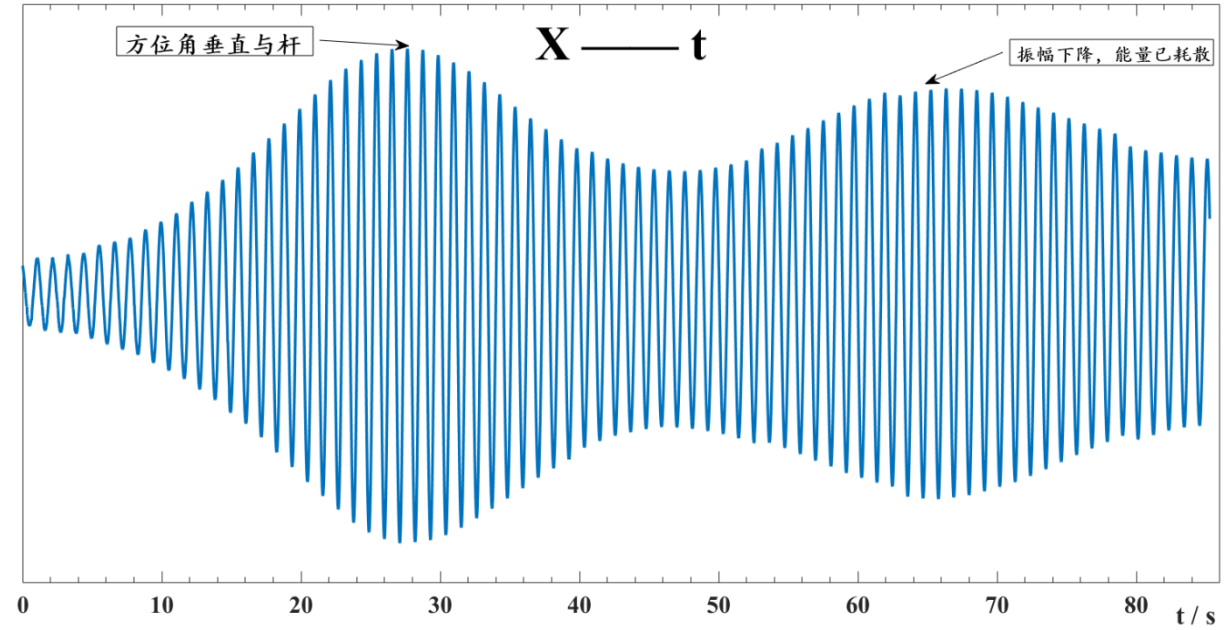


# 讨论



- 在垂直杆释放时，杆在第一个模型中是一维线振荡，不在适用
- 应将杆的近似模型的广义坐标 $x$ ，改为转动模型的广义坐标 $\alpha$
- 在此模型下，垂直杆释放自发转变成沿杆释放





# Experiment 实验

- 弹性模量测量:

$$E = \frac{FL^3}{3xI}$$



