Group Theory

Jianfeng He

第一章　Basic Conception of Group

§1.1　群及其乘法表

1. 群的基本概念

Definition 1.1 (群) *在规定了元素的乘法后, 元素的集合 G 若满足下面四条公理, 则这个集合可被称为* **群***:*

1). **封闭性***: 任意两元素的乘积仍然属于这个集合. 亦即:*

$$RS \in G, \quad \forall R, S \in G \tag{1.1}$$

2). **结合律***: 乘积满足结合律, 亦即:*

$$R(ST) = (RS)T, \quad \forall R,\ S,\ T\ \in G \tag{1.2}$$

3). **存在单位元***: 存在一个被称为单位元的元素 E, 用它左乘任意元素, 该元素均保持不变. 亦即:*

$$ER = R, \forall R \in G \tag{1.3}$$

4). **任何元素存在逆元***: 任意元素 R 均存在对应的逆元 R^{-1}, 其定义为:*

$$R^{-1}R = E \tag{1.4}$$

亦即元素与其逆元的乘积等于单位元.

Definition 1.2 (群的阶数) *群 G 的群元素的个数 g 称为群 G 的阶数.*

Definition 1.3 (群元素的阶数) *若群 G 中的群元 R 满足:*

$$R^a = E, \quad a \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.5}$$

则称 a 为群元素 R 的阶数

应当注意, 群中每一个元素存在逆元并不意味着奇数阶群不存在, 因为群元自身可以是自身的逆元, 而这并不只有单位元可以做到. 反过来说, 对于奇数阶群, 一定有恒元以外的阶数为 2 的元素.

Notation :

1). 不难证明: 若一个群 G 中含有二阶元素, 则该二阶元素与幺元素构成该群的一个子群