Group Theory

Jianfeng He

第一章　Basic Conception of Group

§1.1　群及其乘法表

1. 群的基本概念

Concept 1.1 (对称变换) *保持系统不变的变换称为* **对称变换***.*

Definition 1.1 (群) *在规定了元素的乘法后, 元素的集合 G 若满足下面四条公理, 则这个集合可被称为* **群***:*

1). **封闭性***: 任意两元素的乘积仍然属于这个集合. 亦即:*

$$RS \in G, \quad \forall R, S \in G \tag{1.1}$$

2). **结合律***: 乘积满足结合律, 亦即:*

$$R(ST) = (RS)T, \quad \forall R,\ S,\ T\ \in G \tag{1.2}$$

3). **存在单位元***: 存在一个被称为单位元的元素 E, 用它左乘任意元素, 该元素均保持不变. 亦即:*

$$ER = R, \forall R \in G \tag{1.3}$$

4). **任何元素存在逆元***: 任意元素 R 均存在对应的逆元 R^{-1}, 其定义为:*

$$R^{-1}R = E \tag{1.4}$$

亦即元素与其逆元的乘积等于单位元.

可以看到, 在对单位元及逆元进行定义的时候, 只定义了左乘, 那么单位元右乘或逆元右乘时, 还会有相同的性质吗? 实际上, 从基本定义出发, 可以得到以下推论:

Property 1.1 (恒元及逆元的右乘)

1). **恒元右乘***: 恒元右乘时, 同样保有恒元的性质, 亦即:*

$$RE = R \tag{1.5}$$

2). **逆元右乘***: 逆元右乘时, 还是得到恒元. 换而言之, 逆元 R^{-1} 的逆, 恰是 R 自身:*

$$RR^{-1} = E \tag{1.6}$$

$$(R^{-1})^{-1} = R \tag{1.7}$$

可以看见, 对于恒元及逆元, 其运算是可交换的, 这个性质对所有群均成立. 由于恒元及逆元在乘法运算上的对称性, 在之后讨论或证明相关性质时, 可以只考虑一个方向上的乘法. 由恒元及逆元的右乘的性质出发, 不难得出恒元及逆元的唯一性:

Property 1.2 (恒元及逆元的唯一性)

恒元的唯一性: *若 $TR=R$ 或 $RT=R$, 则 $T=E$.*

逆元的唯一性: *若 $TR=E$ 或 $RT=E$, 则 $T=R^{-1}$.*

一般而言, 除了恒元及逆元外, 一般元素之间的乘法是不可对易的, 但也存在如实数加法群这样的乘法可对易的群, 于是有了 **阿贝尔群** 的概念:

Concept 1.2 (阿贝尔群) *元素乘积都可对易的群称为* **阿贝尔群**.

按照群元素的数目, 可以定义 **群的阶数:**

Definition 1.2 (群的阶数) *群 G 的群元素的个数 g 称为群 G 的阶数.*

还可以对群的阶数进行更细致的讨论:

Concept 1.3 (无限群) *群元数目无限多的群称为* **无限群.**

Concept 1.4 (连续群) *若可以建立群元到一组连续参数的一一映射, 则这样的群称为* **连续群.**

连续群的一个例子是之后将要接触到的 **李群.**

对于有限群, 由于群元素的有限性, 群中任一元素的幂次足够高时, 其总会回归到自身. 如: 对于 6 阶群 G_6, 其只有 6 个不同的元素. 设 $R\in G_6$, 对于 R^n, 在 $n>6$ 之前, 一定会出现 $R^n=R$ 的情形, 因为 6 阶群不可能有 7 个不同元素. 由此可以引出 **群元素的阶数** 的定义:

Definition 1.3 (群元素的阶数) *若群 G 中的群元 R 满足:*

$$R^a=E,\quad a\in\mathbb{Z}^+ \tag{1.8}$$

则称 a 为群元素 R 的阶数

Definition 1.4 (群的同构) *若存在一个从群 G 到群 G' 的一一映射 f:*

$$f:G\to G',R\mapsto R' \tag{1.9}$$

若 $\forall R,S\in G,R'=f(R),S'=f(S)$, 满足:

$$F(R,S)=F'(R',S') \tag{1.10}$$

即称 G 与 G' 同构, 记为 $G\approx G'$. 其中 F, F' 分别表示两群的群乘法.

Notation :

1). 群中每一个元素存在逆元并不意味着奇数阶群不存在, 因为单位元自身是自身的逆元. 因此此时除了单位元以外的元素为偶数个, 从而可以成对儿地提取出元素以及它的逆元.

2). 不难证明: 若一个群 G 中含有二阶元素, 则该二阶元素与幺元素构成该群的一个子群