矩阵分析与应用

第九讲 矩阵分析及其应用之一

信息工程学院
吕旌阳

本讲主要内容

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

引言：

- 一元多项式　$f(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_mt^m$

- 矩阵多项式　$f(A)=c_0+c_1A+\cdots+c_mA^m$，$(\forall A\in C^{n\times n})$

- $f(A)$以矩阵为自变量且取值为矩阵的一类函数

本章研究一般的以矩阵为自变量且取值为矩阵的函数

——矩阵函数

一、敛散性

定义：将矩阵序列 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}$,记作$\left\{A^{(k)}\right\}$

当 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}(\forall i,j)$ 时，称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于矩阵$A=(a_{ij})$。记作

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)}=A \quad ，或者 \quad A^{(k)}\to A\left(k\to\infty\right)$$

若数列 $\left(a_{ij}^{(k)}\right)$ 之一发散，称 $\left\{A^{(k)}\right\}$ 发散

性质：

(1) 若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A_{m\times n}, \lim\limits_{k\to\infty} B^{(k)} = B_{m\times n}$ 则

$$\lim_{k\to\infty}(aA^{(k)} + bB^{(k)}) = aA + bB, \quad \forall a, b$$

(2) 若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A_{m\times n}, \lim\limits_{k\to\infty} B^{(k)} = B_{n\times l}$ 则

$$\lim_{k\to\infty}(A^{(k)}B^{(k)}) = AB$$

(3) 若 $A^{(k)}$ 与 A 是可逆矩阵，且 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ ，则

$$\lim_{k\to\infty}(A^{(k)})^{-1} = A^{-1}$$

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$ ，则

（1） $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \Longleftrightarrow \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^{(k)}\right\| = 0$

（2） $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Longleftrightarrow \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

证明：(1)考虑F -矩阵范数

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = 0 \quad (all\ i, j)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)}\right|^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \left\|A^{(k)}\right\|_F = 0$$

(2)由 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(A^{(k)} - A) = 0$ 可直接的得到

敛散性的另一定义：矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$收敛的充要条件

为对任给$\varepsilon>0$ 存在$N(\varepsilon)$, 当 $k, l \geq N(\varepsilon)$ 时有

$$\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}^{(l)}\right\|<\varepsilon$$

其中 $\|\cdot\|$ 为任意的广义矩阵范数。

例1： $\mathbf{A}^{(n)}=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & \sin(\frac{1}{n}) \\ e^{-n} & \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k)}{k^2} \end{pmatrix}$ ，证明其敛散性

因为求不出 $\mathbf{A}^{(n)}$ 的极限从而很难应用定义证明收敛。

相反，由于 $\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(k)}{k^2}\right| \le \left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\right| \le \left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\right| \le \frac{1}{m}$

从而只要取l充分大，则当$m, n > l$ 时就有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(k)}{k^2}\right| \le \varepsilon$$

这样 $\mathbf{A}^{(n)}$ 收敛

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$ ，称A为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\rho(A)<1$

证明：充分性。已知 $\rho(A)<1$，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left[1-\rho(A)\right]>0$

存在矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ ，使得

$$\|A\|_M \le \rho(A)+\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1+\rho(A)\right]<1$$

于是有 $\left\|A^k\right\|_M \le \|A\|_M^k \to 0$，故由定理1可得 $A^k \to 0$

必要性：已知 $A^k \to 0$ ，设 $Ax=\lambda x (x\neq 0)$ ，则有

$$\lambda^k x = A^k x \to 0 \quad \Rightarrow \lambda^k \to 0 \quad \Rightarrow |\lambda|<1$$

故 $\rho(A)<1$

定理3：若矩阵范数 $\|\bullet\|_M$ 使 $\|A\|_M < 1$ ，则 $A^k \to 0$

证明： $\rho(A) \le \|A\|_M < 1 \quad \Rightarrow A^k \to 0$

例： $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$\|A\|_1 = 0.9 < 1 \;\Rightarrow A^k \to 0$$

定义：设有矩阵序列$\{A^{(k)}\}$，其中$A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in C^{m\times n}$

称$A^{(0)}+A^{(1)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$为矩阵级数。记为$\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

敛散性：若$\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=S$，称$\sum A^{(k)}$ 收敛于S，记做

$$\sum A^{(k)}=S$$

若 $\{S^{(N)}\}$ 发散，称 $\sum A^{(k)}$ 发散

性质1： $\sum A^{(k)} = S$ $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \ (all \quad i, j)$

证明： 左 $\Longleftrightarrow$ $\lim_{N\to\infty} S^{(N)} = S$

$\Longleftrightarrow$ $\lim_{N\to\infty} s_{ij}^{(N)} = s_{ij} \ (all \quad i, j)$

$\Longleftrightarrow$ $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \ (all \quad i, j)$

$\Longleftrightarrow$ 右

性质2：若 $\sum \left| a_{ij}^{(k)} \right|$ 收敛 $(all \quad i, j)$，称 $\sum A^{(k)}$ 绝对收敛。

（1） $\sum A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum A^{(k)}$ 收敛

（2） 若 $\sum A^{(k)}$ 绝对收敛于S，对 $\sum A^{(k)}$ 任意重组重排得 $\sum B^{(k)}$，则 $\sum B^{(k)}$ 绝对收敛于S。

性质3：$\sum A^{(k)}=S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall\|\cdot\|,\sum\left\|A^{(k)}\right\|$ 收敛

证明：只需考虑矩阵范数 $\|\cdot\|_{m1}$

证明：（必要性）由于矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛，

因此mn个数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$ 绝对收敛。因此存在

$M>0$，使得对任意N，都有 $\sum_{k=0}^{N}\left|a_{ij}^{(k)}\right|<M,(\forall i,j)$

故 $\sum_{k=0}^{N}\left\|A^{(k)}\right\|_{m1}=\sum_{k=0}^{N}(\sum_{i,j}|a_{ij}^{(k)}|)\le mnM$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty}\|A^{(k)}\|_{m1}$ 收敛

(充分性)$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|_{m1}$ 收敛。因此$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{ij}^{(k)}|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^{(k)}\right\|_{m1}$

故矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛

性质4：$\sum A^{(k)}$ 收敛于S $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 收敛于 PSQ

$$\sum A^{(k)} \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \text{ 绝对收敛}$$

证明：只需考虑矩阵范数 $\|\bullet\|_{m1}$

证明：(1) $S^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} A^{(k)} \to S \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} PA^{(k)}Q = PS^{(N)}Q \to PSQ$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \to PSQ$$

性质4：

$$\sum A^{(k)} \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \text{ 绝对收敛}$$

(2)矩阵范数 $\|\cdot\|$，由性质3知 $\sum \left\|A^{(k)}\right\|$ 收敛

因为 $\left\|PA^{(k)}Q\right\| \le \|P\| \left\|A^{(k)}\right\| \|Q\| = M\left\|A^{(k)}\right\|$ $\quad\left(M = \|P\|\|Q\|\right)$

所以 $\sum_{k=0}^{N}\left\|PA^{(k)}Q\right\| \le \sum_{k=0}^{N}\left(M\left\|A^{(k)}\right\|\right) = M\sum_{k=0}^{N}\left\|A^{(k)}\right\|$ 有界

故 $\sum A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

性质5：$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛于 $S_{m\times n}$，$\sum_{k=1}^{\infty} B^{(k)}$ 绝对收敛于 $T_{n\times l}$

则Cauchy积

$$A^{(1)}B^{(1)} + \left[A^{(1)}B^{(2)} + A^{(2)}B^{(1)}\right] + \left[A^{(1)}B^{(3)} + A^{(2)}B^{(2)} + A^{(3)}B^{(1)}\right]$$

$$+\cdots+\left[A^{(1)}B^{(k)} + A^{(2)}B^{(k-1)} + \cdots + A^{(k)}B^{(1)}\right]+\cdots$$

绝对收敛于ST，记作 $\sum A^{(k)} \bullet \sum B^{(k)} = ST$

证明：只需利用性质3即可

Neumann级数：$A_{n\times n},\sum_{k=1}^{\infty}A^k,\left(A^0=I\right)$

定理4：$A_{n\times n},\sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow A^k\to 0$

$\sum A^k$ 收敛时，其和为 $(I-A)^{-1}$

证明：必要性。$\sum A^k$ 收敛时 $\sum\left(A^k\right)_{ij},\forall i,j$ 收敛

即 $\left(A^k\right)_{ij}\to 0$ ，也就是 $A^k\to 0$

充分性。$A^k\to 0$ 由定理2可知 $\rho\left(A\right)<1\Leftrightarrow\left(I-A\right)$ 可逆

$$\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)\left(I-A\right)=I-A^{N+1}$$

$$\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)=\left(I-A\right)^{-1}-A^{N+1}\left(I-A\right)^{-1}\to\left(I-A\right)^{-1},N\to\infty$$

即 $\sum A^k=\left(I-A\right)^{-1}$

定理5：$A_{n\times n},\|A\|<1\Rightarrow\left\|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^{N}A^k\right\|\le\frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|},N=0,1,2$

证明：$\|A\|<1\Rightarrow\rho(A)<1\quad\Rightarrow(I-A)$ 可逆

$$\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)(I-A)=I-A^{N+1}$$

右乘 $(I-A)^{-1}$，移项可得

$$(I-A)^{-1}-\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)=A^{N+1}(I-A)^{-1}$$

恒等式 $A^{N+1}=A^{N+1}(I-A)^{-1}(I-A)=A^{N+1}(I-A)^{-1}-A^{N+1}(I-A)^{-1}A$

$$A^{N+1}(I-A)^{-1}=A^{N+1}+A^{N+1}(I-A)^{-1}A$$

$$\left\|A^{N+1}(I-A)^{-1}\right\|\le\left\|A^{N+1}\right\|+\left\|A^{N+1}(I-A)^{-1}\right\|\bullet\|A\|$$

故 $\left\|A^{N+1}(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\left\|A^{N+1}\right\|}{1-\|A\|}\Rightarrow\left\|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^{N}A^k\right\|\le\frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}$

幂级数： 对函数 $f(z)=\sum c_k z^k,\left(|z|<r\right)$ 方阵 $A_{n\times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A)=\sum c_k A^k$

定理6： (1) $\rho(A)<r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

(2) $\rho(A)>r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

证明:对A，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}[r-\rho(A)]>0, \exists\|\bullet\|_{\varepsilon}$ ，使得

$$\|A\|_{\varepsilon} \leq \rho(A)+\varepsilon=\frac{1}{2}[r+\rho(A)]<r$$

$$\left\|c_k A^k\right\|_{\varepsilon} \leq |c_k|\|A\|_{\varepsilon}^k \leq |c_k|[\rho(A)+\varepsilon]^k$$

当 $|z|<r$ 时，$\sum|c_k||z|^k$ 收敛，于是

$\sum|c_k|[\rho(A)+\varepsilon]^k$ 收敛 $\Rightarrow \sum\left\|c_k A^k\right\|_{\varepsilon}$ 收敛 $\Rightarrow \sum c_k A^k$ 收敛

设A的特征值λ满足|λ|=ρ(A)，x为λ相应的特征向量

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(A^k x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\lambda^k x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k\right) x$$

由于ρ(A) > r ,那么 $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k\right) x$ 发散(注意x为非零向量)

从而 $\sum_{k=0}^{n} c_k(A^k x)$ 发散，这样 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散

定义：设一元函数 $f(z)$ 能展开为z的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \quad \left(|z|<r, r>0\right)$$

其中r>0表示该幂级数的收敛半径。当n阶矩阵A的谱半径$\rho(A)<r$ 时，把收敛的矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 的和为f(A), 即 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$

性质(代入规则)： 若$f(z)=g(z)$, 则$f(A)=g(A)$.

例1 ：

$$e^{z}=1+\frac{1}{1!}z+\cdots+\frac{1}{k!}z^{k}+\cdots\quad(r=+\infty)$$

$$e^{A}=I+\frac{1}{1!}A+\cdots+\frac{1}{k!}A^{k}+\cdots\quad(\forall A_{n\times n})$$

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^{3}+\cdots+(-1)^{k}\frac{1}{(2k+1)!}z^{(2k+1)}+\cdots\quad(r=+\infty)$$

$$\sin A=A-\frac{1}{3!}A^{3}+\cdots+(-1)^{k}\frac{1}{(2k+1)!}A^{(2k+1)}+\cdots\quad(\forall A_{n\times n})$$

例2：$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \left(|z|<1\right)$， $f(A)=\frac{1}{1-A}=\sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \left(\rho(A)<1\right)$

例3： $\forall A_{n\times n}, e^{jA}=\cos A+j\sin A \quad \left(j=\sqrt{-1}\right)$

$$\cos A=\frac{1}{2}\left(e^{jA}+e^{-jA}\right), \qquad \cos\left(-A\right)=\cos A$$

$$\sin A=\frac{1}{2j}\left(e^{jA}-e^{-jA}\right), \qquad \sin\left(-A\right)=\sin A$$

证明：在 e^{jA} 中,视“ jA”为整体,并按奇偶次幂分开

$$e^{jA}=\left[I+\frac{1}{2!}\left(jA\right)^2+\frac{1}{4!}\left(jA\right)^4+\cdots\right]+\left[\frac{1}{1!}\left(jA\right)+\frac{1}{3!}\left(jA\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\cos A+j\sin A \quad \left(j=\sqrt{-1}\right)$$

例4： $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$，　求 e^A,e^B 及 e^{A+B}

解：$A^2=A$：　$e^A=I+\left(\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\right)A\ =I+(e-1)A$

$$=\begin{bmatrix}e&e-1\\0&1\end{bmatrix}$$

$B^2=B$：　$e^B=I+\left(\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\right)B\ =I+(e-1)B$

$$=\begin{bmatrix}e&1-e\\0&1\end{bmatrix}$$

$A+B=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$　　$(A+B)^k=2^k\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

$$e^{A+B}=I+\left(\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\ =I+(e^2-1)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\ =\begin{bmatrix}e^2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

注意：

$$e^{A+B}=\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^A e^B=\begin{bmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad e^B e^A=\begin{bmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B}\neq e^A e^B \neq e^B e^A$$

定理7： $A_{n\times n}, B_{n\times n}, AB=BA \Rightarrow e^{A+B}=e^{AB}=e^{BA}$

证明：$e^A e^B = \left[I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots\right]\left[I+\frac{1}{1!}B+\frac{1}{2!}B^2+\cdots\right]$

$$=I+(A+B)+\frac{1}{2!}\left(A^2+2AB+B^2\right)+\frac{1}{3!}\left(A^3+3AB^2+3A^2B^2+B^3\right)+\cdots$$

$$=I+(A+B)+\frac{1}{2!}(A+B)^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3+\cdots$$

$$=e^{A+B}$$

同理： $e^B e^A = e^{B+A} = e^{A+B}$

注： (1) $e^A e^{-A} = e^o = I \Rightarrow \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A} \quad \forall A$

(2) $\left(e^A\right)^m = e^{mA} \quad m=2,3,\cdots$

例5： $A_{n\times n}, B_{n\times n}, AB=BA$

$$\cos\left(A+B\right)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

证明： $\cos A\cos B-\sin A\sin B=$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{jA}+e^{-jA}\right]\bullet\frac{1}{2}\left[e^{jB}+e^{-jB}\right]-\frac{1}{2j}\left[e^{jA}-e^{-jA}\right]\bullet\frac{1}{2j}\left[e^{jB}-e^{-jB}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{j\left(A+B\right)}+\cdots+\cdots+e^{-j\left(A+B\right)}\right]+\frac{1}{4}\left[e^{j\left(A+B\right)}-\cdots-\cdots+e^{-j\left(A+B\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\left(A+B\right)}+e^{-j\left(A+B\right)}\right]$$

$$=\cos\left(A+B\right)$$

矩阵函数值的求法

1.待定系数法:设n阶矩阵A 的特征多项式$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$

如果首1多项式 $\psi(\lambda)=\lambda^m+b_1\lambda^{m-1}+\cdots+b_{m-1}\lambda+b_m\ (1\le m\le n)$

满足 $\psi(\lambda)\,|\,\varphi(\lambda)$ ，分解

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}\quad \lambda_i\ne\lambda_j,\sum m_i=m$$

因为 λ_i 是A的特征值，所以 $|\lambda_i|\le\rho(A)<r$ ，从而

$f(\lambda_i)=\sum c_k\lambda_i^k$ 绝对收敛。

设 $f(z)==\sum c_k z^k=\psi(\lambda)g(z)+r(z)$

$$r(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_{m-1}z^{m-1}$$

由 $\psi(\lambda_i)=0,\psi^{(1)}(\lambda_i)=0,\cdots,\psi^{(m_i-1)}(\lambda_i)=0$ 可得

$$r(\lambda_i)=f(\lambda_i) \qquad i=1,2,\cdots,s$$

$$r'(\lambda_i)=f'(\lambda_i)$$

$$\cdots$$

$$r^{(m_i-1)}(\lambda_i)=f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

解此方程组得出 $b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}$。因为 $\psi(A)=O$ 所以

$$f(A)=\sum c_k A^k=\psi(A)g(A)+r(A)\quad=r(A)$$

即 $$f(A)=b_0 I+b_1 A+\cdots+b_{m-1}A^{m-1}$$

例6：$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$， 求 $e^{A}, e^{tA} \quad (t\in R)$

解：$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^{3}$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix},(A-2I)^{2}=O$$

取 $\psi(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-2)^{2}$

(1) $f(\lambda)=e^{\lambda}=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$

$$f'(\lambda)=e^{\lambda}=[\psi(\lambda)g(\lambda)]'+b$$

$$\left.\begin{aligned}f(2)=e^{2}:(a+2b)=e^{2}\\ f'(2)=e^{2}:b=e^{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}a=-e^{2}\\ b=e^{2}\end{cases}$$

$$e^{A}=e^{2}(A-I)=e^{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$(2)\quad f(\lambda)=e^{t\lambda}=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$$

$$f'(\lambda)=te^{t\lambda}=\left[\psi(\lambda)g(\lambda)\right]'+b$$

$$\left.\begin{aligned} f(2)=e^{2t} &: (a+2b)=e^{2t} \\ f'(2)=te^{2t} &: b=te^{2t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a&=(1-2t)e^{2t} \\ b&=te^{2t} \end{aligned}\right.$$

$$e^{tA}=e^{2t}\left[(1-2t)I+tA\right]=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & -t & 1+t \end{bmatrix}$$