矩阵分析与应用

第六讲　　Jordan标准型

信息工程学院
吕旋阳

本讲主要内容

- λ－矩阵的概念
- 若当(Jordan)标准形
- 欧式空间

引入

由第五讲知，n维线性空间V的线性变换在某组基下的矩阵为对角形 $\Leftrightarrow T$ 有n个线性无关的特征向量.

$\Leftrightarrow T$ 的所有不同特征子空间的维数之和等于n.

可见，并不是任一线性变换都有一组基，使它在这组基下的矩阵为对角形.

本节介绍，在适当选择基条件下，一般的线性变换的矩阵能化简成什么形状.

一、λ—矩阵的概念

定义：

设K是一个数域，λ 是一个文字，$P[\lambda]$是多项式环，若矩阵A的元素是λ 的多项式，即 $P[\lambda]$的元素，则称A为λ —矩阵，并把A写成 $A(\lambda)$.

注：

① $\because K \subset P[\lambda]$, $\therefore$ 数域K上的矩阵—数字矩阵也是 λ —矩阵.

② λ—矩阵也有加法、减法、乘法、数量乘法运算，其定义与运算规律与数字矩阵相同.

③ 对于 $n\times n$ 的 λ—矩阵，同样有行列式 $|A(\lambda)|$，它是一个 λ 的多项式，且有

$$|A(\lambda)B(\lambda)|=|A(\lambda)||B(\lambda)|.$$

这里 $A(\lambda),B(\lambda)$ 为同级 λ—矩阵.

④ 与数字矩阵一样，λ—矩阵也有子式的概念. λ—矩阵的各级子式是 λ 的多项式.

定义：若 λ —矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 $r(r \geq 1)$ 级子式不为零，而所有 $r+1$ 级的子式（若有的话）皆为零，则称 $A(\lambda)$ 的**秩为 r** .

零矩阵的秩规定为 $\mathbf{0}$.

λ—矩阵的初等变换

λ—矩阵的初等变换是指下面三种变换:

① 矩阵两行（列）互换位置；

行变换： $r_i \leftrightarrow r_j$ 列变换：$c_i \leftrightarrow c_j$

② 矩阵的某一行（列）乘以非零常数 k；

行变换： kr_i 列变换： kc_i

③ 矩阵的某一行（列）加另一行（列）的 $p(\lambda)$倍，$p(\lambda)$是一个多项式.

行变换：$r_i + p(\lambda)r_j$ 列变换 $c_i + p(\lambda)c_j$

二、λ一矩阵的行列式因子

行列式因子：$D_k(\lambda)$=最大公因式{$A(\lambda)$的所有k阶子式}

不 变 因子：$d_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}\left(D_0(\lambda)=1\right)$

初 等 因子：$d_k(\lambda)$的不可约因式

注：考虑 λ一矩阵$\lambda I-A$，可得A的最小多项式

$$m(\lambda)=d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$$

例：已知 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\lambda I-A$ 的全体初等因子

解： $\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$ $\qquad D_1(\lambda)=1$

因为 $\begin{vmatrix} 4 & \lambda-3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=\lambda-3$ 与 $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=4(\lambda-2)$ 互质

所以 $D_2(\lambda)=1 \quad D_3(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

不变因子为 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

全体初等因子为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-2)$

例、求$\lambda-$矩阵的不变因子

$$1)\quad A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$2)\quad A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

解：1） $A(\lambda)$ 的非零1级子式为： $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$

$$\lambda^2+\lambda,\quad \lambda,\quad (\lambda+1)^2.$$

$$\therefore \quad D_1(\lambda)=1$$

$A(\lambda)$ 的非零二级子式为：

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1),\quad \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^2,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^3.$$

$$\therefore D_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1).$$

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}$$

又 $D_3(\lambda)=|A(\lambda)|=\lambda^2(\lambda+1)^3.$

所以，$A(\lambda)$的不变因子为 ：

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda(\lambda+1),$$

$$d_3(\lambda)=\frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}=\lambda(\lambda+1)^2.$$

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

2) $\because \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\end{vmatrix}=-1,$

$\therefore \quad D_3(\lambda)=1.$

又 $\quad D_1(\lambda)\big|D_2(\lambda),\ D_2(\lambda)\big|D_3(\lambda)$

$\therefore\ D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1.$

而 $\quad D_4(\lambda)=|A(\lambda)|=(\lambda-2)^4.$

$\therefore A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\ d_4(\lambda)=(\lambda-2)^4.$$

初等变换法求初等因子

$$A(\lambda) \to \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & f_n(\lambda) \end{bmatrix}$$ 其中 $f_k(\lambda)$ 是首1多项式

$f_k(\lambda)$ 的不可约因式为 $A(\lambda)$ 的初等因子

例：求上例中 $\lambda I - A$ 的全体初等因子

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda-3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow (\lambda-3) r_1} \begin{bmatrix} -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2-(\lambda+1)c_1]{(-1)c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(\lambda-1)^2 r_2]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3-(\lambda-2)c_2]{(-1)c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

于是 $f_1(\lambda) = 1, f_2(\lambda) = 1, f_3(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$

全体初等因子为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-2)$

设 λ－矩阵$A(\lambda)$的秩为 r，对于正整数 k，$1 \le k \le r$，$A(\lambda)$中必有非零的 k级子式，$A(\lambda)$中全部 k级子式的首项系数为1的最大公因式 $D_k(\lambda)$，称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

注：若 秩$\left(A(\lambda)\right) = r$，则 $A(\lambda)$ 有 r个行列式因子.

本讲主要内容

- λ－矩阵的概念
- 若当(Jordan)标准形
- 欧式空间

定理：设T是复数域C上的线性空间V_n的线性变换，任取V_n的一组基，T在该基下的矩阵为A，T的特征多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ $(m_1+m_2+\cdots+m_s$
则V_n可分解为不变子空间的直和

$$V_n=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_s$$

其中 $N_i=\left\{x\,|\,(T-\lambda_i T_e)^{m_i}x=0, x\in V^n\right\}$是线性变换 的核空间。

若给每个子空间N_i选一组基，它们的并构成V_n 的基，且T在该组基下的矩阵为如下形式的对角块矩阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$

定义:在上面的定义中J称为矩阵A的Jordan 标准形，

$J_i(\lambda_i)$ 为 $(\lambda-\lambda_i I)^{m_i}$ 对应的Jordan 块。

如：$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ 都是若当块；

而下面的准对角形则是一个若当形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(1,2) & & \\ & J(4,1) & \\ & & J(-i,3) \end{pmatrix}$$

定理：设矩阵A为复数域C的矩阵， 特征多项式的分解

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

存在，则存在非奇异矩阵P 使得 $P^{-1}AP=J$

例如： $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$的Jordan标准型为 $J=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

特征向量法求初等因子

设 $\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的一个不可约因式为 $(\lambda-\lambda_0)^r$；则

$(\lambda-\lambda_0)^r$ 是A 的k个初等因子的乘积

$\Leftrightarrow\left(\lambda_0 I-A\right)x=0$ 的基础解系含k个解向量

$\Leftrightarrow$ 对应特征值 λ_0 有k个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow \quad k=n-\operatorname{rank}\left(\lambda_0 I-A\right)$

例：求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\1&3&2&\\2&3&1&1\end{bmatrix}$ 的Jordan标准型

解：$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3(\lambda-2)$

由 $\operatorname{rank}(1I-A)=2$ 知，$(\lambda-1)^3$ 是A的4-2=2个初等因子的乘积，即 $(\lambda-1)^2$ 和 $(\lambda-1)$ 的乘积，

故A的初等因子为 $(\lambda-1)^2,\lambda-1,\lambda-2$

A的Jordan标准型 $J=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&\\&&&2\end{bmatrix}$

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 的若当标准形.

解： $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda\\ -2\lambda & 0 & \lambda\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & \lambda-1\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ A 的初等因子为 $\lambda,\ \lambda,\ \lambda-2.$

故 A的若当标准形为 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

例：已知12级矩阵A的不变因子为

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9\text{个}},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$$

求A的若当标准形.

解：依题意，A的初等因子为

$$(\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+1),$$

$$(\lambda+1),\ (\lambda-i)^2,\ (\lambda+i)^2$$

$\therefore A$的若当标准形为

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & i & 1 & & \\
 & & & & & & & & & i & & \\
 & & & & & & & & & & -i & 1 \\
 & & & & & & & & & & & -i
\end{pmatrix}$$

矩阵的Jordan标准型的求法

求矩阵的Jordan标准型时，需要计算矩阵的初等因子组，矩阵的全部初等因子，其方法有两类：

（1）行列式法：计算n 阶矩阵A的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的各阶行列式因子 $D_k(\lambda)$ ，及其不变因子

$$d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} \quad \left(k = 1, 2, \cdots, n; D_0(\lambda) = 1\right)$$

那么 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 的全体不可约因式（单因式连同连同其幂指数）为A的初等因子组

（2）初等变换法：

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} \rightarrow \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & f_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中 $f_k(\lambda)$ 是首1多项式

本讲主要内容

- λ－矩阵的概念
- 若当(Jordan)标准形
- 欧式空间

问题的引入：

1、线性空间中，向量之间的基本运算为线性运算，其具体模型为几何空间 $\boldsymbol{R}^2$、$\boldsymbol{R}^3$，但几何空间的度量性质(如长度、夹角)等在一般线性空间中没有涉及.

2、在解析几何中，向量的长度，夹角等度量性质都可以通过内积反映出来：

长度： $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$

夹角 $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$ ： $\cos <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \dfrac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}$

3、几何空间中向量的内积具有比较明显的代数性质.

定义：设V是实数域 R上的线性空间，对V中任意

两个向量x　y,定义一个二元实函数，记(x,y)，

(x,y)满足性质：$\forall x,y,z\in V$，　$\forall k\in R$

(1) $(x,y)=(y,x)$ （交换率）

(2) $(kx,y)=k(x,y)$ （齐次性）

(3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ （分配率）

(4) $(x,x)\geq 0$,当且仅当$x=0$时$(x,x)=0$. （正定性）

则称(x,y)为x和y的**内积**，并称这种定义了内积的

实数域 R上的线性空间V为**欧氏空间**.

注： 欧氏空间 V是特殊的线性空间

① V为实数域 R上的线性空间;

② V除向量的线性运算外，还有"内积"运算;

③ $(x, y) \in R.$

例1．在 R^n 中，对于向量

$$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

1）定义 $(x,y)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ （1）

易证 (x,y) 满足定义中的性质 (1)～(4).

所以，(x,y) 为内积.

这样 R^n 对于内积 (x,y) 就成为一个欧氏空间.

（当 $n=3$ 时，1）即为几何空间 R^3 中内积在直角坐标系下的表达式． (x,y) 即 $x\cdot y$．）

2）定义

$$(x,y)' = a_1b_1 + 2a_2b_2 + \cdots + ka_kb_k + \cdots + na_nb_n$$

易证$(x,y)'$满足定义中的性质(1)～(4).

所以$(x,y)'$也为内积.

从而R^n对于内积 $(x,y)'$也构成一个欧氏空间.

注意：由于对 $\forall x, y \in V$，未必有 $(x,y) = (x,y)'$

所以1），2）是两种不同的内积.

从而 R^n 对于这两种内积就构成了不同的欧氏空间.

例2. 在 $R^{m\times n}$ 中: $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$， $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

2）定义 $(A,B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=tr(AB^{T})$ （2）

易证(A,B)满足定义中的性质 (1)～(4).

所以，(A,B)为内积.

这样 $R^{m\times n}$对于内积(A,B)就成为一个欧氏空间.

例3．$C[a,b]$为闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数所成线性空间，对于函数 $f(x), g(x)$ ，定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

则 $C[a,b]$ 对于（3）作成一个欧氏空间.

证：$\forall\, f(x), g(x), h(x)\in C(a,b), \quad \forall\, k\in R$

(1) $\quad (f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=(g,f)$

(2) $\quad (kf,g)=\int_a^b kf(x)g(x)\,dx=k\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$$=k(f,g)$$

(3) $(f+g,h)=\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx$

$$=\int_a^b f(x)h(x)\,dx+\int_a^b g(x)h(x)\,dx$$

$$=(f,h)+(g,h)$$

(4) $(f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx$

$\because\quad f^2(x)\geq 0,\qquad \therefore\quad (f,f)\geq 0.$

且若 $f(x)\neq 0,$ 则 $f^2(x)>0,$ 从而 $(f,f)>0.$

故 $(f,f)=0\Leftrightarrow f(x)=0.$

因此，(f,g) 为内积， $C[a,b]$为欧氏空间.

2. 内积的简单性质

V为欧氏空间， $\forall x, y, z \in V, \forall k \in R$

1) $(x, ky) = k(x, y), \quad \left(kx, ky\right) = k^2(x, y)$

2) $(0, y) = (x, 0) = 0$

3) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

推广：$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j (x_i, y_j)$

3. n 维欧氏空间中内积的矩阵表示

设V为欧氏空间, $x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组基，对V中

任意两个向量

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

$$y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \eta_j (x_i, x_j) \qquad (4)$$

令 $a_{ij} = (x_i, x_j), \quad i, j = 1, 2, \cdots n.$

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\quad X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}\tag{5}$$

则 $$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j=X'AY\tag{6}$$

定义：矩阵 $$A=\begin{pmatrix}(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots & (x_1,x_n)\\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \cdots & (x_2,x_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \cdots & (x_n,x_n)\end{pmatrix}$$

称为基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的度量矩阵.

注：

① 度量矩阵A是实对称矩阵.

② 由内积的正定性，度量矩阵A还是正定矩阵.

事实上，对 $\forall x\in V, x\neq 0$，即 $X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\neq 0$

有 $(x,x)=X'AX>0$

$\therefore$ A为正定矩阵.

③对同一内积而言，不同基的度量矩阵是合同的.

$$B = C^T AC$$

证：设$x_1, x_2, \cdots, x_n$；$y_1, y_2, \cdots, y_n$为欧氏空间V的两组基，它们的度量矩阵分别为A、B，且

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$$

设 $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n} = \left(C_1, C_2, \cdots, C_n\right),$

则 $y_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} x_k, i = 1, 2, \cdots, n$

于是

$$(y_i, y_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} x_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} x_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (x_k, x_l) c_{ki} c_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} c_{ki} c_{lj} = C_i' A C_j$$

$$\therefore \quad B = \left((y_i, y_j)\right) = \left(C_i' A C_j\right)$$

$$= \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} A\left(C_1, C_2, \cdots, C_n\right) = C'AC$$

④向量的内积由度量矩阵A完全确定,与基的选择无关

$$\forall x, y \in V^n$$

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) X_1$$

$$x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \cdots + \eta_n y_n = \left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right) X_2$$

$$= \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) C X_2 \qquad \Rightarrow X_1 = C X_2$$

$$y = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) Y_1 \qquad \Rightarrow Y_1 = C Y_2$$

$$y = \left(y_1, y_2, \cdots, y_n\right) Y_2 = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) C Y_2$$

基（I）下：$\left(x, y\right) = X_1^T A Y_1$

基（II）下：$\left(x, y\right) = X_2^T B Y_2 = X_2^T C^T A C Y_2 = X_1^T A Y_1$

3．欧氏空间中向量的长度

(1) 引入长度概念的可能性

1）在 R^3 向量 x 的长度（模）$|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

2) 欧氏空间V中，$\forall x \in V$， $(x, x) \geq 0$

使得 $\sqrt{x \cdot x}$ 有意义.

2．向量长度的定义

$\forall x \in V$， $|x| = \sqrt{(x, x)}$ 称为向量 x 的长度（模）.

特别地，当 $|x| = 1$ 时，称 x 为单位向量.

3. 向量长度的简单性质

1) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $|kx| = |k||x|$

3）非零向量 x 的单位化： $\dfrac{1}{|x|}x$.

4.欧氏空间中向量的夹角

（1） 引入夹角概念的可能性与困难

1）在 R^3 中向量 x 与 y 的夹角

$$<x,y> = arc\cos\frac{x \cdot y}{|x||y|} \qquad (*)$$

2）在一般欧氏空间中推广（*）的形式，首先

应证明不等式：
$$\left|\frac{(x,y)}{|x||y|}\right| \le 1$$

此即,

2．柯西－布涅柯夫斯基不等式

对欧氏空间V中任意两个向量 x、y，有

$$\left|(x,y)\right| \le |x||y| \qquad (**)$$

当且仅当 x、y 线性相关时等号成立.

证：当 $y=0$时， $(x,0)=0,\quad |y|=0$

$\therefore \quad (x,y)=|x||y|=0.$ 结论成立.

当 $y\neq 0$ 时，作向量 $z=x+ty,\qquad t\in R$

由内积的正定性，对 $\forall t \in R$，皆有

$$(z,z)=(x+ty,x+ty)$$

$$=(x,x)+2(x,y)t+(y,y)t^2 \geq 0 \qquad (1)$$

取 $t=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ 代入（1）式，得

$$(x,x)-2(x,y)\frac{(x,y)}{(y,y)}+(y,y)\frac{(x,y)^2}{(y,y)^2} \geq 0$$

即 $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

两边开方，即得 $\left|(x,y)\right| \leq |x||y|.$

当 x、y 线性相关时，不妨设 $x = ky$

于是， $\left|(x,y)\right| = \left|(ky,y)\right| = \left|k(y,y)\right| = |k||y|^2.$

$$|x||y| = |ky||y| = |k||y|^2$$

$\therefore \quad \left|(x,y)\right| = |x||y|.$ $\qquad$ (**)式等号成立.

反之，若（**）式等号成立，由以上证明过程知

或者 $y = 0$，或者 $\quad x - \dfrac{(x,y)}{(y,y)} y = 0$

也即 x、y 线性相关.

3．柯西－布涅柯夫斯基不等式的应用

柯西
不等式

1）
$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|$$
$$\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

施瓦兹
不等式

$$a_i,b_i\in R,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

2）
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

证：在 $C(a,b)$ 中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积定义为
$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$$
由柯西－布涅柯夫斯基不等式有
$$|(f(x),g(x))|\le|f(x)||g(x)|$$
从而得证.

3)

三角
不等式

对欧氏空间中的任意两个向量 x、y，有

$$|x+y| \le |x| + |y| \qquad (*)$$

证： $|x+y|^2 = (x+y, x+y)$

$$= (x,x) + 2(x,y) + (y,y)$$

$$\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

两边开方，即得（*）成立.

欧氏空间中两非零向量的夹角

定义1：设V为欧氏空间，x、y 为V中任意两非零向量，x、y 的夹角定义为

$$\langle x, y\rangle = arc\cos\frac{(x, y)}{|x||y|}$$

$$\left(\ 0 \le \langle x, y\rangle \le \pi\ \right)$$

定义2：设 x、y 为欧氏空间中两个向量，若内积

$$(x,y)=0$$

则称 x 与 y **正交**或**互相垂直**，记作 $x\perp y$.

注：

① 零向量与任意向量正交.

② $x\perp y \Longleftrightarrow \langle x,y\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle x,y\rangle=0$.

勾股定理

设V为欧氏空间， $\forall x, y \in V$

$$x \perp y \Longleftrightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

证： $\because \quad |x+y|^2 = (x+y, x+y)$

$$= (x,x) + 2(x,y) + (y,y)$$

$$\therefore \quad |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \Longleftrightarrow (x,y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \perp y.$$

定理：若欧氏空间V中向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 两两正交，

即 $(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m$

则 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_m|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_m|^2$.

证：若 $(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j$

则 $$|x_1 + x_2 + \cdots + x_m|^2 = (\sum_{i=1}^{m} x_i, \sum_{j=1}^{m} x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i, x_i) + \sum_{i \neq j}^{m} (x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x_i, x_i) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_m|^2$$

例： 已知 $x=(2,1,3,2)$， $y=(1,2,-2,1)$

在通常的内积定义下，求 $|x|,(x,y),\langle x,y\rangle,|x-y|.$

解：$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$(x,y)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0$ $\quad\therefore\quad \langle x,y\rangle=\dfrac{\pi}{2}$

又 $x-y=(1,-1,5,1)$

$\therefore\quad |x-y|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

通常称 $|x-y|$为 x 与 y 的距离，记作 $d(x,y)$.

定理：欧式空间 $V^n(n>1)$ 存在标准正交基

证：对 V^n 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$进行正交化，可得正交基

$$y_1, y_2, \cdots, y_n \qquad\qquad (y_i, y_j) = 0, \quad i \neq j$$

再进行单位化，可得单位正交基

$$z_1, z_2, \cdots, z_n \qquad\qquad z_j = \frac{y_j}{|y_j|}$$

例：标准正交基的特征：欧式空间V^n的标准正交基

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

且 $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n, y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n$

（1）基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的度量矩阵$A=I$

（2）$\xi_i = (x, x_i), \eta_j = (y, y_j)$

（3）$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$

五：欧氏空间的子空间

欧氏空间V的子空间在所V中定义的内积之下也是

一个欧氏空间，称之为V的**欧氏子空间**.

欧氏空间V的子空间V_1 ,给定 $y \in V$，若 $\forall x \in V_1$

都有 $y \perp x$ ，则称y 正交于V_1 ，记做 $y \perp V_1$

欧氏空间 V^n，子空间 V_1，则 $V_1^{\perp}=\{y \mid y\in V, y\perp V_1\}$

是V^n的子空间

证明：$\theta\in V_1^{\perp}\Rightarrow V_1^{\perp}$非空。$\forall y,z\in V_1^{\perp},\forall x\in V_1,\forall k\in R$

$$(y+z,x)=(y,x)+(z,x)=0\Rightarrow(y+z)\perp V_1^{\perp}:(y+z)\in V_1^{\perp}$$

$$(ky,x)=k(y,x)=0\Rightarrow(ky)\perp V_1\ :(ky)\in V_1^{\perp}$$

所以 $V_1^{\perp}$是 V^n的子空间。（称$V_1^{\perp}$为是V_1 的正交补)

定理：设欧氏空间 V^n，子空间 V_1，则

$$V^n=V_1\oplus V_1^{\perp}$$

定理：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in R^{m\times n}$ ，则

(1) $\left[R(A)\right]^{\perp}=N(A^{T}),$ 且 $R(A)\oplus N(A^{T})=R^{m}$

(2) $\left[R(A^{T})\right]^{\perp}=N(A),$ 且 $R(A^{T})\oplus N(A)=R^{n}$

三、欧氏空间中的正交变换

1.定义

欧氏空间V的线性变换 T 如果保持向量的内积不变，

即，$$\big(T(x),T(y)\big)=(x,y),\quad \forall x,y\in V$$

则称 T 为正交变换.

注：欧氏空间中的正交变换是几何空间中保持长度不变的正交变换的推广.

2.欧氏空间中的正交变换

定理：设 T 是欧氏空间V的一个线性变换.

下述命题是等价的：

1）T 是正交变换；

2）T 保持向量长度不变，即

$$|T(x)| = |x|, \qquad \forall x \in V;$$

3）T 保持向量间的距离不变，即

$$d\big(T(x), T(y)\big) = d\big(x, y\big), \qquad \forall x, y \in V$$

证明：首先证明1)与2)等价.

1) $\Rightarrow$ 2)：若 T 是正交变换，则

$$\left(T(x),T(x)\right)=(x,x),\quad \forall x\in V$$

即，$$|T(x)|^2=|x|^2$$

两边开方得，$$|T(x)|=|x|,\quad \forall x\in V,$$

2) $\Rightarrow$ 1)：若 T 保持向量长度不变，则对 $\forall x,y\in V$

有，$$\left(T(x),T(x)\right)=(x,x), \tag{1}$$

$$\left(T(y),T(y)\right)=(y,y), \tag{2}$$

$$\left(T(x+y),T(x+y)\right)=(x+y,x+y), \qquad (3)$$

把(3)展开得，

$$\left(T(x),T(x)\right)+2\left(T(x),T(y)\right)+\left(T(y),T(y)\right)$$

$$=(x,x)+2(x,y)+(y,y)$$

再由(1)(2)即得，

$$\left(T(x),T(y)\right)=(x,y)$$

$\therefore$ T 是正交变换.

再证明2)与3)等价.

$2)\Rightarrow 3)$: $\because \quad T(x)-T(y)=T(x-y),$

$$\therefore \quad d\big(T(x),T(y)\big)=\left|T(x)-T(y)\right|$$

$$=\left|T(x-y)\right| = \left|x-y\right| \quad (根据2))$$

$$=d(x,y)$$

故 3）成立.

$3)\Rightarrow 2)$: 若 $d\big(T(x),T(y)\big)=d\big(x,y\big),\quad \forall x,y\in V$

则有， $d\big(T(x),T(0)\big)=d\big(x,0\big),\quad \forall x\in V$

即， $\left|T(x)\right|=\left|x\right|,\quad \forall x\in V.$ 故 2）成立.

1． n维欧氏空间中的正交变换是保持标准正交基不变的线性变换.

1)．若 T 是 n 维欧氏空间V的正交变换，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是V的标准正交基，则 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$ 也是V的标准正交基.

事实上，由正交变换的定义及标准正交基的性质即有，

$$\big(T(x_i), T(x_j)\big) = (x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2). 若线性变换 T 使V的标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 变成标准正交基 $T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)$，则 T 为V的正交变换.

证明：任取 $x, y \in V$，设

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots \xi_n x_n$$

$$y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots \eta_n x_n,$$

由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为标准正交基，有

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

又 $T(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i T(x_i)$, $T(y)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j T(x_j)$

由于$T(x_1),T(x_2),\cdots,T(x_n)$为标准正交基，得

$$\left(T(x),T(y)\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$$

$$\therefore \quad \left(T(x),T(y)\right)=(x,y)$$

故 T 是正交变换.

2．n维欧氏空间V中的线性变换 T是正交变换

$\Longleftrightarrow T$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明："$\Rightarrow$" 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为V的标准正交基，且

$$T\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n\right)$$
$$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)A$$

当 T 是正交变换时，由1知，$Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n$ 也是V的标准正交基， 而由标准正交基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到标准正交基$Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n$的过渡矩阵是正交矩阵.

所以，A是正交矩阵.

"$\Leftarrow$" 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的标准正交基，且

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$$

即，$(Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$

由于当A是正交矩阵时，$Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 也是V的标准正交基， 再由1即得 T 为正交变换.

3. n维欧氏空间中正交变换的分类：

设 n 维欧氏空间V中的线性变换 T 在标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$下的矩阵是正交矩阵A，则 $|A| = \pm 1$.

1）如果 $|A| = 1$，则称 T 为第一类的（旋转）；

2）如果 $|A| = -1$，则称 T 为第二类的.

例、在欧氏空间中任取一组标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

定义线性变换 T为：

$$Tx_1 = -x_1$$

$$Tx_i = x_i, \qquad i = 2, 3, \cdots n.$$

则 T 为第二类的正交变换，也称之为镜面反射.

四、实对称矩阵的一些性质

定理：设A是实对称矩阵，则A的特征值皆为实数.

定理：设A是实对称矩阵，在n维欧氏空间R^n上定义一个线性变换T如下：

$$T(x) = Ax, \qquad \forall x \in R^n$$

则对任意 $x, y \in R^n$，有

$$\left(T(x), y\right) = \left(x, T(y)\right),$$

或

$$y'(Ax) = x'(Ay).$$

证：取 R^n 的一组标准正交基，

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

则 T 在基 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 下的矩阵为A，即

$$T(e_1, e_2, \ldots, e_n)=(e_1, e_2, \ldots, e_n)A$$

任取 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in R^n,$

即 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \overset{\triangle}{=} (e_1, e_2, \dots, e_n)X,$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n \overset{\triangle}{=} (e_1, e_2, \dots, e_n)Y,$$

于是

$$T(x) = T(e_1, e_2, \dots, e_n)X = (e_1, e_2, \dots, e_n)AX,$$

$$T(y) = T(e_1, e_2, \dots, e_n)Y = (e_1, e_2, \dots, e_n)AY,$$

又 $e_1, e_2, \dots, e_n$是标准正交基，

$$\therefore \quad \left(T(x), y\right) = (AX)'Y = (X'A')Y = X'AY$$

$$= X'(AY) = \left(x, T(y)\right)$$

又注意到在R^n中 $x = X, \quad y = Y,$

即有 $y(Ax) = \left(y, T(x)\right) = \left(T(x), y\right)$

$$= \left(x, T(y)\right) = x'(Ay).$$

二、对称变换

1. 定义

设 T 为欧氏空间V中的线性变换，如果满足

$$\left(T(x), y\right) = \left(x, T(y)\right), \qquad \forall x, y \in V,$$

则称 T 为对称变换.

1）n维欧氏空间V的对称变换与n级实对称矩阵在标准正交基下是相互确定的：

① 实对称矩阵可确定一个对称变换.

事实上，设 $A \in R^{n\times n}, A' = A,$　$x_1, x_2, \ldots, x_n$为V的一组标准正交基. 定义V的线性变换 T：

$$T(x_1, \ldots x_n) = (x_1, \ldots x_n)A$$

则 T 即为V的对称变换.

② 对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵.

事实上，设 T为n维欧氏空间V上的对称变换，

$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组标准正交基， $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$

为 T 在这组基下的矩阵，即

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$$

或

$$T(x_i) = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{ni}x_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}x_k, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

于是 $\left(T(x_i), x_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k, x_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} (x_k, x_j)$

$$= a_{ji}(x_j, x_j) = a_{ji}$$

$$\left(x_i, T(x_j)\right) = \left(x_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (x_i, x_k)$$

$$= a_{ij}(x_i, x_i) = a_{ij}$$

由 T 是对称变换，有 $\left(T(x_i), x_j\right) = \left(x_i, T(x_j)\right)$

即 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \cdots\cdots n,$

所以A为对称矩阵.

定理：

设实对称矩阵A的特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，对应的特征向量

为 x_1 和 x_2 ，则 $\left(x_1, x_2\right) = 0$

证明：$\left.\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1^T A x_2 = \begin{cases} x_1^T \left(Ax_2\right) = \lambda_2 \left(x_1^T x_2\right) \\ \left(Ax_1\right)^T x_2 = \lambda_1 \left(x_1^T x_2\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\left(x_1^T x_2\right) = 0 \qquad \Rightarrow x_1^T x_2 = 0$$

即： $\left(x_1, x_2\right) = 0$

作业

- P79：19
- P106：1
- P107：6、9、10