矩阵分析与应用

第十三讲 广义逆矩阵

信息工程学院
吕旋阳

2006-12-12

本讲主要内容

- 投影变换
- 广义逆的存在、性质及构造方法
- 广义逆矩阵的计算方法

投影矩阵

定义：向量空间C^n中，子空间L与M满足$C^n = L \oplus M$,

对 $\forall x \in C^n$, 分解式 $x = y + z, y \in L, z \in M$ 唯一。

称变换 $T_{L,M}(x) = y$ 为沿着M到L的投影

性质(1)：$T_{L,M}$ 是线性变换

性质(2)：$R(T_{L,M}) = L, N(T_{L,M}) = M$

性质(3)：$\forall x \in L \Rightarrow T_{L,M}(x) = x \quad \forall x \in M \Rightarrow T_{L,M}(x) = \theta$

[注] $T_{L,M}$ 是L中的单位变换

$T_{L,M}$ 是M中的零变换

二、投影矩阵

定义：取线性空间C^n的基为$e_1,e_2,\ldots,e_n$时，元素x与它的坐标“形式一致”。称 $T_{L,M}$ 在该基下的矩阵记为投影矩阵$P_{L,M}$

性质(4)：$T_{L,M}(x)=y \Leftrightarrow P_{L,M}x=y$

$$x\in L \;\Rightarrow T_{L,M}(x)=x \;\Rightarrow P_{L,M}x=x$$

$$x\in M \;\Rightarrow T_{L,M}(x)=\theta \;\Rightarrow P_{L,M}x=\theta$$

预备：$R(A)=\{y \mid y=Ax, x\in C^n\}, N(A)=\{x \mid Ax=0, x\in C^n\}$

引理1：$A_{n\times n}, A^2=A \Rightarrow N(A)=R(I-A)$

证明：$A^2=A \Rightarrow A(I-A)=O$

先证 $R(I-A)\subset N(A)$

$$\forall x\in R(I-A) \Rightarrow \exists u\in C^n, \text{st.} x=(I-A)u$$

$$Ax=A(I-A)u=\theta \quad \Rightarrow x\in N(A)$$

先证 $N(A)\subset R(I-A)$：$\forall \alpha\in N(A) \Rightarrow A\alpha=\theta$

$$\alpha=\alpha-A\alpha=(I-A)\alpha\in R(I-A)$$

故 $N(A)=R(I-A)$

定理1： $P_{n\times n}=P_{L,M}\Leftrightarrow P^2=P$

证明： 必要性 $C^n=L\oplus M$

$\forall x\in C^n, x=y+z, y\in L, z\in M$ 唯一 $\Rightarrow P_{L,M}x=y$

$P_{L,M}^2x=P_{L,M}\left(P_{L,M}x\right)=P_{L,M}y=y=P_{L,M}x$

充分性 $\forall x\in C^n\Rightarrow x=Px+(I-P)x$

令 $y=Px\in R(P),\ z=(I-P)x\in R(I-P)=N(P)$

则 $C^n=R(P)+N(P)$ ，下证 $R(P)\cap N(P)=\{\theta\}$:

对 $\forall\beta\in R(P)\cap N(P),\ \beta\in R(P)\Rightarrow\exists u\in C^n,\text{st. }\beta=Pu$

$\beta\in N(P)\Rightarrow P\beta=\theta$

故 $\beta=Pu=P^2u=PPu=P\beta=\theta$

于是可得 $C^n = R(P) \oplus N(P)$，从而有

$$x = y + z, y = Px \in R(P), z = (I - P)x \in N(P)$$ 唯一

因为投影变换 $T_{R(P),N(P)}$ 满足

$$T_{R(P),N(P)}(x) = y \Rightarrow P_{R(P),N(P)}x = y \quad \left(\forall x \in C^n\right)$$

所以 $\quad P = P_{R(P),N(P)}$

三、投影矩阵的确定方法

$\dim L = r, L$ 的基为 $x_1, \cdots, x_r : X = (x_1, \cdots, x_r)$

$\dim M = n - r, M$ 的基为 $y_1, \cdots, y_{n-r} : Y = (y_1, \cdots, y_{n-r})$

$$\left.\begin{array}{l} P_{L,M} x_i = x_i \quad \Rightarrow P_{L,M} X = X \\ P_{L,M} y_j = \theta \quad \Rightarrow P_{L,M} Y = O \end{array}\right\} \Rightarrow P_{L,M} \left(X \mid Y \right) = \left(X \mid O \right)$$

$$\Rightarrow P_{L,M} = \left(X \mid O \right) \left(X \mid Y \right)^{-1}$$

例1： R^2 中：$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, L=L(\alpha_1), M=L(\alpha_2),$

求 $P_{L,M}$

解：$P_{L,M}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

例2：$P_{L,M}$与L和M的基的选择无关。

证：L的基 $x_1,\cdots,x_r$ ；另一基 $\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_r$：

$$X=(x_1,\cdots,x_r),\quad \tilde{X}=(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_r)\ \Rightarrow \tilde{X}=XC_{r\times r}$$

M 的基 $y_1,\cdots,y_{n-r}$； 另一基 $\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_{n-r}$：

$$Y=(y_1,\cdots,y_{n-r}),\quad \tilde{Y}=(\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_{n-r})\ \Rightarrow \tilde{Y}=YD_{(n-r)\times(n-r)}$$

$$(\tilde{X}|O)\cdot(\tilde{X}|\tilde{Y})^{-1}=(XC|O)\cdot\left[(X|Y)\begin{pmatrix}C & O\\ O & D\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=(XC|O)\cdot\begin{bmatrix}C^{-1} & O\\ O & D^{-1}\end{bmatrix}\cdot(X|Y)^{-1}=(X|O)\cdot(X|Y)^{-1}$$

四、正交投影变换

欧氏空间 C^n 中，子空间L给定，取 $M=L^{\perp}$，

则 $\mathbf{C}^n=L\oplus M$

正交投影变换$T_L=T_{L,M}$; 正交投影矩阵 $P_L=P_{L,M}$

定理2：方阵 $P=P_L \Leftrightarrow P^2=P, P^H=P$

四、正交投影矩阵的确定方法

$$\left.\begin{array}{l} L\text{的基为}\quad x_1,\cdots,x_r:\quad X=(x_1,\cdots,x_r) \\ L^{\perp}\ \text{的基为}\ y_1,\cdots,y_{n-r}:Y=(y_1,\cdots,y_{n-r}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X^H Y = O \\ Y^H X = O \end{cases}$$

已求得 $P_L = P_{L,L^{\perp}} = (X|O)\cdot(X|Y)^{-1}$

因为 $(X|Y)^H\cdot(X\mid Y)=\begin{pmatrix} X^H \\ Y^H \end{pmatrix}\cdot(X\mid Y)=\begin{bmatrix} X^H X & O \\ O & Y^H Y \end{bmatrix}$

所以 $(X\mid Y)^{-1}=\begin{bmatrix} (X^H X)^{-1} & O \\ O & (Y^H Y)^{-1} \end{bmatrix}\cdot(X\mid Y)^H=\begin{bmatrix} (X^H X)^{-1} X^H \\ (Y^H Y)^{-1} Y^H \end{bmatrix}$

于是 $P_L=(X|O)\cdot\begin{bmatrix} (X^H X)^{-1} X^H \\ (Y^H Y)^{-1} Y^H \end{bmatrix}=X\cdot(X^H X)^{-1}\cdot X^H$

例3：向量空间 R^3 中，$\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},L=L(\alpha,\beta)$，

求 P_L

解：$X=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{bmatrix},X^TX=\begin{bmatrix}5&2\\2&2\end{bmatrix},\left(X^TX\right)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-2\\-2&5\end{bmatrix}$

$$P_L=X\left(X^TX\right)^{-1}X^T=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&1\\-2&1&5\end{bmatrix}$$

[注]：正交投影矩阵 P_L 与子空间 L 的基的选择无关

广义逆矩阵

一、定义与算法

定义：对 $A_{m\times n}$，若有 $X_{n\times m}$ 满足Penrose方程

(1) $AXA = A$ (2) $XAX = X$

(3) $(AX)^H = AX$ (4) $(XA)^H = XA$

称X为A的M-P逆，记作A^+.(Moore 1920，Penrose1955)

例如 $A_{m\times n}$ 可逆, $X = A^{-1}$ 满足P-方程：$A^+ = A^{-1}$

$A = O_{m\times n}, X = O_{n\times m}$ 满足P-方程：$O^+_{m\times n} = O_{n\times m}$

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 满足P-方程：$A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

例4：$F \in C_r^{m\times r}\ (r \geq 1) \Rightarrow F^+ = \left(F^H F\right)^{-1} F^H$，且$F^+F = I_r$

$G \in C_r^{r\times n}\ (r \geq 1) \Rightarrow G^+ = G^H \left(G G^H\right)^{-1}$，且$GG^+ = I_r$

验证第一式：令 $F^+ = \left(F^H F\right)^{-1} F^H$, 则有

$$FXF = F\left(F^H F\right)^{-1} F^H F = F$$

$$XFX = \left(F^H F\right)^{-1} F^H FX = X$$

$$\left(FX\right)^H = X^H F^H = F\left(F^H F\right)^{-1} F^H = FX$$

$$\left(XF\right)^H = I_r^H = I_r = XF$$

定理3：$\forall A_{m\times n}, A^{+}$ 存在并唯一

证明： 存在性 $A = O_{m\times n} \Rightarrow A^{+} = O_{n\times m}$

$$A \neq O \Rightarrow \mathrm{rank}A \geq 1: \quad A = FG, F \in \mathrm{C}_r^{m\times r}, G \in \mathrm{C}_r^{r\times n}$$

令 $X = G^{+}F^{+}$ 则有

$$AXA = FG \cdot G^{+}F^{+} \cdot FG = FG = A$$

$$XAX = G^{+}F^{+} \cdot FG \cdot G^{+}F^{+} = G^{+}F^{+} = X$$

$$(AX)^{\mathrm{H}} = \left(FG \cdot G^{+}F^{+}\right)^{\mathrm{H}} = \left(FF^{+}\right)^{\mathrm{H}} = FF^{+} = F \cdot GG^{+} \cdot F^{+} = AX$$

$$(XA)^{\mathrm{H}} = \left(G^{+}F^{+} \cdot FG\right)^{\mathrm{H}} = \left(G^{+}G\right)^{\mathrm{H}} = G^{+}G = G^{+} \cdot F^{+}F \cdot G = XA$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = G^{\mathrm{H}}\left(F^{\mathrm{H}}AG^{\mathrm{H}}\right)^{-1}F^{\mathrm{H}}$$

定理3：$\forall A_{m\times n}, A^{+}$ 存在并唯一

证明：唯一性，对$A_{m\times n}$若 $X_{n\times m}$与$Y_{n\times m}$ 都满足P-方程，

则：

$$X = XAX = X\cdot AYA\cdot X = X\cdot(AY)^{H}\cdot(AX)^{H}$$

$$= X\cdot(AXAY)^{H} = X\cdot(AY)^{H} = XAY = X\cdot AYA\cdot Y$$

$$= (XA)^{H}\cdot(YA)^{H}\cdot Y = (YAXA)^{H}\cdot Y = (YA)^{H}\cdot Y = YAY = Y$$

例5：设$A\in C_r^{m\times n}$的奇异值分解为 $A=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}V^H$

则 $A^+=V\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times m}U^H$

直接验证即可。

进一步的有

$$A=(U_s,U_n)\begin{bmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}(V_s,V_n)^H$$

$$=U_s\Sigma_r V_s^H$$

$$A^+=V_s\Sigma_r^{-1}U_s^H$$

广义逆矩阵的分类：对 $A_{m\times n}$ ，若 $X_{n\times m}$ 满足P-方程

(i): 称 X 为 A 的 $\{i\}$-逆，记作 $A^{(i)}$. 全体记作 $A\{i\}$

(i),(j): 称 X 为 A 的 $\{i,j\}$-逆，记作 $A^{(i,j)}$. 全体记作 $A\{i,j\}$

(i),(j),(k): 称 X 为 A 的 $\{i,j,k\}$-逆，记作 $A^{(i,j,k)}$. 全体记作 $A\{i,j,k\}$

(1)～(4)：则X为A^{+}

合计：15类

常用广义逆矩阵：$A\{1\},A\{1,2\},A\{1,3\},A\{1,4\},A^{+}$

求 $A^{(1)}, A^{(1,2)}$ 的初等变换方法

$$A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}, \quad A \xrightarrow{\text{行}} B \Rightarrow \quad \exists\text{可逆矩阵}\, Q_{m\times m}, \mathrm{st}.\, QA = B$$

其中B为拟Hermite标准形, 它的后 $m - r$ 行元素全为零

$$B \xrightarrow{\text{列对换}} \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n} = C \quad \Rightarrow \exists\text{置换矩阵}\, P_{n\times n}, \mathrm{st}.\, BP = C$$

于是 $\quad QAP = C \Rightarrow A = Q^{-1}CP^{-1}$

定理14：已知A，P，Q如上所述，对 $\forall L_{(n-r)\times(m-r)}$，有

$$X = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix}_{n\times m} Q \in A\{1\},\ X_0 = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times m} Q \in A\{1,2\}$$

证明：略

例6：$A=\begin{bmatrix}2&1&0&2\\0&0&1&2\\2&1&1&4\end{bmatrix}$, 求 $A^{(1)}, A^{(1,2)}, A^{+}$

解：

$$(A|\,I)\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}2&1&0&2&1&0&0\\0&0&1&2&0&1&0\\0&0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right]:\quad c_1=2, c_2=3$$

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix},\quad P=(e_2,e_3,e_1,e_4)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(1)}=P\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&a\\0&0&b\end{array}\right]Q=\begin{bmatrix}-a&-a&a\\1&0&0\\0&1&0\\-b&-b&b\end{bmatrix},\quad A^{(1,2)}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$A = FG:$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F^{\mathrm{T}}F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F^{+} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, GG^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, G^{+} = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 5 & -4 \\ -4 & 9 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{87}\begin{bmatrix} 28 & -26 & 2 \\ 14 & -13 & 1 \\ -17 & 22 & 5 \\ -6 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

例7 ：$A_{m\times n} \neq O$，且 A^+ 已知，记 $B = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$，求 B^+

解： $\mathrm{rank}A = r \geq 1 \Rightarrow A = FG$： $F \in \mathbf{C}_r^{m\times r}$， $G \in \mathbf{C}_r^{r\times n}$

$$B = \begin{pmatrix} FG \\ FG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix} G： \quad \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix} \in \mathbf{C}_r^{2m\times r}, G \in \mathbf{C}_r^{r\times n}$$

$$B^+ = G^+ \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix}^+ = G^+ \cdot \left[\left(F^{\mathrm{H}} \middle| F^{\mathrm{H}} \right) \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix} \right]^{-1} \left(F^{\mathrm{H}} \middle| F^{\mathrm{H}} \right)$$

$$= G^+ \cdot \frac{1}{2} \left(F^{\mathrm{H}} F \right)^{-1} \cdot \left(F^{\mathrm{H}} \middle| F^{\mathrm{H}} \right) = \frac{1}{2} \left(G^+ F^+ \middle| G^+ F^+ \right) = \frac{1}{2} \left(A^+ \middle| A^+ \right)$$

二、广义逆矩阵的性质

定理4：$A_{m\times n}, A^{(1)}$ 唯一 $\Leftrightarrow m=n, A$ 可逆，且 $A^{(1)}=A^{-1}$

定理5：$A_{m\times n}, B_{n\times p}, \lambda\in \mathbf{C}, \lambda^{+}=\begin{cases}1/\lambda & (\lambda\neq 0)\\ 0 & (\lambda=0)\end{cases}$

(1) $\left[A^{(1)}\right]^{\mathrm{H}}\in A^{\mathrm{H}}\{1\}$： $AA^{(1)}A=A\Rightarrow A^{\mathrm{H}}(A^{(1)})^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}=A^{\mathrm{H}}$

(2) $\lambda^{+}A^{(1)}\in(\lambda A)\{1\}$： $(\lambda A)(\lambda^{+}A^{(1)})(\lambda A)=(\lambda\lambda^{+}\lambda)(AA^{(1)}A)=\lambda A$

(3) $S_{m\times m}$ 和 $T_{n\times n}$ 都可逆 $\Rightarrow T^{-1}A^{(1)}S^{-1}\in(SAT)\{1\}$

(4) $r_A\le r_{A^{(1)}}$： $r_A=r_{AA^{(1)}A}\le r_{A^{(1)}}$

(5) $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等矩阵，且 $r_{AA^{(1)}} = r_A = r_{A^{(1)}A}$

因为 $r_A = r_{AA^{(1)}A} \le \begin{cases} r_{AA^{(1)}} \\ r_{A^{(1)}A} \end{cases} \le r_A$

(6) $R\left(AA^{(1)}\right) = R(A)$： $R(A) = R\left(AA^{(1)}A\right) \subset R\left(AA^{(1)}\right) \subset R(A)$

$N\left(A^{(1)}A\right) = N(A)$： $N(A) \subset N\left(A^{(1)}A\right) \subset N\left(AA^{(1)}A\right) = N(A)$

(7) ① $A^{(1)}A = I_n \Leftrightarrow r_A = n$ “A 列满秩”

② $AA^{(1)} = I_m \Leftrightarrow r_A = m$ “A 行满秩”

(8) ① $(AB)(AB)^{(1)}A = A \Leftrightarrow r_{AB} = r_A$

② $B(AB)^{(1)}(AB) = B \Leftrightarrow r_{AB} = r_B$

定理6：$A_{m\times n}, Y\in A\{1\},\ Z\in A\{1\} \Rightarrow X \triangleq YAZ \in A\{1,2\}$

证明：$AXA = A\cdot YAZ\cdot A = AY(AZA) = AYA = A$

$$XAX = YAZ\cdot A\cdot YAZ = Y(AZA)YAZ = Y\cdot AYA\cdot Z = YAZ = X$$

推论 $A_{m\times n}, Y\in A\{1\} \Rightarrow X \triangleq YAY \in A\{1,2\}$

定理7：设 $X\in A\{1\}$，则 $r_X = r_A \Leftrightarrow X\in A\{1,2\}$

定理8：$Y \triangleq \left(A^{\mathrm{H}}A\right)^{(1)}A^{\mathrm{H}} \in A\{1,2,3\},\quad Z \triangleq A^{\mathrm{H}}\left(AA^{\mathrm{H}}\right)^{(1)} \in A\{1,2,4\}$

定理9： $A^{+} = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}$

定理10：(1) $r_{A^{+}} = r_{A}$ (2) $\left(A^{+}\right)^{+} = A$

(3) $\left(A^{H}\right)^{+} = \left(A^{+}\right)^{H}$ $\left(A^{T}\right)^{+} = \left(A^{+}\right)^{T}$

(4) $\left(A^{H} A\right)^{+} = A^{+}\left(A^{H}\right)^{+}$ $\left(AA^{H}\right)^{+} = \left(A^{H}\right)^{+} A^{+}$

(5) $A^{+} = \left(A^{H} A\right)^{+} A^{H} = A^{H}\left(AA^{H}\right)^{+}$

(6) $R\left(A^{+}\right) = R\left(A^{H}\right), N\left(A^{+}\right) = N\left(A^{H}\right)$

二、M-P逆的等价定义

Moore逆：对 $A_{m\times n}$, 若有 $X_{n\times m}$ 满足 $AX=P_{R(A)}$ 和 $XA=P_{R(X)}$，称X为A的Moore逆。

定理11：M-逆与P-逆等价

作业

- P295：1、2、3
- P306：7、8、9