



武汉大学  
*Wuhan University*

# 第四章 频率域滤波 (2)

涂卫平

武汉大学计算机学院

2018年秋季学期



# 主要内容

Main Content

引言

低通滤波器

高通滤波器

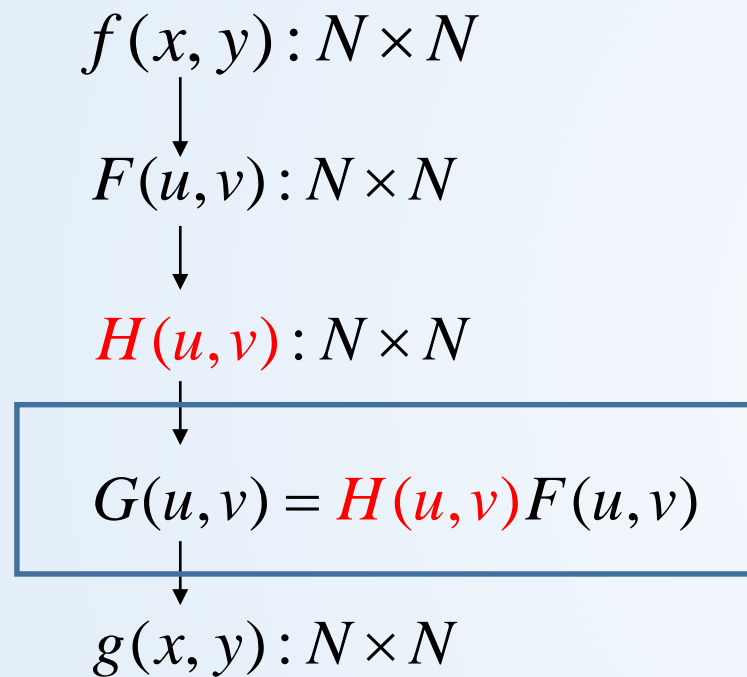
带通-带阻滤波器

同态滤波器



# 引言

## 图像频域增强的一般步骤



- 频域增强是通过改变图像中的不同频率分量来实现的。
- 频域增强的工具是频域滤波器，不同的滤波器滤除的频率和保留的频率不同，因而可获得不同的增强效果。

### 频域滤波分类：

- 低通滤波，高通滤波，带通和带阻滤波，同态滤波

# 主要内容

Main Content

引言

低通滤波器

高通滤波器

带通-带阻滤波器

同态滤波器



# 低通滤波器

- ◆ 思想：边缘和其它尖锐变化（如噪声）在图像的灰度级中主要处于傅立叶变换的高频部分，因此可通过衰减图像傅立叶变换中指定范围的高频成分来实现平滑。
- ◆ 要求：选择一个合适的  $H(u, v)$  以削弱  $F(u, v)$  的高频分量
- ◆ 问题：如何保留低频，滤掉高频？
- ◆ 解决办法：使用低通滤波器进行平滑处理
  - 理想低通滤波器
  - Butterworth低通过滤器
  - 高斯低通过滤器



# 频率域平滑滤波器

---

理想低通滤波器



# 频率域平滑滤波器-理想低通滤波器

## 理想低通滤波器

二维理想低通过滤器（ILPF）的传输函数：

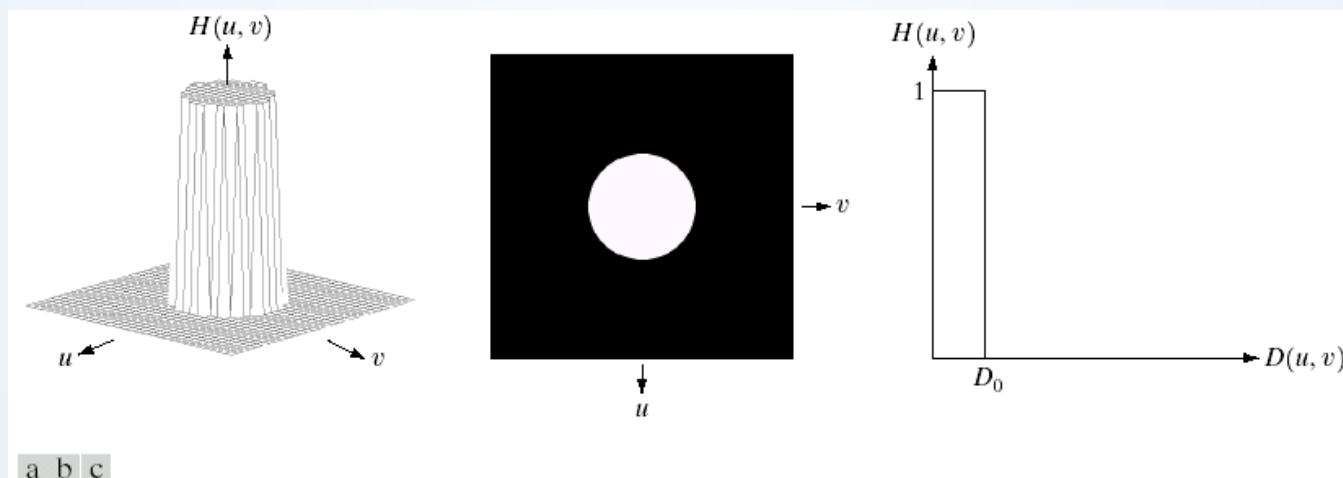
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中： $D_0$  为截止频率

$D(u, v)$  是频率矩形平面上的点  $(u, v)$  到频率原点  $(M/2, N/2)$  处的欧氏距离：

$$D(u, v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]$$

“理想”是指小于  $D_0$  的频率可以完全不受影响地通过滤波器，而大于  $D_0$  的频率则完全通不过



a b c

FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.



# 频率域平滑滤波器-理想低通滤波器

## 理想低通滤波器

### 截止频率与百分功率

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$B = 100 \times \left[ \sum_{u \in R} \sum_{v \in R} P(u, v) / \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v) \right]$$

功率谱:

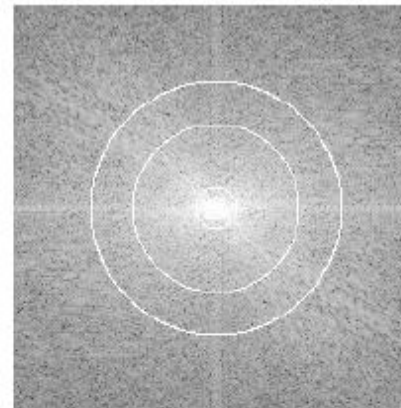
$$p(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$u \in R, v \in R$  表示频率矩形中距离原点的欧氏距离小于  $D_0$  的所有点。

**B表示滤除 $D_0$ 之外的成分以后剩下的频谱百分功率**



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

从(c)到(f):

$D_0 = 5, 11, 45, 68$

$B = 90\%, 95\%, 99\%, 99.5\%$

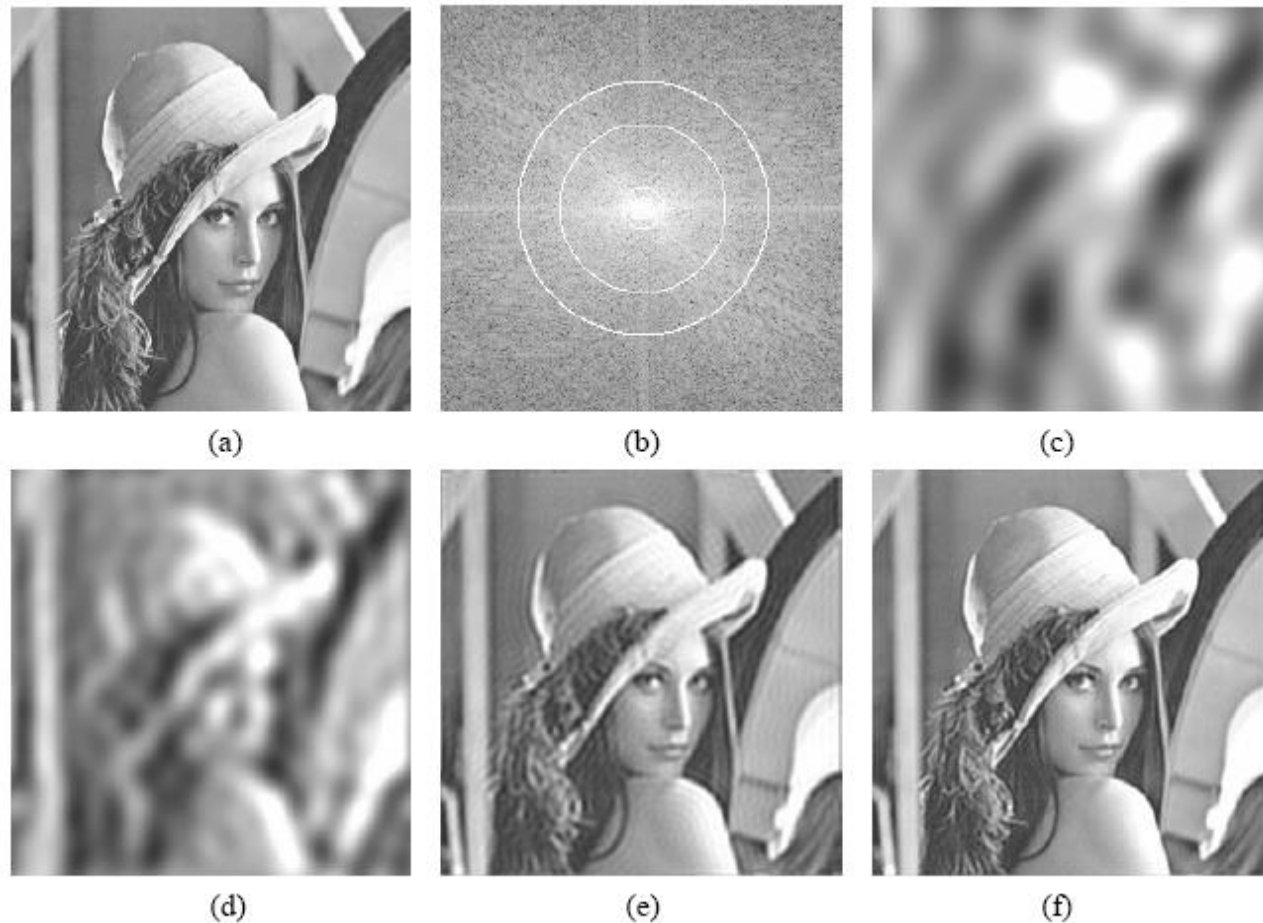




# 频率域平滑滤波器-理想低通滤波器

## 理想低通滤波器

- (c) 尽管只有10%的(高频)能量被滤除, 但图像中绝大多数细节信息都丢失了。
- (d) 当仅5%的(高频)能量被滤除后, 图像中有明显的**振铃现象**。
- (e) 如果只滤除1%的(高频)能量, 图像虽有一定程度的模糊但视觉效果尚可。
- (f) 滤除0.5%的(高频)能量后所得到的滤波结果与原图像几乎无差别。



从(c)到(f):

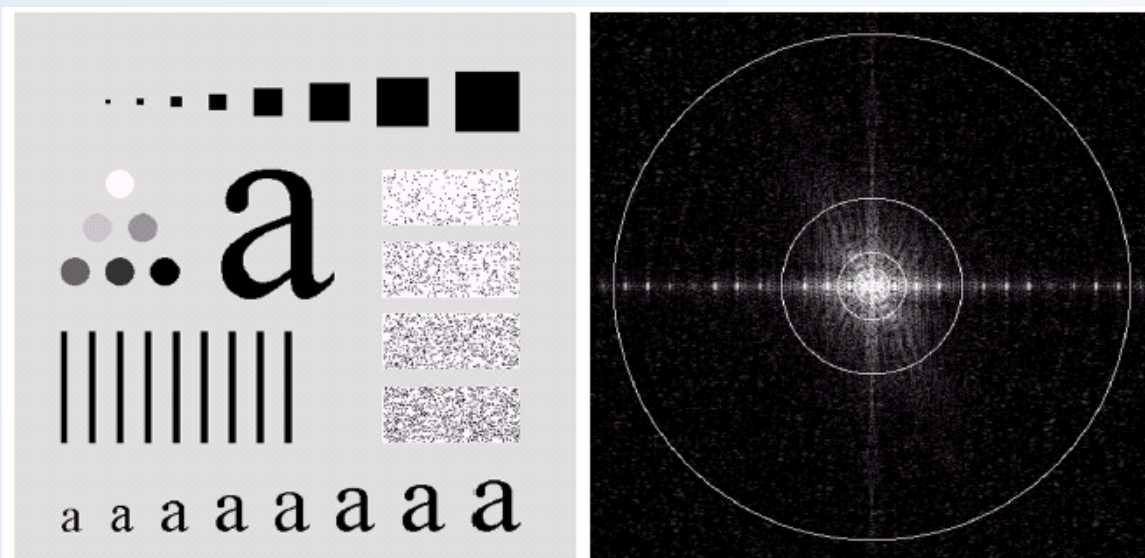
$D_0 = 5, 11, 45, 68$

$B = 90\%, 95\%, 99\%, 99.5\%$



# 频率域平滑滤波器-理想低通滤波器

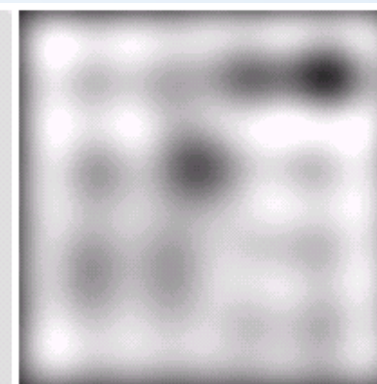
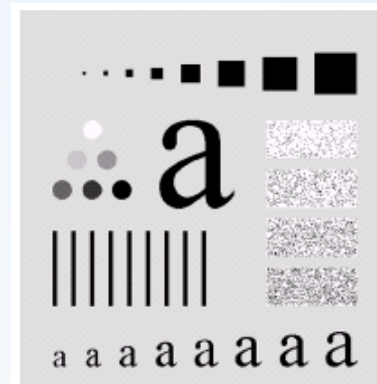
## 理想低通滤波器



**FIGURE 4.11** (a) An image of size  $500 \times 500$  pixels and (b) its Fourier spectrum. The superimposed circles have radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, which enclose 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, and 99.5% of the image power, respectively.

500×500的图像及其傅里叶频谱

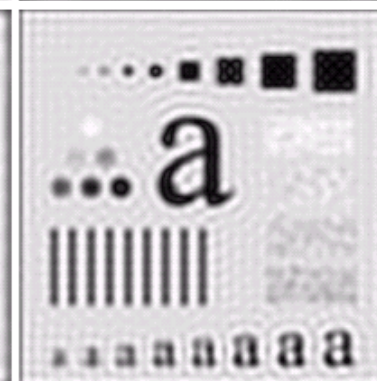
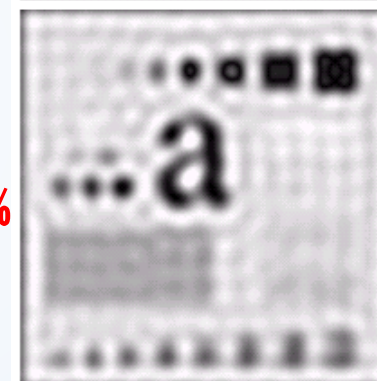
原始  
图像



$D_0=5$   
 $B=92.0\%$

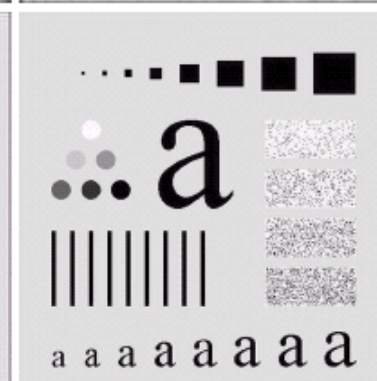
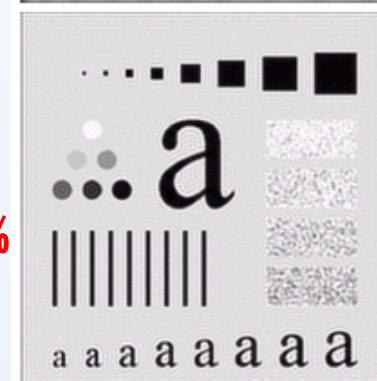
$D_0=15$   
 $B=94.6\%$

振铃效应



$D_0=30$   
 $B=96.4\%$

$D_0=80$   
 $B=98.0\%$



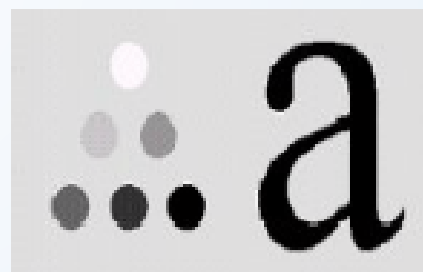
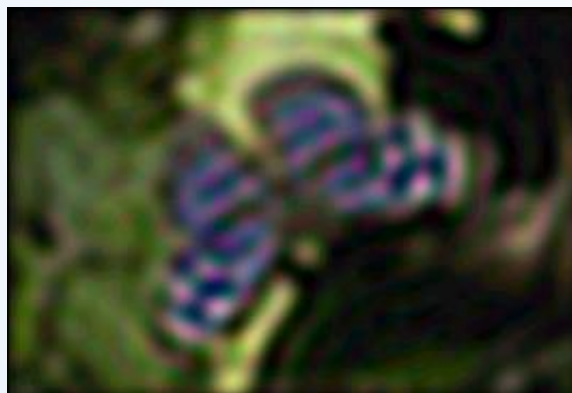
$D_0=230$   
 $B=99.5\%$



# 频率域平滑滤波器-理想低通滤波器

## 理想低通过滤器的处理结果

**振铃现象：** 输出图像的灰度剧烈变化处产生的震荡，就好像钟被敲击后产生的空气震荡







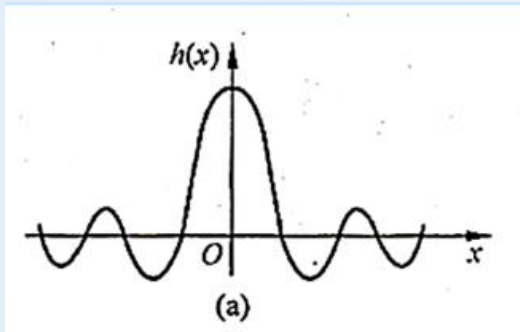
# 频率域平滑滤波器-理想低通滤波器

## 理想低通滤波器的分析

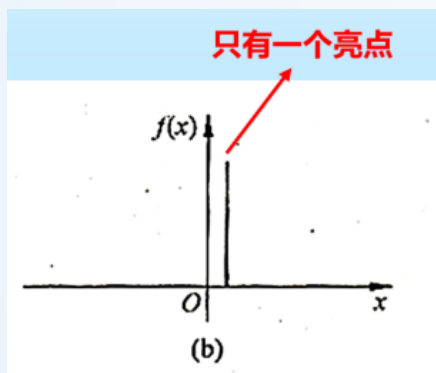
### 产生振铃现象的原因

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

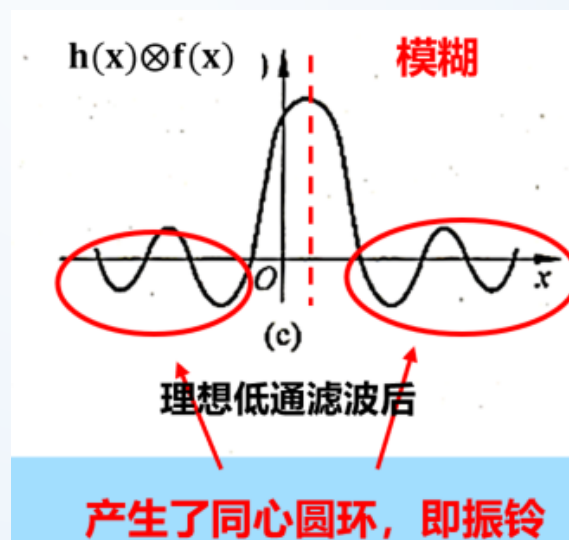
$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) \iff g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$



一维理想低通滤波器的时域曲线图



假设  $f(x)$  是一幅只有一个亮点的简单图像



卷积之后的结果

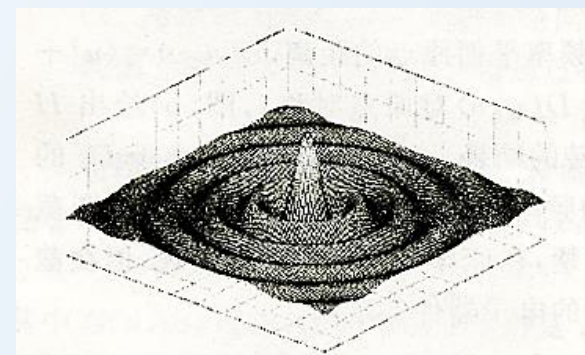
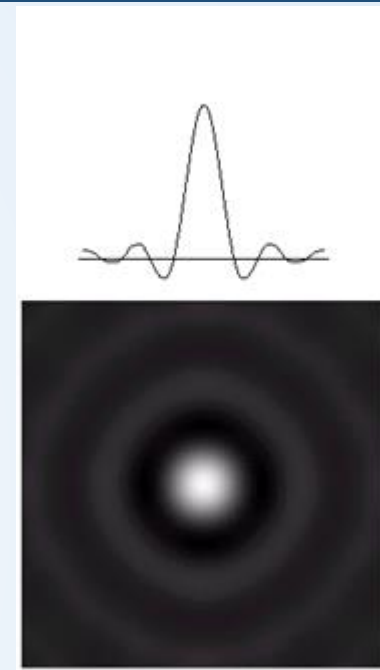


图 6.2.3 理想低通滤波器的脉冲响应示例

对  $H(f) = \begin{cases} 1, f \leq f_0 \\ 0, f > f_0 \end{cases}$  求傅里叶反变换



# 频率域平滑滤波器

---

Butterworth低通滤波器

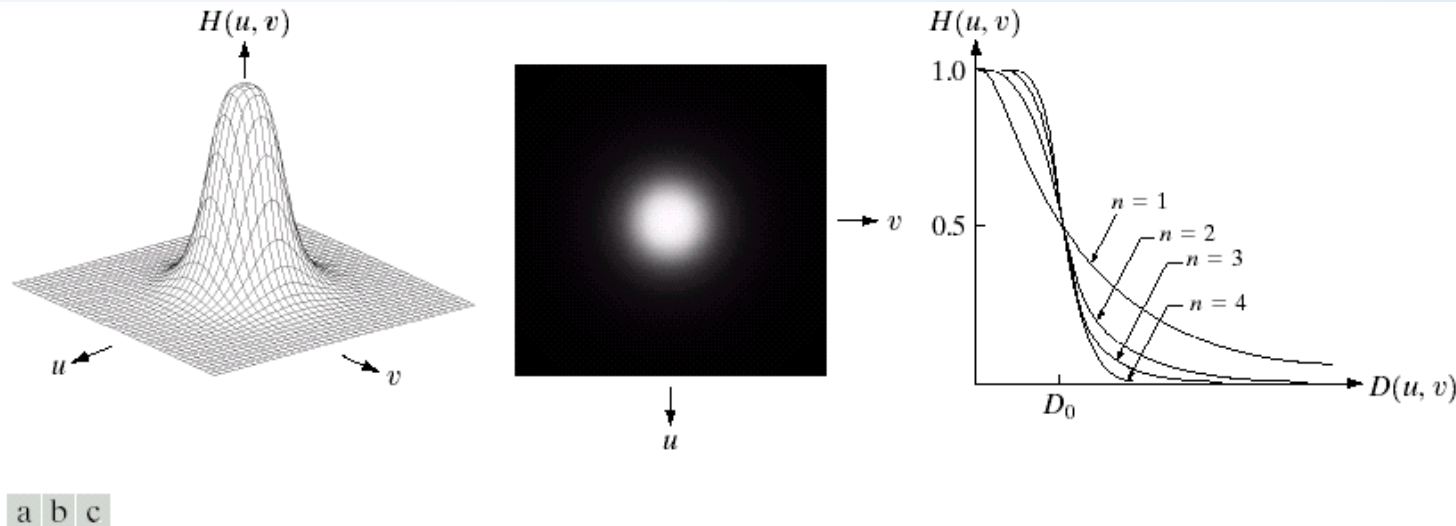


# 频率域平滑滤波器-Butterworth低通滤波器

## Butterworth低通滤波器

n阶Butterworth低通滤波器  
(BLPF) 的变换函数如下:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$



**FIGURE 4.14** (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

与理想低通滤波器相比， Butterworth低通滤波器的特点：

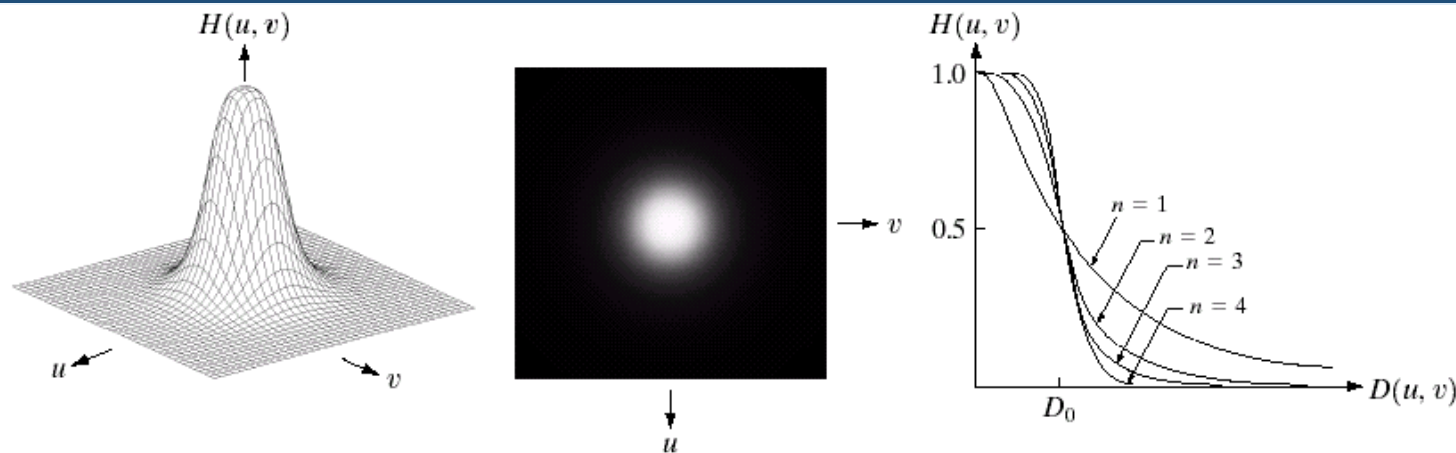
- ✓ 没有明显的跳跃
- ✓ 模糊程度降低
- ✗ 尾部含有较多的高频，对噪声的平滑效果不如理想低通滤波器



# 频率域平滑滤波器-Butterworth低通滤波器

## Butterworth低通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$



a b c

FIGURE 4.14 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

- ◆ 阶数 $n$ 越大，下降边沿越陡
- ◆ 与理想低通滤波器相比，高低频之间过渡较为平滑，滤波后的输出图像振铃现象不明显。
  - $n=1$ 时，过渡最为平滑，尾部包含有大量的高频成分，1阶巴特沃斯低通滤波器没有振铃现象。
  - 随着阶的增加，输出图像振铃现象增加。
- ◆ 另一方面，对图像的平滑效果不如理想滤波器。
- ◆ 要根据平滑效果和振铃现象的折中确定BLPF的阶数。

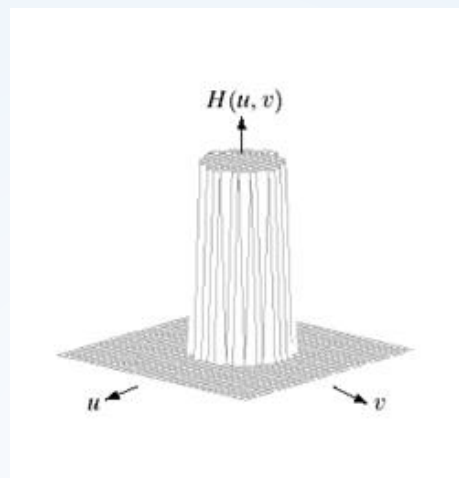


# 频率域平滑滤波器-Butterworth低通滤波器

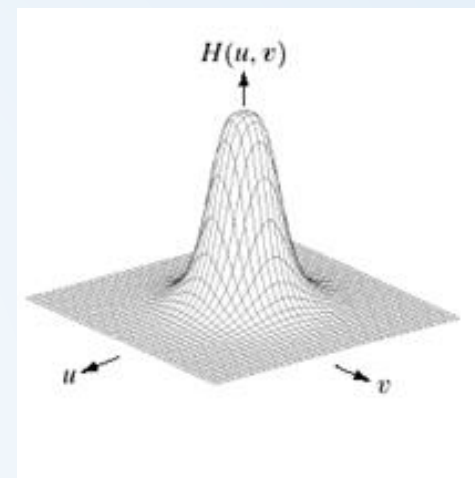
## Butterworth低通滤波器

### 截止频率

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$



ILPF



BLPF

◆ BLPF传输函数中不存在一个不连续点，作为通过频率和滤除频率之间的明显划分

◆ 通常把 $H(u, v)$ 下降到其最大值的一定比例的点当作BLPF的截止频率点

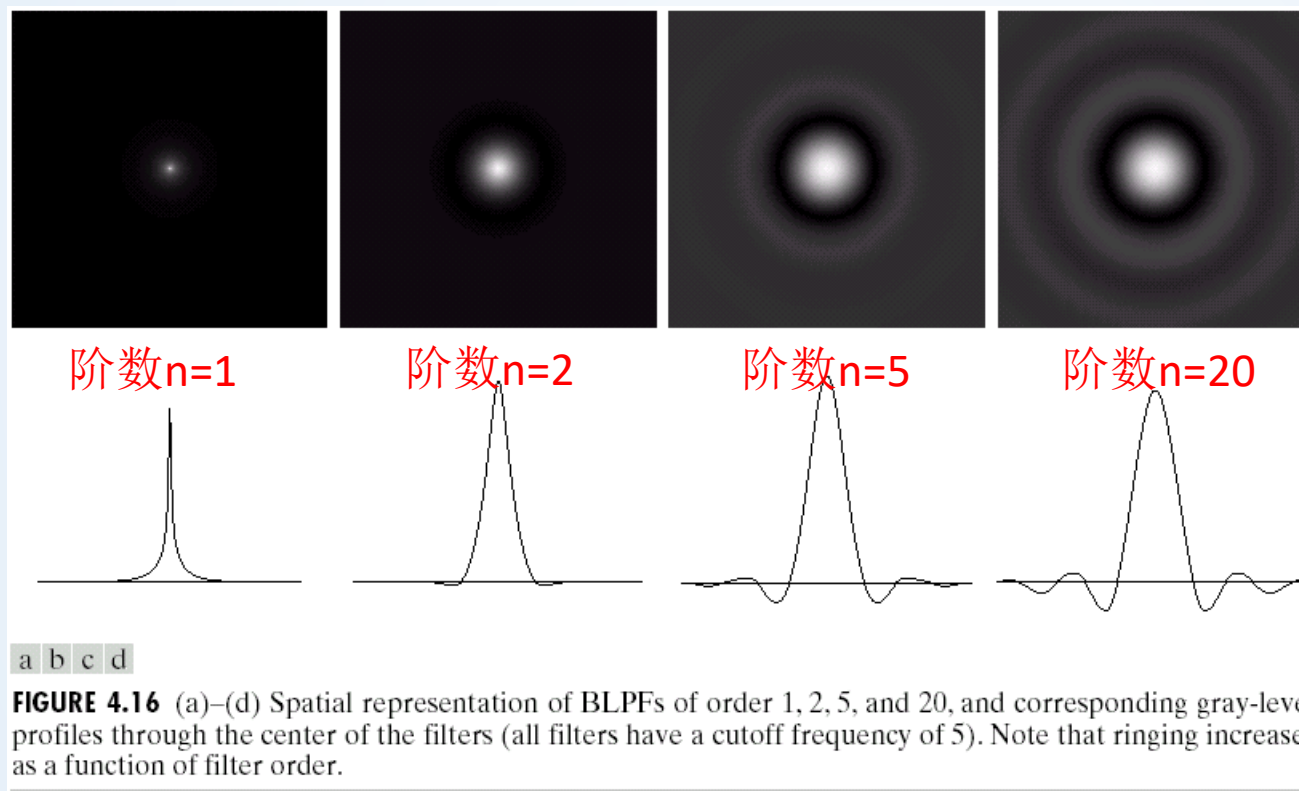
例如：对于一阶BLPF，若以 $H(u, v)$ 下降到50%时的频率为截止频率，则截止频率为 $D_0$





# 频率域平滑滤波器-Butterworth低通滤波器

## Butterworth低通滤波器



不同阶数BLPF的空域表达

随着阶数的增加，BLPF的传输函数出现越来越明显的环装震荡，表明振铃现象越来越明显

二阶BLPF处于有效低通滤波和可接受的振铃特征之间

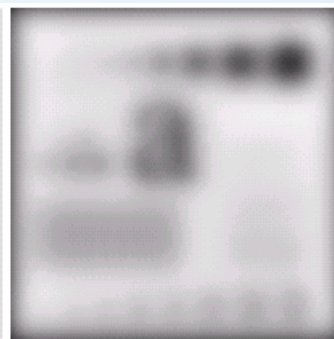
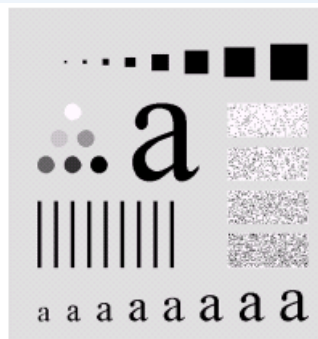


# 频率域平滑滤波器-Butterworth低通滤波器

## Butterworth低通滤波器

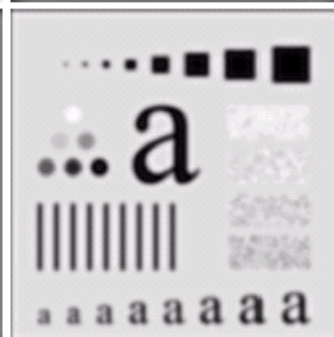
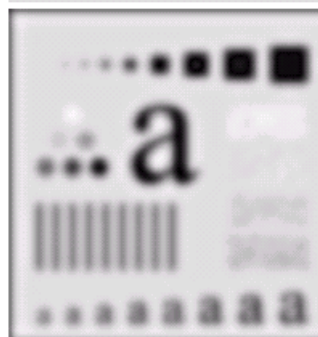
- ◆ 任何经二阶BLPF处理过的图像中都没有明显的振铃效果，这是滤波器在低频和高频之间的平滑过渡的结果
- ◆ 低通滤波是一个以牺牲图像清晰度为代价来减少干扰效果的修饰过程

原图



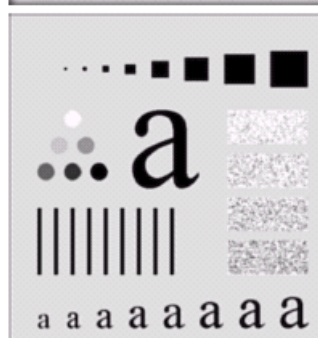
$D_0=5$

$D_0=15$



$D_0=30$

$D_0=80$



$D_0=230$

a  
b  
c  
d  
e  
f

FIGURE 4.15 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at radii of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Fig. 4.12.

二阶BLPF



# 频率域平滑滤波器-Butterworth低通滤波器

## Butterworth低通滤波结果

## 处理过的图像中几乎没有振铃效果



## 原图像



## BLPF结果



## ILPF结果



# 频率域平滑滤波器

---

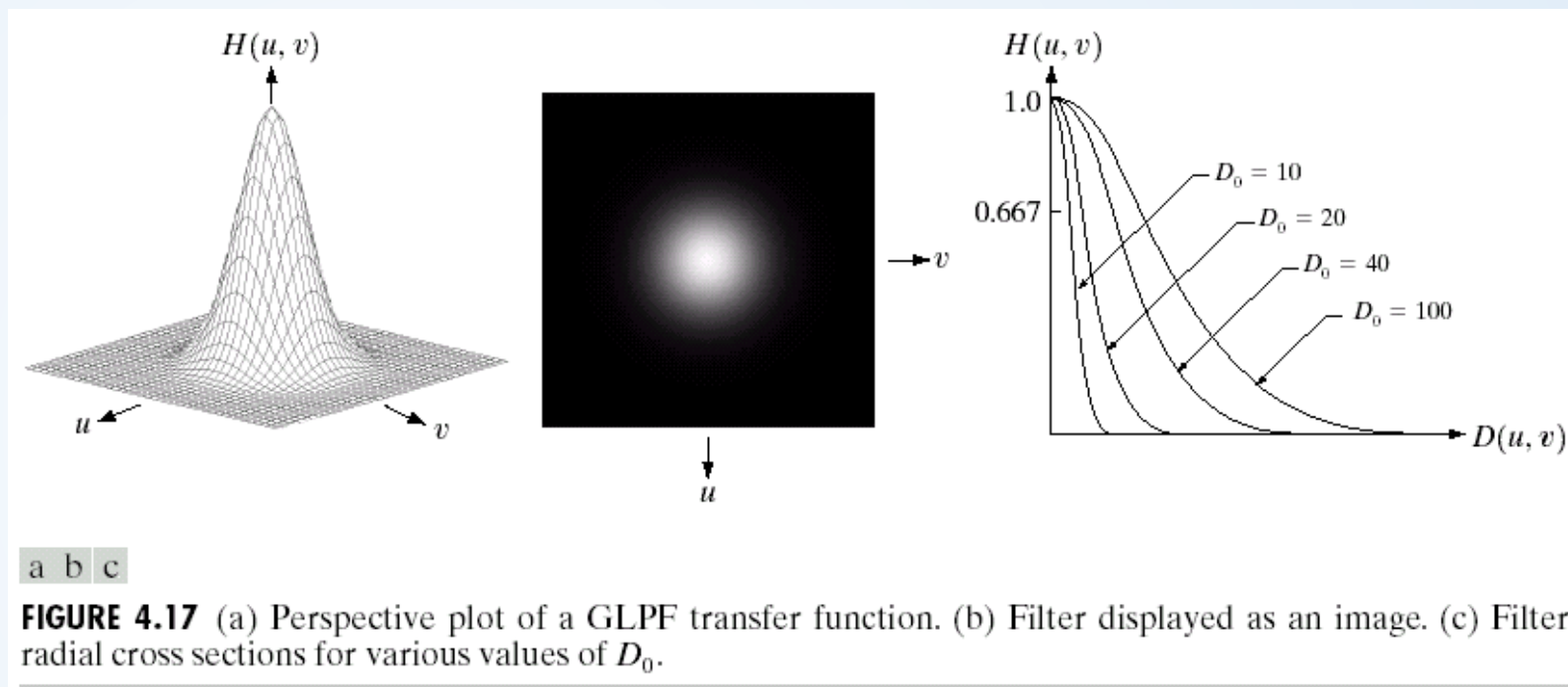
## 高斯低通滤波器



# 频率域平滑滤波器-高斯低通滤波器

## 高斯低通滤波器 (GLPF)

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$



GLPF没有振铃现象，但与阶数为2的BLPF相比，其通带宽些，因而平滑效果差些。





# 频率域平滑滤波器-高斯低通滤波器

a b

**FIGURE 4.19**

(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view).  
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



原图像：  
字符断裂

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



$D_0=80$ 的GLPF：  
断裂的字符被  
修复

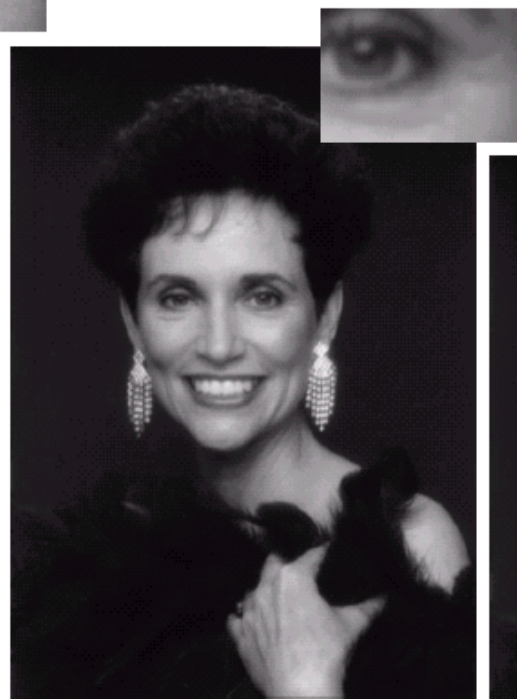


# 频率域平滑滤波器-高斯低通滤波器

原图像：眼  
角皱纹明显



$D_0=100$ 的GLPF：  
皱纹减少



$D_0=80$ 的GLPF：  
皱纹减少



a b c

**FIGURE 4.20** (a) Original image ( $1028 \times 732$  pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with  $D_0 = 100$ . (c) Result of filtering with a GLPF with  $D_0 = 80$ . Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).

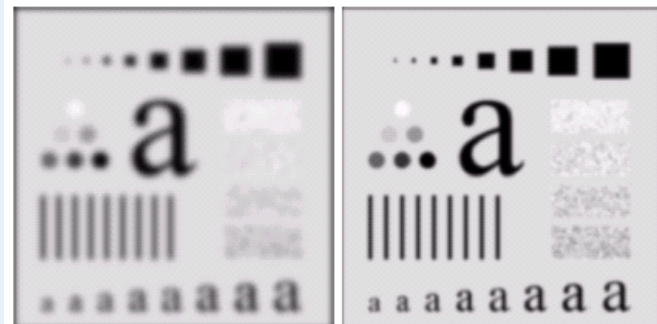
# 频率域平滑滤波器

原图



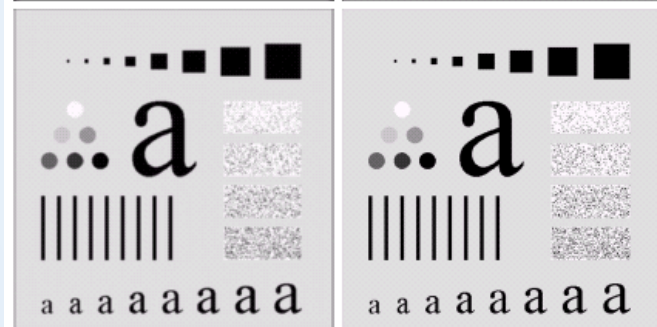
$D_0=5$

$D_0=15$



$D_0=30$

$D_0=80$



$D_0=230$

FIGURE 4.18 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with Gaussian lowpass filters with cutoff frequencies set at radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Figs. 4.12 and 4.15.

GLPF

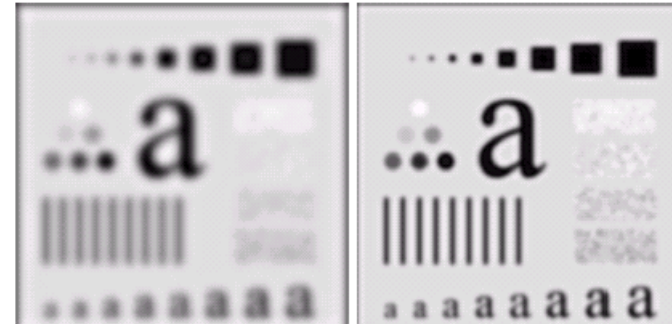
- GLPF无振铃现象;
- GLPF平滑效果比BLPF稍差

原图



$D_0=5$

$D_0=15$



$D_0=30$

$D_0=80$



$D_0=230$

a b  
c d  
e f

FIGURE 4.15 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at radii of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Fig. 4.12.

二阶BLPF



# 主要内容

Main Content

引言

低通滤波器

高通滤波器

带通-带阻滤波器

同态滤波器



# 高通滤波器

- ◆ 思想：边缘和其它灰度的急剧变化与高频成分相关。图像的锐化可在频率域通过高通滤波来实现。
- ◆ 要求：选择一个合适的  $H(u, v)$  以削弱  $F(u, v)$  低频分量的  $G(u, v)$
- ◆ 问题：如何保留高频，滤掉低频？
- ◆ 解决办法：低通滤波器的反操作，即高通滤波器

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

也就是：被低通滤波器过滤掉的频率均能通过高通滤波器



# 频率域锐化滤波器-高通滤波器

基本思想：低通滤波器的反操作，即

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

IHPF:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

BHPF:

$$H(u, v) = \frac{[D_0 / D(u, v)]^2}{1 + [D_0 / D(u, v)]^2}$$

GHPF:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$

被高通滤波的图像相  
对原始图像缺少灰度  
级的平滑过渡, 边缘  
等细节部分被突出



# 频率域锐化滤波器-高通滤波器

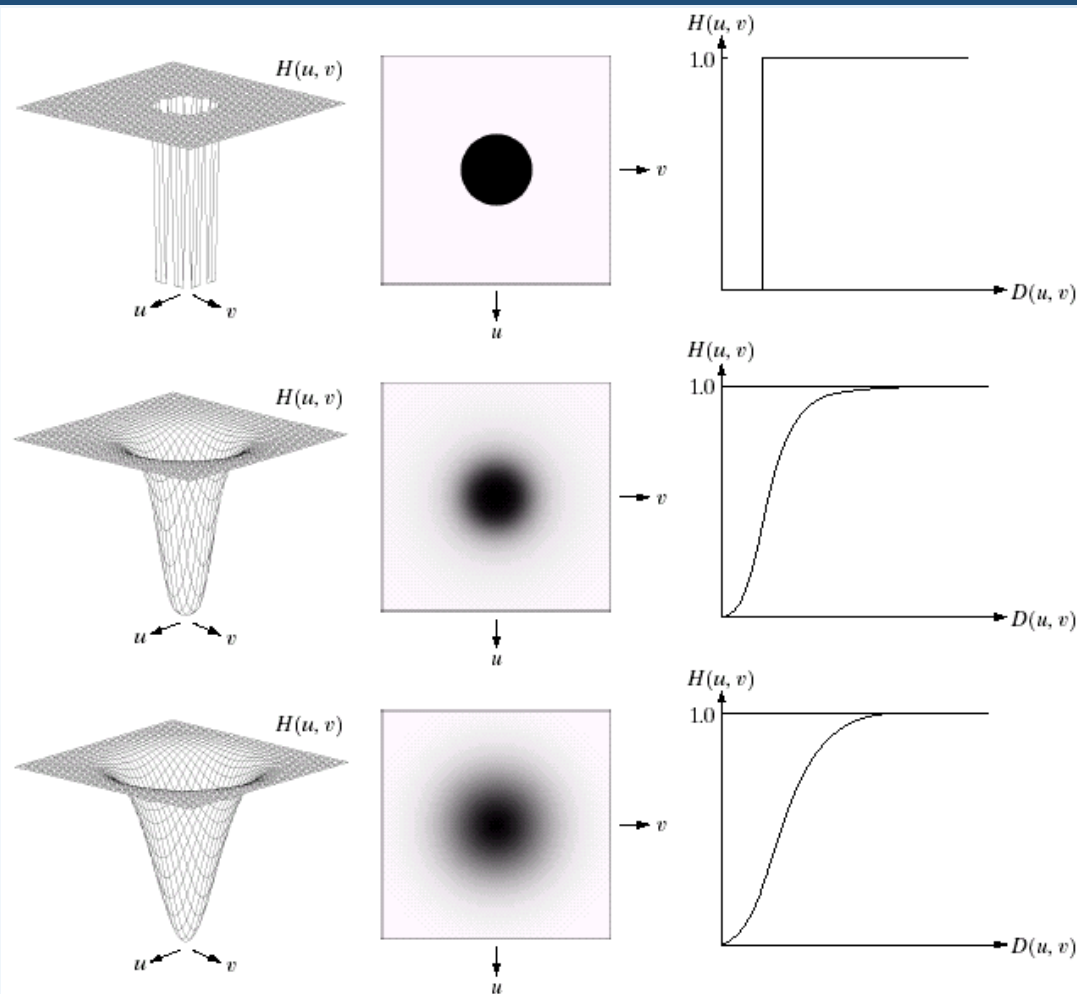
## 三种高通滤波器

Butterworth锐化滤波器为理想滤波器的尖锐化和高斯滤波器的完全光滑之间的一种过渡

理想高通滤波器 IHPF

Butterworth高通滤波器 BHPF

高斯高通滤波器 GHPF



a b c  
d e f  
g h i

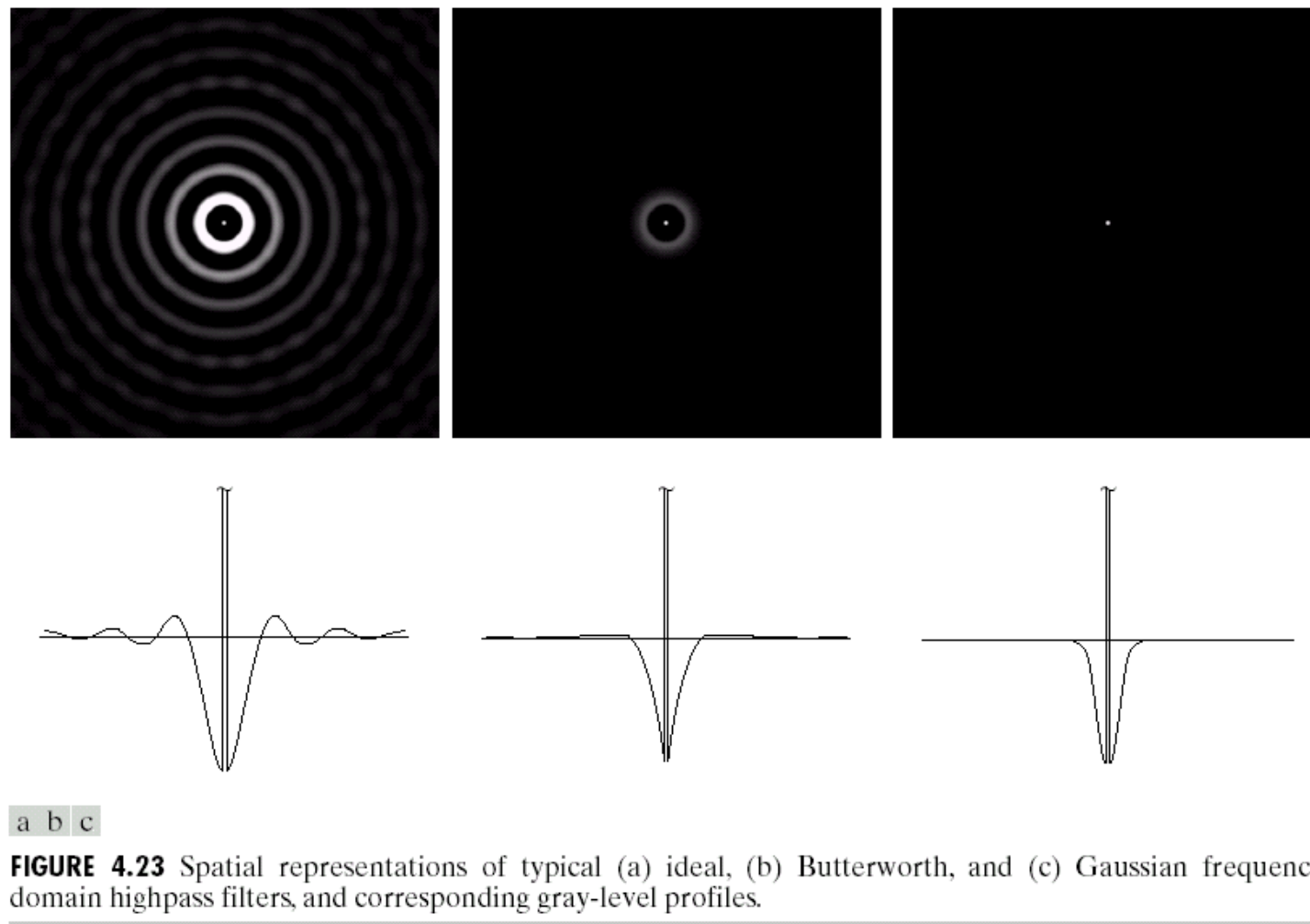
FIGURE 4.22 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.



# 频率域锐化滤波器-高通滤波器

三种高通滤波器的  
空域图像及轴向剖  
面表示

IHPF会产生振铃现象



IHPF

BHPF

GHPF





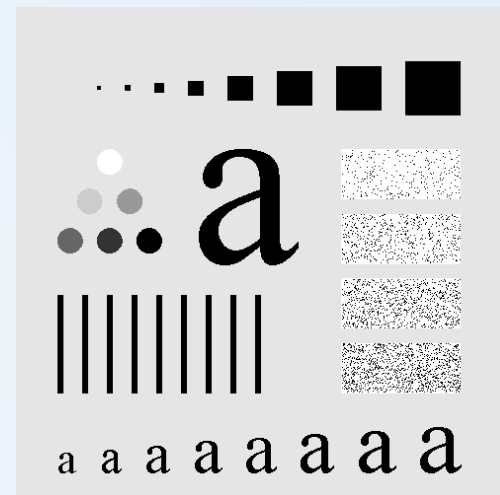
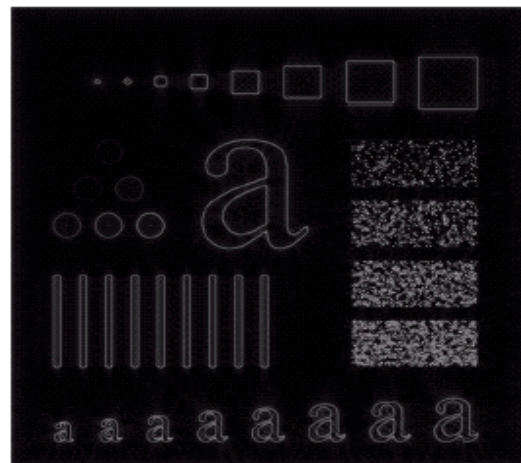
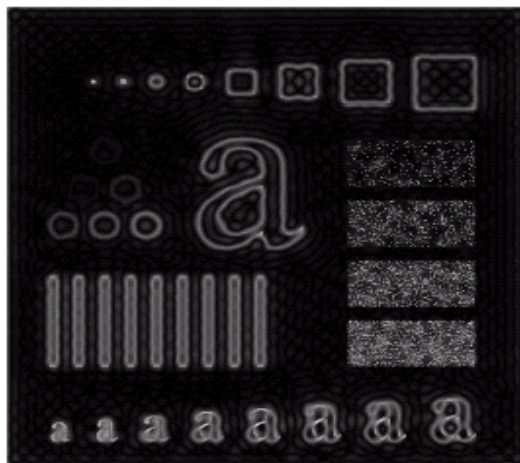
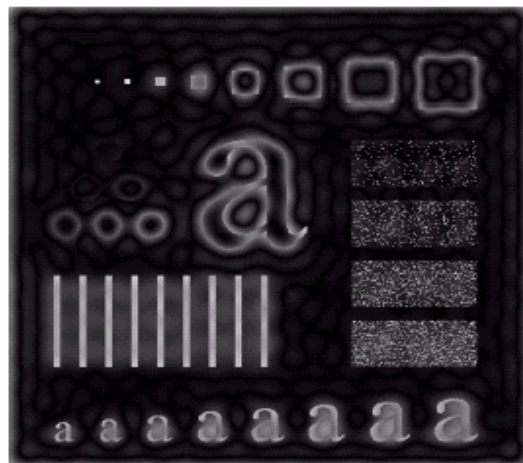
# 频率域锐化滤波器-高通滤波器

$D_0=15$

$D_0=30$

$D_0=80$

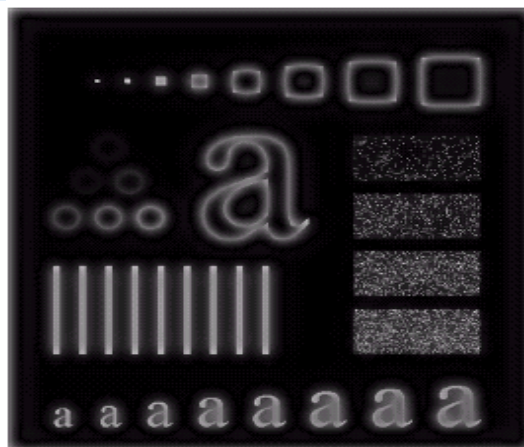
IHPF



◆ IHPF的振铃问题十分明显

◆ BHPF的结果比IHPF的结果平滑得多

BHPF



a b c

**FIGURE 4.25** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.11(a) using a BHPF of order 2 with  $D_0 = 15$ , 30, and 80, respectively. These results are much smoother than those obtained with an ILPF.



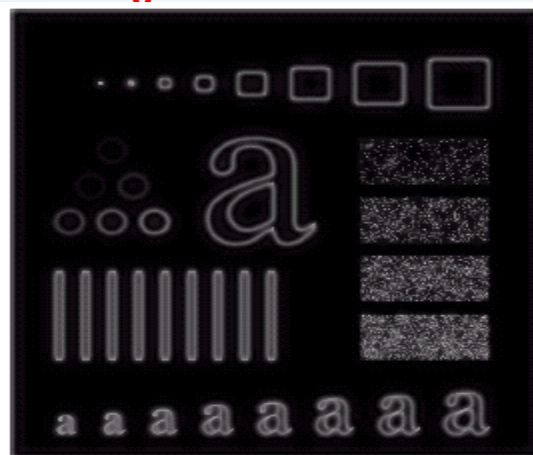
# 频率域锐化滤波器-高通滤波器

$D_0=15$

$D_0=30$

$D_0=80$

BHPF

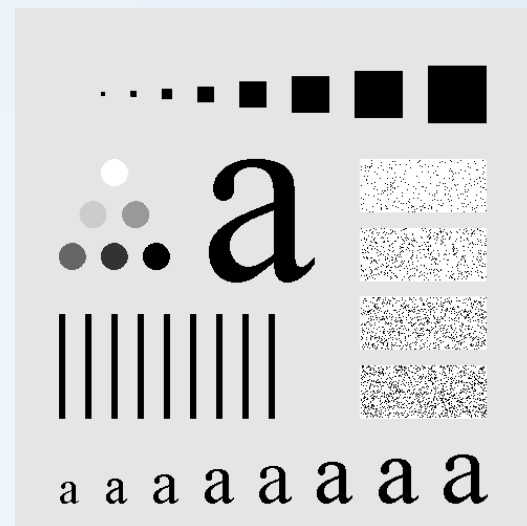


GHPF



a b c

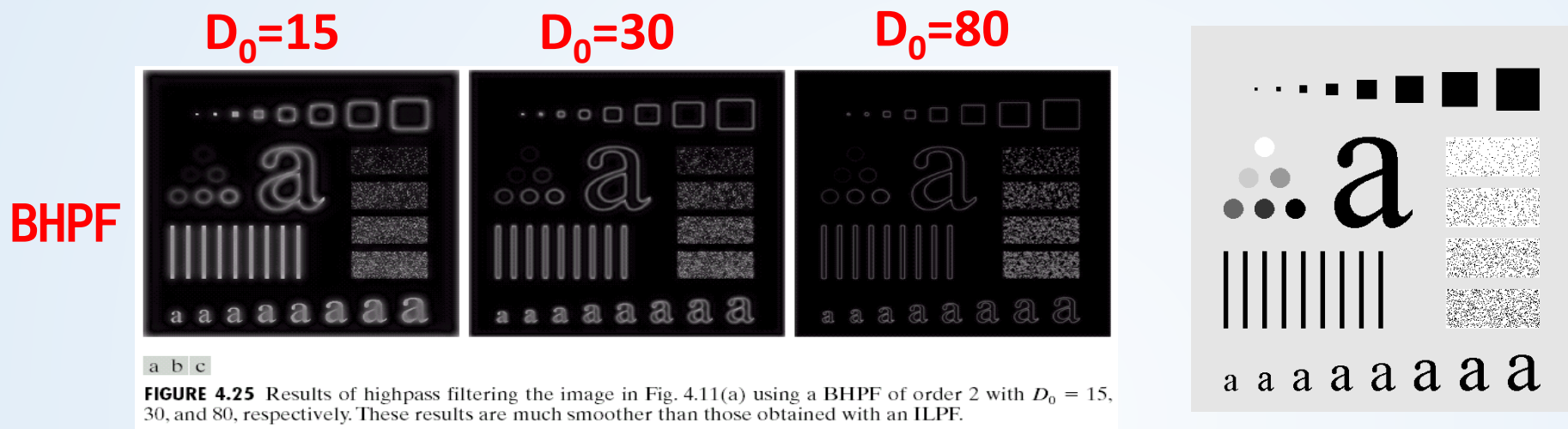
**FIGURE 4.26** Results of highpass filtering the image of Fig. 4.11(a) using a GHPF of order 2 with  $D_0 = 15$ , 30, and 80, respectively. Compare with Figs. 4.24 and 4.25.



◆ GHPF的结果比  
BHPF和IHPF的结  
果更平滑



# 高频增强滤波



**问题：**高通滤波将低频分量滤掉，导致滤波后的图像中边缘得到加强，但是平坦区域灰度很暗，甚至接近于黑色

**解决办法：高频增强滤波**

- 对频域高通滤波器传输函数 **乘以一个大于1的系数**，并 **加一个常数**，以提升高频成分，并且把一些低频分量加回去
- 既能保持光滑区域灰度，又能改善边缘区域的对比度





# 高频增强滤波

- 频域滤波:  $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$
- 高频增强传输函数:  $H_e(u, v) = k \times H(u, v) + c$
- 高频增强输出图的傅里叶变换:

$$G_e(u, v) = k \times G(u, v) + c \times F(u, v)$$

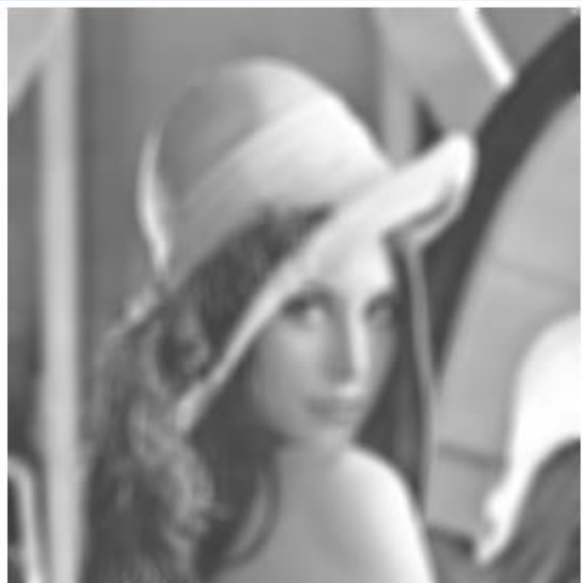
- 反变换:

$$g_e(x, y) = k \times g(x, y) + c \times f(x, y)$$

- 在原始图像的基础上叠加一些高频成分
- 既保留了原图的灰度层次, 又锐化了边缘



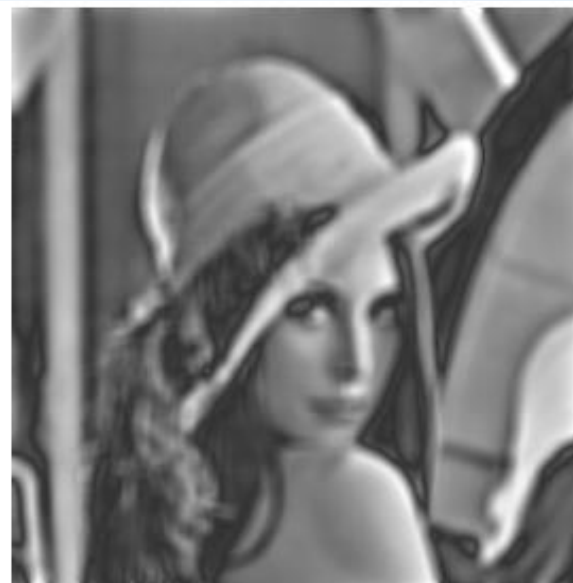
# 高频增强滤波



(a)



(b)



(c)

(a) 原始模糊图像

(b) 1阶Butterworth高通滤波器处理的结果

(c) 高通滤波增强的结果 ( $c=0.5$ ) : 边缘增强, 层次更丰富

# 主要内容

Main Content

引言

低通滤波器

高通滤波器

带通-带阻滤波器

同态滤波器



# 带通-带阻滤波器

## 带通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) < \underline{D_0} - \underline{W}/2 \\ 1 & D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 0 & D(u, v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$

截止频率      圆环带的宽度

允许某一范围内的  
频率成分通过

例 5.4.1 放射对称的带通滤波器的透视示意图

图 5.4.1 是一个放射对称的带通滤波器  $H(u, v)$  的透视示意图, 图中各字母的含义见式 (5.4.1)。

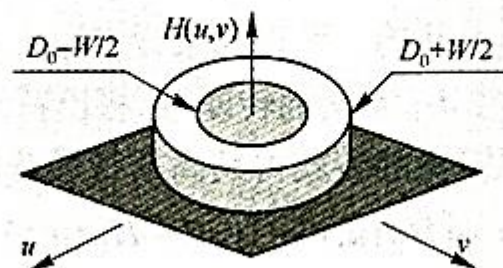
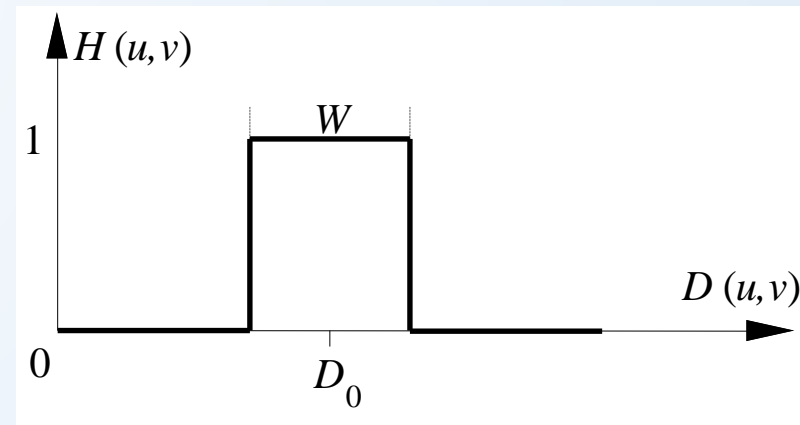
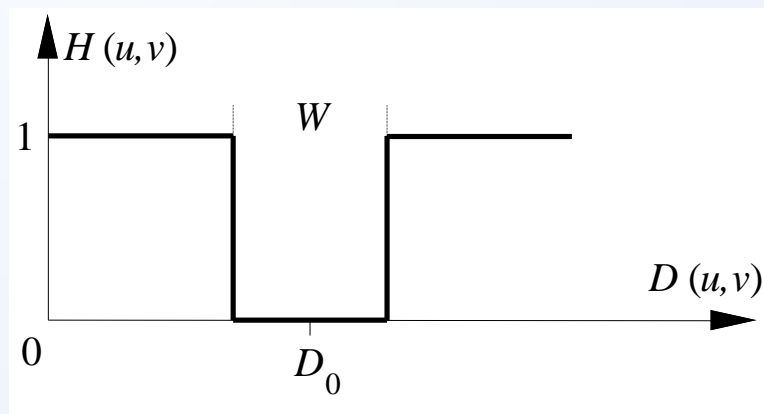


图 5.4.1 放射对称的带通滤波器透视图




$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 - W/2 \\ 0 & D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 1 & D(u, v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$

A 3D plot of a function  $z = f(x, y)$ . The plot shows a red cylindrical surface with a blue circular top and a red square base. The vertical axis (z) ranges from 0 to 1, with major ticks at 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, and 1. The horizontal axes (x and y) range from 0 to 80, with major ticks at 0, 20, 40, 60, and 80. The surface is defined by the equation  $z = 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{80^2}}$ .





## 带通-带阻滤波器

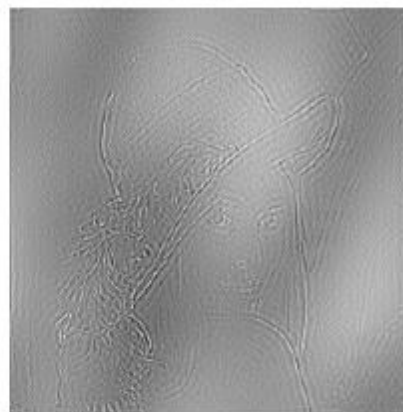
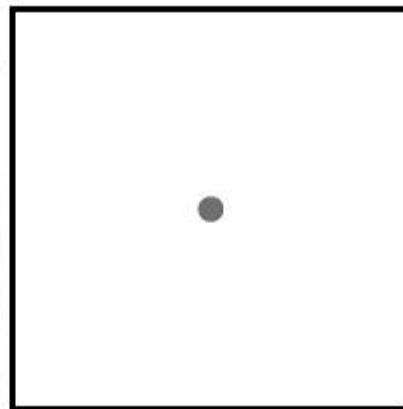
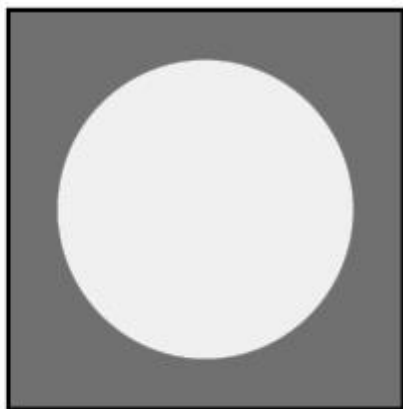


图 6.4.4 不同带通滤波示例

(a)原始图

### (b)低通滤波器示意图

### (c)低通滤波处理后的图像

### (d)高通滤波器示意图

### (e)高通滤波处理后的图像

### (f)带通滤波器示意图

### (g)带通滤波处理后的图像

### (h)带阻滤波处理后的图像

# 主要内容

Main Content

引言

低通滤波器

高通滤波器

带通-带阻滤波器

同态滤波器





# 同态滤波器

- 在生活中会得到这样的图像，它的**动态范围很大**（黑的很黑，白的很白），而我们**感兴趣的部分的灰度又很暗**（灰度范围很小），图像细节没有办法辨认
- 采用一般的灰度级线性变换法不可行
  - 扩展灰度级虽然可以提高图像的反差，但会使得动态范围变的更大
  - 压缩灰度等级，虽然可以减少动态范围，但物体灰度层次和细节就更无法分辨了







# 同态滤波器

- 图像的同态滤波把频率过滤和灰度变换结合起来的一种图像处理方法
- 以图像的照度/反射率模型作为频域处理的基础，通过调整图像灰度范围和增强对比度来改善图像的质量。
- 该方法能够消除图像上照明不均的问题，增强暗区的图像细节，同时又不损失亮区的图像细节





# 同态滤波器

成像模型：

$$f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y),$$

其中， $i(x, y)$ 为照度分量， $r(x, y)$ 为反射分量。

图像的灰度由**光照函数**（照度分量）和**反射函数**（反射分量）共同决定：

- **光照强度**一般具有一致性，在空间上通常会有缓慢变化的性质，与**低频分量**相关
- 不一样的材料的**反射率**差异较大，经常会引起反射光的急剧变化，从而使图像的灰度值发生变化，这种变化与**高频分量**有关



# 同态滤波器

成像模型:  $f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$

- 减弱入射光  $i(x, y)$  可以起到缩小图像灰度范围的作用
- 增强反射光  $r(x, y)$  可以起到提高图像对比度的作用
- 由于图像中的照度分量  $i(x, y)$  与反射分量  $r(x, y)$  之间是相乘关系，如果直接将  $f(x, y)$  变换到频域， $i(x, y)$  和  $r(x, y)$  对应的频率分量卷积在一起，无法实现对照度分量和反射分量的控制



# 同态滤波器

- 如何将信号的相乘关系转化为相加关系？

- 取对数

设

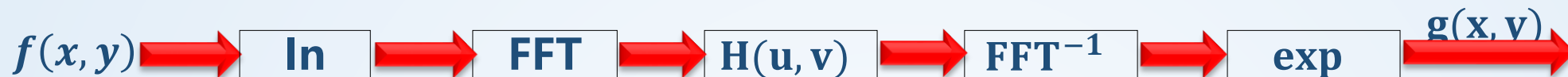
$$\begin{aligned} z(x, y) &= \ln f(x, y) \\ &= \ln [i(x, y)r(x, y)] \\ &= \ln i(x, y) + \ln r(x, y) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\{z(x, y)\} &= \mathfrak{I}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{I}\{\ln r(x, y)\} \\ Z(u, v) &= F_i(u, v) + F_r(u, v) \end{aligned}$$



# 同态滤波器



(1) 对 $f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$ 的两边同时取对数（转换为相加关系），即

$$\ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

(2) 两边取Fourier变换,  $F(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$

(3) 设用一个频域增强函数 $H(u, v)$ 去处理 $F(u, v)$ , 得

$$S(u, v) = H(u, v)F(u, v) = H(u, v)I(u, v) + H(u, v)R(u, v)$$



$$S(u, v) = H_L(u, v)I(u, v) + H_H(u, v)R(u, v)$$

(4) 将处理结果反变换到空域, 得  $s(x, y) = F^{-1}[S(u, v)]$

增强后的图像: 照度分量 + 反射分量, 空域也变成了相加操作

(5) 再将处理结果两边取指数（因为前面取了对数），得

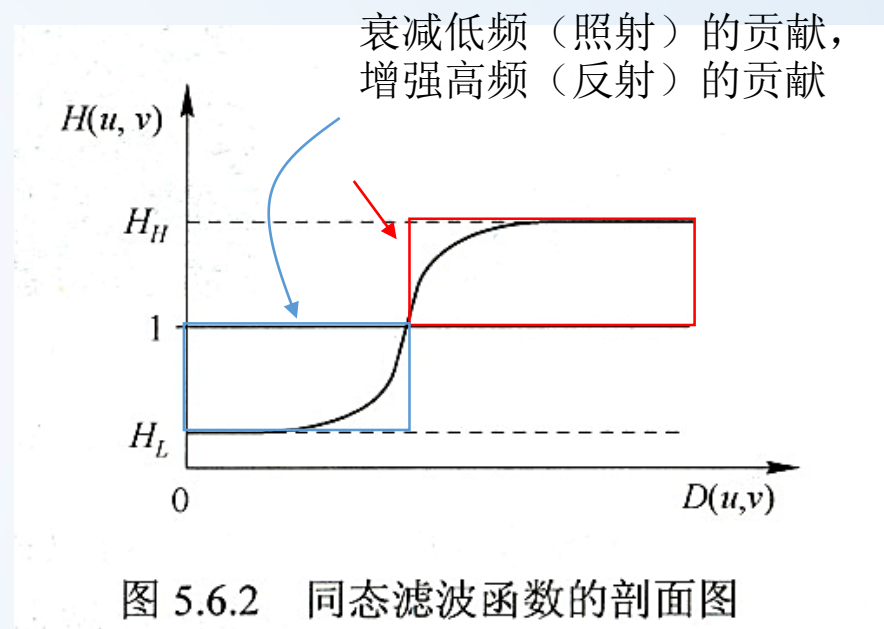
$$g(x, y) = \exp[s(x, y)]$$





# 同态滤波器

- $H(u, v)$  称为**同态滤波函数**，它分别作用于照度分量和反射分量上
- $H(u, v)$  一方面减弱了图像的低频分量，加强了高频分量，相当于同时压缩了图像的整体动态范围（减小低频分量）和增加了图像相邻各部分之间的对比度（加强高频分量）。

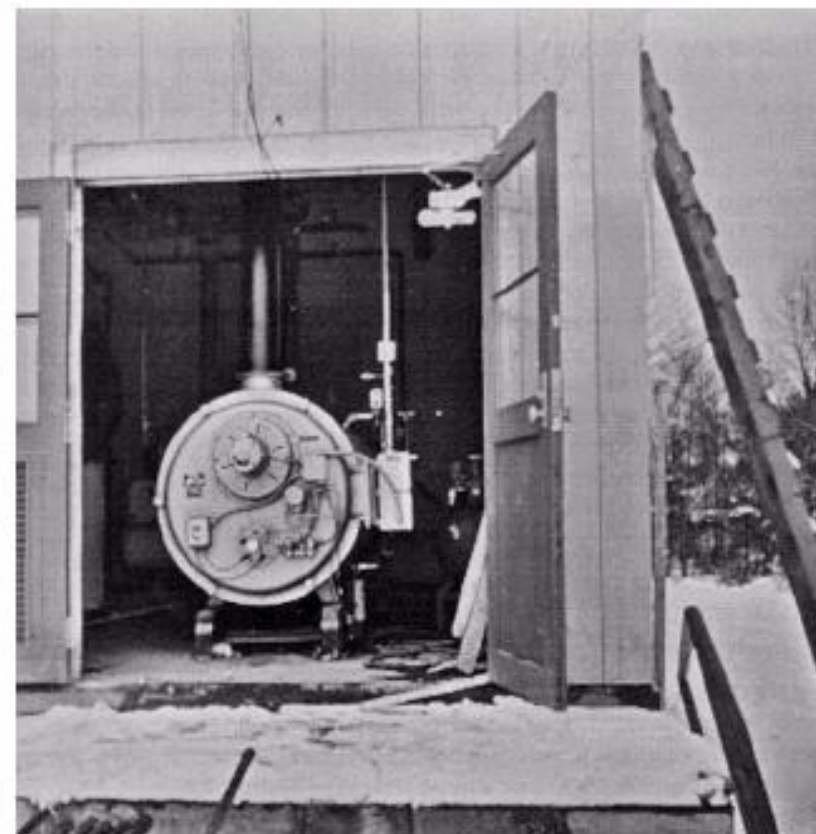




# 同态滤波器

a b

**FIGURE 4.33**  
(a) Original image. (b) Image processed by homomorphic filtering (note details inside shelter).  
(Stockham.)





武汉大学  
*Wuhan University*

谢谢!

2018.10.17.

