# 矩阵分析与应用

## 第二讲

## 线性子空间

2006-12-1

# 本讲主要内容

- 线性子空间的定义
- 线性子空间的性质
- 线性子空间的交
- 线性子空间的和
- 子空间交与和的有关性质

# 线性子空间

设$V_1$是数域K上的线性空间V上一个非空子集合，且对已有的线性运算满足以下条件：

1. 如果 $x, y \in V_1$ ，则 $x + y \in V_1$ ；
2. 如果 $x \in V_1, k \in K$ ， $kx \in V_1$

则称$V_1$是V的线性子空间或子空间

- 线性子空间也是线性空间
- 非零线性空间的平凡子空间：线性空间自身以及零空间
- 线性子空间的维数小于等于线性空间的维数

## 线性子空间$V_1$也是线性空间

证明：必要性由定义直接得出

充分性：各运算律已在V中定义，我们只需证明

$$\exists \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}_1 \qquad \forall x \in V_1, \exists -x \in V_1$$

实际上，$\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1$

$$\forall \boldsymbol{x} \in V_1, -1 \in \boldsymbol{K} \qquad -\boldsymbol{x} = (-1)\,\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1$$

所以线性子空间$V_1$也是线性空间

$V_1$是数域K上的线性空间V上一个非空子空间

$\Longleftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1, \forall k, l \in \boldsymbol{K}$ 有 $\exists k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1$

- 充分性:设 $k=l=1$，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1$

  取$l=0$，$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1, \forall k \in \boldsymbol{K} \Rightarrow k\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1$

- 必要性: $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1, \forall k \in \boldsymbol{K} \Rightarrow k\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1$ （数乘封闭）

  $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1, \forall l \in \boldsymbol{K} \Rightarrow l\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1$ （数乘封闭）

  故 $k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1$ （加法封闭）

#

n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的全部解向量所成集合V对于通常的向量加法和数量乘法构成的线性空间是$n$维向量空间 $R^n$ 的一个子空间，称V为方程组的解空间

- 方程组的解空间W的维数＝n－秩(A)，
- 方程组的一个基础解系就是解空间V的一组基

n元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = c_{2,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{ss}x_s = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n \end{cases}$$

变形后，用n-s组数表示自由未知量 $x_{s+1},\cdots,x_n$

$(1,0,\cdots,0)$　$(0,1,\cdots,0)$　$\cdots$　$(0,0,\cdots,1)$

得到n-s个解向量

$(\gamma_{11},\gamma_{12},\cdots,\gamma_{1s}1,0,\cdots,0)$ $\cdots$ $(\gamma_{s1},\gamma_{s2},\cdots,\gamma_{ss},0,0,\cdots,1)$

这个解向量组就是方程组的解空间的基

判断$\mathbf{R}^n$的下列子集合哪些是子空间：

$$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0, x_i\in R\}$$

$$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1, x_i\in R\}$$

$$V_3=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)\mid\ x_i\in R, i=1,2,\cdots,n-1\}$$

若为$\mathbf{R}^n$的子空间，求出其维数与一组基.

解：$\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_3$是$\mathbf{R}^n$的子空间，$\mathbf{V}_2$不是$\mathbf{R}^n$的子空间.

事实上，$\mathbf{V}_1$是$n$元齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \qquad ①$$

的解空间. 所以，维$\mathbf{V}_1$＝n－1，①的一个基础解系

$\eta_1=(1,-1,0,\cdots,0),\quad \eta_2=(1,0,-1,0,\cdots,0),\quad \cdots\cdots,$

$\eta_{n-1}=(1,0,\cdots,0,-1)$ 就是$V_1$的一组基.

而在$V_2$中任取两个向量 $x,y$，设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

则 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$

但是 $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)$

$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)=1+1=2$$

$\therefore\quad x+y\notin V_2,$ 故$V_2$不是$R^n$的子空间.

下证$V_3$是$R^n$的子空间.

首先 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)\in V_3$, $\therefore V_3\neq\varnothing$

其次, $\forall x,y\in V_3,\forall k\in K$,

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},0)$

则有 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_{n-1}+y_{n-1},0)\in V_3$

$$kx=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_{n-1},0)\in V_3$$

故，$V_3$为$R^n$的一个子空间，且维$V_3$＝n－1 ，

$$\varepsilon_i=(0,\cdots,0,\underset{i}{1},0\cdots,0),\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

就是$V_3$的一组基.

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是数域K上的线性空间V的一组向量，所有可能的线性组合的集合

$$\boldsymbol{V}_1 = \{k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n\} \quad k_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n$$

称为由$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 生成(或张成)的子空间,记为

$$L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \{k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n\}$$

如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ $m < n$ 是线性无关组，

则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 是生成的子空间的基

零子空间就是零元素生成的子空间

例：设V为数域K上的线性空间， $x_1, x_2, \cdots, x_m \in V$

$$V_1 = \{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m \mid k_i \in P, i = 1,2,\cdots,m\}$$

则$V_1$关于V的运算作成V的一个子空间.

证： $\forall x \in$ ⇒ $x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m$

$_2 x_2 + \cdots + l_m x_m$

即 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一切线性组合所成集合.

$\forall k, l \in$ $x_1 + \cdots + (kk_m + ll_m) x_m$

$\therefore kx + ly \in V_1$

因此，$V_1$关于V的运算作成V的一个子空间

扩基定理

定理：设$V_1$为 $n$ 维线性空间 V的一个 $m$ 维子空间，

$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为$V_1$的一组基，则这组向量必定可扩充

为V的一组基．即在V中必定可找到$n-m$个向量

$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ ，使 $x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组基．

证明：对$n-m$作数学归纳法．

当 $n-m=0$时，即 $n=m$，

$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 就是V的一组基． 定理成立．

假设当$n-m=k$时结论成立．

下面我们考虑 $n-m=k+1$ 的情形.

既然 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 还不是V的一组基，它又是线性无关的，那么在$V^n$中必定有一个向量 $x_{m+1}$不能被 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性表出，把它添加进去，则

$x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 必定是线性无关的.

由定理， 子空间 $L(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ 是$m+1$维的.

因 $n-(m+1)=(n-m)-1=(k+1)-1=k$,

由归纳假设，$L(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$的基 $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 可以扩充为整个空间$V^n$的一组基. 由归纳原理得证.

■矩阵的值域

设 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的n个列向量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 则

$$\boldsymbol{R}(\mathbf{A})=L\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right)=\left\{y\mid y=\mathbf{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\right\}$$

是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间，称为矩阵A的值域，或列空间

■矩阵的零空间（核空间）

设 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的n个列向量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 则

$$N(\mathbf{A})=\left\{\boldsymbol{x}\mid\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n\right\}$$

是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间，称为矩阵A的零空间，其维数为A的零度，记为 $n(\mathbf{A})$

- 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 求A的秩和零度

显然A的秩为2，即 $\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$

又由 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0$ ，可以解得

可以得到 $x=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}^T t$ $\quad n(\mathbf{A})=1$

同样可以得到 $\operatorname{rank}\mathbf{A}^T=2,\quad n\left(\mathbf{A}^T\right)=0$

- 若 $\mathbf{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ ，有

$$\operatorname{rank}\mathbf{A}+n(\mathbf{A})=n \quad n(\mathbf{A})-n\left(\mathbf{A}^T\right)=n-m$$

**定理：** 设$V_1$、$V_2$为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1 \cap V_2 = \{a \mid a \in V_1 \text{且} a \in V_2\}$$

也为V的子空间，称之为$V_1$与$V_2$的**交空间**.

事实上，$\because 0 \in V_1, 0 \in V_2$，$\therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$

任取 $x, y \in V_1 \cap V_2$，即 $x, y \in V_1$，且$x, y \in V_2$，

则有 $x + y \in V_1, x + y \in V_2$，$\therefore$ $x + y \in V_1 \cap V_2$

同时有 $kx \in V_1, kx \in V_2$，$\therefore$ $kx \in V_1 \cap V_2$，$\forall k \in K$

故 $V_1 \cap V_2$为V的子空间.

**定理：** 设$V_1$、$V_2$为线性空间V的子空间，则集合

$$V_1+V_2=\{x_1+x_2\,|\,x_1\in V_1,x_2\in V_2\}$$

也为V的子空间，称之为$V_1$与$V_2$的和空间.

事实上，$\because 0\in V_1,0\in V_2$, $\therefore 0=0+0\in V_1+V_2\neq\varnothing$

任取 $x,y\in V_1+V_2$， 设 $x=x_1+x_2,y=y_1+y_2$,

其中，$x_1,y_1\in V_1,x_2,y_2\in V_2$，则有

$$x+y=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\in V_1+V_2$$

$$kx=k(x_1+x_2)=kx_1+kx_2\in V_1+V_2,\quad \forall k\in K$$

- 子空间的交满足交换率与结合率

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1,$$

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$$

- 子空间的和满足交换率与结合率

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1,$$

$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$$

注意：

V的两子空间的并集未必为V的子空间．例如

$$V_1=\{(a,0,0)\mid a\in R\},\ V_2=\{(0,b,0)\mid b\in R\}$$

皆为$R^3$的子空间，但是它们的并集

$$V_1\cup V_2=\{(a,0,0),(0,b,0)\mid a,b\in R\}$$

$$=\{(a,b,0)\mid a,b\in R\text{且}a,b\text{中至少有一是}0\}$$

并不是$R^3$的子空间．因为它对$R^3$的运算不封闭，如

$$(1,0,0),\ (0,1,0)\in V_1\cup V_2$$

但是 $(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin V_1\cup V_2$

# 子空间的交与和的有关性

包含在V1和V2中的最大的子空间

1、设 $V_1, V_2, W$ 为线性空间V的子空

1）若 $W \subseteq V_1, W \subseteq V_2$，则 $W \subseteq V_1 \cap V_2$.

2）若 $V_1 \subseteq W, V_2 \subseteq W$，则 $V_1 + V_2 \subseteq W$.

包含V1和V2中的最小的子空间

2、设 $V_1, V_2$ 为线性空间V的子空间，则以下三条件等价:

1) $V_1 \subseteq V_2$

2) $V_1 \cap V_2 = V_1$

3) $V_1 + V_2 = V_2$

3、 $x_1,x_2,\cdots,x_s;y_1,y_2,\cdots,y_t$ 为线性空间V中两组向量，则 $L(x_1,x_2,\cdots,x_s)+L(y_1,y_2,\cdots,y_t)$

$$=L(x_1,x_2,\cdots,x_s,y_1,y_2,\cdots,y_t)$$

## 4、维数公式（定理1.6）

设 $V_1,V_2$ 为线性空间V的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

或 $$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

证：设 $\dim V_1 = n_1$，$\dim V_2 = n_2$，$\dim(V_1 \cap V_2) = m$

取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $x_1, x_2, \cdots, x_m$

由扩基定理，它可扩充为 $V_1$ 的一组基

$$x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-m}$$

它也可扩充为 $V_2$ 的一组基

$$x_1, x_2, \cdots, x_m, z_1, z_2, \cdots, z_{n_2-m}$$

即有 $V_1 = L(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-m})$

$$V_2 = L(x_1, x_2, \cdots, x_m, z_1, z_2, \cdots, z_{n_2-m})$$

所以，有

$$V_1+V_2=L(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_{n_1-m},z_1,z_2,\cdots,z_{n_2-m})$$

下证 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_{n_1-m},z_1,z_2,\cdots,z_{n_2-m}$

线性无关． 假设有等式

$$k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}$$

$$+q_1z_1+\cdots+q_{n_2-m}z_{n_2-m}=0$$

令 $x=k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}$

$$=-q_1z_1-\cdots-q_{n_2-m}z_{n_2-m}$$

则有 $x \in V_1$且$x \in V_2$，于是$x \in V_1 \cap V_2$，

即 $x$可被 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性表出

令 $x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_m x_m$,

则 $l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_m x_m = -q_1 z_1 - \cdots - q_{n_2-m} z_{n_2-m}$

即 $l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_m x_m + q_1 z_1 + \cdots + q_{n_2-m} z_{n_2-m} = 0$

由于 $x_1, x_2, \cdots, x_m, z_1, z_2, \cdots, z_{n_2-m}$ 线性无关，得

$$l_1 = l_2 = \cdots\cdots = l_m = q_1 = \cdots\cdots = q_{n_2-m} = 0,$$

因而 $x = 0$ 从而有

$$k_1x_1+\cdots+k_mx_m+p_1y_1+\cdots+p_{n_1-m}y_{n_1-m}=0$$

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_{n_1-m}$ 线性无关，得

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$$

所以，$x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_{n_1-m},z_1,z_2,\cdots,z_{n_2-m}$

线性无关．因而它是 $V_1+V_2$ 的一组基．

$$\therefore \dim(V_1+V_2)=m+(n_1-m)+(n_2-m)=n_1+n_2-m$$

$$=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

#

**注意**：从维数公式中可以看到，子空间的和的维数往往比子空间的维数的和要小.

例如，在$R^3$中，设子空间

$$V_1 = L(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\ V_2 = L(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$$

其中，$\varepsilon_1 = (1,0,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,0),\ \varepsilon_3 = (0,0,1)$

则，$\dim V_1 = 2,\quad \dim V_2 = 2$

但，$V_1 + V_2 = L(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + L(\varepsilon_2,\varepsilon_3) = L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = R^3$

$$\dim(V_1 + V_2) = 3$$

由此还可得到，$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$，$V_1 \cap V_2$ 是一直线.

**推论**：设 $V_1,V_2$为$n$维线性空间V的两个子空间，若 $\dim V_1+\dim V_2>n$，则 $V_1,V_2$必含非零的公共向量. 即 $V_1\cap V_2$中必含有非零向量.

证：由维数公式有

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$$

又 $V_1+V_2$是V的子空间，$\therefore$ $\dim(V_1+V_2)\le n$

若 $\dim V_1+\dim V_2>n$, 则 $\dim(V_1\cap V_2)>0.$

故$V_1\cap V_2$中含有非零向量.

例1、在 $R^n$ 中，用 $V_1,V_2$ 分别表示齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad ①$$

与

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases} \quad ②$$

的解空间，则 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次线性方程组③

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases} \qquad ③$$

的解空间.

证：设方程组①,②,③分别为

$$AX = 0, \qquad BX = 0, \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$$

设W为③的解空间，任取 $X_0 \in V$，有

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0,$$ 从而 $$\begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = 0,$$ 即

$$AX_0 = BX_0 = 0. \quad \therefore \quad X_0 \in V_1 \cap V_2$$

反之，任 取，$X_0 \in V_1 \cap V_2$，则有

$$AX_0 = BX_0 = 0,$$ 从而 $$\begin{pmatrix} AX_0 \\ BX_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X_0 = 0,$$

$$\therefore \quad X_0 \in V$$

故 $V = V_1 \cap V_2.$

设$V_1,V_2$为线性空间V的两个子空间，由维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

有两种情形：

1) $\dim(V_1+V_2)<\dim V_1+\dim V_2$

此时 $\dim(V_1\cap V_2)>0,$

即，$V_1\cap V_2$必含非零向量.

2) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

此时 $\dim(V_1\cap V_2)=0,$

$V_1\cap V_2$不含非零向量，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$

**定义** 设 $V_1, V_2$ 为线性空间V的两个子空间，若和 $V_1+V_2$ 中每个向量 $x$ 的分解式

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$$

是唯一的，和 $V_1+V_2$ 就称为直和，记作 $V_1 \oplus V_2$.

① 分解式 $x = x_1 + x_2$ 唯一的，意即

若有 $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$， $x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$

则 $x_1 = y_1, x_2 = y_2$.

② 分解式唯一的，不是在任意两个子空间的和中都成立.

例2、设$R^{2\times 2}$的两个子空间为

$$V_1=\left\{A\mid A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$V_2=L(B_1,B_2), B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

求

1.将 $V_1+V_2$ 表示成生成子空间

2.求 $V_1+V_2$ 的基和维数

3.求 $V_1\cap V_2$ 的基和维数

解：先将$V_1$表示为生成子空间

齐次线性方程 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ 的基础解系

$\alpha_1 = [1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$ $\alpha_2 = [0\ \ 1\ \ 1\ \ 0]^T$ $\alpha_3 = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]^T$

所以$V_1$的一个基为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是$V_1 = L(A_1, A_2, A_3)$，从而有

$$V_1 + V_2 = L(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2)$$

矩阵组$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$在简单基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的坐标依次为

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 = [1\ \ 0\ \ 2\ \ 3]^T, \beta_2 = [1\ \ -1\ \ 0\ \ 1]^T$$

该向量组的一个最大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$

矩阵组的一个最大无关组为 $A_1, A_2, A_3, B_2$

构成了$V_1 + V_2$的一个基，且$\dim(V_1 + V_2) = 4$

设 $A\in V_1\cap V_2$ 则有数$k_1, k_2, k_3$,与数$l_1, l_2$,使得

$$A=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=l_1B_1+l_2B_2$$

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3-l_1B_1-l_2B_2=0$$

比较上式等号两端矩阵的对应元素的值

$$k_1-l_1-l_2=0 \qquad k_1+k_2+l_2=0$$

$$k_2+k_3-2l_1=0 \qquad k_3-3l_1-l_2=0$$

方程组的通解为$(k_1,k_2,k_3,l_1,l_2)^T=k(1,-1,3,1,0)$

可得 $A=l_1B_1+l_2B_2=k\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$

所以$V_1\cap V_2$的基为$\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$，且维数为1

例如，$\mathbf{R}^3$的子空间

$$V_1=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\ V_2=L(\varepsilon_2,\varepsilon_3),\ V_3=L(\varepsilon_3)$$

这里，$\varepsilon_1=(1,0,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0),\ \varepsilon_3=(0,0,1)$

在和$V_1+V_2$中，向量的分解式不唯一，如

$$(2,2,2)=(2,3,0)+(0,-1,2)=(2,1,0)+(0,1,2)$$

所以和 $V_1+V_2$不是直和.

而在和$V_1+V_3$中，向量(2,2,2)的分解式是唯一的，

$$(2,2,2)=(2,2,0)+(0,0,2)$$

事实上，对 $\forall\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in V_1+V_3$,

都只有唯一分解式：$\alpha=(a_1,a_2,0)+(0,0,a_3)$.

故 $V_1+V_2$是直和.

直和判断定理：$V_1+V_2$ 是直和的充要条件是

$$V_1\cap V_2=L(0)$$

证："$\Leftarrow$" 若 $x_1+x_2=0,\ x_1\in V_1,\ x_2\in V_2.$

则有 $x_1=-x_2\in V_1\cap V_2=\{0\}$

$\therefore x_1=x_2=0,$ 即$V_1+V_2$ 是直和.

"$\Rightarrow$" 任取 $x\in V_1\cap V_2,$

$$0=x+(-x),\ x\in V_1,\ -x\in V_2.$$

由于$V_1+V_2$是直和，零向量分解式唯一，

$\therefore\ x=-x=0.$ 故 $V_1\cap V_2=\{0\}.$

推论：和 $V_1+V_2$ 是直和

$$\Leftrightarrow \quad \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

证：由维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

有， $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

$$\Leftrightarrow \quad \dim(V_1\cap V_2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad V_1\cap V_2=\{0\}$$

$\Leftrightarrow \quad V_1+V_2$ 是直和.

总之，设 $V_1,V_2$ 为线性空间V的子空间，则下面四个条件等价:

1） $V_1+V_2$是直和

2） 零向量分解式唯一

3） $V_1\cap V_2=\{0\}$

4） $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_r$； $y_1, y_2, \cdots, y_s$分别是线性子空间

$V_1, V_2$ 的一组基，则

$V_1 + V_2$是直和 $\Leftrightarrow x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_s$ 线性无关.

证：由题设，$V_1 = L(x_1, x_2, \cdots, x_r)$，$\dim V_1 = r$

$$V_2 = L(y_1, y_2, \cdots, y_s), \ \dim V_2 = s$$

$$\therefore \ V_1 + V_2 = L(x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_s).$$

若$x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_s$线性无关，

则它是$V_1 + V_2$的一组基.　从而有

$$\dim(V_1+V_2)=r+s=\dim V_1+\dim V_2$$

$\therefore$ $V_1+V_2$ 是直和.

反之, 若 $V_1+V_2$ 直和，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2=r+s$$

从而 $x_1,x_2,\cdots,x_r,y_1,y_2,\cdots,y_s$ 的秩为 $r+s$ .

所以 $x_1,x_2,\cdots,x_r,y_1,y_2,\cdots,y_s$ 线性无关.

## 定义：

$V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间V的子空间，若和

$$\sum_{i=1}^{s} V_i = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$$ 中每个向量 $x$ 的分解式

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_s,\quad x_i \in V_i, i = 1,2,\ldots,s$$

是唯一的，则和 $\sum_{i=1}^{s} V_i$ 就称为直和，记作

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

## 判定方法：

设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 都是线性空间V的子空间，则下面四个条件等价:

1） $W = \sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和

2） 零向量分解式唯一，即

$x_1 + x_2 + \cdots + x_s = 0,\ x_i \in V_i$，必有 $x_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, s$

3） $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}, i = 1, 2, \cdots, s$

4） $\dim W = \sum_{i=1}^{s} \dim V_i$

# 作业

- P26：10、11、12