矩阵分析与应用

第七讲 范数理论及其应用之一

信息工程学院
吕旋阳

本讲主要内容

- 向量范数及l_p范数

定义：如果V是数域K上的线性空间，且对于V的任一向量x，对应一个实数值$\|x\|$，满足以下三个条件

1) 非负性： $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) 齐次性： $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|, \quad \forall k \in K$

3) 三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称$\|x\|$为V上向量x的范数，简称为向量范数。

注意：2)中$|k|$当K为实数时为绝对值，

当K为复数域时为复数的模。

向量的范数具有下列简单性质：

(1) 当 $\|x\| \neq 0$ 时，$\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$ $\quad \because \left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$

(2) $\forall x \in V$，$\|-x\| = \|x\|$ $\quad \because \|-x\| = |-1| \|x\| = \|x\|$

(3) $\forall x, y \in V$，$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$$\because \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

(4) $\forall x, y \in V$，$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

同样 $\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

例1：线性空间C^n，设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$

1： $\|x\|_1=\sum|\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2： $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3: $\|x\|=\max\limits_i|x_i|$ 是一种向量范数,记为 ∞ -范数

4： $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1\le p<\infty)$

是一种向量范数，记为p-范数或 l_p 范数

证明：向量p -范数 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty)$

证：性质（1）、（2）显然是满足的

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ，则

$$p = 1: \|x + y\|_1 = \sum |\xi_i + \eta_i| \le \sum |\xi_i| + |\eta_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$p > 1: x + y = \theta$ 时,结论成立; $x + y \ne \theta$ 时,应用Holder不等式

$$\sum |a_i b_i| \le \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} (p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

(利用 $(p-1)q = p$)

$$\left(\|x+y\|_p\right)^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p=\sum_{i=1}^{n}\left(|\xi_i+\eta_i|\bullet|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\right)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|\eta_i||\xi_i+\eta_i|^{p-1}\qquad \sum|a_ib_i|\le\left(\sum|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^P\right)^{1/P}\left(\sum\left(|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^P\right)^{1/P}\left(\sum\left(|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q}$$

$$\le\|x\|_p\left(\sum|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/q}+\|y\|_p\left(\sum|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/q}\qquad \frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$$

$$=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\left(\|x+y\|_p\right)^{p-1}$$

因此： $\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\ge\|x+y\|_p$

所以 $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad(1\le p<\infty)$ 是向量 x 的范数

例2：线性空间V^n中，任取它的一组基 $x_1,\cdots,x_n$

则对于任意向量x,它可以表示为

$$x=\xi_1 x_1+\cdots+\xi_n x_n$$

与 $\alpha=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T\in C^n$ 是同构的

所以 $\|x\|_p=\|\alpha\|_p$ 是V^n中元素x的p一范数

例3: $C[a,b]$为闭区间 $[a,b]$上的所有实连续函数所成线性空间，可以验证以下定义式均满足范数条件

$$\|f(x)\|_1=\int_a^b f(x)dt \qquad \|f(x)\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|f(x)|$$

$$\|f(x)\|_p=\left(\int_a^b |f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},1<p<\infty$$

例4：设A为n阶实对称正定矩阵，对$x\in \boldsymbol{R}^n$,

定义$\|x\|_A=\left(x^T A x\right)^{1/2}$ 称为加权范数或椭圆范数

由正定矩阵定义可知 $\|x\|_A=0 \Leftrightarrow x=0;\quad \|x\|_A\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

对任意数 $\alpha\in R$ ，有

$$\|\alpha x\|_A=\sqrt{(\alpha x)^T A\alpha x}=\sqrt{\alpha^2 x^T A x}=|\alpha|\sqrt{x^T A x}=|\alpha|\|x\|_A$$

由 A正定且实对称 $\Rightarrow \exists$ 正交矩阵Q，使得

$$Q^T A Q=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad \lambda_i>0, i=1,\cdots,n$$

定义 $B=diag(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})Q^T$ 可得 $A=B^T B$

$$\because \|x\|_A=\left(x^T B^T Bx\right)^{1/2}=\left[\left(Bx\right)^T\left(Bx\right)\right]^{1/2}=\|Bx\|_2$$

$$\therefore \|x+y\|_A=\|B(x+y)\|_2\leq\|Bx\|_2+\|By\|_2=\|x\|_A+\|y\|_A$$

例5：设$\|y\|_\alpha$ 是 C^m中的一个向量范数，给定矩阵

$A\in C^{m\times n}$ ，它的n个列向量线性无关。对于C^m

中的一个向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，规定$\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha$

则 $\|x\|_\beta$ 也是 C^m 中的一个向量范数。

证：1）设$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，由假设知$a_1,a_2,\cdots,a_n$

线性无关。

当 $x\neq 0$ $\quad Ax=(a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\neq 0$

又因为$\|y\|_\alpha$是C^m中的一个向量范数，有 $\|Ax\|_\alpha>0$

即 $\|x\|_\beta>0$

当 $x=0$ 时，$Ax=0$，所以 $\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha=0$

2） $\forall k\in C,\ \|kx\|_\beta=\|A(kx)\|_\alpha=\|kAx\|_\alpha=|k|\|Ax\|_\alpha=|k|\|x\|_\beta$

3） $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in C^n$ 有

$$\|x+y\|_\beta=\|A(x+y)\|_\alpha=\|Ax+Ay\|_\alpha\le\|Ax\|_\alpha+\|Ay\|_\alpha=\|x\|_\beta+\|y\|_\beta$$

所以，$\|x\|_\beta$ 是 C^n 中的一个向量范数。

由此可知，当给定 $A\in C^{m\times n}$ 时，可以由 C^m 中的一个向量范数确定 C^n 中的一个向量范数。

三、范数等价

定义：有限维线性空间 V^n 中任意两个向量范数 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$，如果存在着正常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \qquad (\forall x \in V^n)$

则称范数 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 等价

(1) 自反性：$1\cdot\|x\|_\alpha \le \|x\|_\alpha \le 1\cdot\|x\|_\alpha, \forall x \in V^n$

(2) 对称性：$\frac{1}{c_2}\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le \frac{1}{c_1}\|x\|_\alpha, \forall x \in V^n$

(3) 传递性：

$$\left.\begin{array}{l} c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \\ c_3\|x\|_\gamma \le \|x\|_\beta \le c_4\|x\|_\gamma \end{array}\right\} \quad \forall x \in V^n$$

$$\Rightarrow c_5\|x\|_\gamma \le \|x\|_\alpha \le c_6\|x\|_\gamma$$

例6：向量空间 V^n 中，对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ ，有

（1） $\|x\|_1=\sum|\xi_i|\le n\bullet\max_i|\xi_i|=n\|x\|_\infty$ $\quad\|x\|_1\ge\sum|\xi_i|=1\bullet\|x\|_\infty$

$\therefore 1\bullet\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\bullet\|x\|_\infty$

（2） $\|x\|_2=\left(\sum|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(n\bullet\max_i|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n}\|x\|_\infty$

$\|x\|_2\ge\left(\max_i|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1\bullet\|x\|_\infty$ $\quad\therefore 1\bullet\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le n\bullet\|x\|_\infty$

（3） $\frac{1}{\sqrt{n}}\bullet\|x\|_2\le\|x\|_1\le n\bullet\|x\|_2$

定理：有限维线性空间中任意两个向量范数都等价。

证明思路 1)范数等价为等价关系,满足传递性;

2)任意范数为坐标函数的连续函数；

3)在单位超球面上有大于零的极大极小值,

与2-范数等价。

定义：若$\left\{x^{(k)}\right\}(k=1,2,\cdots)$ 是线性空间V^n 中的向量序列，如果存在 $\forall x \in V^n$ ，使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|_{\alpha}=0$

则称序列 $\left\{x^{(k)}\right\}$ 按 $\alpha-$ 范数收敛于 x

定理：向量空间C^n 中，

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)}=x \Leftrightarrow \forall\|x\|, \lim_{k\to+\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|=0$$

定理：向量空间C^n 中，

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \forall \|x\|, \lim_{k\to+\infty}\left\|x^{(k)} - x\right\| = 0$$

证明：只需对 $\|x\| = \|x\|_1$ 证明即可。

$$\begin{aligned} x^k \to x &\Leftrightarrow \xi_i^{(k)} \to \xi_i (i = 1, 2, \cdots, n) \\ &\Leftrightarrow \left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| \to 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i\right| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \left\|x^{(k)} - x\right\|_1 \to 0 \end{aligned}$$

作业

- P121：4
- P122：5