矩阵分析与应用

第十二讲 矩阵分解之二

信息工程学院
吕旋阳

2006-12-12

本讲主要内容

- 矩阵的QR分解
- 矩阵的满秩分解
- 矩阵的奇异值分解

Householder矩阵

在平面 R^2 中，将向量 x 映射为关于 e_1 对称的向量y的变换，称为是关于e_1轴的镜像(反射)变换

设 $x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$，有

$$y=\begin{bmatrix}\xi_1\\ -\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\left(I-2e_2e_2^T\right)x=Hx$$

其中， $e_2=[0\ \ 1]^T$，H是正交矩阵，且 $|H|=-1$

Householder矩阵

将向量 x 映射为关于"与单位向量u正交的直线"对称的向量y的变换， $x-y=2u\left(u^T x\right)$

$$y=x-2u\left(u^T x\right) \quad =\left(I-2uu^T\right)x=Hx$$

显然，H是正交矩阵

定义：设单位列向量 $u\in R^n$ ，称 $H=I-2uu^T$ 为Householder矩阵(初等反射矩阵)，由H矩阵确定的线性变换称为Householder变换。

Householder矩阵

$$H_u = I_n - 2uu^T \qquad (\ u \in R^n \text{ 是单位列向量})$$

(1) $H = H^T$ 对称　　(2) $H^T H = I$ 正交

(3) $H^2 = I$ 对合　　(4) $H^{-1} = H$ 自逆

(5) $\det H = -1$ 自逆

验证(5)：

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -u^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 2u \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I - 2uu^T & 0 \\ u^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -u^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 2u \\ u^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2u \\ 0^T & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I - 2uu^T & 0 \\ u^T & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 2u \\ 0^T & -1 \end{vmatrix} = -1$$

定理4：R^n 中 $(n>1)$, $\forall x \neq 0$, $\forall$ 单位列向量 z

$$\Rightarrow \exists H_u, \text{st } H_u x = |x| z$$

证明：(1) $x = |x| z : n > 1$ 时，取单位向量u使得 $u \perp x$,

于是 $H_u = I - 2uu^T : H_u x = Ix - 2uu^T x = x = |x| z$

(2) $x \neq |x| z$： 取 $u = \dfrac{x - |x| z}{\left| x - |x| z \right|}$， 有

$$H_u x = \left[I - 2\frac{\left(x - |x| z\right)\left(x - |x| z\right)^T}{\left| x - |x| z \right|^2} \right] x = x - \frac{2\left(x - |x| z, x\right)}{\left| x - |x| z \right|^2}\left(x - |x| z\right)$$

$$= x - 1 \times \left(x - |x| z\right) = |x| z$$

例2：$x=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，求H-矩阵$H$ 使得 $Hx=|x|e_1$

解：$|x|=3,\ x-|x|e_1=\begin{bmatrix}-2\\2\\2\end{bmatrix},\quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$H=I-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$Hx=3e_1$$

G矩阵与H-矩阵的关系

定理5：G-矩阵 $T_{ij}(c,s) \Rightarrow \exists$H-矩阵$H_u$与$H_v$, st $T_{ij} = H_u H_v$

证明：$c^2+s^2=1 \Rightarrow$取$\theta = \arctan\frac{s}{c}$, 则$\cos\theta = c, \sin\theta = s$

$$
T_{ij}(c,s) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta & \\ & & I & & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array}
$$

$$
v = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sin\frac{\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 & \cos\frac{\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T
$$

$$H_v = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & 1 & & & \\ & & I & & \\ & & & 1 & \\ & & & & I \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} O & & & & \\ & \sin^2\frac{\theta}{4} & & \sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4} & \\ & & O & & \\ & \sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4} & & \cos^2\frac{\theta}{4} & \\ & & & & O \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\frac{\theta}{2} & & -\sin\frac{\theta}{2} & \\ & & I & & \\ & -\sin\frac{\theta}{2} & & -\cos\frac{\theta}{2} & \\ & & & & I \end{bmatrix}$$

$$u=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \sin\frac{3\theta}{4} & 0 & \cdots & 0 & \cos\frac{3\theta}{4} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$$

$$H_u=\begin{bmatrix} I & & & & \\ & \cos\frac{3\theta}{2} & & -\sin\frac{3\theta}{2} & \\ & & I & & \\ & -\sin\frac{3\theta}{2} & & -\cos\frac{3\theta}{2} & \\ & & & & I \end{bmatrix},$$

$$T_{ij}(c,s)=H_u H_v \qquad \#$$

[注] H-矩阵不能由若干个G矩阵的乘积来表示。

因为 $\det H=-1,$ 而 $\det G=1$

例3：G-矩阵 $T_{ij}(0,1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$中, $c=0, s=1 \Rightarrow \theta=\pi/2$

$$H_u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, H_v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_u H_v=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

四、QR分解

1. Schmidt正交化方法

定理6： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow$ ∃正交矩阵Q，可逆上三角矩阵R，使得$A=QR$。

证明：$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 可逆 $\Rightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关，

正交化后可得：

$$\begin{cases} b_1=a_1 \\ b_2=a_2-k_{21}b_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ b_n=a_n-k_{n,n-1}b_{n-1}-\cdots-k_{n1}b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=k_{21}b_1+b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_n=k_{n1}b_1+\cdots+k_{n,n-1}b_{n-1}+b_n \end{cases}$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)K$$

$$= (q_1, q_2, \cdots, q_n)\begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

令 $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n), R = \begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

则$A=QR$，其中 $q_i = \dfrac{b_i}{|b_i|} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

例4：求 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 的QR分解。

解：$b_1=a_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, b_2=a_2-1\times b_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, b_3=a_3-\frac{1}{3}b_2-\frac{7}{6}b_1=\begin{bmatrix}1/2\\2\\-1/2\end{bmatrix}$

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\qquad R=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{3}&\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{7}{6}\\&1&\frac{1}{3}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{6}&\frac{7}{\sqrt{6}}\\&\sqrt{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

定理7：$A_{m\times n}$ 列满秩 $\Rightarrow \exists$ 矩阵 $Q_{m\times n}$ 满足 $Q^H Q = I$,

可逆上三角矩阵 $R_{n\times n}$ ，使得A=QR。

证明：同定理6

2. G-变换方法

定理8： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 有限个G-矩阵之积T，使得TA为可逆上三角矩阵。

证明：略

2. H-变换方法

定理10：$A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow \exists$ 有限个H-矩阵之积S，

使得SA为可逆上三角矩阵。

证明：略

五、化方阵与Hessenberg矩阵相似

上 Hessenberg 矩阵：$F_{上} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$

定理11： $A_{n\times n}$ ，则存在有限个G-矩阵之积Q，使得

$$QAQ^{\mathrm{T}} = F_{上}$$

定理12： $A_{n\times n}$ ，则存在有限个H-矩阵之积Q，使得

$$QAQ^{\mathrm{T}} = F_{上}$$

推论： $A_{n\times n}$ 实对称 $\Rightarrow\exists$存在有限个H-矩阵(G-矩阵)之积Q，使得 $QAQ^{\mathrm{T}} =$ “实对称三对角矩阵”

例8: 用H-变换化 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 正交相似于“三对角矩阵”

解: $\beta^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}:\beta^{(0)}-\left|\beta^{(0)}\right|e_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$$H_0=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad Q\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix}1&\\&H_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$QA=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix},QAQ^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

满秩分解

目的：对$A\in C_r^{m\times r}(r\geq 1)$，求$F\in C_r^{m\times r}$，及$G\in C_r^{m\times r}$使$A=FG$

分解原理：

$$\mathrm{rank}A=r\Rightarrow A\xrightarrow{\text{行}}\text{阶梯形 }B=\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}:\quad G\in C_r^{r\times n}$$

$$\Rightarrow \exists\text{有限个初等矩阵之积 }P_{m\times m},\text{st.}PA=B$$

$$\Rightarrow A=P^{-1}B=\left(F_{m\times r}\,\middle|\,S_{m\times(m-r)}\right)\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}=FG:\quad F\in C_r^{m\times r}$$

例9: $A=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\1&2&-1&1\\2&2&-2&-1\end{bmatrix}$, 求$A=FG$

解 (1) $(A\,|\,I)=\left[\begin{array}{cccc|ccc}-1&0&1&2&1&&\\1&2&-1&1&&1&\\2&2&-2&-1&&&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|ccc}-1&0&1&2&1&&\\0&2&0&3&1&1&\\0&0&0&0&1&-1&1\end{array}\right]$

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\0&2&0&3\end{bmatrix}$$ 满秩分解为$A=FG$

例9: $A=\begin{bmatrix}-1&0&1&2\\1&2&-1&1\\2&2&-2&-1\end{bmatrix}$, 求$A=FG$

解 (2) $(A|I)=\left[\begin{array}{cccc|ccc}-1&0&1&2&1&&\\1&2&-1&1&&1&\\2&2&-2&-1&&&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&-1&-2&-1&&\\0&1&0&3/2&1/2&1/2&\\0&0&0&0&1&-1&1\end{array}\right]$

$$A=P^{-1}B=(F\mid S)\begin{pmatrix}I_2&B_{12}\\O&O\end{pmatrix}=(F\mid FB_{12})$$

故 $F=$ "A 的前 2 列" $=\begin{bmatrix}-1&0\\1&2\\2&2\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&0&3/2\end{bmatrix}$

奇异值分解

一、预备知识

(1) $\forall A_{m\times n}, \left(A^{\mathrm{H}}A\right)_{n\times n}$ 是 Hermite（半）正定矩阵.

$$\forall x \neq 0,\ x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Ax = (Ax)^{\mathrm{H}}(Ax) = |Ax|^2 \geq 0$$

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 与 $A^{\mathrm{H}}Ax = 0$ 同解

若 $Ax = 0$，则 $A^{\mathrm{H}}Ax = 0$；

反之， $A^{\mathrm{H}}Ax = 0 \Rightarrow |Ax|^2 = (Ax)^{\mathrm{H}}(Ax) = x^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}Ax) = 0$

$\Rightarrow Ax = 0$

(3) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{H}} A)$

$$S_1 = \{x \mid Ax = 0\}, \quad S_2 = \{x \mid A^{\mathrm{H}} Ax = 0\}$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow n - r_A = n - r_{A^{\mathrm{H}} A}$$

$$\Rightarrow r_A = r_{A^{\mathrm{H}} A}$$

(4) $A = O_{m\times n} \Leftrightarrow A^{\mathrm{H}} A = O_{n\times n}$

必要性．左乘即得；

充分性 $r_A = r_{A^{\mathrm{H}} A} = 0 \Rightarrow A = O$

二、正交对角分解

定理15： $A_{n\times n}$ 可逆 $\Rightarrow$ ∃酉矩阵 $U_{n\times n}, V_{n\times n}$ ，使得

$$U^H AV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} D \quad (\sigma_i > 0)$$

证：$A^H A$是Hermite正定矩阵，∃酉矩阵 $V_{n\times n}$，使得

$$V^H (A^H A) V = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \overset{\Delta}{=} \Lambda \quad (\lambda_i > 0)$$

改写为 $D^{-1} V^H A^H \cdot A V D^{-1} = I \quad (\sigma_i = \sqrt{\lambda_i})$

令 $U = AVD^{-1}$，则有 $U^H U = I$，从而U是酉矩阵。

由此可得 $U^H AV = U^H UD = D$

三、奇异值分解

$A_{n\times n} \in C_r^{m\times n} (r \geq 1) \Rightarrow A^H A \in C_r^{n\times n}$ 半正定

$A^H A$ 的特征值：$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$

A的奇异值：$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \cdots n$

特点：（1）A的奇异值个数等于A的列数

（2）A的非零奇异值个数等于 $\mathrm{rank}\, A$

定理16 :$A_{n\times n}\in C_r^{m\times n}(r\geq 1),\Sigma_r=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}\Rightarrow$

存在酉矩阵 $U_{m\times m}$ 及 $V_{n\times n}$ ，使得 $U^H AV=\begin{bmatrix}\Sigma_r & O \\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}\overset{\Delta}{=}D$

[注]：称 $A=UDV^H$ 为A的奇异值分解

(1) U与V不唯一；

(2) U的列为 AA^H 的特征向量，V的列为 $A^H A$的特征向量

(3) 称U的列为A的左奇异向量，称V的列为A的右奇异向量.

例10：称 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 求 $A=UDV^T$

解： $AA^T=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}=B, |\lambda I-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

$$\lambda_1=3:\quad 3I-B=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}, \xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1:\quad 1I-B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}, \xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0: \quad 0I - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_A = 2: \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = AV_1\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}，取 U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}，\quad 则 U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{\mathrm{T}}AV = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D, \quad A = UDV^{\mathrm{T}}$$

定理17：$A_{n\times n}\in C_r^{m\times n}(r\geq 0)$ 的奇异值分解 $A=U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^H$

中，划分 $U=\left(u_1,u_2,\cdots,u_m\right),V=\left(v_1,v_2,\cdots,v_n\right)$，则有

(1) $N(A)=\mathrm{span}\left\{v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_n\right\}$；

(2) $R(A)=\mathrm{span}\left\{u_1,u_2,\cdots,u_r\right\}$；

(3) $A=\sigma_1u_1v_1^{\mathrm{H}}+\sigma_2u_2v_2^{\mathrm{H}}+\cdots+\sigma_ru_rv_r^{\mathrm{H}}$

证明： $A=\left(U_1\mid U_2\right)\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1^{\mathrm{H}}\\ V_2^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}=U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}$

容易验证： $U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}x=0\Leftrightarrow V_1^{\mathrm{H}}x=0$

(1) $N(A)=\{\, x \mid Ax=0 \,\}=\{\, x \mid U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}x=0 \,\}$

$=\{\, x \mid V_1^{\mathrm{H}}x=0 \,\}=N(V_1^{\mathrm{H}})=R^{\perp}(V_1)$

$=R(V_2)=\mathrm{span}\{\, v_{r+1},\cdots,v_n \,\}$

(2) $R(A)=\{\, y \mid y=Ax \,\}=\{\, y \mid y=U_1(\Sigma V_1^{\mathrm{H}}x) \,\}$

$\subset\{\, y \mid y=U_1 z \,\}=R(U_1)$

$R(U_1)=\{\, y \mid y=U_1 z \,\}=\{\, y \mid y=A(V_1\Sigma^{-1}z) \,\}$

$\subset\{\, y \mid y=Ax \,\}=R(A)$

故 $R(A)=R(U_1)=\mathrm{span}\{\, u_1,\cdots,u_r \,\}$

(3) $A=(u_1,\cdots,u_r)\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1^{\mathrm{H}}\\ \vdots \\ v_r^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}$

$=\sigma_1 u_1 v_1^{\mathrm{H}}+\cdots+\sigma_r u_r v_r^{\mathrm{H}}$

四、正交相抵

$A_{m\times n}, B_{m\times n}$，若有酉矩阵 $U_{m\times m}$ 及 $V_{n\times n}$，使 $U^H AV = B$，

称A与B正交相抵。

性质：(1) A与A正交相抵；

(2) A与B正交相抵$\Rightarrow$$B$与$A$正交相抵；

(3) A与B正交相抵，B与C正交相抵A与C

正交相抵

定理18：A与B正交相抵 $\Rightarrow \sigma_A = \sigma_B$

证明：
$$B = U^H A V \Rightarrow B^H B = \cdots = V^{-1}\left(A^H A\right)V$$
$$\Rightarrow \lambda_{B^H B} = \lambda_{A^H A} \geq 0$$
$$\Rightarrow \sigma_A = \sigma_B$$

例：
$$A^H = A \Rightarrow \sigma_A = \left|\lambda_A\right| \qquad \because \lambda_{A^H A} = \lambda_{A^2} = \left(\lambda_A\right)^2$$

$$A^H = -A \Rightarrow \sigma_A = \left|\lambda_A\right| \qquad \because \lambda_{A^H A} = \lambda_{(jA)^2} = \left(j\lambda_A\right)^2$$

$A^H = -A \Rightarrow \lambda_A$ 为0或纯虚数，$j\lambda_A$ 为实数

矩阵分解的应用

设方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有解，则有

(1) $m=n$： $A=LU\Rightarrow Ly=b,\ Ux=y$

(2) $m=n$： $A=QR\Rightarrow Rx=Q^{\mathrm{T}}b$

(3) $A=UDV^{\mathrm{H}}\Rightarrow Dy=U^{\mathrm{H}}b\overset{\text{def}}{=}c,\ V^{\mathrm{H}}x=y$

$$D=\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{bmatrix}\qquad \text{（隐含}c_{r+1}=0,\cdots,c_m=0\text{）}$$

通解为 $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ c_r/\sigma_r \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{bmatrix}$ （$k_1,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数）

$$x = Vy = (\frac{c_1}{\sigma_1}v_1 + \cdots + \frac{c_r}{\sigma_r}v_r) + (k_1 v_{r+1} + \cdots + k_{n-r}v_n)$$

[注] $k_1 v_{r+1} + \cdots + k_{n-r}v_n$ 是 $A_{m\times n}x = 0$ 的通解

因为 $A\left(\frac{c_1}{\sigma_1}v_1 + \cdots + \frac{c_r}{\sigma_r}v_r\right) = AV_1\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = U_1\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \left[U_1 \;\vdots\; U_2\right]c = b$

所以 $\frac{c_1}{\sigma_1}v_1 + \cdots + \frac{c_r}{\sigma_r}v_r$ 是 $A_{m\times n}x = b$ 的一个特解

作业

- P195 3、4
- P225 2、3、4、5
- P233 1、2、4