矩阵分析与应用

第十一讲　矩阵分析及其应用之三
矩阵分解之一

信息工程学院
吕旌阳

本讲主要内容

- 矩阵分析的应用
- 三角分解
- Givens变换

矩阵分析的应用

$$\begin{cases} \xi_1'(t) = a_{11}\xi_1(t) + a_{12}\xi_2(t) + \cdots + a_{1n}\xi_n(t) + b_1(t) \\ \xi_2'(t) = a_{21}\xi_1(t) + a_{22}\xi_2(t) + \cdots + a_{2n}\xi_n(t) + b_2(t) \\ \cdots \\ \xi_n'(t) = a_{n1}\xi_1(t) + a_{n2}\xi_2(t) + \cdots + a_{nn}\xi_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}$$

齐次微分方程： $x'(t) = A \bullet x(t)$

非齐次微分方程：$x'(t) = A \bullet x(t) + b(t)$

齐次微分方程的解法

定理10：齐次方程 $x'(t)=A\bullet x(t)$ 满足 $x(t_0)=x_0$ 的解存在并且唯一

证：存在性　设 $x(t)=e^{(t-t_0)A}x_0$ ，则

$$x'(t)=Ae^{(t-t_0)A}x_0=A\bullet x(t) \qquad x(t_0)=e^{O}x_0=x_0$$

唯一性　设 $x(t)$ 满足 $x'(t)=A\bullet x(t), x(t_0)=x_0$

$$x'(t)-Ax(t)=0 \ \Rightarrow e^{-tA}x'(t)+e^{-tA}(-A)x(t)=0$$

$$\Rightarrow \left[e^{-tA}x(t)\right]'=0 \quad \Rightarrow e^{-tA}x(t)=c \ \Rightarrow x(t)=ce^{tA}$$

因为 $x(t_0)=x_0$, 所以 $x_0=ce^{t_0A} \ \Rightarrow c=e^{-t_0A}x_0$

因此 $x(t)=e^{tA}e^{-t_0A}x_0=e^{(t-t_0)A}x_0$

例1：设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}$ 求 $x'(t)=A\bullet x(t)$ 的通解

解： $e^{tA}=\begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ & e^t & 0 \\ & & e^{2t} \end{bmatrix}$

$$x(t)=ce^{tA}=\begin{bmatrix} c_1e^t+c_2te^t \\ c_2e^t \\ c_3e^{2t} \end{bmatrix}$$

例2：矩阵函数 e^{tA} 的列向量 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 构成齐次方程 $x'(t)=A\bullet x(t)$ 的基础解系

解： e^{tA} 可逆 $\Rightarrow x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 线性无关

取 $c=e_j \Rightarrow x_j(t)=e^{tA}c$ 是 $x'(t)=A\bullet x(t)$ 的一个解

通解 $x(t)=ce^{tA}=c_1\bullet x_1(t)+\cdots+c_n\bullet x_n(t)$

非齐次微分方程的解法

方程(1)： $x'(t) = A\bullet x(t)$

方程(2)： $x'(t) = A\bullet x(t) + b(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x}(t)\text{是(2)的特解} \\ x(t)\text{是(2)的通解} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}'(t) = A\bullet \tilde{x}(t) + b(t) \\ x'(t) = A\bullet x(t) + b(t) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\tilde{x}(t) - x(t)\right]' = A\left[\tilde{x}(t) - x(t)\right] \Rightarrow \tilde{x}(t) - x(t)\text{ 是(1)的解}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) - x(t) = c_1\bullet x_1(t) + \cdots + c_n\bullet x_n(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{tA} + \tilde{x}(t)$$

非齐次微分方程的解法

采用常向量变易法求 $\tilde{x}(t)$.设 $\tilde{x}(t)=e^{tA}c(t)$ 满足(2),有

$$Ae^{tA}c(t)+e^{tA}c'(t)=Ae^{tA}c(t)+b(t)$$

$$c'(t)=e^{-tA}b(t)\Rightarrow c(t)=\int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}b(\tau)d\tau \quad \text{(原函数之一)}$$

故(2)的通解为 $x(t)=e^{tA}\left[c+\int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}b(\tau)d\tau\right]$

特解为 $x(t)\big|_{x(t_0)=x_0}=e^{tA}\left[e^{-t_0A}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}b(\tau)d\tau\right]$

[注]当 $t_0=0$时，特解 $x(t)\big|_{x(0)=x_0}=e^{tA}\left[x_0+\int_{0}^{t}e^{-\tau A}b(\tau)d\tau\right]$

例3：设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&2\end{bmatrix}, b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}, x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

求 $x'(t)=A\bullet x(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的特解

解： $$e^{tA}=\begin{bmatrix}e^t&te^t&0\\&e^t&0\\&&e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$e^{-\tau A}b(\tau)=\begin{bmatrix}e^{-\tau}\\0\\1\end{bmatrix},\quad \int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}b(\tau)d\tau=\begin{bmatrix}1-e^{-t}\\0\\t\end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{tA}\bullet\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\0\\t\end{pmatrix}\right]=\begin{bmatrix}te^t-1\\e^t\\te^{2t}\end{bmatrix}$$

矩阵微分与最优化

最简单的最优化问题是求$f(t)$的极大值和极小值

$$\min_{x\in R} f(t)$$

一般称为无约束的最优化问题

相对于n×1向量x的梯度算子记作∇_x

$$\nabla_x = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^T = \frac{\partial}{\partial x}$$

n×1实向量x为变元的实标量函数的梯度

$$\nabla_x f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]^T = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

矩阵微分与最优化

实标量函数$f(A)$为相对于实矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的梯度

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A}=\left[\frac{\partial f(A)}{\partial a_{ij}}\right]_{m\times n}=\nabla_A f(A)$$

例：CDMA系统中，有K个用户，第k个用户的扩频波形向量为 $\boldsymbol{s}_k(t)$ 。假定用户k的信号幅值为 A_k

在t时刻发送比特为 $\boldsymbol{b}_k$ $(+1,-1)$

在基站解扩后，基站的接收信号向量为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{RAb} + \boldsymbol{n}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \mathbf{diag}\left(A_1, A_2, \cdots, A_K\right), \boldsymbol{b} = \left[b_1, b_2, \cdots, b_K\right]^T$

扩频相关矩阵$\boldsymbol{R}$的元素 $r_{ij} = \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt$

设计一个多用户检测器$\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \cdots, \boldsymbol{m}_K\right]$，使得

$$\hat{b}_k = \mathbf{sgn}(\boldsymbol{m}_k^T \boldsymbol{y})$$

将K个用户的检测器联合考虑，构造目标函数

$$J(\boldsymbol{M}) = \mathbf{E}\left[\left\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right\|_2^2\right]$$

使其最小化，即可得到最优的盲多用户检测器$\boldsymbol{M}$

利用矩阵迹的性质，可得

$$\begin{aligned}
J(\boldsymbol{M}) &= \mathbf{E}\left\{\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)\right\} \\
&= \mathbf{E}\left\{\mathbf{tr}\left[\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)^T\right]\right\} \\
&= \mathbf{tr}\left\{\mathbf{E}\left[\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)^T\right]\right\} \\
&= \mathbf{tr}\left\{\boldsymbol{cor}\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)\right\}
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{cor}\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right) = \mathbf{E}\left[\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)\left(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\right)^T\right]$是自相关矩阵

在加性噪声与用户信号不相关时有

$$\mathbf{cor}\left(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{My}\right)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{RA}^{2}\boldsymbol{R}+\sigma^{2}\boldsymbol{R}\right)\boldsymbol{M}^{T}-\boldsymbol{ARM}^{T}-\boldsymbol{MRA}$$

其中加性噪声的方差为 σ^{2}

于是目标函数可写作

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{M})=\mathbf{tr}\left\{\boldsymbol{cor}\left(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{My}\right)\right\}$$

$$=\mathbf{tr}(\boldsymbol{I})+\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{RA}^{2}\boldsymbol{R}+\sigma^{2}\boldsymbol{R}\right)\boldsymbol{M}^{T}\right)-\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{ARM}^{T}\right)-\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{MRA}\right)$$

利用迹函数的微分公式

$$\frac{\partial\,\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{M}^{T}\boldsymbol{B}\right)}{\partial\boldsymbol{M}}=\frac{\partial\,\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{BM}^{T}\right)}{\partial\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{B}\qquad\frac{\partial\,\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{MB}\right)}{\partial\boldsymbol{M}}=\frac{\partial\,\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{BM}\right)}{\partial\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{B}^{T}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}\left(MDM^T\right)}{\partial M}=M(D+D^T)$$

因为 $D=RA^2R+\sigma^2R$ 是对称矩阵，所以

$$\frac{\partial J(M)}{\partial M}=2M\left(RA^2R+\sigma^2R\right)-2AR$$

令其为零，即可得

$$M\left(RA^2R+\sigma^2R\right)=AR$$

如果R非奇异，可得最优的多用户检测器为

$$M=A\left(RA^2+\sigma^2I\right)^{-1}$$

[引入]在线性代数中应用Gauss消去法求解n元

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

其中： $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T,\boldsymbol{b}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^T$

Gauss消去法将系数矩阵化为上三角形矩阵，或将增广矩阵化为上阶梯形矩阵，而后回代求解。

定义4.1 如果n阶矩阵A能够分解为一个下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积，则称其为三角分解或LU分解。如果方阵A可分解成$A=LDU$,其中L为一个单位下三角矩阵，D为对角矩阵，则称A可作LDU分解。

定理4.1 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的分解式唯一的充要条件为A的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$ 。$A=LDU$，其中L是单位下三角矩阵，U是单位上三角矩阵，D是对角矩阵，并且

$$D=\mathrm{diag}\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right),d_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}},k=1,2,\cdots,n \quad \left(\Delta_0=1\right)$$

推论 设A是n阶非奇异矩阵，A有三角分解$A=LU$，的充要条件是A的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0 \quad k=1,2,\cdots,n$

分解原理：以n=4为例

$$\Delta_1(A)=a_{11}:a_{11}\neq 0 \quad \Rightarrow c_{i1}=\frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i=2,3,4)$$

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ c_{31} & 0 & 1 & \\ c_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -c_{21} & 1 & & \\ -c_{31} & 0 & 1 & \\ -c_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix}=A^{(1)}$$

$$(2)\ \Delta_2(A) = \Delta_2(A^{(1)}) = a_{11}a_{22}^{(1)}: \quad a_{22}^{(1)} \neq 0$$

$$\Rightarrow c_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (i = 3, 4)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & c_{32} & 1 & \\ 0 & c_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -c_{32} & 1 & \\ 0 & -c_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2^{-1}A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

$$(3)\ \Delta_3(A)=\Delta_3(A^{(2)})=a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)} : a_{33}^{(2)}\neq 0$$

$$\Rightarrow c_{43}=\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

$$L_3=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\0&0&c_{43}&1\end{bmatrix},L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\0&0&-c_{43}&1\end{bmatrix}$$

$$L_3^{-1}A^{(2)}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&a_{24}^{(1)}\\&&a_{33}^{(2)}&a_{34}^{(2)}\\&&&a_{44}^{(3)}\end{bmatrix}=A^{(3)}$$

即： $L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}A = A^{(3)} \quad \Rightarrow A = L_1L_2L_3A^{(3)}$

令 $L = L_1L_2L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ c_{31} & c_{32} & 1 & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix}$ 则 $A = LA^{(3)}$

分解 $A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22}^{(1)} & & \\ & & a_{33}^{(2)} & \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} = DU$

则 $A = LDU$

二、紧凑格式算法：$A = LDU = \tilde{L}U$ (Crout分解)

$$L = \tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$(i,1)$元：$a_{i1} = l_{i1} \bullet 1 \quad \Rightarrow l_{i1} = a_{i1} \quad (i = 1, \cdots, n)$

$(1,j)$元：$a_{1j} = l_{11} \bullet u_{1j} \Rightarrow u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, \cdots, n)$

(i,k)元：$a_{ik} = l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} + l_{ik} \bullet 1 \quad (i \geq k)$

$$\Rightarrow l_{ik} = a_{ik} - \left(l_{i1} \bullet u_{1k} + \cdots + l_{i,k-1} \bullet u_{k-1,k} \right)$$

(k,j)元：$a_{kj} = l_{k1} \bullet u_{1,j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} + l_{kk} \bullet u_{kj} \quad (j > k)$

$$\Rightarrow u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \left(l_{k1} \bullet u_{1j} + \cdots + l_{k,k-1} \bullet u_{k-1,j} \right) \right]$$

计算框图：

$$
\begin{array}{ccccccc}
l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \cdots & & \text{第1框} \\
l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} & \cdots & & \text{第2框} \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} & \cdots & & \text{第3框} \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \cdots & & \text{第4框} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots
\end{array}
$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算框图：

$$\begin{array}{|cccc} \hline 5 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ \cline{2-4} 2 & \multicolumn{1}{|c}{1/5} & -2 & 5 \\ \cline{3-4} -4 & \multicolumn{1}{|c}{-2/5} & \multicolumn{1}{|c}{1} & 2 \\ \cline{4-4} 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} & \multicolumn{1}{|c}{2} & \multicolumn{1}{|c}{-7} \end{array}$$

$$\tilde{L}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/5 & 0 & 0 \\ -4 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2/5 & 1 & & \\ -4/5 & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 1/5 & & \\ & & 1 & \\ & & & -7 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 2/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A=\tilde{L}U=LDU$$

QR分解

目的：将分解为正交矩阵与上三角矩阵之积.

约定：本节涉及的矩阵为实矩阵，向量为实向量，数为实数.

一、Givens矩阵

$$T_{ij}(c,s) \overset{\Delta}{=} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array}$$

$$c^2 + s^2 = 1$$

性质：

(1) $T_{ij}^T T_{ij} = I, \left[T_{ij}(c,s)\right]^{-1} = \left[T_{ij}(c,s)\right]^T = T_{ij}(c,-s), \quad \left|T_{ij}\right| = 1$

(2) $$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad T_{ij}x \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \eta_i = c\xi_i + s\xi_j \\ \eta_j = -s\xi_i + c\xi_j \\ \eta_k = \xi_k (k \neq i,j) \end{cases}$$

若 $\xi_i^2 + \xi_j^2 \neq 0,$ ，取 $c = \dfrac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2}}, s = \dfrac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2}}$

则 $$\eta_i = \sqrt{\xi_i^2 + \xi_j^2} > 0, \eta_j = 0$$

定理3：$x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists$ 有限个G-矩阵之积T，st． $Tx = |x| e_1$

推论：设非零列向量$x \in R^n$及单位列向量 $z \in R^n$，

则存在有限个Givens矩阵之积，记作T，使得

$$Tx = |x| z$$

例： $x=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ 求G-矩阵之积T,使得 $Tx=|x|e_1$

解： $T_{12}(c,s)$ 中，$c=\dfrac{3}{5},s=\dfrac{4}{5}$. $T_{12}x=\begin{bmatrix}5\\0\\5\end{bmatrix}$

$T_{13}(c,s)$ 中,$c=\dfrac{1}{\sqrt{2}},s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $T_{13}\left(T_{12}x\right)=\begin{bmatrix}5\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}=|x|e_1$

$$T=T_{13}T_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\bullet\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&4&0\\-4&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3&4&5\\-4\sqrt{2}&3\sqrt{2}&0\\-3&-4&5\end{bmatrix}$$

$Tx=5\sqrt{2}e_1$