武汉大学计算机学院本科生课程

模式识别

(Pattern Recognition)

武汉大学计算机学院

Email: 18986211797@189.cn

第7章　模糊模式识别法

7.1 模糊数学概述

7.1.1 模糊数学的产生背景

模糊数学诞生的标志：1965年美国加利福尼亚大学控制论专家L.A.Zadeh (查德)发表的文章“Fuzzy sets”。

模糊数学（Fuzzy sets）又称模糊集合论。

1．精确数学方法及其局限性

1) 精确数学方法

忽略对象的一般特性，着重注意对象的数量、空间形式和几何形状的数学方法。

如：牛顿力学、牛顿和莱布尼茨创立的微积分学等。

2) 近代科学的特点

(1) 理论研究方面：用精确定义的概念和严格证明的定理，描述现实事物的数量关系和空间形式。

(2) 工程技术方面：用精确的实验方法和精确的测量计算，探索客观世界的规律，建立严密的理论体系。

3) 精确数学方法的局限性

现实世界中的许多现象，用精确数学方法难以解决。

例如：著名的问题之一——**秃头悖论(Baldhead paradox)**

用精确数学方法判断“秃头”：

方法：首先给出一个精确的定义，然后推理，最后结论。

定义：头发根数≤n时，判决为秃头；否则判决为不秃。

即头发根数n为判断秃与不秃的界限标准。

问题：当头发根数恰好为n+1，应判决为秃还是不秃？

推理：两种选择

均表现出精确方法在这个问题上与常理对立的情况

(1) 承认精确方法：判定为不秃。

结论：有n根头发的是秃头，有n+1根头发的不是秃头。

——显然不合理

(2) 承认生活常识：认为仅一根头发之差不会改变秃与不秃的结果，即有n+1根头发者也应是秃头。

那么采用传统的逻辑推理，会得到下面的一些命题：

头发为n根者为秃头，

头发为n+1根者为秃头，

头发为n+2根者为秃头，

……

头发为$n+k$根者为秃头。

其中，k是一个有限整数，显然k完全可以取得很大。

结论：头发很多者为秃头。

类似地：没有头发者不是秃头

2．模糊数学的诞生

模糊数学：有关描述和处理模糊性问题的理论和方法的学科。

模糊数学的基本概念：**模糊性**。

1965年查德(zadeh)发表了“模糊集合”论文后，在科学界引起了爆炸性的反映，他准确地阐述了模糊性的含义，制定了刻画模糊性的数学方法（隶属度、隶属函数、模糊集合等），为模糊数学作为一门独立的学科建立了必要的基础。

7.1.2 模糊性

1．模糊性的基本概念

人们在认识事物时，总是根据一定的标准对事物进行分类，有些事物可以依据某种精确的标准对它们进行界线明确的认识，有些事物根本**无法找出精确的分类标准**，例如“秃头悖论”中的头发根数的界线n，实际是不存在的。

1) 清晰性：事物具有的明确的类属特性(或是或非)。

2) 模糊性：事物具有的不明确类属特性(只能区别程度、等级)。

3) 模糊性的本质：是事物类属的不确定性和对象资格程度的渐变性。

例：

类　属	实　　例
界限分明	行星、整数、鸡蛋
模　糊	高山、优秀、胖子

2．与模糊性容易混淆的几个概念

1) 模糊性与近似性

① 共同点：描述上的不精确性。

② 区别：不精确性的根源和表现形式不同。

a) 近似性：问题本身有精确解，描述它时的不精确性源于认识条件的局限性和认识过程发展的不充分性。

例：薄雾中观远山。

b) 模糊性：问题本身无精确解，描述的不精确性来源于对象自身固有的性态上的不确定性。

例：观察一片秋叶。

2) 模糊性与随机性

① 共同点：不确定性。

② 区别：不确定性的性质不同。

a) 模糊性：表现在质的不确定性。是由于概念外延的模糊性而呈现出的不确定性。

b) 随机性：是外在的不确定性。是由于条件不充分，导致条件与事件之间不能出现确定的因果关系，而事物本身的性态和类属是确定的。

例：降雨量：大雨、中雨或小雨，典型的模糊性。

投掷硬币：随机性。

c) 排中律：即事件的发生和不发生必居且仅居其一，不存在第三种现象。随机性遵守排中律，模糊性不遵守，它存在着多种，甚至无数种中间现象。

3、模糊性与含混性

① 共同点：不确定性。

② 区别：

a) 含混性：由信息不充分（二义性）引起，一个含混的命题即是模糊的，又是二义的。一个命题是否带有含混性与其应用对象或上下文有关。

b) 模糊性：是质的不确定性。

例：命题“张三很高”：对给张三购买什么型号的衣服这个应用对象是含混的。

也是一个模糊性命题。

总之，模糊性：由本质决定。

其 它：由外界条件带来的不确定性引起。

7.1.3 模糊数学在模式识别领域的应用

模式识别从模糊数学诞生开始就是模糊技术应用研究的一个活跃领域，研究内容涉及：计算机图像识别、手书文字自动识别、癌细胞识别、白血球的识别与分类、疾病预报、各类信息的分类等。

研究方法：

* 针对一些模糊识别问题设计相应的模糊模式识别系统。
* 用模糊数学对传统模式识别中的一些方法进行改进。

7.2 模糊集合

7.2.1 模糊集合定义

1. 经典集合论中几个概念

传统经典集合论中的集合称为：

经典集合、普通集合、确定集合、脆集合(Crisp sets)。

1）论域

讨论集合前给出的所研究对象的范围。选取一般不唯一，根据具体研究的需要而定。例如，讨论部分正整数集合时，论域通常可取自然数集合或整数集合，也可取实数集合，甚至正整数集合本身。

2）子集

对于任意两个集合A、B，若A的每一个元素都是B的元素，则称A是B的"子集"，记为$A \subseteq B$或$B \supseteq A$；若B中存在不属于A的元素，则称A是B的"真子集"，记为$A \subset B$或$B \supset A$。

3）幂集(Power set)

对于一个集合A，由其所有子集作为元素构成的集合称为A的“**幂集**”。

例：论域X={ 1, 2 }，其幂集为 $X' = \{\{\phi\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

2．模糊集合的定义

给定论域X上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，是指：对于任意 $x \in X$，都确定了一个数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ ，称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 为 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，且 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$ 。

映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$：

$$X \to [0,\ \ 1]$$

$$x \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

叫做 $\underset{\sim}{A}$ 的**隶属函数**(membership function)，或从属函数。模糊子集常称为模糊集合或模糊集。

说明：

(1) 明确：经典集合+隶属函数$\Rightarrow$模糊集合，隶属函数、隶属度的概念很重要。一般用字母表示经典集合，如 A；用大写字母下加“~”号表示模糊集合，如 $\underset{\sim}{A}$。

(2) 隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 用于刻画集合 $\underset{\sim}{A}$ 中的元素对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属程度

——隶属度(degree of membership)，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 值越大，x 隶属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度就越高。

例：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1$：$x$ 完全属于 $\underset{\sim}{A}$。 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$：$x$ 不属于 $\underset{\sim}{A}$。

$0<\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)<1$：$x$ 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度介于“属于”和“不属于”之间——模糊的。

(3) 当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值域[0，1]变为集合{0，1}时，模糊集合退化为经典集合。即，

$$\text{经典集合} \underset{\text{特例}}{\overset{\text{推广}}{\rightleftarrows}} \text{模糊集合}$$

(4) 模糊集合中的元素 x 是一个标量时：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 是 x 的单变量函数。

当 x 为多变量，即 $x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 时，隶属函数通常定义为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A(1)}}(x_1)\cdot\mu_{\underset{\sim}{A(2)}}(x_2)\cdot\cdots\cdot\mu_{\underset{\sim}{A(n)}}(x_n)$$

其中，$\underset{\sim}{A}(1)$，$\underset{\sim}{A}(2)$，⋯，$\underset{\sim}{A}(n)$：对应于各变量的模糊子集；

$\mu_{\underset{\sim}{A(i)}}(x_i)$：相应的单变量隶属函数。

单变量隶属函数是基础，我们主要讨论此种情况。

3．相关的几个概念

1）核：模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的**核**为

$$\mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A} = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1\} \qquad (7\text{-}1)$$

即：是隶属度为1的元素组成的经典集合。

正规模糊集：模糊集合的核是非空的；

非正规模糊集：模糊集合的核是空的。

2）支集(support set)：模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的**支集**为

$$\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A} = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0\} \qquad (7\text{-}2)$$

即：是隶属度大于零的元素组成的经典集合。

$(\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A} - \mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A})$ 称为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的**边界**。

3）模糊幂集

模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊子集组成的集合 $F(\underset{\sim}{A})$ 称为“**模糊幂集**”。

例：与经典集合中的“幂集”相比较。

经典集合：$A=\{1,\quad 2\}$，

幂集为 $A'=\{\ \{\phi\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\ \}$

模糊集合：$\underset{\sim}{A}=\{(0.9,1),\ (0.8,2)\}$

幂集为 $F(\underset{\sim}{A})=\{\{\phi\},\{0.1,1\},\{(0.01,1)\},\cdots\}$

可见，经典集合论域为有限集，其幂集必为有限集；

模糊集合的幂集 $F(\underset{\sim}{A})$ 可以为无穷集合。

4. 模糊集合的表示

有多种表示方法：要求表现出论域中所有元素与其对应的隶属度之间的关系。

查德的求和表示法和积分表示法：

1）求和表示法

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为论域，$\underset{\sim}{A}$ 为 X 上的一个模糊集合。

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\Big/x_i$$

——适用于离散域论域。

"Σ"和"$/$"：描述 $\underset{\sim}{A}$ 中有哪些元素，以及各元素的隶属度值。

2）积分表示法

$$\underset{\sim}{A}=\int_X\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\Big/x\right)$$

——适合于任何种类的论域，特别是连续论域。

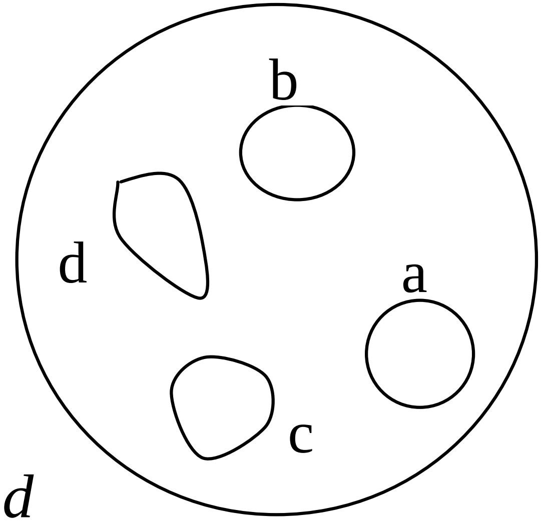
"$\int$"：连续域时元素与隶属度对应关系的一个总括，一种标记法。

常用的模糊集合表示方法：

例 7.1　设论域 $X=\{a,b,c,d\}$，$\underset{\sim}{A}$ 为模糊集合“圆形”，对 X 中的每一个元素指定一个它对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，表征它们对于圆形的隶属程度，分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a)=1,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(b)=0.9,$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(c)=0.5,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(d)=0.2$$



模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的表示方法有以下几种：

1）求和表示法：$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.5/c+0.2/d$

2）序偶表示法：$\underset{\sim}{A}=\{(1,a),\ (0.9,b),\ (0.5,c),\ (0.2,d)\}$

3）向量表示法：$\underset{\sim}{A}=(1,\ 0.9,\ 0.5,\ 0.2)$

4）其他方法，如：$\underset{\sim}{A}=\{1/a,\ 0.9/b,\ 0.5/c,\ 0.2/d\}$

注：当某一元素的隶属函数为0时，该项可以不计入。

例 7.2　以年龄作为论域，取 X=[0,200]，Zadeh 给出了“年老”与“年轻”两个模糊集 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 的隶属函数如下：

①

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50< x\le 2\,0\,0\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{+2}\right]^{-1}, & 25< x\le 200\end{cases}$$

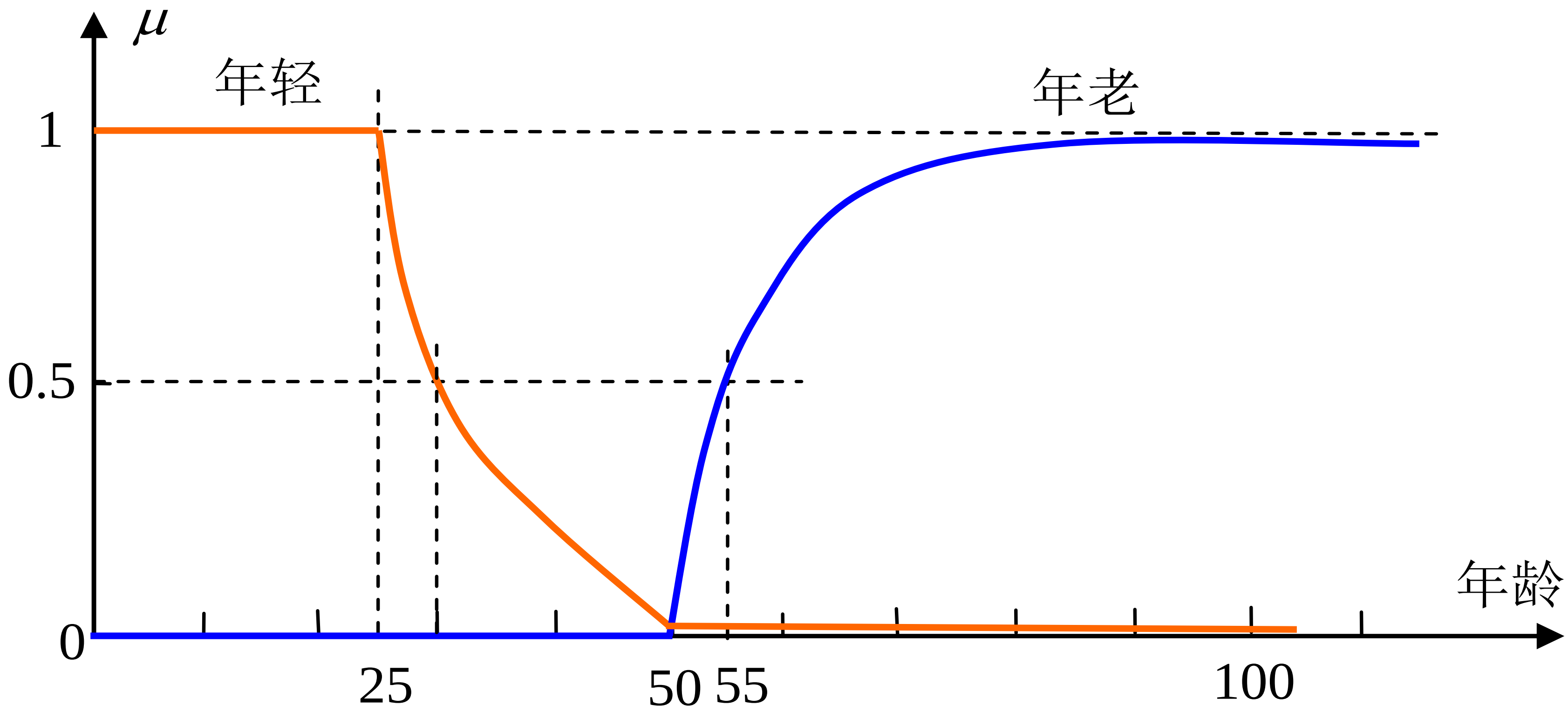
② X是一个连续的实数区间，模糊集合表示为

$$\underset{\sim}{O}=\int_X\left(\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)\big/x\right)\qquad \underset{\sim}{Y}=\int_X\left(\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)\big/x\right)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50< x\le 200\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{+2}\right]^{-1}, & 25< x\le 200\end{cases}$$

③　年轻与年老的隶属函数曲线



7.2.2 隶属函数的确定

隶属函数是模糊集合赖以存在的基石。正确地确定隶属函数是利用模糊集合恰当地定量表示模糊概念的基础。

常用的形式：

S型函数：从0到1单调增长。

π型函数：中间高两边低的函数。

隶属函数的确定：

目前很难找到统一的途径。

构造一个概念的隶属函数时，结果不唯一 。

几种隶属函数的构造与确定方法：

1．简单正规(normal)模糊集合隶属函数的构成

简单正规模糊集合 $\underset{\sim}{A}$：含有且只含有一点 x_0 使 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0)=1$ 。

简单正规模糊集合隶属函数的构成：

已知：$\underset{\sim}{A}$ 的核为 x_0； x_0 的两边分别有点 x_1 和 x_2， 使得 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)=0$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)=0$； 当 $x_1<x<x_2$ 时 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0$。论域为实数域。

方法：

1）假定： $$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}[f_1(x)]^{\alpha}, & x_1\le x\le x_0\\ [f_2(x)]^{\beta}, & x_0\le x\le x_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

式中， $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为线性函数，且

$$f_1(x_1)=f_2(x_2)=0 \qquad f_1(x_0)=f_2(x_0)=1$$

2) 确定 α 和 β

定出模糊边界 x_1^* 和 x_2^*， 满足 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1^*)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2^*)=0.5$。

并确定 $x_1^*\in(x_1,x_0)$， $x_2^*\in(x_0,x_2)$， 根据1）假定，有：

$$\alpha=-\lg 2/\lg[f_1(x_1^*)] \qquad \beta=-\lg 2/\lg[f_2(x_2^*)]$$

2. 模糊统计法：利用模糊统计的方法确定隶属函数。

模糊统计试验四要素：

1）论域X，例如人的集合。

2）X中的一个元素x_0，例如王平。

3）X中的一个边界可变的普通集合A，例如“高个子”。

A联系于一个模糊集$\underset{\sim}{A}$, 和相应的模糊概念.

4）条件s，它联系着按概念a所进行的划分过程的全部主客观因素，制约着A边界的改变。

模糊性产生的原因是s对按概念a所做的划分引起A的变异,它可能覆盖了x_0，也可能不覆盖x_0。从而导致x_0对A的隶属关系不确定。如，有的试验者认为王平是高个子，有的试验者认为他不是。

方法：

每次试验下，对x_0是否属于A做出一个确定的判断，

做 n 次实验就可以求出 x_0 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属频率，有：

$$x_0\text{对}\underset{\sim}{A}\text{的隶属频率} \overset{\Delta}{=} \frac{\text{“}x_0 \in A\text{”的次数}}{n}$$

随着n的增大，隶属频率呈现稳定性，所在的稳定值叫隶属度，

即：$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{“}x_0 \in A\text{”的次数}}{n}$$

例 100 位测试者中，90 位认为王平是高个子，则可以认为

$$\mu_{\underset{\sim}{\text{高个子}}}(\text{王平}) = 0.9$$

3. 二元对比排序法

从两种事物的对比中，做出对某一概念符合程度的判断。是区别事物的一种重要方法。

缺点：

往往不满足数学上对“序”的要求，不具有传递性，出现循环现象。

二无对比排序法有四种，这里介绍其中两种。

1）择优比较法

例7.3 求茶花、月季、牡丹、梅花、荷花对“好看的花”的隶属度。

方法：

10名试验者逐次对两种花作对比，优胜花得1分，失败者0分。则每一试验者需要做 $C_5^2=10$ 次对比。累计10人的结果，求出某种花的总得分，从而得到隶属度。

表7.1 一位测试者的二元对比结果

优胜＼失败	茶花	月季	牡丹	梅花	荷花	得分
茶花		1	0	1	0	2
月季	0		0	1	0	1
牡丹	1	1		1	0	3
梅花	0	0	0		0	0
荷花	1	1	1	1		4

表7.2 五种花对模糊集合“好看的花”的隶属度

名 称	总 得 分	隶 属 度
茶 花	23	0.23
月 季	18	0.18
牡 丹	20	0.20
梅 花	15	0.15
荷 花	24	0.24

2）优先关系定序法

设 n 个对象 $x_1,\cdots,x_n$，按某种特性排出优劣次序。定义 c_{ij} 表示 x_i 比 x_j 优越的成分，称作 x_i 对 x_j 的优先选择比，要求：

（1） $c_{ii}=0,\quad 0\le c_{ij}\le 1$；

（2） $c_{ij}+c_{ji}=1$。

得出优先关系矩阵 $\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)$。

取阈值 $\lambda\in[0,\quad 1]$，得到截矩阵 $\boldsymbol{C}_\lambda=(c_{ij}^{\lambda})$，其中

$$c_{ij}^{\lambda}=\begin{cases}1, & c_{ij}\ge\lambda\text{时}\\ 0, & c_{ij}\ge\lambda\text{时}\end{cases}$$

令 λ 从 1 下降至 0，若首次出现截矩阵 $\boldsymbol{C}_\lambda$ 中的第 i 行元素，除对角线元素外均为 1，则称 x_i 对其它元素的优越成分一致地超过 λ，称其为第一优越元素（不一定唯一）。注意，这里必须是“一致优越”。

除去第一优越元素，得新的优先关系矩阵，同理得第二优越元素，直到将全体元素排序完毕。

例 7.4　设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，其优先关系矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.7\\ 0.8 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$，

λ 从 1 至 0 依次截取得

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{0.9}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{0.3}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

x_3为第一优越元素。除去x_3得新的优先关系矩阵。

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0.9\\ 0.1 & 0\end{pmatrix}$$

有 $\boldsymbol{C}_{0.9}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$x_1$为第二优越元素，排序完毕。

按x_3，x_1，x_2顺序赋予相应的隶属度。

3）相对比较法(此略)　　　　4）对比平均法(此略)

4. 推理法

根据不同的数学物理知识，设计隶属度函数，然后在实践中检验调整。

一般以成功的实例进行借鉴。

例7.5 笔划类型的隶属函数确定

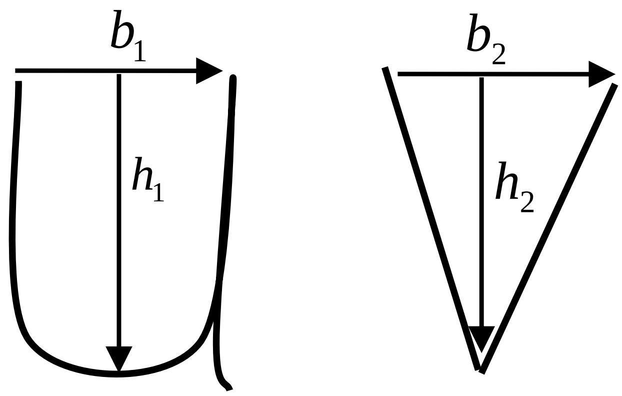
根据笔划与水平线的交角确定隶属函数。

设 x 为一线段，$\underset{\sim}{H}$，$\underset{\sim}{V}$，$\underset{\sim}{S}$，$\underset{\sim}{BS}$ 为横、竖、撇、捺四个模糊集。则

$$\mu_{\underset{\sim}{H}}(x)=1-\min(\frac{|\theta|}{45},\ 1) \qquad \mu_{\underset{\sim}{V}}(x)=1-\min(\frac{|90-\theta|}{45},\ 1)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}}(x)=1-\min(\frac{|45-\theta|}{45},\ 1) \qquad \mu_{\underset{\sim}{BS}}(x)=1-\min(\frac{|135-\theta|}{45},\ 1)$$

例7.6 手写体字符U和V的区别。



解：用包含的面积与三角形面积作比较。

设字符包含的内面积S'为上边线与字符内侧所包含的面积，如图所示，则隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{U}}$：

$$\mu_{\underset{\sim}{U}} = \left| 1 - \frac{S'}{\frac{1}{2}bh} \right|$$

统计表明$\mu_{\underset{\sim}{U}} > 0.8$时，应判为$U$，否则判为$V$。

例7.7 封闭曲线的圆度。

设封闭曲线的内切圆周长为L（$L=\pi D$），封闭曲线周长为L'。

则可定义表征圆度的隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{C}} = 1 - \frac{L' - L}{L}$$

5. 专家评分法

难免引入专家个人的主观成分，但对某些难以用上述几种方法实现的应用来说，仍不失为一种解决办法。

如，根据照片按相似程度进行划分，即按照相貌两两相似程度打分，最相像者评分为1分，最不像者评为0分，结果把不同家庭准确地区分开来。

7.2.3 模糊集合的运算

1. 基本运算

两个模糊子集间的运算：

逐点对隶属函数作相应的运算，得到新的隶属函数。在此过程中，论域保持不变。

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C}$、$\underset{\sim}{\overline{A}}$ 为论域中的模糊集合，

(1)两个模糊集合相等：

若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，则称 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 相等。

即： $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

(2)包含：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，称 $\underset{\sim}{B}$ 包含 $\underset{\sim}{A}$。

即： $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

(3)补集：

若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{\bar{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，称 $\underset{\sim}{\bar{A}} / \underset{\sim}{A}^C$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的补集。

即： $\underset{\sim}{\bar{A}} / \underset{\sim}{A}^C \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{\bar{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

(4)空集：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$，称 $\underset{\sim}{A}$ 为空集。

即： $\underset{\sim}{A} = \phi \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$

(5)全集：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$，称 $\underset{\sim}{A}$ 为全集，记作 Ω。

即： $\underset{\sim}{A} = \Omega \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$

(6)并集：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$，

则称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的并集。

即：$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$

或 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \vee\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

(7) 交集：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$，

则称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的交集。

即：$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$

或 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \wedge\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

例 ① $\underset{\sim}{A}=\{\ (0.2,\quad 1)\ \}$，$\underset{\sim}{B}=\{\ (0.2,\quad 1)\ \}$：$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$

② $\underset{\sim}{C}=\{\ (0.7,\quad 1)\ \}$，$\underset{\sim}{D}=\{\ (0.0,\quad 1)\ \}$：

$\underset{\sim}{C}\supseteq\underset{\sim}{D}$，$\underset{\sim}{D}=\phi$，$\overline{C}=\{\ (\underset{\sim}{0.3}\quad 1)\ \}$

③ $\underset{\sim}{E}=\{\ (1.0,\quad 12)\ \}$：$\underset{\sim}{E}=\Omega$

例 $\underset{\sim}{A}=\{\ (0.1,\quad 1)\ \}$，$\underset{\sim}{B}=\{\ (0.5,\quad 1)\ \}$，

则：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\{\ (0.1\vee 0.5,\quad 1)\ \}=\{\ (0.5,\quad 1)\ \}$

$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\{\ (0.1\wedge 0.5,\quad 1)\ \}=\{\ (0.1,\quad 1)\ \}$

2. 运算的基本性质

（1）自反律： $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{A}$

（2）反对称律：若 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$， $\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{A}$，则 $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$

（3）交换律： $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$

（4）结合律： $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})$

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})$$

（5）分配律： $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$

$$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$$

（6）传递律：若 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$， $\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{C}$，则 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{C}$

（7）幂等律：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

（8）吸收律：$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

（9）对偶律：$\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}$，$\overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cup\overline{\underset{\sim}{B}}$，

也称德·摩根定律。

（10）对合律：$\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}}=\underset{\sim}{A}$，即双重否定律。

（11）定常律：$\underset{\sim}{A}\cup\Omega=\Omega$，$\underset{\sim}{A}\cap\Omega=\underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A}\cup\phi=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\phi=\phi$

（12) 一般地互补律不成立：$\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}\neq\Omega$，$\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}\neq\phi$

例 $\underset{\sim}{A}=\{\ (0.8,\quad a)\ \}$时，有 $\overline{\underset{\sim}{A}}=\{\ (0.2,\quad a)\ \}$，则：

$$\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}=\{\ (0.8\vee 0.2,\quad a)\ \}=\{\ (0.8,\quad a)\ \}$$

$$\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}=\{\ (0.8\wedge 0.2,\quad a)\ \}=\{\ (0.2,\quad a)\ \}$$

互补律 $\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}=\Omega$， $\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}=\phi$ 成立的特例：

$\underset{\sim}{A}=\{\ (0.0,\quad a)\ \}$时，$\overline{\underset{\sim}{A}}=\{\ (1.0,\quad a)\ \}$；

$\underset{\sim}{A}=\{\ (1.0,\quad a)\ \}$时，$\overline{\underset{\sim}{A}}=\{\ (0.0,\quad a)\ \}$

此时模糊集合退化为经典集合。

7.2.4 模糊集合与普通集合的相互转化

截集(cut set)是联系普通集合与模糊集合的桥梁，它能使模糊集合论中的问题转化为普通集合论的问题求解。

$$\text{模糊集合} \xrightarrow{\text{截集}} \text{普通集合}$$

例　假设有五个病人：x_1　x_2　x_3　x_4　x_5

体温分别为(℃)：38.9　37.0　37.2　39.2　38.1

则护士统计时有下面记录：

37.0℃以上者 5 人：x_1，x_2，x_3，x_4，x_5

37.5℃以上者 3 人：x_1，x_4，x_5

39.0℃以上者 1 人：x_4

发烧属于模糊概念，用模糊数学来描述更为合适。

根据医生的经验，可将各温度段用“发烧”的隶属度表示如下：

T>39.0℃——隶属度=1.0

38.5℃≤ T<39.0℃——隶属度=0.9

38.0℃≤ T<38.5℃——隶属度=0.7

37.0℃≤ T<38.0℃——隶属度=0.4

T<37.0℃——隶属度=0.0

用模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 表示“发烧病人”：

$$\underset{\sim}{A}=\{\ (0.9,x_1),\ \ (0.4,x_2),\ \ (0.4,x_3),\ \ (1.0,x_4),\ \ (0.7,x_5)\ \}$$

这样可以方便地对病人分类。例如，对隶属度≥0.9 的病人作为“发高烧”进行特护处理：$A_{0.9}=\{x_1,x_4\}$

类似的还可以有：

$$A_{0.8}=\{x_1,x_4\} \qquad A_{0.4}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$$

一般用 A_λ 表示由 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geq\lambda$ 的元素 x 组成的集合，由此引入截集的概念。

1. 截集定义

设给定模糊集合 $\underset{\sim}{A}$，论域 X，对任意 $\lambda\in[0,\ 1]$ 称

$$普通集合\ A_\lambda=\left\{x\mid x\in X,\ \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geq\lambda\right\}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集。

例　在前面的例 7.1 中，论域 $X=\{a,b,c,d\}$，模糊集合 $\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.5/c+0.2/d$，则 $\underset{\sim}{A}$ 的截集有：

$$A_1=\{a\},\quad A_{0.9}=\{a,b\},\quad A_{0.8}=\{a,b\},$$

$$A_{0.5}=\{a,b,c\},\quad A_{0.1}=\{a,b,c,d\},\quad A_0=X。$$

其中，截集 A_1 是模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的核。

2. 截集的三个性质

① $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$

例　$\underset{\sim}{A} = \{\ (0.5, a),\ \ (0.8, b)\ \}$，$\underset{\sim}{B} = \{\ (0.9, a),\ \ (0.2, b)\ \}$，则：

左：$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \{\ (0.5 \vee 0.9, a),\ \ (0.8 \vee 0.2, b)\ \} = \{\ (0.9, a),\ \ (0.8, b)\ \}$

$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_{0.5} = \{a, b\}$

右：$A_{0.5} = \{a, b\}$，$B_{0.5} = \{a\}$，有 $A_{0.5} \cup B_{0.5} = \{a, b\}$

所以：左=右

② $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$

左：$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{(0.5 \wedge 0.9, a), \quad (0.8 \wedge 0.2, b)\} = \{(0.5, a), \quad (0.2, b)\}$

$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_{0.3} = \{a\}$

右：$A_{0.3} = \{a, b\}$， $B_{0.3} = \{a\}$，有 $A_{0.3} \cap B_{0.3} = \{a\}$

所以：左=右

③ 若 $\lambda, \ \mu \in [0, \ 1]$，且 $\lambda \leq \mu$，则 $A_\lambda \supseteq A_\mu$

例　对 $\underset{\sim}{A} = \{(0.2, x_1), \quad (0.5, x_2), \quad (0.8, x_3), \quad (1.0, x_4), \quad (0.7, x_5)\}$

有　$A_{0.4} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$， $A_{0.5} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$， $A_{0.8} = \{x_3, x_4\}$

显然：$A_{0.5} \supset A_{0.8}$（或 $A_{0.5} \supseteq A_{0.8}$）

$A_{0.4} = A_{0.5}$（满足 $A_{0.4} \supseteq A_{0.5}$）

7.3 模糊关系与模糊矩阵

普通关系：二值的，存在或者不存在关系，
两者必居且仅居其一。

模糊关系：需要用描述关系程度的量补充描述，
关系程度通过隶属度表示。

7.3.1 模糊关系定义

1．基本概念

设X、Y是两个论域，

笛卡尔积：$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ 又称直积。

——由两个集合间元素无约束地搭配成的序偶(x, y)的全体构成的集合。

如果：　给无约束搭配施以某种约束

$\Downarrow$ 体现了一种特殊关系

接受约束的元素对便构成笛卡尔集中的一个<u>子集</u>

子集表现了一种关系

序偶中两个元素的排列是有序的：

对于 $X \times Y$ 中的元素必须是(x, y)， $x \in X$， $y \in Y$，

即(x, y)与(y, x)是不同的序偶。一般地，$X \times Y \neq Y \times X$ 。

普通集合论：

X到Y的一个关系，定义为$X \times Y$的一个子集R，记作

$$X \xrightarrow{R} Y$$

模糊关系的定义类似。

2．模糊关系定义

设 X、Y 是两个论域，称 $X \times Y$ 的一个模糊子集 $\underset{\sim}{R}$ 为从 X 到 Y 的一个模糊关系，记作

$$X \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} Y$$

模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}}$ 为

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}: \quad X \times Y \to [0 \quad 1]$$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_0, y_0)$ 叫做 (x_0, y_0) 具有关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度。

特别地，当 X=Y 时，称 $\underset{\sim}{R}$ 为“论域 X 中的模糊关系”。

例 7.8　X={张，王，赵}，$\underset{\sim}{R}$——朋友关系。则

$\underset{\sim}{R}$（张，王）=1 ---关系极好；

$\underset{\sim}{R}$（张，赵）=0.8 ---相对不错；

$\underset{\sim}{R}$（王，赵）=0.2 ---酒肉朋友；

例 7.9　设 X、Y 均为实数集合，对任意的 $x \in X$， $y \in Y$，“x 远大于 y”是一个 X 到 Y 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，其隶属函数可以描述为：

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le y \\ \left[1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1}, & x > y \end{cases}$$

计算有：

$$x = y + 1: \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \frac{1}{101}$$

$$x = y + 10: \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \frac{1}{2}$$

$$x = y + 100: \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \frac{100}{101}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \Big\downarrow \\ 1 \end{array}$$

例 7.10　医学上通常用公式体重(kg)=身高(cm)-100 来描述正常人的体重与身高的关系，这是一个普通的二元关系。模糊关系将能更客观地反映出身高与体重的关系。

<u>身高与标准体重间的模糊关系</u>

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$	40kg	50kg	60kg	70kg	80kg
140cm	1	0.8	0.2	0.1	0
150cm	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160cm	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170cm	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180cm	0	0.1	0.2	0.8	1

7.3.2 模糊关系的表示

1. 用模糊矩阵表示

对于矩阵 $\boldsymbol{R}=\left(r_{ij}\right)_{n\times m}$，若其所有元素满足 $r_{ij}\in[0,1]$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为模糊矩阵，其中 $r_{ij}=\mu_{\underset{\sim}{R}}\left(x_i,y_j\right)$。

当 X、Y 是有限论域时，模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 可以用模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示。

如：例7.10中的模糊关系对应的模糊矩阵见右。

$$\begin{array}{cc} & \text{体重 } y \\ \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} & \text{身高 } x \end{array}$$

特别地，当 $r_{ij}\in\{0,\ 1\}$时，矩阵 $\boldsymbol{R}$ 退化为布尔矩阵，

布尔矩阵可以表示一种普通关系。

2. 用有向图表示

例 7.11 设 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊关系“相像”，且有

$\underset{\sim}{R}$（张，王）=0.5，　$\underset{\sim}{R}$（张，赵）=0.8，$\underset{\sim}{R}$（王，赵）=0.2

有向图表示见下图：

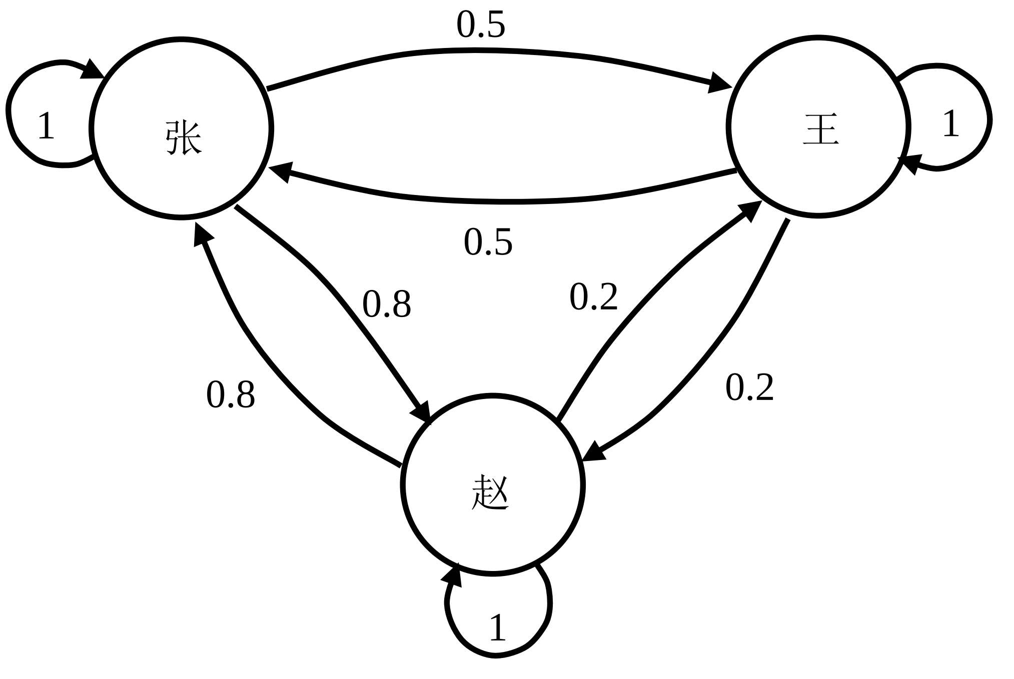


图 模糊关系用有向图表示

7.3.3 模糊关系的建立

计算 r_{ij}

第一步：正规化。将各代表点的统计指标数据标准化，以便进行分析和比较。为将标准化数据压缩到[0,1]闭区间，

可用极值标准化公式：$x=\dfrac{x'-x'_{\min}}{x'_{\max}-x'_{\min}}$

当 $x'=x'_{\max}$ 时，x=1；

当 $x'=x'_{\min}$ 时，x=0；

其他，取[0，1]之间的值。

第二步：计算被分类对象间具有此种关系的程度 r_{ij}，确定论域上模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的矩阵 $\boldsymbol{R}$。

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & & r_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$，n 为对象个数。

计算r_{ij}的常用方法：

1）欧式距离法

$$r_{ij}=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik}-x_{jk}\right)^2}$$

x_{ik} 和 x_{jk}：分别为第 i 个对象和第 j 个对象的第 k 个因子的值；

m：**因子/特征**的个数。

2）数量积法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 当 i=j \\ \sum_{k=1}^{m}\frac{x_{ik}\cdot x_{jk}}{M}, & 当 i\neq j\end{cases}$$

M：正数，满足

$$M\geq\max_{i,\,j}\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\cdot x_{jk})$$

3）相关系数法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-\bar{x}_i||x_{jk}-\bar{x}_j|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-\bar{x}_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{jk}-\bar{x}_j)^2\,|}}$$

其中，$\bar{x}_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}\quad \bar{x}_j=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{jk}$

4）最大最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\min\left(x_{ik},x_{jk}\right)}{\sum_{k=1}^{m}\max\left(x_{ik},x_{jk}\right)}$$

5）主观评定法

以百分制打分，然后除以100，得出[0，1]区间的一个数。

7.3.4 模糊关系和模糊矩阵的运算

1. 并、交、补运算

1）模糊关系的并、交、补运算

设论域 X 和 Y，$\underset{\sim}{R}$ 和 $\underset{\sim}{S}$ 均为从 X 到 Y 的模糊关系，

对于任意的 $(x, y) \in X \times Y$ 定义

$\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的并运算记为 $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}$，隶属函数为 $\mu_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \vee \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y)$

$\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的交运算记为 $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}$，隶属函数为 $\mu_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y)$

$\underset{\sim}{R}$ 的补运算记为 $\overline{\underset{\sim}{R}}$ ，隶属函数定义为 $\mu_{\overline{\underset{\sim}{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$

2）模糊矩阵的并、交、补运算

设 $\boldsymbol{R}=\left(r_{ij}\right)_{n\times m}$， $\boldsymbol{S}=\left(s_{ij}\right)_{n\times m}$，定义

$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=\left(r_{ij}\vee s_{ij}\right)$为模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的并运算；

$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}=\left(r_{ij}\wedge s_{ij}\right)$为模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的交运算；

$\overline{\boldsymbol{R}}=\left(1-r_{ij}\right)$为模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的补运算。

模糊关系并、交、补运算分别与模糊矩阵并、交、补运算对应。
模糊关系和模糊矩阵的运算实际上就是隶属度的运算。

例7.12 模糊关系运算。设论域X={x_1,x_2,x_3}, Y={y_1,y_2,y_3,y_4}, $\underset{\sim}{R}$ 和 $\underset{\sim}{S}$ 是两个X到Y的 模糊关系。

$\underset{\sim}{R}$ = “x 比 y 高”：

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0.1	0.8
x_2	0	0.8	0	0
x_3	0.1	0.8	1	0.8

$\underset{\sim}{S}$ = “x 比 y 胖”：

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0.4	0.2	0.1
x_2	0.5	0	1	1
x_3	0.5	0.1	0.2	0.6

求：a) 关系“x比y高或比y胖”；

b) 关系“与y相比，x又高又胖”；

c) 关系“x没y高”。

解：a) 可用 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的并集表示：

$\underset{\sim}{R}\bigcup\underset{\sim}{S}$：

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0.4	0.2	0.8
x_2	0.5	0.8	1	1
x_3	0.5	0.8	1	0.8

b)可用 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的交集表示：

$\underset{\sim}{R}\bigcap\underset{\sim}{S}$：

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0.1	0.1
x_2	0	0	0	0
x_3	0.1	0.1	0.2	0.6

$\underset{\sim}{R}$ = “x 比 y 高”：

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0.1	0.8
x_2	0	0.8	0	0
x_3	0.1	0.8	1	0.8

c) 关系“x 没 y 高”　可用 $\underset{\sim}{R}$ 的补集表示：

$\overline{\underset{\sim}{R}}$：

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	0.9	0.2
x_2	1	0.2	1	1
x_3	0.9	0.2	0	0.2

例 7.13　模糊矩阵运算，设 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.4 & 0.8\end{pmatrix}$、 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$ 、 $\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$ 、 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 。

解：
$$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.5\vee 0.8 & 0.3\vee 0.5\\ 0.4\vee 0.3 & 0.8\vee 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.4 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.5\wedge 0.8 & 0.3\wedge 0.5\\ 0.4\wedge 0.3 & 0.8\wedge 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix}1-0.5 & 1-0.3\\ 1-0.4 & 1-0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$$

2. 模糊关系的倒置与模糊矩阵的转置

1）模糊关系的倒置

设 $\underset{\sim}{R} \in X \times Y$，则 $\underset{\sim}{R}$ 的“倒置” $\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}} \in Y \times X$ 是指

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}}(y, x) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$$

—— 又称 $\underset{\sim}{R}$ 的逆关系

2）模糊矩阵的转置

设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n \times m}$，则称 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = (r_{ij}^{\mathrm{T}})_{m \times n}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的转置矩阵，

其中，

$$r_{ij}^{\mathrm{T}} = r_{ji}, \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

例7.14　模糊关系$\underset{\sim}{R}$ = "x比y高"　　　　对应的模糊矩阵

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.1 & 0.8 & 1 & 0.8 \end{array}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

则 $\underset{\sim}{R}$ 的逆关系　"y 比 x 低" 可以用 $\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}$ 表示：

$\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}$ = "y比x低"　　　　对应的模糊矩阵

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & 0 & 0 & 0.1 \\ y_2 & 0 & 0.8 & 0.8 \\ y_3 & 0.1 & 0 & 1 \\ y_4 & 0.8 & 0 & 0.8 \end{array}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \\ 0.1 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

原来的 "x_1 比 y_4 高，$\mu = 0.8$" 变为 "y_4 比 x_1 低，$\mu = 0.8$"

3．截矩阵与截关系

对任意 $\lambda \in [0,1]$，记 $\boldsymbol{R}_\lambda = \left(r_{ij}^\lambda\right)$，其中 $r_{ij}^\lambda = \begin{cases} 1, & r_{ij} \ge \lambda \\ 0, & r_{ij} < \lambda \end{cases}$，

称 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的 λ 截矩阵，它所对应的关系叫 $\underset{\sim}{R}$ 的截关系。

截矩阵必是布尔矩阵。

例　对关系矩阵如下：$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

则：$\boldsymbol{R}_{0.7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{R}_{0.4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 模糊关系合成与模糊矩阵合成

模糊关系 $\underset{\sim}{Q}=$ “x 比 y 年龄大”，$\underset{\sim}{R}=$ “y 比 z 年龄大”，则 “x 比 z 年龄大”。

1）模糊关系合成

设论域 X，Y，Z，$\underset{\sim}{Q}$ 和 $\underset{\sim}{R}$ 为两个模糊关系，且 $\underset{\sim}{Q}\in X\times Y$，$\underset{\sim}{R}\in Y\times Z$，定义 $\underset{\sim}{Q}$ 对 $\underset{\sim}{R}$ 的“合成”为 X 到 Z 的一个模糊关系 $\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{R}$，它具有隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{R}}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}\left(\mu_{\underset{\sim}{Q}}(x,y)\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\right)$$

幂运算：模糊关系与自身的合成运算，即：

$$\underset{\sim}{R}^2=\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\qquad\qquad \underset{\sim}{R}^n=\underset{\sim}{R}^{n-1}\circ\underset{\sim}{R}$$

2）模糊矩阵合成

设 $\boldsymbol{Q}=\left(q_{ij}\right)_{n\times m}$, $\boldsymbol{R}=\left(r_{jk}\right)_{m\times l}$，定义模糊矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的“合成”为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}$，且

$$\boldsymbol{S}=\left(s_{ik}\right)_{n\times l},\quad s_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}\left(q_{ij}\wedge r_{jk}\right)$$

$\boldsymbol{S}$ 也称作 $\boldsymbol{Q}$ 对 $\boldsymbol{R}$ 的模糊乘积。

对比　对有限论域：

类似

普通矩阵乘法运算　　模糊矩阵乘积运算

$$\left(\boldsymbol{Q}_{n\times m}\boldsymbol{R}_{m\times l}\right)_{ik}=\sum_{j=1}^{m} q_{ij}\cdot r_{jk}$$

$$\left(\boldsymbol{Q}_{n\times m}\boldsymbol{R}_{m\times l}\right)_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}\left(q_{ij}\wedge r_{jk}\right)$$

加法 → 求大

乘法 → 求小

例 7.15 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.5\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{Q}$对$\boldsymbol{R}$的合成矩阵。

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}(0.1\wedge 0.3)\vee(0.5\wedge 0.6) & (0.1\wedge 0.4)\vee(0.5\wedge 0.3)\\ (0.2\wedge 0.3)\vee(0.3\wedge 0.6) & (0.2\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$$

例 7.16 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 0.2\\ 1 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.5 & 1\\ 0.6 & 0.7 & 0.8\end{pmatrix}_{4\times 3}$，$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9\\ 0.9 & 0{,}1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}_{3\times 2}$，求合成矩阵。

解： 显然 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{Q}$ 是无意义的，求 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}$：

$s_{11}=(0.3\wedge 0.1)\vee(0.7\wedge 0.9)\vee(0.2\wedge 0.6)$

$=0.1\vee 0.7\vee 0.2=0.7$

$s_{12}=\cdots\cdots$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.9\\ 0.6 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{pmatrix}_{4\times 2}$$

与普通矩阵运算相同，模糊矩阵的合成运算不满足交换律，即 $\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{Q}$ 。

7.3.5 模糊关系的三大性质

1. 自反性(reflexivity)

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X \times X$ 中的模糊关系，对 $\forall x \in X$ 若存在 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性。其相应矩阵 $\boldsymbol{R}$ 称自反模糊矩阵，满足 $\boldsymbol{R} \supseteq \boldsymbol{I}$。

例 关系"等于"——具有自反性，

关系"了解"—不具有自反性。

2. 对称性(symmetry)

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X \times X$ 中的模糊关系，对 $\forall(x,y) \in X \times X$，若存在 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 满足对称性。其相应矩阵 $\boldsymbol{R}$ 称对称模糊矩阵，满足 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}$。

例 7.17　模糊矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.4\\ 0.2 & 1 & 0.7\\ 0.4 & 0.7 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\ 0.3 & 0.7 & 0.2\\ 0.6 & 0.2 & 1.0\end{pmatrix}$

a) $\boldsymbol{R}$ 具有对称性和自反性：可表示“相像”之类的关系。

如 x_1 像 x_1 自己（$\mu=1$）；x_1 像 x_2 的程度为 0.2，x_2 像 x_1 的程度也是 0.2。

b) $\boldsymbol{S}$ 只有对称性，无自反性。

3. 传递性 (transitivity)

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X\times X$ 中的模糊关系，对 $\forall(x,y),(y,z),(x,z)\in X\times X$，若存在：

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\lambda\text{，}\quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\geq\lambda\text{ 时，}\quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\lambda\text{ 成立}$$

则称 $\underset{\sim}{R}$ 满足传递性。其相应矩阵 $\boldsymbol{R}$ 称为传递模糊矩阵，满足

$$\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$$

说明：

1)　矩阵 $\boldsymbol{R} \supseteq \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{R}$ 可以理解为：　$\boldsymbol{R}(x,z) \supseteq \boldsymbol{R}(x,y) \circ \boldsymbol{R}(y,z)$。

注意：关系 $\underset{\sim}{R}$ 始终不变。

$\boldsymbol{R}(x, y)$与 $\boldsymbol{R}(y, z)$合成后的隶属度反映的是模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 存在的最低基本条件，只要 x、z 具有关系 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属度大于或等于这个合成后的隶属度，就说明这个模糊关系可以传递下去。

2)　其中“若存在 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \geq \lambda$，$\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \geq \lambda$ 时，有 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \lambda$ 成立”，也可描述为：

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z) \geq \bigvee_{y} \left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z) \right]$$

例　“个子高”——具有传递性；

“认　识”——不具有传递性。

例7.18　判断 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ 是否是传递模糊矩阵。

解：$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \overset{?}{\subseteq} \boldsymbol{R}$

$\therefore$ $\boldsymbol{R}$是一个传递模糊矩阵。

4. 模糊等价关系和模糊相似关系

定义：

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X \times X$ 中的模糊关系，若 $\underset{\sim}{R}$ 具有**自反性**和**对称性**，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为**模糊相似**关系，$\underset{\sim}{R}$ 对应的矩阵称**模糊相似矩阵**；

若 $\underset{\sim}{R}$ 具有**自反性**、**对称性**和**传递性**，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为**模糊等价**关系，与 $\underset{\sim}{R}$ 对应的矩阵称**模糊等价矩阵**。

在应用模糊关系分类时，必须保证模糊关系是等价的，这时可利用**截矩阵**直接进行分类。

7.4 模糊模式分类的直接方法和间接方法

7.4.1 直接方法——隶属原则

直接计算样本的隶属度，根据隶属度最大原则进行分类。

——用于单个模式的识别

隶属原则：

设论域 X 中有 M 个模糊集 $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_M$ ，且对每一个 $\underset{\sim}{A}_i$ 均有隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x)$，则对任一 $x_0 \in X$ ，若有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x_0) = \max\left[\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_0), \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_0), \cdots, \mu_{\underset{\sim}{A}_M}(x_0)\right]$$

则认为 x_0 隶属于 $\underset{\sim}{A}_i$ 。

隶属原则是显然的，易于公认的，但其分类效果，十分依赖于建立已知模式类隶属函数的技巧。

例 7.19　将人分为老、中、青三类，它们分别对应于三个模糊集合 $\underset{\sim}{A}_1$、$\underset{\sim}{A}_2$、$\underset{\sim}{A}_3$，其隶属函数为：

$$
\text{老：}\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 50 \\ 2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50<x\le 60 \\ 1-2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\le 70 \\ 1, & x>70 \end{cases}
$$

中： $$\mu_{\underset{\sim}{A_2}}(x)=\begin{cases} 0, & 0 \le x \le 20 \\ 2(\dfrac{x-20}{20})^2, & 20 < x \le 30 \\ 1-2(\dfrac{x-45}{30})^2, & 30 < x \le 60 \\ 2(\dfrac{x-70}{20})^2, & 60 < x \le 70 \\ 0, & x > 70 \end{cases}$$

青： $$\mu_{\underset{\sim}{A_3}}(x)=\begin{cases} 1, & 0 \le x \le 20 \\ 1-2(\dfrac{x-20}{20})^2, & 20 < x \le 30 \\ 2(\dfrac{x-40}{20})^2, & 30 < x \le 40 \\ 0, & x > 40 \end{cases}$$

现有45岁、30岁、65岁、21岁各一人，问应分别属于哪一类？

解：① 将 x=45 代入三个隶属函数：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(45)=0,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(45)=1,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_3}(45)=0,$$

即 $$\max[0,\ 1,\ 0]=1=\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(45),$$

∴ 45 岁的人属于 $\underset{\sim}{A}_2$ 中年人。

② x=30： $$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(30)=0,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(30)=0.5,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_3}(30)=0.5,$$

$$\max[0,\ 0.5,\ 0.5]=0.5=\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(30)=\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(30)$$

∴ 30 岁的人属于 $\underset{\sim}{A}_3$ 青年人或 $\underset{\sim}{A}_2$ 中年人。

③ x=65： $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(65) = 7/8$， $\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(65) = 1/8$， $\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(65) = 0$，

$$\max[7/8,\quad 1/8,\quad 0] = 7/8 = \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(65)$$

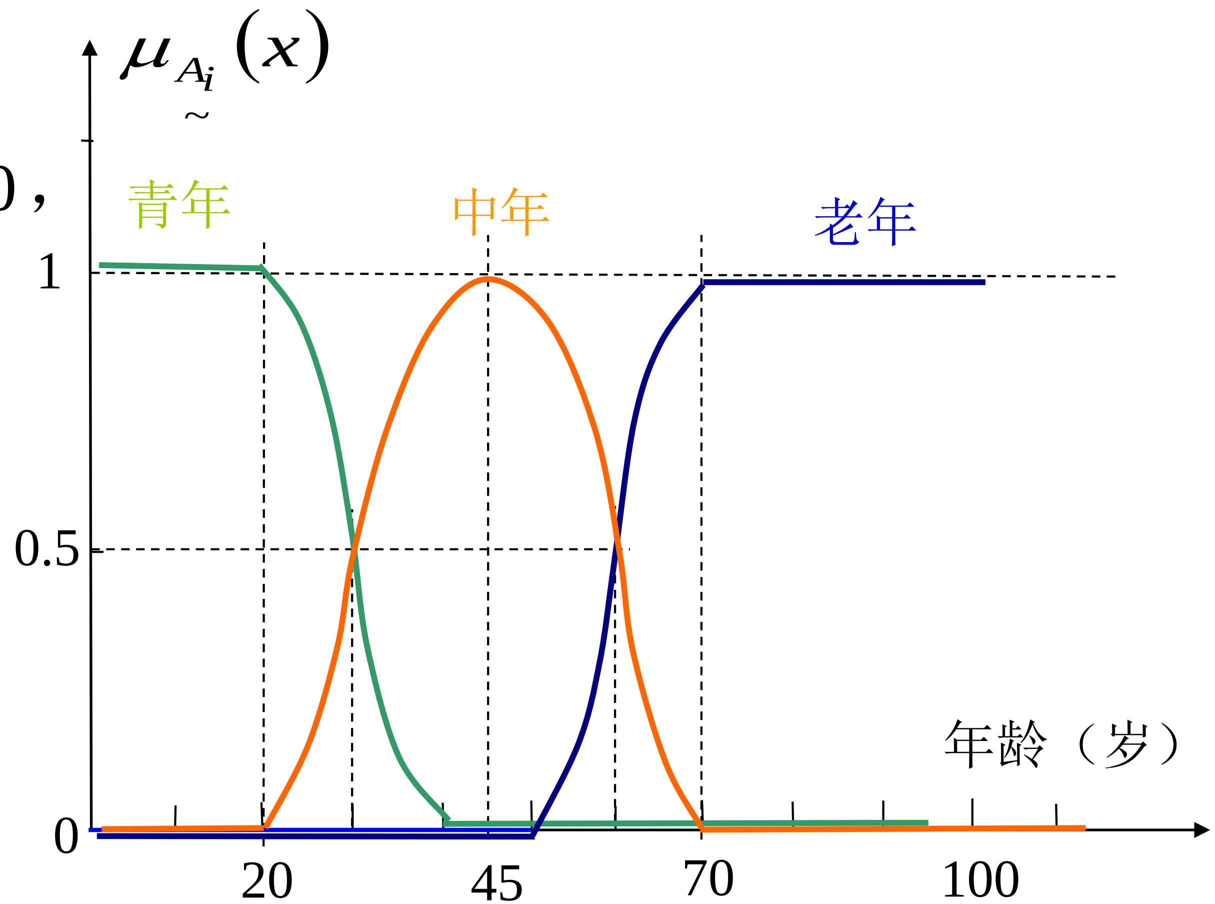
∴ 属于老年人。

④x=21： $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(21) = 0$，

$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(21) = 1/200$，

$\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(21) = 199/200$，

∴属于青年人。



例7.20 染色体识别或白血球分类问题。这类问题最终归结为识别三角形。即判断一个三角形属于“等腰三角形(I)、直角三角形(R)、等腰直角三角形(IR)、正三角形(E)、其他三角形(T)”中的哪一种。

可以规定隶属函数如下：设三角形三个内角分别为 A、B、C，且 $A \geqslant B \geqslant C \geqslant 0$，则：

等腰三角形： $\mu_{\underset{\sim}{I}}(A,B,C)=1-\frac{1}{60}\min(A-B,B-C)$

直角三角形： $\mu_{\underset{\sim}{R}}(A,B,C)=1-\frac{1}{90}|A-90|$

正三角形： $\mu_{\underset{\sim}{E}}(A,B,C)=1-\frac{1}{180}(A-C)$

等腰直角三角形：由 $\underset{\sim}{IR} = \underset{\sim}{I} \cap \underset{\sim}{R}$ 得

$$\mu_{\underset{\sim}{IR}}(A,B,C) = \min\left[\mu_{\underset{\sim}{I}}(A,B,C),\quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(A,B,C)\right]$$

其他三角形：由 $\underset{\sim}{T} = \overline{\underset{\sim}{I}} \cap \overline{\underset{\sim}{E}} \cap \overline{\underset{\sim}{R}}$ 得

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(A,B,C) = \min[\ 1-\mu_{\underset{\sim}{I}}(A,B,C)\ ,\ 1-\mu_{\underset{\sim}{R}}(A,B,C)\ ,\ 1-\mu_{\underset{\sim}{E}}(A,B,C)]$$

假设给定一三角形 $x_0 = (85, 50, 45)$，问属于哪种三角形？

解：$$\mu_{\underset{\sim}{I}}(x_0) = 1 - \frac{1}{60}\min(85-50, 50-45) = 1 - \frac{5}{60} = 0.917$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_0) = 1 - \frac{1}{90}|85-90| = 1 - \frac{5}{90} = 0.944$$

$$\mu_{\underset{\sim}{E}}(x_0)=1-\frac{1}{180}(85-45)=1-\frac{40}{180}=0.778$$

$$\mu_{\underset{\sim}{IR}}(x_0)=\min(0.917,\quad 0.944)=0.917$$

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(x_0)=\min(1-0.917,\quad 1-0.944,\quad 1-0.778)$$

$$=\min(0.083,\quad 0.056,\quad 0.222)=0.056$$

$\because\quad \max(0.917,\quad 0.944,\quad 0.778,\quad 0.917,\quad 0.056)=0.944=\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_0)$

$\therefore\quad x_0$ 近似为直角三角形。

7.4.2 间接方法——择近原则

求模糊集合之间接近程度的问题。

——适合于模糊集

1．模糊集合间的距离

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$， $\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{B}$ 为 X 中的模糊集合，p 为正实数，则定义

$$d_M(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|^p\right)^{1/p}$$

为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的明可夫斯基距离。

聚类分析中
两向量间的明氏距离

当 X 是实数域 R 上的有限区间时，

$$d_M(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\left(\int_a^b\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

当 X 扩展为整个实数域时，区间边界 a，b 分别用 $-\infty$ 和 ∞ 替代。

两种常用的绝对距离公式：

当 $p=1$ 时称为海明距离，或线性距离，记为 $d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$，

$$d_H(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|$$

街坊距离

当 $p=2$ 时称为欧几里得距离，记为 $d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$，

$$d_E(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|^2}$$

欧氏距离

其他：相对距离、加权距离 等。

2. 贴近度

令 $\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{B}$， $\underset{\sim}{C}$ 为论域 X 中的模糊集合，若映射

$$\sigma : X \times X \longrightarrow [0,\ \ 1]$$

具有性质

说明两个相同的模糊集的贴近度最大

① $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}\right) = 1$；

要求贴近度映射具有对称性

② $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) = \sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}\right)$；

③ 对任意的 $x \in X$， 由 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ 或

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \ge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \ge \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ 可得 $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}\right) \le \sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}\right)$。

则称 $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的**贴近度**。

描述了两个较“接近”的模糊集合的贴近度也较大

模糊集合贴近度的具体形式不唯一。

两种常用贴近度：

1) 距离贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 1 - C[d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})]^{\alpha}$$

C 和 α：适当选择的参数；

$d\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$：不同的距离。

当 $d\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$为海明距离时即为海明贴近度，定义为

$$\sigma_H\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}\left(x_i\right) - \mu_{\underset{\sim}{B}}\left(x_i\right)\right|$$

n：集合中元素的个数。

2）格贴近度

$$\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)=\frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B}+\left(1-\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B}\right)\right]$$

其中，$\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的内积，$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的外积。

内积、外积分别定义为

$$\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B}=\bigvee_{x \in X}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}\left(x_i\right) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}\left(x_i\right)\right]$$

$$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B}=\bigwedge_{x \in X}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}\left(x_i\right) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}\left(x_i\right)\right]$$

例 7.21　设论域为 $X=\left\{x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4\right\}$，$\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 是论域 X

上的两个模糊集，分别为

$$\underset{\sim}{A}=\left\{0.5/x_1,\ 0.7/x_2,\ 0.4/x_3,\ 0.3/x_4\right\}$$

$$\underset{\sim}{B}=\left\{0.7/x_1,\ 0.8/x_2,\ 0.7/x_3,\ 0.5/x_4\right\}$$

下式为采用内积、外积函数表示的一种贴近度

$$\sigma\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)=1-(\overline{A}-\underline{A})+(\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B}-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})$$

其中 $\overline{A}$，$\underline{A}$ 分别为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 中隶属度的最大值和最小值，求贴近度 $\sigma\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)$。

解： $\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B}=\bigvee_{x\in X}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right]$

$$=(0.5\wedge0.7)\vee(0.7\wedge0.8)\vee(0.4\wedge0.7)\vee(0.3\wedge0.5)$$

$$=0.5\vee0.7\vee0.4\vee0.3=0.7$$

$$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{x \in X} \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}\left(x_i\right) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}\left(x_i\right) \right]$$

$$= (0.5 \vee 0.7) \wedge (0.7 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 0.7) \wedge (0.3 \vee 0.5)$$

$$= 0.7 \wedge 0.8 \wedge 0.7 \wedge 0.5 = 0.5$$

$$\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) = 1 - (\overline{A} - \underline{A}) + (\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B})$$

$$= 1 - (0.7 - 0.3) + (0.7 - 0.5) = 1 - 0.4 + 0.2 = 0.8$$

3. 择近原则

设论域 X 中有 n 个已知类别模糊子集 $\underset{\sim}{A}_1$， $\underset{\sim}{A}_2$， …， $\underset{\sim}{A}_n$，

若有 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 使得

$$\sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_i\right) = \max_{1\le j\le n} \sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_j\right)$$

或

$$d\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_i\right) = \min_{1\le j\le n} d\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_j\right)$$

则称相对于 $\underset{\sim}{A}_1$， $\underset{\sim}{A}_2$， …， $\underset{\sim}{A}_{i-1}$， $\underset{\sim}{A}_{i+1}$， …， $\underset{\sim}{A}_n$ 而言， $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}_i$ 最接近， $\underset{\sim}{B}$ 归入 $\underset{\sim}{A}_i$ 模式类。

例 7.22　设 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$，标准模型由以下模糊集合表示：

$$\underset{\sim}{A}_1=\{(1.0, x_1), (0.8, x_2), (0.5, x_3), (0.4, x_4), (0.0, x_5), (0.1, x_6)\}$$

$$\underset{\sim}{A}_2=\{(0.0, x_1), (1.0, x_2), (0.2, x_3), (0.7, x_4), (0.5, x_5), (0.8, x_6)\}$$

$$\underset{\sim}{A}_3=\{(0.8, x_1), (0.2, x_2), (0, x_3), (0.5, x_4), (1.0, x_5), (0.7, x_6)\}$$

$$\underset{\sim}{A}_4=\{(0.5, x_1), (0.7, x_2), (0.8, x_3), (0, x_4), (0.5, x_5), (1.0, x_6)\}$$

现有一待识别的模型

$$\underset{\sim}{B}=\{(0.7, x_1), (0.2, x_2), (0.1, x_3), (0.4, x_4), (1.0, x_5), (0.8, x_6)\}$$

采用海明贴近度计算，$\underset{\sim}{B}$ 与哪个标准模型最相近？

解：海明贴近度： $\sigma_H\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_1}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.3+0.6+0.4+0+1+0.7\right)=1-\frac{3}{6}=0.5$$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_2}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.7+0.8+0.1+0.3+0.5+0\right)=1-\frac{2.4}{6}=0.6$$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_3}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.1+0+0.1+0.1+0+0.1\right)=1-\frac{0.4}{6}=0.93$$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_4}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.2+0.5+0.7+0.4+0.5+0.2\right)=1-\frac{2.5}{6}=0.58$$

$\because \quad \max\left(0.5, \quad 0.6, \quad 0.93, \quad 0.58\right)=0.93=\sigma_H(\underset{\sim}{A_3}, \underset{\sim}{B})$

$\therefore \quad \underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A_3}$ 最相似。

7.5　模糊聚类分析法

7.5.1 基于模式糊等价关系的聚类分析法

这类方法依据截矩阵进行分类，称为**截矩阵分类法**。

只有模糊等价关系才能用模糊等价矩阵进行截矩阵分类。

包括：

* 对于模糊等价关系：

可以用模糊等价矩阵的截矩阵直接进行模式分类。

* 对模糊相似关系：

必须由相应的模糊相似矩阵生成模糊等价矩阵，然后对生成的等价矩阵利用截矩阵的办法分类。

1．模糊等价关系的截矩阵分类法

定理 1: 设 $\boldsymbol{R}$ 是 $n\times n$ 阶模糊等价矩阵，当且仅当 $\forall\lambda\in[0,\ 1]$ 时，$\boldsymbol{R}_\lambda$ 都是等价的布尔矩阵。

定理 1 知：若 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊等价关系，则对于给定的 $\lambda\in[0,\ 1]$ 便可得到相应的普通等价关系 R_λ，即得到了一个 λ 水平的分类。

定理 2: 若 $0\le\lambda\le\mu\le1$，则 $\boldsymbol{R}_\mu$ 所分出的每一类必是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 所分出的某一类的子类，或称 $\boldsymbol{R}_\mu$ 的分类法是 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 分类法的"加细"。

说明：若样本 $\mathbf{x}_i$、$\mathbf{x}_j$ 按 $\boldsymbol{R}_\mu$ 可归为一类，则按 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 也必被归为一类。

通常根据规定的类别数，选择合适的 λ 值进行分类。或将 λ 自 1 逐渐降为 0，分类由细变粗，逐步归并，形成态聚类图。

例 7.23　设论域 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$，给定模糊关系矩阵：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}$$ 要求按不同λ水平分类。

解：矩阵显然具有自反性、对称性。计算 $\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$$

$\because\ \boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$

$\therefore\ \boldsymbol{R}$ 为一模糊等价矩阵，可据不同 λ 水平分类。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\lambda=1$：

$$R_1=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

此时共分五类：

$\{x_1\}$、$\{x_2\}$、$\{x_3\}$、$\{x_4\}$、$\{x_5\}$，

“最细”的分类。

2) $\lambda=0.62$：

$$R_{0.62}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

此时分为 4 类：

$\{x_1, x_3\}$、$\{x_2\}$、$\{x_4\}$、$\{x_5\}$。

$$
R=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}
$$

3) $\lambda = 0.48$：

$$
R_{0.48} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
$$

此时分为 3 类：

$\{x_1, x_2, x_3\}$、

$\{x_4\}$、$\{x_5\}$。

4) $\lambda = 0.47$：

$$
R_{0.47} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
$$

此时分为 2 类：

$\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$、

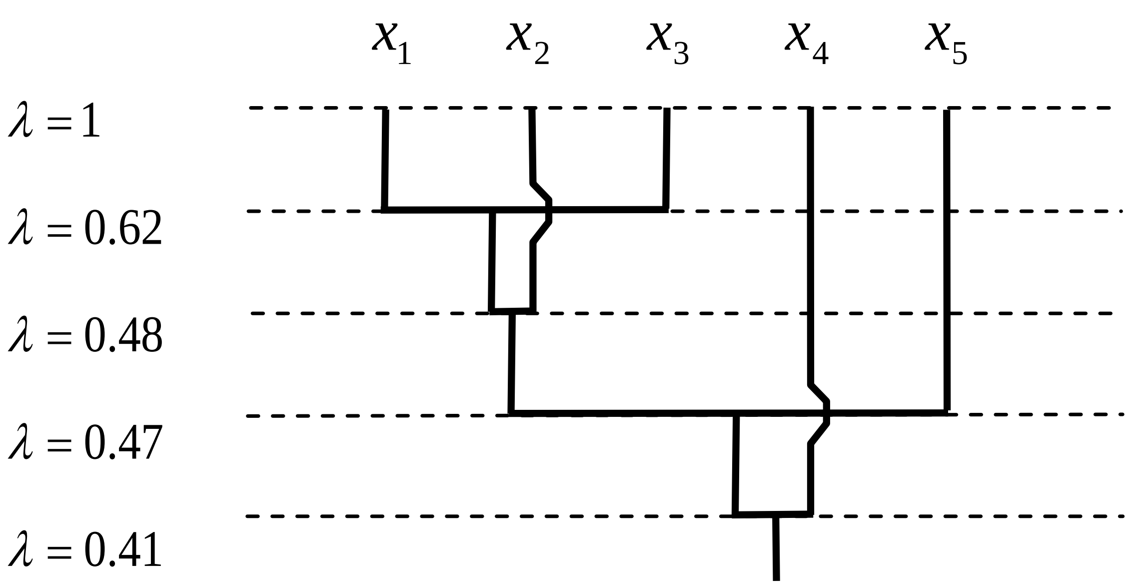
$\{x_4\}$。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ 0.48 & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ 0.62 & 0.48 & 1 & 041 & 0.47 \\ 0.41 & 0.41 & 0.41 & 1 & 0.41 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $\lambda = 0.41$： $R_{0.41}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

此时五个元素合为 1 类，即最粗的分类。

动态聚类图：



2．模糊相似关系的截矩阵分类法

必须用模糊相似矩阵生成一个模糊等价矩阵。

直接用模糊相似关系进行分类会出现什么问题?

例　设有五种矿石，按其颜色、比重等性质得出描述其“相似

程度”的模糊关系矩阵如下：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\boldsymbol{R} = & \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}
\end{array}
$$

现要求按 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i, x_j) \geq 0.8$，　$i, j = 1, 2, \cdots, 5$ 进行分类。

（1）判断是什么矩阵：

矩阵$\boldsymbol{R}$的自反性、对称性是明显的，计算传递性：

$$\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2\\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9\\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5\\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0 & 0.1 & 0.2\\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0 & 0.9\\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0.5\\ 0.2 & 0.9 & 0 & 0.5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.4 & 0.2 & 0.8\\ 0.8 & 1 & 0.4 & 0.5 & 0.9\\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0 & 0.4\\ 0.2 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5\\ 0.8 & 0.9 & 0.4 & 0.5 & 1\end{pmatrix}$$

$\because\ \boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$不成立，

故 $\boldsymbol{R}$ 不具有传递性，

是相似矩阵。

（2）分析：若直接分类，规定“相似程度”≥0.8 的为一类，

$$\left.\begin{array}{l}\text{则}\quad x_1\text{、}\ x_2\text{、}\ x_5\text{为一类，}\\ \text{但}\quad x_1\text{与}x_5\text{相似度仅为“0.2”，}\end{array}\right\}\text{产生矛盾。}$$

（3）处理方法：对于模糊相似关系 $\underset{\sim}{R}$，其矩阵 $\boldsymbol{R}$ 逐步平方：

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2,\quad \boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}^4,\quad \cdots\cdots$$

直至 $\boldsymbol{R}^{2k}=\boldsymbol{R}^k$ 为止，则 $\boldsymbol{R}^k$ 为模糊等价矩阵。

给定一个模糊相似矩阵就可以得到一个模糊等价矩阵。

对于 n 阶自反模糊矩阵，最多只需 $(\log_2 n)+1$ 步运算便可得到其模糊等价矩阵。如上例中，$(\log_2 5)+1=3.\cdots$，最多 3 步运算即可得到等价矩阵。即

Step1： $\boldsymbol{R}^2\neq\boldsymbol{R}$

Step2： $\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{R}^2$， $\boldsymbol{R}^4\neq\boldsymbol{R}^2$

Step3： $\boldsymbol{R}^8=\boldsymbol{R}^4\circ\boldsymbol{R}^4$， $\boldsymbol{R}^8=\boldsymbol{R}^4$

$\therefore$ $\boldsymbol{R}^4$ 是模糊等价矩阵，可用于分类。

7.5.2 模糊相似关系直接用于分类

对于模糊相似关系，需要改造成为模糊等价关系，才能利用截矩阵的方法进行正确分类。但多次矩阵相乘，计算麻烦。为此寻找由模糊相似矩阵直接进行聚类的方法，如最大树法。

最大树法：

(1) 画出被分类的元素集：从矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中按 r_{ij} 从大到小的顺序依次连边，标上权重，若在某步会出现回路（即已有一通路），便不画那一步，直到所有元素连通为止（可以不唯一）。

(2) 取定 λ，砍去权重低于 λ 的边，即为分类：互相连通的元素归为同类。

例7.24 设有两个家庭，每家3-5人，选每个人的一张照片，共8张，混放在一起，将照片两两对照，得出描述其“相似程度”的模糊关系矩阵。要求按相似程度聚类，希望把两个家庭分开。

r_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	0	1						
3	0	0	1					
4	0	0.8	0	1				
5	0.5	0	0.2	0	1			
6	0	0.8	0	0.4	0	1		
7	0.4	0.2	0.2	0	0.8	0	1	
8	0	0.5	0.2	0	0	0.8	0	1

解：(1) 按模糊相似矩阵，画出被分类的元素集，构造“最大树”。

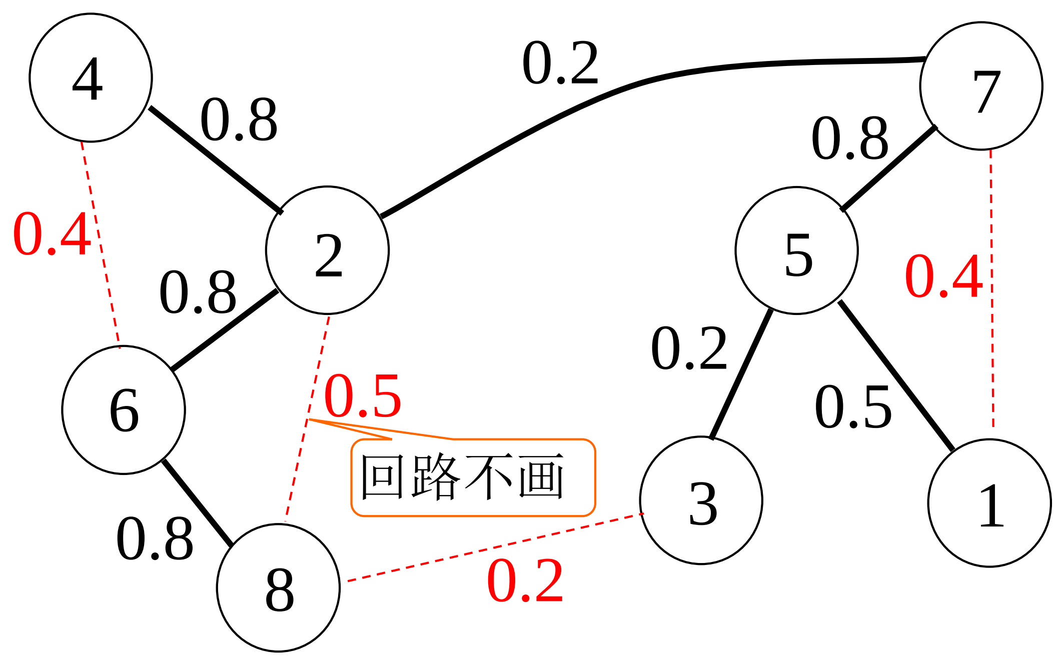
a) 逐列画出最大的 $\mu = 0.8$ 的元素集，标出权重。

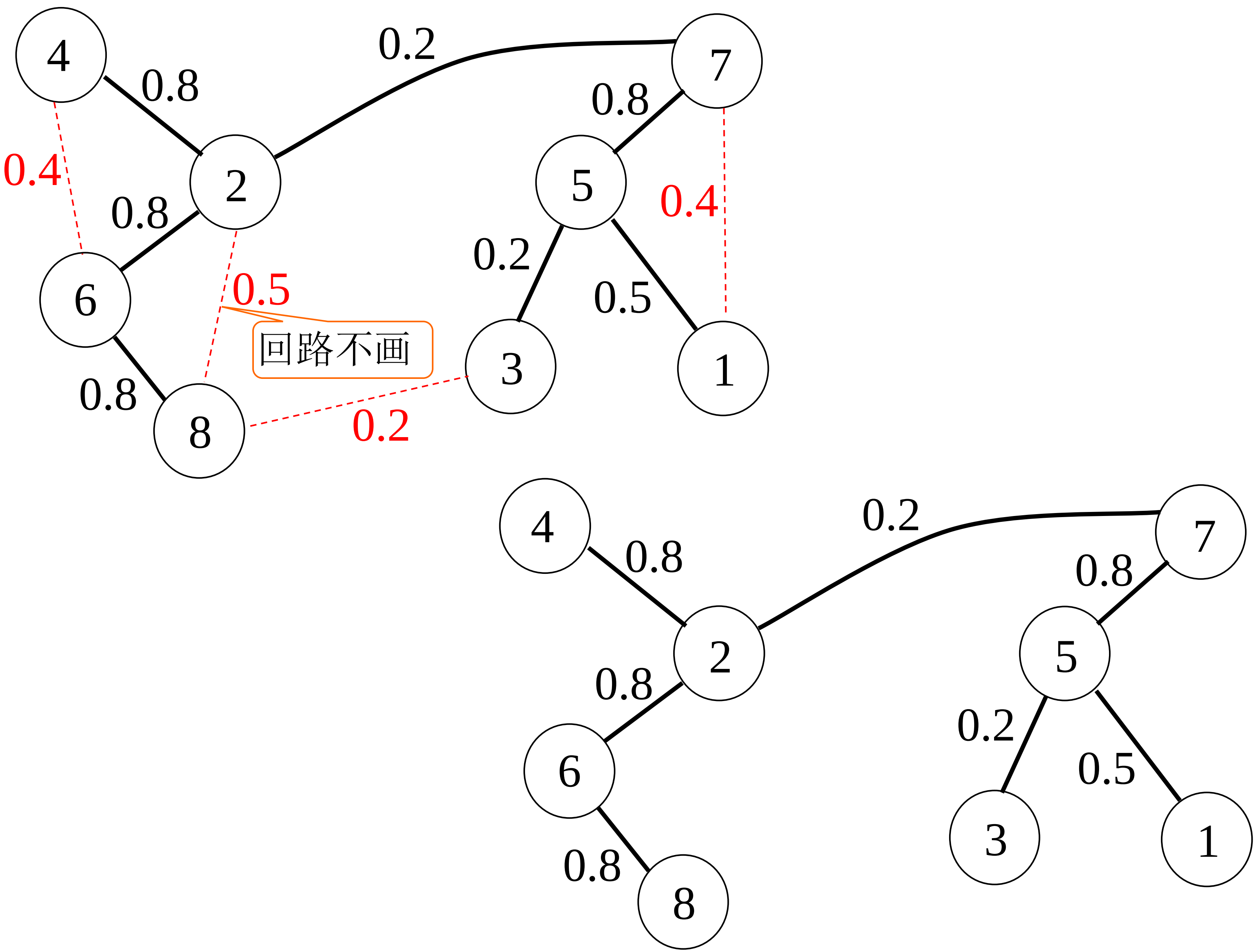
b) 逐列画出次大的 $\mu = 0.5$ 的元素集，标出权重。

c) 依次逐列画出 $\mu = 0.4$、 $\mu = 0.2$、……。

当全部连通时，检查一下全部元素是否都已出现，即保证所有元素都是连通的。最大树即构造好。

r_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	0	1						
3	0	0	1					
4	0	0.8	0	1				
5	0.5	0	0.2	0	1			
6	0	0.8	0	0.4	0	1		
7	0.4	0.2	0.2	0	0.8	0	1	
8	0	0.5	0.2	0	0	0.8	0	1

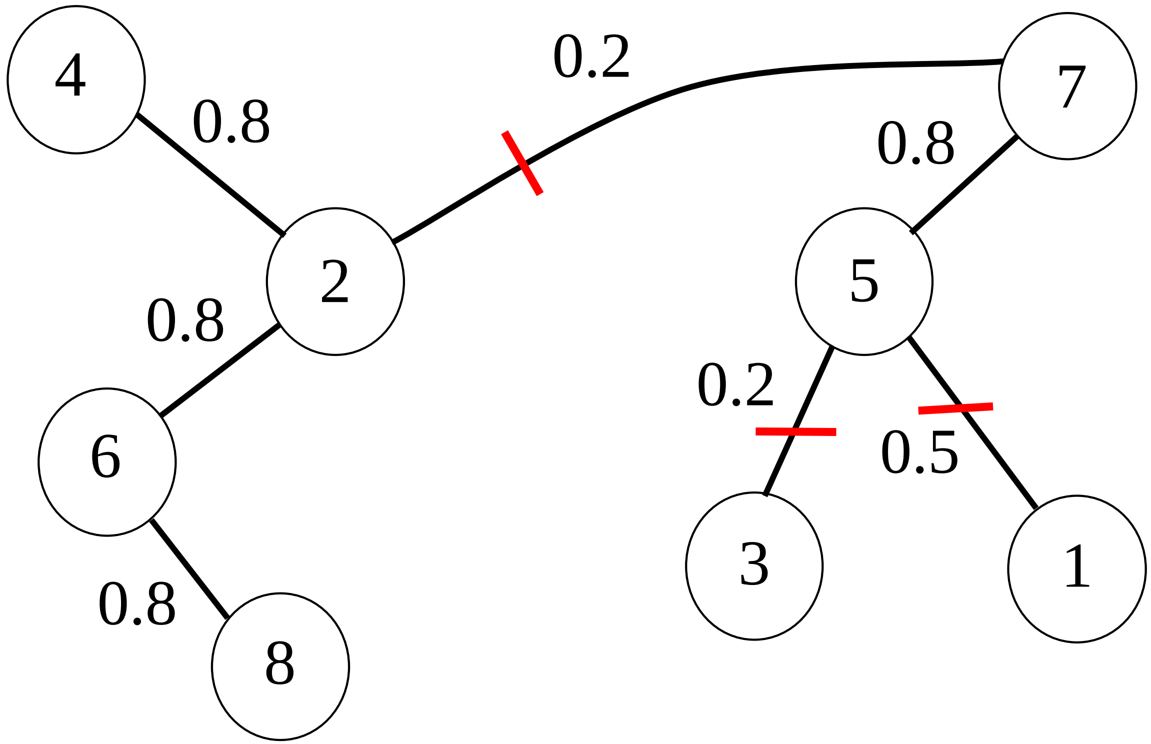




4
2
6
8
7
5
3
1
0.8
0.2
0.4
0.5
回路不画

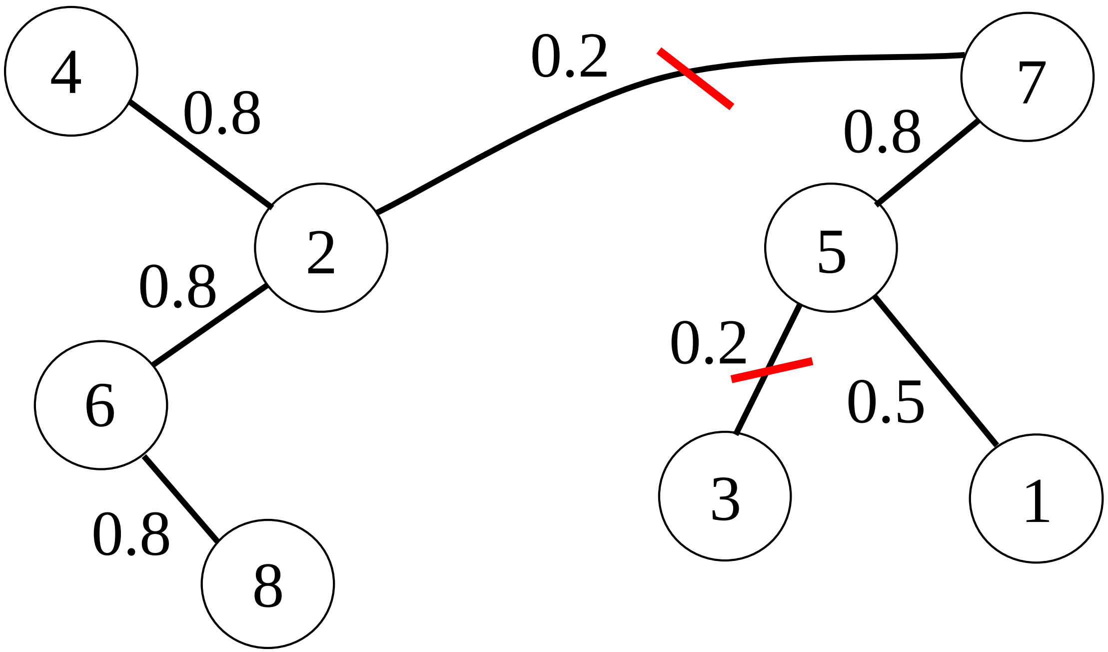
（2）按 λ 进行分类，λ 按从大到小的方式选择。

a) 以 $\lambda < 0.8$ 为限，截断相应的边：



得 4 类：$V_1 = \{2,4,6,8\}$，$V_2 = \{5,7\}$，$V_3 = \{3\}$，$V_4 = \{1\}$。

b)　以 $\lambda < 0.5$ 为限，截断相应的边：



得 3 类：

$V_1 = \{2,4,6,8\}$，

$V_2 = \{1,5,7\}$，

$V_3 = \{3\}$

c) 以 $\lambda < 0.4$ 为限，截断相应的边：同上。

d) 以 $\lambda < 0.2$ 为限，截断相应的边，得 1 类（不合题意）。

故只有 b)符合题意，其中 $\{3\}$ 不是两个家庭中的成员。

注意：最大树不唯一，但取截集后，所得子树相同。

7.5.3 模糊K-均值算法

由聚类分析中动态聚类法中的**K均值算法**派生出来。

K均值算法回顾：

①任选K个聚类中心；

②按最近邻规则聚类；

③根据聚类结果计算新的聚类中心，

比较新旧聚类中心是否相等；

④新旧中心相等，结束；否则回到②。

模糊K均值算法基本思想：

首先设定一些类及每个样本对各类的隶属度；

然后通过迭代，不断调整隶属度直至收敛。

步骤：

(1) 确定模式类数K，$1<K<N$，N为样本个数。

(2) 根据先验知识确定样本从属于各类的隶属度$\mu_{ij}(0)$，

建立初始隶属度矩阵$\boldsymbol{U}(0)=[\mu_{ij}(0)]$，

i 为类别编号、矩阵的行号，

j 为样本编号、矩阵的列号。

矩阵 $\boldsymbol{U}(0)$每列元素之和等于 1。

μ_{13}

$$\boldsymbol{U}(0)=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4\end{array} & \\ \begin{pmatrix}0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.9\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\omega_1\\ \omega_2\end{array}\end{array}$$

(3) 求各类的聚类中心 $\mathbf{Z}_i(L)$，L 为迭代次数。

$$\mathbf{Z}_i(L)=\frac{\sum_{j=1}^{N}[\mu_{ij}(L)]^m \mathbf{x}_j}{\sum_{j=1}^{N}[\mu_{ij}(L)]^m} \quad i=1,2,\cdots\cdots,K; \quad m\geq 2$$

加权平均

如，3个样本时： $\mathbf{Z}_i=\dfrac{\mu_{i1}^m\mathbf{x}_1+\mu_{i2}^m\mathbf{x}_2+\mu_{i3}^m\mathbf{x}_3}{\mu_{i1}^m+\mu_{i2}^m+\mu_{i3}^m}$

式中，参数m是一个控制聚类结果模糊程度的常数。可以看出：各聚类中心的计算必须用到全部的N个样本，这是与一般**K均值算法**的区别之一。

比较：K 均值法 $\mathbf{Z}_i(r+1)=\dfrac{1}{N_i}\sum_{\mathbf{X}\in G_i(r+1)}\mathbf{X} \qquad i=1,2,\cdots,K$

!

(4) 计算新的隶属度矩阵 $\boldsymbol{U}(L+1)$，矩阵元素计算如下：

$$\mu_{ij}(L+1)=\frac{1}{\sum_{p=1}^{K}\left(\frac{d_{ij}}{d_{pj}}\right)^{2/(m-1)}}$$

类似于相对距离

$$i=1,2,\cdots,K;\qquad j=1,2,\cdots,N,\quad m\geq 2$$

式中，d_{ij} 是第 L 次迭代完成时，第 j 个样本到第 i 类聚类中心 $\boldsymbol{Z}_i(L)$ 的距离。

如，当有两个聚类中心时，样本j对两个类别隶属度的计算：

$$\mu_{1j}=\frac{1}{\left(\frac{d_{1j}}{d_{1j}}\right)^{2/(m-1)}+\left(\frac{d_{1j}}{d_{2j}}\right)^{2/(m-1)}}\qquad \mu_{2j}=\frac{1}{\left(\frac{d_{2j}}{d_{1j}}\right)^{2/(m-1)}+\left(\frac{d_{2j}}{d_{2j}}\right)^{2/(m-1)}}$$

可见：d_{ij} 越大，$\mu_{ij}(L+1)$越小。

$$\mu_{ij}(L+1)=\frac{1}{\sum_{p=1}^{K}\left(\frac{d_{ij}}{d_{pj}}\right)^{2/(m-1)}}$$

为避免分母为零，特规定：

若 $d_{ij}=0$，则 $\mu_{ij}(L+1)=1,\ \ \mu_{pj}(L+1)=0(p\neq i)$

(5) 回到(3)求聚类中心，重复至收敛。收敛条件：

$$\max_{i,j}\left\{\left|\mu_{ij}(L+1)-\mu_{ij}(L)\right|\right\}\leq\varepsilon$$，ε 为规定的参数。

当算法收敛时，就得到各类的聚类中心以及表示各样本对各类隶属程度的隶属度矩阵，模糊聚类到此结束。此时，准则函数

$$J=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{N}[\mu_{ij}(L+1)]^{m}\left\|\mathbf{X}_{j}-Z_{i}\right\|^{2}$$ 达到最小

(6) 根据隶属度矩阵 $\boldsymbol{U}(L+1)$进行聚类：

若 $\mu_{ij}(L+1)=\max\limits_{1\le p\le K}\mu_{pj}(L+1)=0, \qquad j=1,2,\cdots\cdots,N$

则 $\boldsymbol{X}_j\in\omega_i$类。

例 7.25　设有 4 个二维样本，分别是

$$\boldsymbol{X}_1=[0,\quad 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{X}_2=[0,\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_3=[3,\quad 1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{X}_4=[3,\quad 2]^{\mathrm{T}}$$

利用模糊 K-均值算法把它们聚为两类。

解：（1）根据要求 N=4，K=2。

（2）根据先验知识确定初始隶属度矩阵：

$$\begin{array}{cccccc} & \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 & \\ \boldsymbol{U}(0)= & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c}\omega_1\\ \omega_2\end{array} \end{array}$$

由$\boldsymbol{U}$(0)可知，倾向于$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$、$\boldsymbol{X}_3$为一类，$\boldsymbol{X}_4$为一类。

$$\boldsymbol{Z}_i(L)=\frac{\sum_{j=1}^{N}[\mu_{ij}(L)]^m \boldsymbol{X}_j}{\sum_{j=1}^{N}[\mu_{ij}(L)]^m}$$

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 & \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{U}(0)=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix}$$

$\boldsymbol{X}_1=[0,\ \ 0]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{X}_2=[0,\ \ 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{X}_3=[3,\ \ 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{X}_4=[3,\ \ 2]^{\mathrm{T}}$

(3) 计算聚类中心 $\boldsymbol{Z}_1(0)$、$\boldsymbol{Z}_2(0)$，取 m=2，有

$$\boldsymbol{Z}_1(0)=(0.9^2\times\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+0.8^2\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.7^2\times\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+0.1^2\times\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix})$$

$$\div(0.9^2+0.8^2+0.7^2+0.1^2)=\begin{bmatrix}0.77\\0.59\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z}_2(0)=(0.1^2\times\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+0.2^2\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+0.3^2\times\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+0.9^2\times\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix})$$

$$\div(0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.9^2)=\begin{bmatrix}2.84\\1.84\end{bmatrix}$$

$$\mu_{ij}(L+1)=\frac{1}{\sum_{p=1}^{K}\left(\frac{d_{ij}}{d_{pj}}\right)^{2/(m-1)}}$$

$$Z_1(0)=\begin{bmatrix}0.77\\0.59\end{bmatrix}\qquad Z_2(0)=\begin{bmatrix}2.84\\1.84\end{bmatrix}$$

$$X_1=[0,\ \ 0]^{\mathrm{T}}\quad X_2=[0,\ \ 1]^{\mathrm{T}}\quad X_3=[3,\ \ 1]^{\mathrm{T}}\quad X_4=[3,\ \ 2]^{\mathrm{T}}$$

(4) 计算新的隶属度矩阵 $\boldsymbol{U}(1)$。取 $m=2$，分别计算 $\mu_{ij}(1)$。

如对$\boldsymbol{X}_3$有：

$$d_{13}^2=(3-0.77)^2+(1-0.59)^2=5.14$$

$$d_{23}^2=(3-2.84)^2+(1-1.84)^2=0.73$$

得

$$\mu_{13}(1)=\frac{1}{\frac{d_{13}^2}{d_{13}^2}+\frac{d_{13}^2}{d_{23}^2}}=\frac{1}{\frac{5.14}{5.14}+\frac{5.14}{0.73}}=0.12$$

$$\mu_{23}(1)=\frac{1}{\frac{d_{23}^2}{d_{13}^2}+\frac{d_{23}^2}{d_{23}^2}}=\frac{1}{\left(\frac{0.73}{5.14}+\frac{0.73}{0.73}\right)}=0.88$$

类似地，可得到$\boldsymbol{U}(1)$中其它元素，有

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{array} \\ \boldsymbol{U}(1)=\left(\mu_{ij}(1)\right)= & \begin{pmatrix} 0.92 & 0.92 & 0.12 & 0.01 \\ 0.08 & 0.08 & 0.88 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} \end{array}$$

若满足收敛条件 $\max\limits_{i,j}\left\{\left|\mu_{ij}(L+1)-\mu_{ij}(L)\right|\right\}\leq\varepsilon$，则迭代结束，否则返回(3)计算聚类中心。

假设此时满足收敛条件，迭代结束，则根据 $\boldsymbol{U}(1)$进行聚类。

$\because\ \mu_{11}(1)>\mu_{21}(1)$， $\mu_{12}(1)>\mu_{22}(1)$， $\therefore\ \boldsymbol{X}_1\in\omega_1$， $\boldsymbol{X}_2\in\omega_1$

$\because\ \mu_{23}(1)>\mu_{13}(1)$， $\mu_{24}(1)>\mu_{14}(1)$， $\therefore\ \boldsymbol{X}_3\in\omega_2$， $\boldsymbol{X}_4\in\omega_2$

7.6 模糊模式识别编程举例

MATLAB模糊系统工具箱约有50个与模糊系统相关的函数，使用**模糊K/C均值聚类**可直接调用fcm函数。

调用格式：**[center,U,obj_fcn]=fcm(data,cluster_n);**

函数功能：应用模糊K-均值聚类方法对给定的数据集进行聚类。

参数说明：

data---要聚类的数据集矩阵，行为样本，列为特征值；

cluster_n---要聚类的数目；

center---迭代后的最终聚类中心矩阵,每行为聚类中心坐标值；

U---所有样本对聚类中心的隶属函数矩阵/最终的模糊分区矩阵，行数等于聚类中心数目，列数等于样本个数；

obj_fcn---迭代过程中的目标函数值(迭代过程中的变化值)。

例7.26　模糊聚类在目标识别与分类中的应用编程。

假设已获得不同目标类型的一组特征值，这时可通过模糊聚类获取各个目标类型在特征空间上的聚类中心。当测量到某个目标的特征值时，可以通过计算目标特征位置与各个聚类中心之间的“距离”来判别目标的类型。

为说明设计方法，设定各个目标类的特征维数为4维(实际应用中，可能高达50维以上)，且将它们变换到[0,1]区间。这里首先采用randn函数仿真随机产生5类目标的特征向量，然后产生一个新的特征向量，从而判别目标类型。

MATLAB程序如下：

```
%Filename:exp7_1.m
%模糊聚类分析在目标识别和分类中的应用
%产生4维目标的特征值(0-1之间)
n=100;
c1=[0.25 0.5 0.25 0.25];
d1=randn(n,4)/10+ones(n,1)*c1;
```

```
c2=[0.65 0.5 0.75 0.25];
d2=randn(n,4)/10+ones(n,1)*c2;
c3=[0.25 0.25 0.75 0.75];
d3=randn(n,4)/10+ones(n,1)*c3;
c4=[0.65 0.5 0.25 0.75];
d4=randn(n,4)/10+ones(n,1)*c4;
c5=[0.65 0.75 0.75 0.75];
d5=randn(n,4)/10+ones(n,1)*c5;
data=[d1;d2;d3;d4;d5];
index=(min(data')>0)&(max(data')<1);
data(find(index==0),:)=[];
%目标的模糊K-均值聚类
[center,U,obj_fcn]=fcm(data,5);
```

```
disp('目标的聚类中心为:'),center
%待识别新目标的特征值
c=[0.5 0.5 0.5 0.5];
d=randn(1,4)/10+ones(1,1)*c;
e=ones(5,1)*d;
f=(center-e)';
j1=sum(f.^2);
[min1,index]=min(j1);
disp(['新目标为第',num2str(index),'类']);
```

程序运行结果如下：

目标的聚类中心为:

center =

0.6303	0.7545	0.7422	0.7622
0.2579	0.2393	0.7470	0.7521
0.6633	0.4922	0.7527	0.2708
0.2507	0.4812	0.2511	0.2556
0.6528	0.4966	0.2577	0.7414

新目标为第2类

例7.27　采用两种隶属函数编程表示“年轻”、“中年”、“年老”、“很年轻”、“非常老”这些模糊量，并用可视化图形化显示。

解：

方法1：采用最常用的梯形隶属函数来表示这些模糊量.

梯形隶属函数可由4个参数a, b, c, d确定：

$$f(x,a,b,c,d)=\begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & x \ge d \end{cases}$$

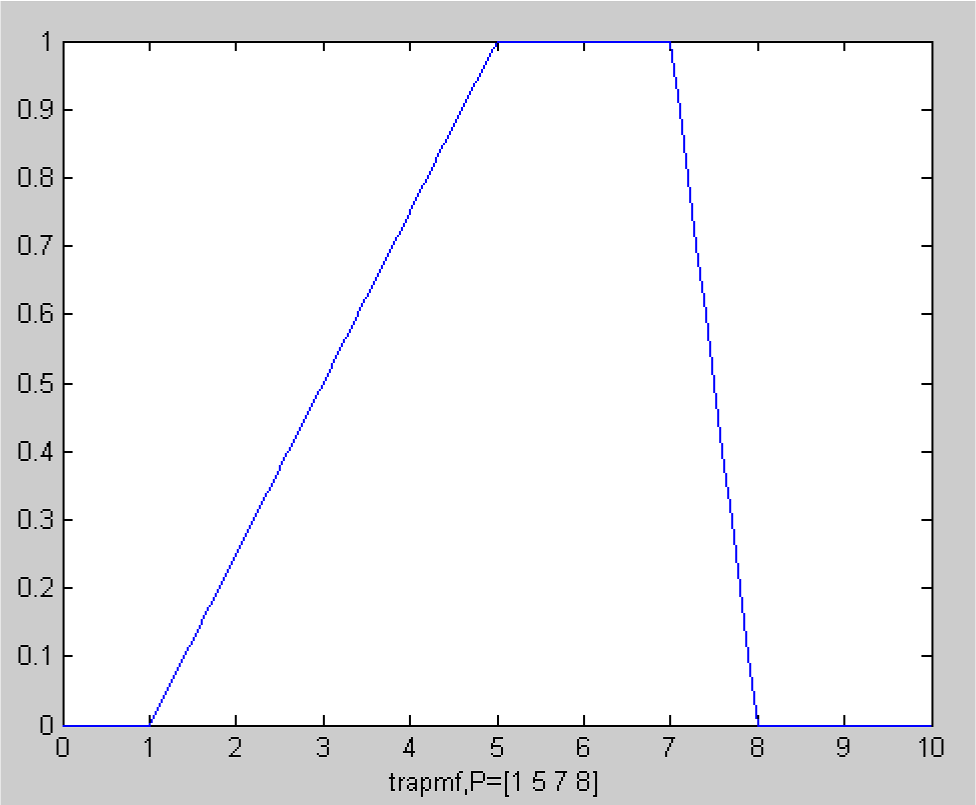
MATLAB模糊系统工具箱提供了11个可供调用的标准隶属函数，梯形隶属函数调用格式如下：

```
trapmf(x,[a b c d]);
```

参数a和b确实梯形的“脚”，而参数b和c确实梯形的“肩膀”。

MATLAB梯形隶属函数使用：

```
%Filename: exp7_2.m
%梯形隶属函数的使用
x=0:0.1:10;
y=trapmf(x,[1 5 7 8]);
plot(x,y);
xlabel('trapmf,P=[1 5 7 8]');
```



方法2：采用广义钟形隶属函数表示″年轻″，″中年″和″老年″假设它们分别用$\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x)$表示，则"很年轻"可表示成$\mu_4(x)=(\mu_1(x))^4$，"非常老″可表示成$\mu_5(x)=(\mu_3(x))^4$. 首先用钟形隶属函数实现$\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x)$，然后采用指数关系实现$\mu_4(x)$和$\mu_5(x)$，最后采用*plot*函数绘制出隶属函数曲线.

广义钟形隶属函数由3个参数a, b, c确定：

$$f(x, a, b, c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

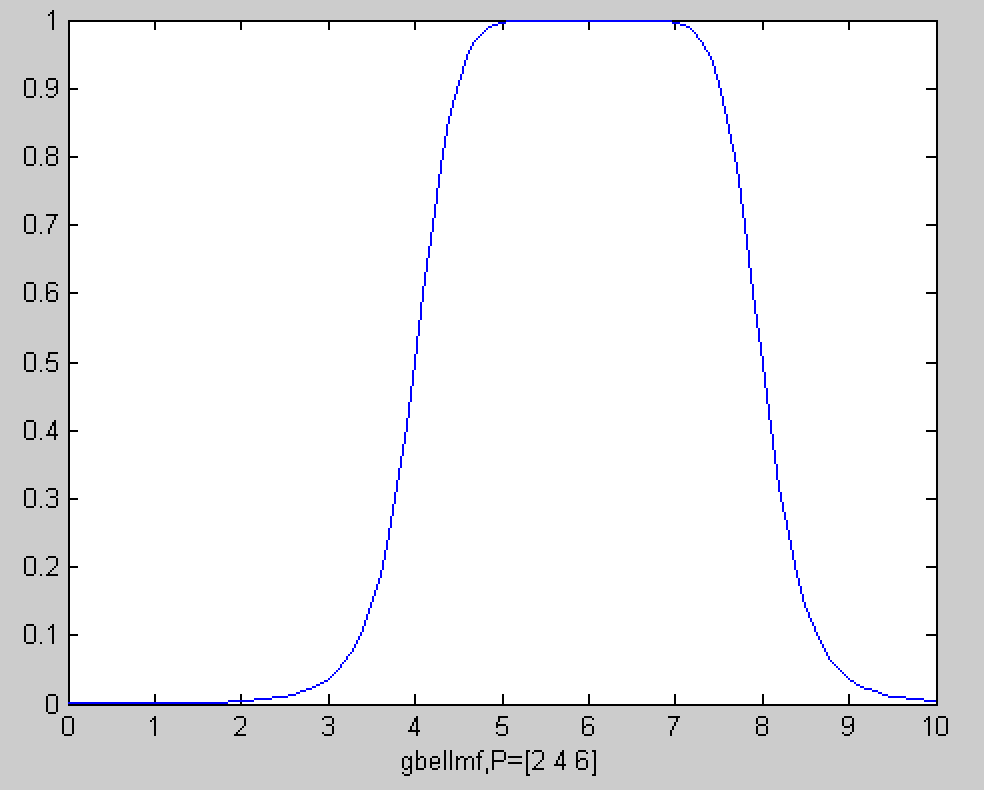
其中，参数b通常为正，参数c用于确定曲线的中心.

在MATLAB中，广义钟形隶属函数调用格式如下：

```
gbellmf(x, [a,b,c]);
```

MATLAB广义钟形隶属函数使用：

```
%Filename: exp7_3.m
%广义钟形隶属函数的使用
x=0:0.1:10;
y=gbellmf(x,[2 4 6]);
plot(x,y);
xlabel('gbellmf,P=[2 4 6]');
```



例7.27采用方法1和方法2程序清单：

```
%Filename: exp7_4.m
%“年龄” 五个模糊量隶属函数的两种表示方法
%方法1
x=[0:100]';
young=trapmf(x,[0 0 10 30]);
midage=trapmf(x,[10 30 50 70]);
old=trapmf(x,[50 70 100 100]);
veryyoung=trapmf(x,[0 0 5 20]);
veryold=trapmf(x,[65 85 100 100]);
man=[young midage old veryyoung veryold];
subplot(2,1,1);
plot(x,man);
xlabel('年龄');ylabel('隶属函数');gtext('方法1');
axis([-inf inf -.1 1.1]);
text(70,0.80,'年老');
text(79.5,0.60,'非常老');
text(14,0.80,'年轻');
text(3,0.60,'很年轻');
text(40,0.80,'中年');
```

```
%方法2
young=gbellmf(x,[20,2,0]);
midage=gbellmf(x,[20,3,40]);
old=gbellmf(x,[30,3,90]);
veryyoung=young.^4;
veryold=old.^4;
man=[young midage old veryyoung veryold];
subplot(2,1,2);plot(x,man);
xlabel('年龄');ylabel('隶属函数');gtext('方法2');
axis([-inf inf -.1 1.1]);
text(60,0.80,'年老');
text(70,0.60,'非常老');
text(14,0.80,'年轻');
text(3,0.60,'很年轻');
text(30,0.80,'中年');
```

程序运行可视化图形显示结果如下：

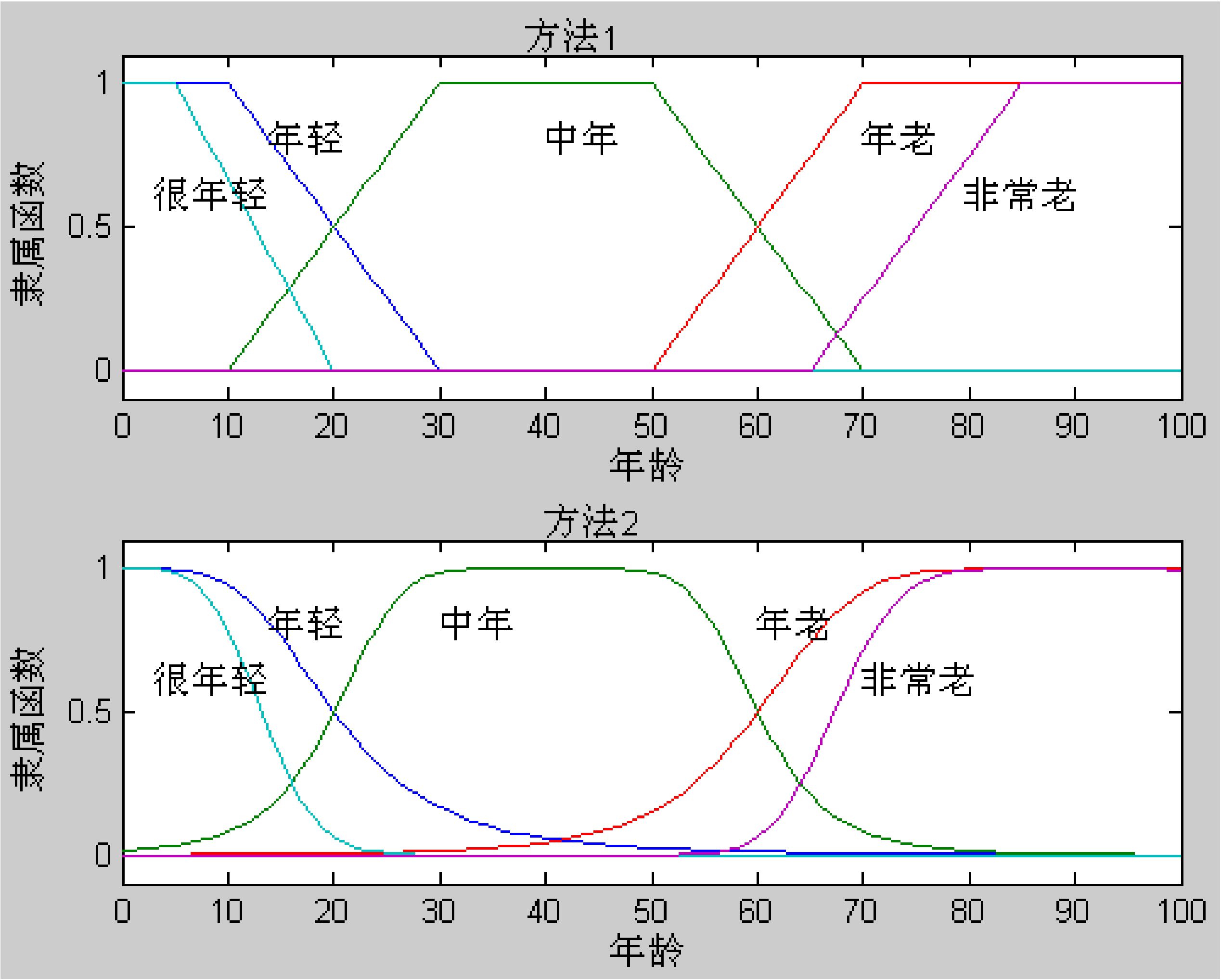


图　表示年龄的5个模糊量隶属函数

思考题：**采用模糊模式识别方法对文字进行识别**

文字识别的方法有不少，如采用前面介绍的神经网络方法，这里采用模糊模式识别法(“矩阵模糊分析法”)来实现文字识别。以英文‘H’字母为例，可用7×5大小标准矩阵表示：

H=

1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1

假设：

1:黑，$u_{ij}=1$

0:白 $u_{ij}=0$

$(i=1,2,\ldots,7;j=1,2,\ldots,5)$

使用计算机识别，通常将37个文字(A,B,…,Z;0,1,2,…,9;1个空白Ø)对应的标准矩阵置于内存中，将待识别的文字表示成7×5阶模糊矩阵，通过图像获取设备接受每个7×5网格的信息，但由于传感器所获取的信息不一定清晰，即不一定为0或1，往往介于0~1之间，与标准矩阵不一致。

先把模糊矩阵化为模糊向量，矩阵的第i行放向量的第i个分量。

如字母‘H’对应的向量为：

H=[10001 10001 10001 11111 10001 10001 10001]

于是文字可用文字向量表示，那么37个标准矩阵都可以化为标准向量。

设有两个文字向量：

$q=[q_1,q_2,\ldots,q_{35}]$ $q_i\in[0,1]$

$r=[r_1,r_2,\ldots,r_{35}]$ $r_i\in[0,1]$

计算数值 $W(q,r)=\sum_{i=1}^{35}[(q_i\wedge r_i)\vee(q_i^c\wedge r_i^c)]$

设电脑待识别的文字向量为$s=[s_1,s_2,\ldots,s_{35}]$ $s_i\in[0,1]$;只需计算出s与37个标准文字向量的接近程度W(s,A),W(s,B),…,W(s,Z),W(s,0),W(s,1),…,W(s,9),W(s,Ø)便可根据择近原则具体判断出s是什么文字。

实验表明：在噪声达到31%的情况下，使用此方法正确识别率可达到90%以上。

说明: 本例$W(q,r)$计算公式中的集合运算按模糊集运算规则进行

模糊交集: $q_i \wedge r_i = \min(q_i, r_i)$

模糊并集: $q_i \vee r_i = \max(q_i, r_i)$

模糊补集: $q_i^c = 1 - q_i$

掌握好模糊模式识别方法需要学习一些模糊数学的相关知识