矩阵分析与应用

第八讲 范数理论及其应用之二

信息工程学院
吕旌阳

本讲主要内容

- 矩阵范数
- 从属范数
- 范数的应用

定义：矩阵空间 $C^{m\times n}$ 中，$\forall A\in C^{m\times n}$，

定义实数值 $\|A\|$，且满足以下条件

1)正定条件： $\|A\|\geq 0$，且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0_{m\times n}$

2)齐次条件： $\|kA\|=|k|\cdot\|A\|$， $\forall k\in K$

3)三角不等式： $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$， $B\in C^{m\times n}$

则称 $\|A\|$ 为 A 的广义范数。

若对于 $C^{m\times n}, C^{n\times l}$ 及 $C^{m\times n}$ 上的同类广义矩阵范数有

4)相容条件： $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$， $B\in C^{n\times l}$

则称 $\|A\|$ 为 A 的范数。

定义：设 $C^{m\times n}$ 的矩阵函数 $\|A\|_M, C^m$ 与 C^n 中的

同类范数 $\|x\|_V$ ，若 $\|Ax\|_V \le \|A\|_M \|x\|_V$

则称矩阵范数 $\|A\|_M$ 与向量范数 $\|x\|_V$ 相容

例1、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$，证明

$\|A\|_{m1}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_1$ 相容

证明：（1）～（3）显然成立，

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1&=\sum_{i=1}^{m}\left|a_{i1}\xi_1+\cdots+a_{in}\xi_n\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left(\left|a_{i1}\right|\left|\xi_1\right|+\cdots+\left|a_{in}\right|\left|\xi_n\right|\right)\\&\le\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\left|a_{i1}\right|+\cdots+\left|a_{in}\right|\right)\left(\left|\xi_1\right|+\cdots+\left|\xi_n\right|\right)\right]\\&=\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\left|a_{i1}\right|+\cdots+\left|a_{in}\right|\right)\right]\left(\left|\xi_1\right|+\cdots+\left|\xi_n\right|\right)=\|A\|_{m1}\|x\|_1\end{aligned}$$

因此，$\|A\|_{m1}$ 与 $\|x\|_1$ 相容。

（4）证明相容性

划分 $B_{n\times l}=\left(b_1,\cdots b_l\right)$ ，则 $AB=\left(Ab_1,\cdots,Ab_l\right)$，且有

$$
\begin{aligned}
\|AB\|_{m1} &= \|Ab_1\|_1+\cdots+\|Ab_l\|_1 \\
&\le \|A\|_{m1}\|b_1\|_1+\cdots+\|A\|_{m1}\|b_l\|_1 \\
&= \|A\|_{m1}\left(\|b_1\|_1+\cdots+\|b_l\|_1\right) \\
&= \|A\|_{m1}\|B\|_{m1}
\end{aligned}
$$

因此，$\|A\|_{m1}=\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_1$ 相容

例2、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$，证明

$$\|A\|_{m\infty}=n\bullet\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|$$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_{\infty}$ 相容

证明：（1）～（3）成立，设 $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times l}$，则

$$\|AB\|_{m\infty}=l\bullet\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|\le l\bullet\max_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)$$

$$\le l\bullet n\bullet\max_{i,j}\left(\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)\le\left(n\bullet\max_{i,j}\left|a_{ij}\right|\right)\bullet\left(l\bullet\max_{i,j}\left|b_{ij}\right|\right)=\|A\|_{m\infty}\|B\|_{m\infty}$$

$$\|Ax\|_{\infty}=\max_{i}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\xi_k\right|\le\max_{i}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|\xi_k\right|$$

$$\le\max_{i}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\bullet\max_{i}\left|\xi_i\right|\le\left(n\bullet\max_{i}\left|a_{ik}\right|\right)\bullet\max_{i}\left|\xi_i\right|=\|A\|_{m\infty}\|x\|_{\infty}$$

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$，证明

$$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

证明：（1）～（2）成立，$B=\left(b_{ij}\right)_{n\times l}$

设 $B_{m\times n}$，划分 $A=\left(a_1,\cdots,a_n\right), B=\left(b_1,\cdots,b_n\right)$，则有

$$\|A+B\|_{m2}^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2$$

$$\le\left(\|a_1\|_2+\|b_1\|_2\right)^2+\cdots+\left(\|a_n\|_2+\|b_n\|_2\right)^2$$

$$\le\|A\|_{m2}^2+2\left(\|a_1\|_2\|b_1\|_2+\cdots+\|a_n\|_2\|b_n\|_2\right)+\|B\|_{m2}^2$$

$$\le\|A\|_{m2}^2+2\left(\sum\|a_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\|b_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|B\|_{m2}^2=\left(\|A\|_{m2}+\|B\|_{m2}\right)$$

设 $B_{n\times l}$， $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$ ，则有

$$\|AB\|_{m2}=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\bullet\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right] \le \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\bullet\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right]$$

$$\le \left(\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\bullet\left(\sum_{k,j=1}^{n}|b_{kj}|^2\right) = \|A\|_{m2}\bullet\|B\|_{m2}$$

特别的，取 $B=x\in C^{n\times 1}$ ，则有

$$\|Ax\|_2=\|AB\|_{m2} \le \|A\|_{m2}\bullet\|B\|_{m2} = \|A\|_{m2}\bullet\|x\|_2$$

注：

1. $\|A\|_{m2}=\left[\mathrm{tr}\left(A^{H}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathrm{tr}\left(AA^{H}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ 称为矩阵的Frobenius范数，记做 $\|A\|_{F}$

2. $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数等价：对于任意的两种矩阵范数 $\|A\|_{\alpha}$ 和 $\|A\|_{\beta}$，存在 $0\le c_1\le c_2$，使得

$$c_1\|A\|_{\beta}\le\|A\|_{\alpha}\le c_2\|A\|_{\beta}\quad \forall A_{m\times n}$$

3. $C^{m\times n}$ 中，$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A\Leftrightarrow\forall\|A\|,\ \lim\limits_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$

定理3：设 $A_{m\times n}$ 及酉矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$，有

$$\|PA\|_F = \|A\|_F = \|AQ\|_F$$

证明：
$$\|PA\|_F^2 = \mathrm{tr}\left(\left(PA\right)^H\left(PA\right)\right) = \mathrm{tr}\left(A^H P^H PA\right)$$
$$= \mathrm{tr}\left(A^H A\right)$$

$$\|AQ\|_F^2 = \mathrm{tr}\left(\left(AQ\right)^H\left(AQ\right)\right) = \mathrm{tr}\left(Q^H A^H AQ\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(AQQ^H A^H\right) = \mathrm{tr}\left(A^H A\right)$$

推论：酉（正交）相似的矩阵的F-范数相等

引理：对 $C^{m\times n}$ 的矩阵范数 $\|A\|$，存在向量范数 $\|x\|_V$

使得 $\|Ax\|_V \le \|A\|\cdot\|x\|_V$

例7：对$C^{m\times n}$的矩阵范数$\|A\|$,任取非零列向量 $y\in C^n$

(1) $\|x\|_V = \|xy^H\|$ 是 C^n 的向量范数；

(2) $\|A\|$ 与 $\|x\|_V$ 相容。

证明：（1）略；（2）

$$\|Ax\|_V = \|(Ax)y^H\| = \|A(xy^H)\| \le \|A\|\cdot\|xy^H\| = \|A\|\cdot\|x\|_V$$

三、从属范数

定理：对C^m与C^n上的同类向量范数$\|x\|_V$，定义

$$\|A\| = \max_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V \qquad \left(\forall A_{m\times n}, x\in C^n\right)$$

则$\|A\|$是$C^{m\times n}$中矩阵A的范数，且$\|A\|$与$\|x\|_V$相容

$\|A\|$称为由$\|x\|_V$导出的矩阵范数（或称为从属范数）

等价定义：$\max\limits_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V = \max\limits_{x\neq\theta}\dfrac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}$

证明:(1) $A \neq 0: \exists x_0$ 满足 $\|x_0\|_V = 1, st\ Ax_0 \neq \theta$ 从而

$$\|A\| \geq \|Ax_0\|_V > 0$$

$$A = 0: \|A\| = \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V = \max_{\|x\|_V=1} \|0\|_V = 0$$

(2) 略

(3) 对 $A+B: \exists x_1, \|x_1\|_V = 1, st \max_{\|x\|_V=1} \|(A+B)x\|_V = \|(A+B)x_1\|_V$

$$\|A+B\| = \|Ax_1 + Bx_1\|_V \leq \|Ax_1\|_V + \|Bx_1\|_V \leq \|A\| + \|B\|$$

(4) 先证 $\|Ay\|_V \leq \|A\| \|y\|_V \quad \left(y \in C^n\right)$

$y = \theta$ ：显然成立。

$y \neq \theta$: 定义 $y_0 = \dfrac{y}{\|y\|_V}$ 满足

$$\|y_0\|_V = 1 \Rightarrow \|Ay_0\|_V \le \max_{\|y\|_V=1} \|Ay\|_V = \|A\|$$

故 $\|Ay\|_V = \left\| A\left(\|y\|_V \, y_0 \right) \right\|_V = \|Ay_0\|_V \, \|y\|_V \le \|A\| \cdot \|y\|_V$

对 AB: $\exists x_2, \|x_2\|_V = 1, \text{st} \max_{\|x\|_V=1} \|(A+B)x\|_V = \|(A+B)x_2\|_V$

$$\|AB\| = \|(AB)x_2\|_V = \|A(Bx_2)\|_V \le \|A\| \cdot \|Bx_2\|_V \le \|A\| \cdot \|B\|$$

故定理成立。

注：

（1）一般的矩阵范数：$\because I = I \bullet I$

$$\|I\| \le \|I\| \bullet \|I\| \qquad \therefore \|I\| \ge 1$$

例如：$\|I\|_{m1} = n, \quad \|I\|_{F} = \sqrt{n}$

（2）矩阵的从属范数：$\|I\| = \max\limits_{\|x\|_V = 1} \|Ix\|_V = 1$

（3）常用的从属范数：

$$\|x\|_V \qquad \|x\|_1 \qquad \|x\|_2 \qquad \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_M \qquad \|A\|_1 \qquad \|A\|_2 \qquad \|A\|_\infty$$

定理：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则

（1）列和范数： $\|A\|_1=\max\limits_{j}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}$

（2）谱范数： $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1},\lambda_1=\max\left\{\lambda\left(A^H A\right)\right\}$

（3）行和范数： $\|A\|_\infty=\max\limits_{i}\left\{\sum\limits_{j=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}$

先证列和范数：$\|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\}$

证明：（1）记 $t = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\}$ ，

如果 $x \in C^n$ 满足 $\|x\|_1 = 1$ ，则

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |\xi_j| = \sum_{j=1}^{n} \left[|\xi_j| \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right) \right]$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \left[|\xi_j| t \right] \le t \cdot \|x\|_1 = t \qquad \therefore \|A\|_1 \le t$$

选k 使得 $t=\max_j\left\{\sum_{i=1}^m|a_{ij}|\right\}=\sum_{i=1}^m|a_{ik}|$ ，令

$e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ 则 $\|e_k\|_1=1$ ，而且

$$\|A\|_1\ge\|Ae_k\|_1=\sum_{i=1}^m|a_{ik}| =\max_j\left\{\sum_{i=1}^m|a_{ij}|\right\}=t$$

所以 $\|A\|_1=\max_j\left\{\sum_{i=1}^m|a_{ij}|\right\}$

范数的应用

定理6：设 $A\in C^{n\times n}$,且对$C^{n\times n}$的矩阵范数 $\|\bullet\|$ ，

满足 $\|A\|<1$,则矩阵$I-A$非奇异，且有

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

证明：选取向量范数 $\|x\|_v$，使得$\|A\|$与$\|x\|_v$相容。

如果 $\det(I-A)=0$,则 $(I-A)x=0$ 有非零解 x_0

$$x_0=Ax_0\Rightarrow\|x_0\|_V=\|Ax_0\|_V\le\|A\|\bullet\|x_0\|_V<\|x_0\|_V$$

产生了矛盾，故 $\det(I-A)\ne 0$ ，$I-A$可逆。

证明：选取向量范数 $\|x\|_v$，使得 $\|A\|$ 与 $\|x\|_v$ 相容。

如果 $\det(I-A)=0$,则 $(I-A)x=0$ 有非零解 x_0

$$(I-A)^{-1}(I-A)=I$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A$$

$$\Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \|I\| + \left\|(I-A)^{-1}A\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \|I\| + \left\|(I-A)^{-1}\right\|\|A\|$$

$$\Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

定理7：设 $A\in C^{n\times n}$,且对$C^{n\times n}$的矩阵范数 $\|\bullet\|$ ，满足 $\|A\|<1$,则矩阵$I-A$非奇异，且有

$$\left\|I-(I-A)^{-1}\right\|\le\frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

证明：已证 $\|A\|<1$，则 $I-A$可逆。

恒等式： $$(I-A)-I=-A$$

右乘 $(I-A)^{-1}$ ：$I-(I-A)^{-1}=-A(I-A)^{-1}$

左乘 A ：$A-A(I-A)^{-1}=-A^2(I-A)^{-1}$

左乘 A ：$A - A(I-A)^{-1} = -A^2(I-A)^{-1}$

$$\Rightarrow \left\| A(I-A)^{-1} \right\| \le \|A\| + \|A\| \cdot \left\| A(I-A)^{-1} \right\|$$

$$\Rightarrow \left\| A(I-A)^{-1} \right\| \le \frac{\|A\|}{1-\|A\|}$$

$$\Rightarrow \left\| I-(I-A)^{-1} \right\| = \left\| -A(I-A)^{-1} \right\| \le \frac{\|A\|}{1-\|A\|}$$

定理8：设$A,B\in C^{n\times n}$，A可逆,且满足 $\|A^{-1}B\|<1$

(1) $A+B$ 可逆

(2) $F=I-\left(I-A^{-1}B\right)^{-1}$：$\|F\|\le\dfrac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$

(3) $$\frac{\left\|A^{-1}-\left(A+B\right)^{-1}\right\|}{\|A^{-1}\|}\le\frac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$$

证明：利用定理6和定理7可证明

矩阵条件数: $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

谱半径:对 $\forall A\in C^{n\times n}$, 谱半径为 $\rho(A)\in\max\limits_i|\lambda_i|$

定理9: $\forall A\in C^{n\times n},\forall\|\cdot\|_M$，有 $\rho(A)\le\|A\|_M$

证明：对矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，存在向量范数 $\|\cdot\|_V$，使得 $\|Ax\|_V\le\|A\|_M\cdot\|x\|_V$

设 $Ax_i=\lambda_i x_i\quad(x_i\neq\theta)$，则有 $\|A\|_M$

$$|\lambda_i|\cdot\|x_i\|_V=\|\lambda_i x_i\|_V=\|Ax_i\|_V\le\|A\|_M\cdot\|x_i\|_V$$

$$|\lambda_i|\le\|A\|_M\quad\Rightarrow\rho(A)\le\|A\|_M$$

定理10: $\forall A \in C^{n\times n}$，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 矩阵范数 $\|\cdot\|_M$

使得 $\|A\|_M \le \rho(A) + \varepsilon$

证明：根据Jordan标准型理论：存在可逆矩阵 $P_{n\times n}$

使得 $P^{-1}AP = J = \Lambda + \tilde{I}$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \tilde{I} = \mathrm{diag}([\delta_1, \cdots, \delta_{n-1}], 1)$$

其中 δ_i 等于0或1，于是有

$$D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{n-1})$$

$$(PD)^{-1}APD = D^{-1}JD \quad = \Lambda + \varepsilon\tilde{I}$$

令$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{PD}$可逆，那么

$$\left\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\right\|_1=\left\|\Lambda+\varepsilon\tilde{\boldsymbol{I}}\right\|_1\le\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon$$

可证 $\left\|\boldsymbol{B}\right\|_M=\left\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\right\|_1 \quad \left(\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}\right)$ 是$\boldsymbol{C}^{n\times n}$中的矩阵范数

于是有

$$\left\|\boldsymbol{A}\right\|_M=\left\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}\right\|_1\le\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon$$

讨论:

(1) $\|A\|_{M1},\|A\|_{M2}$ 可与同一种 $\|x\|_V$ 相容？

(2) $\|A\|_M$ 可与不同的 $\|x\|_{V1},\|x\|_{V2}$ 相容？

(3) $\forall\|A\|_M$ 与 $\forall\|x\|_V$ 不一定相容？

分析: (1) $\|A\|_{M1},\|A\|_1$ 与 $\|x\|_1$ 相容

(2) $\|A\|_{M1}$ 与 $\|x\|_p\,(p\geq 1)$ 相容

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T, E_{ij}x=(0,\cdots,0,\xi_n,0,\cdots,)^T \Rightarrow \|E_{ij}x\|_p \leq \|x\|_p$$

$$Ax = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} x$$

$$\|Ax\|_p = \sum_{i,j} |a_{ij}| \|E_{ij}x\|_p \le \left(\sum_{i,j} |a_{ij}| \right) \bullet \|x\|_p = \|A\|_{M1} \bullet \|x\|_p$$

(3) $\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$ 与 $\|x\|_\infty = \max_i (|\xi_i|)$ 不相容

$$n > 1: A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}, A_0 x_0 = \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\|A_0\|_1 = 1,$ $\|x_0\|_\infty = 1,$ $\|A_0 x_0\|_\infty = n$

$$\|A_0 x_0\|_\infty = n > 1 = \|A_0\|_1 \bullet \|x_0\|_\infty$$

构造方法:

(1) 由向量范数构造新的向量范数

$S_{m\times n}$ 列满秩, $\|x\|=\|Sx\|_V$ 是 C^n 中的向量范数

(2) 由矩阵范数构造向量范数

非零列向量 $y_0\in C^n, \|x\|=\|xy_0^T\|_M$ 是 C^m 中的向量范数

(3) 由向量范数构造矩阵范数

$\|A\|=\max\limits_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_V$ 是 $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数

(4) 由矩阵范数构造新的矩阵范数

$S_{n\times n}$ 可逆, $\|A\|=\|S^{-1}AS\|_M$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数

作业

- P132：1、4