矩阵分析与应用

第十四讲 特殊矩阵、常用公式

信息与通信工程学院

吕旌阳

本讲主要内容

- 正定矩阵
- 非负矩阵
- 常用公式

正定矩阵

定义：令A是n阶Hermite矩阵,若对任意复n维列向量

$x \neq 0$ ，都有 $x^H Ax \geq 0$

则称A为**Hermite非负定矩阵**，简称为**非负定矩阵**。对任意复n维列向量 $x \neq 0$ ，都有

$$x^H Ax > 0$$

称为**Hermite正定矩阵**，简称为**正定矩阵**

性质**(1)**：若A正定，且k为正常数，则kA正定

性质**(2)**：若A、B正定，则$A+B$正定

性质**(3)**：若A正定，则 A^{-1} 正定

正定矩阵判断准则

Hermite矩阵A是正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ A的特征值都为正数

因为如果 $Ax=\lambda x$ ，则有

$$0<x^H Ax=x^H\lambda x=\lambda x^H x=\lambda\|x\|^2$$

一定有 $\lambda>0$。反之，必然存在酉矩阵U，使得

$$A=U\Lambda U^H,\quad \Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

因为$\lambda_i>0$，且对任意 $x\neq 0$ 有 $Ux=y\neq 0$

从而$x^H Ax=\left(U^H y\right)^H A\left(U^H y\right)=y^H UAU^H y=y^H\Lambda y>0$

所以A是正定的

Hermite矩阵A是非负定矩阵 $\Longleftrightarrow$ A的特征值都为非负数

正定矩阵判断准则

Hermite矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵（非负定）

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的特征值都为正数（非负数）

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{tr}\, A > \lambda_i(A), \quad (or\ \mathrm{tr}\, A \geq \lambda_i(A)) \quad i = 1, \cdots, n$

$\Longleftrightarrow$ $A = P^H P$ $\quad$ $\boldsymbol{P}$是n阶非奇异矩阵(矩阵)

$\Longleftrightarrow$ $A = B^2$ $\quad$ $\boldsymbol{B}$是n阶正定矩阵(非负定矩阵)

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的n个顺序主子式为正数(非负数)

正定矩阵判断准则

- A，C是正定矩阵，且$AC＝CA$，则AC为正定矩阵

$$\because (AC)^H = C^H A^H = CA = AC$$

AC是Hermite矩阵，因为A正定，所以有 $A = B^2$，B正定

$$B^{-1}(AC)B = BCB$$

即 AC 和 BCB 有相同特征值，而且

$$BCB = B^H CB$$

BCB 的特征值全部为正数，所以AC为正定矩阵

- A是正定矩阵，C是非负定矩阵，且$AC＝CA$，则AC为非负定矩阵

正定矩阵的常用不等式

- $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是n阶Hermite矩阵，若$\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{B}$为正定矩阵(非负定矩阵)，则称$\boldsymbol{A}$大于$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$.($\boldsymbol{A}$不小于$\boldsymbol{B}$记 $\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{B}$)

也可记为$\boldsymbol{B}<\boldsymbol{A}$.($\boldsymbol{B}\leq\boldsymbol{A}$)

$\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{B}$ 的充要条件是，对任意复n维列向量x都有

$$\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

对$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是实对角阵时，$\boldsymbol{A}=diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

$\boldsymbol{B}=diag(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ ，则有 $a_i\geq b_i$

矩阵不等式的性质

1. 传递性　$A \ge B, B \ge C \Rightarrow A \ge C$

2. 线性性　$A \ge B, k > 0 \Rightarrow kA \ge kB$

$$A_1 \ge B_1, A_2 \ge B_2 \Rightarrow A_1 + A_2 \ge B_1 + B_2$$

3. n阶Hermite矩阵A，B有 $A \ge B$,且 $P \in C^{n\times m}$

则 $P^H AP \ge P^H BP$

4. 若矩阵A为非负定矩阵，则 $A \le (\mathrm{tr}\, A)I$

矩阵不等式的性质

5. 若矩阵A，B为n阶正定矩阵，且 $AB=BA, A\ge B$

则 $A^2\ge B^2$

6. 若A,B都为正定矩阵，则 $A\ge B \Leftrightarrow B^{-1}\ge A^{-1}$

证明:由于A为正定，从而 A^{-1}正定，存在可逆矩阵C

使得 $A^{-1}=CC^H$ $A=\left(CC^H\right)^{-1}=\left(C^H\right)^{-1}C^{-1}$

因此由$A-B$正定可得 $I-C^HBC$ 正定，推得 C^HBC的特征值都小于1，从而C^HBC-I 的特征值都大于1，

即 $\left(C^HBC\right)^{-1}-I$ 的特征值都大于0，

从而 $\left(C^HBC\right)^{-1}-I$ 正定，即 $C^{-1}B^{-1}\left(C^H\right)^{-1}-I$ 正定

$B^{-1}-CC^H$ 正定。反之亦然

矩阵不等式的性质

7. $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^{+}$为正定矩阵,且$\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵

证明：$\boldsymbol{AA}^{+}$ 为投影矩阵，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^{+}$ 为正定矩阵。

非负矩阵

定义：若n阶实矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$满足$a_{ij}\geq 0$，则**A**为非负矩阵；

若$a_{ij}>0$,则**A**为正矩阵。

定义：若存在置换矩阵$\boldsymbol{P}$使得 $\boldsymbol{PAP}^T=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$

则称A为可约矩阵；否则为不可约矩阵

定理7.1： 若$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$为非负不可约矩阵，则

1). 谱半径ρ(**A**)为**A**的特征值；

2). 存在属于ρ(**A**)的正特征向量；

3). **A**的任意元素增加时，ρ(**A**)不减少。

推论： 若**A**为正矩阵，则

1). 谱半径ρ(**A**)为**A**的特征值；

2). 存在属于ρ(**A**)的正特征向量；

3). **A**的任意元素增加时，ρ(**A**)不减少。

定理7.2 若$\mathbf{A}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$为非负正矩阵，则

1). 谱半径ρ(**A**)为**A**的特征值；

2). 存在属于ρ(**A**)的非负特征向量；

3). **A**的任意元素增加时，ρ(**A**)不减少。

例：$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0.1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

ρ(A)=3,　　ρ(B)=3.0365

Toeplitz矩阵

定义：$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{-n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ 称为Toeplitz矩阵

可简记为 $A=\left(a_{i-j}\right)_{i,j=1}^{n}$

Hilbert矩阵 (条件数差的典型例子)

$$H=\left(\frac{1}{i-j-1}\right)_{i,j=1}^{n}$$

$$\left(H^{-1}\right)_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)![(i-1)!(j-1)!]^{2}(n-i)!(n-j)!}$$

$$i,j=1,2,\ldots,n;$$

Hadamard矩阵

- 如果n阶矩阵H的元素为+1或–1，且满足

$$HH^T = nI$$

则称H为Hadamard矩阵.

性质：若$n>2$且n阶Hadamard矩阵存在, 则n为4的倍数。

猜想：若n为4的倍数，则n阶Hadamard矩阵存在.

$$H_1 = [1] \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2^k} = \begin{bmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ -H_{2^k} & H_{2^k} \end{bmatrix}$$

即Sylvester方法

矩阵的直和

定义： 若$A\in C^{m\times m}$， $B\in C^{n\times n}$，则A与B的直和记为

$$A\oplus B\in C^{(m+n)\times(m+n)}$$

，定义为

$$A\oplus B=\begin{bmatrix} A & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & B \end{bmatrix}$$

类似的，有

$$B=\bigoplus_{i=0}^{N-1}A_i=A_0\oplus A_1\oplus\cdots\oplus A_{N-1}=diag(A_0,A_1,\cdots,A_{N-1})$$

Hadamard积

定义：若 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ ，则$\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$的Hadamard积记为$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，定义为

$$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\left[a_{ij}b_{ij}\right]$$

也称为Schur积或者elementwise product

定理：若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$是正定的(半正定的)，则其Hadamard积也是正定的(半正定的)

定理：若 $A,B,C \in C^{m\times n}$ 矩阵，且 $\mathbf{1}=[1,1,\cdots,1]^T$

是求和向量，$D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_m)$ ，

其中 $d_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ ，则有

$$\mathrm{tr}\left(A^T(B\odot C)\right)=\mathrm{tr}\left(\left(A^T\odot B^T\right)C\right)$$

$$\mathbf{1}^T A^T(B\odot C)\mathbf{1}=\mathrm{tr}\left(B^T DC\right)$$

Hadamard积的性质

1. 若A，$B\in C^{m\times m}$，则

$$A\odot B=B\odot A$$
$$(A\odot B)^T=A^T\odot B^T$$
$$(A\odot B)^H=A^H\odot B^H$$
$$(A\odot B)^*=A^*\odot B^*$$

2. 若$A\in C^{m\times m}$，则 $A\odot O_{m\times n}=O_{m\times n}\odot A=O_{m\times n}$

3. 若c为常数，则 $c(A\odot B)=(cA)\odot B=A\odot(cB)$

4. 若$A\in C^{m\times m}$，则 $A\odot I_m=I_m\odot A=diag(A)$

$$=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

5. 若$\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{C}$， $\mathbf{D} \in \boldsymbol{C}^{m\times m}$， 则

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \odot \left(\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C}\right) = \left(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}\right) \odot \boldsymbol{C}$$

$$\left(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}\right) \odot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{C} \pm \boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C}$$

$$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) \odot \left(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}\right) = \boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{D}$$

6. 若$\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{C}^{m\times m}$， $\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{C}^{n\times \mathrm{n}}$则

$$\left(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\right) \odot \left(\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}\right) = \left(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{C}\right) \oplus \left(\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{D}\right)$$

7.

$$\mathbf{tr}\left(\boldsymbol{A}^T\left(\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{C}\right)\right) = \mathbf{tr}\left(\left(\boldsymbol{A}^T \odot \boldsymbol{B}^T\right)\boldsymbol{C}\right)$$

Kronecker积

定义：若 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{p\times q}$ ，则A 与B的右Kronecker积 $A\otimes B$ 定义为

$$A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

定义：若 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{p\times q}$ ，则A 与B的左Kronecker积 $A\otimes B$ 定义为

$$A\otimes B=\left[Bb_{ij}\right]=\begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ab_{m1} & Ab_{m2} & \cdots & Ab_{mn} \end{bmatrix}$$

谢谢！