武汉大学
Wuhan University

第四章 频率域滤波（1）

涂卫平 武汉大学计算机学院 2018年秋季学期

主要内容

Main Content

信号的表达域

域： 对信号的分析可以从不同的角度、采用不同的方式。每一种特定的角度以及对应的处理方法，就形成一个“域”。可以把“域”视为一个坐标系。

- 时域：信号在**时间轴**上的变化，描述信号幅度和时间之间的关系，以时间作为变量。
- 空间域：信号在**空间坐标轴**上的变化，描述信号幅度与x、y坐标轴之间的关系，以空间坐标作为变量。
- 频域：信号在**频率轴**上的变化，描述信号幅度/相位与频率之间的关系，以频率作为变量。

什么是频率域增强

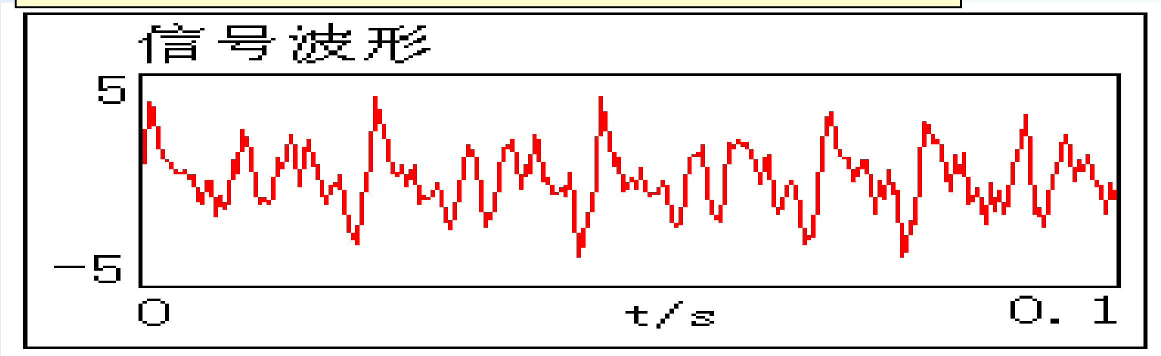
含义：

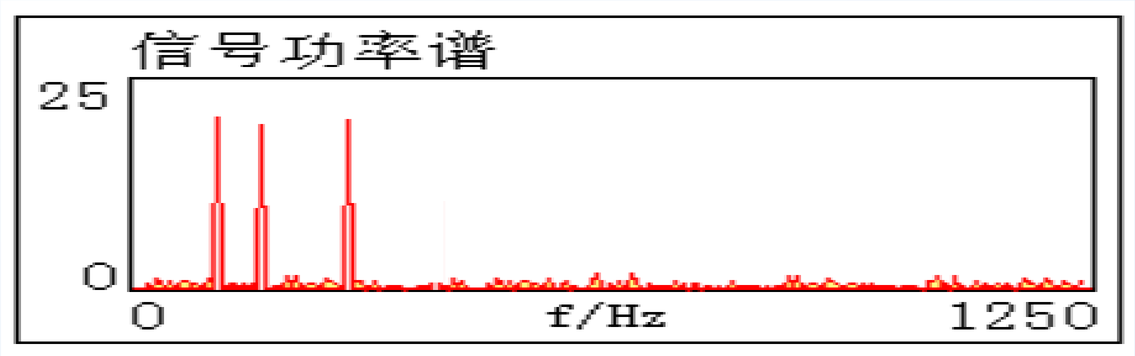
- 狭义：频域增强指通过**傅里叶变换**将图像转变到**频率域**内，对图像的**变换系数**（频率成分的强度与相位）直接进行运算，然后通过**傅里叶逆变换**获得处理后的图像。
- 广义：利用**变换域**进行处理均可称为频率域处理。

为什么要做频域分析

时域分析只能反映信号的幅值随时间的变化情况，除单频率分量的简谐波外，**很难明确揭示信号的频率组成和各频率分量大小。**

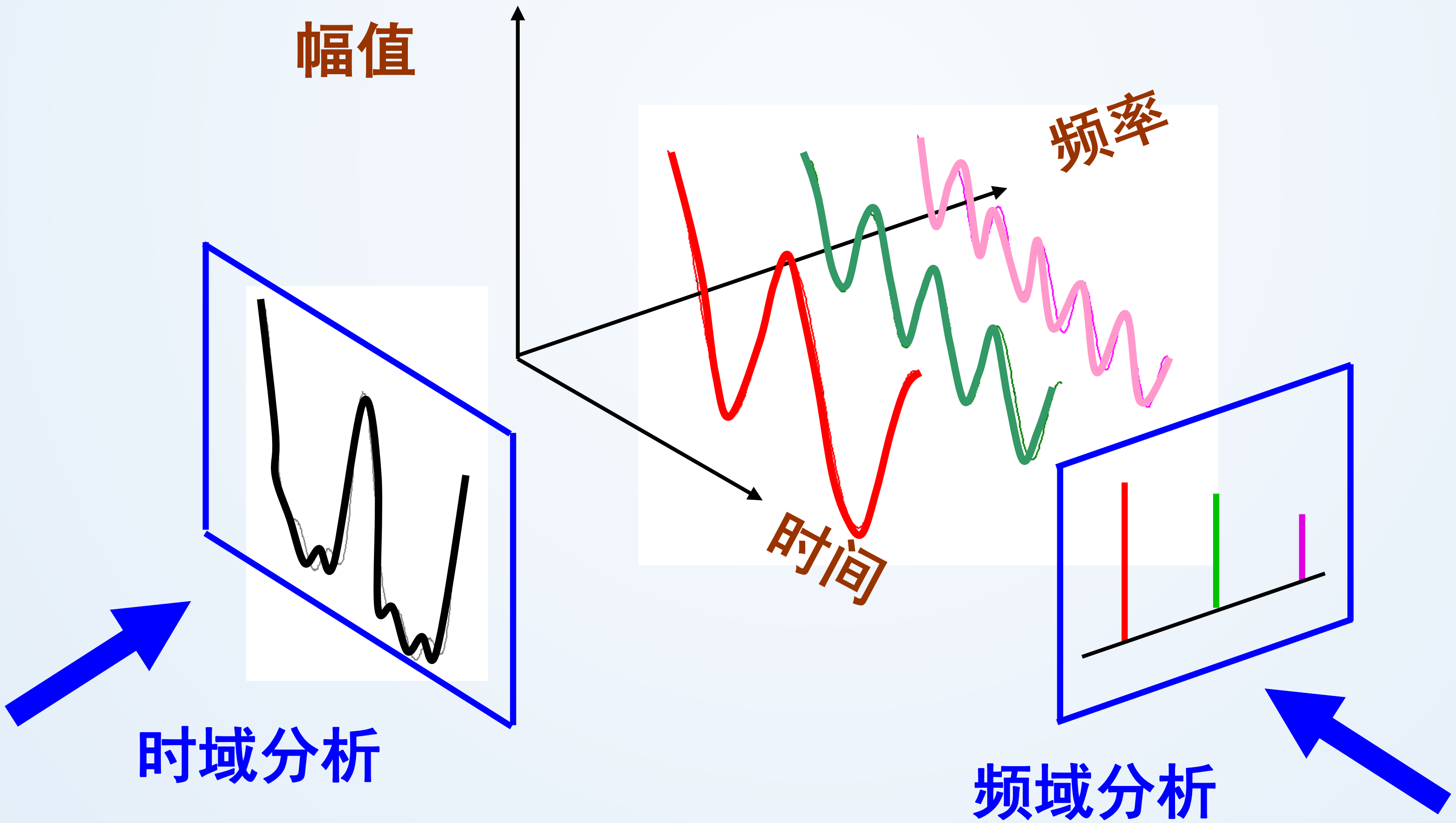
图例：受噪声干扰的多频率成分信号





为什么要做频域分析

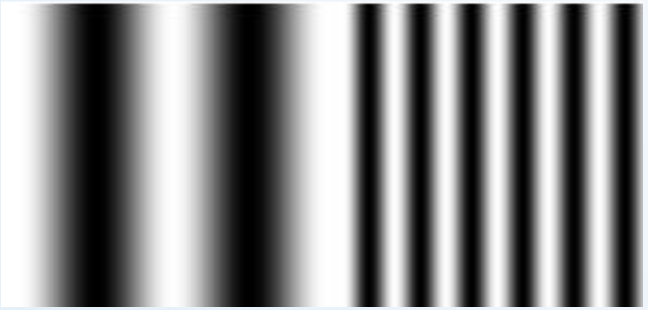
信号频谱X(f)代表了信号不同频率分量的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息。



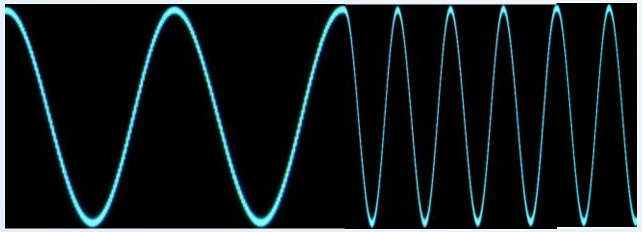
为什么要做频域分析

图像频率的意义

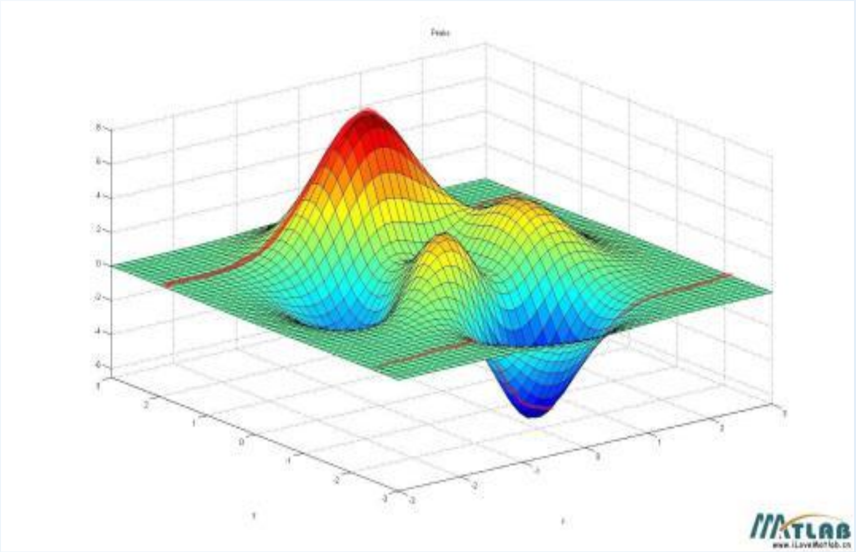
- 图像的**频率**表征图像像素灰度沿x轴和y轴变化的快慢
- 频率的**幅度值表示该频率成分对原来图像信息（能量）的贡献**，也可理解为**该频率成分的强度**。



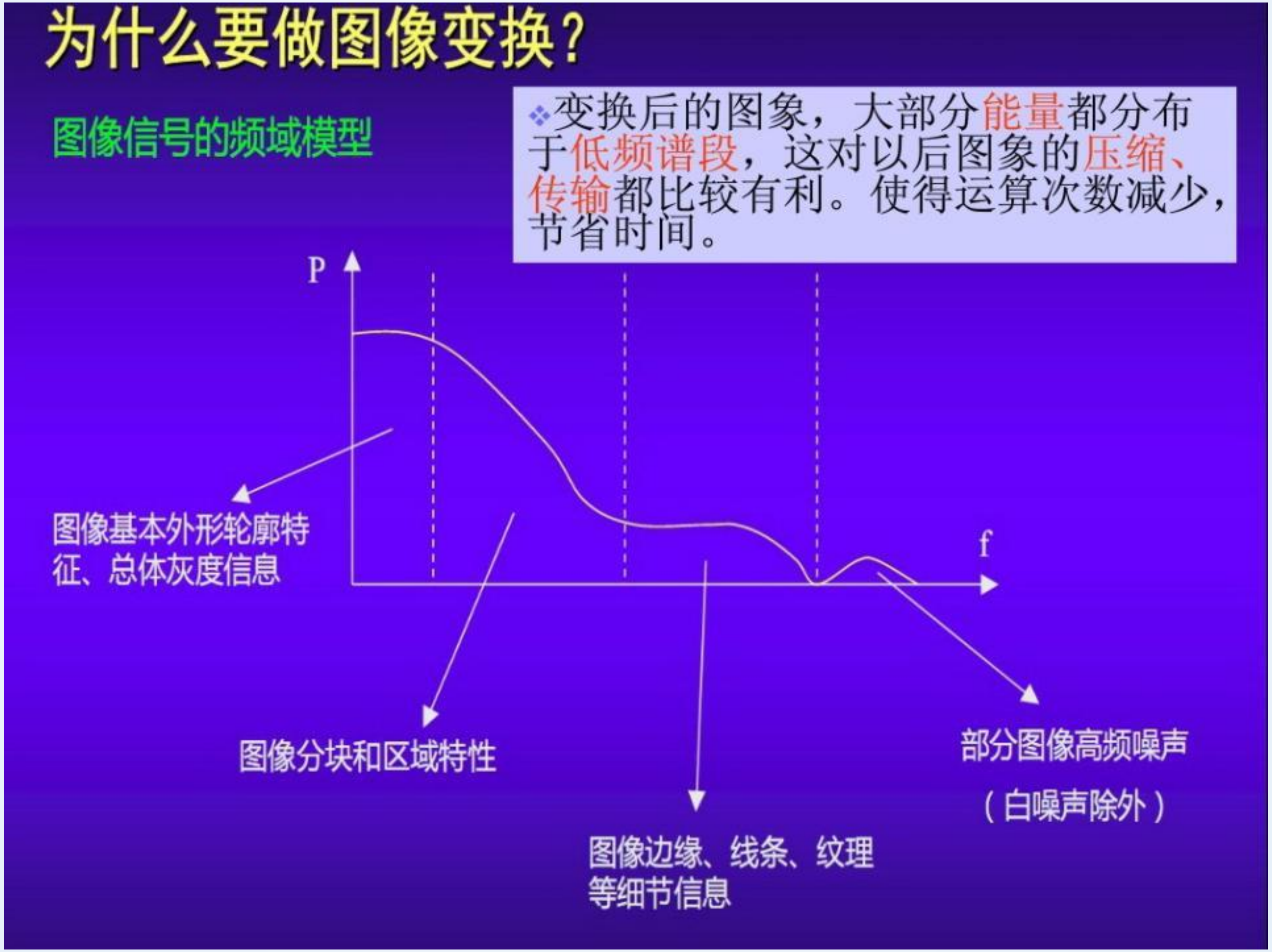
图像



图像灰度变化曲线



为什么要做频域分析



为什么要做图像变换?
图像信号的频域模型
变换后的图象，大部分能量都分布于低频谱段，这对以后图象的压缩、传输都比较有利。使得运算次数减少，节省时间。
P
f
图像基本外形轮廓特征、总体灰度信息
图像分块和区域特性
图像边缘、线条、纹理等细节信息
部分图像高频噪声
（白噪声除外）

主要内容

Main Content

- 引言
- 傅里叶变换
- 图像频谱的解读
- 频域滤波基础

傅里叶分析

傅里叶1768年生于法国,1807年提出“**任何周期信号都可用正弦函数级数表示**”，1822年在“热的分析理论”一书中再次提出。1829年狄里赫利给出傅里叶变换收敛条件。到了上世纪60年代之后，傅里叶变换得到大规模的应用。

傅里叶的两个最主要的贡献：

（1）“周期信号都可表示为**谐波关系**的正弦信号的**加权和**”（傅里叶级数）

（2）“非周期信号都可用正弦信号的**加权积分**表示”（傅里叶变换）

傅里叶分析

傅里叶变换的作用

傅里叶变换好比一个玻璃棱镜。

棱镜可以将白光分解成不同颜色，每个成分的颜色由波长决定。

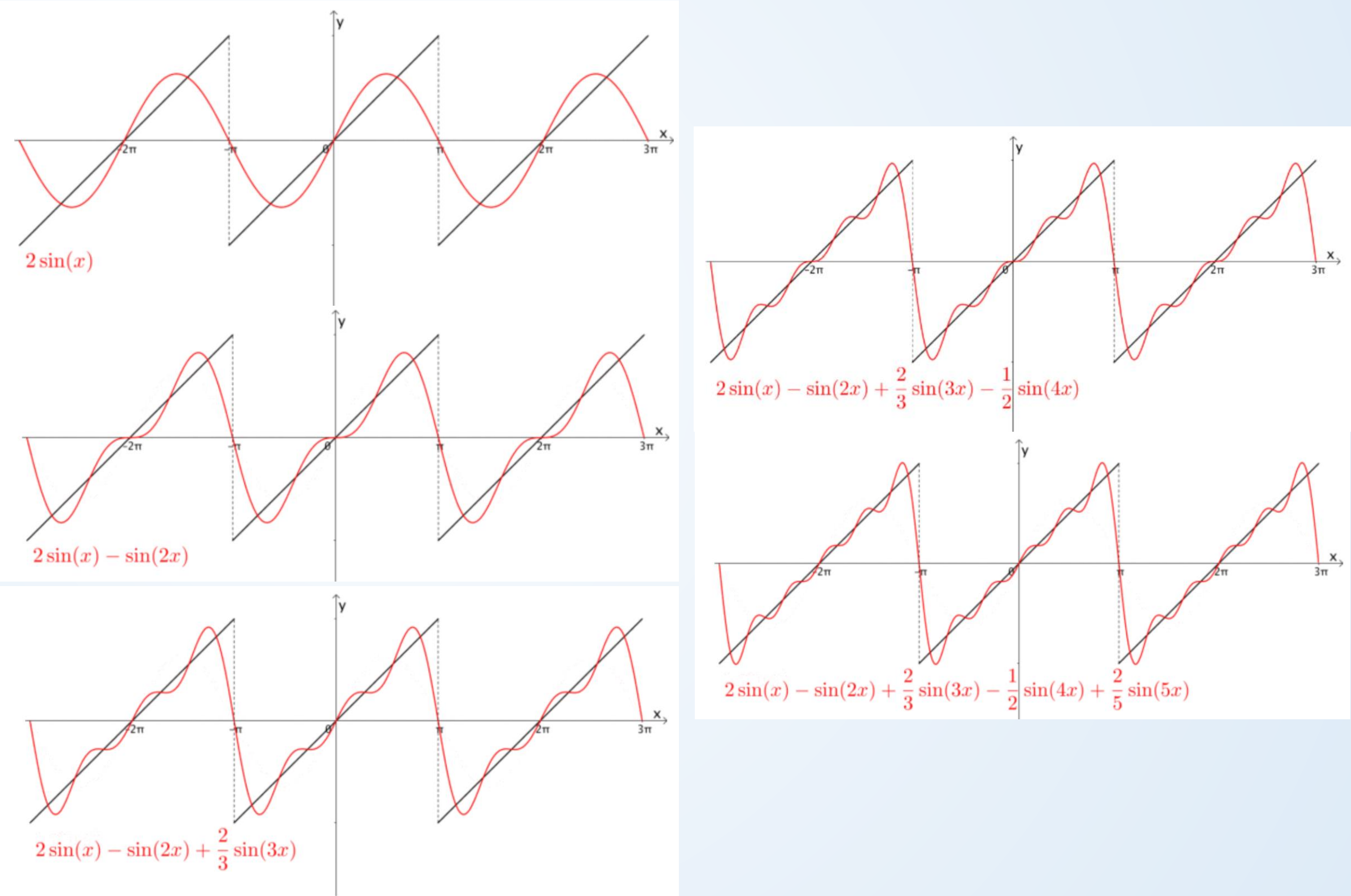
傅里叶变换可看做是“**数学中的棱镜**”，将函数基于频率分成不同的成分。

傅里叶级数

“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”：任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和/或余弦函数的加权和。

？

实验：用正弦函数叠加出一个周期函数



傅里叶级数

傅里叶级数的三角函数形式

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$c_n=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}} \qquad \varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

傅里叶级数的复指数形式

$$\begin{cases} f_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t} \\ F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \end{cases}$$

物理意义：

周期信号可展开成直流和无穷多个频率为**基频整数倍**的、且具有不同**幅度**和**初相位**的正弦信号的叠加。

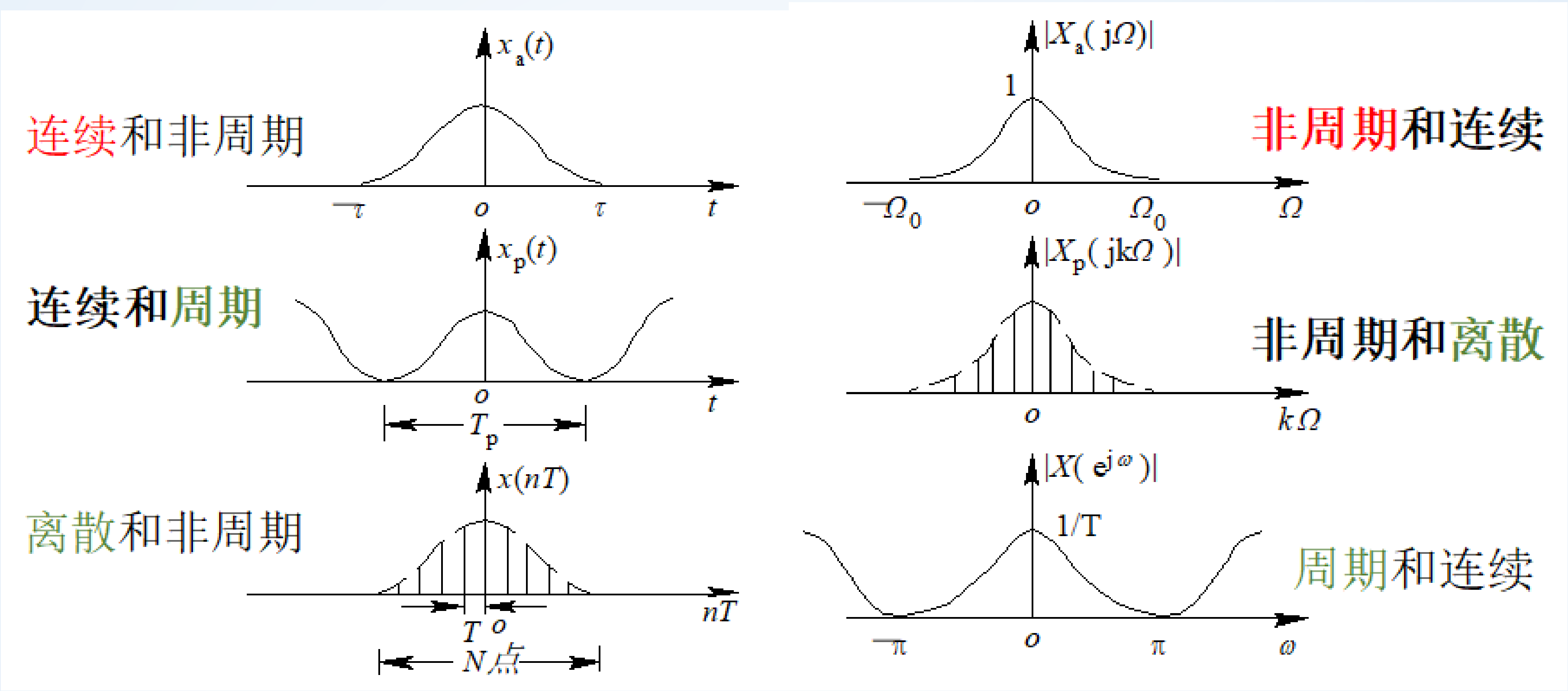
一个复杂的周期信号由不同频率的正弦（或余弦）信号叠加而成，其中每个正弦信号由其幅度、初相位和角频率这三个参数决定。知道了每个正弦信号的“三参数”，就能掌握原复杂信号的全部信息。

傅里叶变换

时域　　　　频域

连续信号的傅里叶变换

离散时间傅里叶变换（DTFT）



上述三种变换，信号至少在一个域内是连续的，不适合以计算机为代表的现代数字信号处理设备。

离散傅里叶级数

周期序列的离散傅里叶级数（DFS）

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个**周期为*N*** 的周期序列， 即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+rN) \quad r\text{为任意整数}$$

其离散傅里叶级数变换对可表示为:

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \end{cases}$$

傅里叶级数的复指数形式

$$\begin{cases} f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \\ F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{cases}$$

$$\boxed{W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

离散傅里叶级数

周期序列的离散傅里叶级数（DFS）

$$
\begin{cases}
\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk} \\
\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}
\end{cases}
$$

$$\boxed{W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

用傅里叶级数表示，其基波频率为： $\frac{2\pi}{N}$

用复指数表示基波： $e_1=e^{j\frac{2\pi}{N}n}$

第k次谐波为： $e_k=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

$$e_{k+N}=e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+N)}=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=e_k$$

第k次谐波也是周期为N的序列。

所以，周期为N的序列的离散傅里叶级数也是周期为N的序列。

离散傅里叶变换

从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

有限长序列的离散频域表示(DFT) 可由**周期**序列的DFS导出

设$x(n)$为有限长序列，长度为N

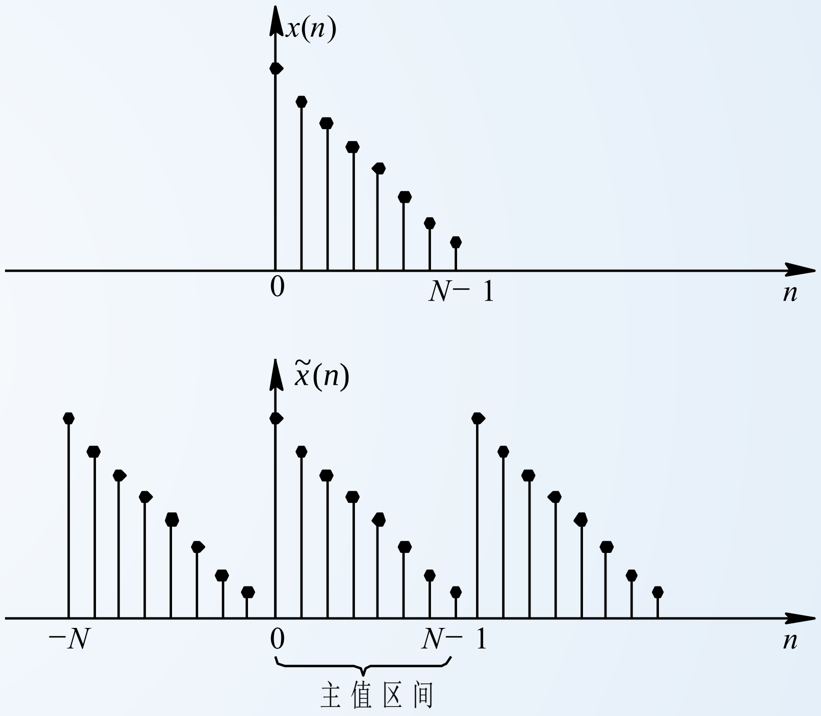
$$x(n)=\begin{cases} x(n) & 0\le n\le N-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

为了引用周期序列的概念，**把x(n)看成周期为N的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期**，而把 $\tilde{x}(n)$ 看成x(n)的以N为周期的**周期延拓**。

离散傅里叶变换

从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

$$\begin{cases} \tilde{x}(n)=x(n),0\le n\le N-1 \\ \tilde{x}(n+rN)=\tilde{x}(n),r\text{为任意整数} \end{cases}$$



主值区间: $\tilde{x}(n)$ **的第一个周期*n=0* 到*n=N-1*;**

对应的序列称为主值序列

离散傅里叶变换

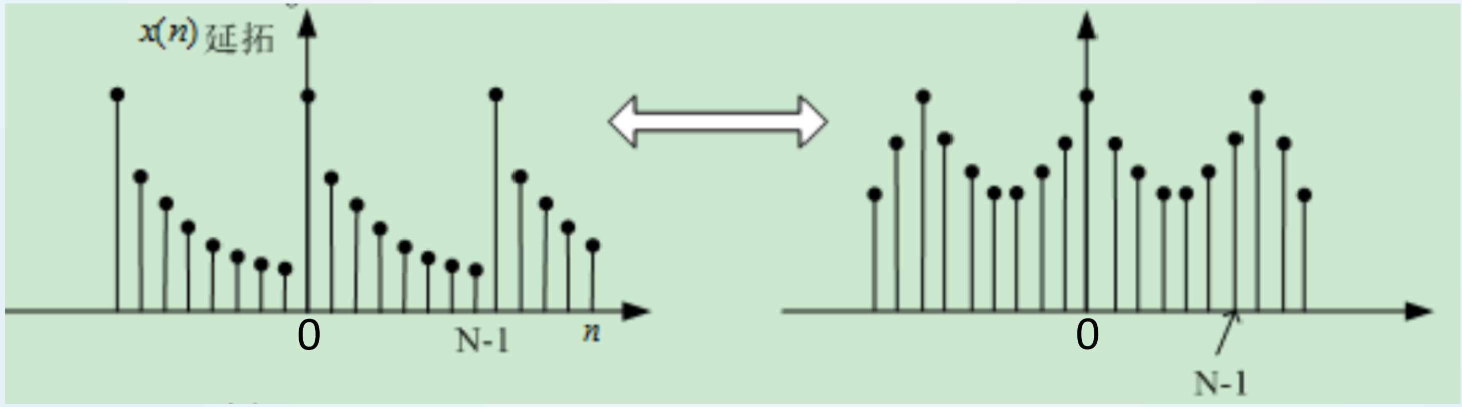
从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

$$x(n) \longrightarrow \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k) \longrightarrow X(k)$$

$$X(k) \longrightarrow \tilde{X}(k) \xrightarrow{\text{IDFS}} \tilde{x}(n) \longrightarrow x(n)$$

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & 0 \le k \le N\text{-}1 \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & 0 \le n \le N\text{-}1 \end{cases}$$



离散傅里叶变换

从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

- 离散傅里叶变换(DFT)实际上来自于离散傅里叶级数(DFS),只不过仅在时域与频域对周期序列各取一个周期而已

- 长度为N的有限长序列x(n)与周期序列 $\tilde{x}(n)$，都有N个独立值，因此其信息量相等

- 在进行DFT时，**有限长序列是作为周期序列的一个周期来考虑的**。因此，凡是涉及DFT关系，都隐含有周期性意义。

一维离散傅里叶变换

一维DFT的定义

◆ 设 $x(n)$ 为有限长序列，长度为M

$$x(n)=\begin{cases} x(n) & 0\le n\le M-1 \\ 0 & 其它n \end{cases}$$

◆ $x(n)$ 的N点DFT变换对定义如下：（N>=M）

$$\begin{cases} X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} & 0\le k\le N\text{-}1 \\ x(n)=IDFT[X(k)]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} & 0\le n\le N\text{-}1 \end{cases}$$

$$\boxed{W_N^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

其基波频率为： $\dfrac{2\pi}{N}$

用复指数表示第k次谐波：

$$e_k=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

一维离散傅里叶变换

一维DFT的定义

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & 0 \le k \le N\text{-}1 \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & 0 \le n \le N\text{-}1 \end{cases}$$

$$\boxed{W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

$X(k)$称为频谱系数，一般为复数。

$|X(k)|$表征各个谐波分量的幅度，

称为信号的**幅度谱**。

$$X(k) = R(\mathrm{k}) + \mathrm{jI}(\mathrm{k})$$

$$|X(k)| = \sqrt{R^2(k) + I^2(k)}$$ **幅度谱**

$$\varphi(k) = arctg \frac{I(k)}{R(k)}$$ **相位谱**

一维离散傅里叶变换

一维DFT示例

$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的8点和16点DFT。

（1）设变换长度$N=8$ 时，则：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_8^{kn}=\frac{1-W_8^{k\cdot 4}}{1-W_8^{k}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{8}4k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{8}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)},\qquad k=0,1\ldots,7$$

一维离散傅里叶变换

一维DFT示例

（2）设变换区间*N*=16 时，则：

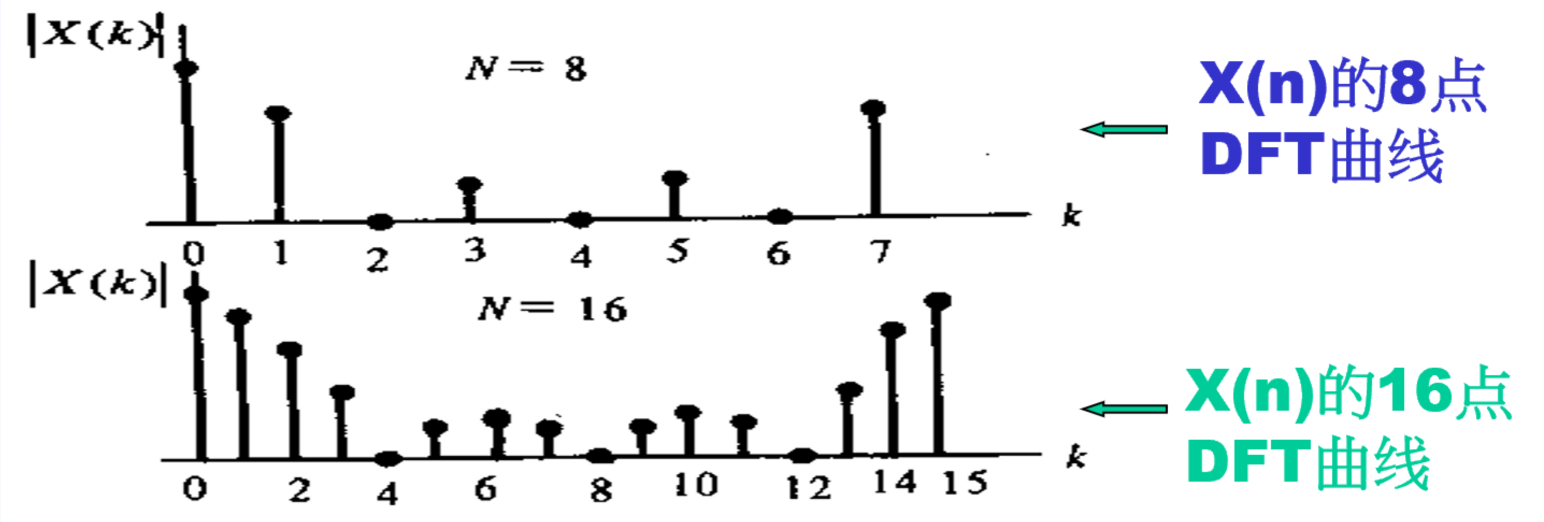
$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}W_{16}^{kn}=\frac{1-W_{16}^{k\cdot 4}}{1-W_{16}^{k}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}4k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}k}\left(e^{j\frac{\pi}{4}k}-e^{-j\frac{\pi}{4}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{16}k}\left(e^{j\frac{\pi}{16}k}-e^{-j\frac{\pi}{16}k}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3\pi}{16}k}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)},\qquad k=0,1...,15$$

一维离散傅里叶变换

一维DFT示例



- 非周期离散信号的DFT得到的频谱仍然是**离散**的
- 每一根谱线代表对应谐波成分的**强度**
- 变换长度不同，频谱**包络相同**
- 变换长度越大，则谱线间隔越小，即**谱线密度与变换长度成反比**

二维离散傅里叶变换

二维DFT的定义

设大小为M*N的图像 $f(x,y), x=0,\ldots,M-1; y=0,\ldots,N-1$

其傅里叶变换F(u, v)定义如下：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$u=0,1,\cdots M-1$$
$$v=0,1,\cdots N-1$$

逆傅里叶变换如下：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$x=0,1,\cdots M-1$$
$$y=0,1,\cdots N-1$$

注：u和v是图像的频率变量，x和y是图像的空域变量

二维离散傅里叶变换

二维DFT的定义

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\,e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$u=0,\ldots,M-1;\ v=0,\ldots,N-1$$

- u, v均为频率分量。 F(u, v)——傅里叶系数，通常是复数。
- F(u, v)失去了空间关系，只记录了频率关系。
- u和v定义的矩形区域称为频率矩形，其大小与图像f的大小相同。

当u=0,v=0时，

$$F(0,0)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$ 直流分量

$$\overline{f}(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$ 灰度平均值

$$F(0,0)=MN\,\overline{f}(x,y)$$

$$|F(0,0)|=MN\left|\overline{f}(x,y)\right|$$

- 原点(u, v)=(0, 0)处的频谱成分称为直流分量
- 由于MN很大，直流分量通常是频谱中的最大成分，可能比其它项大几个数量级。

二维离散傅里叶变换

二维DFT的定义

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cos\left(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N}\right)+j\sin\left(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N}\right)$$

对于每一对（u, v），F(u, v)的计算用到了所有的f(x, y)。

每一个频率分量所占能量情况

$$F(u,v)=R(u,v)+\mathrm{j}I(u,v)=|F(u,v)|\,e^{\mathrm{j}\,\varphi(u,v)}$$

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$ ——幅度谱，频谱

$$\phi(u,v)=\arctan[I(u,v)/R(u,v)]$$ ——相位谱

F(u, v)表示的是图像所有点在u, v频率上的强度。

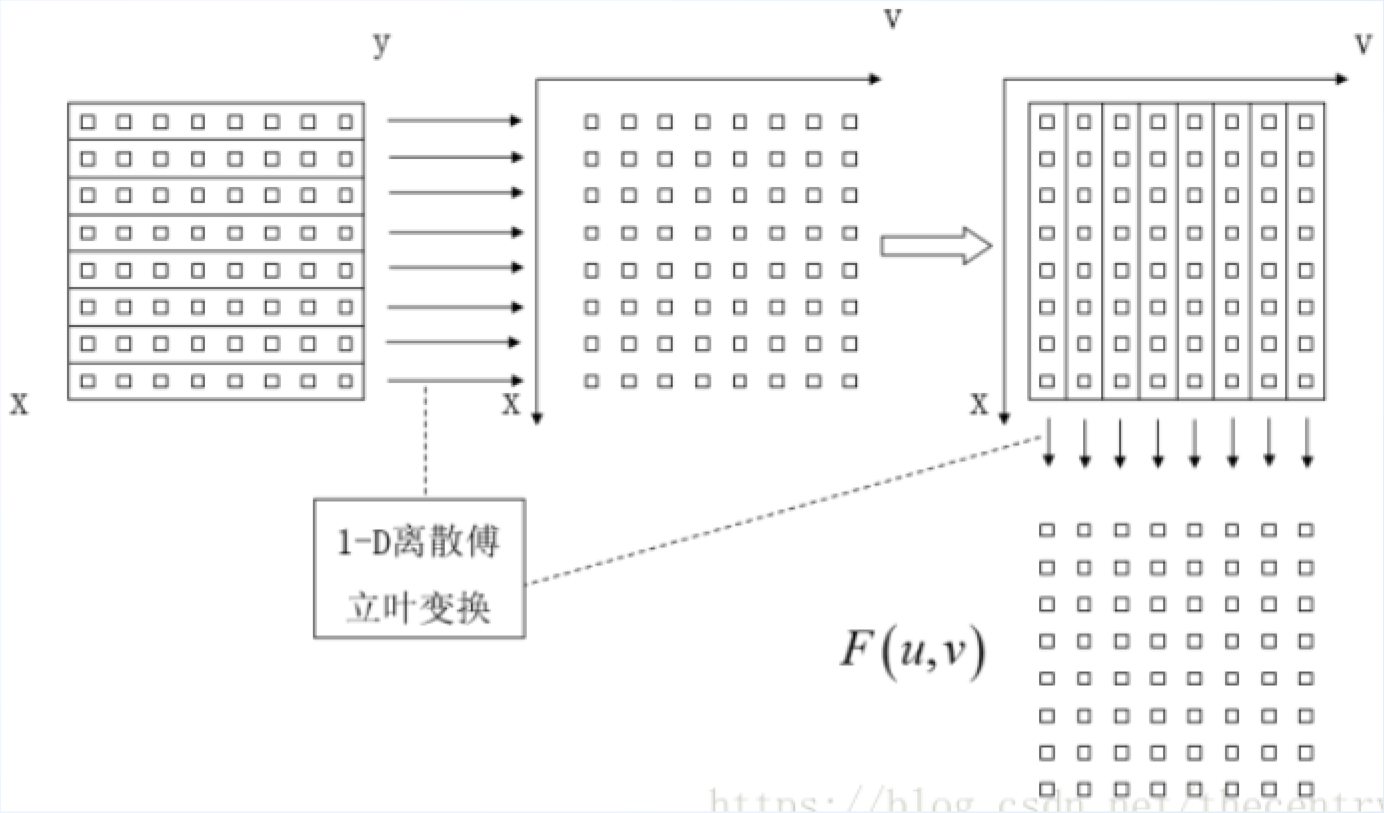
二维离散傅里叶变换

二维DFT的性质

可分离性

- 基本思想：二维DFT可分离为两次一维DFT
- 应用：通过计算两次一维FFT可实现二维快速傅立叶算法

■ 计算过程示意图



二维离散傅里叶变换

二维DFT的性质

□ 平移性

$$f(x,y) \leftrightarrow F(u,v) \Rightarrow \begin{cases} f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left[\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right]} \leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0) \\ f(x-x_0,y-y_0) \leftrightarrow F(u,v)\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)} \end{cases}$$

a. 空间位移：

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N}$$

$$\left|F(u,v)e^{\left[-j2\pi(ux_0+vy_0)/N\right]}\right| = \left|F(u,v)\right|$$

当空域信号f(x, y)产生移动时，在频域中只发生相移，并不影其傅里叶变换的幅度

b. 频率位移：

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

当频域信号F(u, v)产生移动时，在空域中只发生相移，并不影其反傅里叶变换的幅度

二维离散傅里叶变换

二维DFT的性质

□ 周期与共轭对称

周期性：离散傅里叶变换DFT和它的逆变换都以傅里叶变换的点数为周期的

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$

$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

共轭对称：傅立叶变换结果是以原点为中心的共轭对称函数

$$F(u,v)=F^*(-u,-v)$$

$$|F(u,v)|=|F^*(-u,-v)|$$

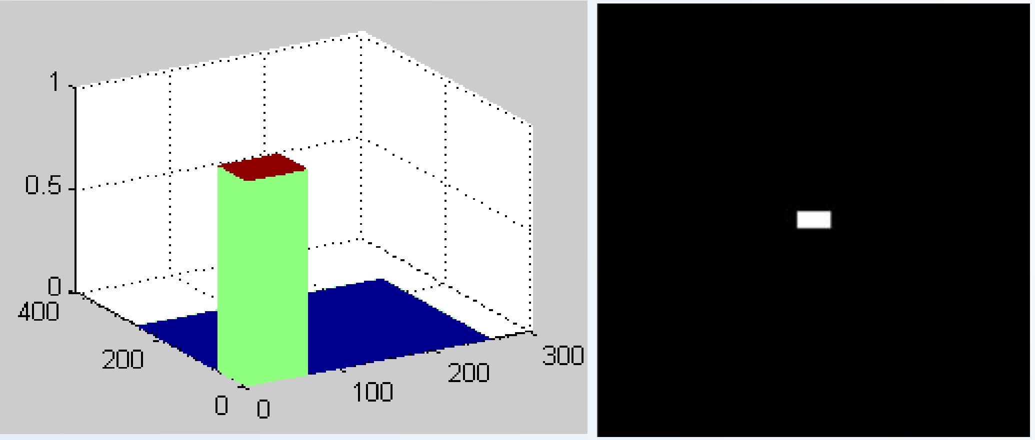
主要内容

Main Content

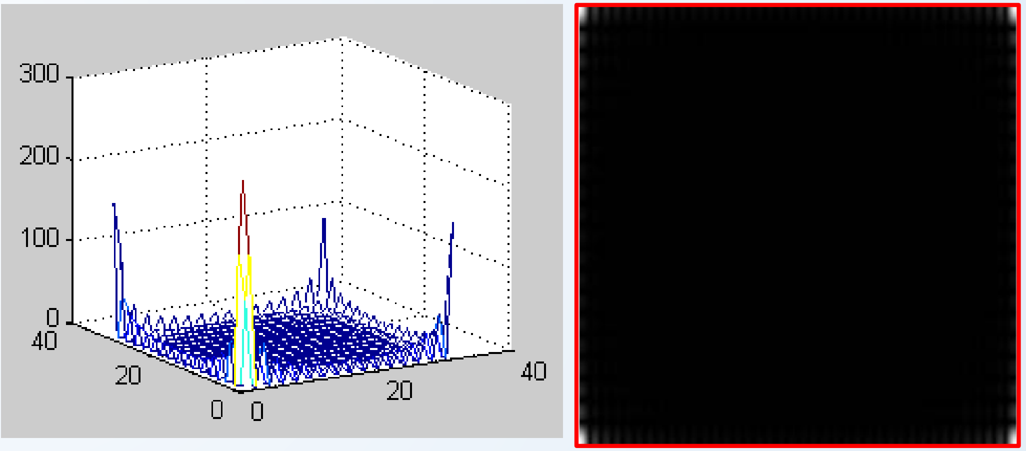
- 引言
- 傅里叶变换
- **图像频谱的解读**
- 频域滤波基础

图像频谱的解读

- 直观地分析一个变换的方法就是计算它的频谱，并将其显示为一幅图像。
- 谱图像就是把|F(u,v)|作为亮度值显示出来。



（a） 原函数及其灰度图



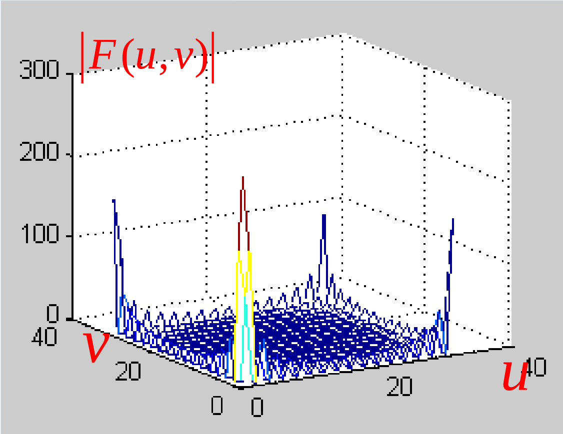
（b）二维DFT幅度图像及其灰度图

二维矩形窗的幅度谱

图像频谱的解读

二维离散傅里叶频谱图的解读

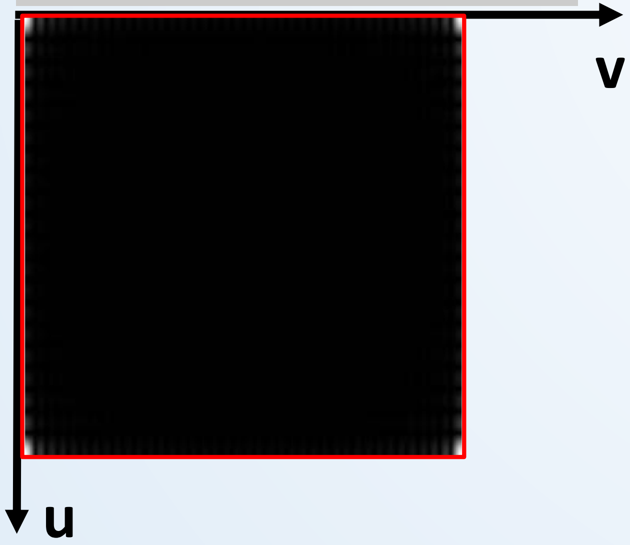
幅度频谱



$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N}\right)+j\sin\left(\frac{-2\pi(ux+vy)}{N}\right)$$

$$|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

幅度频谱灰度图



将频谱幅度映射到图像**灰度级范围**[0, 255]内，再以灰度图的方式表现出来。这是图像频谱图的常用方式。

注意：频谱图中4个角对应的幅度值最大

图像频谱的解读

为什么二维离散傅里叶频谱能量集中在四个角上？

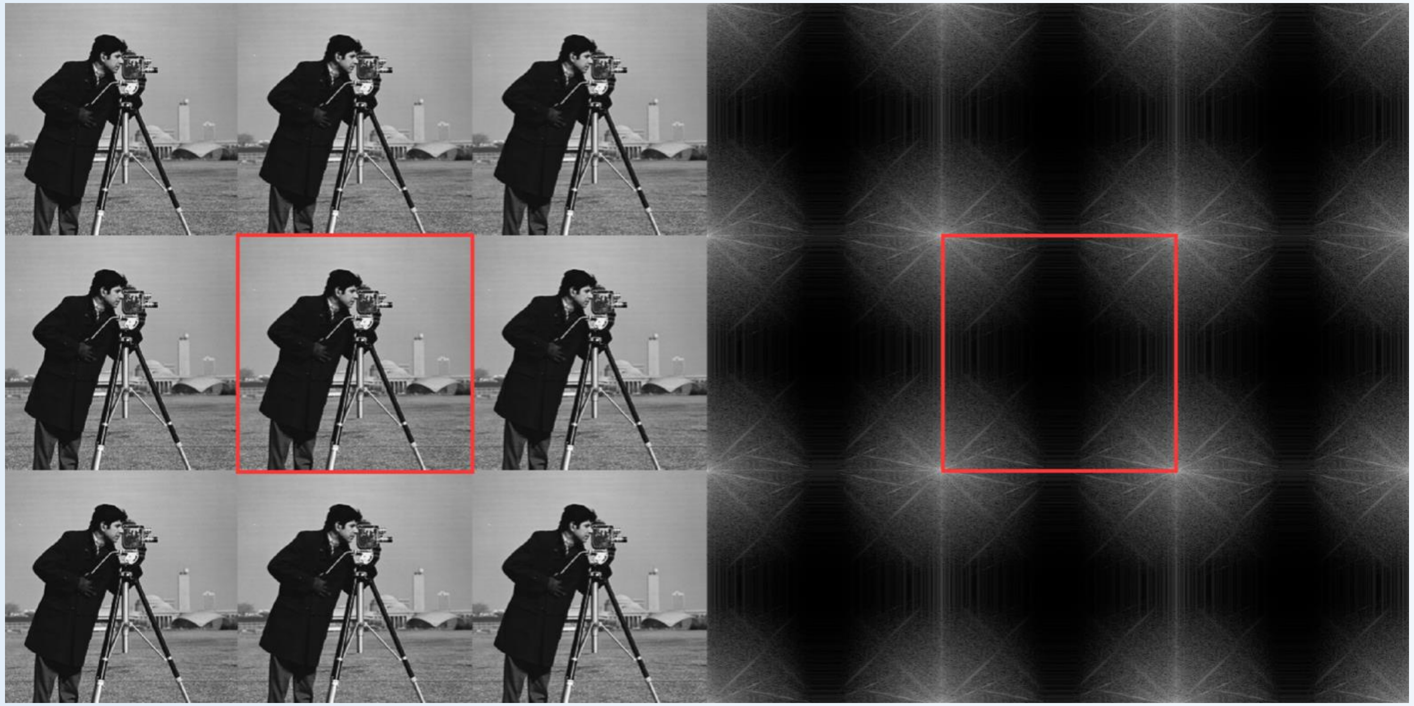
- 二维离散频谱图中各个点的亮度代表对应该点的频率成分的强度。
- 二维频谱图的四个角(0,0)，(M-1,0)，(0,N-1)，(M-1,N-1)是频率最低点，而**图像的主要能量集中在低频部分**，故这四个点的亮度最强。

◆事实上，离散傅里叶幅度谱沿u和v方向是分别关于M/2和N/2点对称的，频率先由低到高，再由高到低。这是由离散傅里叶变换的对称性决定的。

◆图像频谱图的**中心**处代表**频率最高**处。

图像频谱的解读

为什么二维离散傅里叶频谱图的四个角对应的频率最低？



- 二维DFT是将图像在x和y方向进行无限周期延拓，再对得到的周期信号计算离散傅里叶级数，最后从离散傅里叶级数中取一个周期。
- 离散傅里叶变换具有对称性。

图像频谱的解读

频谱的中心化

为了便于频域的滤波和频谱的分析，常常在变换之前进行频谱的中心化。所谓频谱中心化，是指将图像的频率最低点移到中心位置，从内至外，频率逐渐增大。

方法：

$$f(x,y)\cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)} \leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

当 $u_0=\frac{M}{2}, v_0=\frac{N}{2}$

$$e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$$

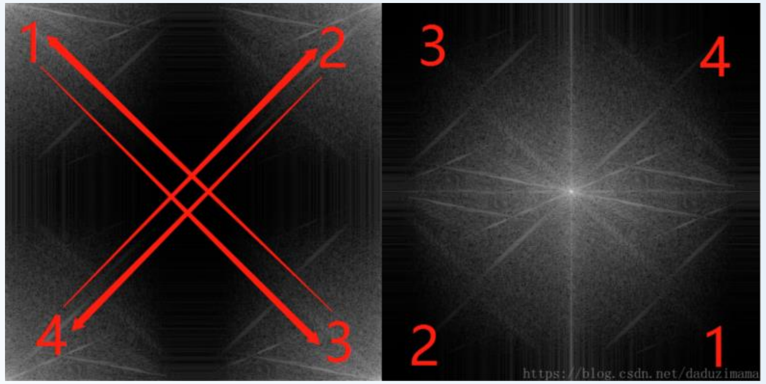
$$\Rightarrow f(x,y)\cdot(-1)^{x+y} \leftrightarrow F\left(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2}\right)$$

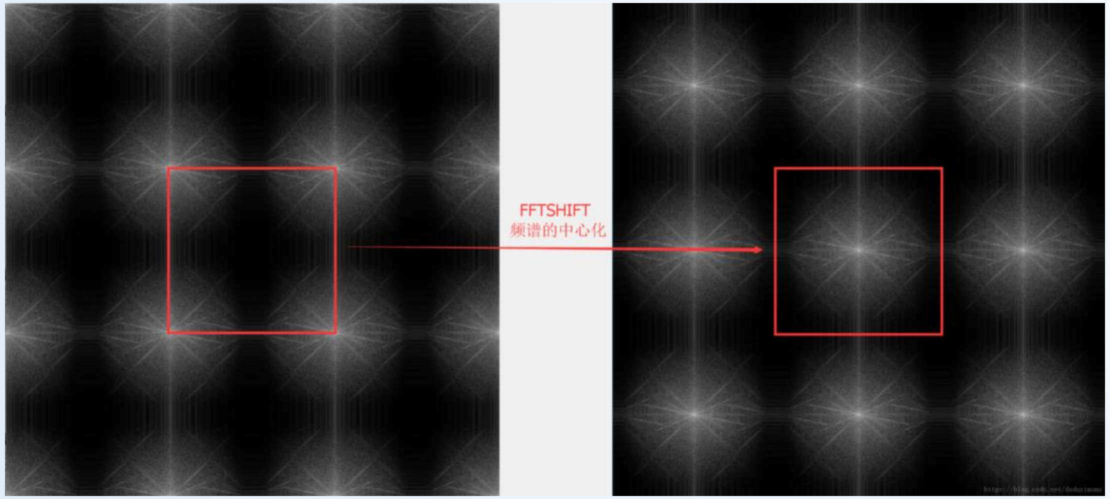
即如果需要将频域的坐标原点从显示屏起始点（0，0）移至中心点（M/2,N/2）处，只要将f(x,y)乘以$(-1)^{x+y}$因子再进行傅里叶变换即可实现。

图像频谱的解读

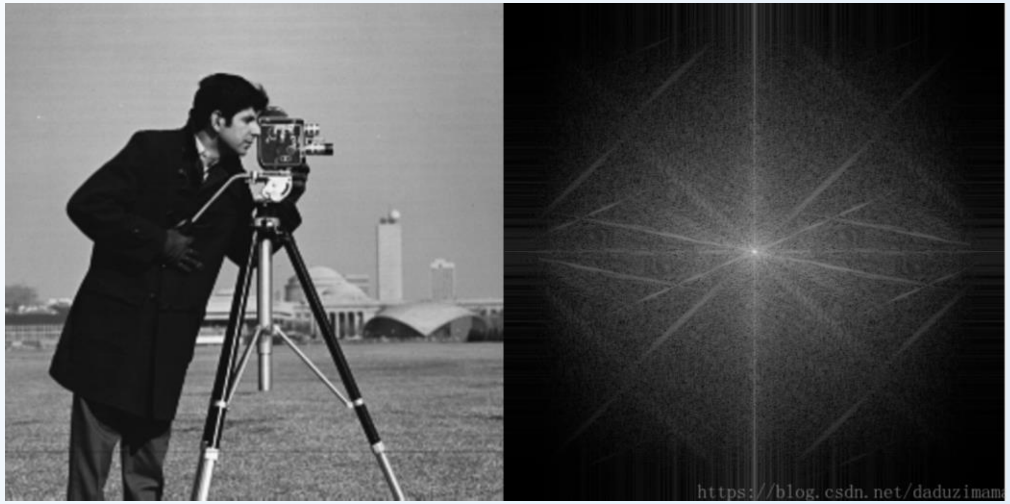
频谱的中心化

实现方法：把原始图像矩阵乘以 $(-1)^{x+y}$ ，就可实现频谱图4个象限的调换。





经过中心化后的频谱

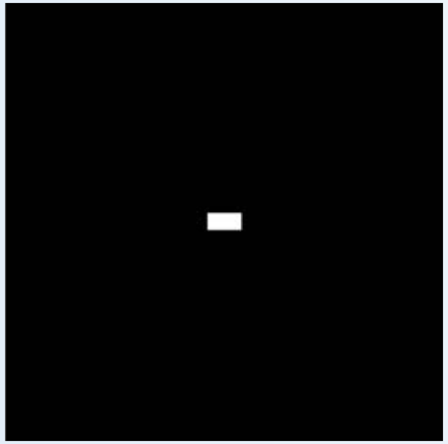


选择一个周期的频谱

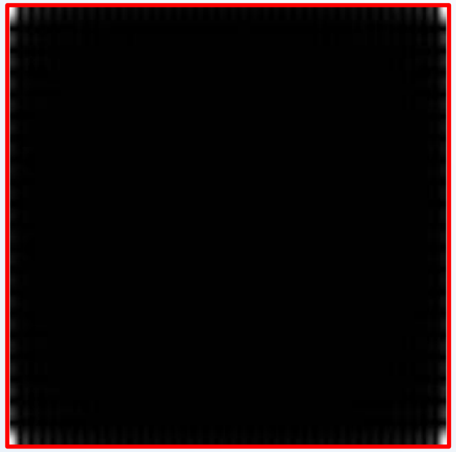
图像频谱的解读

频谱的对数化

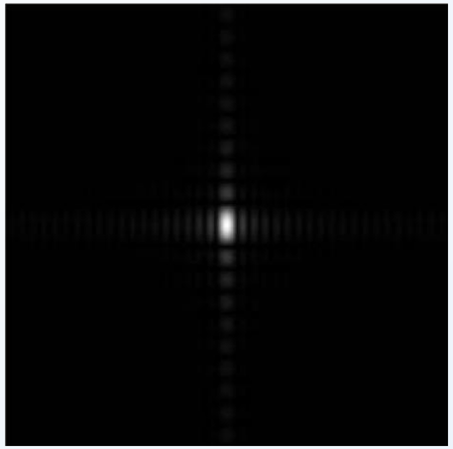
由于直流分量远大于其它频谱分量，在显示的频谱图像中，其它灰度的动态范围被压缩了。为了给出细节，对所有频谱幅度取**对数**。



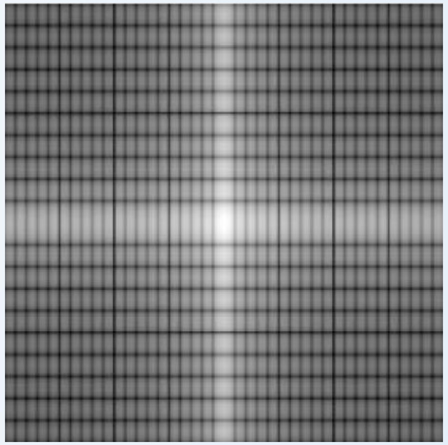
图像



原始频谱



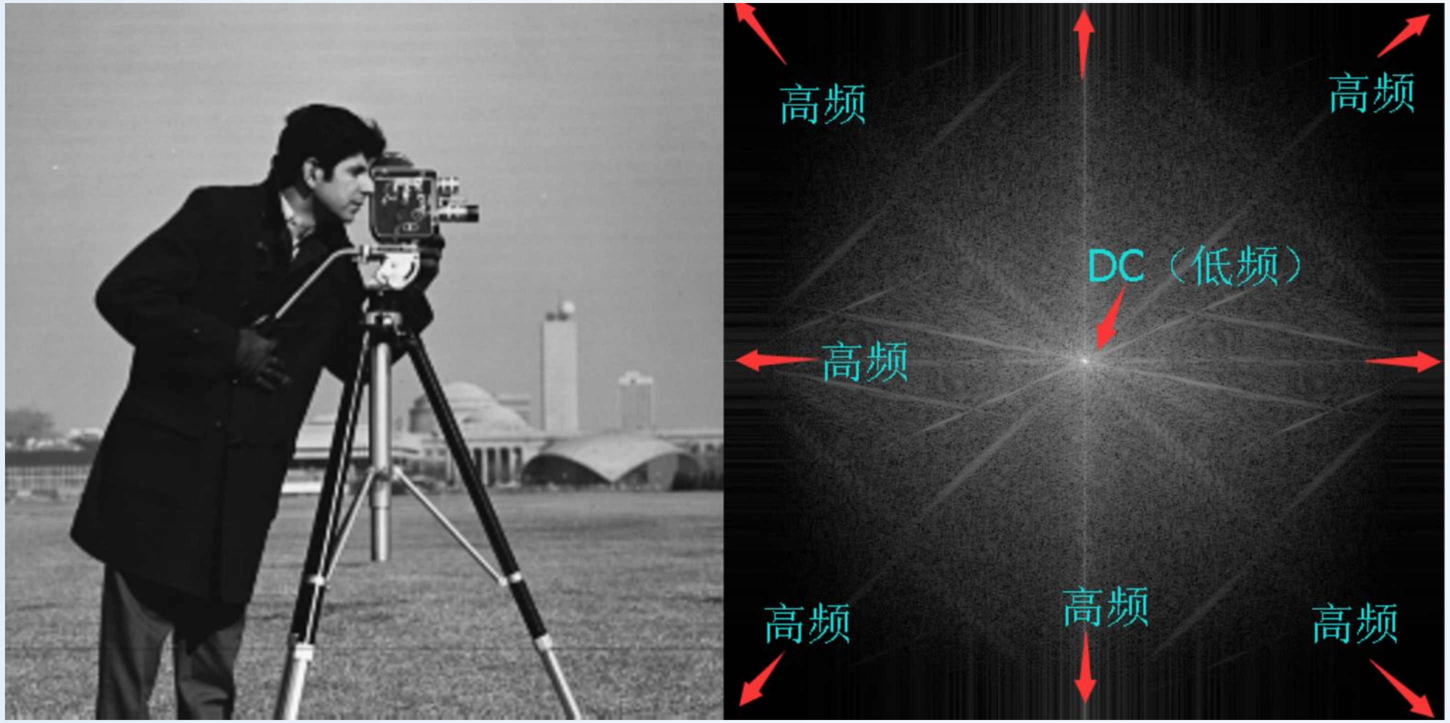
中心化后的频谱



对数化后的频谱

图像频谱的解读

高低频率的分布



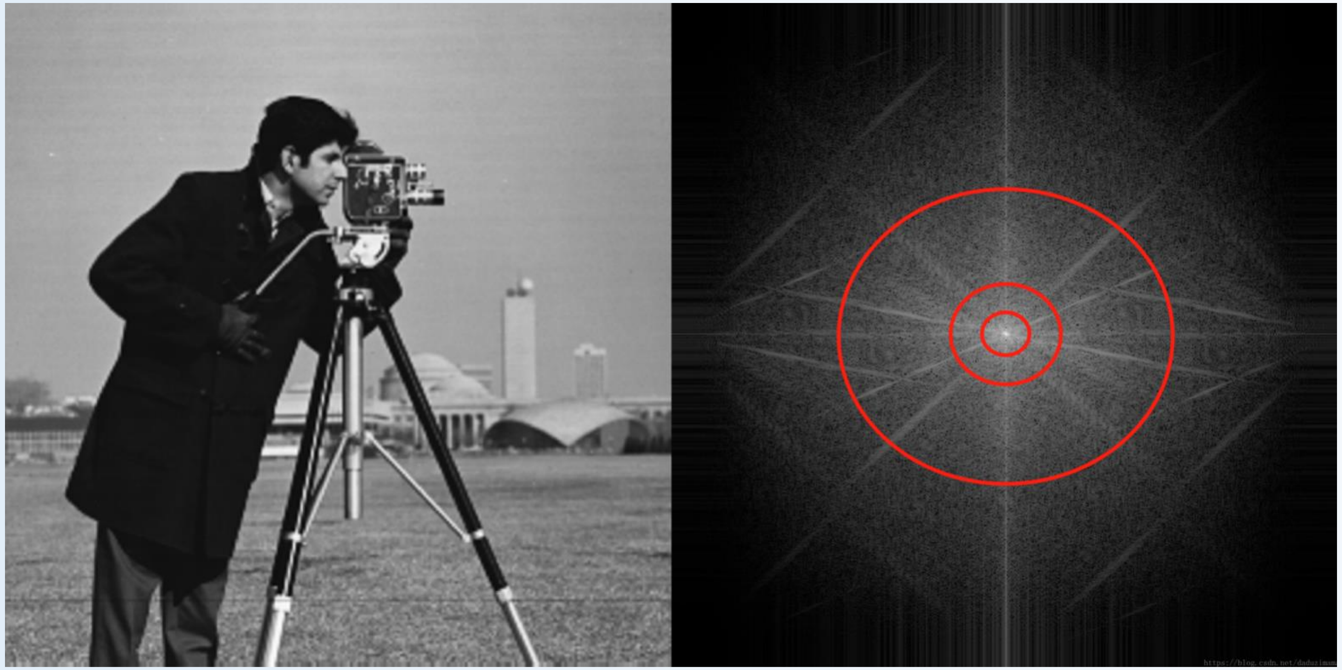
- 低频部分代表图像中灰度级变换平缓的部分，集中了大部分能量；
- 高频部分对应边缘和噪声等细节内容

图像频谱图的解读

高低频率的分布

图像频谱的解读

频谱能量分布



- 直流分量F(0, 0)所占能量最多。频率越高的部分，能量越少。
- 最小的圆圈内包含了大约85%的能量，中间圆圈包含了大约93%的能量，而最外面的圆圈则包含了约99%的能量。

图像频谱图的解读

纵横“交错”性

图像中的纵向线条或边界

体现在频谱的横轴方向

图像中的横向线条或边界

体现在频谱的纵轴方向

图像频谱的解读

纵横“交错”性

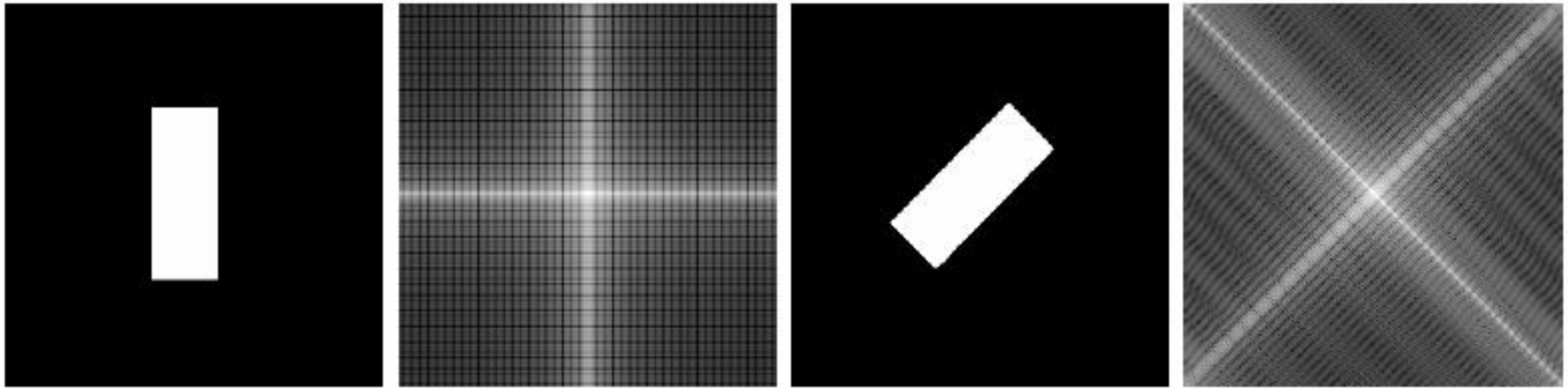
图像中的纵向条纹（水平正弦波），对应的频谱为横轴方向对称的一对频点

图像中的水平条纹（垂直正弦波），对应的频谱为纵轴方向对称的一对频点

图像频谱图的解读

频谱的旋转特性

旋转特性：对f (x, y) 旋转一定角度，相当于将其傅里叶变换F (u, v) 旋转一定角度



(a) (b) (c) (d)

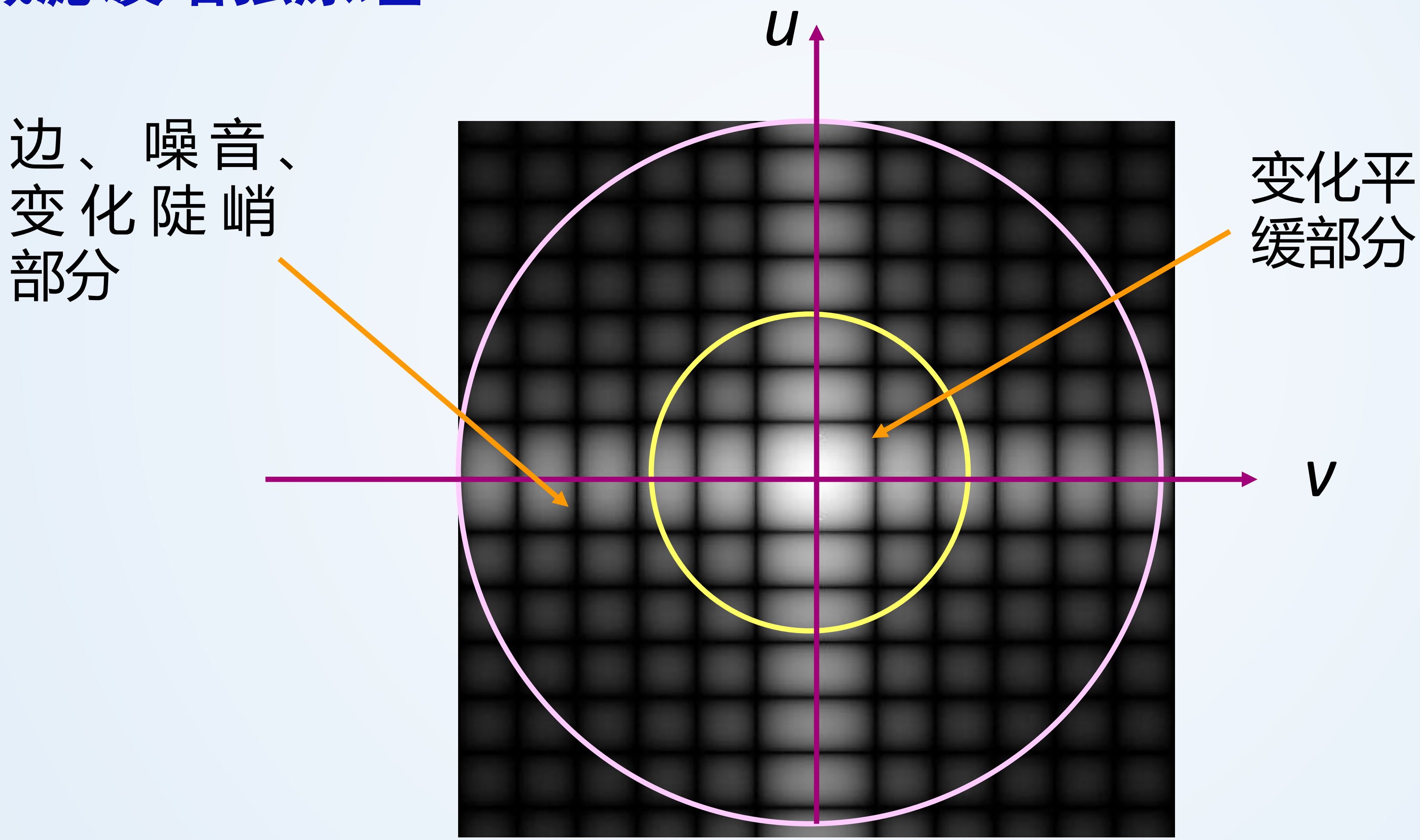
傅里叶变换旋转性质示例

主要内容

Main Content

频域滤波基础

频率域滤波增强原理



频域滤波基础

频域滤波增强的原理

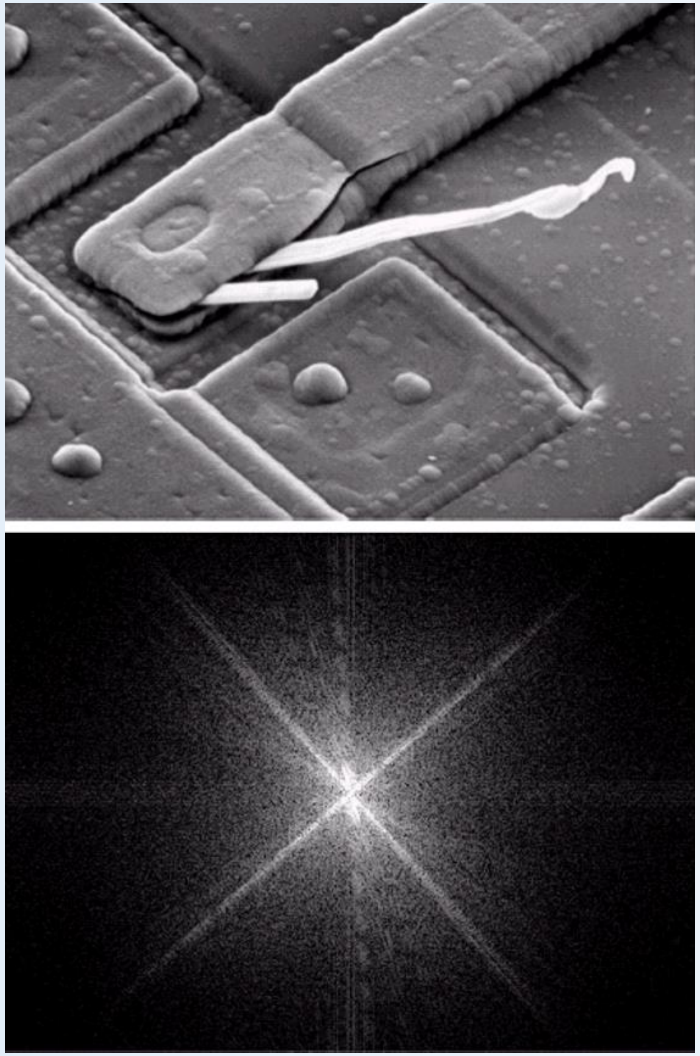
在频域空间，图像的信息表现为不同频率分量的组合。

频谱图像|F(u,v)|特点：

- □ 低频部分集中了大部分能量
- □ 高频部分对应边缘和噪声等细节内容

- ■ 频域增强是通过改变图像中不同频率分量来实现的。
- ■ 频域增强的工具是频域滤波器，不同的滤波器滤除的频率和保留的频率不同，因而可获得不同的增强效果。

频域滤波基础



一般不可能建立图像特定分量和其变换之间的直接联系，但可以建立傅氏变换的频率与图像中的强度变化模式之间的联系。

- 频谱中45°方向的突出成分，对应于图像中−45°方向的“突起边缘”；
- 频谱中−45°方向的突出成分，对应于图像中45°方向的“突起边缘”；
- 频谱中稍微左偏垂直轴的突出成分，对应于图像中的白色凸起物

频域滤波基础

图像频域增强的一般步骤

- ◆ 将图像从图像空间转换到频域空间（如傅里叶变换）
  - ✓ 计算图像的傅立叶变换
- ◆ 通过频域滤波方法对图像进行增强
  - ✓ 将图像的傅里叶谱与频域滤波器相乘
- ◆ 将增强后的图像从频域空间转换到图像空间
  - ✓ 进行傅立叶反变换

图像的频率域增强

图像频域增强的一般步骤

$$f(x,y): N\times N$$
$$\downarrow$$
$$F(u,v): N\times N$$
$$\downarrow$$
$$H(u,v): N\times N$$
$$\downarrow$$
$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$
$$\downarrow$$
$$g(x,y): N\times N$$

- f (x,y)、h (x,y)均补零扩充为P×Q，
- P=2N-1;　Q=2N-1.

频域内的卷积等价于时域内的乘积，即：两个时域信号做卷积，其结果等于它们各自的频域信号相乘后再变换到时域。

- 图像进行傅立叶变换，需将其看作周期函数的一个周期；
- 周期函数进行卷积，为避免周期折叠误差，需对函数进行补零扩展。

频域滤波分类：

- 低通滤波，高通滤波，带通和带阻滤波，同态滤波

频域滤波基础

基本的滤波器

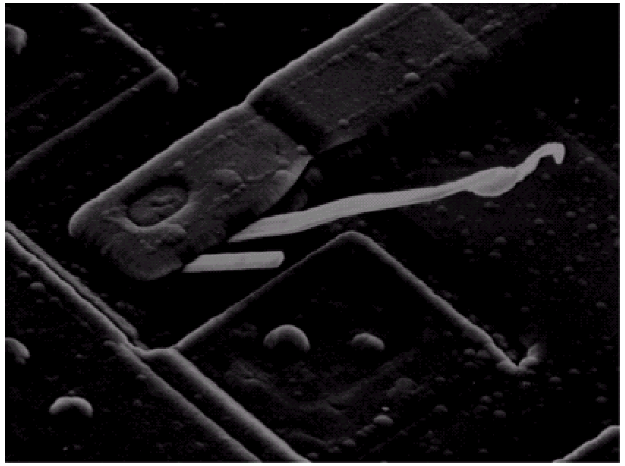
陷波滤波器：

$F(0,0)\rightarrow$**平均值**

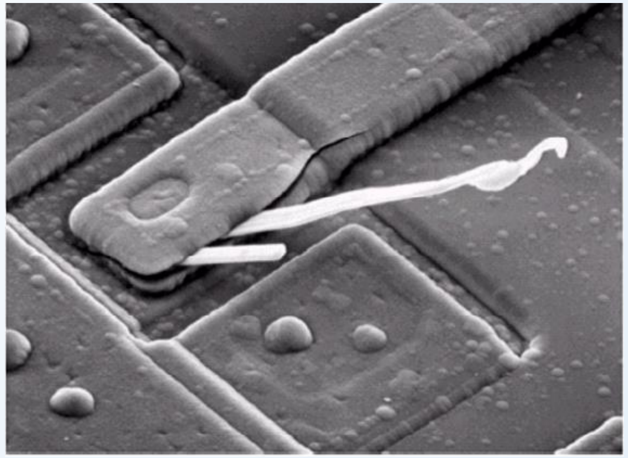
如果想使其平均灰度为0，则可：

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & (u,v)=(\dfrac{M}{2},\dfrac{N}{2})\\ 1 & \text{其它}\end{cases}$$

FIGURE 4.6 Result of filtering the image in Fig. 4.4(a) with a notch filter that set to 0 the $F(0,0)$ term in the Fourier transform.



陷波滤波后的图像

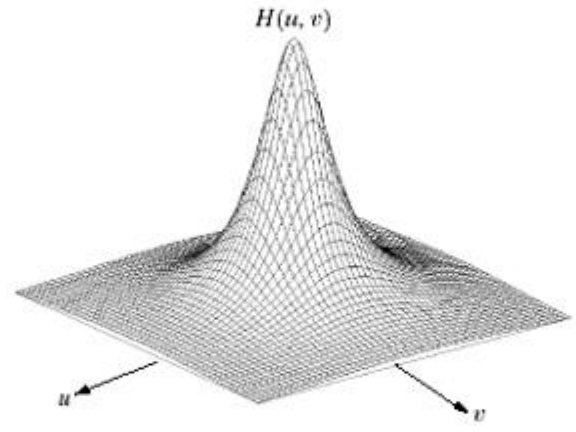


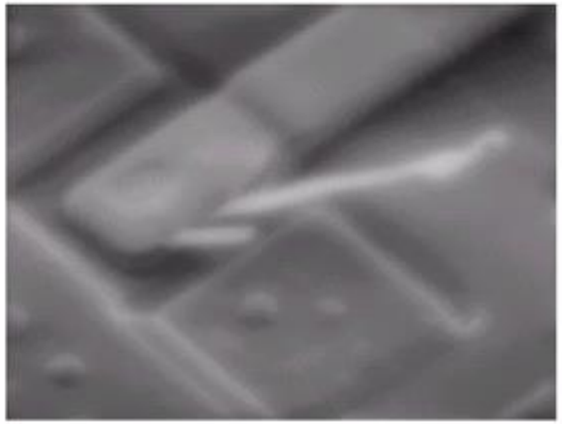
原始图像

频域滤波基础

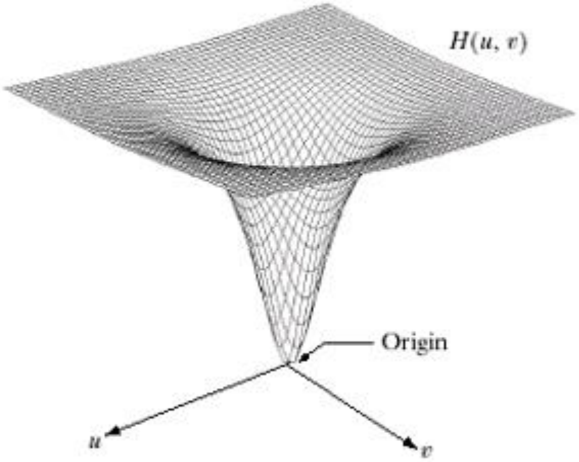
基本的滤波器

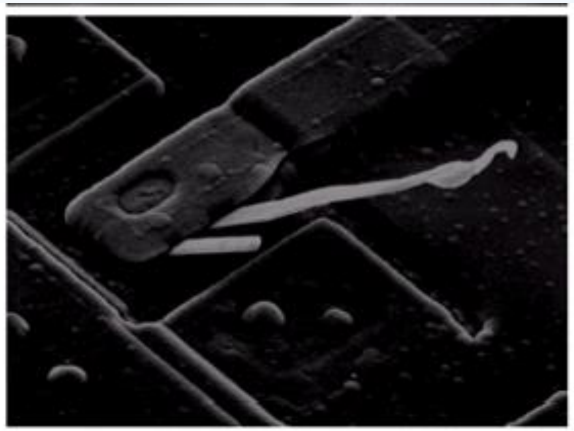
低通滤波器：

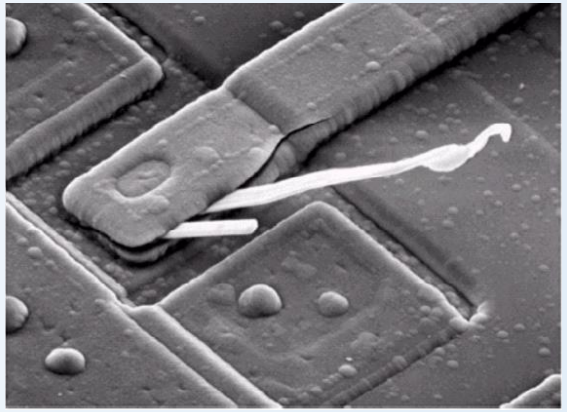




高通滤波器：







原始图像

武汉大学
Wuhan University

谢谢！

2018.10.10.