Calculus2 Seminars

Дина Шакирова БКНАД222

January - June 2024

Special for my friends!

Содержание

1. [12.01.24] Семинар №1

Th. О непрерывности

$$G(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\ dx$$

$$\left.\begin{matrix} f - \text{непр. на } [a,b]\times[c,d] \\ \alpha,\beta - \text{непр. на } [c,d] \end{matrix}\right\} \implies G - \text{непр. на } [c,d]$$

Th. О дифференцируемости

$$\left.\begin{matrix} f, \frac{\partial f}{\partial y} - \text{непр. на } [a,b]\times[c,d] \\ \alpha,\beta - \text{дифф. на } [c,d] \end{matrix}\right\} \implies G - \text{дифф. на } [c,d] \text{ и}$$

$$G'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)$$

Th. Об интегрировании

$$F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\ dx, f - \text{непр. на} [a,b]\times[c,d] \implies F - \text{интегр. на } [c,d] \text{ и}$$

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

Вычислить пределы:

Задача 1.

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx$$

Нужно ввести предел внутрь интеграла, для этого воспользуемся теоремой

$$-1, 1 - \text{постоянные перед интегралом}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} - \text{непр. на} [-1,1]\times[-1,1] \qquad ([-1,1]\times[-\delta,\delta])$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}dx = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx = \int\limits_{-1}^{1}|x|dx = 2\int\limits_0^1 x\ dx = x^2|_0^1 = 1$$

Задача 2.

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{y}^{\sqrt{3}+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

$\frac{dx}{1+x^2+y^2}$ - *непрерывна всегда* $\implies$ *на* $[-1,\sqrt{3}+1]\times[-1,1] \qquad ([a,b]\times[c,d])$
$y, \sqrt{3}+y$ - *непрер на* $[-1,1]$

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

Задача 3.

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-n\sin x}dx$$

Исследовать функцию на непрерывность:

Задача 4.

$$F(y) = \int_0^1 (1+x)^{xy} dx, y > 0$$

$\forall y_0 \quad \prod = [0,1] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$
$f = (1+x)^{xy} \quad (1+x > 0)$ - *непр. на* $\prod$
$\implies F$ – непрер. в $y_0 > 0 \implies F$ – непрер. на $y > 0$

Исследовать функцию на непрерывность. Является ли эта функция непрерывной на $\mathbb{R}$?

Задача 5.

$$F(y) = \int_0^1 \frac{ye^x}{x^2 + y^2} dx, y > 0$$

$\forall\ y_0 > 0$

$$f = \frac{ye^x}{x^2+y^2} - \text{непр. на}[0,1] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] = [0,1] \times \left[\frac{y_0}{2}, \frac{3y_0}{2}\right] \quad \left(\delta = \frac{y_0}{2}\right)$$

$\implies F$ – непрер. в $y_0 > 0 \implies F$ – непрер. на $y > 0$. *(Тут непрерывность в точке определяется непрерывностью на отрезке* $\left[\frac{y_0}{2}, \frac{3y_0}{2}\right]$*).*

Аналогично F *- непрер. на* $y < 0$

Вдруг f *можно доопределить в* $(0,0)$ *(Переход в полярные координаты.):*

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{ye^x}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \lim_{r\to0} \frac{r\sin\varphi \cdot e^{r\cos\varphi}}{r^2} = \infty$$

Нельзя доопределить в точке $(0,0) \implies f$ *имеет разрыв.*

$$F(0) = \int_0^1 \frac{0 \cdot e^x}{x^2 + 0^2} dx = 0$$

$\lim\limits_{y\to0} F(y) = ??$

$$\frac{y \cdot 1}{x^2+y^2} \leqslant \frac{ye^x}{x^2+y^2} \leqslant \frac{ye}{x^2+y^2}$$

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2} dx \leqslant F(y) \leqslant e\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2} dx$$

$$\frac{1}{y}\int_0^1 \frac{dx}{(\frac{x}{y})^2 + 1} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\Big|_{0=x}^{1=x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{y} \leqslant F(y) \leqslant e \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

(Предел $\lim\limits_{y\to0^+} F(y)$ *только если существует)*

$$y \to 0^+ \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \lim_{y\to0^+} F(y) \leqslant e \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$y \to 0^- \quad -\frac{\pi}{2} \geqslant \lim_{y\to0^-} F(y) \geqslant -e \cdot \frac{\pi}{2}$$

Нет предела $\lim\limits_{y\to0} F(y) \implies F$ *не непрерыв. в 0*

Исследовать на дифференцируемость и найти производную функции:

Задача 6.

$$F(y) = \int_0^1 e^{x^2+y^2}dx$$

$$f = e^{x^2+y^2} - \text{непрер. на } [a,b]\times[c,d]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\cdot 2y - \text{непрер. на } [a,b]\times[c,d]$$

По Th о дифф. СИЗП:

$$F'(y) = \int_0^1 2ye^{x^2+y^2}dx$$

Задача 7.

$$F(y) = \int_y^{1+y} \frac{\sin(xy)}{x}dx$$

$y, 1+y$ - дифф.

$$f = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, \ x \neq 0 \\ y, \ x = 0 \end{cases} \quad - \text{ непр. на } [a,b]\times[c,d]$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x} = y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{1}{x}\cos(xy)\cdot x = \cos(xy), \ x\neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases} \quad = \cos(xy) - \text{ непр. на } [a,b]\times[c,d]$$

По Th о дифф. СИЗП

$$F'(y) = \underbrace{\int\limits_y^{1+y} \cos(xy)dx}_{(y,1+y-\text{ непр.}) \text{ по Th о непр. СИЗП}} + \underbrace{\frac{\sin((1+y)y)}{1+y}}_{\text{Доопр. до непр.}}\cdot \underset{=(1+y)'}{1} - \underbrace{\frac{\sin(y\cdot y)}{y}}_{\text{Доопр. до непр.}}\cdot \underset{=y'}{1}$$

$\implies$ *F - непр.-дифф.*

$$\frac{\sin y^2}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

Задача 8.

$$F(p) = \int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x}dx, p\in[0,1]$$

Метод диффференцирования по параметру: 1.

$$f(x,p) = \begin{cases} \frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x}, \ x\neq 0, x\neq \pi \\ p, \ \ x = 0, x = \pi \end{cases} \quad - \text{ непр. на } [0,\pi]\times[0,1-\delta]$$

$$\frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x} \sim \frac{p\sin x}{\sin x} = p$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+p\sin x}\cdot \sin x = \frac{1}{1+p\sin x} \\ 1 \end{cases} \quad = \frac{1}{1+p\sin x} - \text{ непр. на } [0,\pi]\times[0,1-\delta]$$

$$F'(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1+p\sin x}dx = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right] = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+p\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{2dt}{1+t^2+2pt} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{2dt}{(t+p)^2+1-p^2} = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{t+p}{\sqrt{1-p^2}}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$\left[\operatorname{arctg}\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} = \alpha,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}},\ \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{p^2}{1-p^2}} = \frac{1-p^2}{1},\ \sin^2\alpha = p^2 \implies \sin\alpha = p,\ \ \alpha = \arcsin p\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\arcsin p$$

2.

$$F(p) = \int\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\arcsin p}_{=2\arcsin p d(\arcsin p)}\right)dp = \pi\arcsin p - \arcsin^2 p + C$$

3.

$$p=0 \quad F(0) = \int\limits_0^{\pi}\underbrace{\frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x}}_{\text{непр.}}dx \ - \ \text{ непр. по Th о непр. на } [0,1]$$

$\implies F(p) = \pi\arcsin p - \arcsin^2 p,\ \ p\in[0,1]$

Задача 9.

$$\int\limits_0^{\pi/2}\ln(p^2-\sin^2 x)dx, |p|\geqslant 1$$

С помощью интегрирования по параметру вычислить интеграл ($a > b > 0$):

Задача 10.

$$\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy$$

$f(x,y) = x^y$ *- непр. на* $[0,1]\times[a,b]$

$$= \int_a^b\left(\int_0^1 x^y dx\right)dy = \int_a^b\frac{x^{y+1}}{y+1}\bigg|_0^1 dy = \int_a^b\frac{1}{y+1} - 0\ dy = \ln|y+1|\big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

2. [19.01.24] Семинар №2

Исследовать семейство функций $f(x,y)$ на равномерную по y сходимость на указанном множестве:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\sup_{Y}|f(x,y)-g(y)| = 0 \implies \text{равн. сх.}}$$

$$\boxed{\neq 0 \implies \text{неравн. сх.}}$$

Задача 11.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad y\in(0,+\infty),\ x\to 0^+$$

$$g(y)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0+y^2}=0$$

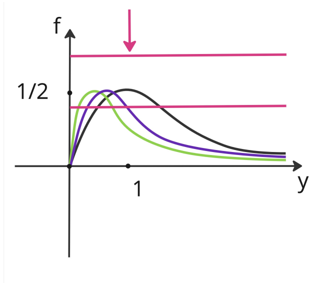
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Точка максимума $y=x$

$$\sup_{y\in(0,+\infty)}\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|=\sup_{y\in(0,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0 \implies \text{нет равномерной сходимости}$$

$$f=\frac{xy}{x^2+y^2},\ y\in(0,+\infty),\ x\to 0^+$$

$$x_n=\frac{1}{n}\qquad f(x_n,y)=\frac{\frac{1}{n}y}{\frac{1}{n^2}+y^2}$$



Задача 12.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad y\in(1,+\infty),\ x\to 0^+$$

$$g=\lim_{x\to 0^+}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

$$\sup_{y\in(1,+\infty)}\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|=\sup_{y\in(1,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x\cdot 1}{x^2+1^2}=\frac{x}{x^2+1}\xrightarrow{x\to 0^+}0 \implies \text{равном. сход.}$$

Задача 13.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad y\in(1,+\infty),\ x\to+\infty$$

$$g=\lim_{x\to+\infty}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y/x}{1+(y/x)^2}=0$$

$$\sup_{y\in(1,+\infty)}\left|\frac{xy}{x^2+y^2}-0\right|=\sup_{(1,+\infty)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0 \implies \text{нет равномерной сходимости}$$

Задача 14.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad y\in(1,2),\ x\to+\infty$$

$g=0$

$$\sup_{(1,2)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{2x}{x^2+2^2}=\frac{2x}{x^2+4}\xrightarrow{x\to+\infty}0 \implies \text{равном. сход.}$$

Задача 15.

$$f(x,y)=\ln(1-x^2\cos y),\quad y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ x\to 0$$

$$g(y)=\lim_{x\to 0}\ln(1-x^2\cos y)=\ln 1=0$$

$$\sup_{y\in(0,\pi/2)}|\ln(1-x^2\cos y)-0|=\sup_{y\in(0,\pi/2)}(-\ln(1-x^2\cos y))=-\ln(1-x^2)\xrightarrow{x\to 0}-\ln 1=0 \implies \text{равном. сход.}$$

$$1)\ T.max(-\ln(\star))=T.min(\ln(\star))=T.min(\star)=T.max(x^2\cos y)=0$$

$$2)\ \cos\searrow\implies -x^2\cos y\implies 1-x^2\cos y\nearrow\implies \ln(1-x^2\cos y)\nearrow\implies -\ln(1-x^2\cos y)\searrow$$

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x,y)dx \text{ сх. равн. на Y, если}$$

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_Y\left|\int\limits_A^{\infty}f(x,y)dx\right|=0$$

$$\int\limits_a^{\boxed{b}}f(x,y)dx \quad ⊣⊢ \quad ⊣⊢ \quad \lim_{A\to\boxed{b^-}}\sup_Y\left|\int\limits_A^{\boxed{b}}f(x,y)dx\right|=0$$

$$\int\limits_{\boxed{a}}^{b}f(x,y)dx \quad ⊣⊢ \quad \lim_{A\to\boxed{a^+}}\sup_Y\left|\int\limits_{\boxed{a}}^{A}f(x,y)dx\right|=0$$

Задача 16.

$$f(x,y)=\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2x}$$

a) $y\in(0,1), x\to 1^+$

b) $y\in(0,1), x\to 2$

$$g(y)=\lim_{x\to 1^+}\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2x}=\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}$$

$$\sup_{y\in(0,1)}\left|\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2x}-\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}\right|=\sup\left(\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}-\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2x}\right)\geqslant$$

$$/*\quad \frac{\pi y}{2x}<\frac{\pi y}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2x}<\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}-\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2x}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\cos^2\frac{\pi y}{2x}}\cdot\frac{\pi}{2x}=0\ ??\quad */$$

$$\underset{y=2-x}{\geqslant}\operatorname{tg}\frac{\pi(2-x)}{2}-\operatorname{tg}\frac{\pi(2-x)}{2x}=\underbrace{-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}_{\to+\infty}+\underbrace{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}}_{\to-\infty}=\frac{\cos\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}-\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{\cos(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{x})}{\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi x}{2}}\xrightarrow[x\to 1^+]{}+\infty$$

$\implies$ нет равн. сход.

Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость (по определению)

$$\int\limits_a^b f(x,y)dx \qquad \lim_{A\to b^-}\sup_Y|\int\limits_A^b f(x,y)dx|=0$$

$$\int\limits_a^b f(x,y)dx \qquad \lim_{A\to a^+}\sup_Y|\int\limits_a^A f(x,y)dx|=0$$

Задача 17. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$ $a)\ p \in (p_0, +\infty), \quad p_0 > 1$; $b)\ p \in (1, +\infty)$

$$\sup_p \left| \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \right| = \sup_p \left| \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_A^{+\infty} \right| = \sup_p \left| -\frac{A^{1-p}}{1-p} \right| = \sup_p \frac{1}{(p-1)A^{p-1}}$$

$$a) \sup_{(p_0,+\infty)} \frac{1}{(p-1)A^{p-1}} = \frac{1}{(p_0-1)A^{p_0-1}} \xrightarrow{A\to+\infty} 0 \implies \text{инт. сх. равн.}$$

$$b) \sup_{(1,+\infty)} \frac{1}{(p-1)A^{p-1}} = \infty \nrightarrow 0 \implies \text{инт. сх. равн.}$$

Задача 18. $$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$$ $a)\ p \in (0, p_0), \ \ p_0 < 1$; $b)\ p \in (0, 1)$

$$\lim_{A\to0^+} \sup_p \left| \int\limits_0^A \frac{dx}{x^p} \right| = \lim_{A\to0^+} \sup_p \left| \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_0^A \right| = \lim_{A\to0^+} \sup_p \left| \frac{A^{1-p}}{1-p} - 0 \right| = \lim_{A\to0^+} \sup_p \frac{A^{1-p}}{1-p}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{A^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{-A^{1-p}\ln A\cdot(1-p) - A^{1-p}\cdot(-1)}{(1-p)^2} = \frac{A^{1-p}(1-\ln A(1-p))}{(1-p)^2} \ (> 0)$$

$$a) \sup_{(0,p_0)} \underbrace{\frac{A^{1-p}}{1-p}}_{\text{возр.}} = \frac{A^{1-p_0}}{1-p_0} \xrightarrow{A\to0^+} 0 \implies \text{инт. сх. равн.}$$

$$b) \sup_{(0,1)} \frac{A^{1-p}}{1-p} = \infty \nrightarrow 0 \implies \text{инт. сх. неравн.}$$

Задача 19. $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx$$ $a)\ p \in [p_0, +\infty), \ \ p_0 > 0$; $b)\ p \in (0, +\infty)$

$$a) \lim_{A\to\infty} \sup_{[p_0,\infty)} \left| \int_A^{+\infty} e^{-px}dx \right| = \lim_{A\to\infty} \sup_{[p_0,+\infty)} \frac{e^{-pA}}{p} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{p_0 e^{p_0 A}} = 0 \implies \text{инт. сх. равн.}$$

$$b) \lim_{A\to+\infty} \sup_{(0,+\infty)} \left| \int\limits_A^{\infty} e^{-px}dx \right| = \lim_{A\to+\infty} \sup_{(0,+\infty)} \frac{1}{pe^{pA}} = \infty \implies \text{инт. сх. неравн.}$$

Задача 20.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\cos 2x dx, \quad a)\ p \in [p_0, +\infty), p_0 > 0, \ \ b)\ p \in (0, +\infty)$$

3. [26.01.24] Семинар №3

Критерий Коши

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ сх.равн. на } Y \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists A_0 > a\ \ \forall\ A_1, A_2 > A_0\ \ \forall\ y \in Y\ \ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Метод граничной точки

$$\left.\begin{array}{l} f - \text{ непр. на } [a,+\infty)\times[c,d] \\ \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx - \text{ расх.} \end{array}\right\} \implies \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ не может сх. равн. на } (c,d]$$

Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость (Критерий Коши и метод граничной точки):

Задача 21.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+1},\ \ p \in (1,+\infty)$$

$$p = 1: \ \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$$

Уравнения сходятся

$$\boxed{\begin{array}{ll} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx & p > 1 \\ \int\limits_0^{1} \frac{1}{x^p}dx & p < 1 \end{array}}$$

$$\frac{1}{x+1} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x} \qquad \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx \text{ расх.}$$

$$\frac{1}{x^p+1} - \text{ непр. на } [0,+\infty)\times[1,+\infty) \implies \text{сход. неравномер.}$$

Задача 22.

$$\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^p}dx,\ \ p \in (0,2)$$

$$p = 0: \ \int_0^1 \sin x\ dx - \text{ сх.}$$

$$p = 2: \ \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx \qquad 0 \leqslant \frac{\sin x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}dx - \text{ расх.}$$

$$\frac{\sin x}{x^p} - \text{ непр.на } (0,1]\times(0,2] \quad x \to 0$$

$\underset{\text{Метод гр.точки}}{\implies}$ *нет равномерной сходимости*

Задача 23.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{1+x^3}dx,\ \ p \in (0,+\infty)$$

$$p = 0: \ \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \quad \text{сход.}$$

Отрицание Критерия Коши

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall A_0 > 1\ \ \exists A_1, A_2 > A_0\ \ \exists p \in (0,+\infty)\ \ \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{\ln^p x}{1+x^3}dx\right| \geqslant \varepsilon$$

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2}\frac{\ln^p x}{1+x^3}dx\right| \geqslant \frac{\ln^p A_1}{1+A_2^3}\cdot(A_2-A_1) \underset{\substack{A_2=2A_1\\ p=A_1}}{=} \frac{A_1\cdot\ln^{A_1}A_1}{1+8A_1^3} \geqslant \frac{A_1\cdot 2^{A_1}}{1+8A_1^3} \xrightarrow[A_1\to+\infty]{} +\infty \implies \text{равномер.сх. нет}$$

$$\int\limits_{A_1}^{A_2}\frac{\ln^p x}{1+x^3}dx \geqslant \int\limits_{A_1}^{A_2}\frac{\ln^p A_1}{1+x^3}dx \geqslant \int\limits_{A_1}^{A_2}\frac{\ln^p A_1}{1+A_2^3}dx = \frac{\ln^p A_1}{1+A_2^3}\cdot\int\limits_{A_1}^{A_2} 1dx$$

Признак Вейерштрасса:

$$|f(x,y)| \leqslant g(x),\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ сх.} \implies \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ сх. равном.}$$

Признак Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \left|\int\limits_a^A f(x,y)dx\right| \leqslant M\\ &2)\ g - \text{монот. по х}\\ &3)\ g \rightrightarrows 0,\ x\to+\infty \end{aligned}\right\} \implies \int\limits_a^{+\infty} f\cdot g\ dx \text{ сх. равном.}$$

Признак Абеля:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \int\limits_a^{+\infty} f\ dx \text{ сх. равн.}\\ &2)\ g - \text{ монот. по х}\\ &3)\ |g(x,y)| \leqslant M \end{aligned}\right\} \implies \int\limits_a^{+\infty} f\cdot g\ dx \text{ сх. равном.}$$

Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость (Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля)

Задача 24.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+1},\ \ p\in[p_0,+\infty),\ \ (p_0>1)$$

$$\left|\frac{1}{x^p+1}\right| \underset{x\geqslant1}{\leqslant} \frac{1}{x^{p_0}+1} \sim \frac{1}{x^{p_0}} \qquad \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p_0}}dx \text{ сход.}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} \qquad \lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_0^1+\int\limits_0^A\right) = \int\limits_0^1 + \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^A$$

$\underset{\text{Пр.В.}}{\implies}$ *Исходный интеграл сход. равномерно*

Задача 25.

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x^p}dx,\ \ p\in(0,p_0),\ \ \ (0<p_0<2)$$

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| = \frac{\sin x}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^{p_0}} \qquad \int\limits_0^1\frac{1}{x^{p_0}}dx \quad \text{сх. } p_0<1$$

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \leqslant \frac{1}{x^{p_0-1}} \qquad \int\limits_0^1\frac{dx}{x^{p_0-1}}$$

$\underset{\text{Пр.В.}}{\implies}$ *Сход. равномерно*

Задача 26.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos(px)}{1+x^2}dx,\ \ p\in[p_0,+\infty),\ p_0>0 \quad (\text{а на } p\in(0,\infty)?)$$

$$/* \quad \left|\frac{x\cos(px)}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x} \quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx \text{ расх.} \quad */$$

Пр. Дирихле: $f=\cos(px)$, $g=\frac{x}{1+x^2}$

$$1)\ \left|\int_0^A \cos(px)dx\right| = \left|\frac{\sin(px)}{p}\Big|_0^A\right| = \left|\frac{\sin(pA)}{p}\right| \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_0}$$

$$2)\ \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'_x = \frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$x>1 \quad \text{монот.} \ \left(\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right)$$

$$3)\ \frac{x}{1+x^2} \rightrightarrows 0, x\to+\infty$$

$\Longrightarrow$ *Исходный интеграл сходится равномерно*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos(px)}{1+x^2}dx \quad p\in(0,+\infty)$$

$$p=0:\ \int\limits_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx \ \text{ расх. } \left(\sim\frac{1}{x}\right) \underset{\text{Метод гр.точки}}{\Longrightarrow} \text{нет равн. сх.}$$

$$\frac{x\cos(px)}{1+x^2} - \text{ непр. на } [0,+\infty)\times[0,+\infty)$$

Задача 27.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-px}dx,\ \ p\in[0,+\infty)$$

Пр. Абеля: $f=\frac{\sin x}{x}$, $\quad g=e^{-px}$

$$1)\ f=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \text{ сход.}$$

$$2)\ g=e^{-px} - \text{ монот.}$$

$$3)\ |e^{-px}|\leqslant 1$$

$$x\to 0:\ \frac{\sin x}{x}\sim\frac{x}{x}=1 \quad \int_0^1 1dx \text{ сх.}$$

$$x\to\infty:\ \text{ пр. Дирихле } \left|\int_0^A \sin x\ dx\right| \leqslant 2,\ \frac{1}{x}\to 0,\ \text{монот.}$$

$\Longrightarrow$ *Исходный интеграл сход. равномерно*

Задача 28.

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\operatorname{arctg}(px)dx,\ \ p\in\mathbb{R}$$

$$f=\sin(x^2),\ g=\operatorname{arctg}(px)$$

Пр. Абеля: $f=\sin(x^2)$, $\quad g=\operatorname{arctg}(px)$

$$2)\ \operatorname{arctg}(px) - \text{ монот. по } x \quad (\forall p\in\mathbb{R})$$

$$3)\ |\operatorname{arctg}(px)|\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$1)\ \int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx = \begin{bmatrix} x^2=t\\ x=\sqrt{t}\end{bmatrix} = \int_0^{+\infty}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

Пр.Дирихле:

$$\left|\int_0^A \sin t dt\right| \leqslant 2 \qquad \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \to 0,\ \text{монот.}\right)$$

$\Longrightarrow$ *Сход. и нет парам.* $\Longrightarrow$ *Сход. равномерно* $\Longrightarrow$ *Исходный интеграл сходится равномерно*

$$\int\limits_0^{+\infty} pe^{-px}dx$$

По очр.:

$$\sup_{(0,+\infty)}\left|\int_a^{+\infty} pe^{-px}dx\right| = \sup_{(0,\infty)}\left|-e^{-px}\Big|_A^\infty\right| = \sup_{(0,+\infty)}\left|e^{-Ap}\right| = e^{-0} = 1 \nrightarrow 0 \Longrightarrow \text{ нет равн. сх.}$$

По-другому:

$$\int_0^{+\infty} pe^{-px}dx = \begin{bmatrix} px = t \\ pdx = dt \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt$$

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A pe^{-px}dx = [...] = \lim_{A\to\infty}\int_0^{Ap} e^{-t}dt$$

$\Longrightarrow$ Замену перем. можно делать только не завис. от параметра

Задача 29.

$$\int\limits_1^{+\infty} \cos(px^3)dx, \ \ p \in [1, +\infty)$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \cos(pt)\cdot\frac{1}{3}\cdot t^{-2/3}dt = \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos(pt)}{3t^{2/3}}dt$$

Признак Дирихле:

$$2)\ \frac{1}{3t^{2/3}} - \text{ монот.}$$

$$3)\ \frac{1}{3t^{2/3}} \rightrightarrows 0,\ t \to +\infty(\text{ нет пар. })$$

$$1)\ \left|\int_1^A \cos(pt)dt\right| = \left|\frac{\sin(pt)}{p}\Bigg|_1^A\right| = \left|\frac{\sin(Ap)}{p} - \frac{\sin p}{p}\right| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \leqslant 2$$

$\Longrightarrow$ *Исходный интеграл сход. равномерно*

Задача 30.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+(x-p)^4},\ \ p \in (-\infty, p_0],\ p_0 > 0$$

4. [02.02.24] Семинар №4

Непрерывность несобственного интеграла

Th. О непр. НИЗП:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) - \text{ непр. на } [a,+\infty)\times[c,d] \\ F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \text{ сх. равн. } y\in[c,d] \end{array}\right\} \implies F - \text{ непр. на } [c,d]$$

Вычислить:

Задача 31.

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(px)}{1+x^2}dx$$

$$a)\ f(x,p)=\frac{\cos(px)}{1+x^2} - \text{ непр. на } [0,+\infty)\times[-1,1]$$

$$b)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(px)}{1+x^2}dx \text{ сх. равномерн. на } [-1,1] \text{ по Вейерштр. } :$$

$$\left|\frac{\cos(px)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2},\quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^2}, x\to\infty \text{ сход.}$$

$$\overset{\text{Th. о непр. НИЗП}}{=}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 0}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

Задача 32.

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_0^{1}\frac{dx}{(px^3+1)\sqrt{x}}$$

$$a)\ f(x,p)=\frac{1}{(px^3+1)\sqrt{x}} - \text{ непр. на } (0,1]\times[-1/2,1/2]$$

b) Инт. сх. равном. на [-1/2, 1/2] по В.:

$$\left|\frac{1}{(px^3+1)\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{(-1/2+1)\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}},\ \int_0^1\frac{2}{\sqrt{x}}dx\quad \text{сх. } (1/2<1)$$

$$\overset{\text{Th. о непр. НИЗП}}{=}\int\limits_0^{1}\frac{dx}{(0+1)\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\big|_0^1=2-0=2$$

Задача 33.

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(px)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$$

Найти область определения функции, заданной интегралом, и исследовать эту функцию на непрерывность

Задача 34.

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^p x}=F(p)$$

$$a)\ p\leqslant 0: \text{ СИЗП и } \sin^{-p}x \text{ - непр. на } [c,d]\overset{\text{Th. о непр. СИЗП}}{\implies} F - \text{ непр. на } [c,d]\overset{\forall[c,d]}{\implies} F - \text{ непр. }, p\leqslant 0$$

$$b)\ p>0:\ \text{НИЗП}\quad \int\limits_0^{\pi} = \int\limits_0^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}$$

$$x\to 0:\ 0\leqslant \frac{1}{\sin^p x}\sim\frac{1}{x^p},\quad \int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^p}\ \text{сх. } p<1 \text{ (иначе расх.)}$$

$$x\to\pi:\ \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{\sin^p x}=\begin{bmatrix}\pi-x=y\\ -dx=dy\end{bmatrix}=\int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{-dy}{\sin^p(\pi-y)}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sin^p y}$$

И аналогично для $p<1$

$$p\in(0,1)$$

Обл. опр.: $p<1$ $p\in[c,d]$

$$f(x,p)=\frac{1}{\sin^p x}-\ \text{непр. на } (0,\pi)\times[c,d]$$

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^p x}\ \text{сх.равн. (по В.) на } [c,d]:\ \left|\frac{1}{\sin^p x}\right|\leqslant\frac{1}{(\sin x)^d}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^d x}\ \text{сх.}$$

$$\xRightarrow{\text{Th. о непр. НИЗП}} F(p)-\ \text{непр. на } [c,d]\ \xRightarrow{\forall[c,d]}\ \text{на } p\in(0,1)$$

Ответ: Сх. при $p<1$ и непр. всюду на $p<1$

Задача 35.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}dx=F(p)$$

$$x\to+\infty\quad \frac{\ln x}{(x-p)^2+1}\sim\frac{\ln x}{x^2}\leqslant\frac{x^{1/2}}{x^2}=\frac{1}{x^{3/2}}\qquad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx\ \text{сх.}$$

Обл. определения: $p\in\mathbb{R}$

$$a)\ f(x,p)=\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}-\text{непр. на } [1,+\infty)\times[c,d]$$

$$b)\ \text{Инт. сх. равн.}\ \int_1^{+\infty}=\underbrace{\int_1^{d+1}}_{\text{СИЗП}\Longrightarrow\text{непр.}}+\underbrace{\int_{d+1}^{+\infty}}_{\text{сх. равн. по В.}}\xRightarrow{\text{Th. о непр. НИЗП}}\ \text{непр.}$$

$$\left|\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}\right|\leqslant\frac{\ln x}{(x-d)^2+1}\qquad \int_{d+1}^{\infty}\frac{\ln x}{(x-d)^2+1}dx\ \ \text{сход.}$$

$x\geqslant d+1\implies x-p\geqslant x-d$

$p\leqslant d$

След., F - непр. на $[c,\ d]$ $\xRightarrow{\forall[c,d]}$ F - непр. $\forall p\in\mathbb{R}$

Ответ: F - непр. на $(-\infty,+\infty)$

Задача 36.

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos\frac{p}{x}}{x^{4/3}}dx=\begin{bmatrix}\frac{1}{x}=y\\ dx=-\frac{1}{y^2}dy\end{bmatrix}=\int_{+\infty}^{2/\pi}\frac{\cos(py)}{y^{-4/3}}\cdot\left(-\frac{dy}{y^2}\right)=\int_{2/\pi}^{+\infty}\frac{\cos(py)}{y^{2/3}}dy$$

$$/*\quad \left|\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(p/x)}{x^{4/3}}dx\right|\leqslant\frac{1}{x^{4/3}}\qquad\int_0^1\frac{dx}{x^{4/3}}\ \text{расх.}\quad */$$

Пр. Дирихле:

$$\left|\int\limits_{2/\pi}^{A}\cos(py)dy\right|=\left|\frac{\sin(Ap)}{p}-\frac{\sin(\frac{2}{\pi}p)}{p}\right|\leqslant\frac{2}{|p|}$$

$\frac{1}{y^{2/3}} \to 0$, *монот.*

Т.е. Инт. Сход. при $p \neq 0$

При $p = 0$*:*

$$\int\limits_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{y^{2/3}} dy \qquad 2/3 < 1 \implies \text{расх.}$$

Обл. опр.: $p \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f(y,p) = \frac{\cos(py)}{y^{2/3}} - \text{ нпр. на } [\frac{2}{\pi}, +\infty) \times [c,d]$$

Инт. сх. равн. на $[c,d]$*:* $\frac{1}{y^{2/3}}$ *- монот.;* $\frac{1}{y^{2/3}} \rightrightarrows 0, y \to +\infty$

$$\left| \int_{2/\pi}^{A} \cos(py) dy \right| \leqslant \frac{2}{|p|} \leqslant \frac{2}{c}$$

$\overset{\text{По Th о непр. НИЗП}}{\Longrightarrow}$ *F - непр. на* $[c,d] \overset{\forall [c,d]}{\Longrightarrow}$ *F - непр.* $\forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ответ: F - опр-на и непр. на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Инт. Дирихле:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Инт. Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$$

Инт. Эйлера-Пуассона:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \right)$$

Интегралы Дирихле, Лапласа, Эйлера-Пуассона

Вычислить:

Задача 37.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(px)}{x} dx = \begin{bmatrix} px = y \\ pdx = dy \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y/p} \frac{dy}{p} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$$

Инт. - нечётная функция $\implies \boxed{F(p) = \frac{\pi}{2} \cdot sign(p)}, p \in \mathbb{R}$

Задача 38.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx = \begin{bmatrix} x^2 = y, \ x = \sqrt{y} \\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 39.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx, \quad (b \neq 0)$$

$$= \begin{bmatrix} x = by \\ dx = bdy \\ b > 0 \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(aby)}{b^2 + b^2 y^2} \cdot bdy = \frac{1}{b} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(aby)}{1+y^2} dy = \frac{1}{b} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}$$

Инт. - чётная функция от b

Ответ: $\frac{1}{|b|} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}$, $b \neq 0$

Задача 40.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{4+x^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\frac12-\frac12\cos 2x}{4+x^2}dx=\frac12\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}-\frac12\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{4+x^2}dx=[x=2y]=$$

$$=\frac12\int\limits_0^{+\infty}\frac{2dy}{4(1+y^2)}-\frac12\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 4y}{4(1+y^2)}\cdot 2dy=\frac14\cdot\operatorname{arctg} y\big|_0^{+\infty}-\frac14\cdot\frac{\pi}{2}e^{-|4|}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}e^{-4}$$

Задача 41.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx)}dx,\quad (a>0)$$

$$/*\quad ax^2+2bx=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a}=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{a}\quad */$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+\frac{b^2}{a}}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}=y\\ \sqrt{a}dx=dy\end{bmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2+b^2/a}\cdot\frac{dy}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{b^2/a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{b^2/a}$$

$a,\delta>0$

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\sqrt{p}\cdot e^{-apx^2}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{ap}x=y\\ \sqrt{ap}dx=dy\end{bmatrix}=\lim_{p\to+\infty}\int\limits_{-\delta\sqrt{ap}}^{\delta\sqrt{ap}}\sqrt{p}e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{ap}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{p\to+\infty}\int\limits_{-\delta\sqrt{ap}}^{\delta\sqrt{ap}}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$$\frac1p=y\to 0^+\qquad [0,1]$$

5. [09.02.24] Семинар №5

Th о Дифф. НИЗП

$$\left.\begin{array}{l} f, \frac{\delta f}{\delta y} - \text{ непр. на } [a,+\infty)\times[c,d] \\ \exists\; y_0\in[c,d] \quad \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx \text{ сход.} \\ \text{И } \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx \text{ сход. равном. на } [c,d] \end{array}\right\} \implies \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = F(y) - \text{ дифф. и } F'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}dx$$

Дифференцируемость и интегрируемость несобственного интеграла

Найти производную функции во всех точках ее области определения или доказать, что производной не существует:

Задача 42.

$$F(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(px)}{x^2}dx$$

Сходится $\forall p\in\mathbb{R}$ *по признаку сравнения.*

$$\left|\frac{\sin(px)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \text{ сх.}$$

$$a)\ f = \frac{\sin(px)}{x^2} - \text{ непр. на } [1,+\infty)\times[c,d]$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\cos(px)\cdot x}{x^2} = \frac{\cos(px)}{x} - \text{ непр. на } [1,+\infty)\times[c,d]$$

б) Сам инт. сх. (уже доказали)

$$\text{в) } \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos(px)}{x}dx \ \text{ сх. равномерно на } [c,d] \text{ по пр. Дирихле}$$

$$1)\ \left|\int_1^A \cos(px)dx\right| = \left|\frac{\sin(px)}{p}\right|_1^A \leqslant \frac{2}{|p|} \begin{array}{l} \nearrow (c>0) \leqslant \frac{2}{c} \\ \searrow (c<0) \leqslant \frac{2}{|d|} \end{array}$$

$$2)\ \frac{1}{x} - \text{ монот.}$$

$$3)\ \frac{1}{x} \rightrightarrows 0, x\to+\infty$$

$\implies$ *F - дифф. на* $\forall[c,d]$ *справа и слева от нуля* $\implies$ *F - дифф.* $\forall p\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$F'(0) = \lim_{p\to0}\frac{F(p)-F(0)}{p-0} = \lim_{p\to0}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin(px)}{px^2}dx = \begin{bmatrix} px = y \\ pdx = dy\end{bmatrix} = \lim_{p\to0^+}\int\limits_p^{+\infty}\frac{\sin(y)}{p\cdot(y/p)^2}\ \frac{dy}{p} =$$

$$= \lim_{p\to0^+}\int\limits_p^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^2}dy \overset{y\to0}{\sim} \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$$

Нет предела $\implies$ *Нет* $F'(0)$
Ответ: F опр. на $\forall p\in\mathbb{R}$*, дифф.* $\forall p\neq 0$

Задача 43.

$$F(p)=\int\limits_{p}^{+\infty} e^{-px^2}dx$$

$p>0$ *Сход. и при* $p\leqslant 0$ *Расход.*

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}}_{\text{НИЗП}}-\underbrace{\int_0^{p}}_{\text{СИЗП}}$$

а)

$$\left(\int_0^p e^{-px^2}dx\right)'=-\int_0^p x^2e^{-px^2}dx+e^{-p\cdot p^2}\cdot 1-0$$

$f=e^{-px^2}$ *- непр.*
$\frac{\partial f}{\partial p}=e^{-px^2}\cdot(-x^2)$
p *- дифф.*
б)

$$\int_0^{+\infty} e^{-px^2}dx$$

$f,\frac{\partial f}{\partial p}$ *- непр.*
Сам инт. сход.

$$\int_0^{+\infty}-x^2e^{-px^2}dx\qquad \text{Сх. равн. по Вейерштр. } |-x^2e^{-px^2}|\leqslant x^2e^{-cx^2}\leqslant e^{-\frac{c}{2}x^2}\qquad \int_0^{+\infty}e^{-px^2}dx-\text{ Сх.}$$

$\Longrightarrow$ *По Th. о дифф. НИЗП* $\int_0^{+\infty}e^{-px^2}dx$ *- дифф.*
Ответ: F - опр. и дифф. $p>0$

Вычислить интеграл:

Задача 44.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(px)-\sin(qx)}{x}e^{-x}dx=F(p)$$

1. Дифф.

$$a)\ f(x,p)=\begin{cases}\frac{\sin(px)-\sin(qx)}{x}e^{-x}, x>0\\ p-q,\ x=0\end{cases}\quad-\text{ Непр.}$$

$$\frac{\sin(px)-\sin(qx)}{x}e^{-x}\overset{x\to 0}{\sim}\frac{px-qx+\bar{o}(x^2)}{x}\cdot 1=p-q\bar{o}(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\begin{cases}\frac{\cos(px)\cdot x}{x}e^{-x}\\ 1\end{cases}=\cos(px)e^{-x}-\text{ непр.}$$

$$b)\ \exists p_0=0\qquad-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(qx)}{x}e^{-x}dx\ \text{ сход. }\left(\begin{matrix}x\to 0: \frac{\sin qx}{x}\sim q\\ x\to\infty: \left|\frac{\sin(qx)}{x}e^{-x}\right|\leqslant |q|e^{-x}\end{matrix}\right)$$

$$c)\ \int_0^{+\infty}\cos(px)e^{-x}dx\qquad \text{Сх. равн. по Вейерштр. } |\cos(px)e^{-x}|\leqslant e^{-x}\text{ и }\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-x}dx-\text{ Сх.}$$

$$F'(p)=\int_0^{+\infty}\cos(px)e^{-x}dx=\frac{e^{-x}}{1+p^2}(-\cos(px)+p\sin(px))\Big|_0^{+\infty}=0-\frac{1}{1+p^2}(-1)=\frac{1}{1+p^2}\quad\forall[c,d]\Longrightarrow\forall p\in\mathbb{R}$$

$$2.\ F(p)=\int\frac{dp}{1+p^2}=\operatorname{arctg}p+C$$

$$3.\ p=q:\ F=0=\operatorname{arctg}q+C\Longrightarrow C=-\operatorname{arctg}q$$

Ответ: $F=\operatorname{arctg}p-\operatorname{arctg}q$

Задача 45.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} \cos 2x \ dx = F(q), \qquad p, q > 0$$

$$1.\ F'(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qx} \cos 2x dx$$

$$a)\ f = \begin{cases} \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} \cos 2x,\ x > 0 \\ q - p,\ x = 0 \end{cases} \quad - \text{ непр.}$$

$$\frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x} \cos 2x \overset{x \to 0}{\sim} \frac{1 - px - (1 - qx) + \bar{o}(x)}{x} \cdot 1 = (q - p) + \bar{o}(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \begin{cases} \frac{-e^{-qx} \cdot (-x) \cos 2x}{x} \\ 1 \end{cases} = e^{-qx} \cos 2x - \text{ непр.}$$

$$b)\ q = p \qquad \int 0 dx \ \text{ сх.}$$

$$c)\ \int_0^{+\infty} e^{-qx} \cos 2x \ dx \quad \text{сх. равн. по Вейерштт.}\ |e^{-qx} \cos 2x| \leqslant e^{-qx} \leqslant e^{-cx},\ \int_0^{+\infty} e^{-cx} dx - \text{ Сх.}$$

$$F'(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qx} \cos 2x \ dx = \frac{e^{-qx}}{4 + q^2} (-q \cos 2x + 2 \sin 2x) \Big|_0^{+\infty} = \frac{q}{4 + q^2}$$

$$2.\ F(q) = \int \frac{q}{4 + q^2} dq = \begin{bmatrix} q^2 = t \\ q = \sqrt{t} \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{t}}{4 + t} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \ln|4 + t| + C = \frac{1}{2} \ln(4 + q^2) + C$$

$$3.\ q = p \quad 0 = \frac{1}{2} \ln(4 + p^2) + C \implies C = -\frac{1}{2} \ln(4 + p^2)$$

Ответ: $F = \frac{1}{2} \ln(4 + q^2) - \frac{1}{2} \ln(4 + p^2)$

Задача 46.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin(px)}{1 + x^2} dx$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(px)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|p|} - \text{ инт. Лапласа}$$

1. Дифф.

$$a)\ f = \frac{\cos(px)}{1 + x^2} - \text{ Непр.},\ \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-x \sin(px)}{1 + x^2} - \text{ Непр.}$$

b) Инт. сход.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(px)}{1 + x^2} dx \ \text{ сх. равн. по Дирихле}$$

$$1)\ \left| \int_0^A \sin(px) dx \right| = \left| -\frac{\cos(px)}{p} \Big|_0^A \right| \leqslant \frac{2}{|p|} \ \begin{matrix} \nearrow \leqslant \frac{2}{c} \\ \searrow \leqslant \frac{2}{|d|} \end{matrix}$$

$$2)\ g = \frac{x}{1 + x^2} - \text{ монот. } \left(g' = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \right)$$

$$3)\ \frac{x}{1 + x^2} \rightrightarrows 0, x \to +\infty$$

$$\forall\ p \neq 0 \quad F'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{-x \sin(px)}{1 + x^2} dx$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(px)}{1 + x^2} dx = -F'(p) = \frac{\pi}{2} e^{-p}$$

$$p < 0 \quad F = \frac{\pi}{2} e^p \implies -F'(p) = -\frac{\pi}{2} e^p$$

$$p = 0 \ \text{ исх. инт. } \int 0 dx = 0$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} e^{-|p|} \cdot sgn\ p$

Задача 47.

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-px} dx, \qquad p > 0$$

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \left.\frac{e^{-px}}{-p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p} \\
F'(p) &= \int_0^{+\infty} -xe^{-px} dx = -\frac{1}{p^2} \\
F''(p) &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} dx = \frac{2}{p^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a)\ e^{-px}, -xe^{-px}, x^2e^{-px} - &\ \text{непр.} \\
b)\ \ \text{сход. } |x^k e^{-px}| \leqslant e^{-px/2}, \int e^{-px/2} dx &\ \text{сх.} \\
c)\ \ \text{на } [c,d]\ | -xe^{-px}| \leqslant e^{-px/2} &\leqslant e^{-cx/2} \\
|x^2 e^{-px}| \leqslant e^{-px/2} &\leqslant e^{-cx/2}
\end{aligned}$$

По Вейерштр. равн.

Задача 48.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+p)^n}, \qquad p > 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+p} = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{p}})^2+1} = \frac{\sqrt{p}}{p} \operatorname{arctg} \left.\frac{x}{\sqrt{p}}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2\sqrt{p}} \\
F'(p) &= \int_0^\infty \frac{-dx}{(x^2+p)^2} = -\frac{\pi}{2\cdot 2} p^{-3/2} \\
F''(p) &= \int_0^\infty \frac{2dx}{(x^2+p)^3} = \frac{\pi}{2\cdot 2} \cdot \frac{3}{2} p^{-5/2} \\
F^{(n)}(p) &= \int_0^\infty \frac{(-1)^2 n! dx}{(x^2+p)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2n+1)!!}{2^n} p^{-\frac{2n+1}{2}} \\
\int_0^{+\infty} &\frac{dx}{(x^2+p)^{n+1}} = \frac{\pi \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1} n! p^{n+1/2}}
\end{aligned}$$

Задача 49.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2(x^2+4)} dx, \qquad p > 0$$

Задача 50.

$$\int\limits_0^{+\infty} x^4 e^{-px^2} dx, \qquad p > 0$$

Задача 51.

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin px}{x}\right)^2 dx$$

6. [16.02.24] Семинар №6

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, p > 0$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx,\ p,q > 0$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \Gamma(n+1) = n!, \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Вычислить с помощью эйлеровых интегралов ($n \in \mathbb{N}$):

Задача 52.

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}dx = \begin{bmatrix} x^3 = y \\ x = y^{1/3},\ dx = \frac{1}{3}y^{-2/3}dy \end{bmatrix} = \int_0^1 y^{1/3}(1-y)^{1/3}\cdot\frac{1}{3}y^{-2/3}dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3}dy$$

$$= \frac{1}{3}\cdot B\left(1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot B\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}}{1!} = \frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

Задача 53.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx = \begin{bmatrix} x^3 = y \\ x = y^{1/3},\ dx = \frac{1}{3}y^{-2/3}dy \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty}\frac{(y^{1/3})^{1/2}}{1+y}\cdot\frac{1}{3}y^{-2/3}dy = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{y^{-1/2}}{1+y}dy =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot B\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{\pi}{\sin\pi/2}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

Задача 54.

$$\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\ dx = \begin{bmatrix} \sin x = y \\ \cos x\ dx = dy \end{bmatrix} = \int_0^1 y^6\cdot((1-y^2)^{1/2})^4\cdot\frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} = \int_0^1 y^6(1-y^2)^{3/2}dy =$$

$$= \begin{bmatrix} y^2 = t \\ y = t^{1/2} \end{bmatrix} = \int_0^1 t^3(1-t)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{5/2}(1-t)^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{5}{2}+1,\ \frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!} = \frac{5\cdot 3^2\sqrt{\pi}^2}{2^6\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^9}$$

Задача 55.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \begin{bmatrix} x^n = y \\ x = y^{1/n} \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}dy = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{n}-1}e^{-y}dy = \frac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

Задача 56.

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{n}\right)^n\ dx = \begin{bmatrix} \ln\frac{1}{x} = y,\ \frac{1}{x} = e^y \\ x = e^{-y} \end{bmatrix} = \int_{+\infty}^0 y^n\cdot(-e^{-y})dy = \int_0^{+\infty} y^n e^{-y}dy = \Gamma(n+1) = n!$$

Задача 57.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{x/2}}{e^{2x}+1}dx = \begin{bmatrix} e^{2x} = y \\ x = \frac{1}{2}\ln y \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln y\cdot y^{1/4}}{y+1}\cdot\frac{1}{2y}dy = \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{y^{\frac{1}{4}-1}\ln y}{y+1}dy = \frac{-\pi^2}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

Выразить интеграл через эйлеровы интегралы, указав значения параметров, при которых он существует:

Задача 58.

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-qx^2}dx = \begin{bmatrix} qx^2 = y \\ x = (y/q)^{1/2} \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p/2}}{q^{p/2}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{\frac{1}{2}y^{-1/2}}{q^{1/2}}dy = \frac{1}{2q^{\frac{p+1}{2}}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{p-1}{2}} e^{-y}dy =$$

$$= \frac{1}{2q^{\frac{p+1}{2}}} \cdot \Gamma\left(\frac{p-1}{2} + 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2q^{\frac{p+1}{2}}}$$

Если $q < 0$, *то инт. расх.*, $q = 0:$ $\int_0^\infty x^p\ dx$ *расх.*, $q > 0$ *на* ∞ $|x^p e^{-qx^2}| \leqslant e^{-\frac{q}{2}x^2}$ *сход.*

$$x^p e^{-qx^2} \overset{x\to 0}{\sim} x^p \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^{-p}}dx \qquad -p < 1 \implies p > -1 \text{ сход.}$$

Задача 59.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}dx = \begin{bmatrix} x^q = y \\ x = y^{1/q} \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p/q}}{1+y} \cdot \frac{1}{q} y^{\frac{1}{q}-1}dy = \frac{1}{q} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{p+1}{1}-1}}{1+y}dy = \frac{1}{q} \cdot B\left(\frac{p+1}{q},\, 1 - \frac{p+1}{q}\right)$$

$$x \to 0 \quad \frac{x^p}{1+x^q} \sim x^p = \frac{1}{x^{-p}} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^{-p}} \text{ сх. } p > -1$$

$$x \to +\infty \quad \frac{x^p}{1+x^q} \sim \frac{x^p}{x^q} = \frac{1}{x^{q-p}} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{q-p}} \quad q - p > 1 \text{ сход.}$$

$$\frac{x^p}{1+x^q} \overset{q<0}{\sim} \frac{x^p}{1} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{-p}} \quad -p > 1 \implies p < -1 - \text{ не подх.}$$

Задача 60.

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx,\ a < b$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x-a}{b-a} = y \\ x = a + (b-a)y \end{bmatrix} = \int_0^1 ((b-a)y)^p((b-a) - (b-a)y)^q \cdot (b-a)dy$$

$$= (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 y^p(1-y)^q dy = (b-a)^{p+q+1} \cdot B(p+1,\, q+1)$$

$$B(p,\, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$$

$$q = 1 - p \qquad \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx} = B(p,\, 1-p) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi p)}\right)' = -\pi^2 \frac{\cos(\pi p)}{\sin^2(\pi p)}$$

Задача 61.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx = -\pi^2 \frac{\cos(\pi p)}{\sin^2(\pi p)}$$

$$\implies \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx = -\pi^2 \frac{-\pi\sin^3(\pi p) - \pi\cos^2(\pi p)2\sin(\pi p)}{\sin^4(\pi p)}$$

Задача 62.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx = \left[x = y^{1/3}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{y^{1/3}\ln y}{1+y} \cdot \frac{1}{3}y^{-2/3}dy = \frac{1}{9}\int_0^{+\infty} \frac{y^{-1/3}\ln y}{1+y}dy =$$

$$= \frac{1}{9}(-\pi^2)\frac{\cos 2\pi/3}{\sin^2 2\pi/3} = -\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{(-1/2)}{3/4} = \frac{2\pi^2}{27}$$

Задача 63.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx = \left[x = y^{1/4}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 y^{1/4}}{1+y} \cdot \frac{1}{4}y^{-3/4}dy = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^2} \int_0^{\infty} \frac{y^{-3/4}\ln^2 y}{1+y}dy =$$

$$= \frac{1}{4^3}(+\pi^3)\frac{\sin^3\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin^4\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{4^3} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1/4} = \frac{\pi^3 \cdot 3}{4^2 \cdot 2\sqrt{2}}$$

Задача 64.

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$$

Задача 65.

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cdot \cos^q x dx = \begin{bmatrix} \sin^2 x = y \\ 2\sin x\cos x dx = dy \end{bmatrix} = \int_0^1 y^{p/2}(1-y)^{q/2}\frac{dy}{2y^{1/2}(1-y)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 y^{\frac{p-1}{2}}(1-y)^{\frac{q-1}{2}}dy = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

7. [22.02.24] Семинар №7

Задача 66. *Доказать, что в пространстве* $R[-\pi,\pi]$ *со скалярным произведением* $< f, g >= \int_{\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ *система* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *является ортонормированной*

$$< f, g >= \int_{\pi}^{\pi} f \cdot g dx$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty} - \text{ОНС}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} dx = 0$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} dx = 0$$

$$< \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin lx}{\sqrt{\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin lx}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(k-l)x - \sin(k+l)x)dx = 0$$

$$< \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos lx}{\sqrt{\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos lx}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k+l)x + \cos(k-l)x)dx = 0$$

При $k = l$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1 \implies < \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} >= 1$$

$$< \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin lx}{\sqrt{\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kx \cdot \sin lx}{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-l)x - \cos(k+l)x)dx$$

$$= \begin{cases} 0, \ k \neq l \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \ k = l \end{cases}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1$$

$$f \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \ dx$$

$f \in R[-\pi, \ \pi]/[0, \ 2\pi]$

Задача 67. *Рассмотрим пространство* $C[0,1]$ *со скалярным произведением* $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ *и систему* $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. *Доказать, что она не является ортонормированной. Найти первые три-четыре элемента, полученных применением ортогонализации Грама-Шмидта к этой системе.*

Найти тригонометрический ряд Фурье на указанном отрезке для функции:

Задача 68.

$$f(x) = \cos^4 x, \ \ [-\pi, \pi]$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

Задача 69.

$$f(x) = \sin ax, a \notin \mathbb{Z}, \quad [-\pi, \pi]. \text{ А что если } a \in \mathbb{Z}?$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{-\cos(ax)}{a}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax)\cdot\cos(nx)dx = 0$$

$$/* \quad f - \text{ нечетная }, [-\pi, \pi] \implies a_0, a_n = 0 \quad */$$

$$/* \quad f - \text{ четная }, [-\pi, \pi] \implies b_n = 0 \quad \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\sin(nx)dx\right) \quad */$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ax)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(a-n)x - \cos(a+n)x)dx = \frac{1}{2\pi}\left.\left(\frac{\sin(a-n)x}{a-n} - \frac{\sin(a+n)x}{a+n}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\frac{\sin(\pi a - \pi n)}{a-n} - 2\frac{\sin \pi a + \pi n}{a+n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(\pi a)}{a-n} - \frac{(-1)^n \sin \pi a}{a+n}\right) = \frac{(-1)^n\sin(\pi a)\cdot 2n}{\pi(a^2-n^2)}$$

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sin(\pi a)\cdot 2n}{\pi(a^2-n^2)}\cdot\sin(nx)$

Задача 70.

$$f(x) = \sin^{2m-1} x, m \in \mathbb{N}, \quad [-\pi, \pi]. \text{ Указание: } \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Задача 71. *Как из основной тригонометрической системы получить ОНС в пространстве* $R[-c, c]$*? Как выглядит коэффициенты Фурье и ряд Фурье в этом случае? [-c, c]*

$$\cos nx \to \cos\frac{\pi n x}{c}$$
$$\sin nx \to \sin\frac{\pi n x}{c}$$

$$f \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos\frac{\pi n x}{c} + b_n \sin\frac{\pi n x}{c}, \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cdot\cos\frac{\pi n x}{c}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{c}dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Найти тригонометрический ряд Фурье на указанном отрезке для функции:

Задача 72.

$$f(x) = x, \quad [-c, c]$$

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} x\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)dx = \frac{2}{c}\int_0^c x\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{c}\left(x\cdot\frac{-c}{\pi n}\cos\left.\frac{\pi n x}{x}\right|_0^c - \int_0^c 1\cdot\frac{-c}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{c}dx\right) = \frac{2}{c}\left(\frac{-c^2}{\pi n}(-1)^n\frac{c}{\pi n}\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi n x}{c}}{\pi n/c}\right|_0^c\right) = \frac{-2c(-1)^n}{\pi n}$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c(-1)^{n+1}}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{c}$

Задача 73.

$$f(x) = x\cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x\cdot\sin(2nx)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\cdot\sin(2nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x(\sin(2n+1) + \sin(2n-1)x)dx =$$

$$/* \quad \int x\cdot\sin(\alpha x)dx = x\frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha} - \int 1\cdot\frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha}dx = \frac{-x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} + const \quad */$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-x\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \frac{-x\cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}{2(2n+1)} + \frac{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)^2} - \frac{\pi\cos\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right)}{2(2n-1)} + \frac{\sin(\pi n - \frac{\pi}{2})}{(2n-1)^2} - 0\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\right) = \frac{2(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{-8n}{(4n^2-1)^2} = \frac{16n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2}$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2}\sin(2nx)$

$X \rightsquigarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2c(-1)^{n+1}}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{c}$

$$<\ 1, X\ >= \int_0^1 1\cdot X dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$<\ 1, 1\ >= \int_0^1 1\cdot 1 dx = 1$$

$$f_2 = X - <\ 1, X\ > \cdot 1 = X - \frac{1}{2}$$

$$<\ f_2, f_2\ >= \int_0^1\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{(X-1/2)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1/8}{3} - \frac{-1/8}{3} = \frac{1}{12}$$

$e_2 = \sqrt{12}(X - 1/2)$

$$<\ X^2, 1\ >= \int_0^1 X^2\cdot 1 dx = \frac{1}{3}$$

$$<\ X^2, \left(X - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12}\ >= \sqrt{12}\int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \sqrt{12}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right) = \sqrt{12}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$f_3 = x^2 - <\ x^2, 1\ > \cdot 1 - <\ x^2, \left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12}\ > \cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12} = x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$<\ f_3, f_3\ >= \int_0^1\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \int_0^1\left(x^4 + x^2 + \frac{1}{36} - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x\right)dx = \ldots$$

8. [01.03.24] Семинар №8

Ряды Фурье: сходимость и равенство Парсеваля

Может ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ являться тригонометрическим рядом Фурье какой-нибудь интегрируемой функции?

$a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

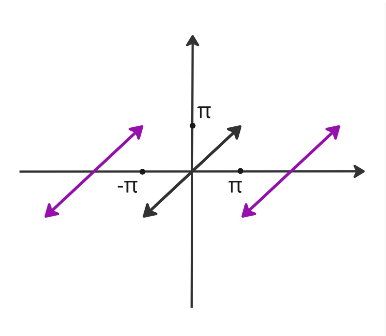
$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}_{=\sum \frac{1}{n} - \text{ расх.}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \text{ Число}$$

- Противоречие

Разлложить функцию $f(x) = x$ в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Совпадают ли они в точке π? К какой функции сходится этот ряд? С помощью этого разложения найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi} \left(x \cdot \frac{-\cos(nx)}{x} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} dx \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$



$$\text{Ряд Фурье: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx)$$

$$x = \pi, \quad f = \pi, \quad \text{Ряд Фурье } = 0$$

$$\text{Равенство Парсеваля: } \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx}_{= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \right)^2}_{= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \implies \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

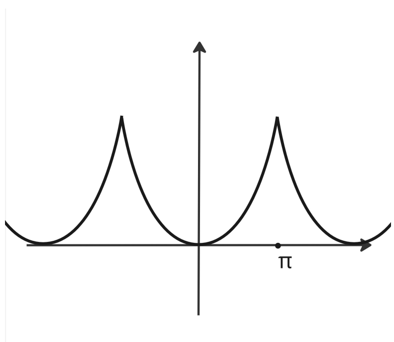
Используя результат задачи 2, почленным интегрированием получить разложения в ряд Фурье функций x^2, x^3, x^4 на $(-\pi, \pi)$.

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx), \quad (-\pi, \pi)$$

$$\frac{x^2}{2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \frac{-\cos(nx)}{n}$$

$$x = \pi: \ \frac{\pi^2}{2} + C = 2 \sum \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2} = 2 \cdot \sum \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

$$C = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{6}$$



$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

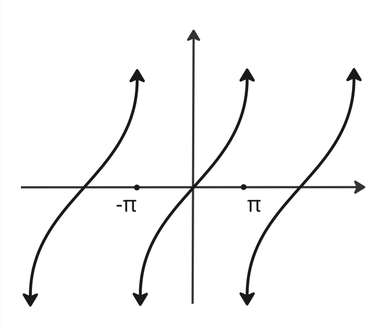
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \leftarrow \text{ Ряд Фурье } x^2,\ \ [-\pi,\pi]$$

$$\frac{x^3}{3} + C = \frac{\pi^2}{3}X + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\frac{\sin(nx)}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^3} - \frac{2\pi^2}{3n}\right)(-1)^n\sin(nx)$$

$$x = 0:\ 0 + C = \sum 0 \implies C = 0$$

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{4}{n^3} - \frac{2\pi^2}{3n}\right)(-1)^n\sin(nx)$$

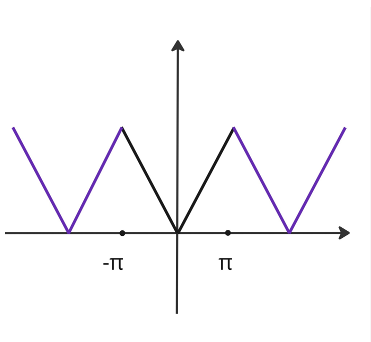


Разложить функцию $f(x) = |x|$ в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi,\pi]$. К какой функции сходится этот ряд? С помощью этого разложения найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ и сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

f - Чётная $\implies b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(x\cdot\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}1\cdot\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$



$$\text{Ряд Фурье: } \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos(nx)$$

$$\text{Равенство Парсеваля: } \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx}_{=\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^4}((-1)^n - 1)^2 = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

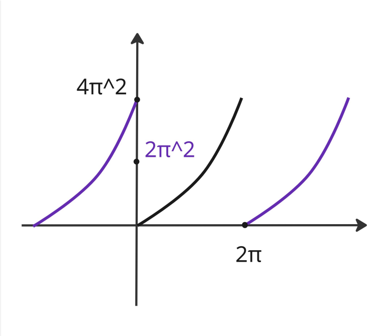
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}(-2)^2 = \frac{\pi^2}{6} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos(nx)$$
$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\cdot(-2)}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$$

$x = 0: \; 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Разложить функцию $f(x) = x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на $[0, 2\pi]$. К какой функции сходится этот ряд? С помощью этого разложения найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3\pi} = \frac{8}{3}\pi^2$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\cdot\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) =$$
$$= \frac{-2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x\cdot\sin(nx)dx = \frac{-2}{\pi n}\left(x\cdot\left.\frac{-\cos(nx)}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}dx\right) =$$
$$= \frac{-2}{\pi n}\left(\frac{-2\pi}{n} + \left.\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|_0^{2\pi}\right) = \frac{4}{n^2}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}x^2\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\cdot\left.\frac{-\cos(nx)}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cdot\cos(nx)dx\right) = -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n}\left(x\cdot\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1\cdot\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) =$$
$$= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n}\left(\left.\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_0^{2\pi}\right) = -\frac{4\pi}{n}$$

$$\text{Ряд Фурье: } \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \rightsquigarrow X = \pi \qquad \pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n$$
$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{3}\pi^2 \qquad \sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightsquigarrow X = 0 \qquad 2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum \frac{4}{n^2} \cdot 1$$

$$\sum \frac{4}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \qquad \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum \frac{1}{n^4} \rightsquigarrow \text{ Рав. Парсеваля:}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x^2)^2 dx}_{=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^{2\pi} = \frac{32\pi^5}{5\pi} = \frac{32\pi^4}{5}} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\pi^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4} + \frac{16\pi^2}{n^2}\right)$$

$$\frac{32\pi^4}{5} = \frac{32\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + 16\pi^2 \cdot \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}}_{=\frac{\pi^2}{6}}$$

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{32\pi^4}{5} - \frac{32\pi^4}{9} - \frac{16\pi^4}{6}$$

$$\sum \frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} - \frac{1}{6}\right) = \pi^4\left(\frac{8}{45} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

Разложить функцию $f(x) = x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на $[0, 2\pi]$. К какой функции сходится этот ряд? С помощью этого разложения найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Ещё задачи для тренировки: разложить в ряд Фурье и указать, к чему он сходится (здесь I_G - это индикатор множества G, т.е. $I_G = 1, x \in G$ и $I_G = 0, x \notin G$)

Задача 74.

$$f(x) = bx \cdot I_{[-\pi,0]} + ax \cdot I_{(0,\pi]},\ [-\pi, \pi]$$

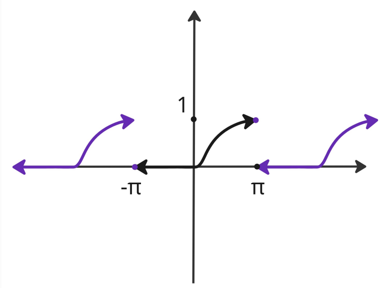
Задача 75.

$$f(x) = \sin x \cdot I_{[0,\pi]} + 0 \cdot I_{[-\pi,0)},\ [-\pi, \pi]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin x}_{=-\cos x|_0^{\pi} = 1+1} dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) dx =$$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\ \frac{-\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\Big|_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)\\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cdot\cos x dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(2x)dx = 0\\
&\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos(nx) + \ldots)\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)dx =\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right)\Big|_0^\pi = 0\\
b_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Ряд Фурье: } \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\cdot\cos(nx)
$$

Задача 76.

$$
f(x) = |\cos x|, [0,\pi]
$$

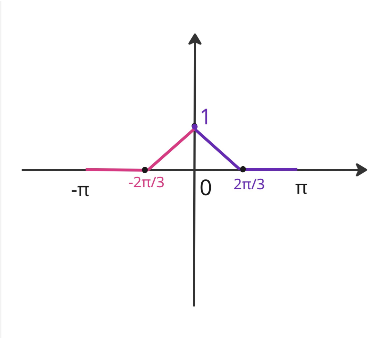
Задача 77.

$$
f(x) = c^2 - x^2,\ [-c, c]
$$

9. [07.03.24] Семинар №9

Задача 78. *Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам* $\{\cos(nx)\}$ *на указанном отрезке:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3x}{2\pi}, \ x \in [0, 2\pi/3] \\ 0, x \in (2\pi/3, \pi] \end{cases} \qquad [0, \pi]$$



$$f, [0, \pi]$$

$$\text{Обычно: } \left[0, 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\{\cos(2nx), \sin(2nx), 1\}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)$$

$$b_n = 0, \ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \left(1 - \frac{3x}{2\pi}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi/3} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3 \cdot 2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f \cdot \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \left(1 - \frac{3x}{2\pi}\right) \cos(nx) dx =$$

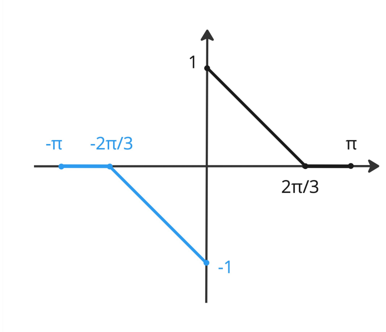
$$= \frac{2}{\pi} \left(\left(1 - \frac{3x}{2\pi}\right) \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_0^{2\pi/3} - \int_0^{2\pi/3} \frac{\sin(nx)}{n} \cdot \left(-\frac{3}{2\pi}\right) dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{3}{2\pi n} \cdot \frac{-\cos(nx)}{n}\Bigg|_0^{2\pi/3} \right) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2 n^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{3}\right)$$

Для f *на* $[0, \pi]$

$$\text{Ряд Фурье для } \tilde{f} : \boxed{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2 n^2} (1 - \cos \frac{2\pi n}{3}) \cos(nx)}, \quad [-\pi, \pi]$$

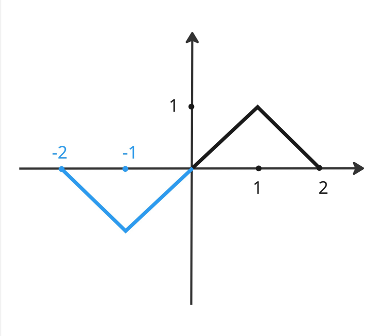
По $\sin(nx) \implies$ *Доопр. нечётным образом*



Задача 79. *Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам* $\{\sin \frac{\pi n x}{2}\}$ *на указанном отрезке:*

$$f(x) = \begin{cases} x, \ x \in [0, 1] \\ 2 - x, x \in (1, 2] \end{cases} \qquad [0, 2]$$

Доопр. нечётным образом



$$\tilde{f},\ [-2,2]$$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\tilde{f}(x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \int_0^1 x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

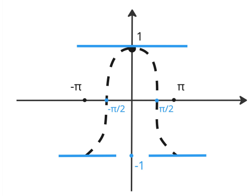
$$= x\cdot\frac{-\cos\frac{\pi n x}{2}}{\pi n/2}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{-\cos\frac{\pi n x}{2}}{\pi n/2}dx + (2-x)\cdot\frac{-\cos\frac{\pi n x}{2}}{\pi n/2}\Bigg|_1^2 - \int_1^2 (-1)\cdot\frac{-\cos\frac{\pi n x}{2}}{\pi n/2}dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{\sin\frac{\pi n x}{2}}{(\pi n/2)^2}\Bigg|_0^1 - \frac{\sin\frac{\pi n x}{2}}{(\pi n/2)^2}\Bigg|_1^2 = \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2} = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}\ \begin{array}{ll} -\tilde{f} & \text{на } [-2,2] \\ -f & \text{на } [0,2] \text{ по } \sin\frac{\pi n x}{2} \end{array}$$

Задача 80. *Разложить функцию $f(x) = sign(\cos(x))$ в ряд Фурье*

a) по основной тригонометрической системе на отрезке $[-\pi,\pi]$
b) только по косинусам на отрезке $[0,\pi]$
c) только по синусам на отрезке $[0,\pi]$



Из формулы Эйлера: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$
a) f - Чётная $\implies b_n = 0$

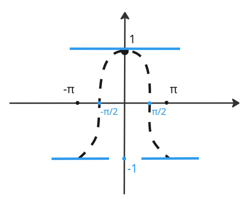
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\ dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\cos(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n} + \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\right) = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

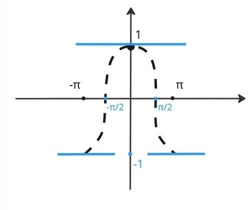
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos(nx) - \text{ ряд Фурье}$$

b)



Доопр. чётным образом $\implies$

Тот же ответ, что и в a)

c) 

Доопр. нечётным образом $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \cdot \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-1)\sin(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{-\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{-\cos(nx)}{n}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n} + \frac{\cos(\pi n)}{n} - \frac{\frac{\pi n}{2}}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$$

Задача 81.

Вычислить интеграл:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\sin 50x\ dx, \qquad |q|<1$$

Указание: разложить функцию $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ *в ряд по* q *и обнаружить ряд Фурье. Искомый интеграл - это* b_{50}

$$f(x) = \frac{q\sin x}{1-2\cos x+q^2}$$

$$f(q) = \frac{q\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{1-2q\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+q^2} = \frac{q\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{(q-e^{ix})(1-e^{-ix})} = \frac{\frac{e^{ix}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{e^{ix}-e^{-ix}}}{q-e^{ix}} + \frac{\frac{e^{-ix}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{e^{-ix}-e^{ix}}}{q-e^{-ix}} =$$

$$= \frac{e^{ix}/2i}{q-e^{ix}} + \frac{-e^{-ix}/2i}{q-e^{-ix}} = \frac{-1/2i}{1-qe^{-ix}} + \frac{1/2i}{1-qe^{-ix}} + \frac{1/2i}{1-qe^{ix}} = -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(qe^{-ix})^n + \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(qe^{ix})^n =$$

$$/*\quad |qe^{\pm ix}| = |q| < 1 \quad */$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n\sin(nx)$$

$b_n = q^n \implies b_{50} = \boxed{q^{50}}$ *Ответ*

Задача 82.

Вычислить интеграл:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}\cos 50x\ dx, \qquad |q|<1$$

$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-q\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}=\frac{\dashv\vdash}{(1-e^{-ix})(q-e^{ix})}=$$

$$=\frac{\frac{1-\frac{1+e^{-2ix}}{2}}{e^{-ix}-e^{ix}}}{q-e^{-ix}}+\frac{1-\frac{\frac{e^{2ix}+1}{2}}{e^{ix}-e^{-ix}}}{q-e^{ix}}=\frac{1-e^{-2ix}}{2(q-e^{-ix})(e^{-ix}-e^{ix})}$$

$$+\frac{1-e^{2ix}}{2(q-e^{ix})(e^{ix}-e^{-ix})}=\frac{-e^{ix}+e^{-ix}}{2(1-qe^{ix})(e^{-ix}-e^{ix})}+\frac{-e^{-ix}+e^{ix}}{2(1-qe^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})}=$$

$$=\frac{1/2}{1-qe^{ix}}+\frac{1/2}{1-qe^{-ix}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-ix})^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(qe^{ix})^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\frac{e^{-inx}+e^{inx}}{2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos(nx)\implies a_n=q^n\implies a_{50}=\boxed{q^{50}}$$

Задача 83.

Найти суммы рядов:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$$

$$\sum\frac{\cos nx}{n!}+i\sum\frac{\sin nx}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}=$$

$$=e^{e^{ix}}-1=e^{\cos x+i\sin x}-1=e^{\cos x}\cdot e^{i\sin x}-1=e^{\cos x}(\cos(\sin x)+i\sin(\sin x))-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x)-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=e^{\cos x}\cdot\sin(\sin x)$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{(2n)!},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{(2n)!}$$

Задача 84.

Вычислить интеграл:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2q\cos x+q^2)\cos 100x\ dx,\qquad |q|<1$$

Указание: сначала разложить производную $(\ln(1-2q\cos x+q^2))'_x$ *и проинтегрировать полученный ряд Фурье.*

Задача 85.

(Для тех, кому скучно) Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\ln|\sin\frac{x}{2}|$

10. [15.03.24] Семинар №10

Преобразование Фурье

Задача 86. *Доказать, что*

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(t-x))dt$$

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}dt\right)\cdot e^{ixy}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iu(x-t)dt}\right)du + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}dt\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(e^{iy(x-t)} + e^{-iy(x-t)})dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(y(x-t))dt$$

Задача 87. *Доказать, что*

$$\check{\hat{f}}(x) = \int_0^{+\infty}(a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy))dy, \text{ где}$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(yt)dt$$

$$\check{\hat{f}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(yx)\cos(yt) + \sin(yx)\sin(yt))dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(yx)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt\right)dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin(yx)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt\right)dy =$$

$$/* \quad a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)dt, \ \ b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)dt \quad */$$

$$= \int_0^{+\infty}(a(y)\cdot\cos(yx) + b(y)\cdot\sin(yx))dy$$

Задача 88. *Найти интеграл Фурье функции:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(xy) - i\sin(xy)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{\sin(xy)}{y}\right|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin y}{y}$$

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin y}{y}\cdot e^{ixy}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\cdot\cos(xy)dy =$$

$$= \boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\cos(xy)dy} \text{ Ответ}$$

Задача 89. *Найти интеграл Фурье функции:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \cdot e^{-ixy} dx =$$

$$= \frac{-i \cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin(xy) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\cos(x-xy) - \cos(x+xy)) dx =$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(x-xy)}{1-y} - \frac{\sin(x+xy)}{1+y} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\pi - \pi y)}{1-y} - \frac{\sin(\pi + \pi y)}{1+y} \right) =$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \sin(\pi y) \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) = \frac{-i \sin(\pi y) \cdot 2}{\sqrt{2\pi}(1-y^2)}$$

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i \sin(\pi y)}{\sqrt{2\pi}(1-y^2)}^{ixy} dy =$$

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi y)}{1-y^2} \sin(xy) dy} \text{ Ответ}$$

Задача 90. *Доказать, что преобразование Фурье четной функции вещественно. Доказать, что для четной функции верно*

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos xy \; dy \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt \; dt$$

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(xy) dx$$

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(ty) dt \cdot (\cos(xy) + i \sin(xy)) dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(ty) dt \right) \cos(xy) dy =$$

$$= \frac{4}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \cos(ty) dt \right) \cos(xy) dy =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(xy) dy \int_0^{+\infty} f(t) \cos(ty) dt$$

$$\hat{f_{cos}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(ty) dt - \text{ Косинус-преобразование Фурье}$$

Задача 91. *Доказать, что преобразование Фурье нечетной функции чисто мнимо. Доказать, что для нечетной функции верно*

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin xy \; dy \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt \; dt$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos(xy) - i \sin(xy)) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(xy) dx - \text{ чисто мнимое}$$

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(ty) dt \cdot (\cos(xy) + i \sin(xy)) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xy) dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(ty) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(xy) dy \int_0^{+\infty} f(t) \sin(ty) dt$$

$$\hat{f_{\sin}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(ty) dt - \text{ Синус-преобразование Фурье}$$

Задача 92. *Найти косинус-преобразование Фурье функции*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \\ 0, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) e^{-ixy} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(xy) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{3/2} (2x-3)\cos(xy) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left((2x-3) \left. \frac{\sin(xy)}{y} \right|_0^{3/2} - \int_0^{3/2} 2 \cdot \frac{\sin(xy)}{y} dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{-2}{y} \right) \left. \frac{-\cos(xy)}{y} \right|_0^{3/2} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(3/2y) - 1}{y^2} \leftarrow \text{ Ответ}$$

Задача 93. *Найти синус-преобразование Фурье функции*

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x},\ x > 0$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\cos(xy) - i\sin(xy)) dx = \frac{-i \cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(xy) dx}_{I(y)} =$$

$$/* \quad \frac{e^{-x}}{x} \sin(xy) \overset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}(xy) = y \quad */$$

$$/* \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \qquad |e^{-x}\cos(xy)| \leqslant e^{-x} \quad */$$

$$/* \quad I'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx = \frac{1}{1+y^2} \quad */$$

$$/* \quad I(y) = \operatorname{arctg} y + C \quad */$$

$$/* \quad y = 0 \qquad 0 = 0 + C \implies C = 0 \implies I = \operatorname{arctg} y \quad */$$

$$= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arctg} y$$

Задача 94. *Доказать, что функции $f(x) = e^{-x^2/2}$ и $f(x) = xe^{-x^2/2}$ являются собственными для преобразования Фурье с собственными значениями $+1$ и $-i$ соответственно, т.е.*

$$\widehat{e^{-x^2/2}}(y) = e^{-y^2/2}, \widehat{xe^{-x^2/2}}(y) = -iye^{-y^2/2}$$

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2 - ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{iy}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{iy}{\sqrt{2}}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x+iy}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = e^{-y^2/2}$$

$Fv = \lambda v \implies v$ *- собственный вектор*
$e^{-x^2/2}-$ *собств. ф. преобр. Фурье* $(\lambda = 1)$

Задача 95. *Доказать, что собственные значения преобразования Фурье содержатся в множестве* $\{\pm 1, \pm i\}$

11. [05.04.24] Семинар №12

Задача 96.

На повторение, если нужно:

a) $\frac{2+3i}{(1+i)^2}$

b) $(1-i)^{2022}$

c) $\sqrt{2-2\sqrt{3i}}$

$$\sqrt{3i} = \sqrt{3e^{i\pi/2}} = \sqrt{3}e^{\frac{i\frac{\pi}{2}+2\pi i n}{2}}, \quad n = 0,1 \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \searrow \sqrt{3}e^{\frac{5\pi i}{4}} \end{array}$$

Формула Муавра

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi\cdot n}$$

1)

$$\sqrt{2-2\sqrt{3}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2-2\sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})} = \sqrt{2-\sqrt{6}-\sqrt{6}i}$$

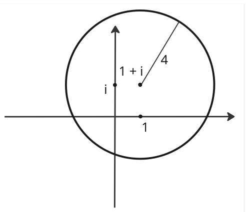
$$|z| = \sqrt{(2-\sqrt{6})^2+(-\sqrt{6})^2} = \sqrt{16-4\sqrt{6}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{16-4\sqrt{6}}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{16-4\sqrt{6}}} \end{array}\right\} \implies \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} \qquad \boxed{\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2}}$$

$$\sqrt{|z|}e^{\frac{i\varphi+2\pi n i}{2}}, \quad n = 0,1 \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{|z|}e^{i\varphi/2} \\ \searrow \sqrt{|z|}e^{(2\pi+\varphi)i/2} \end{array}$$

Задача 97.

Найти множества точек на комплексной плоскости, определяемые условиями:



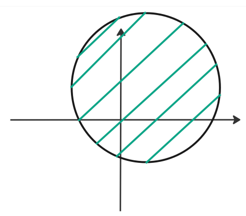
a) $|z-1-i| = 4$

$$|x+iy-1-i| = 4 \implies$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 4$$

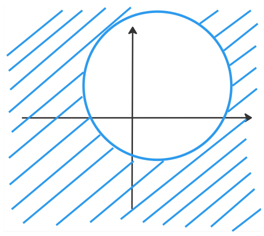
$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 4^2$$

Окружность радиуса 4 с центром $1+i$



a) $|z-1-i| < 4$

Внутри окружности без границы



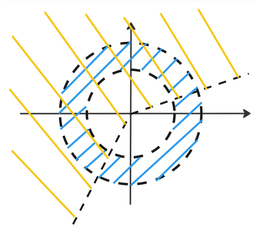
a) $|z-1-i| = 4$

Внешняя часть окружности, включая границу

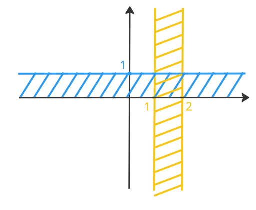
Задача 98.

Найти множества точек на комплексной плоскости, определяемые условиями:

a) $\begin{cases} 2 < |z| < 3 \\ \frac{\pi}{8} < arg\ z < \frac{4\pi}{3} \end{cases}$



b) $\begin{cases} 0 \leqslant Im(z) \leqslant 1 \\ 1 < Re(z) < 2 \end{cases}$

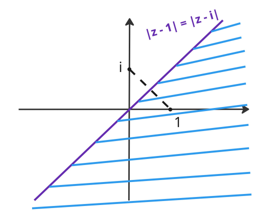


Задача 99.

Найти множества точек на комплексной плоскости, определяемые условиями:
a) $|z - z_1| = |z - z_2|$

b)

$$|z-1| < |z-i|$$
$$|2-1| < |2-i|$$
$$1 < \sqrt{4+1}$$



$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) - \text{ опр.}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - \text{ опр., не огр.}$$
$$z = iy \ (y \to -\infty) \qquad \cos z = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \to +\infty$$

Задача 100.

Найти множества точек на комплексной плоскости, определяемые условиями:
a) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$
b) $|z - 1| = |Re(z)|$
c) $|2z| > |1 + z^2|$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Задача 101.

Доказать, что функция e^x *- периодическая с* $T = 2\pi i$*, а функция* $\sin z, \cos z$ *- периодические с* $T = 2\pi$*. Являются ли функции* $\sin z, \cos z$ *ограниченными?*

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$
$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi) - e^{-i(z+2\pi)}}}{2i} = \frac{e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

Задача 102.

Доказать $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} =$$
$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Задача 103.

Найти все значения уравнения: $\sin z + \cos z = 2$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$$
$$e^{2iz}-1+i(e^{2iz}+1)=4ie^{iz}$$
$$e^{iz}=t \quad t^2-1+i(t^2+1)=4it$$
$$t^2(1+i)-4it+i-1=0$$
$$D=(-4i)^2-4(1+i)(i-1)=-16-4(-2)=-8$$
$$t_{1,2}=\frac{4i\pm i2\sqrt{2}}{2(1+i)}=\frac{i(2\pm\sqrt{2})}{1+i}=\frac{i(2\pm\sqrt{2})(1-i)}{1+1}=\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(i+1)$$

$$e^{iz}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)=$$
$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}e^{i\pi/4}=$$
$$=(\sqrt{2}+1)e^{i\pi/4}=e^{Ln(\sqrt{2}+1)}\cdot e^{i\pi/4}$$
$$=e^{Ln(\sqrt{2}+1)+i\pi/4}$$

$$e^{iz}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)=$$
$$=(\sqrt{2}-1)e^{i\pi/4}=$$
$$=e^{Ln(\sqrt{2}-1)+i\pi/4}$$
$$iz=Ln(\sqrt{2}-1)+\frac{i\pi}{4}+2\pi ni$$
$$\boxed{z=\frac{1}{2}Ln(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{4}+2\pi n}$$

$$iz=Ln(\sqrt{2}+1)+i\pi/4+2\pi ni,\ n\in\mathbb{Z}$$
$$\boxed{z=\frac{1}{i}Ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{4}+2\pi n},\ n\in\mathbb{Z}$$
$$e^z=A+iB=\sqrt{A^2+B^2}e^{i\varphi}=e^{Ln\sqrt{A^2+B^2}+i\varphi}$$
$$z=Ln\sqrt{A^2+B^2}+i\varphi+2\pi ni$$
$$e^z=w\implies z=\boxed{Ln_R|w|+i\arg w+2\pi ni=Lnw}$$
$$\sin z=w=A+iB\implies z=w$$

Задача 104. *Вычислить:*

a) $Ln(-4)$
$$Ln(-4)=Ln|-4|+i\arg(-4)+2\pi ni=Ln4+i\pi+2\pi ni,\quad n\in\mathbb{Z}$$

b) $Arccos(2)$

$$\cos z=2$$
$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$$
$$t+\frac{1}{t}=4$$
$$t^2+1=4t$$

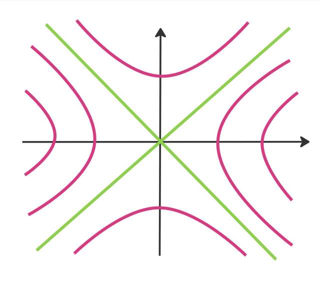
$$t^2-4t+1=0$$
$$t_{1,2}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$$
$$e^{iz}=2\pm\sqrt{3}$$
$$iz=Ln(2\pm\sqrt{3})$$
$$\boxed{z=\frac{1}{2}Ln(2\pm\sqrt{3})+2\pi n}$$

c) i^i
$$i^i=e^{iLni}=e^{i(Ln|i|+i\arg(i)+2\pi ni}=e^{i(i\cdot\frac{\pi}{2}+2\pi ni)}=e^{-\pi/2-2\pi n},\quad n\in\mathbb{Z}$$

d) $(-1)^{\sqrt{2}}$
$$(-1)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln(-1)}=e^{\sqrt{2}(i\pi+2\pi ni)}$$

Задача 105. *Каким кривым на плоскости* z *соответствуют координатные прямые* $Re(w)=const$ *и* $Im(w)=const$ *при отображении:*

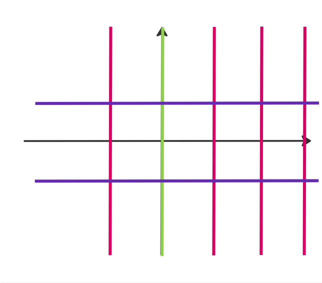
a) $w=z^2$
$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$$

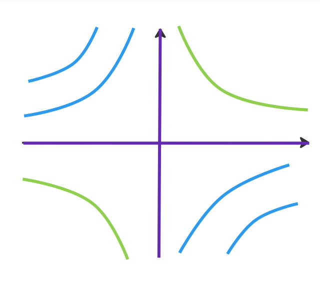


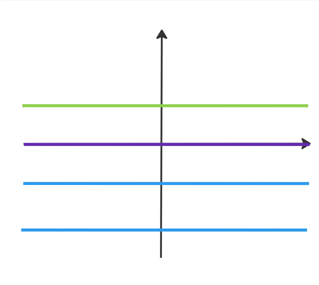
$$x^2 - y^2 = Re\ w = C$$

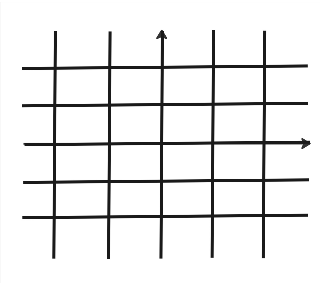
$$Im\ w = C$$

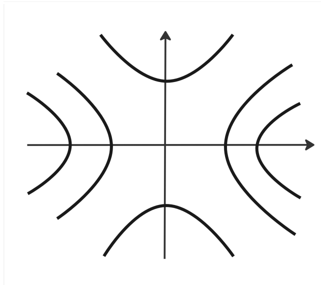
$$2xy = C$$



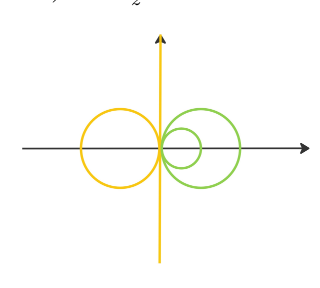








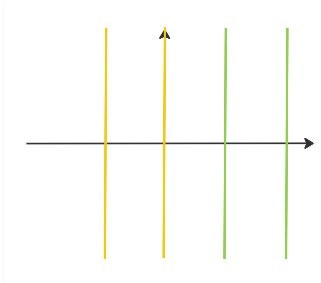
b) $w = \frac{1}{z}$



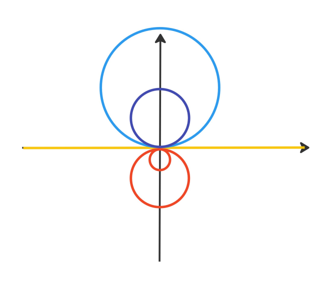
$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$Re\ w = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Im\ w = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = C \implies (x^2+y^2)C = x \implies$$



$$\left[\begin{array}{l} C = 0 \implies y = 0 \\ C \neq 0 \implies x^2 + y^2 = \frac{x}{c} \end{array}\right. \qquad x^2 - \frac{x}{C} + y^2 = 0 \qquad \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4C^2}$$

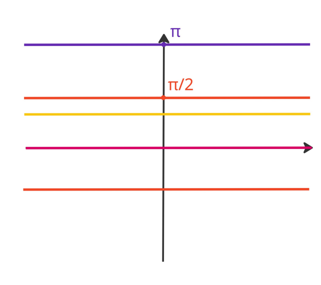


$$\frac{-y}{x^2+y^2} = C \implies$$

$$(x^2+y^2)C = -y \implies$$

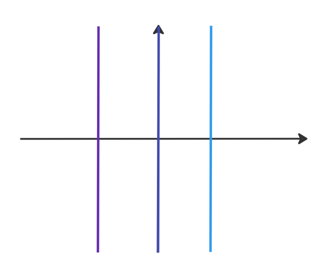
$$\left[\begin{array}{l} C = 0 \implies y = 0 \\ C \neq 0 \implies x^2 + y^2 + \frac{y}{C} = 0 \end{array}\right.$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{hC^2}$$

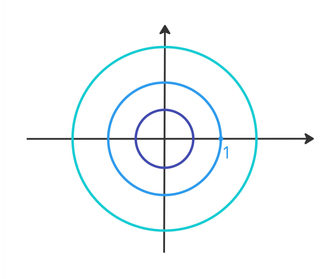


Задача 106. *В какие кривые на плоскости w переходят координатные прямые $Re(z) = const$ и $Im(z) = const$ при отображении:*

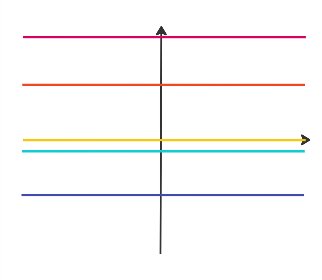
a) $w = e^z = e^{x+iy}$



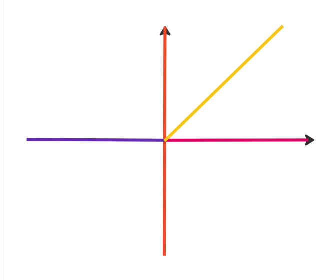
$$Re\ z = C$$
$$e^{C+iy} = e^{C}(\cos y + i\sin y)$$
$$|e^{C+iy}| = e^{C}$$
$$\implies \begin{cases} u = e^{C}\cos y \\ v = e^{C}\sin y \end{cases}$$



b) $w = \cos z$



$$Im\ z = C \qquad e^{x+iC} = e^{x}\cdot e^{iC} \implies$$
$$\begin{cases} u = e^{x}\cos C \\ v = e^{x}\sin C \end{cases} \implies$$
$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} C$$
$$v = u\cdot \operatorname{tg} C$$



Если $\cos C =$

$0 \implies u = 0$

Задача 107. *В задачах 10 и 11 найти углы между найдеными семействами кривых в каждом пункте.*

12. [12.04.24] Семинар №13

Задача 108. *Найти предел:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}},\ \ |z|>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}} = lim_{n\to\infty} \frac{1/z^n}{1+1/z^{2n}} = 0$$

b) $\lim\limits_{z\to -\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$

$$\lim_{z\to -\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \lim \frac{(e^z+i)(e^z-i)}{e^z+i} = e^{-i\pi/2} - i = -i - i = -2i$$

c) $\lim\limits_{z\to -i} arg\ z,\ \ (arg\ z \in [0, 2\pi))$

$$\lim_{z\to -i} arg\ z = \frac{3\pi}{2}$$

Задача 109. *Существует ли предел:* $\lim\limits_{z\to 1} \frac{\overline{z}-1}{z-1}$

$$\lim_{z\to 1} \frac{\overline{z}-1}{z-1} = \begin{bmatrix} z-1=w \\ z=1+w \end{bmatrix} = \lim_{w\to 0} \frac{1+\overline{w}-1}{1+w-1} = \lim_{w\to 0} \frac{\overline{w}}{w} = \lim_{r\to 0} \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}$$

Задача 110. *Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$ *(Рассмотреть предел модуля и аргумента)*

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n$$

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{n/2} =$$

$$= e^{\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)} = e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{2x}{n}+\overline{o}\left(\frac{1}{n}\right))} = e^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \to e^x,\ n\to\infty$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\cdot\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = n\cdot \operatorname{arctg}\frac{y/x}{1+x/n} \overset{n\to\infty}{\sim} n\cdot\frac{y/n}{1+x/n} \to y$$

Итого $\lim()^n = e^x\cdot e^{iy} = e^z$

Задача 111. *Исследовать функции на* $\mathbb{C}$*-дифференцируемость с помощью условий Коши-Римана:*

$$\mathbb{C}-\text{ дифф.} \iff \begin{matrix} 1)\ \mathbb{R}-\text{ дифф.} \\ 2)\ \text{Усл. К-Р} \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = v'_x \end{cases} \end{matrix}$$

a) $w = z^2\overline{z}$

$$w = z^2\overline{z} = (x+iy)^2(x-iy) = (x^2+2ixy-y^2)(x-iy) = (x^2-y^2)x + 2xy^2 + i((x^2-y^2)(-y)+2xy\cdot x)$$

$$u = x^3 + xy^2$$
$$v = y^3 + x^2y$$

$$\begin{matrix} 3x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & 3y^2+x^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3x^2+y^2 = 3y^2+x^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2-2x^2 = 0 \\ xy = 0 \begin{matrix} \nearrow x=0 \implies y=0 \\ \searrow y=0 \implies x=0 \end{matrix} \end{cases}$$

w - $\mathbb{C}$*-дифф. в т.* $z=0$

b) $w = |z|Re(\overline{z})$

$$u = x\sqrt{x^2+y^2} \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ x\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow y = 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$v = 0$$

$$u = x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(0+\delta x, 0) - u(0,0)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta x\sqrt{(\delta x)^2 - 0}}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} |\delta x| = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\delta y \to 0} \frac{u(0, 0+\delta y) - u(0,0)}{\delta y} = \lim \frac{0-0}{\delta y} = 0$$

$$u(x,y) = u(0,0) + \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0) + \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0) + \overline{o}(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2})$$

$$\lim_{x\to 0,\ y\to 0} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0,\ y\to 0} x = 0 \implies u - \text{дифф. в } (0,\ 0)$$

Усл. К-Р

$$u'_x(0,0) = 0 \qquad v'_x = 0$$

$$u'_y(0,0) = 0 \qquad v'_y = 0$$

Ответ: w - $\mathbb{C}$-дифф. в т. $z = 0$

c) $w = e^{z^2}$

Композиция экспоненты и многочлена $\implies$ w - $\mathbb{C}$-дифф. на $\mathbb{C}$

Задача 112. *Доказать, что функция $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ (Доопределенныя в нуле нулем $f(0) = 0$) имеет все частные производные в точке $z = 0$ и выполнены условия Коши-Римана, но не является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в (0, 0)*

Задача 113. *Исследовать на дифференцируемость (Можно использовать подходящие свойства) и найти производную там, где она определена:*

a) $\cos(2e^z)$

– $\mathbb{C}$-*дифф. на* $\mathbb{C}$ *как композиция дифф. ф.*

b) $\frac{e^z+2}{e^z-2}$

– $\mathbb{C}$-*дифф. на* $\mathbb{C} \setminus \{z \mid e^z - 2 = 0\}$ *как частное дифф. ф.*

$z^2 = -1$

$z = \pm i$

$$e^z = 2$$

$$z = Ln\ 2 = \ln|2| + i\arg 2 + 2\pi n i = \ln 2 + 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$$

c) $\frac{\sin z}{1+z^2}$

– $\mathbb{C}$-*дифф. на* $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ *как частное дифф. ф.*

Задача 114. *Вывести условия Коши-Римана в полярных координатах.*

Задача 115. *Пусть $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = f(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}) = w(z,\overline{z})$. Доказать, что*

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}((u'_x + v'_y) + i(-u'_y + v'_x))$$

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}((u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x))$$

Задача 116. *Восстаносить голоморфную функцию по данным условиям:*

a) $Re(f) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3,\ f(0) = i$

b) $Im(f) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ f(1) = 0$

c) $Re(f) = \sin y \operatorname{ch}(x+1),\ f(-1+\frac{\pi}{2}i) = i$

Задача 117. *Доказать, что если функция $f = u + iv$ голоморфна, то u, v удовлетворяют уравнению Лапласа:*

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \qquad v''_{xx} + v''_{yy} = 0$$

Задача 118. *Существует ли голоморфная в некоторой области функция с заданным условием:*

a) $Re(f) = e^{y/x}$

b) $Im(f) = e^{-x}\sin 2y$

c) $Re(f) = h(xy)$, где h - некоторая функция

13. [19.04.24] Семинар №14

Задача 119. *Восстановить голоморфную функцию по данным условиям:*

a) $Re(f) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3,\ f(0) = i$

Усл. К-Р $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - 12xy - 3u^2 = v'_y \\ -6x^2 - 6xy + 6y^2 = -v'_x \end{cases}$

$$v = \int (3x^2 - 12xy - 3y^2)dy = 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + \alpha(x)$$

$$-6x^2 - 6xy + 6y^2 = -(6xy - 6y^2 + \alpha'(x))$$

$$-6x^2 = -\alpha'(x)$$

$$\alpha'(x) = 6x^2$$

$$\alpha(x) = \int 6x^2 dx = 2x^3 + C$$

$$v = 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 3x^3 + C$$

$$f(x, y) = \underbrace{x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3}_{u} + \underbrace{i(3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2x^3 + C)}_{v}$$

$$f(0) = i \qquad 0 + i(0 + C) = i$$

$$0 = 0 + i0 \qquad iC = i$$

$$C = 1$$

Ответ: $f = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + i(3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2x^3 + 1)$

$$/* \quad f(z) = z^3 + 2iz^3 + i = (1 + 2i)z^3 + i \quad */$$

$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

b) $Im(f) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, f(1) = 0$

$Im(f) = v$

$$\begin{cases} u'_x = v'_y = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ u'_y = -v'_x = -\frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$u = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \alpha(y)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y + \alpha'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\alpha'(y) = 0$$

$$\alpha(y) = C$$

$$f = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C + i \operatorname{arctg} \frac{0}{1} = 0$$

$$f(1) = 0 \qquad \frac{1}{2} \ln(1 + 0) + C + i \operatorname{arctg} \frac{0}{1} = 0$$

$$1 = 1 + i0 \qquad C = 0$$

Ответ: $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

c) $Re(f) = \sin y \operatorname{ch}(x + 1), f(-1 + \frac{\pi}{2} i) = i$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$(\operatorname{sh} z)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$$
$$(\operatorname{ch} z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z$$
$$\begin{cases} \sin y \cdot \operatorname{sh}(x+1) = v'_y \\ \cos y \cdot \operatorname{ch}(x+1) = -v'_x \end{cases}$$
$$v = \int \sin y \cdot \operatorname{sh}(x+1) dy = -\cos y \cdot \operatorname{sh}(x+1) + \alpha(x)$$
$$\cos y \cdot \operatorname{ch}(x+1) = -(-\cos y \cdot \operatorname{ch}(x+1) + \alpha'(x)) \implies \alpha'(x) = 0 \quad (\alpha = C)$$
$$f = \sin y \cdot \operatorname{ch}(x+1) + i(-\cos y \cdot \operatorname{sh}(x+1) + C)$$
$$x = -1, \ \ y = \frac{\pi}{2} \qquad f = 1 + i = 1 \cdot 1 + i(0 \cdot 0 + C) = 1 + iC, \quad C = 1$$

Дробно-Линейные Отображения

Задача 120. *Доказать, что ДЛО $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ является конформным отображением*
Покажем, что f - биекция. $f, f^{-1} \in (\mathbb{C})$, $f'(z) \neq 0$

$$w(cz + d) = az + b$$
$$wcz - az = b - wd$$
$$z = \frac{b - wd}{wc - a}$$
$$/* \quad C = 0 \implies w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \ \ \infty \leftrightarrow \infty \quad */$$
$$z = \infty : \ \ g(\kappa) = \frac{a \cdot \frac{1}{\kappa} + b}{c \cdot \frac{1}{\kappa} + d} = \frac{a + b \cdot \kappa}{c + d\kappa} - \mathbb{C} - \text{дифф. в } \kappa = 1$$
$$z = -\frac{d}{c} \quad g(\kappa) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz + d}{az + b} - \mathbb{C} - \text{дифф. в } z = -\frac{d}{c}$$
$$w' = \frac{a(cz + d) - c \cdot (az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} \neq 0$$
$$g'(\kappa) = \frac{b(c + d\kappa) - d(a + b\kappa)}{(c + d\kappa)^2} = \frac{bc - da}{(c + d\kappa)^2} \neq 0$$
$$g'(z) = \frac{bc - ad}{(az + b)^2} \neq 0$$
$$/* \quad C = 0 \implies w' = \frac{a}{d} \neq 0 \ldots \quad */$$

Задача 121. *Доказать, что ДЛО $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ переводит окружности и прямые в окружности и прямые*

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$
$$A = 0 \implies Bx + Cy + D = 0 - \text{ прямые}$$
$$A \neq 0 \implies A(x - x_0)^2 + A(y - y_0)^2 + \tilde{D} = 0 - \text{ окр-ти}$$

$$Az\cdot\overline{z}+B\cdot\frac{z+\overline{z}}{2}+C\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}+D=0$$

$$Az\cdot\overline{z}+z\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2i}\right)+\overline{z}\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2i}\right)+D=0$$

$$\boxed{Az\cdot\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+D=0},\quad A,D\in\mathbb{R}$$

$$A\cdot\frac{b-dw}{cw-a}\cdot\frac{\overline{b}-\overline{d}\overline{w}}{\overline{cw}-\overline{a}}+\alpha\cdot\frac{b-dw}{cw-a}+\overline{\alpha}\cdot\frac{\overline{b}-\overline{d}\overline{w}}{\overline{cw}-\overline{a}}+D=0\quad|\cdot\ (cw-a)(\overline{cw}-\overline{a})$$

$$A\cdot(b-dw)(\overline{b}-\overline{d}\overline{w})+\alpha(b-dw)(\overline{cw}-\overline{a})+\overline{\alpha}(\overline{b}-\overline{d}\overline{w})(cw-a)+D(cw-a)(\overline{cw}-\overline{a})=0$$

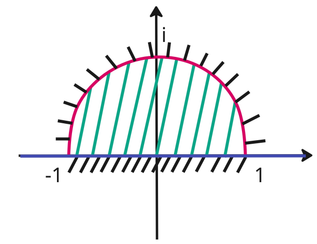
$$\textbf{\textit{При}}\ w\overline{w}:\ A\cdot d\overline{d}+\alpha(-d\overline{c})+\overline{\alpha}(-\overline{d}c)+D(c\overline{c})$$

$$\textbf{\textit{Без}}\ w\overline{w}:\ A\cdot b\overline{b}+\alpha b(-\overline{a})+\overline{\alpha}\overline{b}(-a)+D(-a)(-\overline{a})$$

$$\textbf{\textit{При}}\ w:\ A\cdot(-d)\overline{b}+\alpha(-d)(-\overline{a})+\overline{\alpha}\overline{b}c+Dc(-\overline{a})$$

$$\textbf{\textit{При}}\ \overline{w}:\ Ab(-\overline{d})+\alpha b\overline{c}+\overline{\alpha}(-\overline{d})(-a)+D(-a)\overline{c}$$

$$\boxed{\tilde{A}w\overline{w}+\tilde{\beta}w+\overline{\tilde{\beta}}\overline{w}+\tilde{D}=0}$$



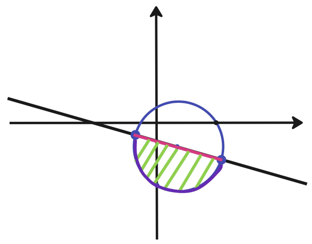
$$1\to\frac{3}{1+i}=\frac{3(1-i)}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$-1\to\frac{1}{i-1}=\frac{i+1}{-2}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

$$0\to\frac{2}{i}=-2i$$

$$i\to\frac{2+i}{1+i}=\frac{2+i}{2i}=-i+\frac{1}{2}$$

$$\infty\to1$$



Задача 122. *Доказать, что множество ДЛО - группа относительно операции композиции, причем композиция ДЛО отвечает умножению матриц, т.е. отображение*

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C})\mapsto f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq0$$

является гомоморфизмом групп

Задача 123. *Доказать, что при ДЛО точки, симметричные относительно прямой/окружности переходят в симметричные точки относительно образа этой прямой/окружности. (Достаточно доказать для $f=az+b$ и $f=1/z$)*

Задача 124. *Доказать, что для любых попарно различных точек $a_1,a_2,a_3\in\overline{\mathbb{C}}$ и для любых попарно различных $b_1,b_2,b_3\in\overline{\mathbb{C}}$ существует единственное ДЛО: $f(a_k)=b_k$*

$$a_1,a_2,a_3\xrightarrow[f]{\rightarrow}b_1,b_2,b_3$$

$$f(a_k)=b_k\qquad w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$\begin{matrix}g(z)=\frac{z-a_1}{z-a_3}\cdot\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\\ h(w)=\frac{w-b_1}{w-b_3}\cdot\frac{b_2-b_3}{b_2-b_1}\end{matrix}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\frac{z-a_1}{z-a_3}\cdot\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}=\frac{w-b_1}{w-b_3}\cdot\frac{b_2-b_3}{b_2-b_1}}$$

Задача 125. *Найти ДЛО, переводящее точки $-1,\infty,i$ в точки $i,1,1+i$ соответственно*

$$-1,\infty,i\to i,1,1+i$$

$$\frac{z-(-1)}{z-i}\cdot\frac{\infty-i}{\infty-(-1)}=\frac{w-i}{w-(1+i)}\cdot\frac{1-(1+i)}{1-i}$$

$$\frac{z+1}{z-i}=\frac{w-i}{w-(1+i)}\cdot\frac{-i}{1-i}$$

$$\dots$$

$$w=(\text{ от }z)$$

$$
\begin{aligned}
(z+1)(1+i)(w-(1+i)) &= (z-i)(w-i)\\
w((z+1)(1+i)-(z-i)) &= -i(z-i)+(z+1)(1+i)^2\\
w(iz+1+2i) &= iz+2i-1\\
w &= \frac{iz+2i-1}{iz+1+2i} \leftarrow \text{ Ответ}
\end{aligned}
$$

Задача 126. *Найти образ полукруга* $\{|z|<1, Im(z)>0\}$ *при отображении* $f(z)=\frac{2z-i}{2+iz}$

Задача 127. *Показать, что функция* $f(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $|a|<1$ *отображает единичный круг на себя.*

Задача 128. *Показать, что функция* $f(z)=e^{i\alpha}\frac{z-b}{1-\overline{b}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $Im(b)>0$ *отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг.*

14. [26.04.24] Семинар №15

Интегрирование функций вдоль путей

Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где

Задача 129.

$$f(z) = z \cdot Im(z^2), \quad \gamma = e^{it},\ t \in [-\pi, 0]$$

$$\int\limits_{\gamma} z \cdot Im(z^2)dz = \int\limits_{-\pi}^{0} e^{it} \cdot \sin 2t \cdot e^{it} i dt =$$

$$/* \quad Im(z^2) = Im((e^{it})^2) = Im(e^{2it}) = \sin 2t \quad */$$

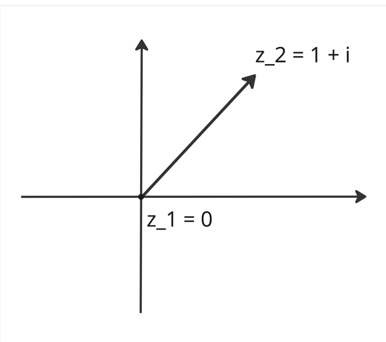
$$/* \quad \gamma' = e^{it} \cdot i \quad */$$

$$= i\int\limits_{-\pi}^{0} e^{2it} \cdot \sin(2t)dt = i\int\limits_{-\pi}^{0} e^{2it}\frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{0}(e^{4it} - 1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{4it}}{4i} - t\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4i} - \frac{1}{4i} - \pi\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Задача 130.

$$f(z) = e^{|z|^2}Re(z), \quad \gamma - \text{ прямая, соединяющая точки } z_1 = 0 \text{ и } z_2 = 1 + i$$



$$y = x$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\gamma(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma' = 1 + i$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = t^2 + t^2 = 2t^2$$

$$Re(z) = x = t$$

$$\int\limits_{\gamma} e^{|z|^2}Re(z)dz = \int\limits_{0}^{1} e^{2t^2} \cdot t \cdot (1+i)dt = \frac{(1+i)}{2}\int\limits_{0}^{1} e^{2t^2}d(t^2) = \frac{1+i}{4}e^{2t^2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1+i}{4}(e^2 - 1)$$

Задача 131.

$$f(z) = z\overline{z}, \quad \gamma: \ |z| = 1, \ \text{ обход против часовой стрелки}$$

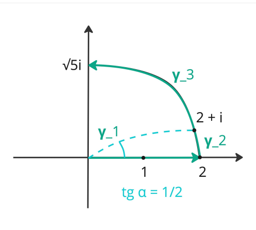
$\gamma(t) = e^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$

$$\int\limits_{|z|=1} z\overline{z}dz = \int\limits_{0}^{2\pi} \underbrace{e^{it}}_{z} \cdot \underbrace{e^{-it}}_{\overline{z}} \cdot \underbrace{ie^{it}}_{\gamma'} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} ie^{it}dt = e^{it}\Big|_{0}^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

Задача 132.

$$f(z) = Re(z), \quad \gamma - \text{ кривая на рис. 1}$$

$$\int\limits_{\gamma} Re(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} \ldots + \int\limits_{\gamma_2} \ldots + \int\limits_{\gamma_3} \ldots$$



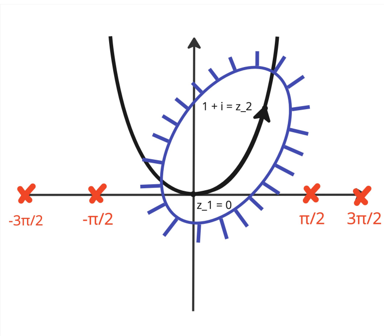
$$\gamma_1 = t + i\cdot 0,\ t\in[0,2\pi]$$
$$\gamma_2 = 2 + i\cdot t,\ t\in[0,1]$$
$$\gamma_3 = \sqrt{5}e^{it},\ t\in[\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$\int\limits_{\gamma_1} Re(z)\ dz = \int\limits_0^2 t\cdot 1\ dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$
$$\int\limits_{\gamma_2} Re(z)\ dz = \int\limits_0^1 2\cdot i\ dt = 2it|_0^1 = 2i$$
$$\int\limits_{\gamma_3} Re(z)\ dz = \int\limits_{\operatorname{arctg}1/2}^{\pi/2} \sqrt{5}\cos t\cdot\sqrt{5}ie^{it}dt = 5i\int\limits_{\operatorname{arctg}1/2}^{\pi/2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\cdot e^{it}dt =$$
$$\frac{5i}{2}\left(\frac{e^{2it}}{2i}+t\right)\Big|_{\operatorname{arctg}1/2}^{\pi/2} = \frac{5i}{2}\left(-\frac{e^{2i\operatorname{arctg}1/2}}{2i}+\frac{-1}{2i}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $2+2i+\frac{5i}{2}\left(-\frac{e^{2i\operatorname{arctg}1/2}}{2i}-\frac{1}{2i}+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$

Задача 133.

$$f(z)=\operatorname{tg} z,\quad \gamma - \text{ дуга параболы } y=x^2, \text{ соединяющая точки } z_1=0 \text{ и } z_2=1+i$$



$$\gamma = t+it^2$$
$$y=x^2$$
$$\begin{cases} x=t\\ y=t^2\end{cases}$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(e^{iz}-e^{-iz})2}{2i(e^{iz}+e^{-iz})}$$

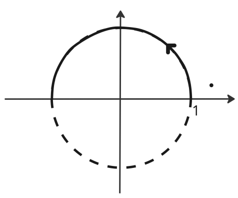
$$\int\limits_\gamma \operatorname{tg} zdz = -\ln\cos z|_0^{1+i} = -\ln\cos(1+i)+\ln 1$$

$$\int\operatorname{tg} xdx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int\frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C$$
$$F = -\ln(\cos z)$$
$$F' = \frac{-1}{\cos z}\cdot(-\sin z) = \operatorname{tg} z$$

Задача 134.

$$f\left(z=\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

γ - верхняя половина окружности $|z|=1$, направление обхода от точки $(1,0)$ до точки $(-1,0)$. Для решения задачи выбрать одно из значений $\sqrt{z}$. Как отличается ответ для другого значения



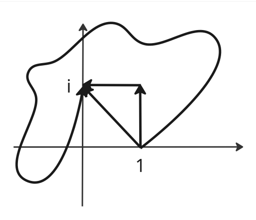
$$\gamma = e^{it},\ t\in[0,\pi]$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{z}}dz = \int\limits_0^\pi\frac{1}{\sqrt{e^{it}}}\cdot ie^{it}dt = \int\limits_0^\pi ie^{it/2}dt = \frac{ie^{it/2}}{i/2}\Big|_0^\pi = 2(i-1)$$

Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница

Вычислить интеграл:

Задача 135.

$$\int_1^i (3z^4 - 2z^3)dz$$



$$\int_1^i (3z^4 - 2z^3)dz = \frac{3}{5}z^5 - \frac{2}{4}z^4\Big|_1^i = \frac{3}{5}i - \frac{1}{2}\cdot 1 - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}(i-1)$$

Задача 136.

$$\int_0^i z\cos z dz$$

$$\int x\cos x \ dx = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x \ dx = x\sin x + \cos x + Const$$

$$\int_0^i z\cos z dz = z\sin z + \cos z|_0^i = i\sin i + \cos i - 1 = i\frac{e^{-1}-e^1}{2i} + \frac{e^{-1}+e^1}{2} - 1 = e^{-1} - 1$$

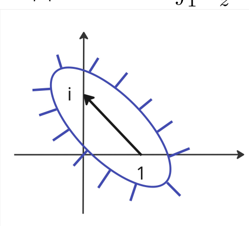
Задача 137.

$$\int_0^i z^2 e^z dz$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2\cdot e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

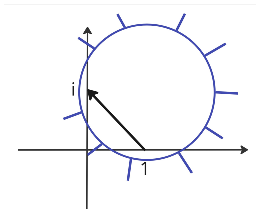
$$\int_0^i z^2e^z dz = (z^2 - 2z + 2)e^z\big|_0^i = (1-2i)e^i - 2$$

Задача 138. $\int_1^i \frac{\ln z}{z}dz$ *по отрезку прямой, соединяющему точки* $z_1 = 1$ *и* $z_2 = i$



$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$\ln 1 = \ln|1| + i\arg 1 \qquad \ln i = \ln|i| + i\cdot\frac{\pi}{2}$$



$$\int_1^i \frac{\ln z}{z}dz = \frac{\ln^2 z}{2}\Big|_1^i = \frac{1}{2}(\ln^2 i - \ln^2 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi i}{2}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{8}$$

Задача 139. *Доказать, что функция* $f(z)$ *не имеет первообразной в области* D, *где*

a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < \infty\}$

b) $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$

От противного: Если бы сущ. F *- первообразная, то*

$$\oint\limits_\gamma f(z)dz = 0 \implies \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(1-z^2)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}(1-\frac{1}{4}e^{2it})}\cdot\frac{1}{2}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-\frac{1}{4}e^{2it}} =$$

$$= 2i\int_0^{\pi}\frac{dt}{1-\frac{1}{4}e^{2it}} = 2i\int_0^{\pi}\frac{\left(1-\frac{1}{4}e^{2it}+\frac{1}{4}e^{2it}\right)dt}{1-\frac{1}{4}e^{2it}} = 2\pi i + \frac{2i}{4}\int_0^{\pi}\frac{e^{2it}dt}{1-\frac{1}{4}e^{2it}} = 2\pi i + \frac{i}{2\cdot 2i}\int_0^{\pi}\frac{d(e^{2it})}{1-\frac{1}{4}e^{2it}} =$$

$$2\pi i + \frac{1}{4}\cdot 4\ln|1-\frac{1}{4}e^{2it}|\Big|_0^{\pi} = 2\pi i \neq 0$$

15. [10.05.24] Семинар №16

Интегральная теорема Коши:

$$f \in \underset{\text{с запасом}}{\mathcal{O}(D)} \implies \int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$$

Интегральная формула Коши:

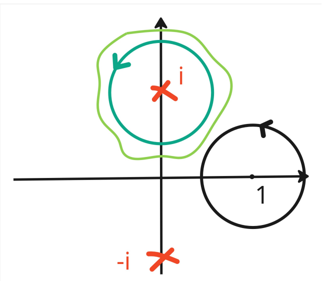
$$f \in \underset{\text{с запасом}}{\mathcal{O}(D)} \implies \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0), \quad z_0 \in D$$

Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши

Вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

Задача 140.

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}, \quad \gamma - \text{ окружность}$$



$$a)\ |z-1| = \frac{1}{2}$$

$$|z-1| = \frac{1}{2} \implies \oint\limits_{\gamma} f dz = 0$$

$b)\ |z-i| = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{-1/2i}{z+i} + \frac{1/2i}{z-i}$$

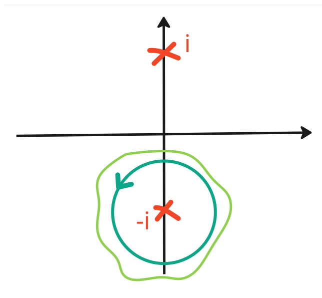
$$\oint\limits_{|z-i|=1/2} \left(\frac{-1/2i}{z+i} + \frac{1/2i}{z-i} \right) dz = \oint \frac{-1/2i}{z+i} dz + \oint \frac{1/2i}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

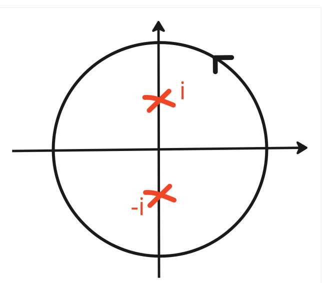
$$c)\ |z+i| = \frac{1}{2}$$

1) $$\oint\limits_{|z+i|=1/2} \left(\frac{-1/2i}{z+i} + \frac{1/2i}{z-i} \right) dz = \oint \frac{-1/2i}{z+i} dz + \oint \frac{1/2i}{z-i} dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2i} \right) = -\pi$$

2) $$\oint\limits_{|z+i|=1/2} \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \oint\limits_{|z+i|=1/2} \frac{\frac{1}{z-i} dz}{z+i} = 2\pi i \left(\frac{1}{-i-i} \right) = -\pi$$





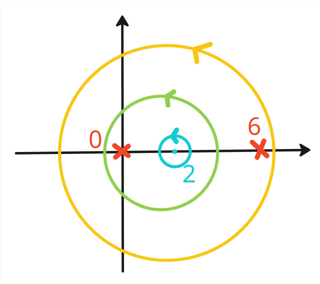
$$d)\ |z| = 2$$

$$\oint \left(\frac{-1/2i}{z+i} + \frac{1/2i}{z-i} \right) dz = \oint \frac{-1/2i}{z+i} dz + \oint \frac{1/2i}{z-i} dz =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{2i} \right) + 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = -\pi + \pi = 0$$

Задача 141. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}$, *где* γ *- произвольный путь из точки* $z=0$ *в точку* $z=1$

Задача 142. $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, *где* γ *- окружность*



Инт. теорема Коши

a) $|z-2|=1 \qquad \oint\limits_{\gamma} \dots dz$

b) $|x-2|=3$

$$\oint \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}dz = \int \frac{e^{z^2}/(z-6)}{z}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{0^2}}{0-6} = \frac{-\pi i}{3}$$

c) $|z-2|=5$

$$\frac{1}{z(z-6)} = \frac{-1/6}{z} + \frac{1/6}{z-6}$$

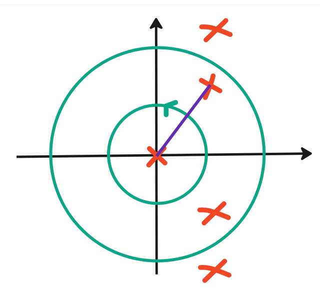
$$\oint \left(\frac{-1/6e^{z^2}}{z} + \frac{1/6e^{z^2}}{z-6} \right) dz = -\frac{1}{6}\int \frac{e^{z^2}}{z}dz + \frac{1}{6}\int \frac{e^{z^2}}{z-6}dz = -\frac{1}{6}2\pi i \cdot e^{0^2} + \frac{1}{6}2\pi i e^{6^2} = \frac{\pi i}{3}(e^{36}-1)$$

Задача 143.

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2-z}dz$$

Задача 144.

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}dz$$



$$z = Ln(-2) = \ln|2| + i\arg(-2) + 2\pi n i = \ln 2 + \pi i + 2\pi n i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

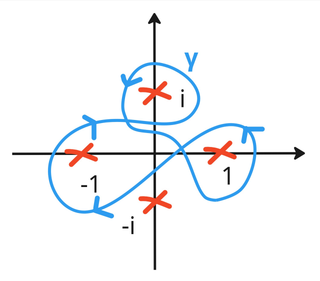
$$\sqrt{(\ln 2)^2 + \pi^2} > 3$$

$$\oint \frac{\cos(z+\pi i)/(e^z+2)}{z}dz = 2\pi i \cdot \frac{\cos(0+\pi i)}{e^0+2} = \frac{2\pi i}{3}\cos(\pi i)$$

Задача 145.

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos \pi z + 3\sin \pi z}{(z^2-4)(z+i)}dz$$

Задача 146. *Вычислить интеграл* $\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{(z^4-1)}dz$, *где* γ *изображена на рис. 1 слева*



$$z^4 = 1 \qquad z^2 = 1,\ z^2 = -1$$

$$z = \pm 1,\ z = \pm i$$

$$\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$$\int\limits_{\gamma} = \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} - \int\limits_{\gamma_3}$$

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} dz$$

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{z/(z+1)(z^2+1)}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{(1+1)(1+1)} = \frac{\pi i}{2}$$

$$\oint\limits_{\gamma_2} \frac{z/(z+i)(z^2-1)}{z-i} dz = 2\pi i \frac{i}{(i+i)(i^2-1)} = -\frac{\pi i}{2}$$

$$\oint\limits_{\gamma_3} \frac{z/(z-1)(z^2+1)}{z+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{-1}{-2 \cdot 2} = \frac{\pi i}{2}$$

$$\oint\limits_{\gamma} \ldots = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = -\frac{\pi i}{2}$$

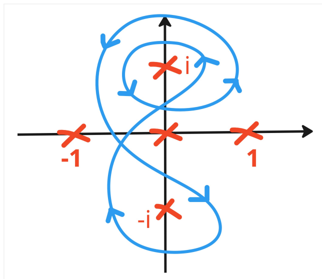
Задача 147. *Вычислить интеграл* $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z^4-1)}$, *где* γ *изображена на рис. 1 справа*

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z^4-1)} = 2 \int\limits_{i} \frac{dz}{z(z^4-1)} - \int\limits_{-i} \frac{dz}{z(z^4-1)} =$$

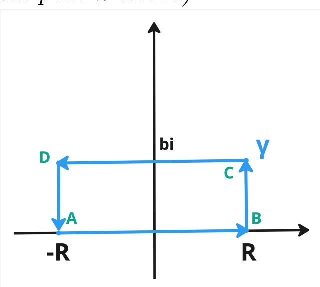
$$/* \int\limits_{i} \frac{dz \frac{1}{z(z+i)(z^2-1)}}{(z-i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i \cdot 2i(-2)} = \frac{\pi i}{2} \quad */$$

$$/* \int\limits_{-i} \frac{dz/z(z-i)(z^2-1)}{z+i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-i(-2i)(-2)} = \frac{\pi i}{2} \quad */$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i}{2}$$



Задача 148. *Доказать, что* $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$ *(Рассмотреть функцию* $f(z) = e^{-z^2}$ *и контур на рис. 2 слева)*



$$f(z) = e^{-z^2}$$

$$\oint\limits_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$$

$$\begin{cases} x = t,\ t \in [-R, R] \\ y = 0 \end{cases}, \quad \gamma = t + i0$$

$$\int\limits_{AB} \ldots = \int\limits_{-R}^{R} e^{-(t+i0)^2} \cdot 1 \; dt = \int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2} dt \overset{R\to+\infty}{\to} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

$$\left| \int\limits_{BC} e^{-z^2} dz \right| \leqslant \max_{BC} |e^{-z^2}| \cdot |b| = e^{-R^2+b^2} \cdot |b| \overset{R\to+\infty}{\to} 0$$

$$\left| \int\limits_{DA} e^{-z^2} dz \right| \leqslant e^{-R^2+b^2} \cdot |b| \to 0, \quad R \to \infty$$

$$\int\limits_{CD} e^{-z^2} dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-(t+ib)^2} \cdot 1 \; dt = -\int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2+b^2} \cdot e^{-2bit} dt =$$

$$= -\int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2+b^2} \cos(2bt) dt \overset{R\to+\infty}{\to} -e^{b^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2bt) dt = -2e^{b^2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2bt) dt$$

$$R \to +\infty: \; 0 = \sqrt{\pi} + 0 - 2e^{b^2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2bt) dt + 0$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2bt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

Задача 149. *Доказать, что* $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *(Рассмотреть функцию* $f(z) = e^{iz^2}$ *и контур на рис. 2 справа)*

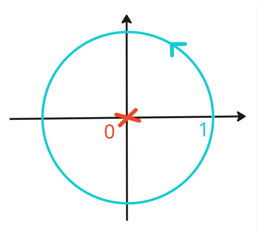
16. [17.05.24] Семинар №17

Интегральная формула Коши для производных

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Задача 150.

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2} dz$$



$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \cdot (-\sin 0) = 0$$

$$f = \cos z, \quad f' = -\sin z$$

Задача 151.

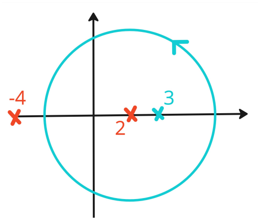
$$\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)} dz$$

$$\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)} dz$$

$$/* \quad f = \frac{z}{z+4} = \frac{z+4 \cdot 4}{z+4} = 1 - \frac{4}{z+4} \quad */$$

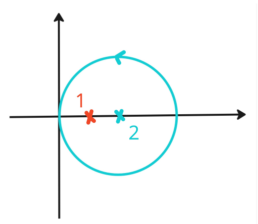
$$/* \quad f' = \frac{4}{(z+4)^2}, \quad f'' = \frac{-2 \cdot 4}{(z+4)^3} \quad */$$

$$= \oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z/(z+4)}{(z-2)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = \pi i \cdot \frac{-8}{(2+4)^3} = -\frac{\pi i}{27}$$



Задача 152.

$$\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{2z^5+1}{(z-2)^4} dz$$



$$/* \quad f = 2z^5+1, \; f' = 10z^4, \; f'' = 40z^3, \; f''' = 120z^2 \quad */$$

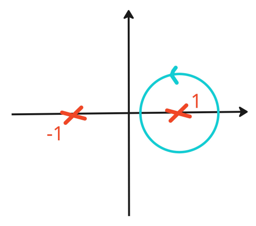
$$= \frac{2\pi i}{3!} f'''(1) = \frac{2\pi i}{6} \cdot 120 = 40\pi i$$

Задача 153.

$$\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz$$

$$/*\quad f=\frac{e^{iz}}{(z+1)^2},\ f'=\frac{ie^{iz}\cdot(z+1)^2-e^{iz}\cdot 2(z+1)}{(z+1)^4}=\frac{e^{iz}(i(z+1)-2)}{(z+1)^3}\quad */$$

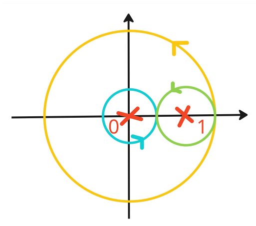
$$=2\pi i\cdot\frac{e^{i}(i\cdot 2-2)}{2^3}=\frac{\pi i e^{i}(i-1)}{2}$$



Задача 154. *Вычислить интеграл* $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$*, где* γ *- окружность*

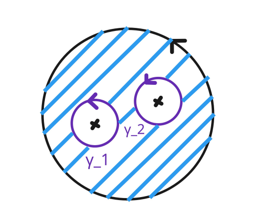
a) $|z|=1/2$

$$=\oint\frac{e^z/(1-z)^3}{z}dz=2\pi i f(0)=2\pi i\frac{e^0}{(1-0)^3}=2\pi i$$



b) $|z|=3/2$

$$\int\ldots=0$$



$$\int\limits_0-\int\limits_0-\int\limits_0\left(\int\limits_{\gamma_3\cup\gamma_1^-\cup\gamma_2^-}fdz=\int\limits_{\gamma_3}-\int\limits_{\gamma_1}-\int\limits_{\gamma_2}=0\right)$$

$$\int\limits_{\gamma_3}=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}$$

$$\oint\limits_{\gamma_3}\frac{e^z}{z(1-z)^3}dz=\int\limits_{\gamma_1}\ldots+\int\limits_{\gamma_2}\ldots=2\pi i-\pi e i=\pi i(2-e)$$

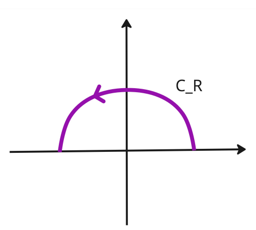
$$/*\quad\frac{1}{z(1-z)^3}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{(1-z)^2)}+\frac{D}{(1-z)^3}\quad */$$

c) $|z-1|=1/2$

$$=\oint\frac{e^z/z}{(1-z)^3}dz=-\int\frac{e^z/z}{(z-1)^3}dz=-\frac{2\pi i}{2!}\cdot f''(1)=$$

$$/*\quad f=\frac{e^z}{z},\ f'=\frac{e^z\cdot z-e^z\cdot 1}{z^2}=\frac{e^z(z-1)}{z^2},\ f''=\frac{(e^z(z-1)+e^z)z^2-e^z(z-1)\cdot 2z}{z^4}\quad */$$

$$=-\pi i\cdot\frac{e\cdot 1-0}{1}=-\pi e i$$



$$f-\ \text{непр.}\ ,a>0$$

$$\left|\int_{C_R}f(z)e^{iaz}dz\right|\leqslant\frac{\pi}{a}M\cdot(1-e^{-aR}),\ M=\max_{C_R}|f|$$

Вычисление несобственных интегралов с помощью интегралов вдоль кривых

Лемма Жордана: Пусть C_R - полуокружность $|z| = R, Im(z) \geqslant 0$, функция $f(z)$ непрерывна на ней. Тогда для любого $a > 0$

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| \leqslant \frac{\pi}{a}\max_{C_R}|f(z)|$$

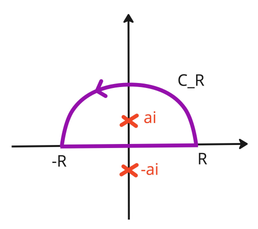
Задача 155. *Доказать лемму Жордана*

Задача 156. *Вычислить интеграл Лапласа* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2+a^2}dx$, $a > 0$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+a^2}dx, \quad a > 0$$

$$f(z) = \frac{e^{izy}}{z^2+a^2}, \quad y > 0$$

$$\gamma = C_R \cup [-R, R]$$



$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{[-R,R]} f dz + \int\limits_{C_R} f dz$$

$$\oint \frac{e^{izy}/(z+ai)}{z-ai}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{iy\cdot ai}}{2ai} = \frac{\pi}{a}e^{-ay}$$

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{e^{iyz}}{z^2+a^2}dz\right| \leqslant \frac{\pi}{y}\cdot\max_{C_R}\left|\frac{1}{z^2+a^2}\right| \sim \frac{\pi}{y}\cdot\frac{1}{R^2} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

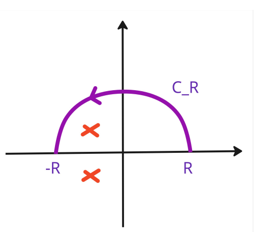
$$\int\limits_{[-R,R]} f dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iyx}}{x^2+a^2}dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\cos(xy)}{x^2+a^2}dx \overset{R\to\infty}{\to} I$$

$$R \to \infty: \ \frac{\pi}{a}e^{-ay} = I + 0, \ y > 0$$

$$y \in \mathbb{R}: \ I = \frac{\pi}{a}e^{-a|y|}$$

Задача 157. *Вычислить интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+4x+20}dx$

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}$$



$$z^2 + 4z + 20 = 0$$

$$(z+2)^2 + 16 = 0$$

$$z + 2 = \pm 4i$$

$$z = -2 \pm 4i$$

$$\oint\limits_{C_R\cup[-R,R]} f dz = \int\limits_{[-R,R]} \ldots + \int\limits_{C_R} \ldots$$

$$\oint \frac{ze^{iz}/(z+2+4i)}{z+2-4i}dz = 2\pi i \cdot \frac{(-2+4i)e^{i(-2+4i)}}{8i} = \frac{\pi}{2}(-1+2i)e^{-2i-4}$$

$$\int\limits_{[-R,R]} \frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+4x+20}dx \overset{R\to\infty}{\to} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+4x+20}dx$$

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}dz\right| \overset{\text{Лемма Жордана}}{\leqslant} \frac{\pi}{1} \cdot \max_{C_R}\left|\frac{z}{z^2+4z+20}\right| \sim \pi \cdot \frac{1}{R} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$R \to +\infty \qquad \frac{\pi}{2}(-1+2i)e^{-2i-4} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+4x+20}dx + 0$$

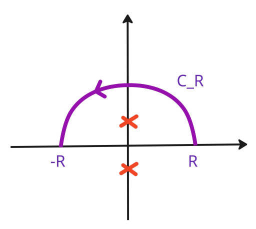
$$Re: \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+4x+20}dx = \frac{\pi}{2}e^{-4}(-\cos 2 + 2\sin 2)$$

$$Im: \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx = \frac{\pi}{2}e^{-4}(\sin 2 + 2\cos 2)$$

Задача 158. *Вычислить интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$

Задача 159. *Вычислить интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$



$$\oint f\ dz = \int\limits_{[-R,R]} f\ dz + \int\limits_{C_R} f\ dz$$

$$\oint \frac{z^2/(z+1)^2}{(z-i)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\, \frac{2z\cdot(z+i)^2 - z^2\cdot 2(z+i)}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \frac{2i\cdot(2i)^2 + 2\cdot 2i}{(2i)^4} = \frac{\pi i}{8}(-8i+4i) = \pi/2$$

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}dz\right| \leqslant \max_{C_R}\left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right| \cdot \pi R \sim \frac{1}{R^2} \sim \frac{1}{R^2}\cdot \pi R = \frac{\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$\int\limits_{[-R,R]} f\ dz = \int\limits_{R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx \overset{R\to\infty}{\to} I$$

$$R\to\infty: \ \frac{\pi}{2} = I + 0 \implies I = \frac{\pi}{2}$$

$$/* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \begin{bmatrix} x^2 = y \\ x = \sqrt{y} \end{bmatrix} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y}{(y+1)^2}\cdot\frac{dy}{2\sqrt{y}} =$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y^{1/2}}{(1+y)^2}dy = B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} = \frac{1/2\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \frac{\pi}{2} \quad */$$

Задача 160. *Вычислить интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

17. [24.05.24] Семинар №18

Формула Коши-Адамара

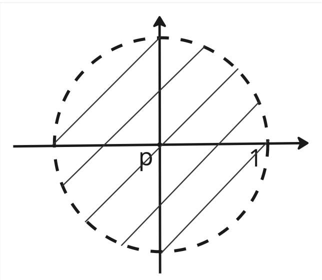
$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Найти область сходимости степенного ряда

Задача 161.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} i^n z^n$$



$$z_0 = 0, b_n = i^n$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|i^n|} = 1 \implies R = 1$$

$z = 1 \cdot e^{it} \leftarrow$ *Граница, смотрим отдельно*

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n (e^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}n + itn} = \sum e^{in(\frac{\pi}{2}+t)}$$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$e^{in(\frac{\pi}{2}+t)} \nrightarrow 0, n \to \infty \xrightarrow{\text{необх. усл.}} \text{Ряд расходится}$$

Ответ: $|z| < 1$

Задача 162.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{z+i}{1-i}\right)^n$$

$z_0 = -i, b_n = \frac{n}{(1-i)^n} = \frac{n}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n}$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{\sqrt{2}e^{-i\pi n/4}}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies R = \sqrt{2}$$

$$z - z_0 = \sqrt{2}e^{it} \implies z = -i + \sqrt{2}e^{it}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{-i + \sqrt{2}e^{it} + i}{1-i}\right)^n = \sum n \frac{\sqrt{2}^n e^{int}}{\sqrt{2}^n e^{-i\pi n/4}} = \sum n e^{n(it + \frac{i\pi}{4})}$$

Ответ: $|z + i| < \sqrt{2}$

Задача 163.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n} z^{2n}$$

$z_0 = 0 \ b_n = \begin{cases} 0, n = 2k+1 \\ \frac{4^k}{k}, n = 2k \end{cases}$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[2k]{\frac{4^k}{k}} = 2 \implies R = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}e^{it}, \sum \frac{4^n}{n} (\frac{1}{2}e^{it})$$

Задача 164.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{n}$$

Задача 165.

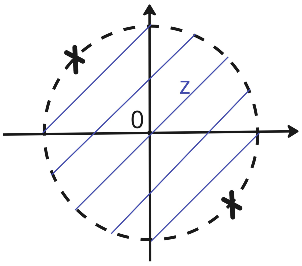
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n} z^{2n}$$

Разложить функцию в ряд Тейлора и найти его радиус сходимости:

Задача 166.

$$f(z) = \frac{z}{z^2+i},\ z_0 = 0$$

$$f(z) = \frac{z}{z^2+i} = z \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^2}{i}} = \frac{z}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z^2}{i} \right)^n =$$



$$z^2 = -i = e^{-\pi i/2}$$

$$z = \pm e^{-\pi i/4}$$

$$|z^2| < |i|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{i^{n+1}}, R = 1$$

Задача 167.

$$f(z) = e^z \cos z, z_0 = 0$$

$$f(z) = e^z \cos z = e^z \cdot \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} e^{z(1+i)} + \frac{1}{2} e^{z(1-i)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z(1+i))^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z(1-i))^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} z^n ((1+i)^n + (1-i)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^{n/2} \cdot \cos \frac{\pi n}{4} \cdot z^n, R = \infty$$

$$((1+i)^n + (1-i)^n) = (\sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}})^n + (\sqrt{2} e^{\frac{-\pi i}{4}})^n = 2^{n/2} (e^{\pi i n/4} + e^{-\pi i n/4}) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{\pi n}{4}$$

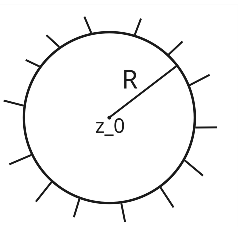
Задача 168.

$$f(z) = \sin^2 z, z_0 = 1$$

$w = z - 1$

$$f = \sin^2(w+1) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2w+2)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2w)\cos 2 + \sin(2w) \cdot \sin 2) =$$

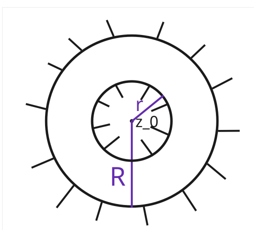
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2w)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2w)^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = \infty$$



$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$



$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|},\ r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

Разложить функцию в ряд Лорана, найти кольцо сходимости, выделить правильную и главную части ряда Лорана:

Задача 169.

$$f(z)=\frac{e^z}{z}, z_0=0$$

$$f=\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3}+\dots$$

Задача 170.

$$f(z)=z^3e^{1/z}, z_0=0$$

$$f=z^3e^{1/z}=z^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}}=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\dots$$

Задача 171.

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}, z_0=2i$$

1) $0<|z-2i|<4\quad(r=0,R=4)$

$$f=\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{(w+2i)^2+4}=\frac{1}{w^2+4iw}=\frac{1}{4iw}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{4i}}=\frac{1}{4iw}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{4i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nw^{n-1}}{(4i)^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{4iw}+\frac{-1}{(4i)^2}+\frac{w}{(4i)^3}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_i)^{n-1}}{(4i)^{n+1}}$$

2) $4<|z-i|<\infty\qquad(r=4,\ R=\infty)$

$$f=\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{w^2+4iw}=\frac{1}{w^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{4i}{w}}=\frac{1}{w^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4i}{w}\right)^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4i)^n}{w^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4i)^n}{(z-2i)^{n+2}}$$

Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности заданной точки и определить, в какой области верно полученное разложение:

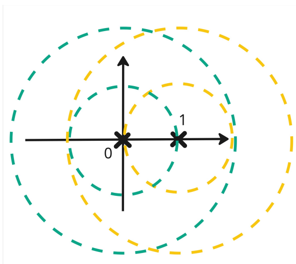
Задача 172.

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}, z_0=0, z_0=1, z_0=\infty$$

a) $z_0=0$

$0<|z-0|<1$

$$f=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{z}+1+z+z^2+\dots$$

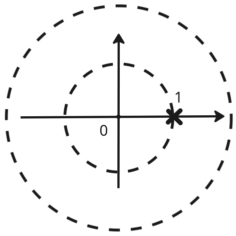


b) $z_0=1\qquad 0<|z-1|<1$

$$f=\frac{1}{z(1-z)}\overset{w=z-1}{=}\frac{1}{(w+1)(-w)}=-\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+w}=-\frac{1}{w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-w)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(z-1)^{n-1}$$

$c)\ z_0 = \infty$

$$w = \frac{1}{z},\quad w_0 = 0 \qquad 0 < |w - 0| < 1$$



$$0 < \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \qquad |z| > 1$$

$$f = \frac{1}{\frac{1}{w}\left(1 - \frac{1}{w}\right)} = \frac{w^2}{w-1} = w^2 \cdot \frac{1}{1-w} = -w^2 \sum_{n=0}^{\infty} w^n =$$

$$-w^2 - w^3 - w^4 - \ldots = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+2}}, \quad r = 1,\ R = \infty$$

Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$:

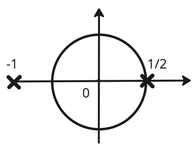
Задача 173.

$$f(z) = \ln \frac{z+1}{z-2}$$

$$w = \frac{1}{z},\quad w_0 = 0.\quad f = \ln \frac{\frac{1}{w} + 1}{\frac{1}{w} - 2} = \ln \frac{1+w}{1-2w} = \ln(1+w) - \ln(1-2w) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-2w)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}(-2w)^n}{n} - \frac{(-1)^{n-1}(-2)^n}{n} \right) w^n =$$

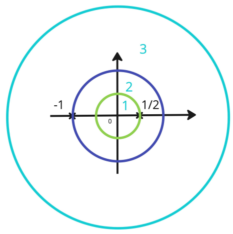
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (1 - (-2)^n) \frac{1}{z^n}$$



$$0 < |w - 0| < \frac{1}{2}$$

$$0 < \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2}$$

$$\infty > |z| > 2$$



Задача 174.

$$1 + C_\alpha^1 q + C_\alpha^2 q^2 + \ldots = (1+q)^\alpha, |q| < 1, q, \alpha \in \mathbb{C}$$

где

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{и} \quad (1+q)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+q)}, arg(1+q) \in (-\pi, \pi)$$

18. [31.05.24 - 7.06.24] Семинар №19

Изолированные особые точки

Устранимая особая точка $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ В ряде Лорана нет главной части

Полюс $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ В ряде Лорана в гл. части конечное (ненулевое) число ненулевых слагаемых

Существенно особая точка $\nexists f(z) \lim\limits_{z\to a} f(z)$ В ряде Лорана беск. число ненулевых слагаемых в гл. части

Изолированные особые точки

Задача 175. *Найти нули функции и их порядок:*

a) $f(z) = z^2 \sin z$

$z^2 \sin z = 0$

$z = 0$ *или* $\sin z = 0,\ \ z = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$$z_n = 0 \quad \frac{f}{z^2} = \sin z\big|_{z=0} = 0, \quad \frac{f}{z^3} = \frac{\sin z}{z}\bigg|_{z=0} = 1 \neq 0$$

$$\implies \text{Порядок нуля } = 3$$

$$z_n = \pi n\ (n \neq 0) \quad \frac{f}{z - \pi n} = \frac{z^2 \sin z}{z - \pi n} = \frac{(w + \pi n)^2 \sin(w + \pi n)}{w} = \frac{(w + \pi n)^2 (-1)^n \sin w}{w} \neq 0 \quad w \rightrightarrows 0$$

$$\implies z_n = \pi n \ - \text{ нули 1-го порядка } (n \neq 0)$$

b) $f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z})$

Найти особые точки функции и определить из тип (включая бесконечно удаленную точку)Ю В случае полюса найти его порядок

Задача 176.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

Особые точки: $z = 0,\ \ z = \infty$

$$z = 0: \ \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 \in \mathbb{C} \implies \text{Устр. особ.}$$

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

$$z = \infty: \quad w = \frac{1}{z} \quad f = \frac{e^{1/w} - 1}{1/w} = w(e^{1/w} - 1) = w\left(1 + \frac{1}{w} + \frac{(1/w)^2}{2!} + \ldots - 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2!w} + \frac{1}{3!w^2} + \ldots \implies \text{Сущ. ос. т.}$$

Задача 177.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

Особые точки: $z = \pm i,\ z = \infty$

$$z = i: \ \lim_{z\to i} \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \infty \implies \text{полюс 1го порядка } \frac{1}{f} = (z - i)^1 (z + i)$$

$$z = -i - \text{ Полюс 1го порядка}$$

$$z = \infty: \ w = \frac{1}{z} \quad f = \frac{1}{\left(\frac{1}{w}\right)^2 + 1} = \frac{w^2}{1 + w^2} \overset{w\to 0}{\to} \implies \text{Устр. особ./ не особ. точка}$$

Задача 178.

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

Особые точки: $z = 0,\ z_n = 2\pi n i,\ z = \infty$

$$z=0:\ \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-(e^z-1)}{z(e^z-1)}=\frac{z(z+\frac{z^2}{2!}+\ldots)}{z(z+\frac{z^2}{2}+\ldots)}=$$

$$=\frac{-1/2!-\frac{z}{3!}-\ldots}{1+z/2!+z^2/3+\ldots}\overset{z\to 0}{\to}\frac{-1/2}{1}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{C}\implies \text{устр. ос.}$$

$$z_n=2\pi ni,\ w=z-2\pi ni$$

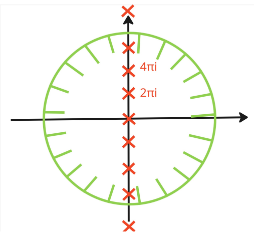
$$f=\frac{1}{e^{w+2\pi ni}-1}-\frac{1}{w+2\pi ni}=\frac{1}{e^w-1}-\frac{1}{w+2\pi ni}\overset{w\to 0}{\to}\infty$$

$$\frac{1}{f}=\frac{(e^w-1)(w+2\pi ni)}{w+2\pi ni-(e^w-1)}=\frac{(w+\frac{w^2}{2}+\ldots)(w+2\pi ni)}{w+2\pi ni-(w+\frac{w^2}{2!}+\ldots)}=\frac{w(1+\frac{w}{2!}+\ldots)(w+2\pi ni)}{2\pi ni-\frac{w^2}{2!}-\ldots}$$

$$\frac{1}{f\cdot w}=\left.\frac{\frac{e^w-1}{w}\cdot(w+2\pi ni)}{w+2\pi ni-(e^w-1)}\right|_{w=0}\to 1\neq 0$$

$$w=0\ -\ \text{нуль 1го порядка для}\ \frac{1}{f}$$

$$2\pi ni\ -\ \text{полюса 1го порядка для}\ f$$



$z=\infty$ не является изолированной особ. точкой

$$2\pi ni\overset{n\to\infty}{\to}\infty$$

Задача 179. *Можно ли разложить в ряд Лорана функцию* $f(z)=\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$ *в окрестности* $z_0=0$

$$\sin\frac{1}{z}=0\implies\frac{1}{z}=\pi n\implies z=\frac{1}{\pi n}\implies z_0=0-\ \text{не изол. ос. т.}$$

Если бы f раскл. в ряд Лорана в окр. 0, то $\exists$ кольцо сход. Там нет особых точек - противоречие

Задача 180. *Для каждой из его ветвей многозначной функции исследовать заданную точку. Если это особая точка, то определить ее тип:* $f(z)=\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$, $z_0=1$

Вычеты

$$res[f,a]=C_{-1}\quad;\quad res[f,\infty]=C_{-1}$$

a - устр. ос. $\implies res[f,a]=0$

a - полюс 1-го пор. $\implies res[f,a]=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$

Th. 1 $f\in\mathcal{O}(D\setminus\{a_1,\ldots,a_n\})\implies\int\limits_{\partial D}f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^n res[f,a_j]$

Th. 2 $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\})\implies res[f,\infty]+\sum_{j=1}^n res[f,a_j]=0$ Найти вычеты в конечных особых точках:

Задача 181.

$$f(z)=z^3e^{1/z}$$

$z=0$

$$f=z^3\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{(1/z)^2}{2!}+\frac{(1/z)^3}{3!}+\frac{(1/z)^4}{4!}+\ldots\right)=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\ldots$$

$$C_{-1}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24},\quad res[f,0]=\frac{1}{24}$$

Задача 182.

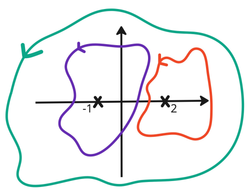
$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$$

$z=-1,\ z=2$

$z=-1,\ w=z+1\ \ f=\dfrac{w-1}{w^3(w-3)^2}=\dfrac{1}{w^3}(w-1)\dfrac{1}{9}\left(1-\dfrac{w}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{9w^3}(w-1)\left(1+\dfrac{2w}{3}+\dfrac{-2(-3)}{2!}\left(-\dfrac{w}{3}\right)+\dots\right)$

При $\frac{1}{w}$: $C_{-1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$
$res[f,-1]=\frac{1}{27}$
$z=2,\ w=z-2\quad f=\frac{w+2}{(w+3)^3w^2}=\frac{1}{w^2}(w+2)\cdot\frac{1}{27}\left(1+\frac{w}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{27w^2}(w+2)\left(1-3\cdot\frac{w}{3}+\dots\right)$
$C_{-1}=\frac{1}{27}\cdot 1+\frac{1}{27}\cdot 2\cdot(-1)=-\frac{1}{27}$
$res[f,2]=-\frac{1}{27}$

$$\oint\frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}dz$$



$$=2\pi i\cdot\frac{1}{27}$$

$$=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)$$

$$=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{27}\right)=0$$

Задача 183.

$$f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$$

$z=0$

$$e^{z^2}\cdot e^{1/z^2}=\left(1+z^2+\frac{(z^2)^2}{2!}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{(1/z^2)^2}{2!}+\dots\right)$$

$C_{-1}=0=res[f,0]$

Задача 184.

$$f(z)=\sin z\cdot\cos\frac{1}{z}$$

Найти вычет в бесконечно удалённой точке:

Задача 185. *a)* $f(z)=e^{1/z}$

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\dots$$

$C_{-1}=1$
$res[f,0]=-1$
b) $f(z)=\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$

$$f=\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}=\frac{\cos^2(\pi w)}{\frac{1}{w}+1}=\frac{w}{1+w}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi n)\right)=\frac{w}{2(1+w)}\left(1+1-\frac{(2\pi w)^2}{2!}+\frac{(2\pi w)^4}{4!}-\dots\right)=$$

$w=\frac{1}{z}$

$$=\frac{w}{2}(1-w+w^2-w^3+\dots)\left(2-\frac{(2\pi w)^2}{2!}+\dots\right)=\frac{w}{2}\cdot 1\cdot 2+\dots=\frac{1}{z}+\dots$$

$C_{-1}=1\implies res[f,\infty]=-1$

Вычислить интеграл:

Задача 186.

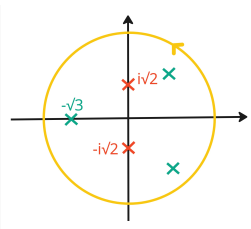
$$\int\limits_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i res[f,0] =$$

$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{(1/z)^3}{3!} + \ldots\right) = z - \frac{1}{z\cdot 3!} + \ldots$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}$$

Задача 187.

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz$$



$$z^2 = -2 \qquad z^3 = -3$$

$$z = \pm i\sqrt{2} \qquad z = \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{3} e^{\frac{\pi + 2\pi n}{3}\cdot i}$$

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

$$3^2 > 2^3$$

$$\oint \ldots = 2\pi i \sum res = -2\pi i res[f,\infty]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{5} res[f,a_k] = -2\pi i res[f,\infty] = *$$

$$\frac{1}{z} = w \qquad f = \frac{1/w^{17}}{\left(\frac{1}{w^2}+2\right)^3\left(\frac{1}{w^3}+3\right)^4} = \frac{w^6\cdot w^{12}}{w^{17}(1+2w^2)^3(1+3w^3)^4} = w(1+2w^2)^{-3}(1+3w^3)^{-4} =$$

$$= w(1-6w^2+\ldots)(1-12w^3+\ldots) = w + \ldots = \frac{1}{z} + \ldots \implies C_{-1} = 1 \implies res[f,\infty] = C_{-1} = -1$$

$$* = -2\pi i \cdot (-1) = 2\pi i$$

Задача 188.

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3 e^{1/z}}{(z^2+4)^2} dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{3} res[f,a_k] = -2\pi i res[f,\infty] = *$$

$$f = \frac{\frac{1}{w^3}e^w}{\left(\frac{1}{w^2}+4\right)^2} = \frac{e^w\cdot w^4}{w^3(1+4w^2)^2} = we^w(1+4w^2)^{-2} = w(1+w+\ldots)(1-8w^2+\ldots) = w+\ldots = \frac{1}{z}+\ldots$$

$C_{-1} = 1 \implies res[f,\infty] = -1$

$$* = 2\pi i$$

$$res[f,2i] = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dz}\left((z-2i)^2\cdot\frac{z^3e^{1/z}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{(3z^2e^{1/z} + z^3e^{1/z}\cdot(-1/z^2))\cdot(z+2i) - z^3e^{1/z}\cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^3} = \ldots$$