

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$\log_a x \sim \frac{x}{\ln a}$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Таблица 1: Эквивалентность

## Эквивалентности

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$
- $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1}x^n + \dots$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots$
- $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \frac{x^7}{7} + \dots$
- $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{2n-2}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$

## Пределы

- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arccos x)^2}{1-x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

## Основные производные

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, x \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

## Основные интегралы

- $\int 0 \cdot dx = C$
- $\int dx = x + C$
- $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

Ф	Данный угол			
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Таблица 2: Формулы приведения и значения функций для некоторых углов 1

Ф	Данный угол			
	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Таблица 3: Формулы приведения и значения функций для некоторых углов 2

## Функции суммы и разности двух углов

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$

## Функции двойного и половинного углов

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
- $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
- $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
- $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

Функция	Данный угол				
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
ctg	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Таблица 4: Формулы приведения и значения функций для некоторых углов

Формулы тройного угла	Формулы понижения степени
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\operatorname{ctg} 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$
	$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
	$\operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}$
	$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
	$\operatorname{ctg}^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha + \sin 3\alpha}{3 \cos \alpha - \cos 3\alpha}$

Таблица 5: Дополнительные тригонометрические формулы

## Суммы и разности функций двух углов

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
- $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
- $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$
- $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

## Неравенства

- $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$
- $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab \rightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
- $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$

## Суммы

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$