# Calculus Seminars

Дина Шакирова БКНАД222

September - December 2023

Special for my friends!

## Содержание

1 [08.09.23] Семинар №1 2

2 [15.09.23] Семинар №2 5

3 [22.09.23] Семинар №3 9

4 [29.09.23] Семинар №4 12

5 [06.10.23] Семинар №5 15

6 [13.10.23] Семинар №6 19

7 [20.10.23] Семинар №7 23

8 [03.11.23] Семинар №8 26

9 [10.11.23] Семинар №9 32

10 [17.11.23] Семинар №10 37

11 [24.11.23] Семинар №11 42

12 [1.12.23] Семинар №12 46

13 [8.12.23] Семинар №13 50

14 [14.12.23] Семинар №14 55

15 [15.12.23] Семинар №14 57

# 1. [08.09.23] Семинар №1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \xrightarrow[N\to\infty]{} S$$

Вычислить сумму ряда

**Задача 1.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\frac{1}{3}}{3n-1} + \frac{\frac{-1}{3}}{3n+2} \right) = \left( \frac{\frac{1}{3}}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{5} \right) + \left( \frac{\frac{1}{3}}{5} - \frac{\frac{1}{3}}{8} \right) + \left( \frac{\frac{1}{3}}{8} - \dots \right) + \dots =$$

*Если что мы используем Телескопический ряд*

$$= \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{3}}{3N+2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{6}$$

**Задача 2.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \left( \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \right) = \left( \frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3} \right) + \left( \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} \right) + \left( \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{5} \right) +$$

$$\left( \frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{2}}{6} \right) + \dots + \left( \frac{\frac{1}{2}}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{\frac{1}{2}}{N} \right) + \left( \frac{\frac{1}{2}}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{2}}{N+1} \right) + \left( \frac{\frac{1}{2}}{N} - \frac{1}{N+1} + \frac{\frac{1}{2}}{N+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{N+1} - \frac{1}{N+1} + \frac{\frac{1}{2}}{N+2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

**Задача 3.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{N} \ln \frac{n^2-1}{n^2} = \ln \prod_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n^2} = \ln\left( \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{N^2-1}{N^2} \right) =$$

$$= \ln\left( \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(N-1)(N+1)}{N^2} \right) =$$

$$= \ln \frac{N+1}{2N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Исследовать ряд на сходимость (Необходимое условие):

$$\sum a_n \text{ сх.} \implies a_n \to 0$$

Или, как отрицание необходимого условия:

$$\boxed{a_n \not\to 0 \implies \sum a_n \text{ расх.}}$$

**Задача 4.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \implies a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \neq 0 \implies \text{Ряд расходится (Необходимое условие)}$$

$$\boxed{\arctan x \sim x \ [x \to 0]}$$

**Задача 5.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\arctan\frac{n+2}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}(n+3)\arctan\frac{n+2}{n^2+n+1}=\left[\frac{n+2}{n^2+n+1}\to 0\right]=\lim_{x\to\infty}(n+3)\frac{n+2}{n^2+n+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot n}{n^2}=1\neq 0\implies$$

*Ряд расходится (Необходимое условие)*

**Задача 6.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt[n]{3}-1)$$

$$\sqrt[n]{3}=3^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln 3}=1+\frac{\ln 3}{n}+\overline{o}\left(\frac{1}{n}\right),n\to\infty$$

$$\boxed{e^x=1+x+\overline{o}(x)\ [x\to 0]}$$

$$\lim_{x\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-1)=\lim_{x\to\infty}n\left(1+\frac{\ln 3}{n}+\overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{x\to\infty}(\ln 3+\overline{o}(1))=\ln 3\neq 0$$

$\implies$ *Ряд расходится (Необходимое условие)*

**Задача 7.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\overline{o}(x^3),x\to 0}$$

$$e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-n}\cdot e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{-n+n^2\cdot\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{-n+n^2(\frac{1}{n}-\frac{(1/n)^2}{2}+\overline{o}(\frac{1}{n^2}))}=e^{-n+n-\frac{1}{2}+\overline{o}(1)}=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}+\overline{o}(1)}\to e^{-\frac{1}{2}}\neq 0$$

$\implies$ *Ряд расходится (Необходимое условие)*

Исследовать ряд на сходимость (Критерий Коши):

Критерий Коши

$$\sum a_n\ \textit{сх.}\iff\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \forall n>N\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$$
$$\forall\ p\geqslant 1$$

Отрицание Критерия Коши

$$\sum a_n\ \textit{расх.}\iff\exists\ \varepsilon>0\ \ \forall N\ \ \exists\ n>N\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\geqslant\varepsilon$$
$$\exists\ p\geqslant 1$$

**Задача 8.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}+2}$$

*Степень в данном случае просто целая часть корня из n.*

$$\begin{aligned} k \leqslant \sqrt{n} < k+1 \\ k^2 \leqslant \ n \ < (k+1)^2 \end{aligned}$$

$(-1)^{[\sqrt{n}]}$ *одного знака.*

$$\left|\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}+2}\right| = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \geqslant \frac{(k+1)^2-1-k^2+1}{\sqrt{(k+1)^2-1}+2} = \frac{2k+1}{\sqrt{k^2+2k}+2} \xrightarrow{k\to\infty} 2 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ *Ряд расходится (Необходимое условие)*

**Задача 9.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n}$$

$\sin \ln n > 0[n \in [A, B]]$

$$\sum_{n=A}^{B} \frac{\sin \ln n}{n} > 0$$

$$\begin{aligned} \sin \ln n &> \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k < \ln n &< \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k} < \ n \ &< e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \\ \lceil e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k} \rceil \leqslant \ n \ &\leqslant \lfloor e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \rfloor \end{aligned}$$

$$\sum_{n=\lceil e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k}\rceil}^{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}\rfloor} \frac{\sin \ln n}{n} > \frac{1}{2} \sum_{n=\lceil e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k}\rceil}^{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}\rfloor} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \rfloor - \lceil e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k} \rceil + 1}{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \rfloor} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} - 1 - (e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k} + 1) + 1}{e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} - e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k} - 1}{e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4\pi}{6}} - \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}}\right)$$

$$\begin{aligned} a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqslant a \\ a \leqslant \lceil a \rceil < a + 1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{\frac{2\pi}{3}}) \neq 0$$

$\Longrightarrow$ *Ряд расходится (Необходимое условие)*

# 2. [15.09.23] Семинар №2

Исследовать ряд на сходимость (признаки сравнения):

**Задача 10.** *Ряд Бертрана*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

*На лекции:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1 \implies \text{сх.} \qquad \alpha \leqslant 1 \implies \text{расх.}$$

*Признак Лобачевского-Коши:* $\boxed{a_n \geqslant 0 \quad \{a_n\}}$
*Если* $\alpha < 0 : a_n \nrightarrow 0 \quad (a_n \to \infty)$
*Если* $\alpha > 0 : f(x) = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

$$f'(x) = -(x^\alpha (\ln x)^\beta)^{-2} \cdot \left(\alpha x^{\alpha-1} \cdot (\ln x)^\beta + x^\alpha \cdot \beta (\ln x)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x}\right) = -\boxed{\frac{x^{\alpha-1} \cdot (\ln x)^{\beta-1}}{x^{2\alpha} (\ln x)^{2\beta}}}^{>0} \cdot (\alpha \ln x + \beta) < 0$$

*начиная с* $x = e^{-\beta/\alpha}$
$\{a_n\}$ *убывает с* $n = [e^{-\beta/\alpha}] + 1$ *(То есть это выполняется именно не с начала, а с какого-то члена)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha (\ln 2^n)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha - n} \cdot n^\beta (\ln 2)^\beta} = \frac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2^{\alpha-1})^n}{n^\beta}$$

*(Показательная функция сильнее многочлена)*

$$\alpha < 1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2^{\alpha-1})^n}{n^\beta} \to \infty \ (\neq 0) \to \text{расх.}$$

$$\alpha = 1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta} \quad \beta > 1 \text{ сх.} \quad \Big| \quad \beta \leqslant 1 \text{ расх.}$$

$\alpha > 1 :$

$$\beta \geqslant 0 : \quad \frac{(1/2^{\alpha-1})^n}{n^\beta} \leqslant \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \Big| \quad \sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \text{ Сходящаяся геометрическая прогрессия}$$

$$\beta < 0 : \quad \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n n^{-\beta} \leqslant \left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right)^n \text{ Сх. геом. прогрессия}$$

$$\alpha = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\beta} :$$

$$\beta \leqslant 0 : \quad a_n \nrightarrow 0 \text{ расх.}$$

$$\beta > 0 \quad \frac{1}{(\ln n)^\beta} > \frac{1}{n} \ (\forall n \geqslant n_0) \implies \text{расх.}$$

*Итого:*

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha > 1 \text{ сх.} \\ \alpha < 1 \text{ расх.} \\ \alpha = 1 \implies \begin{cases} \beta > 1 \text{ сх.} \\ \beta \leqslant 1 \text{ расх.} \end{cases} \end{array}}$$

**Задача 11.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n!)}$$

$$\frac{1}{\ln n!}=\frac{1}{\ln 1+\ldots+\ln n}\geqslant\frac{1}{n\ln n}$$

$$\sum\frac{1}{n\ln n}\ \textit{расх.}$$

*Ряд Бертрана (Также можно сделать через формулу Стирлинга, но там тоже сводится к Ряду Бертрана). По первому признаку сравнения* $\sum$ *расх.*

$$\frac{1}{\ln n!}\sim\frac{1}{\ln(\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n})}=\frac{1}{n\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}}\sim\frac{1}{n\ln n}$$

*Расходится по второму признаку сравнения*

**Задача 12.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\sin\frac{1}{n}}$$

*Эквивалентность*

$$\frac{1}{\ln^2\sin\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2(\frac{1}{n}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right))}=\frac{1}{\ln^2(\frac{1}{n}(1+\bar{o}(1))}=\frac{1}{(\ln\frac{1}{n}+\ln(1+\bar{o}(1)))^2}=$$
$$=\frac{1}{\ln^2 n-2\ln n\cdot\ln(1+\bar{o}(1))+\ln(1+\bar{o}(1))^2}\sim\frac{1}{\ln^2 n}$$

*Ряд Бертрана с* $\alpha=0\quad\beta=2\implies$ *расх.*
*По второму признаку сравнения* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\sin(1/n)}$ *расх.*
*Второе решение: сравнить с гармоническим рядом* $n\geqslant n_0\,\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$

**Задача 13.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1)$$

*Эквивалентность*

$$n^{n^{\alpha}}-1=e^{n^{\alpha}\ln n}-1\overset{\alpha\leq 0}{=}1+n^{\alpha}\ln n+\bar{o}(n^{\alpha}\ln n)-1=n^{\alpha}\ln n+\bar{o}(n^{\alpha}\ln n)\sim n^{\alpha}\ln n>0$$

*Второе равенство выполняется*
*При* $\alpha<0\quad n^{\alpha}\ln n\to 0$
*При* $\alpha\geqslant 0\quad n^{\alpha}\ln n\to\infty\implies a_n\nrightarrow 0$ *ряд расх. (По необходимому признаку)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\ln n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}(\ln n)^{-1}}$$

*При* $\alpha\geqslant -1$ *расх.*
*При* $\alpha<-1$ *сх.*

**Задача 14.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}$$

$$\left(\frac{2^{\sqrt{n}}n^3}{3^{\sqrt{n}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}}\cdot n^3\to 0\implies\forall n\geqslant n_0\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}}\cdot n^3\leqslant 1\implies\frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}\leqslant\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}\overset{n\geqslant n_0}{\leqslant}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\overset{n\geqslant n_1>n_0}{\leqslant}\frac{1}{n^2}$$

*По первому признаку сравнения, так как последний ряд сходится, то и исходный сходится*

Исследовать ряд на сходимость (признаки Даламбера и Коши):

Признак Даламбера:

$$\boxed{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \to \begin{cases} q < 1 \implies \sum a_n \textit{ сх.} \\ q > 1 \implies \sum a_n \textit{ расх.} \end{cases}}$$

Признак Коши:

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n} = q \to \begin{cases} q < 1 \implies \sum a_n \textit{ сх.} \\ q > 1 \implies \sum a_n \textit{ расх.} \end{cases}}$$

**Задача 15.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)!! \cdot n!}{(2n-1)!! \cdot (n+1)!} = \frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2(>1)$$

$\implies$ *По признаку Даламбера исходный ряд расходится*

**Задача 16.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$$

$$1.\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} < 1$$

$\implies$ *По признаку Даламбера исходный ряд сходится*

$$2.\ \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n! \cdot 3^n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!} \cdot 3} \sim \frac{n}{3 \cdot \sqrt[2n]{2\pi n} \cdot n \cdot e^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e}{3} < 1$$

$\implies$ *По признаку Коши исходный ряд сходится*

$$3.\ \frac{n^n}{n! \cdot 3^n} \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot 3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^n, \sum \left(\frac{e}{3}\right)^n$$

$\implies$ *Сходится как геометрическая прогрессия*

**Задача 17.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}} = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n^2+6}\right)^{n^2+6-6} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1$$

$\implies$ *По признаку Коши исходный ряд сходится*

*Признак Гаусса:*

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right), \qquad \begin{cases} p > 1 \textit{ сх.} \\ p \leqslant 1 \textit{ расх.} \end{cases}}$$

**Задача 18.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2(n+1)-1)!!}{(2(n+1))!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!! \cdot (2n)!!}{(2n+2)!! \cdot (2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 \to 1$$

$$\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)\left(1 - \frac{2}{n} + \underline{O}\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \underline{O}\frac{1}{n^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + \underline{O}\frac{1}{n^2}, p = 1 \text{ По признаку Гаусса исходный ряд рассходится}$$

**Задача 19.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3(n+1)-4)}{3^{(n+1)}\cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n\cdot n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)} = \frac{3n-1}{3n+3} \to 1$$

$$\frac{1-\frac{1}{3n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{1}{3n}-\frac{1}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{4/3}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$p = 4/3 > 1 \implies$ *ряд сходится по признаку Гаусса*

# 3. [22.09.23] Семинар №3

Исследовать ряд на сходимость (признак Вейерштрасса):

$$|a_n| \leqslant b_n \quad \sum b_n \text{ сх.} \implies \sum a_n \text{ сх.}$$

**Задача 20.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3+2}}$$

$$\sqrt{n^3+2} \sim n^{\frac{3}{2}}$$

$$\left|\frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3+2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\implies$ *Исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса*

**Задача 21.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+3^n)\sin n}{2^n+n^2\cdot 3^n}$$

$$\left|\frac{(2^n+3^n)\sin n}{2^n+n^2\cdot 3^n}\right| \leqslant \frac{2^n+3^n}{2^n+n^2\cdot 3^n} \leqslant \frac{3^n+3^n}{n^2\cdot 3^n} = \frac{2}{n^2}$$

$\implies$ *Исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса*

Исследовать ряд на сходимость (признак Лейбница (Частный случай признака Дирихле)): Для знакочередующихся рядов:

$$a_n \geqslant 0 \ \{a_n\} \text{ убывает и } a_n \to 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ сх.}$$

**Задача 22.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}$$

$$\left|\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}\right| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \frac{2}{n} \implies \text{расх.}$$

$$a_n = \frac{2n-1}{n^2+3n+5} > 0, a_n \to 0, n \to \infty$$

$$\left(\frac{2x-1}{x^2+3x+5}\right)' = \frac{2(x^2+3x+5)-(2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2x+13}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \ \text{ начиная с некоторого момента}$$

$$\implies a_n \searrow, n \geqslant n_0$$

$\implies$ *Сходится по признаку Лейбница*

**Задача 23.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

$$|a_n| \sim \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n}} \implies .$$

$$1)\ b_n = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \to 0, n \to \infty$$

$$2)\ \left(\frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}\right)' = \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{2x+3} - \ln^2 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot 2}{2x+3} = \frac{2\ln x(2x+3)-\ln^2 x\cdot x}{x(2x+3)^{3/2}} =$$

$$= (4x+6-x\ln x)\cdot \boxed{\frac{\ln x}{x(2x+3)^{3/2}}}^{\geqslant 0\ (x\geqslant 1)}$$

$$g=(4x+6-x\ln x) \implies g'=(4x+6-x\ln x)'=4-\ln x - x\frac{1}{x}=3-\ln x<0, x>e^3 \implies g \quad x>e^3$$

$$b_n \searrow \text{Начиная с некоторого момента } n\geqslant n_0$$

$\implies$ *По признаку Лейбница ряд сходится*

$$\log_a n \ll \overset{k>0}{n^k} \ll \overset{a>1}{a^n} \ll n! \ll n^n$$

Исследовать ряд на сходимость (признаки Дирихле и Абеля):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M \\ 2)\ b_n \text{ - монотон.} \\ 3)\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \implies \sum a_n b_n cx.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum a_n cx. \\ 2)\ b_n - . \\ 3)\ b_n \leqslant M \end{array}\right\} \implies \sum a_n b_n cx.$$

Доказательство через умножение на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и Телескопическую сумму или через геометрическую прогресссию и комплексные вещи $\alpha \neq 2\pi m, m\in\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\alpha n) = \frac{\sin\frac{(N+1)\alpha}{2}\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \left|\ \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\alpha n)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}\right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\alpha n) = \frac{\cos\frac{(N+1)\alpha}{2}\cos\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad \left|\ \left|\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\alpha n)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}\right.$$

**Задача 24.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{2}n}{2n-5}$$

$$\left|\frac{\cos\sqrt{2}n}{2n-5}\right| \overset{n\geqslant 3}{\leqslant} \frac{1}{2n-5} \sim \frac{1}{2n} - \text{ расходится}$$

$$a_n=\cos\sqrt{2}n, b_n=\frac{1}{2n-5}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\cos\sqrt{2}n\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} \text{ - огр.} \\ 2) \frac{1}{2n-5} - \text{ монот. } (n\geqslant 3) \\ 3) \frac{1}{2n-5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \implies$$

*Исходный ряд сходится по признаку Дирихле*

**Задача 25.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin 4n}{\ln n - \ln\ln n}$$

$$a_n=\sin 4n, b_n=\frac{1}{\ln n-\ln\ln n}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|\sum_{n=2}^{N}\sin 4n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\sin 4n - \sin 4\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{N}\sin 4n\right| + |\sin 4| \leqslant \frac{1}{\sin 2} + |\sin 4| - \text{ огр.} \\ 2) (\ln x - \ln\ln x)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x\ln x} > 0, x\geqslant e \implies b_n \searrow \text{ монот. при } n\geqslant 3 \\ 3) \frac{1}{\ln n - \ln\ln n} \to 0, n\to\infty \end{array}\right\} \implies$$

*Исходный ряд сходится по признаку Дирихле*

**Задача 26.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} \cos \frac{1}{n}$$

$$\cos \frac{1}{n} \nearrow \text{ и огр.}$$

$$\sin(n+2) = \sin 2 \cos n + \sin n \cos 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} = \sin 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}}_{\text{Сх. по Дирихле}} + \cos 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}}_{\text{Сх. по Дирихле}} \implies \text{Сходится как сумма сходящихся}$$

$$\left(\cos \frac{1}{x}\right)' = -\sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} \text{ сход.} \\ 2) \left|\cos \frac{1}{n} \leqslant 1\right| \\ 3) \cos \frac{1}{n} - \text{ монот.} \end{array}\right\} \implies \text{Исходный ряд сходится по признаку Абеля}$$

**Задача 27.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \sim \frac{1}{n} \;\Big|\; (-1)^n \cos 3n = \cos(3n + \pi n) = \cos((3+\pi)n)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\sum_{n=1}^{N} \cos((3+\pi)n)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{3+\pi}{2}|} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \to 0, \text{ монот. убывает} \end{array}\right\} \implies \text{Исходный ряд сходится по признаку Дирихле}$$

**Задача 28.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctan e^n$$

$$\left.\begin{array}{l} \arctan e^n \nearrow \text{ и огр } \frac{\pi}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ сходится по признаку Лейбница} \end{array}\right\} \implies \text{Исходный ряд сходится по признаку Абеля}$$

# 4. [29.09.23] Семинар №4

Исследовать ряд на условную/абсолютную сходимость:

**Задача 29.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \neq 0 \text{ при } p \leqslant 0 \implies \text{исходный ряд расх.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n^p}(p>0) \\ \text{монот.} \end{array}\right\} \implies \text{при } p>0 \text{ сход. по признаку Лейбница}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

*При $p > 1$ ряд сходится, $p \leqslant 1$ ряд расходится*

*Ответ: $p \leqslant 0$ ряд расходится, $0 < p \leqslant 1$ ряд сходится условно, $p > 1$ ряд сходится абсолютно*

**Задача 30.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

*1) Признак Дирихле:*

$$\left.\begin{array}{l} |\sum_{n=1}^{\infty} \sin n| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}|} - \text{огр.} \\ \frac{1}{n^p} - \text{монот.} \\ \frac{1}{n^p} \to 0 \text{ при } p>0 \end{array}\right\} \implies \text{сх.}$$

*2) Необходимый признак при $p \leqslant 0$:*

$$\frac{\sin n}{n^p} \nrightarrow 0 \implies \text{ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^p}$$

*3)*

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}, \quad \frac{1}{n^p} \text{ сх. при } p>1 \implies \sum \frac{|\sin n|}{n^p} \text{ сх. по первому признаку сравнения}$$

*4)*

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \geqslant \frac{\sin^2 n}{n^p} = \frac{\frac{1}{2}}{n^p} - \frac{\frac{1}{2}\cos 2n}{n^p}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{n^p} - p>1 \text{ сх.}, \ p \leqslant 1 \text{ расх.} \ \Bigg| \ \frac{\frac{1}{2}\cos 2n}{n^p} - \text{По Дирихле } p>0 \text{ сх.}, \ \text{По необ. усл. } p \leqslant 0 \text{ расх.}$$

*При $0 < p \leqslant 1$:*

$$\sum \left( \frac{\frac{1}{2}}{n^p} - \frac{\frac{1}{2}\cos 2n}{n^p} \right) \text{ расх. (как сумма сх. и расх.)} \implies \text{По признаку сравнения} \sum \frac{|\sin n|}{n^p} \text{ расх.}$$

*5) При $p < 0$:*

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \nrightarrow 0 \implies \text{ряд расх.}$$

Ответ: $p \leqslant 0$ ряд расх.
$0 < p \leqslant 1$ ряд сх.усл.
$p > 1$ ряд сх. абс.

**Задача 31.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+2})$$

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+2}) = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^2}+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{n^2}\right)^2+\bar{0}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) =$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\bar{o}(x^2)\ \Bigg|\ \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\bar{o}(x^3)$$

$$= (-1)^n\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{2n^3}+\bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}_{\to 0} = (-1)^n\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{2n^3}+\bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{(\pi/n)^3}{3!}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n\pi}{n}}_{\text{Сх. по пр. Лейбница}} + \underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\text{Сх. по пр. сравнения}} \implies \text{Сходится как сумма сходящихся}$$

$$|\sin(\pi\sqrt{n^2+2})| = \left|\frac{(-1)^n\pi}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| \overset{n\geqslant n_0}{=} \frac{\pi}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \text{ Расходится как сумма расх. и сх.}$$

*Ответ: Ряд сходится условно*

**Задача 32.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

$$\ln\left(1+\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}}_{\to 0}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{1/n^{4/3}}{2}+\bar{o}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}}_{\text{Сх. по пр. Лейбница}} + \underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\text{Сх. по пр. сравнения}}$$

$\implies$ *Сходится как сумма сходящихся*

$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}\right)\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}+\underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{=\bar{o}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)}\right| \overset{n\geqslant n_0}{=} \underbrace{\frac{1}{n^{2/3}}}_{\text{Расх.}}+\underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\text{Сх.}}$$

$\implies$ *Расходится как сумма сходящегося и расходящегося*

*Ответ: Ряд сходится условно*

**Задача 33.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n-\sin n}$$

$$\frac{\cos n}{n-\sin n} = \frac{\cos n}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sin n}{n}} = \frac{\cos n}{n}\left(1-\frac{\sin n}{n}\right)^{-1} = \frac{\cos n}{n}\left(1+\frac{\sin n}{n}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos n}{n}+\frac{\sin n\cos n}{n^2}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\frac{\cos n}{n}}_{\text{Сх. по пр. Дирихле}} + \underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Сх. по пр. сравнения}}$$

$\implies$ *Сходится как сумма сходящихся*

$$\left|\frac{\cos n}{n-\sin n}\right| = \left|\frac{\cos n}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = \left|\frac{\cos n}{n}\right|\cdot\left|1+\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \overset{n\geqslant n_0}{=} \frac{|\cos n|}{n}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{|\cos n|}{n}}_{\text{Расх.}}+\underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Сх.}} - \text{ Расходится как сумма сх. и расх.}$$

$$\frac{|\cos n|}{n} \geqslant \frac{\cos^2 n}{n} = \underbrace{\frac{1/2}{n}}_{\text{Расх.}}+\underbrace{\frac{1/2\cdot\cos 2n}{n}}_{\text{Сх. по Дирихле}}$$

*Ответ: Ряд сходится условно*

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сх., если } \exists \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} p_n \neq 0$$

*Если* $\lim = 0$*, то расходится к нулю, иначе расходится*

*Необходимое условие:*

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \textit{ сх.} \implies p_N = \frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{\prod_{n=1}^{N-1} p_n} \to \frac{p}{p} = 1$$

$$\forall N \geqslant N_0 \; p_N > 0 \quad \prod_{n=N_0}^{N} p_n = \prod_{n=N_0}^{N} e^{\ln p_n} = e^{\sum_{n=N_0}^{N} \ln p_n} \iff \sum_{n=N_0}^{N} \ln p_n \textit{ сх./расх.}$$

$$\prod p_n \text{ сх. абс./усл.} \iff \sum_{n=N_0}^{N} \ln p_n \text{ сх. абс./усл.}$$

Вычислить:

**Задача 34.**

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

**Задача 35.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$$

Исследовать ряд на условную/абсолютную сходимость:

**Задача 36.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} \overset{\text{сх.}}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \ln n^{\frac{(-1)^n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\ln n$$

*Сходится по признаку Лейбница, так как* $\frac{\ln n}{n} \to 0$ *и* $(\frac{\ln x}{x})' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ *начиная с некоторого значения* $x \geqslant 3$*. Итак функция монотонно убывает и стремится к 0.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n \ln n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n} - \text{Расходится как Ряд Бертрана } \alpha = 1, \beta = -1$$

*Ответ: Ряд сходится условно*

**Задача 37.**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n} \overset{\text{сх.}}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n}$$

$$\ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n} = \ln\frac{1}{1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}} = \ln\left(1+\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\to 0}\right)^{-1} = \ln\left(1 - \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\sin^2 n}{n} - \frac{\sin^3 n}{n^{3/2}} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\to 0}\right) =$$

$$= -\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\sin^2 n}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 n}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = -\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{1/2\sin^2 n}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\text{Сх. по пр.Дирихле}} + \underbrace{\frac{1/4}{n}}_{\text{Расх.}} - \underbrace{\frac{1/4\cos 2n}{n}}_{\text{Сх. по пр.Дирихле}} + \underbrace{\underline{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{Сх. по пр.сравнения}} \implies \text{Расходится как сумма расх. и сх.}$$

*Ответ: Ряд расходится*

# 5. [06.10.23] Семинар №5

Произведение рядов по Коши:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$$

Найти произведение рядов в смысле Коши:

**Задача 38.** *a)*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!(2n-2k)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \implies 2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \overset{\text{ниже}}{=} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!}$$

*Берём по нечётным $k$ от 1 до $2n+1$*

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$$

$$\underbrace{C_n^1 + C_n^3 + \ldots}_{2^n/2} = \underbrace{C_n^0 + C_n^2 + \ldots}_{2^n/2}$$

*Ответ:* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}$

*b)*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n = a_1b_n + \ldots + a_nb_1 = \sum_{k=1}^{n} a_kb_{n-k+1}$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!} \cdot \frac{3^{n-k+1}}{(n-k+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k \overset{\text{ниже}}{=} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}(2^{n+1} - 2)$$

$$\underbrace{C_{n+1}^0}_{=1} + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^1 \underbrace{C_{n+1}^{n+1}}_{=1} = 2^{n+1}$$

*Ответ:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}(2^{n+1} - 2)$

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_{D} |f_n - f| = 0$$

Исследовать функциональную последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве D (по определению):

**Задача 39.**

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, D = [-1, 1]$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sin 0 = 0$$

$$\sup_{[-1,1]} \left|\sin \frac{x}{n} - 0\right| = \sup_{[0,1]} \sin \frac{x}{n} = \sin \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies \text{сх. равн.}$$

**Задача 40.**

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, D = [0,1]$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) = 0$$

$$\sup_{[0,1]}|x^n - x^{2n} - 0| = \sup_{[0,1]}(x^n - x^{2n}) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0 \implies \text{сх. неравномерно}$$

$$(x^n - x^{2n})' = \dots \quad x_0 = 1/\sqrt[n]{2} - \text{ т. max.}$$

**Задача 41.**

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, D = [1,+\infty]$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1+n^2x^2} = \left[\frac{n}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2nx}{n^2x^2}}{\frac{1}{n^2x^2}+1} = 0$$
$$\sup_{[1,+\infty]}\left|\frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \sup_{[1,+\infty]}\frac{2nx}{1+n^2x^2} = \frac{2n}{1+n^2} \to 0 \implies \text{ сх. равн.}$$
$$\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{2n\cdot(1+n^2x^2) - 2nx\cdot n^2\cdot 2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n - \text{ непр. } [a,b) \\ f_n \xrightarrow{[a,b)} f \\ \text{Но } f \text{ имеет разрыв в т. } a \\ (\text{Непр. на } (a,b)) \end{array}\right\} \implies f_n \overset{(a,b)}{\not\rightrightarrows} f$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n - \text{ непр. } [a,b) \\ f_n \xrightarrow{[a,b)} f \\ \{f_n(a)\} \text{ расх.} \end{array}\right\} \implies f_n \overset{(a,b)}{\not\rightrightarrows} f$$

$$f_n \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f \implies f_n \overset{[a,b)}{\rightrightarrows} f$$

Исследовать функциональную последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве D (граничная точка и всякие свойства):

**Задача 42.**

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, D_1 = [0,1], D_2 = (0,1]$$
$$D_1 : f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 0, x\in(0,1] \\ 1, x = 0 \end{cases}$$
$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) - \text{непр. на } D_1 \\ f - \text{ разр.} \end{array}\right\} \overset{\text{Утв. 1}}{\implies} f_n \overset{D_1}{\not\rightrightarrows} f$$
$$D_2 : \left.\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ [0,1] \implies f - \text{ разрыв.} \end{array}\right\} \overset{\text{Утв. 1}}{\implies} f_n \overset{D_2}{\not\rightrightarrows} f$$

**Задача 43.**

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2},\ D = (0,+\infty)$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{n^2}+x^2} = \frac{1}{x^2}$$
$$\left.\begin{array}{l} f_n - \text{непр. на } [0,+\infty) \\ \{f_n(0) = \frac{n^2}{4}\} \text{ расх.} \end{array}\right\} \overset{\text{Утв. 2}}{\implies} f_n \overset{D}{\not\rightrightarrows} f$$

Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции? Рассмотреть пример:

**Задача 44.**

$$\text{Функция Дирихле: } f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x), \text{ где } \psi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, \text{ если } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\psi(x)}_{\text{огр.}} = 0 - \text{ непр.}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\psi(x) - 0 \right| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\psi(x) = \frac{1}{n} \to 0 \implies \text{ сх. равн.}$$

Показать, что последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но:

**Задача 45.**

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'\Big|_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1)$$

$$f(x) = 0 \quad \left(\frac{1}{n} \to 0, |\arctan x^n| < \frac{\pi}{n}\right)$$

$$0 \leqslant \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\arctan x^n - 0 \right| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \to 0 \implies \text{ сх. равн.}$$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \cdot nx^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} |x| > 1 \implies \lim = 0 \\ |x| < 1 \implies \lim = 0 \\ x = 1 \implies 1/2 \\ x = -1 \implies \text{расх.} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(1) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} f_n - \text{ интегр. на } [a,b] \\ f_n \rightrightarrows f \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} f - \text{ интегр. на } [a,b] \\ \text{И } \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \end{cases}$$

Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0,1]$, однако:

**Задача 46.**

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

$f(x) = 0$

$$x \in (0,1)\ n(1-x)^n \to 0$$
$$x = 1 \to f_n \equiv 0 \to 0$$
$$x = 0 \to f_n \equiv 0 \to 0$$

$$\sup_{[0,1]} |nx(1-x)^n_{-0}| = \sup_{[0,1]} nx(1-x)^n \overset{\text{ниже}}{=} \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\to 1}$$

$$\to e^{-1} \neq 0 \implies \text{ сх. неравномерно}$$

$$(nx(1-x)^n)' = n(1-x)^n + nx \cdot n(1-x)^{n-1} \cdot (-1) = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) = 0 \implies 1-(n+1) = 0 \implies x = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \lim \int_0^1 nx(1-x)^n dx = [1-x=y, -dx=dy] = \lim \int_1^0 n(1-y)y^n(-dy) =$$

$$= \lim \int_0^1 n(y^n - y^{n+1})dy = \lim n \left( \frac{y^{n+1}}{n+1} - \frac{y^{n+2}}{n+2} \right)\bigg|_0^1 = \lim n \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim \left( \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} \right) = 0$$

При каких значениях параметра $\alpha$ последовательность $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$

a) сходится на отрезке [0, 1]

b) равномерно сходится на [0, 1]

c) возможен предельный переход под знаком интеграла $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

# 6. [13.10.23] Семинар №6

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ сх. поточечно } S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \to S$$

$$\text{сх. равномерно } S_N \rightrightarrows S$$

$$\text{Признак Вейерштрасса: } |a_n(x)| \leqslant b_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх. } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сх. равномерно}$$

Признак Дирихле:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ |\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)| \leqslant M - \underset{\text{(M не зависит от x)}}{\text{равн. огр.}} \\ 2)\ b_n(x) - \text{ монот. по } n\ (\forall x) \\ 3)\ b_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0 \end{array}\right\} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \text{ сх. равн. на } D$$

Признак Абеля:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сх.равн.} \\ 2)\ b_n(x) - \text{ монот. по } n\ (\forall x) \\ 3)\ |b_n(x)| \leqslant M \quad \underset{\text{(M не зависит от x)}}{\text{равн. огр.}} \end{array}\right\} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \text{ сх. равн. на } D$$

$$\text{Критерий Коши: } \sum a_n(x) \text{ сх. равномерно на } D \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N \ \ \forall p \geqslant 1 \ \ \forall x \in D \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n(x) \right| < \varepsilon$$

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (признак Вейерштрасса):

**Задача 47.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + nx + n^2}, D = (0, +\infty)$$

$$\left| \frac{1}{\underbrace{x^2 + nx}_{>0} + n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \ \sum \frac{1}{n^2} \text{ сх.}$$

$\underset{\text{Пр.Вейер.}}{\implies}$ *Исходный ряд сходится равномерно.*

**Задача 48.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{1 + n^9 x^2}, D = \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\sin(nx)}{1 + n^9 x^2} \right| \leqslant \frac{1}{1 + n^9 x^2} \quad [x = 0] \implies \text{расх.}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}} + \boxed{|\sin x| \leqslant |x|} \qquad \left| \frac{\sin(nx)}{1 + n^9 x^2} \right| \leqslant \frac{|nx|}{2\sqrt{n^9 x^2}} = \frac{n|x|}{2n^{9/2}|x|} = \frac{1}{2n^{7/2}}$$

$$\sum \frac{1}{2n^{7/2}} \text{ сх. } (7/2 > 1) \underset{\text{Пр.Вейер.}}{\implies} \text{Исходный ряд сх. равномерно}$$

Метод Граничной точки:

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underset{\text{сх.равн.}}{f_n(x)}\ ,\ x \in (a,b) \\ f_n \xrightarrow[x\to a^+]{} c_n \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a^+} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ расходится $\implies \sum f_n(x)$ не сходится равномерно на $(a,b)$

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (граничная точка):

**Задача 49.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ D = (0,1)$$

*Если бы ряд сходился равномерно, то* $\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *но он расходится* $[\frac{x^n}{n} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{n}] \implies$ *Ряд сходится неравномерно.*

**Задача 50.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n \ln n}, D = (0,\pi)$$

$$x = 0 : \sum \frac{1}{n \ln n} - \text{ расх.(ряд Бертрана } \alpha = 1, \beta = 1) \implies \text{Исходный ряд сх. неравномерно}$$

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (признаки Дирихле и Абеля):

**Задача 51.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, D = (\delta, 2\pi - \delta), \delta \in (0,\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|\sum\limits_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \\ 2)\ \frac{1}{n} - \text{ монот.} \\ 3)\ \frac{1}{n} \rightrightarrows 0, n \to \infty \end{array}\right\} \underset{\text{Пр.Дирихле}}{\implies} \text{Исходный ряд сходится равномерно}$$

**Задача 52.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}, D = (0,+\infty)$$

$$a_n(x) = \sin x \cdot \sin(nx), b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$$

$$1)\ \left|\sum_{n=1}^{N} \sin x \cdot \sin(nx)\right| = |\sin x| \cdot \left|\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)\right| \leqslant |\sin x| \cdot \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right| \leqslant 2$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt{n+x}} - \text{монот. по } n \left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} > \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}\right)$$

$$3)\ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \rightrightarrows 0, n \to \infty$$

$$\sup_{(0,+\infty)} \left|\frac{1}{\sqrt{n+x}} - 0\right| = \sup_{(0,+\infty)} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty$$

$\underset{\text{Пр.Дирихле}}{\implies}$ *Исходный ряд сходится равномерно на* $D$.

**Задача 53.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \arctan(nx), D = \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ \text{ сх.равн.(сх. по Дирихле)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(не зависит от x)} \\ 2)\ \arctan(nx) - \text{ монот. по } n \\ 3)\ |\arctan(nx)| \leqslant \pi/2 - \text{ равн. огр.} \end{array}\right\} \underset{\text{Пр.Абеля}}{\Longrightarrow} \text{Исходный ряд сходится равномерно}$$

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (Критерий Коши):

**Задача 54.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n},\ D = (0, 2\pi)$$

*(Можно ли поставить такой x, чтобы ряд расходился)*

*Отрицание Критерия Коши:*

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists p > 1\ \exists x \in D\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \geqslant \varepsilon$$

$$\left|\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n+2)x)}{n+2} + \ldots + \frac{\sin((n+p)x)}{n+p}\right| \qquad x = \frac{1}{n+p} \implies \sin\frac{n+k}{n+p} \in I$$

$$\left|\frac{\sin\frac{n+1}{n+p}}{n+1} + \frac{\sin\frac{n+2}{n+p}}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 1}{n+p}\right| = \frac{\sin\frac{n+1}{n+p}}{n+1} + \frac{\sin\frac{n+2}{n+p}}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 1}{n+p} = \frac{\sin\frac{n+1}{2n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{n+2}{2n}}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 1}{2n}$$

$$\geqslant n \cdot \frac{\sin\frac{n+1}{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\sin\frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} \qquad \varepsilon = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}$$

$\implies$ *Ряд сходится неравномерно*

Вычислить:

**Задача 55.**

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

*Проверим есть ли равномерная сходимость на* $(0, 1)$

$$\left|\frac{1}{2^n \cdot n^x}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},\ \sum \frac{1}{2^n} \text{ сх. } \underset{\text{Пр.Вейер.}}{\Longrightarrow} \text{ сх. равномерно}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 1^-} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

$$\text{Но: } \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \ldots = \lim_{N\to\infty} (x - x^{N+1}) = x \qquad \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

Законно ли почленное дифференцирование ряда:

**Задача 56.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}$$

*При фиксированном* $x_0$ *ряд знакопостоянный* $\implies \arctan\frac{x_0}{n^2} \sim \frac{x_0}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{n^2}$ *сх.* $\implies$ *ряд сходится на* $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{n^2})^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$$

$$\left|\frac{n^2}{n^4+x^2}\right| \leqslant \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}, \sum_{\text{сх.}} \frac{1}{n^2} \overset{\text{Пр.Вейер.}}{\Longrightarrow} \text{сх. равномерно}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum \arctan \frac{x}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$$

*На любом отрезре ряд сходится равномерно, но на открытом множестве бывает всякое*

# 7. [20.10.23] Семинар №7

Найти множество сходимости ряда/ При каких x ряд сходится:

**Задача 57.**

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\cos x)^n}{n^3}$$

$$\begin{aligned}&1)\ |2\cos x|>1\quad a_n(x)\nrightarrow 0 \implies \text{ряд расход. (необх. усл.)}\\&2)\ |2\cos x|\leqslant 1\quad |a_n|\leqslant\frac{1}{n^3},\ \sum\frac{1}{n^3}\implies \text{ряд сх. (Пр. сравнения/Пр. Вейерштр.)}\end{aligned}$$

$$|\cos x|\leqslant\frac{1}{2}\implies\left[\frac{\pi}{3}+\pi k,\frac{2\pi}{3}+\pi k\right],k\in\mathbb{Z}$$

$$b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n\ln^x n}$$

*Признак Дирихле:*

$$\left.\begin{array}{l}\left|\sum\limits_{n=1}^{N}\cos(nx)\right|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\\(y\ln^x y)'_y=1\cdot\ln^x y+y\cdot x(\ln y)^{x-1}\cdot\frac{1}{y}=\ln^x y+x(\ln y)^{x-1}=(\ln y)^{x-1}(\ln y+x)\implies\frac{1}{n\ln^x n}\searrow[n\geqslant n_0]\\\frac{1}{n\ln^x n}\to 0,n\to\infty\end{array}\right\}$$

$\implies$ *Ряд сходится* $(x\neq 2\pi k)$

$$\text{При } x=2\pi k:\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{2\pi k}}\quad\begin{array}{l}\nearrow k\leqslant 0\ \ \text{ряд расходится}\\\searrow k\geqslant 1\ \ \text{ряд сходится}\end{array}$$

*Ряд сходится везде кроме* $\{2\pi k,k\in\mathbb{Z}/\mathbb{N}\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\qquad\text{Формула Коши-Адамара: }\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

Найти множество сходимости степенного ряда:

**Задача 58.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^p}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p}=1\implies R=1\implies(-1,1)-\text{ интервал сходимости}$$

$$x=1:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{cases}p>1\text{ сх.}\\p\leqslant 1\text{ расх.}\end{cases}$$

$$x=-1:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\quad\begin{cases}p>0\text{ сх. по пр.Лейбница}\\p\leqslant 0\ \ a_n\nrightarrow 0\implies\ \text{расх.}\end{cases}$$

*Ответ:*

$$\begin{aligned}p\leqslant 0&\implies(-1,1)\\0<p\leqslant 1&\implies[-1,1)\\p>1&\implies[-1,1]\end{aligned}$$

**Задача 59.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}x^n$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\implies R=+\infty$$

*Ответ:* $(-\infty,+\infty)$

**Задача 60.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^{3n}}{5^n\sqrt[3]{n^2+1}}$$

$$a_n\neq\frac{(-1)^n}{5^n\sqrt[3]{n^2+1}}=a_{3n},\;\; a_{3n+1}=a_{3n+2}=0$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{\frac{1}{5^n\sqrt[3]{n^2+1}}}$$

**Задача 61.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}(x+1)^{2n}$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\frac{n^{n+1}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[2n]{n!}}$$

*Вычислить сумму ряда:*

**Задача 62.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{n}=1\implies R=1\implies \text{Инт. сх. }(-1,1)$$

$$x=1:\sum n\text{ расх. }(a_n\not\to 0)$$

$$x=-1:\sum n(-1)^n\text{ расх. }(a_n\not\to 0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=0+1+2+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

**Задача 63.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\text{ (Работает ли при x = -1?)}$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1, R=1$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$$

$$S(x)=\int\frac{1}{1-x}dx+C=-\ln|1-x|+C$$

$$x=0\quad \sum 0=0=S(0)=-\ln|1|+C\implies C=0$$

*Ответ:* $-\ln(1-x), x\in(-1,1)$

$$x=-1\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2\implies -\ln(1-x),[-1,1)$$

**Задача 64.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\sum nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$

$$\sum \frac{nx^n}{2^n} = \sum n\left(\frac{x}{2}\right)^n [x=1]$$

*Ответ: 2*

**Задача 65.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)3^n} \left(\text{А что делать, если ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)3^n}?\right)$$

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}, S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

*Итак,* $S''(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\underset{\text{интегр.}}{\Longrightarrow} S'(x) = -\ln|1-x| + C_1$$

$$S'(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{n-1} = 0 = -\ln|1-0| + C_1 \implies C_1 = 0$$

$$\text{Т.е. } S'(x) = -\ln(1-x) \qquad (x \in (-1,1) \implies |1-x| = 1-x)$$

$$\implies S(x) = -\int \ln(1-x)dx + C_2 = (x-1)\ln(1-x) - x + C_2 \implies C_2 = 0$$

$\implies S(x) = (x-1)\ln(1-x) - x$. *И, наконец,* $x = \frac{1}{3} : S(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3} - 1)\ln(1 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

*Ответ:* $-\frac{2}{3}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \cdot (-\ln(1-x))$$

*Итак,*

$$f'(x) = -x\ln(1-x) \implies f(x) = -\int x\ln(1-x)dx + C = -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + C$$

$$f(0) = \sum 0 = 0 =$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{(1/3)^2}{2}\ln(1-\frac{1}{3}) - \frac{(1/3)^2}{2} - \frac{1}{3} - \ln(1-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{18}\ln\frac{2}{3} - \frac{7}{18} - \ln\frac{2}{3} = -\frac{19}{18}\ln\frac{2}{3} - \frac{7}{18}$$

$$\sum \frac{1}{n(n+2)3^n} = 9 \cdot \frac{1}{n(n+2)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 9 \cdot \left(-\frac{19}{18}\ln\frac{2}{3} - \frac{7}{18}\right)$$

Разложить функцию в степенной ряд с центром в точке $x_0$:

**Задача 66.**

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}, x_0 = 0$$

**Задача 67.**

$$f(x) = \ln(4+3x-x^2), x_0 = 2$$

**Задача 68.**

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t}dt, x_0 = 0$$

# 8. [03.11.23] Семинар №8

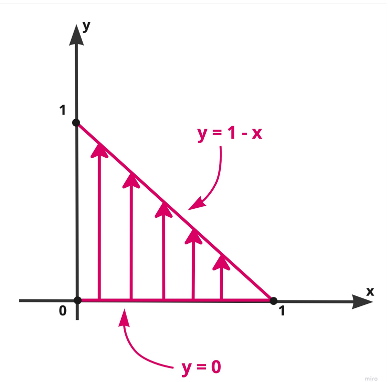
Во всех задачах этого листка f предполагается непрерывной

Привести двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному во всех возможных порядках:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\left(\int f(x,y)dx\right)dy = \int\left(\int f(x,y)dy\right)dx$$

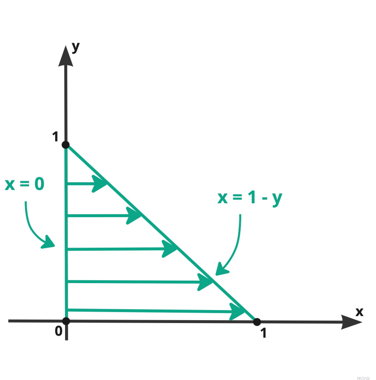
$$\int\limits_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\ dy\right)dx$$

**Задача 69.** *D - замкнутый треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0), (0, 1)*



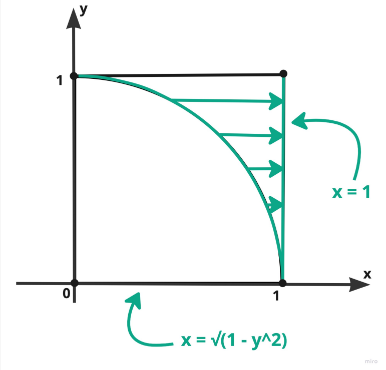

$$\iint\limits_D f\ dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-y} f(x,y)dx\right)dy$$

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f\ dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y} f\ dx$$



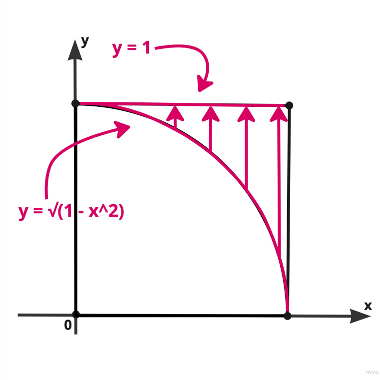

**Задача 70.**

$$D = \{(x,y)|x,y\in[0,1], x^2+y^2\geqslant 1\}$$



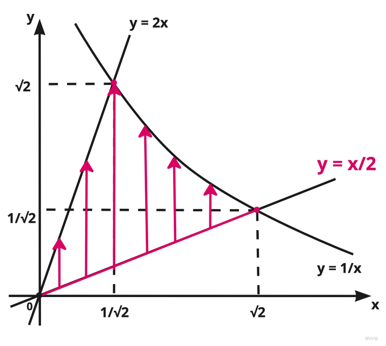

$$\iint\limits_D f\ dxdy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 f\ dx$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f\ dy$$



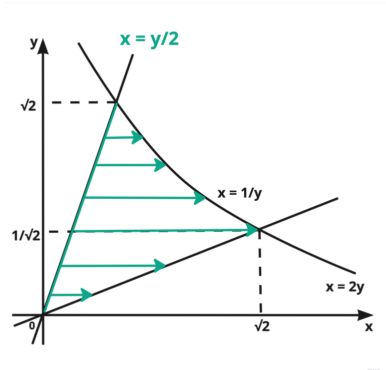

**Задача 71.**

$$D = \{(x,y)|0 < xy \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, y - 2x \leqslant 0, 2y - x \geqslant 0\}$$




$$\iint\limits_D f\ dxdy = \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{x/2}^{2x} f\ dy + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x/2}^{1/x} f\ dy$$

$$\iint\limits_D f\ dxdy = \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{y/2}^{2y} f\ dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y/2}^{1/y} f\ dx$$

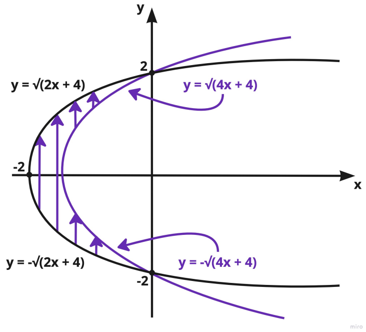



**Задача 72.**

$$D = \{(x,y)|y^2 \leqslant 2x+4, y^2 \geqslant 4x+4\}$$

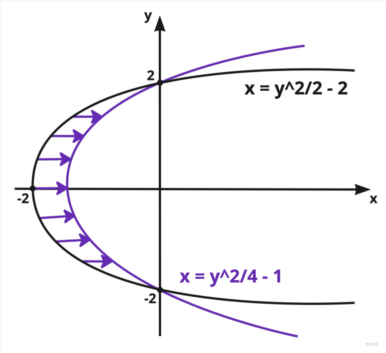
$$\iint f\ dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}-2}^{\frac{y^2}{4}-1} f\ dx$$

$$\iint f\ dxdy = \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f\ dy - \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f\ dy$$




$$\iint f\ dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}-2}^{\frac{y^2}{4}-1} f\ dx$$

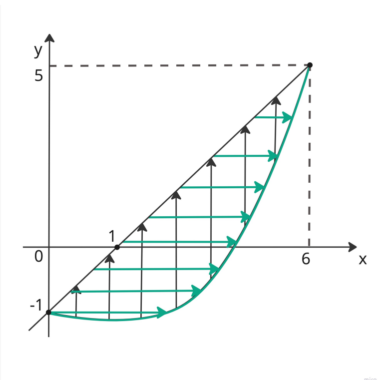
$$\iint f\ dxdy = \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f\ dy - \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f\ dy$$




Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

**Задача 73.**

$$\int\limits_{0}^{6} dx \int\limits_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y)dy = \frac{-1}{5} dy \int\limits_{y+1}^{\sqrt{6y+6}} f\ dx$$



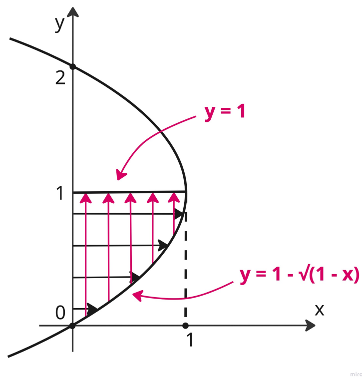

$$y = \frac{x^2}{6} - 1 \iff x^2 = 6y + 6 \implies x = -\sqrt{6y+6}$$

$$y = x - 1 \iff x = y + 1$$

**Задача 74.**

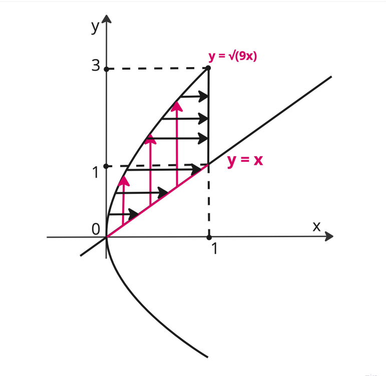
$$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2y-y^2} f(x,y)dx = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x}}^{1} f\ dy$$

$$x = 0$$
$$x = 2y - y^2 = y(2-y)$$
$$y^2 - 2y + x = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 + x - 1 = 0$$
$$(y-1)^2 = 1 - x$$
$$y - 1 = \pm\sqrt{1-x}$$
$$y = 1 \pm \sqrt{1-x}$$




**Задача 75.**

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{9x}} f\ dy$$

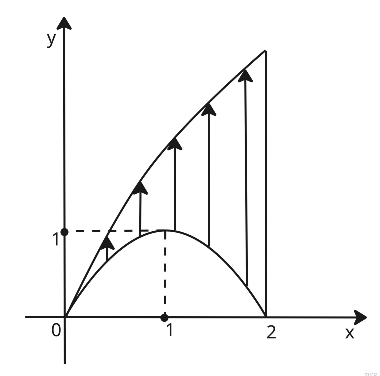



$$x = y^2/9 \quad x = y^2/9$$
$$x = y \quad x = 1$$

**Задача 76.**

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

$$\int\limits_0^{3\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f\ dx - \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\ dx$$




$$y = \sqrt{2x - x^2} \implies y^2 = 2x - x^2$$
$$y^2 + x^2 - 2x = 0$$
$$y^2 + (x-1)^2 = 1$$

т.е.$y = \sqrt{2x-x^2}$ – верхняя половина окружности

с центром $(1,\ 0)$ и радиуса 1

$$(\iff \ (x-1)^2 = 1 - y^2 \qquad x - 1 = \pm\sqrt{1-y^2})$$
$$y = 3\sqrt{x}\ (\iff \ x = y^2/9)$$

Вычислить интеграл:

**Задача 77.**

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1} dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} e^{-x^2+2x+1} dy$$

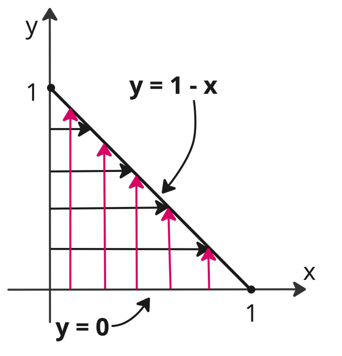
$$1) \int\limits_0^{1-x} e^{-x^2+2x+1} dy = e^{-x^2+2x+1} \cdot \int\limits_0^{1-x} dy = e^{-x^2+2x+1} \cdot y|_0^{1-x} = e^{-x^2+2x+1}(1-x-0)$$

$$2) \int\limits_0^1 e^{-x^2+2x+1}(1-x)dx = \int\limits_0^1 e^{-(x-1)^2+2}(1-x)dx = \begin{bmatrix} (x-1)^2 = y \\ 2(x-1)dx = dy \end{bmatrix} = \int\limits_1^0 e^{-y+2} \frac{dy}{-2} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 e^{2-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}(-e^{2-y})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e)$$

$x = 1 - y$

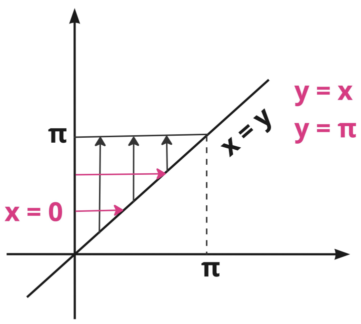
$y = 1 - x$




**Задача 78.**

$$\int\limits_0^\pi x dx \int\limits_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy = \int\limits_0^\pi dy \int\limits_0^y x \cdot \frac{\sin y}{y} dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \int\limits_0^y x\ dx$$

$$1) \int\limits_0^y x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y^2}{2} - 0$$




$$2) \int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y^2}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi y \sin y\ dy \frac{1}{2} \left[ -y\cos y|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos y \cdot 1\ dy \right] =$$

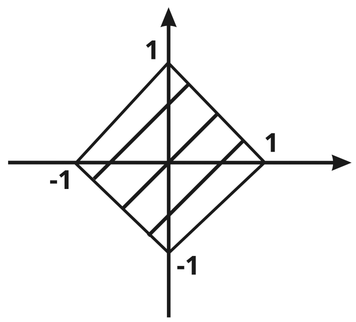
$$= \frac{1}{2}(\pi + \sin y\Big|_0^\pi) = \frac{\pi}{2}$$

**Задача 79.**

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} x^2y^2 dxdy \text{ ( а если под интегралом } x^3y^5\text{?)}$$

*Четная функция на симметричном множестве (Объём под графиком в каждой четверти одинаковый!)*

$$4\iint x^2y^2\ dxdy = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x^2y^2\ dy = 4\int\limits_0^1 x^2 \cdot \frac{(1-x)^3}{3} dx = \ldots = \frac{1}{45}$$




$$\int_0^{1-x} y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1-x}$$

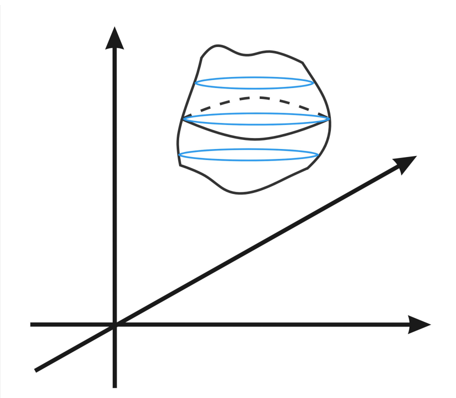
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} x^3 y^5 \ dxdy = 0$$

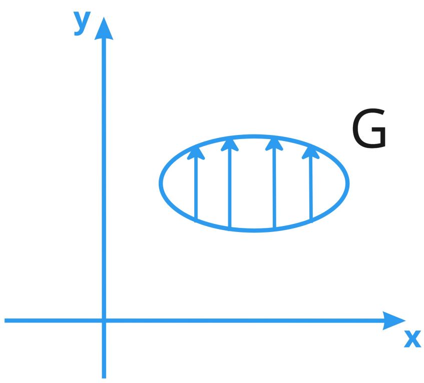
# 9. [10.11.23] Семинар №9

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int dz \int dy \int f dx$$

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} dz \iint\limits_G f dxdy$$

Сечение $z = z_0$

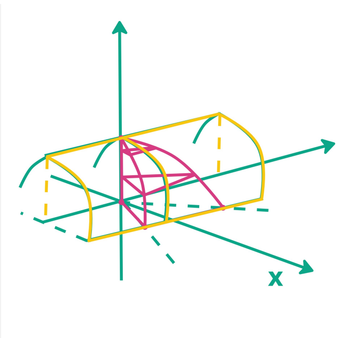





(Во всех задачах этого листка функция f предполагается непрерывной) Привести тройной интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ к одному из повторных:

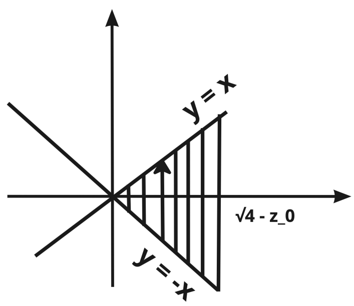
**Задача 80.**

$$D = \{(x,y,z)|0 \leqslant z \leqslant 4 - x^2, x^2 - y^2 \geqslant 0, x \geqslant 0\}$$




$z = const = z_0$ :

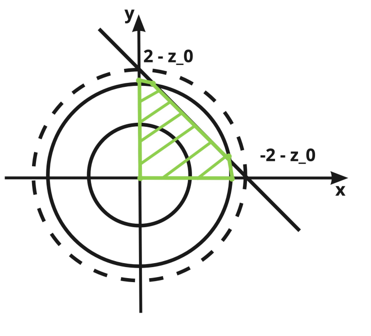
$$\begin{cases} 0 \leqslant z_0 \leqslant 4 - x^2 \\ x^2 - y^2 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$




$$\int\limits_0^4 dz \int\limits_0^{\sqrt{4-z}} dx \int\limits_{-x}^{x} f\ dy = \iiint\limits_D f\ dxdydz$$

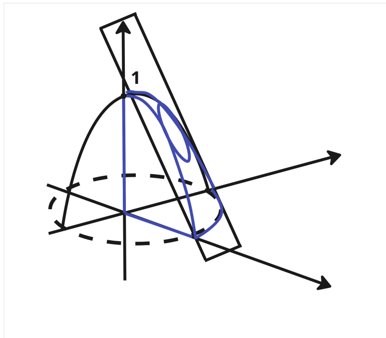
**Задача 81.**

$$D = \{(x,y,z)|x + y + z \leqslant 2, 0 \leqslant 4z \leqslant 4 - x^2 - y^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$




$$z = z_0:$$
$$\begin{cases} x + y + z_0 \leqslant 2 \\ 0 \leqslant 4z_0 \leqslant 4 - x^2 - y^2 \\ x, y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$y = 2 - x - z_0$$
$$x^2 + (2 - x - z_0)^2 = 4 - 4z_0$$
$$x^2 + 4 + x^2 + z_0^2 - 4x - 4z_0 + 2xz_0 = 4 - 4z_0$$
$$2x^2 - 4x + 2xz_0 + z_0^2 = 0$$
$$x = \frac{z_0 - 2 \pm \sqrt{(z_0 - z)^2 - 2z_0^2}}{2} =$$
$$= \frac{z_0 - 2 \pm \sqrt{4 - 4z_0 - z_0^2}}{2}$$




$$x + y \leqslant 2 - z_0$$
$$y \leqslant (2 - z_0) - x$$
$$4z_0 \leqslant 4 - x^2 - y^2$$
$$x^2 + y^2 \leqslant 4 - 4z_0$$

$$\sqrt{4 - 4z_0} \leqslant 2 - z_0$$
$$4 - 4z_0 \leqslant 4 - 4z_0 + z_0^2$$

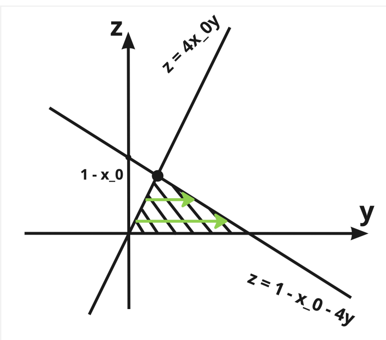
$$z_0^2 + 4z_0 - 4 < 0$$
$$(z_0 + 2)^2 < 8$$
$$z_0 < -2 + 2\sqrt{2}$$
$$z_0 > -2 - 2\sqrt{2}$$

$$\iiint\limits_D f dxdydz = \int\limits_0^{2\sqrt{2}-2} dz \left( \int\limits_0^{\frac{z_0-2-\sqrt{\cdots}}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-4z_0-x^2}} f dy + \int\limits_{\frac{z_0-2-\sqrt{\cdots}}{2}}^{\frac{z_0-2-\sqrt{\cdots}}{2}} dx \int\limits_0^{2-z-x} f dy + \int\limits_{\frac{z-2+\sqrt{\cdots}}{2}}^{\sqrt{4-4z}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-4z-x^2}} f dy \right)$$

$$+ \int\limits_{2\sqrt{2}-2}^{1} dz \int\limits_0^{\sqrt{4-4z}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-4z-x^2}} f dy$$

**Задача 82.**

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant z \leqslant 4xy,\ x \geqslant 0,\ x + 4y + z \leqslant 1\}$$




$$4x_0 y = 1 - x_0 - 4y$$
$$(4 + 4x_0)y = 1 - x_0$$
$$y = \frac{1 - x_0}{4 + 4x_0}$$
$$z \geqslant (1 - x_0) - 4y$$

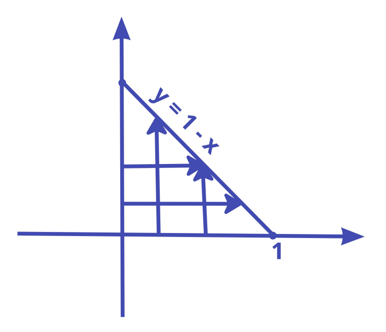
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{4x(1-x)}{4+4x}} dz \int\limits_{\frac{z}{4x}}^{\frac{1-x-z}{4}} f dy = \iiint\limits_D f dxdydz$$

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами:

**Задача 83.**

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

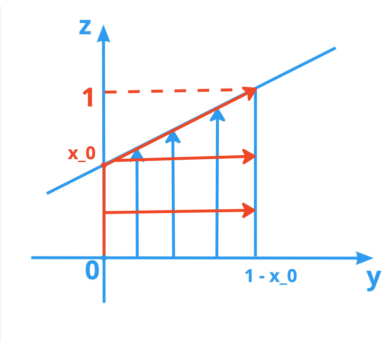
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} F(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} F(x,y)dx$$




$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$y, z, x \to z, y, x$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f dz$$




$$\int\limits_0^{x_0} dz \int\limits_0^{1-x_0} f dy + \int\limits_{x_0}^1 dz \int\limits_{z-x_0}^{1-x_0} f dy$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left( \int\limits_0^x dz \int\limits_0^{1-x} f dy + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-x}^{1-x} f dy \right)$$

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами:

**Задача 84.**

$$\int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 dx \int\limits_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)}$$

$$1) \int\limits_0^{\frac{1}{xy}} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)} = \begin{bmatrix} xyz = t \\ xydz = dt \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{xy}dt}{x(1+t^2)} = \frac{1}{x^2y} \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{x^2y}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{4x^2y}$$

$$2)\ \int\limits_{y}^{2} \frac{\pi}{4x^2y}dx = \frac{\pi}{4y}\int\limits_{y}^{2}\frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4y}\,()|_{x=y}^{x=2} = \frac{\pi}{4y}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)$$

$$3)\ \int\limits_{1}^{2}\left(\frac{\pi}{4y^2}-\frac{\pi}{8y}\right)dy = -\frac{\pi}{4y}-\frac{\pi}{8}\ln|y|\Big|_1^2 = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\ln 2+\frac{\pi}{8}\ln 1 = \frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\ln 2$$

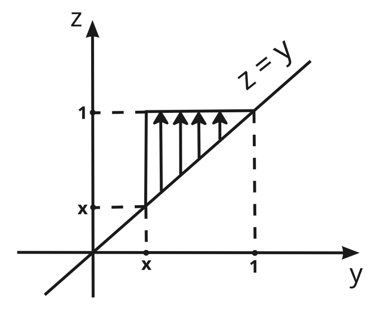
**Задача 85.**

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 dy\int\limits_y^1 \frac{\arctan z}{z}dz$$

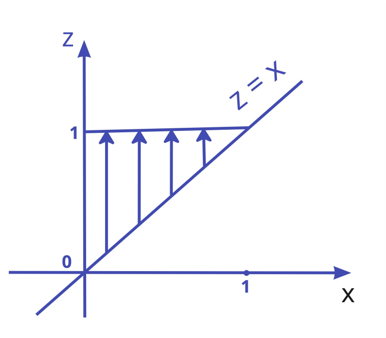
$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 dz\int\limits_x^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z}dy = \int\limits_x^z 1dy = y|_{y=x}^{y=z} = z-x$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z}\cdot(z-x)dz = \int\limits_0^1 dz\int\limits_0^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z}(z-x)dx =$$

$$= \left[\int\limits_0^z(z-x)dx = zx-\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=z} = z^2-\frac{z^2}{2}-0=\frac{z^2}{2}\right] =$$




$$= \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z}\cdot\frac{z^2}{2}dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 z\operatorname{arctg} z dz =$$




$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} z\Big|_0^1 - \int\limits_0^1\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{1+z^2}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{z^2}{1+z^2}dz\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(z-\operatorname{arctg} z\right)\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

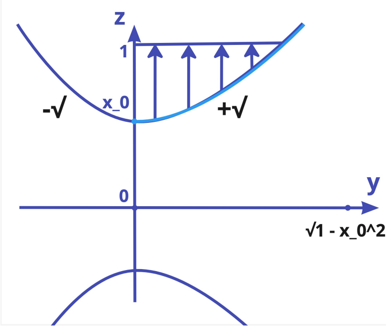
**Задача 86.**

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{\sin\pi z}{z}dz$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 dz\int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{\sin(\pi z)}{z}dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 \frac{\sin(\pi z)}{z}dy\cdot\sqrt{z^2-x^2}dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dz\int\limits_0^z \frac{\sin(\pi z)}{z}\sqrt{z^2-x^2}dx$$




$$\int\limits_0^z\sqrt{z^2-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = z\sin t \\ dx = z\cos t\ dt \\ t\in[0,\pi/2]\end{array}\right] = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{z^2\cos^2 t}z\cos t\ dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} z^2\cos^2 t dt = z^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \frac{z^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{z^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi z^2}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{\pi z^2}{4}\cdot\frac{\sin(\pi z)}{z}dz = \frac{\pi}{4}\int_0^1 z\sin(\pi z)dz = \frac{\pi}{4}\left(z\cdot\frac{-\cos(\pi z)}{\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 1\cdot\left(-\frac{\cos(\pi z)}{\pi}\right)dz\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{\sin(\pi z)}{\pi^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Вычислить:

**Задача 87.**

$$\iint\limits_{[0,1]^n}\dots\int(x_1^2+\ldots+x_n^2)dx_1\ldots dx_n$$

**Задача 88.**

$$\iint\limits_{[0,1]^n}\dots\int(x_1^2+\ldots+x_n^2)^2dx_1\ldots dx_n$$

**Задача 89.**

$$\iint\limits_{x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0,x_1+\ldots+x_n\leqslant 1}\dots\int dx_1\ldots dx_n$$

# 10. [17.11.23] Семинар №10

$$\int\limits_X \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_U \cdots \int f(\varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_n)) \cdot |det\ J_\varphi| dy_1 \ldots dy_n$$

$$/* \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \big[x = \varphi(t)\big] = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\varphi - \text{ возр. } \implies \varphi' > 0 \ \ |\varphi'(t)|$$

$$\varphi - \text{ убыв. } \implies \varphi' < 0 \ \ |\varphi'(t)|$$

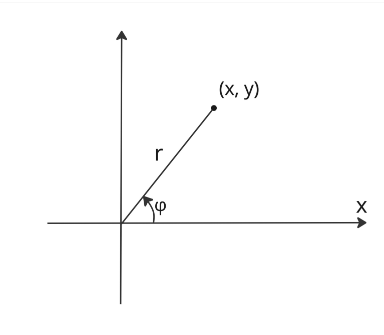
$$\int\limits_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))dt \quad */$$

Полярные координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$(r \geqslant 0 \quad \varphi \in [0, 2\pi))$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$




**Задача 90.** *Вывести якобиан полярной замены координат*

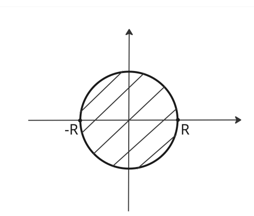
$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad det\ J = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$|det\ J| = r$$

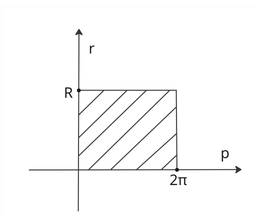
Вычислить:

**Задача 91.**

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy = \big[\text{Пол. к-ты}\big] =$$




$$= \iint\limits_{\substack{r^2 \leqslant R^2 \\ r > 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r e^{-r^2} dr =$$



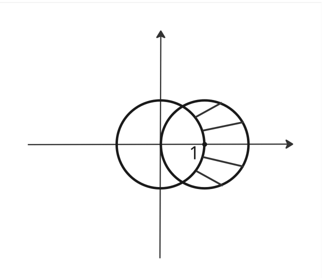

$$= \int\limits_0^R r e^{-r^2} dr \cdot 2\pi$$

$$/* \quad \int\limits_0^{2\pi} f(R)d\varphi = f(R) \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 d\varphi = f(R) \cdot 2\pi \quad */$$

$$\begin{bmatrix} r^2 = t \\ 2rdr = dt \end{bmatrix} = \pi \int\limits_0^{R^2} e^{-t}dt = -\pi e^{-t}\Big|_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2})$$

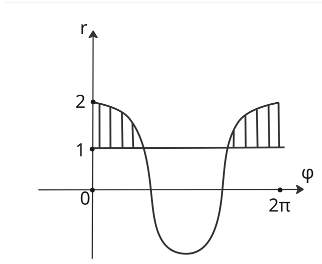
**Задача 92.**

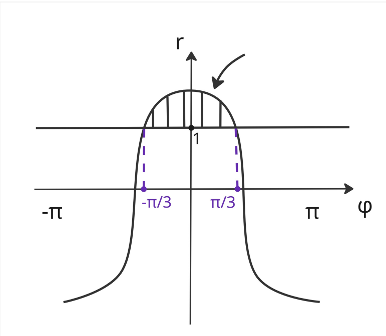
$$\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x} \left(\frac{y}{x}\right)^2\ dxdy$$




$$x^2+y^2\leqslant 2x$$
$$x^2-2x+y^2\leqslant 0$$
$$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$$

$$1\leqslant r^2\leqslant 2r\cos\varphi$$
$$r>0,\ \varphi\in[0,2\pi)$$




$$=\int\limits_D\left(\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\right)^2\cdot rdrd\varphi=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_1^{2\cos\varphi}\operatorname{tg}^2\varphi\cdot rdr$$

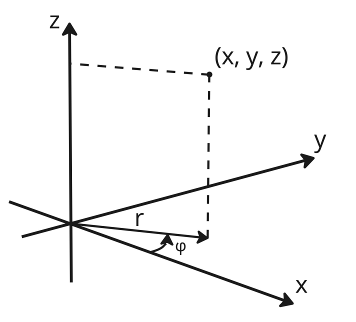
$$=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{tg}^2\varphi\cdot\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=1}^{r=2\cos\varphi}d\varphi=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\operatorname{tg}^2\varphi\cdot\left(2\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\right)d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/3}\operatorname{tg}^2\varphi\left(2\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\right)d\varphi=\int\limits_0^{\pi/3}(4\sin^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2(1-\cos 2\varphi)-\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(2-2\cos 2\varphi-\frac{1}{\cos^2\varphi+1}\right)d\varphi=$$

$$=3\varphi-\sin 2\varphi-\operatorname{tg}\varphi|_0^{\pi/3}=\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Цилиндрические координаты



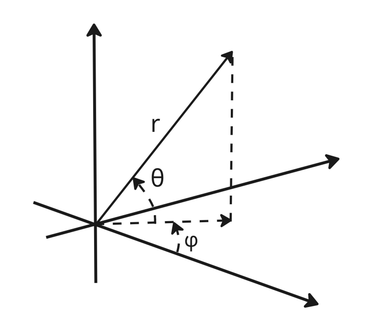

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\quad r>0,\ \varphi\in[0,2\pi)\\ y=r\sin\varphi\\ z=h\end{cases}$$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$J=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \ det\ J=r$$

Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi & r > 0 \\ y = r\cos\theta\sin\varphi & \varphi \in [0, 2\pi) \\ z = r\sin\theta & \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$




$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

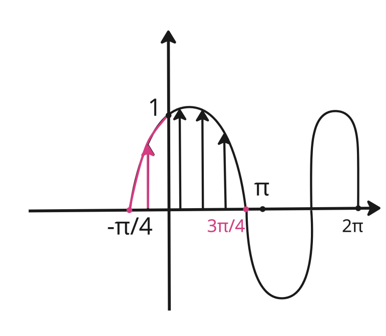
$$det\ J = \sin\theta(r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta)$$

$$+r\cos\theta(r\cos^2\theta\cos^2\varphi + r\cos^2\theta\sin^2\varphi)$$

$$= r^2\sin^2\theta\cos\theta + r^2\cos^3\theta = r^2\cos\theta$$

**Задача 93.**

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y} (x+y)\ dxdy = \big[\text{Пол. к-ты}\big] =$$




$$\begin{cases} 0 < r \leqslant \cos\varphi + \sin\varphi \\ \varphi \in [-\pi, \pi) \end{cases}$$

$$\cos\varphi + \sin\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -1$$

$$\varphi = 3\pi/4,\ -\pi/4, \dots$$

$$\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi+\sin\varphi} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)dr = \int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot\frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)^3}{3}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)^4 d\varphi = \dots \quad \text{счёт}$$

**Задача 94.** *Вывести якобианы цилиндрической и сферической замены координат*

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad det\ J = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi$$

Вычислить:

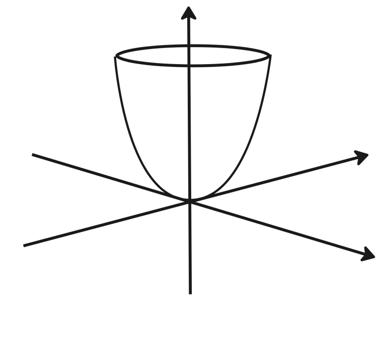
**Задача 95.**

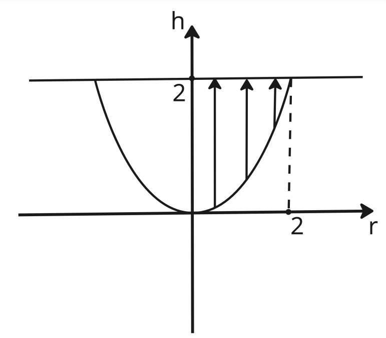
$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 2z \\ z\leqslant 2}} (x^2+y^2)\ dxdydz = \big[\text{Цилиндр. к-ты}\big] =$$

$$\iiint\limits_{\substack{r^2\leqslant 2h\\ h\leqslant 2\\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi)}} r^2\cdot r dr d\varphi dh$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{r^2/2}^{2} r^3 dh = 2\pi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{r^2/2}^{2} r^3 dh =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 r^3\cdot\left(2-\frac{r^2}{2}\right) dr = 2\pi\left(2\cdot\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 = \ldots$$



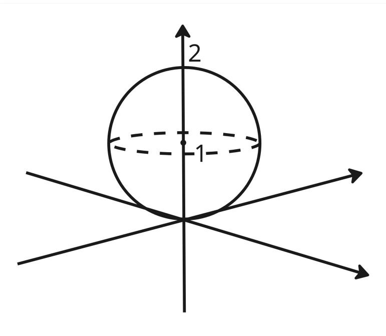


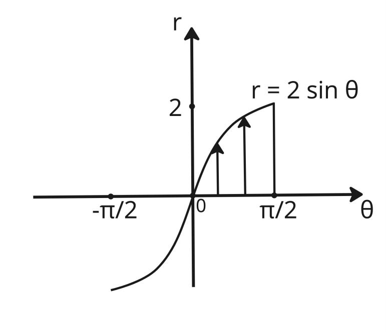

$$h = \frac{r^2}{2} = 2$$

**Задача 96.**

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz = \big[\text{Сфер. к-ты}\big] =$$

$$\iiint\limits_{\substack{r^2\leqslant 2r\sin\theta\\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi)\\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}} \sqrt{r^2}\cdot r^2\cos\theta dr d\varphi d\theta$$




$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2\sin\theta} r^3\cos\theta dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2\sin\theta} r^3\cos\theta dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \frac{(2\sin\theta)^4}{4} d\theta = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} 4\sin^4\theta d(\sin\theta) =$$

$$= 8\pi\left.\frac{\sin^5\theta}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{8\pi}{5}$$

**Задача 97.**

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ y^2+z^2\leqslant x^2\\ x\geqslant 0}} (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz = \big[\text{Сфер. к-ты}\big] =$$

$$\begin{cases} r^2\leqslant 1\\ (r\cos\theta\sin\varphi)^2+(r\sin\theta)^2\leqslant(r\cos\theta\cos\varphi)^2\\ r\cos\theta\cos\varphi\geqslant 0\\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\end{cases}\qquad \begin{cases} r^2\leqslant 1\\ r^2\cos^2\theta\leqslant(r\sin\theta)^2\\ r\sin\theta\geqslant 0\\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x^2+y^2\leqslant z^2\\ z\geqslant 0}} (x^2+y^2+z^2)\ dzdxdy \qquad \begin{cases} 0<r<1,\ \ \varphi\in[0,2\pi)\\ \operatorname{tg}^2\theta\geqslant 1,\ \sin\theta\geqslant 0\implies\theta\geqslant\pi/4\\ \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^1 r^2\cdot r^2\cos\theta dr = 2\pi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^1 r^4\cos\theta dr =$$

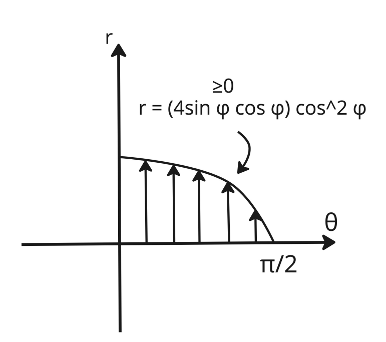
$$= 2\pi\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{5}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

**Задача 98.**

$$\iiint\limits_{\substack{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\leqslant 4xy\\ x,y,z\geqslant 0}} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dxdydz = \big[\text{Сфер. к-ты}\big]$$

$$\begin{cases} (r^2)^{3/2}\leqslant 4r\cos\theta\cos\varphi\cdot r\cos\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\cos\varphi\geqslant 0\\ r\cos\theta\sin\varphi\geqslant 0\\ r\sin\theta\geqslant 0\\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<r\leqslant 4\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$




$$\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{4\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}\frac{r^3\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta}{r^3}\cdot r^2\cos\theta dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta d\theta dr = \int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta\int\limits_0^{4\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi} r^2dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta\frac{(4\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)^3}{3}d\theta =$$

$$= \frac{4^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi\ d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^9\theta\sin\theta\ d\theta = \frac{4^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi\cdot\frac{1}{10}d\varphi = \frac{4}{30}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin 2\varphi)^4\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{30}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{30}\int\limits_0^{\pi/2}(1-2\cos 4\varphi+\cos^2 4\varphi)d\varphi = \dots$$

# 11. [24.11.23] Семинар №11

Вычислить (обощенные полярные/сферические, перевод области в прямоугольник)

**Задача 99.**

$$\iiint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\\ z>0\\ (a,b,c>0)}} z\ dxdydz$$

$$\iiint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\\ z>0\\ (a,b,c>0)}} z\ dxdydz = \begin{bmatrix} x = a\tilde{x} & \tilde{x^2}+\tilde{y^2}+\tilde{z^2}\leqslant 1 \\ y = b\tilde{y} & c\cdot\tilde{z}>0 \\ z = c\tilde{z} & \\ J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, & |det\ J| = abc \end{bmatrix} =$$

$$\iiint\limits_{\substack{\tilde{x^2}+\tilde{y^2}+\tilde{z^2}\leqslant 1,\\ \tilde{z}>0}} c\cdot\tilde{z}\cdot abc\ d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} = abc^2 \iiint\limits_{\substack{\tilde{x^2}+\tilde{y^2}+\tilde{z^2}\leqslant 1,\\ \tilde{z}>0}} \tilde{z}\ d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{сфер. замена к-т} & \\ r^2\leqslant 1 & r>0, \varphi\in[0,2\pi) \\ r\sin\theta>0 & \theta\in(-\pi/2,\pi/2) \end{bmatrix} = abc^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 r\sin\theta =$$

$$= r^2\cos\theta dr = abc^2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta = \frac{abc^2\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\ d\theta = \frac{abc^2\pi}{4}\cdot\left.\frac{-\cos 2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{abc^2\pi}{4}$$

*Изначально:*

$$\begin{cases} x = a\cdot r\cos\varphi\cos\theta \\ y = b\cdot r\sin\varphi\cos\theta \\ z = c\cdot r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} r^2\leqslant 1 \\ cr\sin\theta>0 \\ r>0 \end{cases}$$

$$|det\ J| = abc\cdot r^2\cos\theta$$

**Задача 100.**

$$\iint\limits_{\substack{x^{3/2}+y^{3/2}\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} y^2\ dxdy$$

$$\iint\limits_{\substack{x^{3/2}+y^{3/2}\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} y^2\ dxdy = \begin{bmatrix} \begin{cases} x = r\cdot\cos^{4/3}\varphi \\ y = r\cdot\sin^{4/3}\varphi \end{cases} & \begin{cases} r^{3/2}\leqslant 1 \\ r>0, \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}] \end{cases} \\ J = \begin{pmatrix} \cos^{4/3}\varphi & r\cdot\frac{4}{3}\cos^{1/3}\varphi\cdot(-\sin\varphi) \\ \sin^{4/3}\varphi & r\cdot\frac{4}{3}\sin^{1/3}\varphi\cdot\cos\varphi \end{pmatrix} & \end{bmatrix}$$

$$det\ J = \frac{4}{3}r\sin^{1/3}\varphi\cdot\cos^{7/3}\varphi+\frac{4}{3}r\sin^{7/3}\varphi\cos^{1/3}\varphi = \frac{4}{3}r\sin^{1/3}\varphi\cdot\cos^{1/3}\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = \frac{4}{3}r\sin^{1/3}\varphi\cdot\cos^{1/3}\varphi$$

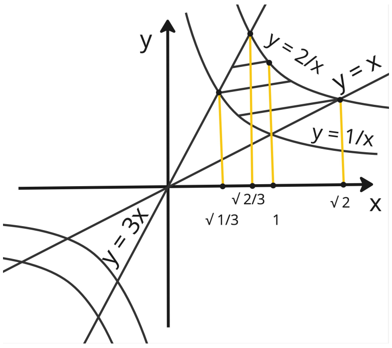
$$= \int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^2\sin^{8/3}\varphi\cdot\frac{4}{3}r\sin^{1/3}\varphi\cos^{1/3}\varphi dr = /\ \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}/$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{1/3}\varphi\cdot\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{4}d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{1/3}\varphi(1-\cos^2\varphi)d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left.\left(\frac{\cos^{4/3}\varphi}{4/3}-\frac{\cos^{10/3}\varphi}{10/3}\right)\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$

**Задача 101.**

$$\iint\limits_{\substack{1\leqslant xy\leqslant 2,\\ x\leqslant y\leqslant 3x}} x^2y^2\ dxdy$$




$$\frac{2}{x}=x \implies x=\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{x}=x \implies x=1$$

$$\frac{2}{x}=3x \implies x=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x}=3x \implies x=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} u=xy\\ v=\frac{y}{x}\end{cases} \qquad u\in[1,2], v\in[1,3] \qquad /*\ \begin{matrix} x=\sqrt{\frac{u}{v}}\\ y=\sqrt{uv}\end{matrix}, J=...\ */$$

$$J^{-1}=\begin{pmatrix} y & x\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}, \begin{matrix} det\ J^{-1}=\frac{y}{x}+\frac{y}{x}=\frac{2y}{x}=2v\\ |det\ J|=\frac{1}{2v}\end{matrix}$$

$$J_{f^{-1}}=J_f^{-1} \quad \text{и} \quad det\ A^{-1}=(det\ A)^{-1}$$

$$=\int\limits_1^2 du\int\limits_1^3 dv\cdot u^2\cdot\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 u^2du\int\limits_1^3\frac{1}{v}dv=\frac{\ln 3}{2}\int\limits_1^2 u^2du=\frac{7\ln 3}{6}$$

Вычислить:

**Задача 102.**

$$\int\limits_{[0,1]^n}\cdots\int(x_1^2+\ldots+x_n^2)dx_1\ldots dx_n$$

$$\int\limits_{[0,1]^n}\cdots\int x_1^2dx_1\ldots dx_n=\int\limits_{[0,1]^n}\cdots\int x_2^2dx_1\ldots dx_n$$

$$\int_0^1 dx_2\int_0^1 dx_3\ldots\int_0^1 dx_n\int_0^1 x_1^2dx_1 \qquad \int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_3\ldots\int_0^1 dx_n\int_0^1 x_2^2dx_2$$

$$(main)=n\int\limits_0^1 dx_1\int\limits_0^1 dx_2\ldots\int\limits_0^1 x_n^2dx_n=\frac{n}{3}\int\limits_0^1 dx_1\int\limits_0^1 dx_2\ldots\int\limits_0^1 dx_{n-1}=\frac{n}{3}$$

$$/\iint(x^2+y^2)dxdy=\iint x^2\ldots+\iint y^2\ldots=2\iint x^2dxdy/$$

$$\iint x^2=$$

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 x^2dx \qquad =\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 y^2dy \qquad \left(\int\limits_0^1 dp\int\limits_0^1 q^2dq\right)$$

**Задача 103.**

$$\int\limits_{[0,1]^n}\cdots\int(x_1+\ldots+x_n)^2dx_1\ldots dx_n$$

$$=x_1^2+\ldots+x_n^2+2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)$$

$$= \int \cdots \int (x_1^2 + \ldots + x_n^2) dx_1 \ldots dx_n + 2 \int \cdots \int (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

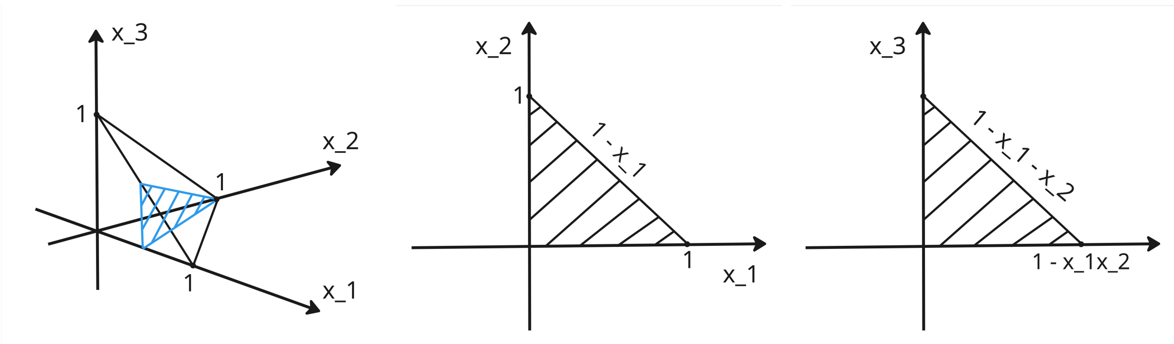
$$= \int \cdots \int\limits_{[0,1]^2} x_i x_j dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 x_1 \ldots \int\limits_0^1 dx_n \int\limits_0^1 dx_i \int\limits_0^1 x_i x_j dx_j$$

$$= \frac{n}{3} + 2 \cdot C_n^2 \cdot \int \cdots \int\limits_{[0,1]^n} x_1 x_2 dx_1 \ldots dx_n = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\int\limits_0^1 dx_3 \int\limits_0^1 dx_4 \ldots \int\limits_0^1 dx_n \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \; x_1 x_2 = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx_3 \int\limits_0^1 dx_4 \ldots \int\limits_0^1 dx_n \int\limits_0^1 x_1 dx_1 = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 dx_3 \ldots \int\limits_0^1 dx_n = \frac{1}{4}$$

**Задача 104.**

$$\int \cdots \int\limits_{\substack{x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1}} dx_1 \ldots dx_n$$




$$\iint\limits_{\substack{x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_i \geqslant 0}} dx_1 dx_2 = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 = \int\limits_0^1 (1 - x_1) dx_1 = - \left. \frac{(1-x_1)^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\iiint dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 \int\limits_0^{1-x_1-x_2} dx_3 = \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{1-x_1} (1 - x_1 - x_2) dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 dx_1 - \left. \frac{(1-x_1-x_2)^2}{2} \right|_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} = \int\limits_0^1 \frac{(1-x_1)^2}{2} dx_1 = \left. \frac{-(1-x_1)^3}{2 \cdot 3} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\int \cdots \int\limits_{\substack{x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant a \\ x_i \geqslant 0}} dx_1 \ldots dx_n = \frac{a^n}{n!}$$

*База:*

$$n = 1 \qquad \int\limits_{0 \leqslant x_1 \leqslant a} dx_1 = a$$

*Переход:*

$$\int \cdots \int\limits_{\substack{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \leqslant a \\ x_i \geqslant 0}} dx_1 \ldots dx_{n+1} = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{a-x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n \int\limits_0^{a-x_1-\ldots-x_n} dx_{n+1} = \int\limits_0^a \frac{(a-x_1)^n}{n!} dx_1 =$$

$$= - \left. \frac{(a-x_1)^{n+1}}{n!(n+1)} \right|_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Ответ:*

$$\frac{1}{n!} \quad (a = 1)$$

**Задача 105.**

$$\int\limits_{0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant x_1\leqslant a}\cdots\int x_1\ldots x_n\ dx_1\ldots dx_n$$

*Ищем общую формулу:*

$$\int\limits_{0\leqslant x_1\leqslant a} x_1dx_1 = \left.\frac{x_1^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

$$\iint\limits_{0\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant a} x_1x_2dx_1dx_2 = \int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} x_1x_2dx_2 = \int\limits_0^a x_1\cdot\frac{x_1^2}{2}dx_1 = \left.\frac{x_1^4}{2\cdot 4}\right|_0^a = \frac{a^4}{8}$$

$$\iiint\limits_{0\leqslant x_3\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant a} x_1x_2x_3dx_1dx_2dx_3 = \int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\int\limits_0^{x_2} x_1x_2x_3dx_3 = \int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} x_1x_2\cdot\frac{x_2^2}{2}dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^a x_1\cdot\frac{x_1^4}{8}dx_1 = \left.\frac{x_1^6}{6\cdot 8}\right|_0^a = \frac{a^6}{48}$$

$$\frac{a^2}{2}, \frac{a^4}{8}, \frac{a^6}{48}, \ldots \qquad \text{может } \frac{a^{2n}}{2^n\cdot n!}?$$

*Базу уже проверили (аж 3 раза)*

*Переход:*

$$\int\limits_{0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n\leqslant\ldots\leqslant x_1\leqslant a}\cdots\int x_1x_2\ldots x_{n+1}dx_1\ldots dx_{n+1} = \int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\int\limits_0^{x_2} dx_3\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} dx_n\int\limits_0^{x_n} x_1x_2\ldots x_{n+1}dx_{n+1} =$$

$$= \int\limits_0^a x_1dx_1\cdot\frac{x_1^{2n}}{2^n\cdot n!} = \int\limits_0^a \frac{x_1^{2n+1}}{2^n\cdot n!}dx_1 = \left.\frac{x_1^{2n+2}}{2^n\cdot n!(2n+2)}\right|_0^a = \frac{a^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}$$

*Ответ:*

$$\frac{a^{2n}}{2^n\cdot n!}$$

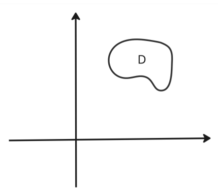
Вывести якобиан сферической замены координат в $\mathbb{R}^n$. Найти объём 6-мерной сферы:

**Задача 106.**

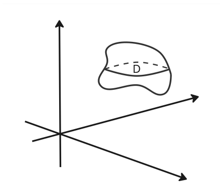
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 \leqslant R^2$$

# 12. [1.12.23] Семинар №12

$$V(D) = \int\limits_{D} \cdots \int 1 \; dx$$




$$\iint\limits_{D} 1 \; dxdy = S(D)$$

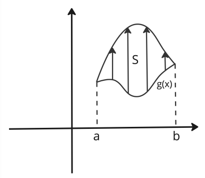



$$V = \iiint\limits_{D} 1 \; dxdydz$$

$$S = \int\limits_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx$$

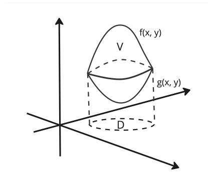
$$\iint\limits_{S} 1 \; dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} 1 \; dy$$

$$= \int\limits_{a}^{b} (f - g)dx$$




$$V = \iint\limits_{D} (f - g) \; dxdy$$

$$V = \iiint\limits_{V} 1 \; dxdydz$$



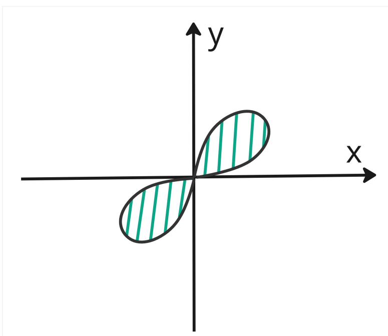

## Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой(кривыми):

**Задача 107.**

$$(x^2 + y^2)^2 = xy$$

*Пол. к-ты:*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$




$$(r^2)^2 = r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi$$
$$r^2 = \sin\varphi\cos\varphi$$
$$r = \sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$$

$$S = 2 \iint\limits_{\text{петля в 1й четверти}} 1dxdy = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} 1 \cdot rdr =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

**Задача 108.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot r\cos\varphi \\ y = b \cdot r\sin\varphi & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad r^2 \leqslant 1 \qquad J = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$det\ J = abr$$

$$S = \iint 1dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \cdot abrdr = ab \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1d\varphi = \pi ab$$

**Задача 109.**

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \quad x = y, \quad x = 9y$$

$$\begin{cases} x = r\cos^4\varphi & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin^4\varphi \end{cases}$$

$$\sqrt{r}\cos^2\varphi + \sqrt{r}\sin^2\varphi = 1 \quad (\sqrt{r} = 1)$$

$$r\cos^4\varphi = r\sin^4\varphi \implies \operatorname{tg}^4\varphi = 1 \implies \operatorname{tg}\varphi = \pm 1 \implies \operatorname{tg}\varphi = 1 \quad (\varphi = \frac{\pi}{4})$$

$$r\cos^4\varphi = 9r\sin^4\varphi \implies \operatorname{tg}^4\varphi = \frac{1}{9} \implies \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\varphi = \frac{\pi}{6})$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos^4\varphi & r \cdot 4\cos^3\varphi \cdot (-\sin\varphi) \\ \sin^4\varphi & r \cdot 4\sin^3\varphi \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad det\ J = 4r\sin^3\varphi\cos^5\varphi + 4r\sin^5\varphi\cos^3\varphi = 4r\sin^3\varphi\cos^3\varphi$$

$$S = \iint 1dxdy = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_1^4 1 \cdot |det\ J| dr = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_1^4 4r\sin^3\varphi\cos^3\varphi \cdot 2 \cdot 15 d\varphi =$$

$$/ \int\limits_1^4 2rdr = r^2|_1^4 = 16 - 1/$$

$$= 30\left(\frac{1/4}{4} - \frac{1/8}{6} - \frac{1/16}{4} + \frac{1/64}{6}\right) = 30\left(\frac{3}{16 \cdot 4} - \frac{7}{64 \cdot 6}\right) = 30\frac{11}{64 \cdot 6} = \frac{11 \cdot 15}{64 \cdot 3} = \frac{55}{64}$$

## Найти объём тела, заданного неравенствами:

**Задача 110.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \ \rightarrow \ r^2 \leqslant 1$$

$$V = \iiint 1dxdydz = \begin{bmatrix} x = a \cdot r\cos\varphi\cos\theta \\ y = b \cdot r\sin\varphi\cos\theta \\ z = cr\sin\theta \\ det\ J = abcr^2\cos\theta \end{bmatrix} \begin{matrix} r > 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 1 \cdot abcr^2\cos\theta dr = abc \cdot 2\pi \cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{3} d\theta = \frac{2\pi abc}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi abc$$

**Задача 111.**

$$x^2 + y^2 \leqslant 4, \ \ x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 1$$

$$V = \iiint 1dxdydz = \begin{bmatrix} \text{Цилиндр. к-ты} \\ x = r\cos\varphi \quad r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ J = r\sin\varphi \quad det\ J = r \\ z = h \end{bmatrix}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dh \int\limits_{\sqrt{1+h^2}}^{2} 1 \cdot rdr = 2\pi \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(\sqrt{1+h^2})^2}{2}\right) dh =$$

$$= \pi \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (4 - (1 + h^2)^2) dh = \pi \left(3h - \frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \pi(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}) \cdot 2 = 2\pi\frac{6\sqrt{3}}{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

**Задача 112.**

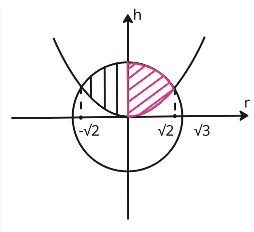
$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 3,\ \ x^2+y^2 \leqslant 2z$$

*Сферич.*

$$\begin{cases} r^2 \leqslant 3 \\ (r\cos\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\cos\theta)^2 \leqslant 2r\sin\theta \iff r^2\cos^2\theta \leqslant 2r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3} \\ r \leqslant \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ \varphi \in [0,2\pi),\ \theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

*Цилиндр.*




$$\begin{cases} r^2+h^2 \leqslant 3 \\ r^2 \leqslant 2h \\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi), \quad h \geqslant r^2/2 \end{cases}$$

$$r^2+\left(\frac{r^2}{2}\right)=3 \qquad \frac{r^4}{4}+r^2=3$$

$$r^4+4r^2-12=0 \qquad r^2=-6,\ r^2=2 \ \ (r=\pm\sqrt{2})$$

$$V=\iiint 1dxdydz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} 1\cdot rdh=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} r(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2})dr=\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}}(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2})d(r^2)=$$

$$=\pi\left(-\frac{(3-r^2)^{3/2}}{3/2}-\frac{(r^2)^2}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\pi(-\frac{2}{3}-1+\frac{2\cdot 3^{3/2}}{3})=\pi(2\sqrt{3}-\frac{5}{3})$$

## Найти объём тела, ограниченного поверхностью:

**Задача 113.**

$$(x^2+y^2+z^2)^2=xyz$$

*Сферич. к-ты:*

$$(r^2)^2=r\cos\varphi\cos\theta\cdot\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\theta$$

$$\begin{cases} r=\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\sin\theta>0 \\ r>0,\ \varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta>0$$

$$V=4\iiint\limits_{\text{1й окт.}} 1dxdydz=4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\sin\theta} 1\cdot r^2\cos\theta dr=$$

$$=4\int_0^{\pi/2} d\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta\cos\theta\frac{(\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\sin\theta)^3}{3}=\frac{4}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\varphi\cos\varphi)^3 d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7\theta\cdot\sin^3\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{40}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi=\frac{1}{30}\left(\frac{\sin^4\varphi}{4}-\frac{\sin^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{30}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

## Найти объём пирамиды:

$$\{0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1 \leqslant a\} \quad (a > 0)$$

$$V = \int \cdots \int 1 dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \int\limits_0^{x_2} dx_3 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} 1 dx_n =$$

$$= \ldots = \int\limits_0^a \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \frac{x_1^n}{n!}\Big|_0^a = \frac{a^n}{n!}$$

$$\int\limits_0^{x_{n-2}} x_{n-1} dx_{n-1} = \frac{x_{n-1}^2}{2}\Big|_0^{x_{n-2}} = \frac{x_{n-2}^2}{2}$$

Версия 15го семинара:

$$V = \int \cdots \int 1 dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \int\limits_0^{x_2} dx_3 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} dx_n =$$

$$int_0^{x_{n-1}} dx_n = x_{n-1}; \quad \int\limits_0^{x_{n-2}} x_{n-1} dx_{n-1} = \frac{x_{n-1}^2}{2}\Big|_0^{x_{n-2}} = \frac{x_{n-2}^2}{2}$$

$$\int\limits_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}^2}{2} dx_{n-2} = \frac{x_{n-3}^3}{6} \ldots$$

По мат. индукции

$$\frac{a^n}{n!}$$

## Найти объём пирамиды:

$$\{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \leqslant 1, x_i \geqslant 0\}(a_i > 0)$$

## Найти объём параллелипипеда, ограниченного плоскостями:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \pm h_i, h_i > 0, det(a_{ij}) \neq 0$$

# 13. [8.12.23] Семинар №13

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{наз. исчерпанием мн-ва E, если}$$

$$1)\ E_n - \text{ доп.}$$
$$2)\ E_n \subset E_{n+1}$$
$$3)\ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

$$\int\limits_E \cdots \int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} \cdots \int f(x)dx$$

Если $\exists$ и не зависит от $\{E_n\}$ - исч. $\to$ Несоб. инт. сх.
Т. 1

$$f \geqslant 0 \implies \text{Достаточно рассмот. одно любое исчерпание}$$

Т. 2

$$\int\limits_E f dx \ \text{ сх./расх.} \iff \int\limits_E |f| dx \ \text{ сх./расх.}$$

## Исследовать интеграл на сходимость (p $>$ 0):

**Задача 114.**

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$$
$$f \geqslant 0$$
$$E_n = \left\{\frac{1}{n^2} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$$

$$\iint\limits_{E_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \begin{bmatrix}\text{Пол.}\\ \text{к-ты}\end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1/n}^{1} \frac{1}{(r^2)^p}\cdot r dr = 2\pi \int\limits_{1/n}^{1} \frac{dr}{r^{2p-1}} =$$

$$= \begin{cases} 2\pi \cdot \ \Big|_{1/n}^{1} = \frac{\pi}{1-p}\left(1 - \frac{1}{n^{2-2p}}\right) \xrightarrow{p>1} \infty, \ \text{расх.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \xrightarrow{p<1} \frac{\pi}{1-p} \\ 2\pi \cdot \ln|r|\Big|_{1/n}^{1} = -2\pi \ln\frac{1}{n} = 2\pi \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \implies \text{расх.} \end{cases}$$

*Ответ:*

$$p \geqslant 1 \implies \text{инт. расх.};\ p < 1 \implies \text{инт. сх. к } \frac{\pi}{1-p}$$

**Задача 115.**

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$$
$$f \geqslant 0$$
$$E_n = \{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant n^2\}$$
$$F_n = \{(n-1)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant n^2\}$$
$$D_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant n^2\right\}$$

$$\iint\limits_{E_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \begin{bmatrix}\text{Пол.}\\ \text{к-ты}\end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{n} \frac{1}{r^{2p}}\cdot r dr = 2\pi \int\limits_{1}^{n} \frac{dr}{r^{2p-1}} =$$

$$= \begin{cases} (p\neq 1)\ 2\pi\ \frac{r^{2-2p}}{2-2p}\Big|_1^n = \frac{\pi}{1-p}(n^{2-2p}-1) \xrightarrow{p>1} \frac{\pi}{p-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \xrightarrow{p<1} \infty, \ \text{расх.} \\ (p=1)\ 2\pi \ln|r|\Big|_1^n = 2\pi \ln n \to \infty, \ \text{расх.} \end{cases}$$

*Ответ:*

$$p \leqslant 1 \text{ расх.};\ p > 1 \implies \ \text{сх. к } \frac{\pi}{p-1}$$

**Задача 116.**

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$f \geqslant 0$$

$$E_n = \left\{ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

$$\iiint\limits_{E_n} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = \begin{bmatrix} \text{Сфер.} \\ \text{К-ты} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{1}{(1-r^2)^p} r^2 \cos\theta dr =$$

$$2\pi \cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = 4\pi \int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4\pi \cdot \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p}$$

*Несобственный интеграл с первого курса*

$$\int\limits_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} = \begin{bmatrix} 1-r=t \\ -dr=dt \end{bmatrix} = \int_1^0 \frac{(1-t)^2(-dt)}{t^p\cdot(2-t)^p} = \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^2 dt}{t^p(2-t)^p}$$

$$0 \leqslant \frac{(1-t)^p}{t^p(2-t)^p} \sim_{t\to 0} \frac{1}{t^p\cdot 2^p}$$

*Ответ:*

$$p<1 \quad \text{сх.} p \geqslant 1 \quad \text{расх.}$$

**Задача 117.**

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz$$

$$\to_{\text{т. 2}} \iiint \mathbb{R}^{\nVdash} \left| \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^p} \right| dxdydz$$

$$E_n = \left\{ \frac{1}{n^2} \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant n^2 \right\}$$

$$\iiint\limits_{E_n} |\ldots| dxdydz = \begin{bmatrix} \text{Сфер.} \\ \text{К-ты} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int\limits_{1/n}^{n} \frac{|\sin r^2|}{r^{2p}} \cdot r^2 \cos\theta dr =$$

$$= 2\pi\cdot 2 \cdot \int\limits_{1/n}^{n} \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr \xrightarrow{n\to\infty} 4\pi \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr = 4\pi \int\limits_0^1 \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr + 4\pi \int\limits_1^{+\infty} \ldots dr$$

$$r\to 0: \quad 0 \leqslant \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} \sim \frac{|r^2|}{r^{2p-2}} = \frac{1}{r^{2p-4}} \qquad \begin{matrix} 2p-4<1 \text{ сх.} \\ p<5/2 \end{matrix}$$

$$r\to\infty: \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr = \begin{bmatrix} r^2=t, r=\sqrt{t} \\ 2rdr=dt \end{bmatrix} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{p-1}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{p-1/2}} dt$$

$$\frac{1}{t^{p-1/2}} \geqslant \frac{|\sin t|}{t^{p-1/2}} \geqslant \frac{\sin^2 t}{t^{p-1/2}} = \frac{1/2}{t^{p-1/2}} - \frac{1/2\cos 2t}{t^{p-1/2}}$$

сх. $p>3/2$

расх. $p \leqslant 3/2$

сх. $p>3/2$

расх. $p \leqslant 3/2$

1) $\left|\int_1^A \cos 2t dt\right| = \left|\frac{\sin 2A}{2} - \frac{\sin 2}{2}\right| \leqslant 1-$ огр.

2) $\frac{1}{t^{p-1/2}}$ монот.

3) $\frac{1}{t^{p-1/2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad (p>1/2)$

*Ответ:*

$$p \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ сход. Иначе расход.}$$

**Задача 118.**

$$\iint\limits_{|y|<1} \frac{x^2dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$E_n = \{x \in [-n,n], y \in [-1,1]\}$$

$$\iint\limits_{E_n} \frac{x^2dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dy}{(1+x^2+y^2)^p}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dy}{(2+x^2)^p} \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dy}{(1+x^2+y^2)^p} \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dy}{(1+x^2)^p}$$

$$= \frac{2x^2}{(2+x^2)^p} \qquad\qquad = \frac{2x^2}{(1+x^2)^p}$$

$$\int\limits_{-n}^{n} \frac{2x^2}{(2+x^2)^p}dx \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(2+x^2)^p}dx \left(\frac{2x^2}{(2+x^2)^p} \sim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^{2p}} = \frac{2}{x^{2p-2}}\right) \text{ сх. при } p > 3/2$$

$$\int\limits_{-n}^{n} \frac{2x^2}{(1+x^2)^p}dx \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1+x^2)^p}dx \left(\frac{2x^2}{(2+x^2)^p} \sim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^{2p}} = \frac{2}{x^{2p-2}}\right) \text{ сх. при } p > 3/2$$

*Ответ: Сходится при $p > 3/2$, иначе расходится*

## Вычислить интеграл или установить его расходимость:

**Задача 119.**

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\geqslant 1}} \frac{x^3-y^3}{x^5+y^5}dxdy$$

*$f$ меняет знак*

$$E_n = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \geqslant 1 \text{ и } x^2+y^2 \leqslant n^2\}$$

$$\Longrightarrow \iint \left|\frac{x^3-y^3}{x^5+y^5}\right| dxdy = \begin{bmatrix}\text{Пол.}\\ \text{к-ты}\end{bmatrix} \Longrightarrow \iint\limits_{E_n} \left|\frac{x^3-y^3}{x^5+y^5}\right| dxdy$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{n} \left|\frac{r^3\cos^3\varphi - r^3\sin^3\varphi}{r^5\cos^5\varphi + r^5\sin^5\varphi}\right| \cdot rdr$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+y \geqslant 1 \\ x^2+y^2 \leqslant n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} r\cos\varphi \geqslant 0 \\ r\sin\varphi \geqslant 0 \\ r\cos\varphi + r\sin\varphi \geqslant 1 \\ r^2 \leqslant n^2 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < r \leqslant n \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ r(\cos\varphi + \sin\varphi) \geqslant 1 \end{cases}$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left|\frac{\cos^3\varphi - \sin^3\varphi}{\cos^5\varphi + \sin^5\varphi}\right| d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{n} \frac{1}{r}dr$$

$$D_n = \{x, y \geqslant 0,\ 1^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant n^2\}$$

$$\iint\limits_{E_n} |\ldots| dxdy \geqslant \iint\limits_{D_n} |\ldots| dxdy$$

$$\iint\limits_{E_n}\left|\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^5\varphi+\sin^5\varphi}\right|dxdy\geqslant\iint\limits_{D_n}-||-dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_1^n\left|\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^5\varphi+\sin^5\varphi}\right|\cdot\frac{dr}{r}$$

$$=\underbrace{\int\limits_0^{\pi/2}\left|\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^5\varphi+\sin^5\varphi}\right|d\varphi}_{\text{Число } A>0}\cdot(\ln n-\ln 1)=A\cdot\ln n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{E_n}|\dots|dxdy\Longrightarrow\text{Исх. Инт. расх.}$$

*Ответ: Расходится*

**Задача 120.**

$$\iint\limits_{\substack{x,y\geqslant0\\x+y\geqslant1}}\frac{x^3-y^3}{x^6+y^6}dxdy$$

*f меняет знак* $\Longrightarrow\ \iint|\dots|dxdy$

$$\frac{r^3}{r^6}\cdot r\frac{1}{r^2}$$

$$\iint\limits_{E_n}|f|dxdy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{n}\left|\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}\right|\cdot\frac{dr}{r^2}\leqslant\iint\limits_{F_n}-||-=\int\limits_0^{\pi/2}\left|\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}\right|d\varphi\int\limits_{1/\sqrt2}^{n}\frac{dr}{r^2}=$$

$$=\underbrace{\int\limits_0^{\pi/2}\left|\frac{\cos^3\varphi-\sin^3\varphi}{\cos^6\varphi+\sin^6\varphi}\right|d\varphi}_{A>0}\cdot\left(\sqrt2-\frac1n\right)=A(\sqrt2-\frac1n)\xrightarrow[n\to\infty]{}A\cdot\sqrt2,\ \text{т.е. сход.}$$

$$\exists\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{E_n}|f|dxdy\Longrightarrow\ \text{Исх. инт. сход.}$$

**Задача 121.**

$$\iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant z-1}\frac{x-y}{z^3}dxdydz$$

*f меняет знак* $\Longrightarrow\ \int|f|\dots$

$$\iiint\limits_{E_n}\frac{x-y}{z^3}dxdydz=$$

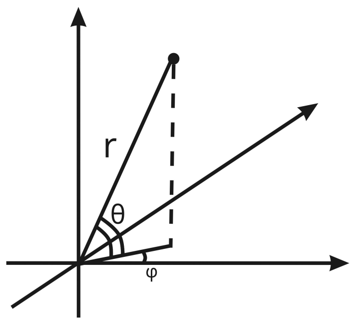
$$/*\ \frac{r}{r^3}\cdot r^2=1\Longrightarrow\ \text{Расх.}*/$$

$$=\begin{bmatrix}\text{Цилиндр.}\\\text{К-ты}\end{bmatrix}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{n-1}}dr\int\limits_{r^2+1}^{n}\left|\frac{r\cos\varphi-r\sin\varphi}{h^3}\right|\cdot rdh=\int\limits_0^{2\pi}|\cos\varphi-\sin\varphi|d\varphi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{n-1}}r^2dr\int\limits_{r^2+1}^{n}\frac{dh}{h^3}=\left.\frac{h^{-2}}{-2}\right|_{r^2+1}^{n}$$

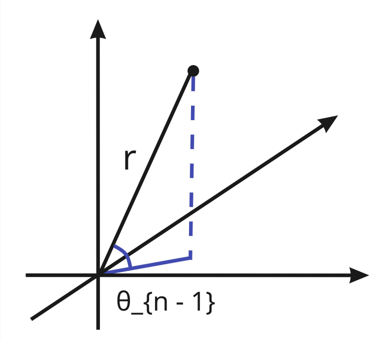
$$=A\cdot\int\limits_0^{\sqrt{n-1}}r^2dr\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2(r^2+1)}\right)=\frac A2\int\limits_0^{\sqrt{n-1}}\left(\frac{r^2}{r^2+1}-\frac{r^2}{n^2}\right)dr=\frac A2\int\limits_0^{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{r^2+1}-\frac{1}{n^2}r^2\right)dr=$$

$$=\frac A2\left(r-\operatorname{arctg}r-\frac{1}{3n^2}r^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{n-1}}=\frac A2\left(\sqrt{n-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{n-1}-\frac{\sqrt{n-1}^3}{3n^2}\right)\to\infty\Longrightarrow\ \text{Расх.}$$

$$\mathbb{R}^{\nvDash}\ x^2+y^2 \to \text{ Пол.}$$
$$\mathbb{R}^{\nVDash}\ x^2+y^2+z^2 \to \text{ Сф.}$$
$$\dots$$
$$\mathbb{R}^{\ltimes}\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \to \text{ Обоб.Сфер.}$$




$$x_n = r\sin\theta_{n-1}$$




$$x_{n-1} = r\cos\theta_{n-1}\cdot\sin\theta_{n-2}$$

$$x_{n-2} = r\cos\theta_{n-1}\cdot\cos\theta_{n-2}\cdot\ldots$$

$$\dots$$

$$x_1 = r\cos\theta_{n-1}\cdot\cos\theta_{n-2}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi\cdot\psi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi\cdot\psi \\ z = r\sin\theta\cdot\psi \\ p = r\sin\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_2 = r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \\ x_3 = r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2} \\ \ldots \\ x_{n-1} = r\cos\varphi_1\sin\varphi_2 \\ x_n = r\sin\varphi_1 \end{cases}$$

$$|det\ J| = r^{n-1}\cdot\cos\varphi_{n-2}\cos^2\varphi_{n-3}\cdot\ldots\cdot\cos^{n-2}\varphi_1$$

$$\varphi_{n-1}\in[0,2\pi)$$
$$\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$r>0$$

## Исследовать интеграл на сходимость ($\|x\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$):

**Задача 122.**

$$\int\limits_{\|x\|>1}\frac{1}{\|x\|^p}dx$$

$$E_m = \{1<\|x\|<m\}, m\to\infty$$

$$\int\limits_{E_m}\frac{1}{\|x\|^p}dx = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi_{n-2}\ldots\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi_1\int\limits_1^m\frac{1}{r^p}\cdot r^{n-1}\cdot\cos\varphi_{n-2}\cdot\cos^2\varphi_{n-3}\cdot\ldots\cdot\cos^{n-2}\varphi_1 dr =$$

$$A\cdot\int\limits_1^m r^{n-1-p}dr \xrightarrow[m\to\infty]{} A\cdot\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{r^{p+1-n}}dr$$

$$p+1-n>1 \qquad n<p \qquad p>n \quad \text{Сход.}$$

**Задача 123.**

$$\int\limits_{\|x\|<1}\frac{1}{\|x\|^p}dx$$

# 14. [14.12.23] Семинар №14

## "Что с определением 1-го и 2-го курса?"

Пусть $[a, b]$ - обычный отрезок на прямой. Верно ли, что

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_0^1 f\ dx \neq \int_1^0 f\ dx$$

## "Что с определением 1-го и 2-го курса?"

Сходится ли интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx$ (в смысле 1-го курса)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

Сходится по Дирихле

$$\left(\left|\int\limits_0^A \cos t dt\right| \leqslant 2,\ \ \frac{1}{\sqrt{t}} \to 0 \text{Монот.}\right)$$

Сходится ли интеграл $\int_{\mathbb{R}} \cos x^2 dx$ (в смысле 2-го курса)

$$\int\limits_{-A}^{A} |\cos x^2| dx = 2\int\limits_0^A |\cos x^2| dx \geqslant 2\int\limits_0^A \cos^2(x^2)dx = \int\limits_0^A (1 + \cos(2x^2))dx$$

Расходится

## "А что правда могут получиться различные ответы при различных исчерпаниях?"

Рассмотреть $\iint\limits_E \frac{y}{x} dxdy$, где $E = \{x \geqslant 1, |y| \leqslant 1\}$, и два исчерпания: $A_n = \{x \in [1, n], |y| \leqslant 1\}$ и $B_n = A_n \cup \{x \in [n, 2n, y \in [0, 1]]\}$

## "А можно без вот этих ваших исчерпаний? И так же всё понятно..."

Сравнить три интеграла

$$\iint\limits_{x \geqslant 1, y \geqslant 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx\ \frac{y}{x^2 + y^2}\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty} = \int\limits_1^{+\infty} -\frac{1}{x^2 + 1} dx = -\operatorname{arctg} x|_1^{+\infty} = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$\int_1^{+\infty} dy\ \frac{-x}{x^2 + y^2}\Bigg|_{x=1}^{x=+\infty} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

В продолжение предыдущего: "Да, но если функция неотрицательная, то там же любое исчерпание подойдёт == значит, можно сразу писать повторные интегралы?"

Рассмотреть интегралы

$$\iint\limits_{(0,1)^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{3/4}},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/4}}$$

## Для тех, кто скучает по линалу, вычислить:

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-P(x_1,x_2,\ldots,x_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Где $P(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j (a_{ij} = a_{ji})$ - положительно определённыя квадратичная форма.

# 15. [15.12.23] Семинар №14

## Вычислить:

**Задача 124.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = I$$

*Рассмотрим*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$E_n = \{x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^n e^{-r^2} \cdot rdr = \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^n e^{-r^2} \cdot rdr =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \pi \int_0^n e^{-r^2} d(r^2) = \lim_{n\to\infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi$$

$$D_n = \{x \in [-n, n], y \in [-n, n]\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-n}^{n} e^{-y^2} dy =$$

$$= \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2} dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = I^2$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

## Задача 6 из листка №14

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-P(x_1 x_2 \ldots x_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$P = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

$$\exists \text{ замена } x = Cy, C - \text{ортог. матрица}$$

$$P(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Все $\lambda_j > 0$ (положительно определённая)

$$\int \cdots \int\limits_{[-m,m]^n} e^{-P(y_1,\ldots,y_n)} dy_1 \ldots dy_n = \int_{-m}^{m} dy_1 \int\limits_{-m}^{m} dy_2 \ldots \int_{-m}^{m} dy_n e^{-\lambda_1 y_1^2} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n y_n^2} =$$

$$= \int\limits_{-m}^{m} e^{-\lambda_1 y_1^2} dy_1 \cdot \int\limits_{-m}^{m} e^{-\lambda_2 y_2^2} dy_2 \ldots \int\limits_{-m}^{m} e^{-\lambda_n y_n^2} dy_n = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n}} = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{det(a_{ij})}}$$

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/y^2, \ \ 0 < x < y < 1 \\ -1/x^2, \ \ 0 < y < x < 1 \\ 0, \ \ \text{иначе} \end{cases} \quad \text{на } [0, 1]^2$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f dy \quad \text{ и } \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f dx$$

$$1)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f dy = \int\limits_0^1 dx \left( \int\limits_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int\limits_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) = \int\limits_0^1 dx \left( -\frac{1}{x^2} \cdot x + \left( -\frac{1}{y} \right) \Big|_x^1 \right) = \int\limits_0^1 \left( -\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) dx = -1$$

$$2)\ \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f dx = \int\limits_0^1 dy \left( \int_0^y \frac{1}{y^2} dx + \int\limits_y^1 -\frac{1}{x^2} dx \right) = \int\limits_0^1 dy \left( \frac{1}{y^2} \cdot y + 1 - \frac{1}{y} \right) = \int\limits_0^1 dy = 1$$

f - Не интегр.