Dina

November 2023

1 Метод Кардано

$$ax^3+bx^2+cx+d \implies x^3+ax^2+bx+c \implies x^3+px+q$$

$$[x^3+ax^2+bx+c]+[x:=x-\frac{a}{3}] \implies x^3+px+q$$

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(x-\frac{a}{3}\right)+c=\left(x^2+\frac{a^2}{9}-\frac{2ax}{3}\right)\left(x-\frac{a}{3}\right)+a\left(x^2+\frac{a^2}{9}-\frac{2ax}{3}\right)+b\left(x-\frac{a}{3}\right)+c=$$

$$x^3+\underline{\frac{a^2x}{9}}-\underline{\underline{\frac{2ax^2}{3}}}-\underline{\underline{\frac{ax^2}{3}}}-\underline{\underline{\underline{\frac{a^3}{27}}}}+\underline{\frac{2a^2x}{9}}+\underline{\underline{ax^2}}+\underline{\underline{\underline{\frac{a^3}{9}}}}-\underline{\frac{2a^2x}{3}}+bx-\frac{ab}{3}+c=x^3+\underline{\frac{a^2x}{3}}+\underline{\underline{\underline{\frac{2a^3}{27}}}}+bx-\frac{ab}{3}+c=$$

$$x^3+x\left(\frac{a^2}{3}+b\right)+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)$$

$$\begin{cases}x^3+px+q=0\\3x^2+p=0\end{cases} \implies x^2=-\frac{p}{3} \implies \begin{cases}2px+3q=0\\3x^2+p=0\end{cases} \implies 27q^2+4p^3=0 \implies \frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$$

$$[x^3+px+q=0]+[x^2=-\frac{p}{3}] \implies -\frac{px}{3}+px+q=0 \implies \frac{2px}{3}+q=0 \implies 2px+3q=0$$

$$2px+3q=0 \implies x=-\frac{3q}{2p} \implies 3\left(\frac{3q}{2p}\right)^2+p=0 \implies \frac{27q^2+4p^3}{4p^2}=0 \implies 27q^2+4p^3=0$$

$$D=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}$$

Пусть уравнение имеет 3 корня и один из них x_0. Рассмотрим многочлен

$$f(u)=u^2-x_0u-\frac{p}{3},\ \text{где } u - \text{ переменная}$$

По теореме Виета: $\alpha+\beta=x_0$ и $\alpha\beta=-\frac{p}{3} \implies$

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$
$$\alpha^3+\beta^3+\underbrace{(3\alpha\beta+p)}_{=0}(\alpha+\beta)+q=\alpha^3+\beta^3+q=0$$
$$\alpha^3+\beta^3=-q \text{ и } \alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}$$

Из этих двух равенств вытекает, что числа α^3 и β^3 являются корнями квадратного уравнения (Также применяем теорему Виета)

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \implies \alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \beta^3=-\frac{p}{2\alpha}, a\ \ x_0=\alpha+\beta$$

Это формула Кардано.

Замечание: Выбор корня x_0 не имеет значения, поскольку числа α и β зависят лишь от коэффициентов уравнения $x^3+px+q=0$, а не от его корней.

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}},\ \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$$

$$x_i = \alpha_i + \beta_i$$

α и β по 3 штуки, так как когда мы вычисляем корень третьей степени из какого-то комплексного числа, то получаем три других комплексных числа, применяя формулу Муавра: $(\cos(\gamma) + i\sin(\gamma))^n = \cos(n\gamma) + i\sin(n\gamma)$ с $n = 1/3$. α и β у нас вроде всегда получаются комплексными, сокращаются они обычно уже при суммировании. Без знания формулы Муавра и другой арифметики комплексных чисел решить не получится

$$I.\ D > 0$$

1 Вещественный корень $(\alpha_1 + \beta_1)$ и 2 комлексных корня.

$$II.\ D < 0$$

3 Вещественных корня

$$III.\ D = 0$$

3 Вещественнных корня и 2 из них одинаковые

2 Метод Феррари

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \implies x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \implies x^4 + qx^2 + px + r$$

$$I.\ \text{Убираем третью степень}$$

$$[x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d] + [x := x - \frac{a}{4}] \implies x^4 + qx^2 + px + r$$

$$\left(x - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(x - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(x - \frac{a}{4}\right) + d =$$

$$\left(x^4 + \frac{3a^2x^2}{8} + \frac{a^4}{256} - ax^3 - \frac{a^3x}{16}\right) + a\left(x^3 - \frac{3ax^2}{4} + \frac{3a^2x}{16} - \frac{a^3}{64}\right) + b\left(x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}\right) + c\left(x - \frac{a}{4}\right) + d =$$

$$\left(x^4 + \underline{\underline{\frac{3a^2x^2}{8}}} + \underline{\underline{\frac{a^4}{256}}} - \underline{ax^3} - \underline{\underline{\underline{\frac{a^3x}{16}}}} + \underline{ax^3} - \underline{\underline{\frac{3a^2x^2}{4}}} + \underline{\underline{\underline{\frac{3a^3x}{16}}}} - \underline{\underline{\frac{a^4}{64}}}\right) + \left(bx^2 - \frac{ab}{2} + \frac{a^2bx}{16}\right) + \left(cx - \frac{ac}{4}\right) + d =$$

$$\left(x^4 - \frac{3a^2x^2}{8} + \frac{a^3x}{8} - \frac{3a^4}{256}\right) + \left(bx^2 - \frac{abx}{2} + \frac{a^2b}{16}\right) + \left(cx - \frac{ac}{4}\right) + d =$$

$$x^4 + x^2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) + x\left(c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2}\right) + \left(d - \frac{ac}{4} + \frac{a^2b}{16} - \frac{3a^4}{256}\right)$$

$$II.\ \text{Выделяем полный квадрат}$$

$$[x^4 + qx^2 + px + r] + [2sx^2 + s^2] \implies (x^2 + s)^2 - (x + w)^2$$

$$x^4 + qx^2 + px + r = x^4 + qx^2 + px + r - 2sx^2 - s^2 + 2sx^2 + s^2 = (x^2 + s)^2 + (p - 2s)x^2 + qx + (r - s^2) =$$

$$(x^2 + s)^2 + (p - 2s)\left(x^2 - 2 \cdot \frac{qx}{2(p - 2s)}\right) + r - s^2 =$$

$$(x^2 + s)^2 + (p - 2s)\left(x^2 - 2 \cdot \frac{qx}{2(p - 2s)} + \frac{q^2}{4(p - 2s)^2}\right) + r - s^2 - \frac{q^2}{4(p - 2s)} =$$

$$(x^2 + s)^2 + (p - 2s)\left(x + \frac{q}{2(p - 2s)}\right)^2 + r - s^2 - \frac{q^2}{4(p - 2s)}$$

$$r - s^2 - \frac{q^2}{4(p - s)} = 0 \implies 4(p - s)(r - s^2) - q^2 = 0 \implies 4pr - 4ps^2 - 8rs + 8s^3 - q^2 = 0 \implies$$

$$8s^3 - 4ps^2 - 8rs + (4pr - q^2) = 0 \implies \text{Метод Кардано}$$

$$(x^2+s)^2+(p-2s)\left(x+\frac{q}{2(p-2s)}\right)^2=(x^2+s)^2-(2s-p)^2\left(x-\frac{q}{2(2s-p)}\right)^2=$$

$$(x^2+s)^2-((\sqrt{2s-p})^2)\left(x-\frac{q}{2(2s-p)}\right)^2=(x^2+s)^2-\left(x\sqrt{2s-p}-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)^2=$$

$$\left(x^2+s+x\sqrt{2s-p}-\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)\left(x^2+s-x\sqrt{2s-p}+\frac{q}{2\sqrt{2s-p}}\right)\implies 2\text{ Квадратных уравнения}$$

Если коротко сначала мы внедряем новую переменную s, потом для неё решаем кубическое уравнение. Всё это мы делаем чтобы привести наше изначальное уравнение к разнице квадратов и квадратному уравнению.