

Calculus Seminars

Дина Шакирова БКНАД222

September - December 2023

Special for my friends!

Содержание

1	[08.09.23] Семинар №1	2
2	[15.09.23] Семинар №2	5
3	[22.09.23] Семинар №3	9
4	[29.09.23] Семинар №4	12
5	[06.10.23] Семинар №5	15
6	[13.10.23] Семинар №6	19
7	[20.10.23] Семинар №7	23
8	[03.11.23] Семинар №8	26
9	[10.11.23] Семинар №9	32
10	[17.11.23] Семинар №10	37
11	[24.11.23] Семинар №11	42
12	[1.12.23] Семинар №12	46
13	[8.12.23] Семинар №13	50
14	[14.12.23] Семинар №14	55
15	[15.12.23] Семинар №14	57

1. [08.09.23] Семинар №1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S$$

Вычислить сумму ряда

Задача 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{3}}{3n-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{3n+2} \right) = \left(\frac{\frac{1}{3}}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{5} \right) + \left(\frac{\frac{1}{3}}{5} - \frac{\frac{1}{3}}{8} \right) + \left(\frac{\frac{1}{3}}{8} - \dots \right) + \dots =$$

Если что мы используем *Телескопический ряд*

$$= \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{3}}{3N+2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6}$$

Задача 2.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \right) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{5} \right) + \\ &\quad \left(\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{2}}{6} \right) + \dots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{\frac{1}{2}}{N} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{2}}{N+1} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{N} - \frac{1}{N+1} + \frac{\frac{1}{2}}{N+2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{N+1} - \frac{1}{N+1} + \frac{\frac{1}{2}}{N+2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Задача 3.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= \sum_{n=2}^N \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln \prod_{n=2}^N \frac{n^2 - 1}{n^2} = \ln \left(\frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{N^2 - 1}{N^2} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(N-1)(N+1)}{N^2} \right) = \\ &= \ln \frac{N+1}{2N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

Исследовать ряд на сходимость (Необходимое условие):

$$\sum a_n cx. \implies a_n \rightarrow 0$$

Или, как отрицание необходимого условия:

$$a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum a_n \text{ расх.}$$

Задача 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \implies a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \neq 0 \implies \text{Ряд расходится (Необходимое условие)}$$

$$\boxed{\arctan x \sim x \quad [x \rightarrow 0]}$$

Задача 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3) \arctan \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (n+3) \arctan \frac{n+2}{n^2+n+1} = \left[\frac{n+2}{n^2+n+1} \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} (n+3) \frac{n+2}{n^2+n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n}{n^2} = 1 \neq 0 \implies$$

Ряд расходится (Необходимое условие)

Задача 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1)$$

$$\sqrt[n]{3} = 3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln 3} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$$

$$e^x = 1 + x + \bar{o}(x) \quad [x \rightarrow 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{3} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} n\left(1 + \frac{\ln 3}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 3 + \bar{o}(1)) = \ln 3 \neq 0$$

\implies Ряд расходится (Необходимое условие)

Задача 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \bar{o}(x^3), x \rightarrow 0$$

$$e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{-n} \cdot e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n+n^2 \cdot \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n+n^2(\frac{1}{n}-\frac{(1/n)^2}{2}+\bar{o}(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n+n-\frac{1}{2}+\bar{o}(1)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}+\bar{o}(1)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$$

\implies Ряд расходится (Необходимое условие)

Исследовать ряд на сходимость (Критерий Коши):

Критерий Коши

$$\sum a_n cx. \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

$$\forall p \geq 1$$

Отрицание Критерия Коши

$$\sum a_n pacx. \iff \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \geq \varepsilon$$

$$\exists p \geq 1$$

Задача 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}+2}$$

Степень в данном случае просто целая часть корня из n .

$$\begin{aligned} k &\leq \sqrt{n} < k+1 \\ k^2 &\leq n < (k+1)^2 \end{aligned}$$

$(-1)^{\lceil \sqrt{n} \rceil}$ одногого знака.

$$\left| \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lceil \sqrt{n} \rceil}}{\sqrt{n}+2} \right| = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \geq \frac{(k+1)^2 - 1 - k^2 + 1}{\sqrt{(k+1)^2 - 1} + 2} = \frac{2k+1}{\sqrt{k^2+2k}+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2 \neq 0$$

\Rightarrow Ряд расходится (Необходимое условие)

Задача 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n}$$

$$\sin \ln n > 0 [n \in [A, B]]$$

$$\sum_{n=A}^B \frac{\sin \ln n}{n} > 0$$

$$\begin{aligned} \sin \ln n &> \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k &< \ln n < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} &< n < e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \\ \lceil e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} \rceil &\leq n \leq \lfloor e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \rfloor \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=\lceil e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} \rceil}^{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \rfloor} \frac{\sin \ln n}{n} &> \frac{1}{2} \sum_{n=\lceil e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} \rceil}^{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \rfloor} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \rfloor - \lceil e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} \rceil + 1}{\lfloor e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \rfloor} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} - 1 - (e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} + 1) + 1}{e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} - e^{\frac{\pi}{6} + 2\pi k} - 1}{e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4\pi}{6}} - \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - 1 &< \lfloor a \rfloor \leq a \\ a &\leq \lceil a \rceil < a + 1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}) \neq 0$$

\Rightarrow Ряд расходится (Необходимое условие)

2. [15.09.23] Семинар №2

Исследовать ряд на сходимость (признаки сравнения):

Задача 10. *Ряд Бертрана*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$$

На лекции:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha > 1 \implies cx. \quad \alpha \leq 1 \implies pacx.$$

Признак Лобачевского-Коши: $a_n \geq 0 \quad \{a_n\}$

Если $\alpha < 0 : a_n \not\rightarrow 0 \quad (a_n \rightarrow \infty)$

Если $\alpha > 0 : f(x) = \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$

$$f'(x) = -(x^{\alpha}(\ln x)^{\beta})^{-2} \cdot \left(\alpha x^{\alpha-1} \cdot (\ln x)^{\beta} + x^{\alpha} \cdot \beta (\ln x)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x} \right) = - \frac{x^{\alpha-1} \cdot (\ln x)^{\beta-1}}{x^{2\alpha}(\ln x)^{2\beta}} > 0 \cdot (\alpha \ln x + \beta) < 0$$

начиная с $x = e^{-\beta/\alpha}$

$\{a_n\}$ убывает с $n = [e^{-\beta/\alpha}] + 1$ (То есть это выполняется именно не с начала, а с какого-то члена)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^{\alpha}(\ln 2^n)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha-n} \cdot n^{\beta}(\ln 2)^{\beta}} = \frac{1}{(\ln 2)^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2^{\alpha-1})^n}{n^{\beta}}$$

(Показательная функция сильнее многочлена)

$$\alpha < 1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2^{\alpha-1})^n}{n^{\beta}} \rightarrow \infty \quad (\neq 0) \rightarrow pacx.$$

$$\alpha = 1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \quad \beta > 1 \text{ cx.} \quad \left| \begin{array}{l} \beta \leq 1 \text{ pacx.} \end{array} \right.$$

$\alpha > 1 :$

$$\beta \geq 0 : \quad \frac{(1/2^{\alpha-1})^n}{n^{\beta}} \leq \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n \left| \sum \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n \right. \text{Сходящаяся геометрическая прогрессия}$$

$$\beta < 0 : \quad \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n n^{-\beta} \leq \left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha-1}{2}}} \right)^n \text{Cx. геом. прогрессия}$$

$$\alpha = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\beta}} :$$

$$\beta \leq 0 : \quad a_n \not\rightarrow 0 \text{ pacx.}$$

$$\beta > 0 \quad \frac{1}{(\ln n)^{\beta}} > \frac{1}{n} \quad (\forall n \geq n_0) \implies pacx.$$

Итого:

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$$

$$\alpha > 1 \text{ cx.}$$

$$\alpha < 1 \text{ pacx.}$$

$$\alpha = 1 \implies \begin{cases} \beta > 1 \text{ cx.} \\ \beta \leq 1 \text{ pacx.} \end{cases}$$

Задача 11.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n!)} \\ \frac{1}{\ln n!} = \frac{1}{\ln 1 + \dots + \ln n} \geq \frac{1}{n \ln n} \\ \sum \frac{1}{n \ln n} \text{ расх.}$$

Ряд Бертрана (Также можно сделать через формулу Стирлинга, но там тоже сводится к Ряду Бертрана). По первому признаку сравнения \sum расх.

$$\frac{1}{\ln n!} \sim \frac{1}{\ln(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n})} = \frac{1}{n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{n \ln n}$$

Расходитя по второму признаку сравнения

Задача 12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \sin \frac{1}{n}}$$

Эквивалентность

$$\frac{1}{\ln^2 \sin \frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln^2(\frac{1}{n} + \bar{o}(\frac{1}{n}))} = \frac{1}{\ln^2(\frac{1}{n}(1 + \bar{o}(1)))} = \frac{1}{(\ln \frac{1}{n} + \ln(1 + \bar{o}(1)))^2} = \\ = \frac{1}{\ln^2 n - 2 \ln n \cdot \ln(1 + \bar{o}(1)) + \ln(1 + \bar{o}(1))^2} \sim \frac{1}{\ln^2 n}$$

Ряд Бертрана с $\alpha = 0$ $\beta = 2 \implies$ расх.

По второму признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \sin(1/n)}$ расх.

Второе решение: сравнить с гармоническим рядом $n \geq n_0 \frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$

Задача 13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1)$$

Эквивалентность

$$n^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \ln n} - 1 \stackrel{\alpha \leq 0}{=} 1 + n^\alpha \ln n + \bar{o}(n^\alpha \ln n) - 1 = n^\alpha \ln n + \bar{o}(n^\alpha \ln n) \sim n^\alpha \ln n > 0$$

Второе равенство выполняется

При $\alpha < 0$ $n^\alpha \ln n \rightarrow 0$

При $\alpha \geq 0$ $n^\alpha \ln n \rightarrow \infty \implies a_n \rightarrow 0$ ряд расх. (По необходимому признаку)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \ln n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha} (\ln n)^{-1}}$$

При $\alpha \geq -1$ расх.

При $\alpha < -1$ ex.

Задача 14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{n}n^3}{3^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}} \cdot n^3 \rightarrow 0 \implies \forall n \geq n_0 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{n}} \cdot n^3 \leq 1 \implies \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \right)$$

$$\frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}} \stackrel{n \geq n_0}{\leq} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \stackrel{n \geq n_1 > n_0}{\leq} \frac{1}{n^2}$$

По первому признаку сравнения, так как последний ряд сходится, то и исходный сходится

Исследовать ряд на сходимость (признаки Даламбера и Коши):

Признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \rightarrow \begin{cases} q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ cx.} \\ q > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ pacx.} \end{cases}$$

Признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q \rightarrow \begin{cases} q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ cx.} \\ q > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ pacx.} \end{cases}$$

Задача 15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)!! \cdot n!}{(2n-1)!! \cdot (n+1)!} = \frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 (> 1)$$

\Rightarrow По признаку Даламбера исходный ряд расходится

Задача 16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$$

$$1. \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{3} < 1$$

\Rightarrow По признаку Даламбера исходный ряд сходится

$$2. \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n! \cdot 3^n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n! \cdot 3}} \sim \frac{n}{3 \cdot \sqrt[2n]{2\pi n} \cdot n \cdot e^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e}{3} < 1$$

\Rightarrow По признаку Коши исходный ряд сходится

$$3. \frac{n^n}{n! \cdot 3^n} \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot 3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \leq \left(\frac{e}{3}\right)^n, \sum \left(\frac{e}{3}\right)^n$$

\Rightarrow Сходится как геометрическая прогрессия

Задача 17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}} = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n^2+6}\right)^{n^2+6-6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} < 1$$

\Rightarrow По признаку Коши исходный ряд сходится

Признак Гаусса:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right), \quad \begin{cases} p > 1 \text{ cx.} \\ p \leq 1 \text{ pacx.} \end{cases}$$

Задача 18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2(n+1)-1)!!}{(2(n+1))!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!! \cdot (2n)!!}{(2n+2)!! \cdot (2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 \rightarrow 1$$

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) \left(1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), p = 1 \text{ По признаку Гаусса исходный ряд расходится}$$

Задача 19.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3(n+1)-4)}{3^{(n+1)} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)} = \frac{3n-1}{3n+3} \rightarrow 1$$

$$\frac{1 - \frac{1}{3n}}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{4/3}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$p = 4/3 > 1 \implies$ ряд сходится по признаку Гаусса

3. [22.09.23] Семинар №3

Исследовать ряд на сходимость (признак Вейерштрасса):

$$|a_n| \leq b_n \quad \sum b_n \text{ сх.} \implies \sum a_n \text{ сх.}$$

Задача 20.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3 + 2}} \\ & \sqrt{n^3 + 2} \sim n^{\frac{3}{2}} \\ & \left| \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3 + 2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

\implies Исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса

Задача 21.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n) \sin n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} \\ & \left| \frac{(2^n + 3^n) \sin n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} \right| \leq \frac{2^n + 3^n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} \leq \frac{3^n + 3^n}{n^2 \cdot 3^n} = \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

\implies Исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса

Исследовать ряд на сходимость (признак Лейбница (Частный случай признака Дирихле)): Для знакочередующихся рядов:

$$a_n \geq 0 \quad \{a_n\} \text{ убывает и } a_n \rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ сх.}$$

Задача 22.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n - 1)}{n^2 + 3n + 5} \\ & \left| \frac{(-1)^n (2n - 1)}{n^2 + 3n + 5} \right| = \frac{2n - 1}{n^2 + 3n + 5} \sim \frac{2}{n} \implies \text{расх.} \\ & a_n = \frac{2n - 1}{n^2 + 3n + 5} > 0, a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ & \left(\frac{2x - 1}{x^2 + 3x + 5} \right)' = \frac{2(x^2 + 3x + 5) - (2x - 1)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 10 - 4x^2 - 4x + 3}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \\ & = \frac{-2x^2 + 2x + 13}{(x^2 + 3x + 5)^2} < 0 \quad \text{начиная с некоторого момента} \\ & \implies a_n \searrow, n \geq n_0 \end{aligned}$$

\implies Сходится по признаку Лейбница

Задача 23.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n + 3}} \\ & |a_n| \sim \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n}} \implies . \\ & 1) b_n = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n + 3}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ & 2) \left(\frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x + 3}} \right)' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{2x + 3} - \ln^2 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2}{2x + 3} = \frac{2 \ln x (2x + 3) - \ln^2 x \cdot x}{x(2x + 3)^{3/2}} = \end{aligned}$$

$$= (4x + 6 - x \ln x) \cdot \frac{\ln x}{x(2x+3)^{3/2}} \stackrel{x \geq 1}{\geq 0}$$

$$g = (4x + 6 - x \ln x) \implies g' = (4x + 6 - x \ln x)' = 4 - \ln x - x \frac{1}{x} = 3 - \ln x < 0, x > e^3 \implies g \text{ } x > e^3$$

$b_n \searrow$ Начиная с некоторого момента $n \geq n_0$

\implies По признаку Лейбница ряд сходится

$$\log_a n \ll n^k \stackrel{k > 0}{\ll} a^n \stackrel{a > 1}{\ll} n! \ll n^n$$

Исследовать ряд на сходимость (признаки Дирихле и Абеля):

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M \\ 2) b_n - \text{МОНОТОН.} \\ 3) b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \implies \sum a_n b_n c x.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum a_n c x. \\ 2) b_n - \text{МОНОТОН.} \\ 3) b_n \leq M \end{array} \right\} \implies \sum a_n b_n c x.$$

Доказательство через умножение на $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ и Телескопическую сумму или через геометрическую прогрессию и комплексные величины $\alpha \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha n) = \frac{\sin \frac{(N+1)\alpha}{2} \sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha n) \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha n) = \frac{\cos \frac{(N+1)\alpha}{2} \cos \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha n) \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}$$

Задача 24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5}$$

$$\left| \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5} \right| \stackrel{n \geq 3}{\leq} \frac{1}{2n-5} \sim \frac{1}{2n} - \text{ расходится}$$

$$a_n = \cos \sqrt{2}n, b_n = \frac{1}{2n-5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^N \cos \sqrt{2}n \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\sqrt{2}}{2}|} - \text{огр.} \\ 2) \frac{1}{2n-5} - \text{МОНОТ.} (n \geq 3) \\ 3) \frac{1}{2n-5} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right\} \implies$$

Исходный ряд сходится по признаку Дирихле

Задача 25.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 4n}{\ln n - \ln \ln n}$$

$$a_n = \sin 4n, b_n = \frac{1}{\ln n - \ln \ln n}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{n=2}^N \sin 4n \right| = \left| \sum_{n=1}^N \sin 4n - \sin 4 \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N \sin 4n \right| + |\sin 4| \leq \frac{1}{\sin \frac{4}{2}} + |\sin 4| - \text{огр.} \\ 2) (\ln x - \ln \ln x)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1}{x \ln x} > 0, x \geq e \implies b_n \searrow \text{МОНОТ. при } n \geq 3 \\ 3) \frac{1}{\ln n - \ln \ln n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \implies$$

Исходный ряд сходится по признаку Дирихле

Задача 26.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} \cos \frac{1}{n}$$

$$\cos \frac{1}{n} \nearrow \text{ и огр.}$$

$$\sin(n+2) = \sin 2 \cos n + \sin n \cos 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} = \sin 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}}_{\text{Сх. по Дирихле}} + \cos 2 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n}}_{\text{Сх. по Дирихле}} \implies \text{Сходится как сумма сходящихся}$$

$$\left(\cos \frac{1}{x} \right)' = -\sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n} \text{ сход.} \\ 2) \left| \cos \frac{1}{n} \right| \leq 1 \\ 3) \cos \frac{1}{n} - \text{ монот.} \end{array} \right\} \implies \text{Исходный ряд сходится по признаку Абеля}$$

Задача 27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} \sim \frac{1}{n} \quad | \quad (-1)^n \cos 3n = \cos(3n + \pi n) = \cos((3 + \pi)n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left| \sum_{n=1}^N \cos((3 + \pi)n) \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{3+\pi}{2}|} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} \rightarrow 0, \text{ монот. убывает} \end{array} \right\} \implies \text{Исходный ряд сходится по признаку Дирихле}$$

Задача 28.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \arctan e^n$$

$$\left. \begin{array}{l} \arctan e^n \nearrow \text{ и огр } \frac{\pi}{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ сходится по признаку Лейбница} \end{array} \right\} \implies \text{Исходный ряд сходится по признаку Абеля}$$

4. [29.09.23] Семинар №4

Исследовать ряд на условную/абсолютную сходимость:

Задача 29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \neq 0 \text{ при } p \leq 0 \implies \text{исходный ряд расходится.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n^p} (p > 0) \\ \text{многоточие} \end{array} \right\} \implies \text{при } p > 0 \text{ ряд сходится по признаку Лейбница}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

При $p > 1$ ряд сходится, $p \leq 1$ ряд расходится

Ответ: $p \leq 0$ ряд расходится, $0 < p \leq 1$ ряд сходится условно, $p > 1$ ряд сходится абсолютно

Задача 30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$$

1) Признак Дирихле:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}|} - \text{огр.} \\ \frac{1}{n^p} - \text{многоточие} \\ \frac{1}{n^p} \rightarrow 0 \text{ при } p > 0 \end{array} \right\} \implies \text{с.х.}$$

2) Необходимый признак при $p \leq 0$:

$$\frac{\sin n}{n^p} \not\rightarrow 0 \implies \text{ряд расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^p}$$

3)

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p}, \quad \frac{1}{n^p} \text{ с.х. при } p > 1 \implies \sum \frac{|\sin n|}{n^p} \text{ с.х. по первому признаку сравнения}$$

4)

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 n}{n^p} = \frac{\frac{1}{2}}{n^p} - \frac{\frac{1}{2} \cos 2n}{n^p}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n^p} - p > 1 \text{ с.х., } p \leq 1 \text{ расх.} \\ \frac{\frac{1}{2} \cos 2n}{n^p} - \text{По Дирихле } p > 0 \text{ с.х., По необ. усл. } p \leq 0 \text{ расх.} \end{array} \right|$$

При $0 < p \leq 1$:

$$\sum \left(\frac{\frac{1}{2}}{n^p} - \frac{\frac{1}{2} \cos 2n}{n^p} \right) \text{ расх. (как сумма с.х. и расх.)} \implies \text{По признаку сравнения } \sum \frac{|\sin n|}{n^p} \text{ расх.}$$

5) При $p < 0$:

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \not\rightarrow 0 \implies \text{ряд расходится}$$

Ответ: $p \leq 0$ ряд расходится

$0 < p \leq 1$ ряд с.х. усл.

$p > 1$ ряд с.х. абсолютн.

Задача 31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+2})$$

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+2}) = \sin\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^2} + \left(-\frac{1}{8}\right) \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 + \bar{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) =$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \bar{o}(x^2) \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^3) \\ \end{array} \right.$$

$$= (-1)^n \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^3} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}_{\rightarrow 0} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^3} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{(\pi/n)^3}{3!}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n \pi}{n}}_{\text{Сх. по пр. Лейбница}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\text{Сх. по пр. сравнения}} \implies \text{Сходится как сумма сходящихся}$$

$$|\sin(\pi\sqrt{n^2+2})| = \left| \frac{(-1)^n \pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \stackrel{n \geq n_0}{=} \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \text{Расходится как сумма расх. и сх.}$$

Ответ: Ряд сходится условно

Задача 32.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

$$\ln\left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}}_{\rightarrow 0}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{1/n^{4/3}}{2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}}_{\text{Сх. по пр. Лейбница}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\text{Сх. по пр. сравнения}}$$

$$\implies \text{Сходится как сумма сходящихся}$$

$$\left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}\right) \right| = \left| \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{2/3}}}_{= \bar{o}(\frac{1}{n^{2/3}})} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\substack{\text{Расх.} \\ \text{Сх.}}} \right| \stackrel{n \geq n_0}{=} \underbrace{\frac{1}{n^{2/3}}}_{\text{Расх.}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\text{Сх.}}$$

⇒ Расходится как сумма сходящегося и расходящегося

Ответ: Ряд расходится условно

Задача 33.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n - \sin n}$$

$$\frac{\cos n}{n - \sin n} = \frac{\cos n}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin n}{n}} = \frac{\cos n}{n} \left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)^{-1} = \frac{\cos n}{n} \left(1 + \frac{\sin n}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\cos n}{n}}_{\text{Сх. по пр. Дирихле}} + \underbrace{\frac{\sin n \cos n}{n^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{Сх. по пр. сравнения}}$$

$$\implies \text{Сходится как сумма сходящихся}$$

$$\left| \frac{\cos n}{n - \sin n} \right| = \left| \frac{\cos n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \left| \frac{|\cos n|}{n} \cdot \left|1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \right| \stackrel{n \geq n_0}{=} \frac{|\cos n|}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{|\cos n|}{n}}_{\text{Расх.}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Сх.}} - \text{Расходится как сумма сх. и расх.}$$

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{\cos^2 n}{n} = \underbrace{\frac{1/2}{n}}_{\text{Расх.}} + \underbrace{\frac{1/2 \cdot \cos 2n}{n}}_{\text{Сх. по Дирихле}}$$

Ответ: Ряд расходится условно

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сх., если } \exists \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N p_n \neq 0$$

Если $\lim = 0$, то расходится к нулю, иначе расходится

Необходимое условие:

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сх.} \implies p_N = \frac{\prod_{n=1}^N p_n}{\prod_{n=1}^{N-1} p_n} \rightarrow \frac{p}{p} = 1$$

$$\forall N \geq N_0 \quad p_N > 0 \quad \prod_{n=N_0}^N p_n = \prod_{n=N_0}^N e^{\ln p_n} = e^{\sum_{n=N_0}^N \ln p_n} \iff \sum_{n=N_0}^N \ln p_n \text{ сх./расх.}$$

$$\prod_{n=N_0}^N p_n \text{ сх. абс./усл.} \iff \sum_{n=N_0}^N \ln p_n \text{ сх. абс./усл.}$$

Вычислить:

Задача 34.

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Задача 35.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

Исследовать ряд на условную/абсолютную сходимость:

Задача 36.

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} \underset{\text{сх.}}{\approx} \sum_{n=1}^{\infty} \ln n^{\frac{(-1)^n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ln n$$

Сходится по признаку Лейбница, так как $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ и $(\frac{\ln x}{x})' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ начиная с некоторого значения $x \geq 3$. Итак функция монотонно убывает и стремится к 0.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \ln n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} - \text{Расходится как Ряд Бертрана } \alpha = 1, \beta = -1$$

Ответ: Ряд сходится условно

Задача 37.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n} \underset{\text{сх.}}{\approx} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n} &= \ln \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0}} = \ln \left(1 + \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0} \right)^{-1} = \ln \left(1 - \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0} + \frac{\sin^2 n}{n} - \frac{\sin^3 n}{n^{3/2}} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) = \\ &= -\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{\sin^2 n}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 n}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right) = -\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + \frac{1/2 \sin^2 n}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \\ &= \underbrace{-\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\text{Сх. по пр.Дирихле}} + \underbrace{\frac{1/4}{n}}_{\text{Расх.}} - \underbrace{\frac{1/4 \cos 2n}{n}}_{\text{Сх. по пр.Дирихле}} + \underbrace{\bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{Сх. по пр.сравнения}} \implies \text{Расходится как сумма расх. и сх.} \end{aligned}$$

Ответ: Ряд расходится

5. [06.10.23] Семинар №5

Произведение рядов по Коши:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

Найти произведение рядов в смысле Коши:

Задача 38. a)

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \\ & c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ & c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!(2n-2k)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k)!} = \\ & = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} \\ & 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \implies 2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \stackrel{\text{нужно}}{=} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Берём по нечётным k от 1 до $2n+1$

$$\begin{aligned} 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n \\ \underbrace{C_n^1 + C_n^3 + \dots}_{2^n/2} = \underbrace{C_n^0 + C_n^2 + \dots}_{2^n/2} \end{aligned}$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}$
b)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$$

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{k!} \cdot \frac{3^{n-k+1}}{(n-k+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k \stackrel{\text{нужно}}{=} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} (2^{n+1} - 2) \\ \underbrace{C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+1}^1}_{=1} \underbrace{C_{n+1}^{n+1}}_{=1} = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} (2^{n+1} - 2)$

$$f_n \xrightarrow{D} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_D |f_n - f| = 0$$

Исследовать функциональную последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве D (по определению):

Задача 39.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin \frac{x}{n}, D = [-1, 1] \\ f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sin 0 = 0 \\ \sup_{[-1,1]} \left| \sin \frac{x}{n} - 0 \right| &= \sup_{[0,1]} \sin \frac{x}{n} = \sin \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \text{с. равн.} \end{aligned}$$

Задача 40.

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, D = [0, 1]$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - x^{2n}) = 0$$

$$\sup_{[0,1]} |x^n - x^{2n} - 0| = \sup_{[0,1]} (x^n - x^{2n}) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \text{сх. неравномерно}$$

$$(x^n - x^{2n})' = \dots \quad x_0 = 1/\sqrt[n]{2} - \text{т. max.}$$

Задача 41.

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2}, D = [1, +\infty]$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} = \left[\frac{n}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2nx}{n^2 x^2}}{\frac{1}{n^2 x^2} + 1} = 0$$

$$\sup_{[1,+\infty]} \left| \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} - 0 \right| = \sup_{[1,+\infty]} \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} = \frac{2n}{1 + n^2} \rightarrow 0 \implies \text{сх. равн.}$$

$$\left(\frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \right)' = \frac{2n \cdot (1 + n^2 x^2) - 2nx \cdot n^2 \cdot 2x}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{2n - 2n^3 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{2n(1 - n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n - \text{непр. } [a, b) \\ f_n \xrightarrow{[a,b)} f \\ \text{Но } f \text{ имеет разрыв в т. } a \\ (\text{Непр. на } (a, b)) \end{array} \right\} \implies f_n \xrightarrow{(a,b)} f$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n - \text{непр. } [a, b) \\ f_n \xrightarrow{[a,b)} f \\ \{f_n(a)\} \text{ расх.} \end{array} \right\} \implies f_n \xrightarrow{(a,b)} f$$

$$f_n \xrightarrow{(a,b)} f \implies f_n \xrightarrow{[a,b)} f$$

Исследовать функциональную последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве D (гранична точка и всякие свойства):

Задача 42.

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}, D_1 = [0, 1], D_2 = (0, 1]$$

$$D_1 : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx} = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n(x) - \text{непр. на } D_1 \\ f - \text{разр.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{УТВ. 1}} f_n \xrightarrow{D_1} f$$

$$D_2 : \left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ [0, 1] \implies f - \text{разрыв.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{УТВ. 1}} f_n \xrightarrow{D_2} f$$

Задача 43.

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4 + n^2 x^2}, D = (0, +\infty)$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{4}{n^2} + x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n - \text{непр. на } [0, +\infty) \\ \{f_n(0) = \frac{n^2}{4}\} \text{ расх.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{УТВ. 2}} f_n \xrightarrow{D} f$$

Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции? Рассмотреть пример:

Задача 44.

Функция Дирихле: $f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x)$, где $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$$f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\psi(x)}_{\text{огр.}} = 0 - \text{непр.}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \psi(x) - 0 \right| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \psi(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \implies \text{сх. равн.}$$

Показать, что последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n$ сходится равномерно на \mathbb{R} , но:

Задача 45.

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' \Big|_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$$

$$f(x) = 0 \quad \left(\frac{1}{n} \rightarrow 0, |\arctan x^n| < \frac{\pi}{n} \right)$$

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \arctan x^n - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \implies \text{сх. равн.}$$

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (x^n)^2} \cdot nx^{n-1} = \frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} |x| > 1 \implies \lim = 0 \\ |x| < 1 \implies \lim = 0 \\ x = 1 \implies 1/2 \\ x = -1 \implies \text{расх.} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(1) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n - \text{интегр. на } [a, b] \\ f_n \rightrightarrows f \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f - \text{интегр. на } [a, b] \\ \text{И } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \end{array} \right.$$

Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0, 1]$, однако:

Задача 46.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

$$f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} x \in (0, 1) \quad n(1-x)^n &\rightarrow 0 \\ x = 1 \rightarrow f_n &\equiv 0 \rightarrow 0 \\ x = 0 \rightarrow f_n &\equiv 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\sup_{[0,1]} |nx(1-x)_0^n| = \sup_{[0,1]} nx(1-x)^n \stackrel{\text{ниже}}{=} \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\rightarrow e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\rightarrow 1}$$

$$\rightarrow e^{-1} \neq 0 \implies \text{сх. неравномерно}$$

$$(nx(1-x)^n)' = n(1-x)^n + nx \cdot n(1-x)^{n-1} \cdot (-1) = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx) = 0 \implies 1-(n+1)=0 \implies x = \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0 \\
& \lim \int_0^1 f_n(x) dx = \lim \int_0^1 nx(1-x)^n dx = [1-x=y, -dx=dy] = \lim \int_1^0 n(1-y)y^n (-dy) = \\
& = \lim \int_0^1 n(y^n - y^{n+1}) dy = \lim n \left(\frac{y^{n+1}}{n+1} - \frac{y^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \lim n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} \right) = 0
\end{aligned}$$

При каких значениях параметра α последовательность $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$

- a) сходится на отрезке $[0, 1]$
- b) равномерно сходится на $[0, 1]$
- c) возможен предельный переход под знаком интеграла $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

6. [13.10.23] Семинар №6

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ сх. поточечно } S_N = \sum_{n=1}^N f_n(x) \rightarrow S \\ \text{сх. равномерно } S_N \rightrightarrows S$$

Признак Вейерштрасса: $|a_n(x)| \leq b_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сх. равномерно}$

Признак Дирихле:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq M - \text{равн. огр.} \\ 2) b_n(x) - \text{монот. по } n (\forall x) \\ 3) \overset{D}{\underset{n}{\lim}} b_n(x) = 0 \end{array} \right\} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \text{ сх. равн. на } D$$

Признак Абеля:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сх.равн.} \\ 2) b_n(x) - \text{монот. по } n (\forall x) \\ 3) |b_n(x)| \leq M - \text{равн. огр.} \end{array} \right\} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \text{ сх. равн. на } D$$

Критерий Коши: $\sum a_n(x) \text{ сх. равномерно на } D \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \geq 1 \quad \forall x \in D \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon$$

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (признак Вейерштрасса):

Задача 47.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + nx + n^2}, D = (0, +\infty)$$

$$\left| \underbrace{\frac{1}{x^2 + nx + n^2}}_{>0} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ сх.}$$

\implies Исходный ряд сходится равномерно.
Пр.Вейер.

Задача 48.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{1 + n^9 x^2}, D = \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{\sin(nx)}{1 + n^9 x^2} \right| \leq \frac{1}{1 + n^9 x^2} \quad [x = 0] \implies \text{посл.}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}} + \boxed{|\sin x| \leq |x|} \quad \left| \frac{\sin(nx)}{1 + n^9 x^2} \right| \leq \frac{|nx|}{2\sqrt{n^9 x^2}} = \frac{n|x|}{2n^{9/2}|x|} = \frac{1}{2n^{7/2}}$$

$$\sum \frac{1}{2n^{7/2}} \text{ сх. } (7/2 > 1) \quad \text{Пр.Вейер.} \quad \text{Исходный ряд сх. равномерно}$$

Метод Граничной точки:

$$\left. \begin{array}{l} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in (a, b) \\ \text{сх.равн.} \\ f_n \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} c_n \end{array} \right\} \implies \lim_{x \rightarrow a^+} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

Если $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ расходится $\implies \sum f_n(x)$ не сходится равномерно на (a, b)

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (границная точка):

Задача 49.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}, D = (0, 1)$$

Если бы ряд сходился равномерно, то $\exists \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, но он расходится $\left[\frac{x^n}{n} \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} \frac{1}{n} \right] \implies \text{Ряд сходится неравномерно.}$

Задача 50.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n \ln n}, D = (0, \pi)$$

$x = 0 : \sum \frac{1}{n \ln n}$ – расх.(ряд Бертрана $\alpha = 1, \beta = 1$) \implies Исходный ряд сх. неравномерно

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (признаки Дирихле и Абеля):

Задача 51.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, D = (\delta, 2\pi - \delta), \delta \in (0, \pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \\ 2) \frac{1}{n} \text{ – монот.} \\ 3) \frac{1}{n} \rightrightarrows 0, n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{Пр.Дирихле}]{} \text{Исходный ряд сходится равномерно}$$

Задача 52.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}, D = (0, +\infty)$$

$$a_n(x) = \sin x \cdot \sin(nx), b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$$

$$1) \left| \sum_{n=1}^N \sin x \cdot \sin(nx) \right| = |\sin x| \cdot \left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| \leq |\sin x| \cdot \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{n+x}} \text{ – монот. по } n \left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} > \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \right)$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{n+x}} \rightrightarrows 0, n \rightarrow \infty$$

$$\sup_{(0,+\infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{n+x}} - 0 \right| = \sup_{(0,+\infty)} \frac{1}{\sqrt{n+x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$\xrightarrow[\text{Пр.Дирихле}]{} \text{Исходный ряд сходится равномерно на } D.$

Задача 53.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \arctan(nx), D = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ сх.равн. (сх. по Дирихле)} \\ 2) \arctan(nx) - \text{ монот. по } n \\ 3) |\arctan(nx)| \leq \pi/2 - \text{ равн.огр.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Пр.Абеля}} \text{Исходный ряд сходится равномерно}$$

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость (Критерий Коши):

Задача 54.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, D = (0, 2\pi)$$

(Можно ли поставить такой x , чтобы ряд расходился?)

Отрицание Критерия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N \exists p > 1 \exists x \in D \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \geq \varepsilon$$

$$\left| \frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n+2)x)}{n+2} + \dots + \frac{\sin((n+p)x)}{n+p} \right| \quad x = \frac{1}{n+p} \Rightarrow \sin \frac{n+k}{n+p} \in I$$

$$\left| \frac{\sin \frac{n+1}{n+p}}{n+1} + \frac{\sin \frac{n+2}{n+p}}{n+2} + \dots + \frac{\sin 1}{n+p} \right| = \frac{\sin \frac{n+1}{n+p}}{n+1} + \frac{\sin \frac{n+2}{n+p}}{n+2} + \dots + \frac{\sin 1}{n+p} = \frac{\sin \frac{n+1}{2n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{n+2}{2n}}{n+2} + \dots + \frac{\sin 1}{2n}$$

$$\geq n \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \sin \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \quad \varepsilon = \frac{1}{4} \sin \frac{1}{2}$$

\implies Ряд сходится неравномерно

Вычислить:

Задача 55.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

Проверим есть ли равномерная сходимость на $(0, 1)$

$$\left| \frac{1}{2^n \cdot n^x} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \sum \frac{1}{2^n} \text{ сх.} \xrightarrow{\text{Пр.Вейер.}} \text{сх. равномерно}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

$$\text{Но: } \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} (x - x^{N+1}) = x \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

Законно ли почленное дифференцирование ряда:

Задача 56.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$$

При фиксированном x_0 ряд знакопостоянный $\implies \arctan \frac{x_0}{n^2} \sim \frac{x_0}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{n^2}$ сх. \implies ряд сходится на \mathbb{R}

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (\frac{x}{n^2})^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2} \\
& \left| \frac{n^2}{n^4 + x^2} \right| \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}, \sum_{\text{сx.}} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{\text{Пр.Вейер.}} \text{сx. равномерно} \\
& \Rightarrow \left(\sum \arctan \frac{x}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{x}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}
\end{aligned}$$

На любом отрезке ряд сходится равномерно, но на открытом множестве бывает всякое

7. [20.10.23] Семинар №7

Найти множество сходимости ряда/ При каких x ряд сходится:

Задача 57.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cos x)^n}{n^3}$$

$$1) |2 \cos x| > 1 \quad a_n(x) \not\rightarrow 0 \implies \text{ряд расход. (необр. усл.)}$$

$$2) |2 \cos x| \leq 1 \quad |a_n| \leq \frac{1}{n^3}, \quad \sum \frac{1}{n^3} \implies \text{ряд сх. (Пр. сравнения/Пр. Вейерштр.)}$$

$$|\cos x| \leq \frac{1}{2} \implies \left[\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n \ln^x n}$$

Признак Дирихле:

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right| &\leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \\ (y \ln^x y)'_y = 1 \cdot \ln^x y + y \cdot x(\ln y)^{x-1} \cdot \frac{1}{y} &= \ln^x y + x(\ln y)^{x-1} = (\ln y)^{x-1}(\ln y + x) \implies \frac{1}{n \ln^x n} \searrow [n \geq n_0] \\ \frac{1}{n \ln^x n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned} \right\}$$

\implies Ряд сходится ($x \neq 2\pi k$)

При $x = 2\pi k$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{2\pi k}}$ $\nearrow k \leq 0$ ряд расходится
 $\searrow k \geq 1$ ряд сходится

Ряд сходится везде кроме $\{2\pi k, k \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \text{Формула Коши-Адамара: } \frac{1}{R} = \sqrt[n]{|a_n|}$$

Найти множество сходимости степенного ряда:

Задача 58.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^p} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[p]{n})^p} = 1 \implies R = 1 \implies (-1, 1) - \text{интервал сходимости}$$

$$x = 1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} p > 1 \text{ сх.} \\ p \leq 1 \text{ расх.} \end{cases}$$

$$x = -1 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \begin{cases} p > 0 \text{ сх. по пр.Лейбница} \\ p \leq 0 \quad a_n \not\rightarrow 0 \implies \text{расх.} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} p \leq 0 &\implies (-1, 1) \\ 0 < p \leq 1 &\implies [-1, 1) \\ p > 1 &\implies [-1, 1] \end{aligned}$$

Задача 59.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} x^n$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \implies R = +\infty$$

Ответ: $(-\infty, +\infty)$

Задача 60.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{3n}}{5^n \sqrt[3]{n^2+1}}$$

$$a_n \neq \frac{(-1)^n}{5^n \sqrt[3]{n^2+1}} = a_{3n}, \quad a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n]{\frac{1}{5^n \sqrt[3]{n^2+1}}}$$

Задача 61.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} (x+1)^{2n}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{n^{n+1}}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{n^{\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{2}}}}{n!}}$$

Вычислить сумму ряда:

Задача 62.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \implies R = 1 \implies \text{Инт. сх. } (-1, 1)$$

$$x = 1 : \sum n \text{ пасх. } (a_n \not\rightarrow 0)$$

$$x = -1 : \sum n(-1)^n \text{ пасх. } (a_n \not\rightarrow 0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 0 + 1 + 2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Задача 63.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ (Работает ли при } x = -1?)$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1, R = 1$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1)$$

$$S(x) = \int \frac{1}{1-x} dx + C = -\ln|1-x| + C$$

$$x = 0 \quad \sum 0 = 0 = S(0) = -\ln|1| + C \implies C = 0$$

Ответ: $-\ln(1-x), x \in (-1, 1)$

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 \implies -\ln(1-x), [-1, 1]$$

Задача 64.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \\ \sum n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2 \\ \sum \frac{nx^n}{2^n} = \sum n \left(\frac{x}{2}\right)^n [x=1] \end{aligned}$$

Ответ: 2

Задача 65.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)3^n} \left(\text{А что делать, если ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)3^n} ? \right) \\ S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \\ S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}, S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Итак, $S''(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\underset{\text{интегр.}}{\implies} S'(x) = -\ln|1-x| + C_1$$

$$S'(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0}{n-1} = 0 = -\ln|1-0| + C_1 \implies C_1 = 0$$

$$\text{T.e. } S'(x) = -\ln(1-x) \quad (x \in (-1, 1)) \implies |1-x| = 1-x$$

$$\implies S(x) = - \int \ln(1-x) dx + C_2 = (x-1) \ln(1-x) - x + C_2 \implies C_2 = 0$$

$$\implies S(x) = (x-1) \ln(1-x) - x. \text{ И, наконец, } x = \frac{1}{3} : S\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}-1\right) \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \ln\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \cdot (-\ln(1-x)) \end{aligned}$$

Итак,

$$f'(x) = -x \ln(1-x) \implies f(x) = - \int x \ln(1-x) dx + C = -\frac{x^2}{2} \ln(1-x) - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + C$$

$$f(0) = \sum 0 = 0 =$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{(1/3)^2}{2} \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) - \frac{(1/3)^2}{2} - \frac{1}{3} - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{18} \ln\frac{2}{3} - \frac{7}{18} - \ln\frac{2}{3} = -\frac{19}{18} \ln\frac{2}{3} - \frac{7}{18} \\ \sum \frac{1}{n(n+2)3^n} &= 9 \cdot \frac{1}{n(n+2)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 9 \cdot \left(-\frac{19}{18} \ln\frac{2}{3} - \frac{7}{18}\right) \end{aligned}$$

Разложить функцию в степенной ряд с центром в точке x_0 :

Задача 66.

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}, x_0 = 0$$

Задача 67.

$$f(x) = \ln(4+3x-x^2), x_0 = 2$$

Задача 68.

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt, x_0 = 0$$

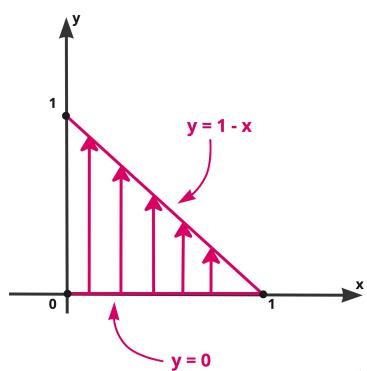
8. [03.11.23] Семинар №8

Во всех задачах этого листка f предполагается непрерывной

Привести двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ к повторному во всех возможных порядках:

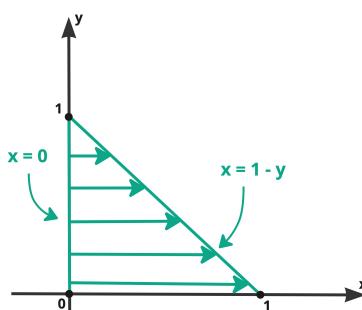
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f dy \right) dx \end{aligned}$$

Задача 69. D - замкнутый треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$



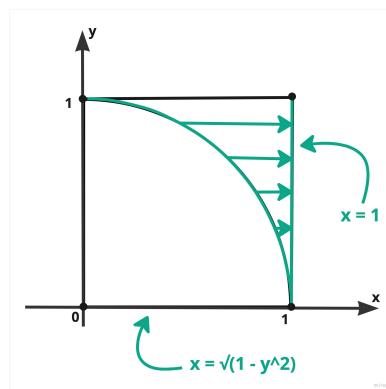
$$\iint_D f dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f dx$$



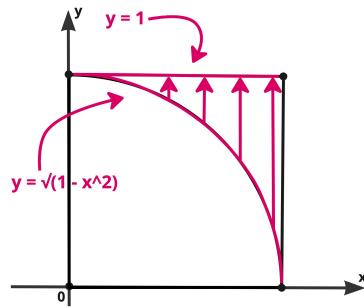
Задача 70.

$$D = \{(x, y) | x, y \in [0, 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$$



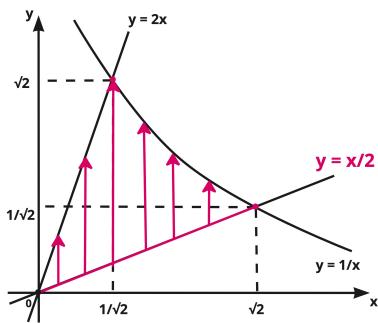
$$\iint_D f dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f dx$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f dy$$



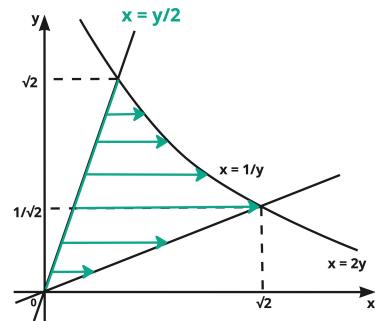
Задача 71.

$$D = \{(x, y) | 0 < xy \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, y - 2x \leq 0, 2y - x \geq 0\}$$



$$\iint_D f dxdy = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{2x} f dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{1/x} f dy$$

$$\iint_D f dxdy = \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_{y/2}^{2y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y/2}^{1/y} f dx$$

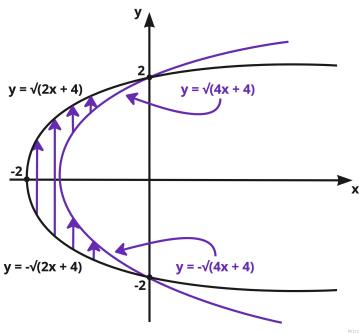


Задача 72.

$$D = \{(x, y) | y^2 \leq 2x + 4, y^2 \geq 4x + 4\}$$

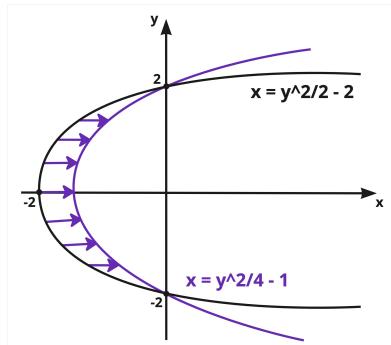
$$\iint_D f dxdy = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{\frac{y^2}{4}-1} f dx$$

$$\iint_D f dxdy = \int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f dy - \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f dy$$



$$\iint f \, dxdy = \int_{-2}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-2}^{\frac{y^2}{4}-1} f \, dx$$

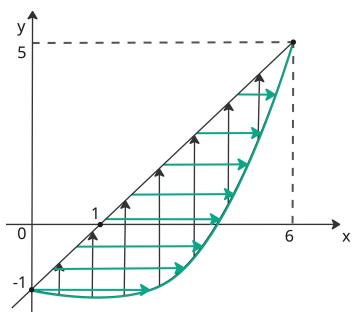
$$\iint f \, dxdy = \int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f \, dy - \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f \, dy$$



Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

Задача 73.

$$\int_0^6 dx \int_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x, y) dy = \frac{-1}{5} dy \int_{y+1}^{\sqrt{6y+6}} f \, dx$$



$$y = \frac{x^2}{6} - 1 \iff x^2 = 6y + 6 \implies x = -\sqrt{6y+6}$$

$$y = x - 1 \iff x = y + 1$$

Задача 74.

$$\int_0^1 dy \int_0^{2y-y^2} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x}}^1 f \, dy$$

$$x = 0$$

$$x = 2y - y^2 = y(2 - y)$$

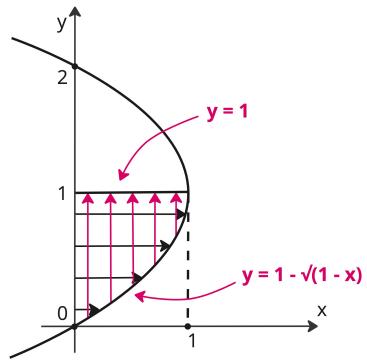
$$y^2 - 2y + x = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 + x - 1 = 0$$

$$(y - 1)^2 = 1 - x$$

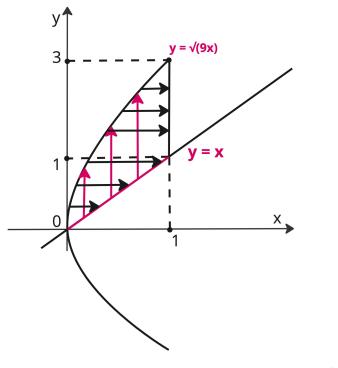
$$y - 1 = \pm \sqrt{1 - x}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - x}$$



Задача 75.

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{9x}} f dy$$



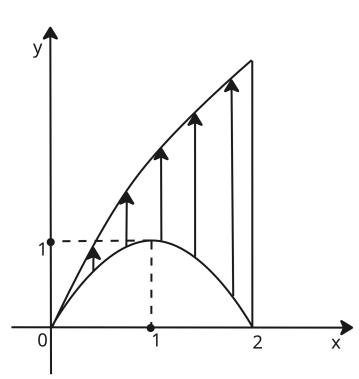
$$x = y^2/9 \quad x = y^2/9$$

$$x = y \quad x = 1$$

Задача 76.

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$\int_0^{3\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f dx - \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f dx$$



$$y = \sqrt{2x - x^2} \implies y^2 = 2x - x^2$$

$$y^2 + x^2 - 2x = 0$$

$$y^2 + (x - 1)^2 = 1$$

т.е. $y = \sqrt{2x - x^2}$ – верхняя половина окружности

с центром $(1, 0)$ и радиусом 1

$$(\iff (x - 1)^2 = 1 - y^2 \quad x - 1 = \pm \sqrt{1 - y^2})$$

$$y = 3\sqrt{x} (\iff x = y^2/9)$$

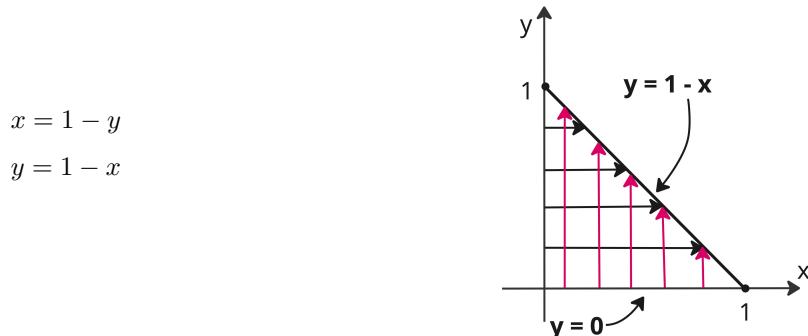
Вычислить интеграл:

Задача 77.

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1} dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{-x^2+2x+1} dy$$

$$1) \int_0^{1-x} e^{-x^2+2x+1} dy = e^{-x^2+2x+1} \cdot \int_0^{1-x} dy = e^{-x^2+2x+1} \cdot y|_0^{1-x} = e^{-x^2+2x+1} (1 - x - 0)$$

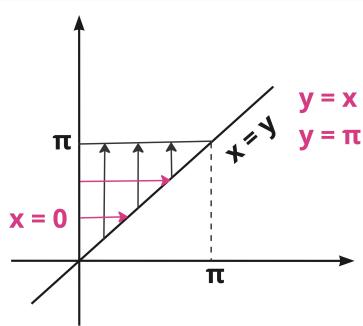
$$2) \int_0^1 e^{-x^2+2x+1} (1 - x) dx = \int_0^1 e^{-(x-1)^2+2} (1 - x) dx = \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = y \\ 2(x-1)dx = dy \end{array} \right] = \int_1^0 e^{-y+2} \frac{dy}{-2} = \frac{1}{2} \int_1^0 e^{2-y} dy = \\ = \frac{1}{2} (-e^{2-y})|_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e)$$



Задача 78.

$$\int_0^\pi x dx \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^\pi dy \int_0^y x \cdot \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \int_0^y x dx$$

$$1) \int_0^y x dx = \frac{x^2}{2}|_0^y = \frac{y^2}{2} - 0$$



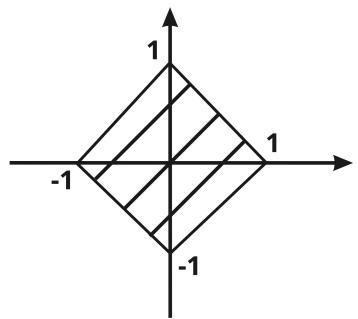
$$2) \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{y^2}{2} dy = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\pi y \sin y dy \frac{1}{2} \left[-y \cos y|_0^\pi + \int_0^\pi \cos y \cdot 1 dy \right] = \\ = \frac{1}{2} (\pi + \sin y|_0^\pi) = \frac{\pi}{2}$$

Задача 79.

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} x^2 y^2 dxdy \quad (\text{а если под интегралом } x^3 y^5?)$$

Четная функция на симметричном множестве (Объём под графиком в каждой четверти одинаковы!)

$$4 \iint x^2 y^2 dxdy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy = 4 \int_0^1 x^2 \cdot \frac{(1-x)^3}{3} dx = \dots = \frac{1}{45}$$



$$\int_0^{1-x} y^2 dy = \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1-x}$$

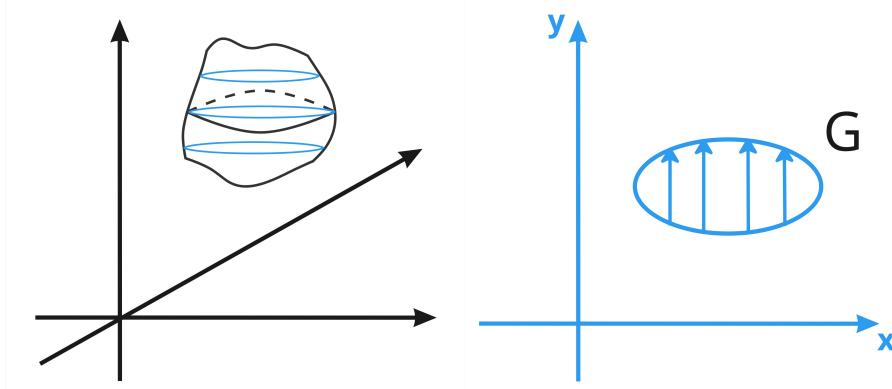
$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} x^3 y^5 \, dx dy = 0$$

9. [10.11.23] Семинар №9

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int dz \int dy \int f dx$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \iint_G f dx dy$$

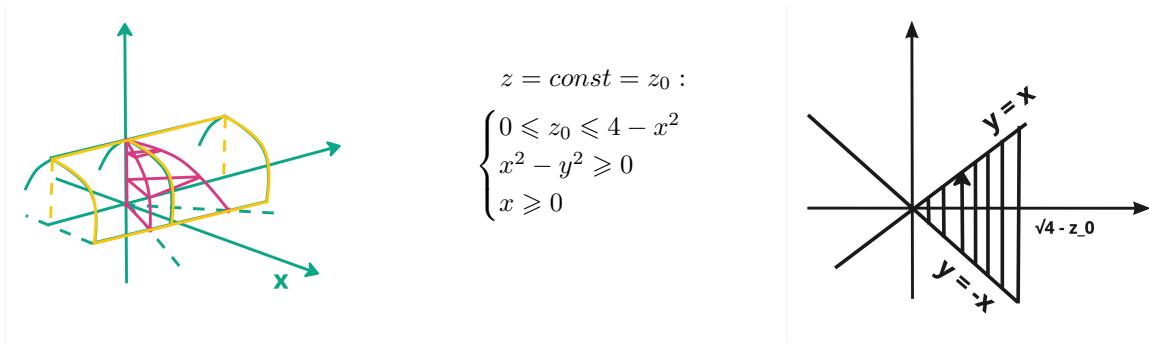
Сечение $z = z_0$



(Во всех задачах этого листка функция f предполагается непрерывной) Привести тройной интеграл $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ к одному из повторных:

Задача 80.

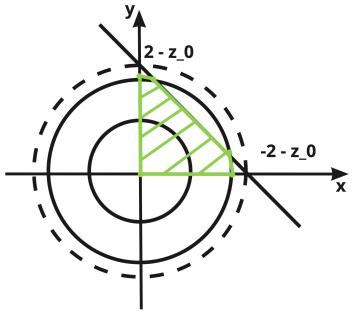
$$D = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 4 - x^2, x^2 - y^2 \geq 0, x \geq 0\}$$



$$\int_0^4 dz \int_0^{\sqrt{4-z}} dx \int_{-x}^x f dy = \iiint_D f dx dy dz$$

Задача 81.

$$D = \{(x, y, z) | x + y + z \leq 2, 0 \leq 4z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$



$$z = z_0 :$$

$$\begin{cases} x + y + z_0 \leq 2 \\ 0 \leq 4z_0 \leq 4 - x^2 - y^2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$y = 2 - x - z_0$$

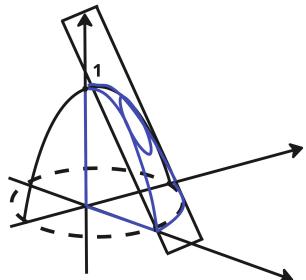
$$x^2 + (2 - x - z_0)^2 = 4 - 4z_0$$

$$x^2 + 4 + x^2 + z_0^2 - 4x - 4z_0 + 2xz_0 = 4 - 4z_0$$

$$2x^2 - 4x + 2xz_0 + z_0^2 = 0$$

$$x = \frac{z_0 - 2 \pm \sqrt{(z_0 - z)^2 - 2z_0^2}}{2} =$$

$$= \frac{z_0 - 2 \pm \sqrt{4 - 4z_0 - z_0^2}}{2}$$



$$x + y \leq 2 - z_0$$

$$z_0^2 + 4z_0 - 4 < 0$$

$$y \leq (2 - z_0) - x$$

$$\sqrt{4 - 4z_0} \leq 2 - z_0$$

$$(z_0 + 2)^2 < 8$$

$$4z_0 \leq 4 - x^2 - y^2$$

$$4 - 4z_0 \leq 4 - 4z_0 + z_0^2$$

$$z_0 < -2 + 2\sqrt{2}$$

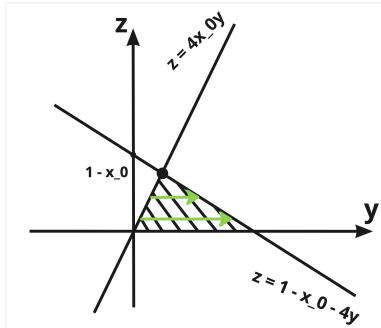
$$x^2 + y^2 \leq 4 - 4z_0$$

$$z_0 > -2 - 2\sqrt{2}$$

$$\iiint_D f dx dy dz = \int_0^{2\sqrt{2}-2} dz \left(\int_0^{\frac{z_0-2-\sqrt{\dots}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{4-4z_0-x^2}} f dy + \int_{\frac{z_0-2-\sqrt{\dots}}{2}}^{\frac{z_0-2-\sqrt{\dots}}{2}} dx \int_0^{2-z-x} f dy + \int_{\frac{z_0-2+\sqrt{\dots}}{2}}^{\sqrt{4-4z}} dx \int_0^{\sqrt{4-4z-x^2}} f dy \right) \\ + \int_{2\sqrt{2}-2}^1 dz \int_0^{\sqrt{4-4z}} dx \int_0^{\sqrt{4-4z-x^2}} f dy$$

Задача 82.

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4xy, x \geq 0, x + 4y + z \leq 1\}$$



$$4x_0y = 1 - x_0 - 4y$$

$$(4 + 4x_0)y = 1 - x_0$$

$$y = \frac{1 - x_0}{4 + 4x_0}$$

$$z \geq (1 - x_0) - 4y$$

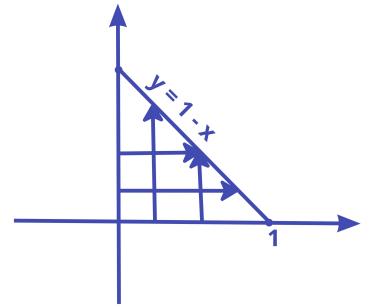
$$\int_0^1 dx \int_0^{\frac{4x(1-x)}{4+4x}} dz \int_{\frac{z}{4x}}^{\frac{1-x-z}{4}} f dy = \iiint_D f dx dy dz$$

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами:

Задача 83.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$$

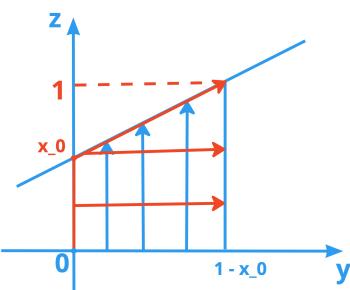
$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} F(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} F(x, y) dx$$



$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$$

$$y, z, x \rightarrow z, y, x$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f dz$$



$$\int_0^{x_0} dz \int_0^{1-x_0} f dy + \int_{x_0}^1 dz \int_{z-x_0}^{1-x_0} f dy$$

$$= \int_0^1 dx \left(\int_0^x dz \int_0^{1-x} f dy + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f dy \right)$$

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами:

Задача 84.

$$\int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)}$$

$$1) \int_0^{\frac{1}{xy}} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)} = \begin{bmatrix} xyz = t \\ xydz = dt \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{xy}dt}{x(1+t^2)} = \frac{1}{x^2y} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{x^2y} (\arctg 1 - \arctg 0) = \frac{\pi}{4x^2y}$$

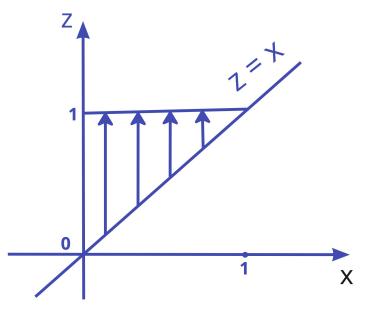
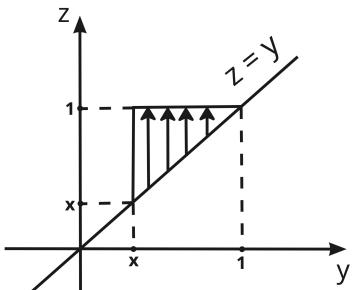
$$2) \int_y^2 \frac{\pi}{4x^2y} dx = \frac{\pi}{4y} \int_y^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4y} \Big|_{x=y}^{x=2} = \frac{\pi}{4y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right)$$

$$3) \int_1^2 \left(\frac{\pi}{4y^2} - \frac{\pi}{8y} \right) dy = -\frac{\pi}{4y} - \frac{\pi}{8} \ln|y| \Big|_1^2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \ln 2 + \frac{\pi}{8} \ln 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Задача 85.

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 \frac{\arctg z}{z} dz$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_z^1 \frac{\arctg z}{z} dy = \int_x^1 1 dy = y \Big|_{y=x}^{y=z} = z - x \\ &= \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{\arctg z}{z} \cdot (z - x) dz = \int_0^1 dz \int_0^z \frac{\arctg z}{z} (z - x) dx = \\ &= \left[\int_0^z (z - x) dx = zx - \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=z} = z^2 - \frac{z^2}{2} - 0 = \frac{z^2}{2} \right] = \end{aligned}$$



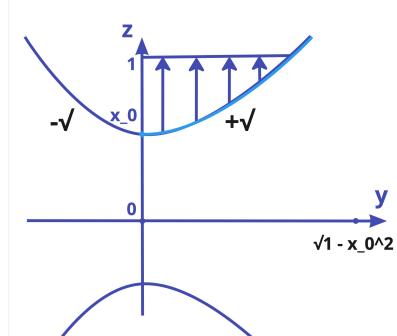
$$= \int_0^1 \frac{\arctg z}{z} \cdot \frac{z^2}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z \arctg z dz =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2} \cdot \arctg z \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{1+z^2} dz \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} dz \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (z - \arctg z) \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

Задача 86.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{\sin(\pi z)}{z} dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{\sin(\pi z)}{z} dy \cdot \sqrt{z^2 - x^2} dz = \\ &= \int_0^1 dz \int_0^z \frac{\sin(\pi z)}{z} \sqrt{z^2 - x^2} dx \end{aligned}$$



$$\int_0^z \sqrt{z^2 - x^2} dx = \begin{bmatrix} x = z \sin t \\ dx = z \cos t dt \\ t \in [0, \pi/2] \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{z^2 \cos^2 t} z \cos t dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} z^2 \cos^2 t dt = z^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{z^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{z^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi z^2}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{\pi z^2}{4} \cdot \frac{\sin(\pi z)}{z} dz = \frac{\pi}{4} \int_0^1 z \sin(\pi z) dz = \frac{\pi}{4} \left(z \cdot \frac{-\cos(\pi z)}{\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\frac{\cos(\pi z)}{\pi} \right) dz \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Вычислить:

Задача 87.

$$\iint_{[0,1]^n} \dots \int (x_1^2 + \dots + x_n^2) dx_1 \dots dx_n$$

Задача 88.

$$\iint_{[0,1]^n} \dots \int (x_1^2 + \dots + x_n^2)^2 dx_1 \dots dx_n$$

Задача 89.

$$\iint_{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1} \dots \int dx_1 \dots dx_n$$

10. [17.11.23] Семинар №10

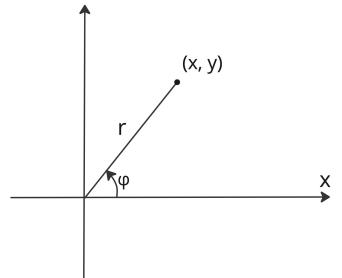
$$\int_X \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_U \cdots \int f(\varphi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \varphi_n(y_1, \dots, y_n)) \cdot |\det J_\varphi| dy_1 \dots dy_n$$

/ * $\int_a^b f(x) dx = [x = \varphi(t)] = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$
 $\varphi - \text{возд.} \implies \varphi' > 0 \quad |\varphi'(t)|$
 $\varphi - \text{убыв.} \implies \varphi' < 0 \quad |\varphi'(t)|$
 $\int_\beta^\alpha f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) (-\varphi'(t)) dt \quad * /$

Полярные координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi))$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Задача 90. Вывести якобиан полярной замены координат

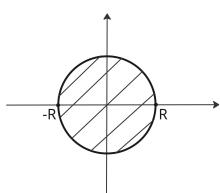
$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det J = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$|\det J| = r$$

Вычислить:

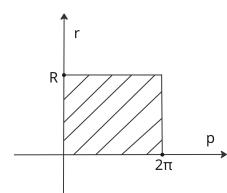
Задача 91.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = [\text{Пол. к-ты}] =$$



$$= \iint_{\substack{r^2 \leq R^2 \\ r > 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r e^{-r^2} dr =$$

$$= \int_0^R r e^{-r^2} dr \cdot 2\pi$$

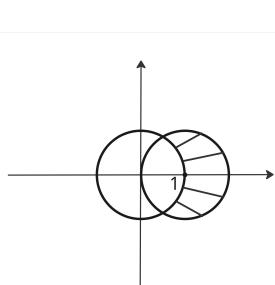


$$/ * \quad \int_0^{2\pi} f(R) d\varphi = f(R) \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = f(R) \cdot 2\pi \quad * /$$

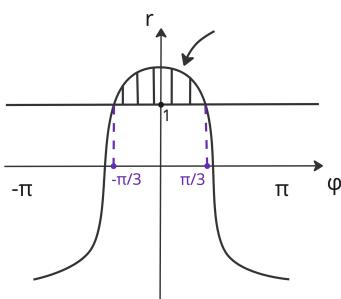
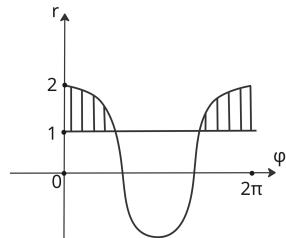
$$\left[\begin{array}{l} r^2 = t \\ 2rdr = dt \end{array} \right] = \pi \int_0^{R^2} e^{-t} dt = -\pi e^{-t} \Big|_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2})$$

Задача 92.

$$\iint_{\substack{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x}} \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx dy$$

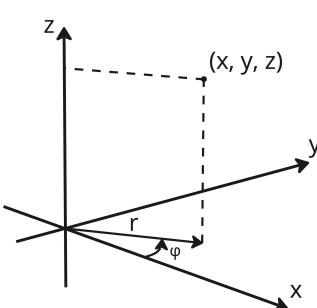


$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \leq 2x \\ & x^2 - 2x + y^2 \leq 0 \\ & (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ & 1 \leq r^2 \leq 2r \cos \varphi \\ & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & = \int_D \left(\frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} \right)^2 \cdot r dr d\varphi = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_1^{2 \cos \varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot r dr \\ & = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{r=1}^{r=2 \cos \varphi} d\varphi = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \left(2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \\ & = 2 \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 \varphi \left(2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi/3} (4 \sin^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi = \\ & = \int_0^{\pi/3} \left(2(1 - \cos 2\varphi) - \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(2 - 2 \cos 2\varphi - \frac{1}{\cos^2 \varphi + 1} \right) d\varphi = \\ & = 3\varphi - \sin 2\varphi - \operatorname{tg} \varphi \Big|_0^{\pi/3} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Цилиндрические координаты



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = r^2 \\ & J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det J = r \end{aligned}$$

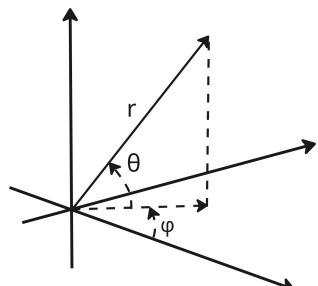
Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi & r > 0 \\ y = r \cos \theta \sin \varphi & \varphi \in [0, 2\pi) \\ z = r \sin \theta & \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

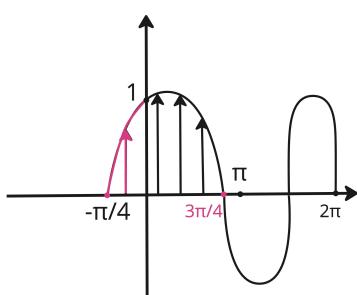
$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det J &= \sin \theta (r^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r \cos \theta (r \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta = r^2 \cos \theta \end{aligned}$$



Задача 93.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq x+y} (x+y) \, dx dy = [\text{Пол. к-ты}] =$$



$$\begin{cases} 0 < r \leq \cos \varphi + \sin \varphi \\ \varphi \in [-\pi, \pi) \end{cases}$$

$$\cos \varphi + \sin \varphi = 0$$

$$\tan \varphi = -1$$

$$\varphi = 3\pi/4, -\pi/4, \dots$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{\cos \varphi + \sin \varphi} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) dr &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot \frac{(\cos \varphi + \sin \varphi)^3}{3} d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos \varphi + \sin \varphi)^4 d\varphi = \dots \text{ счёт} \end{aligned}$$

Задача 94. Вывести якобианы цилиндрической и сферической замены координат

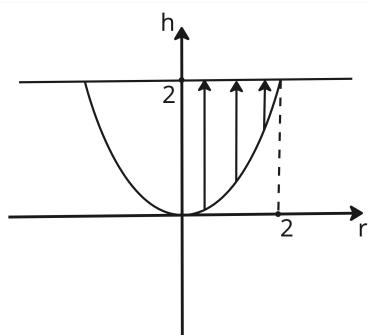
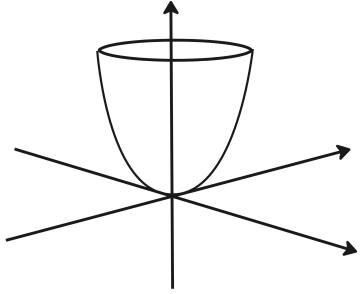
$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det J = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi$$

Вычислить:

Задача 95.

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 2z \\ z \leq 2}} (x^2 + y^2) \, dx dy dz = [\text{Цилиндр. к-ты}] =$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\substack{r^2 \leq 2h \\ h \leq 2 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)}} r^2 \cdot r dr d\varphi dh \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^2 r^3 dh = 2\pi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^2 r^3 dh = \\
&= 2\pi \int_0^2 r^3 \cdot \left(2 - \frac{r^2}{2} \right) dr = 2\pi \left(2 \cdot \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^2 = \dots
\end{aligned}$$

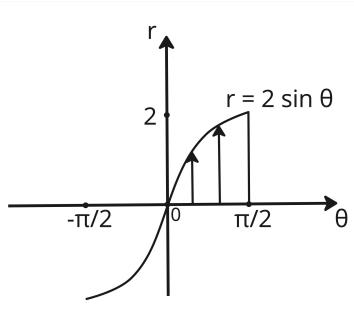
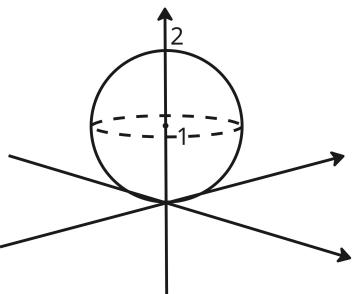


$$h = \frac{r^2}{2} = 2$$

Задача 96.

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 2z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = [\text{Сфер. к-ты}] =$$

$$\iiint_{\substack{r^2 \leq 2r \sin \theta \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}} \sqrt{r^2} \cdot r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta$$



$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \cos \theta dr = \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \cos \theta dr = \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \frac{(2 \sin \theta)^4}{4} d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/2} 4 \sin^4 \theta d(\sin \theta) = \\
&= 8\pi \frac{\sin^5 \theta}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{8\pi}{5}
\end{aligned}$$

Задача 97.

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ y^2+z^2 \leq x^2 \\ x \geq 0}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = [\text{Сфер. к-ты}] =$$

$$\begin{cases} r^2 \leq 1 \\ (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq (r \cos \theta \cos \varphi)^2 \\ r \cos \theta \cos \varphi \geq 0 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 \leq 1 \\ r^2 \cos^2 \theta \leq (r \sin \theta)^2 \\ r \sin \theta \geq 0 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy$$

$$\begin{cases} 0 < r < 1, \varphi \in [0, 2\pi) \\ \operatorname{tg}^2 \theta \geq 1, \sin \theta \geq 0 \implies \theta \geq \pi/4 \\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \cos \theta dr = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^4 \cos \theta dr =$$

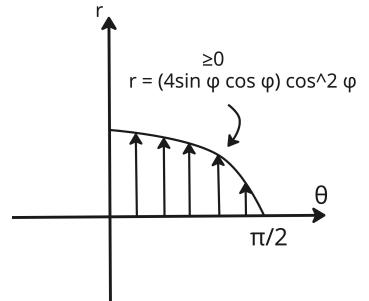
$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 d\theta = \frac{2\pi}{5} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Задача 98.

$$\iiint_{\substack{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \leq 4xy \\ x,y,z \geq 0}} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz = [\text{Сфер. к-ты}]$$

$$\begin{cases} (r^2)^{3/2} \leq 4r \cos \theta \cos \varphi \cdot r \cos \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \cos \varphi \geq 0 \\ r \cos \theta \sin \varphi \geq 0 \\ r \sin \theta \geq 0 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < r \leq 4 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}), \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{4 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi} \frac{r^3 \cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{r^3} \cdot r^2 \cos \theta dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{4 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi} r^2 dr = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta \frac{(4 \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi)^3}{3} d\theta = \\ &= \frac{4^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^9 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi \cdot \frac{1}{10} d\varphi = \frac{4}{30} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\varphi)^4 d\varphi = \\ &= \frac{1}{30} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{30} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi) d\varphi = \dots \end{aligned}$$

11. [24.11.23] Семинар №11

Вычислить (обобщенные полярные/сферические, перевод области в прямоугольник)

Задача 99.

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \\ z \geq 0 \\ (a,b,c > 0)}} z \, dx dy dz \\
 & \iiint_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \\ z \geq 0 \\ (a,b,c > 0)}} z \, dx dy dz = \left[\begin{array}{ll} x = a\tilde{x} & \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1 \\ y = b\tilde{y} & c \cdot \tilde{z} > 0 \\ z = c\tilde{z} & \\ J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, & |\det J| = abc \end{array} \right] = \\
 & \iiint_{\substack{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1, \\ \tilde{z} \geq 0}} c \cdot \tilde{z} \cdot abc \, d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = abc^2 \iiint_{\substack{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1, \\ \tilde{z} \geq 0}} \tilde{z} \, d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = \\
 & = \begin{bmatrix} \text{сфер. замена к-т} & \\ r^2 \leq 1 & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ r \sin \theta > 0 & \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \end{bmatrix} = abc^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r \sin \theta = \\
 & = r^2 \cos \theta dr = abc^2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta = \frac{abc^2 \pi}{4} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{abc^2 \pi}{4} \cdot \frac{-\cos 2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{abc^2 \pi}{4}
 \end{aligned}$$

Изначально:

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cos \varphi \cos \theta \\ y = b \cdot r \sin \varphi \cos \theta \\ z = c \cdot r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} r^2 \leq 1 \\ cr \sin \theta > 0 \\ r > 0 \end{cases}$$

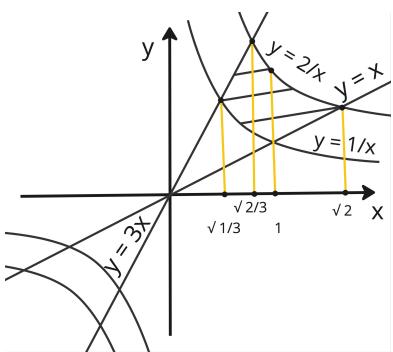
$$|\det J| = abc \cdot r^2 \cos \theta$$

Задача 100.

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\substack{x^{3/2} + y^{3/2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} y^2 \, dx dy \\
 & \iint_{\substack{x^{3/2} + y^{3/2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} y^2 \, dx dy = \left[\begin{array}{ll} x = r \cdot \cos^{4/3} \varphi & r^{3/2} \leq 1 \\ y = r \cdot \sin^{4/3} \varphi & r > 0, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ r \cdot \frac{4}{3} \cos^{1/3} \varphi \cdot (-\sin \varphi) & \end{array} \right] \\
 & \det J = \frac{4}{3} r \sin^{1/3} \varphi \cdot \cos^{7/3} \varphi + \frac{4}{3} r \sin^{7/3} \varphi \cos^{1/3} \varphi = \frac{4}{3} r \sin^{1/3} \varphi \cdot \cos^{1/3} \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{4}{3} r \sin^{1/3} \varphi \cdot \cos^{1/3} \varphi \\
 & = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin^{8/3} \varphi \cdot \frac{4}{3} r \sin^{1/3} \varphi \cos^{1/3} \varphi dr = / \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} / \\
 & = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{1/3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi \cdot \frac{1}{4} d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^{1/3} \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) = \\
 & = -\frac{1}{3} \left(\frac{\cos^{4/3} \varphi}{4/3} - \frac{\cos^{10/3} \varphi}{10/3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}
 \end{aligned}$$

Задача 101.

$$\iint_{\substack{1 \leq xy \leq 2, \\ x \leq y \leq 3x}} x^2 y^2 \, dx dy$$



$$\frac{2}{x} = x \implies x = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{x} = x \implies x = 1$$

$$\frac{2}{x} = 3x \implies x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x} = 3x \implies x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \quad u \in [1, 2], v \in [1, 3] \quad / * \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}, J = \dots * /$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}, \det J^{-1} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} = 2v$$

$$J_{f^{-1}} = J_f^{-1} \quad \text{и} \quad \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

$$= \int_1^2 du \int_1^3 dv \cdot u^2 \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^3 \frac{1}{v} dv = \frac{\ln 3}{2} \int_1^2 u^2 du = \frac{7 \ln 3}{6}$$

Вычислить:

Задача 102.

$$\int_{[0,1]^n} \cdots \int (x_1^2 + \dots + x_n^2) dx_1 \dots dx_n$$

$$\int_{[0,1]^n} \cdots \int x_1^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{[0,1]^n} \cdots \int x_2^2 dx_1 \dots dx_n$$

$$\int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 x_1^2 dx_1 \quad \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_3 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 x_2^2 dx_2$$

$$(main) = n \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 x_n^2 dx_n = \frac{n}{3} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_{n-1} = \frac{n}{3}$$

$$/ \iint (x^2 + y^2) dx dy = \iint x^2 \dots + \iint y^2 \dots = 2 \iint x^2 dx dy /$$

$$\iint x^2 =$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 dx \int_0^1 y^2 dy = \left(\int_0^1 dp \int_0^1 q^2 dq \right)$$

Задача 103.

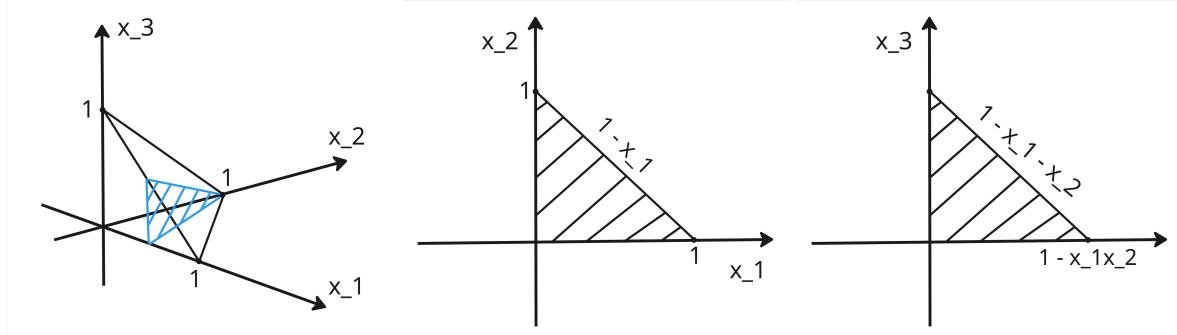
$$\int_{[0,1]^n} \cdots \int (x_1 + \dots + x_n)^2 dx_1 \dots dx_n$$

$$= x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \cdots \int (x_1^2 + \dots + x_n^2) dx_1 \dots dx_n + 2 \int \cdots \int (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) dx_1 \dots dx_n = \\
&= \int_{[0,1]^2} \cdots \int x_i x_j dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 x_1 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 dx_i \int_0^1 x_i x_j dx_j \\
&= \frac{n}{3} + 2 \cdot C_n^2 \cdot \int_{[0,1]^n} x_1 x_2 dx_1 \dots dx_n = \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{4} \\
&\int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 x_1 x_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 x_1 dx_1 = \frac{1}{4} \int_0^1 dx_3 \dots \int_0^1 dx_n = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Задача 104.

$$\int \cdots \int dx_1 \dots dx_n
\begin{array}{l}
x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\
x_1 + \dots + x_n \leq 1
\end{array}$$



$$\iint_{\substack{x_1+x_2 \leq 1 \\ x_i \geq 0}} dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 = \int_0^1 (1-x_1) dx_1 = -\frac{(1-x_1)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\iiint dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} (1-x_1-x_2) dx_2 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 - \frac{(1-x_1-x_2)^2}{2} \Big|_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} = \int_0^1 \frac{(1-x_1)^2}{2} dx_1 = \frac{-(1-x_1)^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\int \cdots \int dx_1 \dots dx_n = \frac{a^n}{n!}
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a \\
x_i \geq 0
\end{array}$$

База:

$$n = 1 \quad \int_0^a dx_1 = a$$

Переход:

$$\begin{aligned}
\int \cdots \int dx_1 \dots dx_{n+1} &= \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \dots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n \int_0^{a-x_1-\dots-x_n} dx_{n+1} = \int_0^a \frac{(a-x_1)^n}{n!} dx_1 = \\
&= -\frac{(a-x_1)^{n+1}}{n!(n+1)} \Big|_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\frac{1}{n!} \quad (a = 1)$$

Задача 105.

$$\int_{0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \leq a} \cdots \int x_1 \dots x_n dx_1 \dots dx_n$$

Ищем общую формулу:

$$\int_{0 \leq x_1 \leq a} x_1 dx_1 = \left. \frac{x_1^2}{2} \right|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

$$\int_{0 \leq x_2 \leq x_1 \leq a} \int_{0 \leq x_1 \leq a} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} x_1 x_2 dx_2 = \int_0^a x_1 \cdot \frac{x_1^2}{2} dx_1 = \left. \frac{x_1^4}{2 \cdot 4} \right|_0^a = \frac{a^4}{8}$$

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq a} \int_{0 \leq x_2 \leq x_1 \leq a} \int_{0 \leq x_1 \leq a} x_1 x_2 x_3 dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} x_1 x_2 x_3 dx_3 = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} x_1 x_2 \cdot \frac{x_2^2}{2} dx_2 = \\ &= \int_0^a x_1 \cdot \frac{x_1^4}{8} dx_1 = \left. \frac{x_1^6}{6 \cdot 8} \right|_0^a = \frac{a^6}{48} \\ &\frac{a^2}{2}, \frac{a^4}{8}, \frac{a^6}{48}, \dots \quad \text{может } \frac{a^{2n}}{2^n \cdot n!} ? \end{aligned}$$

Базу ужсе проверили (ажс 3 раза)

Переход:

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \dots \leq x_1 \leq a} \cdots \int x_1 x_2 \dots x_{n+1} dx_1 \dots dx_{n+1} &= \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_0^{x_{n-1}} dx_n \int_0^{x_n} x_1 x_2 \dots x_{n+1} dx_{n+1} = \\ &= \int_0^a x_1 dx_1 \cdot \frac{x_1^{2n}}{2^n \cdot n!} = \int_0^a \frac{x_1^{2n+1}}{2^n \cdot n!} dx_1 = \left. \frac{x_1^{2n+2}}{2^n \cdot n! \cdot (2n+2)} \right|_0^a = \frac{a^{2n+2}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \end{aligned}$$

Ответ:

$$\frac{a^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

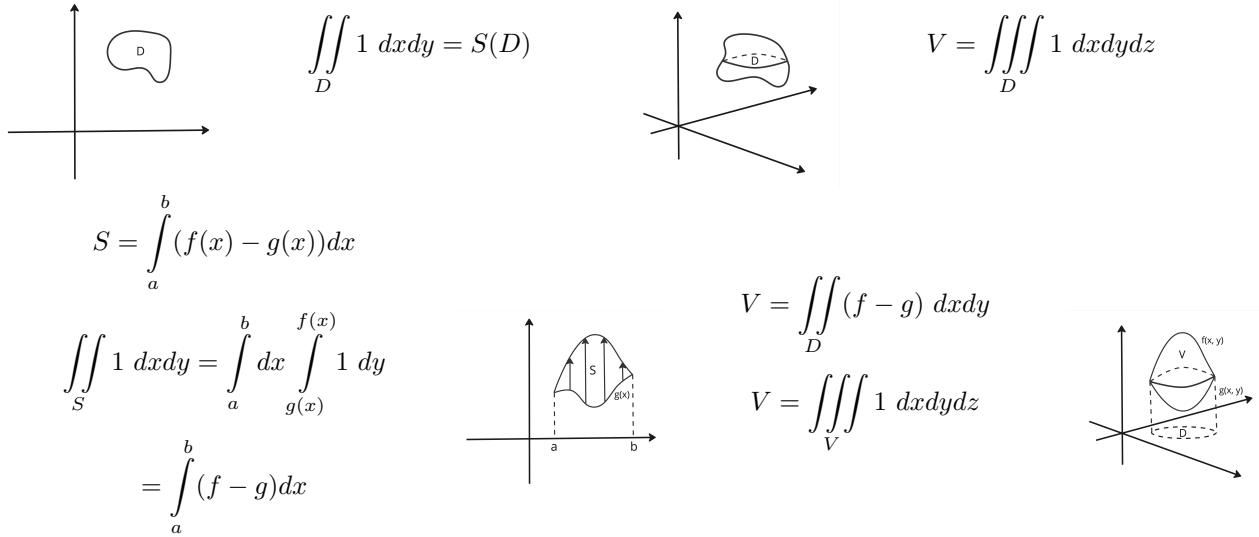
Вывести яобиан сферической замены координат в \mathbb{R}^n . Найти объём 6-мерной сферы:

Задача 106.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 \leq R^2$$

12. [1.12.23] Семинар №12

$$V(D) = \int_D \cdots \int 1 \, dx$$



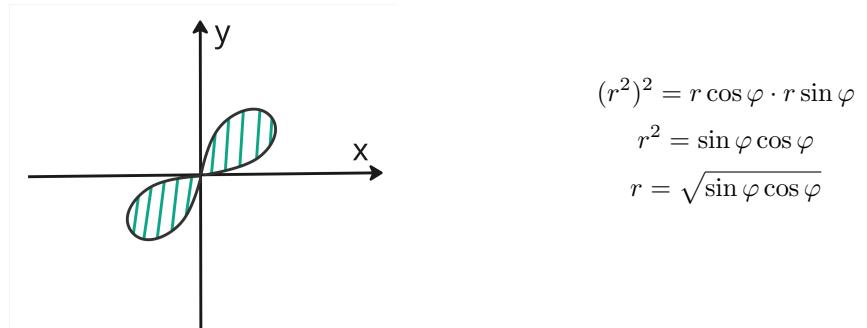
Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой(кривыми):

Задача 107.

$$(x^2 + y^2)^2 = xy$$

Пол. κ -ты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



$$S = 2 \iint_{\text{петля в 1й четверти}} 1 \, dxdy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}} 1 \cdot r dr =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Задача 108.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cos \varphi \\ y = b \cdot r \sin \varphi \end{cases} \quad r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \quad r^2 \leqslant 1 \quad J = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det J = abr$$

$$S = \iint 1 dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr = ab \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \pi ab$$

Задача 109.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \quad x = y, \quad x = 9y$$

$$\begin{cases} x = r \cos^4 \varphi & r > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin^4 \varphi \end{cases}$$

$$\sqrt{r} \cos^2 \varphi + \sqrt{r} \sin^2 \varphi = 1 \quad (\sqrt{r} = 1)$$

$$r \cos^4 \varphi = r \sin^4 \varphi \implies \operatorname{tg}^4 \varphi = 1 \implies \operatorname{tg} \varphi = \pm 1 \implies \operatorname{tg} \varphi = 1 \quad (\varphi = \frac{\pi}{4})$$

$$r \cos^4 \varphi = 9r \sin^4 \varphi \implies \operatorname{tg}^4 \varphi = \frac{1}{9} \implies \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\varphi = \frac{\pi}{6})$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos^4 \varphi & r \cdot 4 \cos^3 \varphi \cdot (-\sin \varphi) \\ \sin^4 \varphi & r \cdot 4 \sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det J = 4r \sin^3 \varphi \cos^5 \varphi + 4r \sin^5 \varphi \cos^3 \varphi = 4r \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi$$

$$S = \iint 1 dx dy = \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int_1^4 1 \cdot |\det J| dr = \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int_1^4 4r \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \cdot 2 \cdot 15 dr =$$

$$/ \int_1^4 2r dr = r^2 |_1^4 = 16 - 1 /$$

$$= 30 \left(\frac{1/4}{4} - \frac{1/8}{6} - \frac{1/16}{4} + \frac{1/64}{6} \right) = 30 \left(\frac{3}{16 \cdot 4} - \frac{7}{64 \cdot 6} \right) = 30 \frac{11}{64 \cdot 6} = \frac{11 \cdot 15}{64 \cdot 3} = \frac{55}{64}$$

Найти объём тела, заданного неравенствами:

Задача 110.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \rightarrow r^2 \leqslant 1$$

$$V = \iiint 1 dx dy dz = \begin{bmatrix} x = a \cdot r \cos \varphi \cos \theta \\ y = b \cdot r \sin \varphi \cos \theta \\ z = c r \sin \theta \\ \det J = abc r^2 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{array}{l} r > 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 1 \cdot abc r^2 \cos \theta dr = abc \cdot 2\pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \frac{1}{3} d\theta = \frac{2\pi abc}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi abc$$

Задача 111.

$$x^2 + y^2 \leqslant 4, \quad x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 1$$

$$V = \iiint 1 dx dy dz = \begin{bmatrix} \text{Цилиндр. к-ты} \\ x = r \cos \varphi \quad r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \\ J = r \sin \varphi \quad \det J = r \\ z = h \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dh \int_{\sqrt{1+h^2}}^2 1 \cdot r dr = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(\sqrt{1+h^2})^2}{2} \right) dh =$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (4 - (1 + h^2)^2) dh = \pi \left(3h - \frac{h^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \pi (3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}) \cdot 2 = 2\pi \frac{6\sqrt{3}}{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

Задача 112.

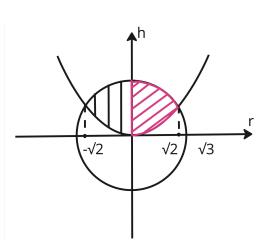
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \quad x^2 + y^2 \leq 2z$$

Сферич.

$$\begin{cases} r^2 \leq 3 \\ (r \cos \varphi \cos \theta)^2 + (r \sin \varphi \cos \theta)^2 \leq 2r \sin \theta \iff r^2 \cos^2 \theta \leq 2r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ r \leq \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Пулинидр.



$$\begin{cases} r^2 + h^2 \leq 3 \\ r^2 \leq 2h \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), h \geq r^2/2 \end{cases}$$

$$r^2 + \left(\frac{r^2}{2}\right) = 3 \quad \frac{r^4}{4} + r^2 = 3$$

$$r^4 + 4r^2 - 12 = 0 \quad r^2 = -6, r^2 = 2 \quad (r = \pm\sqrt{2})$$

$$V = \iiint 1 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} 1 \cdot r dh =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r^2}{2} \right) dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r^2}{2} \right) d(r^2) =$$

$$= \pi \left(-\frac{(3-r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{(r^2)^2}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi \left(-\frac{2}{3} - 1 + \frac{2 \cdot 3^{3/2}}{3} \right) = \pi (2\sqrt{3} - \frac{5}{3})$$

Найти объём тела, ограниченного поверхностью:

Задача 113.

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$$

Сферич. к-мвы:

$$(r^2)^2 = r \cos \varphi \cos \theta \cdot \sin \varphi \cos \theta \cdot r \sin \theta$$

$$\begin{cases} r = \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta \sin \theta > 0 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\sin \varphi \cos \varphi \sin \theta > 0$$

$$V = 4 \iiint_{\text{1-й окт.}} 1 dx dy dz = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta \sin \theta} 1 \cdot r^2 \cos \theta dr =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \frac{(\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta \sin \theta)^3}{3} = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi \cos \varphi)^3 d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^7 \theta \cdot \sin^3 \theta d\theta =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{40} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{30} \left(\frac{\sin^4 \varphi}{4} - \frac{\sin^6 \varphi}{6} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{30} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$$

Найти объём пирамиды:

$$\begin{aligned}
 & \{0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \leq a\} \quad (a > 0) \\
 V = \int \dots \int 1 dx_1 \dots dx_n &= \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_0^{x_{n-1}} 1 dx_n = \\
 &= \dots = \int_0^a \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \left. \frac{x_1^n}{n!} \right|_0^a = \frac{a^n}{n!} \\
 \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1} dx_{n-1} &= \left. \frac{x_{n-1}^2}{2} \right|_0^{x_{n-2}} = \frac{x_{n-2}^2}{2}
 \end{aligned}$$

Версия 15го семинара:

$$\begin{aligned}
 V = \int \dots \int 1 dx_1 \dots dx_n &= \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_0^{x_{n-1}} dx_n = \\
 int_0^{x_{n-1}} dx_n &= x_{n-1}; \quad \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1} dx_{n-1} = \left. \frac{x_{n-1}^2}{2} \right|_0^{x_{n-2}} = \frac{x_{n-2}^2}{2} \\
 \int_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}^2}{2} dx_{n-2} &= \frac{x_{n-3}^3}{6} \dots
 \end{aligned}$$

По мат. индукции

$$\frac{a^n}{n!}$$

Найти объём пирамиды:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \leq 1, x_i \geq 0 \right\} (a_i > 0)$$

Найти объём параллелипипеда, ограниченного плоскостями:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \pm h_i, h_i > 0, \det(a_{ij}) \neq 0$$

13. [8.12.23] Семинар №13

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз. исчерпанием мн-ва E, если

- 1) E_n – доп.
- 2) $E_n \subset E_{n+1}$
- 3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$

$$\int_E \cdots \int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \cdots \int f(x) dx$$

Если \exists и не зависит от $\{E_n\}$ - исч. \rightarrow Несоб. инт. сх.

T. 1

$f \geq 0 \implies$ Достаточно рассмотр. одно любое исчерпание

T. 2

$$\int_E f dx \text{ cx./pacx.} \iff \int_E |f| dx \text{ cx./pacx.}$$

Исследовать интеграл на сходимость ($p > 0$):

Задача 114.

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} \\ & f \geq 0 \\ & E_n = \left\{ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \\ & \iint_{E_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \left[\begin{array}{l} \text{Пол.} \\ \text{к-ты} \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/n}^1 \frac{1}{(r^2)^p} \cdot r dr = 2\pi \int_{1/n}^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = \\ & = \begin{cases} 2\pi \cdot \left| \frac{1}{1-p} \right|_{1/n}^1 = \frac{\pi}{1-p} \left(1 - \frac{1}{n^{2-2p}} \right) \xrightarrow{p>1} \infty, \text{ pacx.} \\ 2\pi \cdot \ln|r| \Big|_{1/n}^1 = -2\pi \ln \frac{1}{n} = 2\pi \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \implies \text{pacx.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:

$$p \geq 1 \implies \text{инт. pacx.}; p < 1 \implies \text{инт. сх. к } \frac{\pi}{1-p}$$

Задача 115.

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} \\ & f \geq 0 \\ & E_n = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\} \\ & F_n = \{(n-1)^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\} \\ & D_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2 \right\} \\ & \iint_{E_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \left[\begin{array}{l} \text{Пол.} \\ \text{к-ты} \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^n \frac{1}{r^{2p}} \cdot r dr = 2\pi \int_1^n \frac{dr}{r^{2p-1}} = \\ & = \begin{cases} (p \neq 1) 2\pi \left| \frac{r^{2-2p}}{2-2p} \right|_1^n = \frac{\pi}{1-p} (n^{2-2p} - 1) \xrightarrow{p>1} \frac{\pi}{p-1} \\ (p = 1) 2\pi \ln|r| \Big|_1^n = 2\pi \ln n \rightarrow \infty, \text{ pacx.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:

$$p \leq 1 \text{ pacx.}; p > 1 \implies \text{cx. к } \frac{\pi}{p-1}$$

Задача 116.

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} \\ & f \geq 0 \\ & E_n = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 - \frac{1}{n} \right\} \\ & \iiint_{E_n} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = \begin{bmatrix} \text{Сфер.} \\ \text{К-ты} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{1}{(1-r^2)^p} r^2 \cos \theta dr = \\ & 2\pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4\pi \cdot \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} \end{aligned}$$

Несобственный интеграл с первого курса

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^p} &= \begin{bmatrix} 1-r=t \\ -dr=dt \end{bmatrix} = \int_1^0 \frac{(1-t)^2(-dt)}{t^p \cdot (2-t)^p} = \int_0^1 \frac{(1-t)^2 dt}{t^p (2-t)^p} \\ 0 &\leq \frac{(1-t)^p}{t^p (2-t)^p} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^p \cdot 2^p} \end{aligned}$$

Ответ:

$$p < 1 \quad \text{с.п.} \geq 1 \quad \text{расх.}$$

Задача 117.

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dxdydz \\ & \rightarrow_{\text{T. 2}} \iiint \mathbb{R}^{\#} \left| \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^p} \right| dxdydz \\ & E_n = \left\{ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2 \right\} \\ & \iiint_{E_n} |\dots| dxdydz = \begin{bmatrix} \text{Сфер.} \\ \text{К-ты} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{1/n}^n \frac{|\sin r^2|}{r^{2p}} \cdot r^2 \cos \theta dr = \\ & = 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{1/n}^n \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr = 4\pi \int_0^1 \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr + 4\pi \int_1^{+\infty} \dots dr \\ & r \rightarrow 0 : \quad 0 \leq \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} \sim \frac{|r^2|}{r^{2p-2}} = \frac{1}{r^{2p-4}} \quad 2p-4 < 1 \text{ с.} \\ & p < 5/2 \\ & r \rightarrow \infty : \quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin r^2|}{r^{2p-2}} dr = \begin{bmatrix} r^2 = t, r = \sqrt{t} \\ 2rdr = dt \end{bmatrix} = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{p-1}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^{p-1/2}} dt \\ & \frac{1}{t^{p-1/2}} \geq \frac{|\sin t|}{t^{p-1/2}} \geq \frac{\sin^2 t}{t^{p-1/2}} = \frac{1/2}{t^{p-1/2}} - \frac{1/2 \cos 2t}{t^{p-1/2}} \\ & 1) \quad \left| \int_1^A \cos 2t dt \right| = \left| \frac{\sin 2A}{2} - \frac{\sin 2}{2} \right| \leq 1 - \text{орп.} \\ & \text{с. } p > 3/2 \quad \text{с. } p > 3/2 \quad \text{Ответ:} \\ & \text{расх. } p \leq 3/2 \quad \text{расх. } p \leq 3/2 \quad 2) \quad \frac{1}{t^{p-1/2}} \text{ МОНОТ.} \\ & 3) \quad \frac{1}{t^{p-1/2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (p > 1/2) \\ & p \in \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \text{ сход. Иначе расход.} \end{aligned}$$

Задача 118.

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\substack{|y| < 1}} \frac{x^2 dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} \\
 E_n = \{x \in [-n, n], y \in [-1, 1]\} \\
 \iint_{E_n} \frac{x^2 dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} &= \int_{-n}^n dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} \\
 \int_{-1}^1 \frac{x^2 dy}{(2 + x^2)^p} &\leq \int_{-1}^1 \frac{x^2 dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} \leq \int_{-1}^1 \frac{x^2 dy}{(1 + x^2)^p} \\
 = \frac{2x^2}{(2 + x^2)^p} &= \frac{2x^2}{(1 + x^2)^p} \\
 \int_{-n}^n \frac{2x^2}{(2 + x^2)^p} dx &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(2 + x^2)^p} dx \left(\frac{2x^2}{(2 + x^2)^p} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^{2p}} = \frac{2}{x^{2p-2}} \right) \text{ сх. при } p > 3/2 \\
 \int_{-n}^n \frac{2x^2}{(1 + x^2)^p} dx &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{(1 + x^2)^p} dx \left(\frac{2x^2}{(1 + x^2)^p} \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^{2p}} = \frac{2}{x^{2p-2}} \right) \text{ сх. при } p > 3/2
 \end{aligned}$$

Ответ: Сходится при $p > 3/2$, иначе расходится

Вычислить интеграл или установить его расходимость:

Задача 119.

$$\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \geq 1}} \frac{x^3 - y^3}{x^5 + y^5} dx dy$$

f меняет знак

$$E_n = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1 \text{ и } x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \iint_{E_n} \left| \frac{x^3 - y^3}{x^5 + y^5} \right| dx dy &= \left[\begin{array}{l} \text{Пол.} \\ \text{К-ты} \end{array} \right] \Rightarrow \iint_{E_n} \left| \frac{x^3 - y^3}{x^5 + y^5} \right| dx dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^n \left| \frac{r^3 \cos^3 \varphi - r^3 \sin^3 \varphi}{r^5 \cos^5 \varphi + r^5 \sin^5 \varphi} \right| \cdot r dr \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq n^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r \cos \varphi \geq 0 \\ r \sin \varphi \geq 0 \\ r \cos \varphi + r \sin \varphi \geq 1 \\ r^2 \leq n^2 \\ r > 0, \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < r \leq n \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ r(\cos \varphi + \sin \varphi) \geq 1 \end{array} \right. \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi} \right| d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^n \frac{1}{r} dr
 \end{aligned}$$

$$D_n = \{x, y \geq 0, 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

$$\iint_{E_n} | \dots | dx dy \geq \iint_{D_n} | \dots | dx dy$$

$$\begin{aligned}
\iint_{E_n} \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi} \right| dx dy &\geq \iint_{D_n} -||- dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^n \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi} \right| \cdot \frac{dr}{r} \\
&= \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi} \right| d\varphi \cdot (\ln n - \ln 1) = A \cdot \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\
&\text{Число } A > 0 \\
\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} |...| dx dy &\implies \text{Исх. Инт. расх.}
\end{aligned}$$

Ответ: Расходится

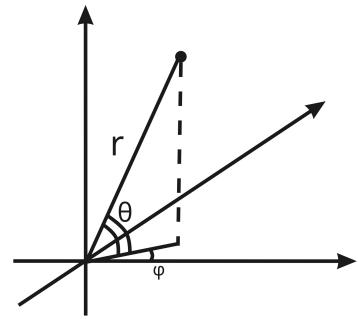
Задача 120.

$$\begin{aligned}
&\iint_{\substack{x,y \geq 0 \\ x+y \geq 1}} \frac{x^3 - y^3}{x^6 + y^6} dx dy \\
f \text{ меняет знак} \implies \iint |...| dx dy &= \frac{r^3}{r^6} \cdot r \frac{1}{r^2} \\
\iint_{E_n} |f| dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^n \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi} \right| \cdot \frac{dr}{r^2} \leq \iint_{F_n} -||- = \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi} \right| d\varphi \int_{1/\sqrt{2}}^n \frac{dr}{r^2} = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi} \right| d\varphi \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{n} \right) = A(\sqrt{2} - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \cdot \sqrt{2}, \text{ т.е. сход.} \\
A > 0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} |f| dx dy &\implies \text{Исх. инт. сход.}
\end{aligned}$$

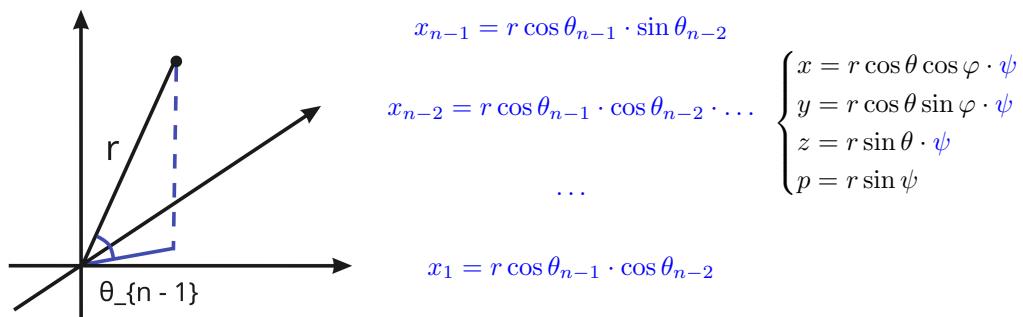
Задача 121.

$$\begin{aligned}
f \text{ меняет знак} \implies \int |f| ... &= \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq z-1}} \frac{x-y}{z^3} dx dy dz \\
&= \int_{E_n} \iint \frac{x-y}{z^3} dx dy dz = \\
&/ * \frac{r}{r^3} \cdot r^2 = 1 \implies \text{Пасх. *} / \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{Цилиндр.} \\ \text{К-ты} \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{n-1}} dr \int_{r^2+1}^n \left| \frac{r \cos \varphi - r \sin \varphi}{h^3} \right| \cdot r dh = \int_0^{2\pi} |\cos \varphi - \sin \varphi| d\varphi \cdot \int_0^{\sqrt{n-1}} r^2 dr \int_{r^2+1}^n \frac{dh}{h^3} = \frac{h^{-2}}{-2} \Big|_{r^2+1}^n \\
&= A \cdot \int_0^{\sqrt{n-1}} r^2 dr \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(r^2+1)} \right) = \frac{A}{2} \int_0^{\sqrt{n-1}} \left(\frac{r^2}{r^2+1} - \frac{r^2}{n^2} \right) dr = \frac{A}{2} \int_0^{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{1}{r^2+1} - \frac{1}{n^2} r^2 \right) dr = \\
&= \frac{A}{2} \left(r - \arctg r - \frac{1}{3n^2} r^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{n-1}} = \frac{A}{2} \left(\sqrt{n-1} - \arctg \sqrt{n-1} - \frac{\sqrt{n-1}^3}{3n^2} \right) \rightarrow \infty \implies \text{Пасх.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 &\rightarrow \text{Пол.} \\
\mathbb{R}^3 \quad x^2 + y^2 + z^2 &\rightarrow \text{Сф.} \\
&\dots \\
\mathbb{R}^n \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &\rightarrow \text{Обоб. Сфер.}
\end{aligned}$$



$$x_n = r \sin \theta_{n-1}$$



$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ x_2 = r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ x_3 = r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cdot \dots \cdot \sin \varphi_{n-2} \\ \dots \\ x_{n-1} = r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ x_n = r \sin \varphi_1 \end{cases} \quad | \det J | = r^{n-1} \cdot \cos \varphi_{n-2} \cos^2 \varphi_{n-3} \cdot \dots \cdot \cos^{n-2} \varphi_1$$

$$\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$r > 0$$

Исследовать интеграл на сходимость ($\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$):

Задача 122.

$$\int_{\|x\|>1} \frac{1}{\|x\|^p} dx$$

$$E_m = \{1 < \|x\| < m\}, m \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}
\int_{E_m} \frac{1}{\|x\|^p} dx &= \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi_{n-2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi_1 \int_1^m \frac{1}{r^p} \cdot r^{n-1} \cdot \cos \varphi_{n-2} \cdot \cos^2 \varphi_{n-3} \cdot \dots \cdot \cos^{n-2} \varphi_1 dr = \\
&A \cdot \int_1^m r^{n-1-p} dr \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{p+1-n}} dr \\
&p + 1 - n > 1 \quad n < p \quad p > n \quad \text{Сход.}
\end{aligned}$$

Задача 123.

$$\int_{\|x\|<1} \frac{1}{\|x\|^p} dx$$

14. [14.12.23] Семинар №14

"Что с определением 1-го и 2-го курса?"

Пусть $[a, b]$ - обычный отрезок на прямой. Верно ли, что

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx \neq \int_1^0 f(x)dx$$

"Что с определением 1-го и 2-го курса?"

Сходится ли интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx$ (в смысле 1-го курса)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \end{array} \right] = \int_0^{+\inf ty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

Сходится по Дирихле

$$\left(\left| \int_0^A \cos t dt \right| \leq 2, \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \text{Монот.} \right)$$

Сходится ли интеграл $\int_{\mathbb{R}} \cos x^2 dx$ (в смысле 2-го курса)

$$\int_{-A}^A |\cos x^2| dx = 2 \int_0^A |\cos x^2| dx \geq 2 \int_0^A \cos^2(x^2) dx = \int_0^A (1 + \cos(2x^2)) dx$$

Расходится

"А что правда могут получиться различные ответы при различных исчерпаниях?"

Рассмотреть $\iint_E \frac{y}{x} dxdy$, где $E = \{x \geq 1, |y| \leq 1\}$, и два исчерпания: $A_n = \{x \in [1, n], |y| \leq 1\}$ и $B_n = A_n \cup \{x \in [n, 2n], y \in [0, 1]\}$

"А можно без вот этих ваших исчерпаний? И так же всё понятно..."

Сравнить три интеграла

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} = \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x^2 + 1} dx = -\arctg x \Big|_1^{+\infty} = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$\int_1^{+\infty} dy \frac{-x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=1}^{x=+\infty} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

В продолжение предыдущего: "Да, но если функция неотрицательная, то там же любое исчерпание пойдёт == значит, можно сразу писать повторные интегралы?"

Рассмотреть интегралы

$$\iint_{(0,1)^2} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^{3/4}},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/4}}$$

Для тех, кто скучает по линиалу, вычислить:

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-P(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Где $P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) - положительно определённая квадратичная форма.

15. [15.12.23] Семинар №14

Вычислить:

Задача 124.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = I$$

Рассмотрим

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$E_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^n e^{-r^2} \cdot r dr = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^n e^{-r^2} \cdot r dr = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \int_0^n e^{-r^2} d(r^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi \end{aligned}$$

$$D_n = \{x \in [-n, n], y \in [-n, n]\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-n}^n e^{-y^2} dy =$$

$$= \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \cdot \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = I^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Задача 6 из листка №14

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-P(x_1 x_2 \dots x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$P = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

\exists замена $x = Cy$, C – ортог. матрица

$$P(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Все $\lambda_j > 0$ (положительно определённая)

$$\int \cdots \int_{[-m, m]^n} e^{-P(y_1, \dots, y_n)} dy_1 \dots dy_n = \int_{-m}^m dy_1 \int_{-m}^m dy_2 \dots \int_{-m}^m dy_n e^{-\lambda_1 y_1^2} \dots e^{-\lambda_n y_n^2} =$$

$$= \int_{-m}^m e^{-\lambda_1 y_1^2} dy_1 \cdot \int_{-m}^m e^{-\lambda_2 y_2^2} dy_2 \dots \int_{-m}^m e^{-\lambda_n y_n^2} dy_n = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}} \cdots \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\det(a_{ij})}}$$

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/y^2, & 0 < x < y < 1 \\ -1/x^2, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{на } [0, 1]^2$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f dy \quad \text{и} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f dx$$

$$1) \int_0^1 dx \int_0^1 f dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) = \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{x^2} \cdot x + \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_x^1 \right) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) dx = -1$$

$$2) \int_0^1 dy \int_0^1 f dx = \int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 -\frac{1}{x^2} dx \right) = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{y^2} \cdot y + 1 - \frac{1}{y} \right) = \int_0^1 dy = 1$$

f - Не интегр.