Impermanent Loss: Math Derivation

La pérdida impermanente es un concepto popular cuando se trata de creadores de mercado automatizados (AMM) como Uniswap.

Un proveedor de liquidez coloca una cantidad inicial en dos tokens y los pone a disposición para que traders puedan intercambiar entre sí. La pérdida impermanente es la pérdida incurrida cuando los precios de mercado cambian, aumentando la cantidad de tokens de menor valor relativo. Se define como la diferencia porcentual entre el valor de la nueva composición de tokens versus el valor si se mantuviese la composición inicial (hold).

Hay excelentes artículos que explican bien el concepto y brindan ejemplos, pero todos citan una fórmula para la pérdida impermanente (IL) sin ofrecer una derivación:

$$IL = \frac{2\sqrt{d}}{1+d} - 1$$

Veamos cómo obtenerla paso a paso:

Consideraciones

Los protocolos creadores de mercado automatizados como Uniswap y SushiSwap se basan en una ecuación muy simple:

$$x * y = K \qquad (1)$$

Donde, x es el número de tokens para el activo X, y ies el número de tokens para el activo Y y K es el producto constante del grupo.

El valor de la posición inicial es:

$$V_0 = x * p_x + y * p_y \qquad (2)$$

Se suministra un valor igual de ambos tokens al grupo, por lo tanto:

$$x * p_x = y * p_y$$

$$p_x = \frac{y}{x} * p_y \qquad p_y = \frac{x}{y} * p_x \qquad (3)$$

De (1) sabemos que $x = K/y$, así mismo $y = K/x$,
Reemplazamos en (3):

$$p_x = \frac{\frac{K}{x}}{x} * p_y \qquad p_y = \frac{\frac{K}{y}}{y} * p_x$$

$$p_x = \frac{K}{x^2} * p_y \qquad p_y = \frac{K}{y^2} * p_x$$

Despejamos x y y en términos de K, p_x , p_y.

$$x^2 = \frac{K}{p_x} * p_y \qquad y^2 = \frac{K}{p_y} * p_x$$

$$x = \sqrt{\frac{K}{p_x} * p_y} \qquad y = \sqrt{\frac{K}{p_y} * p_x} \qquad (4)$$

Entonces, reescribimos V_0 según (4):

$$V_0 = \sqrt{\frac{K}{p_x} * p_y} * p_x + \sqrt{\frac{K}{p_y} * p_x} * p_y$$

$$V_0 = \sqrt{K * p_y * p_x} + \sqrt{K * p_x * p_y}$$

$$V_0 = 2\sqrt{K * p_y * p_x}$$

¿Qué pasa si los precios varían pasando de p_x a p_{x1} y de p_y a p_{y1}?
Las nuevas cantidades serían:

$$x_1 = \sqrt{\frac{K}{p_{x1}} * p_{y1}} \qquad y_1 = \sqrt{\frac{K}{p_{y1}} * p_{x1}} \tag{5}$$

Entonces, calculamos el valor con la nueva composición x_1 y y_1.

$$V_1 = x_1 * p_{x1} + y_1 * p_{y1}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{K}{p_{x1}} * p_{y1}} * p_{x1} + \sqrt{\frac{K}{p_{y1}} * p_{x1}} * p_{y1}$$

$$V_1 = 2\sqrt{K * p_{y1} * p_{x1}} \tag{6}$$

Mientras que al holdear, las cantidades no cambian, se mantiene x y y.
Por lo tanto, el valor sería:

$$Hold = x * p_{x1} + y * p_{y1}$$

$$Hold = \sqrt{\frac{K}{p_x} * p_y} * p_{x1} + \sqrt{\frac{K}{p_y} * p_x} * p_{y1} \tag{7}$$

Para obtener la pérdida impermanente, calculamos la diferencia entre V_1 y $Hold$.

$$V_1 - Hold = 2\sqrt{K * p_{y1} * p_{x1}} - \left(\sqrt{\frac{K}{p_x} * p_y} * p_{x1} + \sqrt{\frac{K}{p_y} * p_x} * p_{y1}\right)$$

Asumimos que $\Delta_x = p_{x1}/p_x$ y $\Delta_y = p_{y1}/p_y$.
Entonces, $p_{x1} = p_x * \Delta_x$ y $p_{y1} = p_y * \Delta_y$

$$V_1 - Hold = 2\sqrt{K * p_y * \Delta_y * p_x * \Delta_x} - \left(\sqrt{\frac{K}{p_x} * p_y} * p_x * \Delta_x + \sqrt{\frac{K}{p_y} * p_x} * p_y * \Delta_y\right)$$

$$V_1 - Hold = 2\sqrt{K * p_y * p_x * \Delta_y * \Delta_x} - \left(\sqrt{K * p_y * p_x} * \Delta_x + \sqrt{K * p_x * p_y} * \Delta_y\right)$$

Lo calculamos como porcentaje:

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2\sqrt{K*p_y*p_x*\Delta_y*\Delta_x} - (\sqrt{K*p_y*p_x}*\Delta_x + \sqrt{K*p_x*p_y}*\Delta_y)}{(\sqrt{K*p_y*p_x}*\Delta_x + \sqrt{K*p_x*p_y}*\Delta_y)}$$

Factorizamos $\sqrt{K * p_y * p_x}$:

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{\sqrt{K*p_y*p_x}*(2\sqrt{\Delta_y*\Delta_x} - (\Delta_x + \Delta_y))}{\sqrt{K*p_y*p_x}*(\Delta_x + \Delta_y)}$$

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2\sqrt{\Delta_y*\Delta_x} - (\Delta_x + \Delta_y)}{(\Delta_x + \Delta_y)}$$

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2\sqrt{\Delta_y*\Delta_x}}{(\Delta_x + \Delta_y)} - 1 \qquad (8)$$

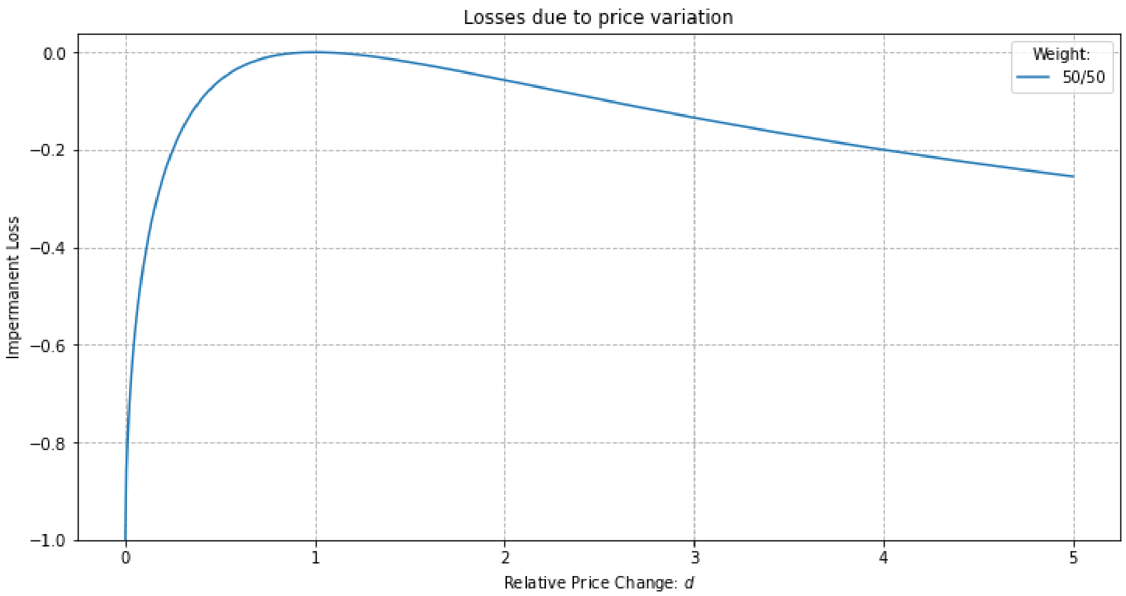
Consideramos que $d = \Delta_x/\Delta_y$, entonces $\Delta_x = d * \Delta_y$:

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2\sqrt{{\Delta_y}^2 * d}}{(d*\Delta_y + \Delta_y)} - 1$$

Factorizamos Δ_y:

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2*\Delta_y*\sqrt{d}}{\Delta_y(d+1)} - 1$$

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2\sqrt{d}}{(d+1)} - 1 \qquad (9)$$

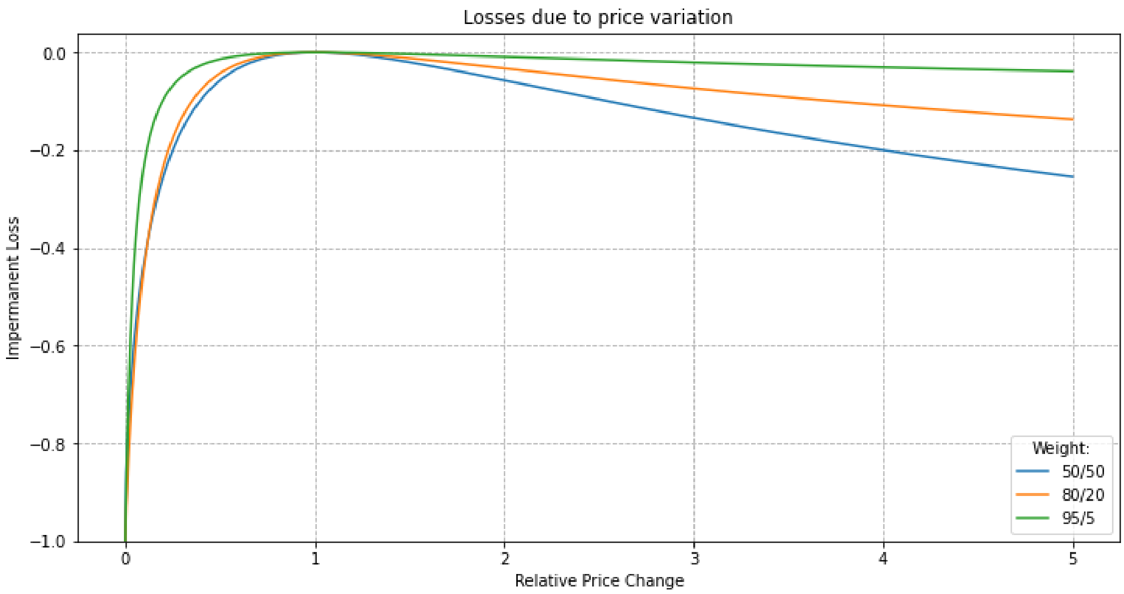


Nota 01:
En caso la distribución de tokens no sea 50/50, llamaremos w_x al peso del token X and w_y al peso del token Y.
Reescribimos la ecuación 8:

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{2\sqrt{\Delta_y * \Delta_x}}{(\Delta_x + \Delta_y)} - 1$$

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{{\Delta_x}^{0.5} * {\Delta_y}^{0.5}}{(0.5 * \Delta_x + 0.5 * \Delta_y)} - 1$$

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{{\Delta_x}^{w_x} * {\Delta_y}^{w_y}}{(w_x * \Delta_x + w_y * \Delta_y)} - 1 \qquad (10)$$



Nota 02:

Generalizando para más de dos tokens:

$$\frac{V_1 - Hold}{Hold} = \frac{\prod_i (\Delta_i)^{w_i}}{\sum_i (\Delta_i * w_i)} - 1 \qquad (11)$$

Ed Fernández Grau [BLID]
Co-founder [Definomics Labs]
[Linkedin] | [Twitter] | [Lens]