# 1 Stokastiske Variable

For at forstå Stokastiske Variabler kræves der en forståelse for nogle simplere begreber inden for statistik. Disse begreber er udfaldsrum, delmængde, sandsynlighedsfunktion samt sandsynlighedsfelt. De nævnte begreber er essentielle inden for statistik.

## 1.1 Udfaldsrum og delmængder

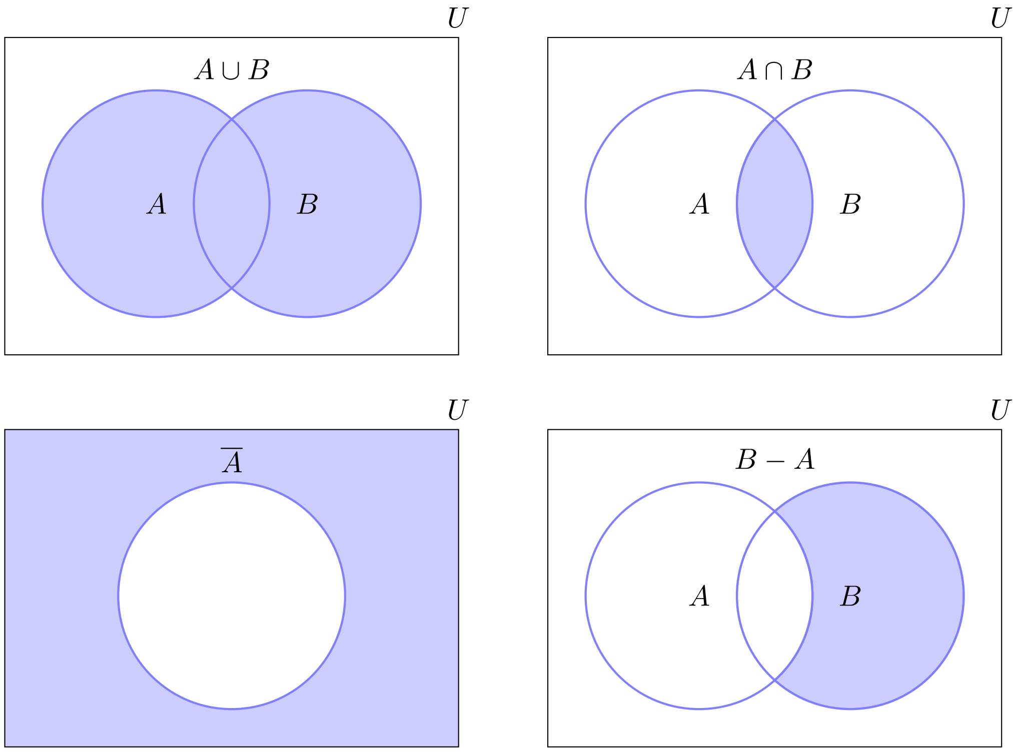
Der findes to typer af udfaldsrum, henholdsvis et diskret og kontinuert udfaldsrum. Forskellen på disse to er at der i et diskret udfaldsrum kun er et givent antal mulige udfald. Et eksempel på et diskret udfaldsrum kunne være en sekssidet terning. Denne sekssidet terning vil have et udfaldsrum $U$ der indeholder elementerne $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ dette kan skrives som $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Altså vi har tale om et udfaldsrum med længden seks, hvilket skrives $|U| = 6$ eller som $n$. Hvorimod et kontinuert udfaldsrum kunne være højden på elever i en klasse, udfaldsrummet kunne altså være defineret som $U = [150cm; 210cm]$. Udfaldsrummet er kontinuert da elevers højde kan variere med et infinitesimal, altså elev $a$ kunne være en uendeligt lille mængde højere end elev $b$. I sådan et udfaldsrum findes der ikke nogen længde af udfaldsrummet, altså $|U| \notin \mathbb{R}$. Derfor kaldes det også et endelige og et ikke endeligt udfaldsrum [**SC**].

En delmængde er en mængde af udfaldsrummet, det beskrives ofte med $A$ eller $B$. Hvis vi tager udgangspunkt i den sekssidet terning igen, kunne en delmængde af dets udfaldsrum være $A = \{1, 3\}$. Altså en delmængde indeholder altså en eller flere elementer fra udfaldsrummet.

Ydermere vil et bestemt element i et udfaldsrum eller delmængde denoteres $u_i$ eller $a_i$, altså for henholdsvis $A$ og $U$. Det vil sige hvis vi har en mængde $Q$ vil et bestemt element i $Q$ denoteres som $q_i$. Desuden findes der en række operatorer der beskriver delmængders relationer til hinanden og udfaldsrummet.

1. $A \cup B$: udfaldet ligger i enten A eller B, evt. i både A og B
2. $A \cap B$: udfaldet ligger i både A og B
3. $A \backslash B$: udfaldet ligger i A og ikke B
4. $A^c$: udfaldet ligger ikke i A (dette kan også denoteres $\bar{A}$)

Betegnelserne er de samme, som vi bruger i mængdelæren, og vi taler derfor om foreningsmængden $A \cup B$, fællesmængden $A \cap B$, mængdedifferensen $A \backslash B$ samt komplementærmængden $A^c$ [**SC**]. Nedenstående figurer også kaldet venn-diagrammer, illustreres overstående mængder og deres operatorer.




## 1.2 Sandsynlighedsfunktion

Sandsynlighedsfunktion denoteres $P$ og beskriver sandsynligheden for et element i et udfaldsrummet $U$. For eksempel kunne $P(\{1,2\}) = 0.8$ og $P(3) = 0.2$ hvor udfaldsrummet $U = \{1,2,3\}$. Dette betyder at sandsynligheden for 1 eller 2 er 80% hvorimod sandsynligheden for 3 er 20%. Desuden kan vi bruge additions loven til at udlede den totale sandsynlighed for udfaldsrummet [**SC**].

$$P(1) + P(2) + P(3) = 1 \tag{1.1}$$
$$P(\{1,2\}) + P(3) = 1 \tag{1.2}$$

Desuden kan $\{1,2\}$ også beskrives som en delmængde af U på formen $A = \{1,2\}$, altså så det desuden er gældende at $P(A) = P(1) + P(2)$

## 1.3 Sandsynlighedsfelt

Et sandsynlighedsfelt findes på to former, det endelige eller også kaldet det diskrete sandsynlighedsfelt samt det kontinuere sandsynlighedsfelt også kaldet et ikke endeligt sandsynlighedsfelt. Et sandsynlighedsfelt kan denoteres $(U, P)$ og er bestående af et udfaldsrum $U$ og en sandsynlighedsfunktion $P$. Hvis der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, vil følgende være gældende for $P$.

$$P(U) = 1 \tag{1.3}$$
$$P(u_1) + P(u_i) + ... + P(u_n) = 1 \tag{1.4}$$
$$P(u_1) = P(u_i) = ... = P(u_n) = \frac{1}{|U|} \tag{1.5}$$

De to udsagn udtrykker derved at sandsynligheden for $P(U_i)$ er i intervallet $[0;1]$ samt at den samlede sandsynlighed for feltet er 1, hvor $1 = 100\%$. I et ikke symmetrisk sandsynlighedsfelt vil de to første regler af de overstående tre gælde, men sandsynligheden for de enkle elementer i udfaldsrummet er ikke nødvendigvis lig, altså kan $P(u_1) \neq P(u_2)$ [**SC**].

## 1.4 Stokastiske variabler

Stokastiske variabler findes af to typer der begge denoteres med $X$, lad desuden $x_i$ værende et konkret udfald, disse to typer er henholdsvis diskret og kontinuert. En stokastiske variable er en variable som kan tage alle værdier i et givent udfaldsrum, med sandsynligheden $P$, altså $P(X = u_i) = P(u_i)$. Forskellen mellem diskret og kontinuert stokastiske variabler er deres udfaldsrum og deres tilhørende regneregler. Et eksempel på en stokastiske variabel kunne være Europæisk Roulette, dette spil har et symmetrisk sandsynlighedsfelt med udfaldsrummet $U = \{0, 1, ..., 36\}$ der har indeholder $37 = |U|$ udfald. Det vil altså sige at den kugle man smider ned i spillet kan beskrives som en stokastiske variable $X$ og den har en lige stor sandsynlighed for at tage et udfald i udfaldsrummet, da der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt. Altså $P(u_1) = P(u_i) = ... = P(u_n)$, det betyder at $P(X = 1) = P(X = 4)$. Ydermere er roulettens udfaldsrum opdelt i tre farver grøn, rød og sort, disse kan betegnes som delmængderne henholdsvis $G$, $R$ og $S$. Vi kan således beskrive sandsynligheden for at den stokastiske variabel $X$ vil ligge i en delmængde således $P(X \in S) = P(X \in R) = \frac{18}{37}$ og $P(X \in G) = \frac{1}{37}$. Delmængden $G$ kunne også have været defineret som $G = (R \cup S)^c$, altså de udfald som ikke falder ind under hverken $R$ eller $S$, eller $G = 0$ [**NM**]

Lad desuden $\mathbb{E}[X]$ være den forventede værdi af $X$, den forventede værdi skal forstås næsten som et gennemsnit. Det overstående eksempel, her ville den forventede værdi $X$ være $\mathbb{E}[X] = 18$, dette kan udregnes på følgende form.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{n} \tag{1.6}$$

Dette er kun tilfældet da det er et symmetrisk sandsynlighedsfelt, hvis sandsynligheden for de forskellige udfald ikke er lig, altså $P(u_1) \neq P(U_2)$. Her ville man bruge følgende formel for den forventede værdi af $X$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} u_i \times P(u_i) \tag{1.7}$$