

1 Monte Carlo Metoden

I dette afsnit vil opgaven komme ind på...

Monte Carlo Metoden har sit navn efter Stanislaw Ulams onkel, som ofte spillede på Casino Monte Carlo i Monaco. Metoden referer herved til de sandsynligheder og de tilfældige udkom der kan finde sted i sådanne spil. Ulam var en af de forskere der arbejdede på Monte Carlo Metoden under Manhattan Projektet, som blev iværksat i 1942 (den store danske). Metoden blev udviklet for at kunne simulere neutroners diffusion. Det var nødvendigt at simulere på denne måde, da problemet var for komplekst til at kunne blive afløst algebragisk. Metoden blev først anvendt på gamle analoge computere, hvilket begrænsede kompleksiteten af simulationen [AHF].

Ydermere er Monte Carlo Metoden også en algoritme, det betyder at det er en process som er udført i nogle logiske trin. Trin som beskriver gøremåden for metoden. En algoritme kunne f.eks. være trinnene involveret i at sortere et sæt kort. Lad kortspillet være et sæt kort og et element værende ét enkelt spillekort, kortspillet kan således sorteres på følgende måde.

1. Vælg et vilkårligt element e_i fra sættet.
2. Placere elementet bagest i sættet.
3. Sammenlign nu e_i med elementet lige før e_{i-1} hvis $e_i > e_{i-1}$ bytter de plads. Dette gentages indtil $e_i < e_{i-1}$ eller $i = 0$.
4. Gentag denne process indtil kortspillet er sorteret

Denne sorterings algoritme er også kaldet bubblesortering og dets navn kommer af måden de elementer i sættet bobler til toppen. [BS]

1.1 Plat eller Krone

Et eksempel på udførelse af Monte Carlo Simulering kunne være Plat eller Krone, spillets regler er som følgende.

1. Hver spiller satser på en side af mønten.
2. Mønten kastes op i luften.
3. Vinderen er den spiller hvis sats er den side af mønten der vender op af.

Man kan også beskrive Plat og Krone med et symmetrisk sandsynlighedsfelt (U, P) , hvor udfaldsrummet U ville være $U = \{Plat, Krone\}$ og sandsynlighedsfunktionen P hvor følgende er sandt da det er et symmetrisk sandsynlighedsfelt.

$$P(Plat) = P(Krone) = \frac{1}{2} \quad (1.1)$$

Vi kan desuden beskrive mønten med en stokastiske variable X . Den forventede værdi af X kan ligedes beskrives som værende $\frac{1+2}{2} = 1.5$ hvis $Plat = 1$ og $Krone = 2$ altså den gennemsnitlig værdi af udfaldsrummet.

Vi kan finde frem til en approximering af den forventede værdi af X ved brug af Monte Carlo Simulering. I den sammenhæng lad $\mathbb{E}[X]$ værende den forventede værdi af X . Vi kan derved opskrive følgende udsagn hvor x_i er en konkret simulering af X .

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (1.2)$$

Vi kan udfører en simulering der simulere 1000 eksperimenter, hvor X er uafhængig.

```
import random

random.seed(42)
print(sum([random.randint(1,2) for _ in range(1000)]) / 1000.000)
```

Dette vil give os $\mathbb{E}[X] = 1.519$, hvis vi udførte dette eksperiment 100 gange ville vi finde at vores resultat variere. Dette skyldes at X er tilfældigt bestemt for hvert simulering og er uafhængig af forgående simulering, altså normal opførelse for en mønt [NM].

1.2 Numerisk integration

Det overstående eksempel med Plat eller Krone virker måske lidt dumt da vi med nemhed kan udlede det algebraisk, altså tage summen af udfaldsrummet og dele med antallet af mulige udfald. Men et andet tilfælde hvor man kan anvende Monte Carlo Metoden er numerisk integration. I nogle tilfælde er det let at udlede integralet algebragisk, men der findes også tilfælde hvor det er umuligt. Disse funktioners integraler kan udledes ved hjælp af numeriske metoder, her i blandt Monte Carlo Metoden.

Lad os betragte en cirkel der befinder sig iden for et kvadratisk område, som set på nedenstående figur.

Figur

Hvis vi ønsker at finde arealet af cirklen, ved brug af Monte Carlo Simulering, skal vi først bestemme udfaldsrummet. Udfaldsrummet for dette tilfælde er kvadraten hvor cirklen befinder sig inden for. Det vil sige at vi har et kontinuert udfaldsrum U som indeholder uendelige punkter der befinder sig i kvadratet. Da vi skal simulere dette på en computer omdefinere vi udfaldsrummet til et diskret udfaldsrum, da en computere ikke kan håndtere infinitesimaler, men kun tal af en given størrelse. Altså vi kunne vælge et udfaldsrum hvor vi har inddelt kvadraten 100×100

Hvis vi tager funktionen $f(x)$, denne funktion er ikke mulig at differentiere da den ikke er kontinuer og kan derfor ikke løses algebragisk. Men vi kan stadig finde dens integral ved brug af Monte Carlo. Vi vælger et tilfældigt punkt, dette punkts x værdi bruger vi i funktionen, vi får derefter en y værdi, vi notere os derefter om denne y værdi er højere eller lavere end det tilfældige punkts y værdi. Vi gentage dette tusindvis af gange til at vi har fået os et forholdsvis stort prøveområde. Vi kan nu udregne dets integrale

ved at tage arealet af det rum vi valgte tilfældige punkter indenfor og derefter gange det med sandsyneligheden for at et punkt er inden for integralet af funktionen, altså sandsyneligheden for at det tilfældige punkt er u

Hvis vi ønsker at lave en numerisk integration ved brug af Monte Carlo Metoden skal vi først finde ud af hvordan vi k