Forelæsningsnoter til Stokastiske Processer E05

Svend-Erik Graversen
Revideret af Jan Pedersen
Kapitel 12 og Appendix B og G af Jan Pedersen

16. august 2005

Forord

Nærværende notesæt skal bruges i forbindelse med kurset *Stokastiske Processer*, der udbydes i det Herrens År 2005. Noterne er baseret på et gammelt notesæt af Svend-Erik Graversen. Jan Pedersen har revideret Svend-Erik's noter og har inkluderet et enkelt kapitel. Desuden har Jan udarbejdet opgavesamlingen, der til dels er baseret på opgavesamlingen til bogen *Stokastiske Processer* af Palle Schmidt.

Kurset *Stokastiske Processer* har været udbudt mange gange før, og har tidligere benyttet Palle Schmidts bog. Men i år skal kurset for første gang omhandle Stokastisk Integration, og det har derfor ikke været muligt at anvende Palle's bog.

Indhold

1 Grundlæggende definitioner og eksempler

En stokastisk proces er fællesbetegnelsen for det sandsynlighedsteoretiske værktøj, der benyttes ved beskrivelse af tilfældige systemer, som udvikler sig i tiden, og som til ethvert tidspunkt t i en parametermængde T kan beskrives ved et punkt i et tilstandsrum S. Man taler her om *tilstanden til tid t*.

Som eksempler på sådanne tilfældige systemer kan f.eks. nævnes : prisen på et finansielt aktiv, lufttemperaturen ved en målestation, koncentrationen af et stof i blodet, osv.

Tilstanden til et fast tidspunkt t modelleres som sædvanligt ved hjælp af en enkel stokastisk variabel X_t med værdier i S, og en stokastisk proces er derfor en parametriseret familie af stokastiske variable, dvs. målelige afbildninger, defineret på et fælles sandsynlighedsfelt med værdier i samme målelige rum. Helt præcist har vi flg. definition.

Definition 1.1. Lad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ betegne et givent sandsynlighedsfelt, T en vilkårlig mængde og $(S, \mathscr{B})$ et måleligt rum. En familie af variable $(X_t)_{t\in T}$ defineret på $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ kaldes da en *stokastisk proces* med *tidsparametermængde T* og *tilstandsrum S*, hvis X_t for ethvert t i T er en $(\mathscr{F}, \mathscr{B})$-målelig afbildning fra Ω ind i S.

Som ordvalget antyder, opfattes T normalt som en model for tiden, idet et punkt i T tænkes at repræsentere et tidspunkt. Man skelner i denne forbindelse mellem en *diskret* kontra en *kontinuert tidsmodel*, hvor den diskrete tidsmodel svarer til tidsparametermængder af formen

$$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, \cdots\},\ \mathbf{Z} \text{ eller mere generelt delmængder heraf,}$$

hvorimod man i forbindelse med en kontinuert tidsmodel bruger

$$\mathbf{R}_+ = [0, \infty),\ \mathbf{R} \text{ eller delmængder af disse.}$$

T vil i det følgende næsten altid være enten $\mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$, og punktet 0 betegnes i denne forbindelse *begyndelsestidspunktet*. Men det er værd at understrege, at ovenstående definition intet forlanger om T, og i visse anvendelser vil T være en mere kompliceret mængde. F.eks. er det i forbindelse med billedanalyse naturligt at vælge $\mathbf{R}^2$ eller en delmængde heraf som parametermængde. Ligeledes er det i visse situationer naturligt at lade T være en mængde af delmængder af et pænt rum som f.eks. $\mathbf{R}^n$ eller en delmængde heraf. Med den tilladte generalitet kan praktisk talt alt, hvad vi tidligere har set på, opfattes som en stokastisk proces. F.eks. kan en enkel stokastisk variabel opfattes som en proces med en tidsparametermængde bestående af et punkt. Men som nævnt er det væsentligste anvendelsesområde for stokastiske processer beskrivelse af tidsudviklinger, hvorfor parametermængder udstyret med en lineær ordning som f.eks. $\mathbf{Z}_+ / \mathbf{Z}$ og $\mathbf{R}_+ / \mathbf{R}$ er af størst interesse, da det her giver mening at tale om *fortid, fremtid og nutid*.

Ifølge definitionen kan tilstandsrummet være et vilkårligt måleligt rum, dvs. en mængde udstyret med en σ-algebra. Men i alle de tilfælde vi kommer ud for, vil S være udstyret med en metrik d og σ-algebraen være den tilhørende Borel σ-algebra $\mathscr{B}(S)$, dvs. den mindste σ-algebra der indeholder alle åbne mængder. Vigtige eksempler er $\mathbf{R}^n$ for et $n \geq 1$ eller pæne delmængder heraf, eller en tællelig mængde udstyret med den diskrete metrik, i hvilken Borel σ-algebraen er identisk med mængden af alle delmængder. Man taler her ofte om et *kontinuert udfaldsrum* i modsætning til et *diskret udfaldsrum*. De nævnte eksempler er alle såkaldte polske rum, dvs. der findes en ækvivalent fuldstændig og separabel metrik. Eksistensen af en metrik på S sikrer, at det har mening at tale om kontinuitet af funktioner med værdier i S.

Det interessante ved en stokastisk proces er som for ethvert andet sandsynlighedsteoretisk objekt dens fordeling, og vi vil nu præcisere, hvad vi forstår ved fordelingen for en stokastisk proces, og hvordan den specificeres. Som bekendt er fordelingen af en reel stokastisk variabel X defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ sandsynlighedsmålet P_X på $\mathbf{R}$ givet ved

$$P_X(A) = P \circ X^{-1}(A) = P(X \in A) \quad A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}),$$

dvs. P_X er billedmålet $P \circ X^{-1}$. Tilsvarende er fordelingen for en given stokastisk vektor $\underline{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ sandsynlighedsmålet $P \circ \underline{X}^{-1}$ på $\mathbf{R}^n$.

Ovenstående vil vi nu generalisere til stokastiske processer. Antag at tilstandsrummet S er metrisk og derfor udstyret med Borel σ-algebraen $\mathscr{B}(S)$. Indgangsvinklen er at opfatte $(X_t)_{t\in T}$ som en tilfældig funktion, dvs. fokusere på afbildningen Φ_X fra Ω ind i S^T, som sender et ω over i den tilhørende *udfaldsfunktion*, dvs.

$$\Phi_X : \ \omega \mapsto (t \mapsto X_t(\omega))$$

Funktionsrummet S^T udstyres med den såkaldte *koordinat σ-algebra* $\mathscr{B}(S)^T$, defineret som den mindste σ-algebra, der gør alle koordinatvariable målelige, dvs.

$$\mathscr{B}(S)^T := \sigma(\xi_t \,|\, t \in T)$$

hvor *koordinatvariablen* hørende til punktet t, $\xi_t : \ S^T \to S$, er givet ved

$$\xi_t(f) := f(t), \quad f \in S^T.$$

$\mathscr{B}(S)^T$ er altså pr. definition σ-algebraen frembragt af algebraen

$$\mathscr{A}(S)^T := \{\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{t_i} \in B_i\} \,|\, t_1, \ldots, t_n \in T, B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}(S)\}.$$

Da $\xi_t \circ \Phi_X = X_t$ for ethvert $t \in T$, ses at

$$\Phi_X : \Omega \mapsto S^T \text{ er } (\mathscr{F}, \mathscr{B}(S)^T)\text{-målelig.}$$

Det har derfor god mening at tale om billedmålet $P \circ \Phi_X^{-1}$ som et sandsynlighedsmål på $(S^T, \mathscr{B}(S)^T)$. Dette betegnes $P_{X.}$ og kaldes processens *fordelingsmål* eller kort dens fordeling. I overensstemmelse med gængs terminologi siges to processer $(X_t)_{t\in T}$ og $(X_t')_{t\in T}$ med samme tidsparameter T og samme tilstandsrum S, men muligvis defineret på forskellige sandsynlighedsfelter $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ og $(\Omega', \mathscr{F}', P')$, derfor at være identisk fordelte, synonymt *ækvivalente*, hvis $P_{X.} = P'_{X'.}$. Tit udtrykkes dette også ved at sige, at de to processer er *versioner* af hinanden.

Øvelse 1.2. Læseren opfordres til at vise, at for enhver stokastisk proces $(X_t)_{t\in T}$ med tilstandsrum S og tidsparametermængde T defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega,\mathscr{F},P)$ er $(\xi_t)_{t\in T}$ opfattet som en stokastisk proces på $(S^T,\mathscr{B}(S)^T,P_{X.})$ en version af $(X_t)_{t\in T}$. Denne specielle version kaldes den *kanoniske version*.

Kender vi fordelingsmålet $P_{X.}$, kender vi specielt dets værdier på $\mathscr{A}(S)^T$, og da

$$P_{X.}(\bigcap_{i=1}^n\{\xi_{t_i}\in B_i\}) = P(\bigcap_{i=1}^n\{\xi_{t_i}\circ\phi_X\in B_i\}) = P(\bigcap_{i=1}^n\{X_{t_i}\in B_i\})$$

kender vi derfor enhver sandsynlighed af formen

$$P(X_{t_1}\in B_1,\dots,X_{t_n}\in B_n)\quad t_1,\dots,t_n\in T, B_1,\dots,B_n\in\mathscr{B}(S),$$

og dermed fordelingsmålet $P_{X.}(t_1,\dots,t_n)$ for $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ for alle sæt af tidspunkter $t_1,\dots,t_n\in T$. Dette sandsynlighedsmål på $(S^n,\mathscr{B}(S)^n)$ er som bekendt givet ved

$$P_{X.}(t_1,\dots,t_n)(B) := P((X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in B)\quad t_1,\dots,t_n\in T, B\in\mathscr{B}(S)^n.$$

$P_{X.}$ bestemmer altså sættet

$$\{P_{X.}(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n\in T\}$$

også kaldet processens *endeligt dimensionale marginale fordelinger*. Men da $\mathscr{A}(S)^T$ er stabil under endelig gennemsnit og frembringer σ-algebraen $\mathscr{B}(S)^T$, bestemmer sættet af endeligt dimensionale fordelinger omvendt også $P_{X.}$; dvs. præcisering af en procesfordeling er en ting og det samme som at angive det tilhørende sæt af endelig dimensionale marginale fordelinger. Specielt har vi, at to processer $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ er versioner hvis og kun hvis de har samme endeligt dimensionale marginale fordelinger; det vil sige hvis og kun hvis

$$P((X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in B) = P((Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\in B)\tag{1.1}$$

for ethvert $n\geq 1$, alle $t_1,\dots,t_n\in T$ og alle $B\in\mathscr{B}(S)^n$. Da $\mathscr{B}(S)^n$ frembringes af mængder på formen $A_1\times\ldots\times A_n$, hvor $A_1,\dots,A_n\in\mathscr{B}(S)$, har vi ligeledes, at $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ er versioner hvis og kun hvis

$$P(X_{t_1}\in A_1,,\dots,X_{t_n}\in A_n) = P(Y_{t_1}\in A_1,\dots,Y_{t_n}\in A_n)\tag{1.2}$$

for alle $n\geq 1$, alle $t_1,\dots,t_n\in T$ og alle $A_1,\dots,A_n\in\mathscr{B}(S)$.

Før vi fortsætter den generelle introduktion, indføres nogle vigtige procesegenskaber samt procestyper. Det er værd at bemærke, at betingelserne kun afhænger af fordelingsmålet, dvs. det drejer sig om versionsegenskaber, sådan at forstå at hvis en proces opfylder en af betingelserne, så gælder det også enhver version. Som det er gængs, undertrykkes det underliggende sandsynlighedsfelt i notationen.

Når T er enten $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{Z}$ eller $\mathbf{Z}_+$ indfører vi for $t\in T$ *fortiden* og *fremtiden*, der er følgende σ-algebraer:

$$\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s\mid s\leq t, s\in T)\tag{1.3}$$
$$\mathscr{F}^{X,t} := \sigma(X_s\mid s\geq t, s\in T).\tag{1.4}$$

Eksempel 1.3. $S = \mathbf{R}, T$ vilkårlig.
En proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at være integrabel hhv. kvadratisk integrabel, hvis X_t'erne alle har endelig middelværdi hhv. endeligt anden moment, dvs. $X_t \in L^1(P)$ hhv. $X_t \in L^2(P)$ for alle $t \in T$. I givet fald betegner

$$m_X(\cdot): \; t \mapsto E[X_t] \;\text{ og }\; \Gamma_X(\cdot,\cdot): \; (t,s) \mapsto Cov(X_t, X_s),$$

og kaldes hhv. processens *middelværdi* - og *covariansfunktion*. Funktionen $t \mapsto \Gamma_X(t,t)$ kaldes *variansfunktionen* og betegnes ofte $\sigma_X^2(\cdot)$.

Eksempel 1.4. $S = \mathbf{R}$, T vilkårlig.
En proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at være *Gaussisk*, hvis $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ for ethvert sæt af tidspunkter $t_1, \ldots, t_n$ i T følger en n-dimensional normal fordeling. Som bekendt er fordelingen for en Gaussisk proces entydigt bestemt ved den tilhørende middelværdi - og covariansfunktion.

Eksempel 1.5. $S = \mathbf{R}^n$ $n \geq 1$, $T = \mathbf{R}_+$ eller $\mathbf{R}$.
En proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at være kontinuert (højrekontinuert) i sandsynlighed hhv. i L^p, hvis

$$t \mapsto X_t \;\text{ er kontinuert (højrekontinuert) i sandsynlighed hhv } L^p.$$

Dvs. X_{t_n} konvergerer imod X_t i sandsynlighed hhv. i L^p for ethvert t og enhver følge $(t_n)_{n\geq 1}$ i T, som konvergerer (fra højre) mod t. For p lig 1 eller 2 omtales L^p-kontinuitet ofte som kontinuitet i *middel* hhv. *kvadratisk middel*. Til senere brug bemærkes, at hvis $\{X_q \,|\, q \in [0,n] \cap \mathbf{Q}\}$ er uniformt integrabel for alle $n \geq 1$, så gælder (tænk over dette) implikationen

$$t \mapsto X_t \;\text{ er højrekontinuert i sandsynlighed} \Rightarrow t \mapsto X_t \;\text{ er højrekontinuert i } L^1.$$

Eksempel 1.6. $S = \mathbf{R}^n$ $n \geq 1$, $T = \mathbf{Z}_+/\mathbf{Z}$ eller $\mathbf{R}_+/\mathbf{R}$.
En proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at være *(strengt) stationær*, hvis

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \sim (X_{t_1+t}, \ldots, X_{t_k+t})$$

for alle $t_1, \ldots, t_k$ og t i T. Bemærk at hvis $n = 1$ og $(X_t)_{t\in T}$ er (strengt) stationær samt kvadratisk integrabel, så er

$$m_X(t) \equiv m \in \mathbf{R} \text{ og } \Gamma_X(t,s) = \phi(t-s),$$

dvs. m_X er konstant, og Γ_X afhænger kun af afstanden mellem tidspunkterne. Reelle kvadratisk integrable processer $(X_t)_{t\in T}$, hvis middelværdi- og covariansfunktion er på denne form, kaldes *svagt stationære*.

Eksempel 1.7. $S = \mathbf{R}^n$ $n \geq 1$, $T = \mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$.
En proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at have *uafhængige tilvækster*, hvis $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ er uafhængige for ethvert sæt af voksende tidspunkter $t_1, \ldots, t_k$ i T. Hvis yderligere fordelingen for $X_s - X_t$ kun afhænger af $s-t$ for $s \neq t$ siges $(X_t)_{t\in T}$ at have *uafhængige stationære tilvækster*.

Lad $(X_t)_{t\in T}$ have uafhængige tilvækster. Denne proces har da uafhængige stationære tilvækster hvis og kun hvis $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$ for alle $0 \le s < t$ med $s,t \in T$. Hvis yderligere der gælder $X_0 = 0$ næsten sikkert har $(X_t)_{t\in T}$ uafhængige stationære tilvækster hvis og kun hvis $X_t - X_s \sim X_{t-s}$ for alle $0 \le s \le t$ med $s,t \in T$.

En simpel overvejelse viser, at betingelsen for uafhængige tilvækster ækvivalent kan formuleres på hver af følgende to måder.

a) $X_s - X_t$ er uafhængig af *fortiden* set ud fra tid t, dvs. σ-algebraen $\mathscr{F}_t^X$, for alle $0 \le t < s$ i T.

b) $\mathscr{F}_t^X$ og $\sigma(X_u - X_t \,|\, u \ge t)$ er uafhængige for alle t i T.

Hvis $(X_t)_{t\in T}$ har uafhængige / uafhængige stationære tilvækster, så har for alle $s \in T$

$$(X_t^s)_{t\in T} := (X_{t+s} - X_s)_{t\in T}$$

samme egenskab, og $(X_t^s)_{t\in T}$ er uafhængig af $\mathscr{F}_s^X$. $(X_t^s)_{t\in T}$ og $(X_t - X_0)_{t\in T}$ er endvidere versioner, hvis $(X_t)_{t\in T}$ har uafhængige stationære tilvækster.

Eksempel 1.8. $S = \mathbf{R}$ og $T = \mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$.
En integrabel proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at være en *martingal*, hvis

$$E[X_s \,|\, \mathscr{F}_t^X] = X_t \quad P\text{–n.o. for alle } t < s \in T,$$

og $(X_t)_{t\in T}$ siges at være en *baglæns martingal*, hvis

$$E[X_s \,|\, \mathscr{F}^{X,t}] = X_t \quad P\text{–n.o. for alle } s < t \in T,$$

Hvis $=$ erstattes af $\le$ hhv. $\ge$ taler man om en super - hhv. submartingal.

Eksempel 1.9. S vilkårlig og $T = \mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$.
En proces $(X_t)_{t\in T}$ siges at være *Markov*, hvis

'fremtiden er betinget uafhængig af fortiden givet nutiden'

Dvs. hvis der for ethvert t og alle begrænsede reelle variable Y_1 og Y_2 målelige hhv. med hensyn til fremtiden $\mathscr{F}^{X,t}$ og fortiden $\mathscr{F}_t^X$ gælder

$$E[Y_1 \cdot Y_2 \,|\, \sigma(X_t)] = E[Y_1 \,|\, \sigma(X_t)] \cdot E[Y_2 \,|\, \sigma(X_t)] \quad P\text{–n.o.}$$

Markov egenskaben kan formuleres på flere måder, som følgende resultat viser.

Proposition 1.10. *Lad $(S,\mathscr{B})$ være et vilkårligt måleligt rum og $T = \mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$. Lad $(X_t)_{t\in T}$ have tilstandsrum S. Følgende udsagn 1)-5) er da ækvivalente.*
1) $(X_t)_{t\in T}$ er Markov.
2) For ethvert t og enhver begrænset reel $\mathscr{F}^{X,t}$-målelig variabel Y gælder

$$E[Y \,|\, \mathscr{F}_t^X] = E[Y \,|\, \sigma(X_t)] \quad P\text{–n.o.} \tag{1.5}$$

3) For ethvert t og $A \in \mathscr{F}^{X,t}$ gælder

$$E[\mathbf{1}_A \mid \mathscr{F}_t^X] = E[\mathbf{1}_A \mid \sigma(X_t)] \quad P\text{−n.o.}$$

4) for alle $t, s \geq 0$ med $s, t \in T$ og alle $f \in b\mathscr{B}$ er

$$E[f(X_{t+s}) \mid \mathscr{F}_t^X] = E[f(X_{t+s}) \mid \sigma(X_t)] \quad P\text{−n.o.}$$

5) For alle $t \in T$ og $t_1, \ldots, t_n \in T$ med $t_i \leq t$ samt enhver begrænset reel $\mathscr{F}^{X,t}$-målelig variabel Y er

$$E[Y \mid \sigma(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_t)] = E[Y \mid \sigma(X_t)] \quad P\text{−n.o.}$$

Antag yderligere, at $T = \mathbf{Z}_+$. Da er 1)-5) ækvivalente med 6)-8), hvor

6) For alle $t \in T$ og $f \in b\mathscr{B}$ er

$$E[f(X_{t+1}) \mid \mathscr{F}_t^X] = E[f(X_{t+1}) \mid \sigma(X_t)] \quad P\text{−n.o.}$$

7) For alle $t \in T$, $0 \leq t_1 < \ldots t_n \leq t$ og $f \in b\mathscr{B}$ er

$$E[f(X_{t+1}) \mid \sigma(X_0, X_{t_1} \ldots, X_{t_n}, X_t)] = E[f(X_{t+1}) \mid \sigma(X_t)] \quad P\text{−n.o.}$$

8) For alle $t \in T$, $0 \leq t_1 < \ldots t_n \leq t$ og $A \in \mathscr{B}$ er

$$E[\mathbf{1}_{\{X_{t+1} \in A\}} \mid \sigma(X_0, X_{t_1} \ldots, X_{t_n}, X_t)] = E[\mathbf{1}_{\{X_{t+1} \in A\}} \mid \sigma(X_t)] \quad P\text{−n.o.}$$

Bevis. Lad os først vise at 1) og 2) er ækvivalente. Antag at (X_t) er en Markov proces som defineret ovenfor, og lad $t \in T$ og Y være en begrænset $\mathscr{F}^{X,t}$-målelig variabel. For at vise 2) skal vi, pr. definition af betinget middelværdi, gøre rede for at

$$E[E[Y \mid \sigma(X_t)], A] = E[Y, A] \quad \text{for alle } A \in \mathscr{F}_t^X.$$

Men for ethvert sådant A er

$$E[E[Y \mid \sigma(X_t)], A] = E[E[Y \mid \sigma(X_t)] \cdot \mathbf{1}_A] = E\left[E\left[E\left[Y \mid \sigma(X_t)\right] \cdot \mathbf{1}_A \vert \sigma(X_t)\right]\right]$$

$$= E[E[Y \mid \sigma(X_t)] \cdot E[\mathbf{1}_A \mid \sigma(X_t)]] = E[E[Y \cdot \mathbf{1}_A \mid \sigma(X_t)]] = E[Y \cdot \mathbf{1}_A] = E[Y, A].$$

Antag omvendt at 2) er opfyldt og lad Y_1 og Y_2 være reelle begrænsede variable målelige med hensyn til hhv. $\mathscr{F}^{X,t}$ og $\mathscr{F}_t^X$. Da gælder P-n.o.

$$E\left[Y_1 \cdot Y_2 \mid \sigma(X_t)\right] = E\left[E\left[Y_1 \cdot Y_2 \vert \mathscr{F}_t^X\right] \mid \sigma(X_t)\right] E[Y_2 \cdot E[Y_1 \mid \mathscr{F}_t^X] \mid \sigma(X_t)]$$

$$= E[Y_2 \cdot E[Y_1 \mid \sigma(X_t)] \mid \sigma(X_t)] = E[Y_1 \mid \sigma(X_t)] \cdot E[Y_2 \mid \sigma(X_t)],$$

hvilket viser 1).

Det er klart, at 2) medfører 3), 4) og 5). Omvendt følger 2) fra 3) eller 5) ved at anvende det Monotone Klasse Lemma, og 2) følger fra 4) ved brug af successiv betingning og det Monotone Klasse Lemma.

Lad os nøjes med at vise at 4) medfører 2). Antag altså at 4) er opfyldt. Vi viser først, ved induktion i n, at (1.5) gælder, når Y er på formen

$$Y = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i}) \tag{1.6}$$

hvor $n \geq 1, 0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n$ med $s_i \in T$ og $f_i \colon S \mapsto \mathbf{R}$ er begrænset og målelig. For $n = 1$ er dette ok pr. antagelse, så lad os antage at (1.5) gælder, når Y er formen (1.6) for et fast n. For f_{n+1} begrænset og målelig samt $s_{n+1} > s_n$ har vi da

$$\begin{aligned}
&E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}})\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\mathscr{F}_t^X\right] \\
=&E\left[E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \mathscr{F}_{t+s_n}^X\right]\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\mathscr{F}_t^X\right] \\
=&E\left[E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \sigma(X_{t+s_n})\right]\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\mathscr{F}_t^X\right] \\
=&E\left[g(X_{t+s_n})\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\mathscr{F}_t^X\right]
\end{aligned}$$

hvor vi ved sidste lighedstegn udnyttede at $E[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \sigma(X_{t+s_n})]$ kan skrives som en funktion, g, af X_{t+s_n}. Desuden udnyttede vi regneregler for betingede middelværdier samt at 4) er opfyldt. Induktionsantagelsen viser nu, at

$$\begin{aligned}
&E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}})\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\mathscr{F}_t^X\right] \\
=&E\left[g(X_{t+s_n})\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\sigma(X_t)\right] \\
=&E\left[E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \sigma(X_{t+s_n})\right]\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\sigma(X_t)\right] \\
=&E\left[E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}}) \mid \mathscr{F}_{t+s_n}^X\right]\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\sigma(X_t)\right] \\
=&E\left[f_{n+1}(X_{t+s_{n+1}})\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t+s_i})\middle|\sigma(X_t)\right]
\end{aligned}$$

som ønsket.

Lad nu $t \geq 0$ med $t \in T$ være fast. Lad $\mathscr{R}$ være klassen af stokastiske variable Y på formen (1.6) hvor $n \geq 1$, $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n$ med $s_i \in T$ og $f_i \colon S \mapsto \mathbf{R}$ er begrænset og målelig. Bemærk at $\mathscr{R}$ er en multiplikativ klasse med $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{F}^{X,t}$.

Lad $\mathscr{H}$ være mængden af $\mathscr{F}^{X,t}$-målelige begrænsede stokastiske variable Y der opfylder (1.5). Idet vi har Monoton Konvergens og linearitet af betingede middelværdier, opfylder $\mathscr{H}$ punkterne (1)–(3) i Appendix G. Dermed viser det Monotone Klasse Lemma, at enhver $\mathscr{F}^{X,t}$-målelig begænset stokastisk variabel opfylder (1.5). Dette er det ønskede resultat.

Det overlades til læseren at overbevise sig om, at (6)–(8) er ækvivalente med Markovegenskaben, når $T = \mathbf{Z}_+$.

$\square$

Vi skal i dette kursus bruge megen tid på at studere processer med uafhængige tilvækster, dels fordi de er vigtige i sig selv, og dels fordi de udgør et rigt eksempelmateriale for andre vigtige procestyper. Som et første eksempel herpå vises flg. sætning. Tidsparametermængden er antaget kontinuert, men resultatet gælder uændret i det diskrete tilfælde.

Sætning 1.11. *Lad tilstandsrummet være $S = \mathbf{R}^n$. Enhver proces $(X_t)_{t\geq 0}$ med uafhængige tilvækster er en Markov proces. Hvis processen yderligere er reel (dvs. $S = \mathbf{R}$) gælder følgende.*

1) $(X_t - m_X(t))_{t\geq 0}$ er en martingal, hvis (X_t) er integrabel.

2) $((X_t - m_X(t))^2 - \sigma_X^2(t))_{t\geq 0}$ er en martingal, hvis (X_t) er kvadratisk integrabel.

3) For alle $a \in \mathbf{R}$ er $(\exp(aX_t)/E[\exp(aX_t)])$ en martingal, hvis $(\exp(aX_t))$ er integrabel.

4) For alle $a \in \mathbf{R}$ er $(\exp(aiX_t)/E[\exp(aiX_t)])$ en martingal, hvis $E[\exp(aiX_t)] \neq 0$ for alle $t \in \mathbf{R}$.

5) $(X_t/t)_{t>0}$ er en baglæns martingal, hvis $X_0 = 0$ og (X_t) er integrabel og kontinuert i middel.

Bevis. Vi viser først Markovegenskaben ved at eftervise 3) i Proposition 1.10. Men da

$$\mathscr{F}^{X,t} = \sigma(X_s - X_t, X_t \,|\, s > t) = \sigma(\sigma(X_s - X_t \,|\, s > t) \cup \sigma(X_t))$$

kan vi nøjes med at se på $A = A_1 \cap A_2$, hvor

$$A_1 \in \sigma(X_s - X_t \,|\, s > t) \;\text{ og }\; A_2 \in \sigma(X_t),$$

da disse mængder tilsammen udgør et snitstabilt mængdesystem, som frembringer $\mathscr{F}^{X,t}$. Men for et sådant A er $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A_1} \cdot \mathbf{1}_{A_2}$, og uafhængigheden af A_1 og $\mathscr{F}_t^X$ viser at

$$E\,[\mathbf{1}_{A_1} \,|\, \mathscr{F}_t^X] = P(A_1) = E\,[\mathbf{1}_{A_1} \,|\, \sigma(X_t)].$$

Dermed er

$$E\,[\mathbf{1}_{A_1} \cdot \mathbf{1}_{A_2} \,|\, \mathscr{F}_t^X] = E\,[\mathbf{1}_{A_1} \,|\, \mathscr{F}_t^X] \cdot \mathbf{1}_{A_2} = E\,[\mathbf{1}_{A_1} \,|\, \sigma(X_t)] \cdot \mathbf{1}_{A_2} = E\,[\mathbf{1}_{A_1} \cdot \mathbf{1}_{A_2} \,|\, \sigma(X_t)]$$

som ønsket.

Lad os dernæst vise martingalegenskab nr. 1. Lad $0 \leq t < s$ være givet. Ved fornyet brug af egenskaber ved betingede middelværdier fås

$$E[X_s \,|\, \mathscr{F}_t^X] = E[X_s - X_t + X_t \,|\, \mathscr{F}_t^X] = E[X_s - X_t] + X_t = X_t - m_X(t) + m_X(s)$$

dvs.

$$E[X_s - m_X(s)\,|\,\mathscr{F}_t^X] = X_t - m_X(t),$$

hvilket er det ønskede. Martingalegenskab nr. 2 vises tilsvarende, thi for $0 \le t < s$ er

$$E[\,(X_s - m_X(s))^2\,|\,\mathscr{F}_t^X] = E[\,(X_s - X_t - (m_X(s) - m_X(t)) + X_t - m_X(t))^2\,|\,\mathscr{F}_t^X]$$

$$= E[\,(\,(X_s - X_t) - (m_X(s) - m_X(t))\,)^2] + (X_t - m_X(t))^2 = Var(X_s - X_t) + (X_t - m_X(t))^2.$$

Sammen med ligheden $Var(X_s) = Var(X_t) + Var(X_s - X_t)$ viser dette egenskab nr. 2.

Lad dernæst a betegne et reelt tal, som opfylder betingelsen i punkt 3. Ifølge Fubini's sætning er

$$E[\exp(aX_s)] = E[\exp(a(X_s - X_t))] \cdot E[\exp(aX_t)],$$

for alle $0 \le t < s$, specielt er $E[\exp(a(X_s - X_t))]$ endelig. Men da der yderligere gælder

$$E[\exp(aX_s)|\mathscr{F}_t^X] = E[\exp(a(X_s - X_t)) \cdot \exp(aX_t)|\mathscr{F}_t^X]$$

$$= \exp(aX_t) \cdot E[\exp(a(X_s - X_t))|\mathscr{F}_t^X] = \exp(aX_t) \cdot E[\exp(a(X_s - X_t))],$$

er martingalegenskab nr. 3 også vist. Beviset for punkt 4) går på næsten samme måde blot er der her ingen problemer med integrabiliteten, da alt er begrænset. Detaljerne overlades til læseren. Læg mærke til at der i dette tilfælde er tale om en kompleks martingal. Beviset for punkt 5) er derimod lidt anderledes. Lad $0 < t < s$ være givet. Vi skal altså vise, at

$$E[X_t/t\,|\,X_s, X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}] = X_s/s$$

for alle $s < s_1 < \cdots < s_n$. Men da

$$E[X_t\,|\,X_s, X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}] = E[X_t\,|\,X_s, X_{s_1} - X_s, \ldots, X_{s_n} - X_s] = E[X_t\,|\,X_s]$$

ifølge de uafhængige tilvækster, mangler vi kun at vise, at

$$E[X_t/t\,|\,X_s] = X_s/s \quad \text{eller ækvivalent} \quad E[X_t\,|\,X_s] = t/s \cdot X_s.$$

Kontinuiteten i L^1 bevirker, at det er nok at vise dette for $t = \frac{k}{n}s$ for $1 \le k \le n$. Men da

$$Y_{i,n} = X_{is/n} - X_{(i-1)s/n} \quad \text{er } iid\text{-variable for } 1 \le i \le n \;\text{ og }\; X_t = \sum_{i=1}^{k} Y_{i,n} \;\text{ og }\; X_s = \sum_{i=1}^{n} Y_{i,n}$$

følger dette ved et velkendt symmetriargument. □

Korollar 1.12. *Lad* $(X_t)_{t\geq 0}$ *betegne en reel proces med uafhængige tilvækter, så at* $t \mapsto X_t$ *er højrekontinuert i sandsynlighed. Da gælder*

1) $t \mapsto m_X(t)$ *er højrekontinuert, hvis* (X_t) *er integrabel og*

$$\sup\{|E[X_t]| \,|\, t \in [0,n] \cap \mathbf{Q}\} < \infty \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

2) $t \mapsto m_X(t)$ *og* $t \mapsto \sigma_X^2(t)$ *er begge højrekontinuerte, hvis* (X_t) *er kvadratisk integrabel og*

$$\sup\{E[X_t^2] \,|\, t \in [0,n] \cap \mathbf{Q}\} < \infty \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

3) For givet $a \in \mathbf{R}$ *er* $t \mapsto E[\exp(aX_t)]$ *højrekontinuert, hvis* $(\exp(aX_t))$ *er integrabel og*

$$\sup\{E[\exp(aX_t)] \,|\, t \in [0,n] \cap \mathbf{Q}\} < \infty \quad \text{for alle } n \geq 1,$$

Bevis. Følger umiddelbart af Sætning 1.11 og bemærkningen sidst i Eksempel 1.5 på side 5. □

2 Kolmogorov's Konsistenssætning

Lad S være et metrisk rum og T være en ikke-tom mængde.

Betragt en stokastisk proces $(X_t)_{t\in T}$ med tilstandsrum S. For $t_1,\dots,t_n \in T$ lad

$$\mu(t_1,\dots,t_n) := P_{X.}(t_1,\dots,t_n)$$

betegne fordelingen af vektoren $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$. Dermed er $\mu(t_1,\dots,t_n)$ bestemt ved

$$\mu(t_1,\dots,t_n)(A_1\times\cdots\times A_n) = P(X_1\in A_1,\dots,X_{t_n}\in A_n) \quad \text{for } A_1,\dots,A_n\in\mathscr{B}(S) \tag{2.1}$$

og $\{\mu(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n\in T\}$ er familien af endeligt dimensionale marginale fordelinger for $(X_t)_{t\in T}$. Ligning (2.1) viser, at denne familie opfylder følgende konsistensbetingelser.

Kolmogorov's konsistensbetingelser.
For ethvert sæt $t_1,\dots,t_n\in T$ og $A_1,\dots,A_n\in\mathscr{B}(S)$ samt enhver permutation σ af mængden $\{1,\dots,n\}$ gælder

I. $\mu(t_1,\dots,t_n)(A_1\times\cdots\times A_n) = \mu(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)})(A_{\sigma(1)}\times\cdots\times A_{\sigma(n)})$

II. $\mu(t_1,\dots,t_i,\dots,t_n)(A_1\times\cdots\times A_{i-1}\times S\times A_{i+1}\times\cdots\times A_n) =$

$$\mu(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n)(A_1\times\cdots\times A_{i-1}\times A_{i+1}\times\cdots\times A_n).$$

Betingelsen II kan også udtrykkes som egenskaben

$$P_{X.}(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n) = P_{X.}(t_1,\dots,t_n)\circ p_{n,n-1}(i)^{-1},$$

hvor $p_{n,n-1}(i)$ er afbildningen fra $S^n \mapsto S^{n-1}$ bestemt ved

$$(s_1,\dots,s_n)\mapsto(s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1}\dots,s_n),$$

dvs. projektionen der sletter den i'te koordinat.

Hvis T er lineært ordnet, som f.eks. $\mathbf{Z}_+/\mathbf{Z}$ eller $\mathbf{R}_+/\mathbf{R}$, nøjes man som regel med at specificere $\mu(t_1,\dots,t_n)$ for ethvert sæt $t_1<\cdots<t_n$ af voksende tidspunkter, og i denne sammenhæng er det derfor kun II i Kolmogorov's konsistensbetingelser, som er interessant.

Lad os nu vende bøtten og betragte en familie $\{\mu(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n\in T\}$, hvor $\mu(t_1,\dots,t_n)$ er et sandsynlighedsmål på $(S^n,\mathscr{B}(S)^n)$. På nuværende tidspunkt antages ikke, at denne familie er frembragt af en proces som i (2.1). Vi siger, at familien er konsistent, hvis betingelserne I og II ovenfor er opfyldt. Hvis T er en delmængde af $\mathbf{R}$, specificerer vi som nævnt kun $\{\mu(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n\in T, t_1<\cdots<t_n\}$, og siger, at familien er konsistent, hvis betingelsen II er opfyldt.

Det er nu relevant at betragte følgende spørgsmål:

Findes der et sandsynlighedsfelt $(\Omega,\mathscr{F},P)$ og en derpå defineret stokastisk proces $(X_t)_{t\in T}$ med tidsparametermængde T og tilstandsrum S som opfylder (2.1) for alle $t_1,\dots,t_n\in T$?

Vi har allerede set, at hvis spørgsmålet skal besvares postivt, må vi som minimum kræve, at familien er konsistent. Kolmogorov viste i 1933, at hvis blot S er polsk, er denne betingelse også tilstrækkelig.

Sætning 2.1. Kolmogorov's Konsistenssætning
Lad T betegne en vilkårlig mængde, S være et polsk rum og lad $\{\mu(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n \in T\}$ være konsistent. Da findes der et sandsynlighedsfelt $(\Omega,\mathscr{F},P)$ og en derpå defineret stokastisk proces $(X_t)_{t\in T}$ med tidsparametermængde T og tilstandsrum S, så at

$$P(X_{t_1} \in A_1,\dots,X_{t_n} \in A_n) = \mu(t_1,\dots,t_n)(A_1 \times \cdots \times A_n) \tag{2.2}$$

for alle $t_1,\dots t_n \in T$ og $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{B}(S)$.

En proces $(X_t)_{t\in T}$ der opfylder (2.2) for alle $t_1,\dots t_n \in T$ og $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{B}(S)$ kaldes for en realisation af $\{\mu(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n \in T\}$.

Hvis T er en delmængde at $\mathbf{R}$, gælder et helt tilsvarende result for en konsistent familie $\{\mu(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_1,\dots,t_n \in T, t_1 < \cdots < t_n\}$.

Sætningen udtrykker altså, at så snart vi har defineret et sæt af endeligt dimensionale marginale fordelinger, som ikke indeholder åbenbare selvmodsigelser, dvs. er konsistent, så findes der en tilhørende realisation. Eksistens af processer med en given fordeling er altså ækvivalent med eksistens af et relevant konsistent sæt af endeligt dimensionale fordelinger.

Vi vil ikke her gå ind i beviset for Kolmogorov's Konsistenssætning, men blot nævne at det er nok at vise følgende tilsyneladende simplerere udsagn (se noterne til Målteori for et bevis)

For ethvert polsk rum S og ethvert sæt $\{\mu_n\,|\,n \geq 1\}$, hvor μ_n er et sandsynlighedsmål på $(S^n,\mathscr{B}(S^n))$, så at

$$\mu_{n+1}(A \times S) = \mu_n(A) \quad A \in \mathscr{B}(S^n)\ n \geq 1,$$

findes der et sandsynlighedsmål P på $(S^\infty,\mathscr{B}(S)^\infty)$, så at $\mu_n = P \circ p_n^{-1}$ for $n \geq 1$, hvor $p_n : S^\infty \to S^n$ er givet ved

$$p_n((x_i)_{i\geq 1}) = (x_1,\dots,x_n) \quad (x_i)_{i\geq 1} \in S^\infty.$$

Som en vigtig anvendelse vil vi se på eksistensen af processer med stationære og uafhængige tilvækster.

Definition 2.2. Lad μ og ν være sandsynlighedsmål på $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$. *Foldningen af μ og ν* er da sandsynlighedsmålet $\nu * \mu$ på $(\mathbf{R},\mathscr{B}(\mathbf{R}))$ defineret ved

$$(\nu * \mu)(B) := \int \mu(B-x)\nu(dx), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

Fra et sandsynlighedsteoretisk synspunkt svarer en foldning til en sum af uafhængige stokastiske variable: Lad X have fordeling ν og μ have fordeling μ; det vil sige $P(X \in A) = \nu(A)$ for $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$, med en tilsvarende definition for Y. Antag at X og Y er uafhængige. Da har $X+Y$ fordeling $\nu * \mu$; det vil sige $P(X+Y \in B) = (\nu * \mu)(B)$ for ethvert $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

Eksempel 2.3. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en reel proces med uafhængige stationære tilvækster og lad os antage $X_0 = 0$. Lad ν_t være fordelingen af X_t for ethvert t; det vil sige $\nu_t(A) = P(X_t \in A)$ for $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$.

Lad os se på familien $(\nu_t)_{t\geq 0}$. For det første har jo antaget $X_0 = 0$, så derfor er $\nu_0 = \delta_0$, hvor δ_0 er punktmålet i 0. For det andet har vi, at der for alle $t,s \geq 0$ gælder

$$\nu_{t+s} = \nu_t * \nu_s. \tag{2.3}$$

Det vil sige folder man ν_t og ν_s, så fås ν_{t+s}. Lad os vise dette. Bemærk at $X_{t+s} = X_t + (X_{t+s} - X_t)$ hvor de to stokastiske variable X_t og $X_{t+s} - X_t$ er uafhængige og henholdsvis har fordeling ν_t og ν_s. Dermed har vi altså, at X_{t+s} har fordeling $\nu_t * \nu_s$. Men pr. definition har X_{t+s} også fordeling ν_{t+s}, hvilket giver (2.3).

Lad os herefter bestemme de endeligt dimensionale marginale fordelinger af $(X_t)_{t\geq 0}$. Lad $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$. Da $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ er uafhængige med $X_{t_1} \sim \nu_{t_1}$ og

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \sim X_{t_i - t_{i-1}} \sim \nu_{t_i - t_{i-1}} \qquad \text{for } i = 2, \ldots, n,$$

ses at $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ har fordeling

$$\nu_{t_1} \times \nu_{t_2 - t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n - t_{n-1}}.$$

Definer afbildningen $T_n \colon \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ ved

$$T_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$$

og bemærk at

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = T_n((X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})).$$

Det følger derfor, at $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ har fordeling $\nu_{t_1} \times \nu_{t_2 - t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n - t_{n-1}} \circ T_n^{-1}$.

Eksempel 2.3 motiverer følgende.

Definition 2.4. Et sæt af sandsynlighedsmål $(\nu_t)_{t\geq 0}$ på $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ kaldes en *foldningssemigruppe*, hvis der gælder

a) $\nu_0 = \delta_0$ (punktmålet i 0).

b) $\nu_{t+s} = \nu_t * \nu_s$ for alle $t,s \geq 0$,

En foldningssemigruppe $(\nu_t)_{t\geq 0}$ siges endvidere at være *regulær*, hvis ν_t konvergerer svagt (i fordeling) mod ν_0 for t gående mod 0.

Eksempel 2.5. Hvis $\nu_t = po(\lambda t)$ eller $\nu_t = N(\mu t, \sigma^2 t)$ for $t \geq 0$, så er (ν_t) en regulær foldningssemigruppe.

Der er en tæt sammenhæng mellem foldningssemigrupper og processer med stationære uafhængige tilvækster, som følgende resultat viser.

Sætning 2.6. *1) Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en reel stokastisk proces med uafhængige stationære tilvækster og definer $\nu_t = P_{X_t - X_0}$. Det vil sige ν_t er fordelingen af $X_t - X_0$ for $t \geq 0$.*

Da er $(\nu_t)_{t\geq 0}$ en foldningssemigruppe. Endvidere er $(\nu_t)_{t\geq 0}$ regulær hvis og kun hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er kontinuert i sandsynlighed.

2) Lad $(\nu_t)_{t\geq 0}$ betegne en given foldningssemigruppe. Da findes en reel proces $(X_t)_{t\geq 0}$ med uafhængige stationære tilvækster, som opfylder at X_t har fordeling ν_t for ethvert $t \geq 0$.

Bevis. 1) er stort set vist i eksemplet ovenfor; de resterende dele vises i en opgave.

2) Antag at $(\nu_t)_{t\geq 0}$ er en given foldningssemigruppe. Definer for ethvert sæt af tidspunkter $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ i $\mathbf{R}_+$

$$\mu(t_1,\ldots,t_n) := \nu_{t_1} \times \nu_{t_2-t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n-t_{n-1}} \circ T_n^{-1},$$

hvor T_n er den lineære afbildning i $\mathbf{R}^n$ bestemt ved

$$T_n(x_1,\ldots,x_n) = (x_1, x_1+x_2, \cdots, x_1+\cdots+x_n)$$

med invers U_n givet ved

$$U_n(x_1,\ldots,x_n) = (x_1, x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1}).$$

Sammenlign med Eksempel 2.3.

Vi vil vise, at

$$\{\mu(t_1,\ldots,t_n) \,|\, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n\} \tag{2.4}$$

udgør et konsistent sæt af endeligt dimensionale marginale mål. Kolmogorov's konsistenssætning viser da, at der findes en tilhørende realisation $(X_t)_{t\geq 0}$. Dernæst viser vi, at $(X_t)_{t\geq 0}$ har uafhængige tilvækster og opfylder

$$X_0 = 0 \text{ n.s. og } X_{t+s} - X_s \sim \nu_t \text{ for alle } s,t \geq 0, \tag{2.5}$$

hvilket betyder, at $(X_t)_{t\geq 0}$ har de ønskede egenskaber.

Bevis for at (2.4) er konsistent: Vi skal vise, at for ethvert givent sæt af tidspunkter $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ og ethvert $1 \leq i \leq n$ er

$$\mu(t_1,\ldots,t_n) \circ p_{n,n-1}(i)^{-1} = \mu(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n),$$

hvor $p_{n,n-1}(i)$ er afbildningen fra $\mathbf{R}^n$ ned på $\mathbf{R}^{n-1}$, som dropper den i'te koordinat ud. Eller ækvivalent at

$$\nu_{t_1} \times \nu_{t_2-t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n-t_{n-1}} \circ (p_{n,n-1}(i) \circ T_n)^{-1} =$$

$$\nu_{t_1} \times \nu_{t_2-t_1} \times \cdots \times \nu_{t_{i-1}-t_{i-2}} \times \nu_{t_{i+1}-t_{i-1}} \times \cdots \times \nu_{t_n-t_{n-1}} \circ T_{n-1}^{-1}.$$

Men da U_{n-1} er en bijektion på $\mathbf{R}^{n-1}$, er dette ækvivalent med at vise, at

$$\begin{aligned} &\nu_{t_1} \times \nu_{t_2-t_1} \times \cdots \times \nu_{t_{i-1}-t_{i-2}} \times \nu_{t_{i+1}-t_{i-1}} \times \cdots \times \nu_{t_n-t_{n-1}} \\ =&\nu_{t_1} \times \nu_{t_2-t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n-t_{n-1}} \circ (U_{n-1} \circ p_{n,n-1}(i) \circ T_n)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Udnytter vi nu at

$$(U_{n-1} \circ p_{n,n-1}(i) \circ T_n)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

for $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ses, at (2.6) er en konsekvens af ligheden $\nu_{t_{i+1}-t_{i-1}} = \nu_{t_i - t_{i-1}} * \nu_{t_{i+1}-t_i}$. Ifølge Kolmogorov's Konsistenssætning findes der derfor en realisation $(X_t)_{t\geq 0}$ af familien $\{\mu(t_1, \ldots, t_n) \,|\, 0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}$.

Bevis for at $(X_t)_{t\geq 0}$ har uafhængige tilvækster og opfylder (2.5): Bemærk at for ethvert sæt af tidspunkter $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ er

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) = U_n(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

og dermed har vi

$$P_{(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})} = \mu(t_1, \ldots, t_n) \circ U_n^{-1}$$

$$= \nu_{t_1} \times \nu_{t_2 - t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n - t_{n-1}} \circ (U_n \circ T_n)^{-1}, = \nu_{t_1} \times \nu_{t_2 - t_1} \times \cdots \times \nu_{t_n - t_{n-1}}$$

som ønsket.

$\square$

Enhver foldningssemigruppe bestemmer altså en reel stokastisk proces med uafhængige stationære tilvækster, som er 0 i 0. Vi skal senere nærmere studere de to tilfælde, hvor $(\nu_t)_{t\geq 0}$ er givet ved enten

$$1)\ \nu_t = po(\lambda t) \text{ for et } \lambda > 0 \quad \text{eller} \quad 2)\ \nu_t = N(0, \sigma^2 t) \text{ for et } \sigma^2 > 0,$$

idet 1) leder frem til den såkaldte *Poisson proces* med intensitet λ og 2) til en standard *Wiener proces* med parameter σ^2. Bemærk at de to foldningssemigrupper begge er regulære.

3 Modifikation og Uskelnelighed

I overensstemmelse med det traditionelle syn på sandsynlighedsteoretiske objekter er det naturligt at tro, at processer med samme fordeling er lige gode modeller for et givent system. Dette er også rigtigt, hvis tidsparametermængden er endelig eller højst tællelig, thi da vil ethvert udtryk formuleret ved hjælp af én given proces opføre sig som det tilsvarende udtryk formuleret ved hjælp af en version, dvs. de vil være hændelser på samme tid, og de vil i givet fald have samme sandsynlighed. Lad os f.eks. antage at $(X_t)_{t\in T}$ og $(X'_t)_{t\in T}$ er reelle versioner med tællelig tidsparametermængde. Da er

$$\{\sup_{t\in T} X_t > c\} \quad \text{og} \quad \{\sup_{t\in T} X'_t > c\}$$

for ethvert $c \in \mathbf{R}$ begge hændelser og

$$P(\sup_{t\in T} X_t > c) = P'(\sup_{t\in T} X'_t > c).$$

Men hvis T er overtællelig, er tingene mere komplicerede. Antag f.eks. at $T = \mathbf{R}_+$, og lad $(X_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ og $(X'_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ være to ækvivalente modeller for prisudviklingen på en aktie. Et oplagt interessant spørgsmål er her: Hvad er sandsynligheden for, at prisen nogensinde kommer over c-kroner? I modellerne er det et spørgsmål om sandsynligheden af mængderne

$$\{\sup_{t\in T} X_t > c\} \quad \text{og} \quad \{\sup_{t\in T} X'_t > c\}.$$

Her kan der nu opstå flere forskellige problemer. Da $\mathbf{R}_+$ ikke er tællelig, er de to mængder ikke nødvendigvis målelige og kan som sådan måske slet ikke tillægges nogen sandsynlighed, og selv om de kan, behøver sandsynlighederne ikke være ens. Lad os illustrere dette ved et simpelt eksempel.

Eksempel 3.1. Lad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ være sandsynlighedsfeltet $((0,\infty), \mathscr{B}((0,\infty)), e^{-t}\,dt)$. Definer herpå tre reelle processer (X_t), (Y_t) og $(\mathbf{Z}_t)$ alle med tidsparametermængde $\mathbf{R}_+$ ved fastsættelsen

$$X_t(\omega) = 0,\ \ Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega) \ \text{ og } \ \mathbf{Z}_t(\omega) = \mathbf{1}_{\tilde{N}}(t,\omega) \ \text{ for alle } t \text{ og } \omega.$$

Her er $\tilde{N} := \{(x,y)\,|\,x = y \in N\}$ for en ikke-Borel mængde $N \subseteq (0,\infty)$. Det ses let, at processerne er versioner, for der gælder endog

$$P(X_t = Y_t = \mathbf{Z}_t) = 1 \ \text{ for alle } t.$$

Men ikke desto mindre er de ret så forskellige. F.eks. har (X_t) lutter kontinuerte udfaldsfunktioner, medens enhver udfaldsfunktion hørende til de to øvrige er diskontinuert i mindst et punkt. Betragt endvidere mængderne

$$A_X = \{\sup_t X_t > 1/2\},\ \ A_Y = \{\sup_t Y_t > 1/2\} \ \text{ og } \ A_{\mathbf{Z}} = \{\sup_t \mathbf{Z}_t > 1/2\}$$

Simple overvejelser viser, at $A_X = \emptyset$, $A_Y = \Omega$ og $A_{\mathbf{Z}} = N$, dvs. de to første er målelige, men har forskellig sandsynlighed, hvorimod den sidste end ikke er målelig.

Versioner og endog modifikationer (se nedenfor) kan derfor ikke nødvendigvs opfattes som lige gode modeller, så hvilken er da at foretrække, hvis man kan vælge mellem forskellige versioner ? Set ud fra et modelbygningssynspunkt er svaret klart. Man tager selvfølgelig den model, hvori 'flest hændelser' defineret ved hjælp af processen kan tillægges en sandsynlighed, som er entydigt bestemt ved fordelingen. Dette betyder, at man vælger den model, der har de 'pæneste' udfaldsfunktioner, ud fra den kendsgerning, at hvis f.eks. alle udfaldsfunktioner er højrekontinuerte / venstrekontinuerte, så er processen fuldkommen bestemt ved tælleligt mange tidsvariable, og sandsynligheder for hændelser udtrykt ved en sådan tællelig familie af variable er klart entydigt bestemt ved processens fordeling. Lad os f.eks. betragte en reel proces $(X_t)_{t\geq 0}$ med lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner. Da er

$$V_X := \{\omega \,|\, t \mapsto X_t(\omega) \text{ voksende}\} \text{ og } C_X := \{\omega \,|\, t \mapsto X_t(\omega) \text{ kontinuert}\}$$

givet ved formlerne

$$V_X = \bigcap_{s>t,\, s,t\in Q_+} \{X_s \geq X_t\} \ \text{ og } \ C_X = \bigcap_{m\geq 1} \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{|s-t|\leq \frac{1}{n},\, s,t\in[0,m]\cap Q} \{|X_s - X_t| \leq 1/k\}.$$

Heraf ses, at V_X og C_X er hændelser, og deres sandsynligheder afhænger kun af fordelingen. Tilsvarende er for ethvert $c \in \mathbf{R}$

$$\{\sup_{t\geq 0} X_t > c\} = \{\sup_{r\geq 0,\, r\in \mathbf{Q}} X_r > c\}$$

dvs. igen en hændelse med en sandsynlighed, der kun afhænger af fordelingen.

Dette giver derfor anledning til flg. teoretiske spørgsmål. Givet et konsistent sæt af endelig dimensionale mål, hvor 'pæn', mht. regularitet af udfaldsfunktionerne, en realisation findes der da ?

Spørgsmålet er klart kun relevant i forbindelse med tidsparametermængder, som er udstyret med et ikke trivielt afstandsbegreb som f.eks. $\mathbf{R}_+ / \mathbf{R}$. Men inden vi ser nærmere på dette problemkompleks, indføres to forfininger af versionsbegrebet. I modsætning til versionsbegrebet har de to nye begreber kun mening for processer, som er defineret på samme sandsynlighedsfelt.

Definition 3.2. Lad $(S, \mathscr{B})$ være et måleligt rum. Lad $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ betegne processer defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ med tidsparametermængde T og tilstandsrum S. $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ siges da at være *modifikationer*, hvis

$$P(X_t = Y_t) = 1 \ \text{ for alle } t \in T,$$

og de siges at være *uskelnelige*, hvis der findes et $N \in \mathscr{F}$ med $P(N) = 0$, så at

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \text{ for alle } t \in T \text{ og alle } \omega \in N^c.$$

Da stokastiske variable og vektorer, som er ens n.o., har samme fordeling, er modifikationer specielt versioner, hvorimod det modsatte ikke er sandt. Ligeledes er uskelnelighed generelt finere end modifikation, dvs. alt i alt sammenhængen

$$\text{uskelnelighed} \Rightarrow \text{modifikation} \Rightarrow \text{version}.$$

Som eksemplet ovenfor viser, kan selv modifikationer have helt forskellige udfaldsfunktioner, hvorimod uskelnelige processer på nær en nulmængde har identiske udfaldsfunktioner. Forskellen mellem begreberne modifikation og uskelnelighed som kun kommer frem, hvis T er overtællelig, skyldes, at skønt $N_t = \{X_t \neq Y_t\}$ er en nulmængde for ethvert t, så behøver $\cup_t N_t$ ikke at være en nulmængde. Det gælder som bekendt, hvis T er tællelig, og i diskret tid er modifikation og uskelnelighed derfor det samme begreb. Eksemplet ovenfor viser imidlertid, at i kontinuert tid er dette ikke altid tilfældet.

Lad os nu argumentere for, at hvis vi er i kontinuert tid ($T = \mathbf{R}$ eller $T = \mathbf{R}_+$), så er processer, der har lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner, modifikationer hvis og kun hvis de er uskelnelige. Lad derfor S være et metrisk rum og $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ være processer med lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner. Da er

$$\{\exists t:\ X_t \neq Y_t\} = \{\exists t \in \mathbf{Q}_+:\ X_t \neq Y_t\};$$

Hvis (X_t) og (Y_t) er modifikationer, er hændelsen på højre side en nulmængde; det vil sige at venstre side ligeledes har sandsynlighed 0, og derfor er (X_t) og (Y_t) også uskelnelige.

Mere generelt har vi, at hvis næsten alle udfaldsfunktioner for $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ er højrekontinuerte, så findes en nulmængde N således at

$$\{\exists t:\ X_t \neq Y_t\} \subseteq N \cup \{\exists t \in \mathbf{Q}_+:\ X_t \neq Y_t\};$$

og derfor ser vi, at også i dette tilfælde er $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ uskelnelige hvis og kun hvis de er modifikationer.

Alt i alt har vi vist første del af følgende resultat.

Proposition 3.3. *Lad $T = \mathbf{R}$ eller $T = \mathbf{R}_+$. Lad S være et metrisk rum.*

1) Hvis $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ har udfaldsfunktioner, der næsten alle er højrekontinuerte, så er disse processer uskelnelige hvis og kun hvis de er modifikationer.

2) Hvis $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ har udfaldsfunktioner, der næsten alle er venstrekontinuerte, så er disse processer uskelnelige hvis og kun hvis de er modifikationer.

Dette resultat er yderligere med til at understrege ønsket om at arbejde med pæne realisationer.

Spørgsmålet om eksistens af pæne realisationer af et givent konsistent sæt af endeligt dimensionale mål er et både stort og vanskeligt emne, og vi vil her nøjes med at nævne tre vigtige resultater. Som formuleringen viser, er der tale om eksistens af modifikationer og ikke blot versioner, dvs. en given proces med de relevante endeligt dimensionale fordelinger kan modificeres på det samme sandsynlighedsfelt, så at den modificerede proces udelukkende har udfaldsfunktioner af den ønskede art. De to første resultater vil ikke blive bevist her, hvorimod vi senere skal give et udførligt bevis for den sidste sætning. Udsagnene omhandler processer med tidsparametermængde $\mathbf{R}_+$ og tilstandsrum $\mathbf{R}$. Men det er værd at bemærke, at der, hvad angår de to første, gælder tilsvarende resultater i et generelt polsk rum S, blot skal $|\cdot - \cdot|$ udskiftes med $d(\cdot,\cdot)$, hvor d er en fuldstændig og separabel metrik på S, som frembringer topologien.

Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en proces med tidsparametermængde $T = \mathbf{R}_+$. Vi siger at en udfaldsfunktion $t \mapsto X_t(\omega)$ er *cadlag* (en forkortelse af det franske 'Continue A Droite, Limite A Gauche'), hvis den er højrekontinuert med grænseværdier fra venstre; det vil sige at hvis $t \geq 0$ og $t_n \downarrow t$, så gælder $X_{t_n}(\omega) \to X_t(\omega)$, og hvis $t > 0$ og t_n er mindre end t med $t_n \uparrow t$, så gælder at $\lim X_{t_n}(\omega)$ eksisterer i $\mathbf{R}$. I givet fald lader vi $X_{t-}(\omega) := \lim_{t_n \uparrow t, t_n < t} X_{t_n}(\omega)$ og $\Delta X_t(\omega) := X_t(\omega) - X_{t-}(\omega)$ for $t > 0$.

Kolmogorov's Modifikationssætning.
En stokastisk proces (X_t) har en modifikation med lutter kontinuerte udfaldsfunktioner, hvis der eksisterer positive konstanter α, β, γ og C, så at

$$E[\,|X_t - X_s|^\alpha] \leq C \cdot |t-s|^{1+\beta} \text{ for alle } t,s \in \mathbf{R}_+ \text{ med } |t-s| \leq \gamma.$$

Chentsov's Modifikationssætning.
En stokastisk proces (X_t), som er højrekontinuert i sandsynlighed, har en cadlag modifikation, dvs. en modifikation hvor alle udfaldsfunktioner er cadlag, hvis der eksisterer positive konstanter α, β, γ og C, så at

$$E[\,|X_{t_1} - X_{t_2}|^\alpha \cdot |X_{t_2} - X_{t_3}|^\alpha] \leq C \cdot |t_3 - t_1|^{1+\beta}$$

for alle $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq t_1 + \gamma$.

Martingalmodifikationssætningen.
Enhver martingal (X_t), som er højrekontinuert i sandsynlighed, har en cadlag modifikation.

Et bevis findes i Appendiks D.

Den basale definition på en stokastisk proces sikrer, at tilstanden til et vilkårligt fast tidspunkt er en målelig variabel. Derimod giver den ingen garanti for målelighed af *tilstanden til tid* τ, dvs. afbildningen

$$X_\tau : \omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{hvor } \tau : \Omega \mapsto T.$$

Problemet er igen størst, når T er overtællelig. For er T en højst tællelig tidsparametermængde, så er X_τ $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(S))$-målelig for enhver funktion $\tau : \Omega \to T$, som opfylder $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}$ for alle t i T. Bemærk nemlig at

$$X_\tau = \sum_{t \in T} X_t \mathbf{1}_{\{\tau = t\}}$$

og når T er højst tællelig, er denne sum målelig. Men dette løser ikke problemet i kontinuert tid, så vi vil derfor indføre et nyt begreb. Antag derfor at tidsparametermængden T er udstyret med en σ-algebra $\mathscr{B}(T)$. I de vigtige tilfælde $\mathbf{R}_+ \,/\, \mathbf{R}$ vil $\mathscr{B}(T)$ være Borel σ-algebraen.

Definition 3.4. Lad S være et metrisk rum. En proces $(X_t)_{t\in T}$ med tidsparametermængde T og tilstandsrum S siges at være *målelig*, hvis

$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

er en $(\mathscr{B}(T)\times\mathscr{F},\mathscr{B}(S))$-målelig afbildning fra $T\times\Omega$ ind i S.

Da simultan målelighed som bekendt medfører separat målelighed, ses, at hvis $(X_t)_{t\in T}$ er en målelig proces, er $t\to X_t(\omega)$ er $(\mathscr{B}(T),\mathscr{B}(S))$-målelig for alle ω, dvs. målelige processer har målelige udfaldsfunktioner. Yderligere viser sammensætningen

$$\omega \mapsto (\tau(\omega),\omega) \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega),$$

at for en målelig proces $(X_t)_{t\in T}$ er X_τ målelig for enhver afbildning $\tau:\Omega\mapsto T$, som er $(\mathscr{F},\mathscr{B}(T))$-målelig. Dvs. målelige processer kan meningsfyldt studeres til målelige tidspunkter.
Alle processer med diskret tid er målelige, hvorimod dette ikke er automatisk i kontinuert tid. Men vi nu skal se, at processer med pæne udfaldsfunktioner er målelige.

Proposition 3.5. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en reel proces der enten har lutter højrekontinuerte eller venstrekontinuerte udfaldsfunktioner. Så er $(X_t)_{t\geq 0}$ målelig.*

Bevis. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel proces med lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner. Definer for ethvert n, $i\geq 1$ og ethvert $\omega\in\Omega$

$$X_t^n(\omega) := X_{i/2^n}(\omega) \quad \text{hvis } (i-1)/2^n \leq t < i/2^n.$$

Da

$$\{(t,\omega)\,|\,X_t^n(\omega)\in B\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\,(i-1)/2^n, i/2^n\,[\times\{X_{i/2^n}\in B\} \quad \text{for } B\in\mathscr{B}(\mathbf{R})$$

ses, at (X_t^n)'erne alle er målelige processer, og da højrekontinuiteten endvidere sikrer, at

$$\lim_n X_t^n(\omega) = X_t(\omega) \;\text{ for alle } (t,\omega)\in\mathbf{R}_+\times\Omega,$$

følger påstanden umiddelbart, da målelighed bevares under punktvis konvergens. Det venstrekontinuerte tilfælde klares analogt. □

4 Filtre og Stoptider

I dette afsnit er tidsparametermængden T altid $\mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$, og $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ betegner et givent sandsynlighedsfelt. Som tidligere nævnt, har det i denne situation mening at tale om fortid, nutid og fremtid, idet vi forestiller os T repræsenterende den fremadskridende tid. I forlængelse heraf indføres en model for informationsmængden, der er til stede til tid t, dvs. opsamlet i tiden op til og med t. Som det er sædvane i sandsynlighedsteori modelleres en sådan informationsmængde ved en σ-algebra $\mathscr{F}_t$. Til ethvert tidspunkt t har vi derfor en del σ-algebra $\mathscr{F}_t$ i $\mathscr{F}$, og da informationsmængden vokser med tiden, er det naturligt at forlange, at $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_s$ for vilkårlige tidspunkter $t < s$ i T.

Dette formaliseres i begrebet et *filter*, idet en parametriseret familie $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ af del σ-algebraer i $\mathscr{F}$ kaldes et filter, hvis

$$\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_s \text{ for alle } t < s \text{ i } T$$

og i denne forbindelse kaldes $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in T}, P)$ et *filtreret sandsynlighedsfelt*. Tolkende $\mathscr{F}_t$ som informationsmængden til tid t bliver

$$\mathscr{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_t \mathscr{F}_t\right)$$

naturligt nok en model for den totale information.

Informationsmængder kan være større og mindre, og yderpunkterne svarende til ingen contra fuld information til ethvert tidspunkt t modelleres ved filtrene

1) $\mathscr{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ for alle t,
2) $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}$ for alle t.

Vi har allerede mødt filtre i form af det såkaldte *naturlige filter* $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in T}$ hørende til en proces $(X_t)_{t\in T}$ defineret på $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, hvor

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s \,|\, 0 \le s \le t) \text{ for alle } t \in T.$$

Kombinationen af udtrykket tilstanden til tid t og informationsmængden til stede til tid t leder naturligt til, at vi siger, at en proces $(X_t)_{t\in T}$ med tilstandsrum S (hvor $(S, \mathscr{B})$ er et måleligt rum) er *adapteret* (tilpasset) til et filter $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, hvis

$$X_t \text{ er } (\mathscr{F}_t, \mathscr{B})\text{-målelig for alle } t \in T.$$

Bemærk at dette ækvivalent kan beskrives ved inklusionen

$$\mathscr{F}_t^X \subseteq \mathscr{F}_t \text{ for alle } t.$$

Det naturlige filter er derfor det mindste filter, hvortil en proces kan være adapteret.

I tilfældet med kontinuert tid viser det sig at være interessant, om et givent filter $(\mathscr{F}_t)$ opfylder ligheden $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ for alle t, hvor

$$\mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \text{ for } t \ge 0.$$

Filtret siges i givet fald at være *højrekontinuert*. Det ses let, at $(\mathscr{F}_{t+})$ er det mindste højrekontinuerte filter, som indeholder $(\mathscr{F}_t)$, idet $(\mathscr{F}_{t+})$ er et højrekontinuert filter, og det er mindre end ethvert andet højrekontinuert filter, der indeholder $(\mathscr{F}_t)$.

Advarsel: Det naturlige filter hørende til en proces med lutter højrekontinuerte eller endog kontinuerte udfaldsfunktioner er ikke nødvendigvis højrekontinuert. Læseren bør overveje, hvad højrekontinuitet af filtret siger om informationsmængden.

Som bekendt giver et filter anledning til et tilhørende stoptidsbegreb. Men inden vi omtaler dette, indføres en notation, som trækker en forbindelse mellem filtre og det givne sandsynlighedsmål. Lad hertil $\mathscr{N}$ betegne de målelige P-nulmængder, dvs.

$$\mathscr{N} = \{A \in \mathscr{F} \mid P(A) = 0\}.$$

Et filter $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ siges da at være *P-komplet*, hvis

$$\mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}_t \text{ for alle } t \text{ eller ækvivalent } \mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}_0.$$

Et givent filter $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ er ofte ikke komplet, men dannes et nyt filter $(\overline{\mathscr{F}}_t)_{t\in T}$ ved fastsættelsen

$$\overline{\mathscr{F}}_t = \sigma(\mathscr{F}_t \cup \mathscr{N}) \quad \text{for } t \geq 0,$$

ses umiddelbart, at dette er komplet og endog det mindste komplette filter indeholdende $(\mathscr{F}_t)$. $(\overline{\mathscr{F}}_t)_{t\in T}$ kaldes det *kompletterede filter* hørende til $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$.

En simpel øvelse viser, at komplettering bevarer højrekontinuitet. Det kan endvidere vises, at i mange interessante sammenhænge er det kompletterede filter højrekontinuert, selvom det oprindelige ikke er.

Da stoptidsbegrebet i diskret tid er velkendt, vil vi i det følgende udelukkende se på kontinuert tid, dvs. $T = \mathbf{R}_+$. Læseren opfordres dog til selv at oversætte og genbevise de relevante resultater i diskret tid. Lad derfor $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne et givent filter i $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Definition 4.1. En stokastisk variabel $\tau: \ \Omega \mapsto \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ kaldes en *stoptid* mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, hvis

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \quad \text{for alle } t \geq 0,$$

og til en stoptid τ tilordnes *stoptids σ-algebraen*

$$\mathscr{F}_\tau := \{B \in \mathscr{F}_\infty \,|\, B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ for alle } t \geq 0\}.$$

$\tau: \ \Omega \mapsto \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ kaldes en *udvidet stoptid* mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, hvis

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t \quad \text{for alle } t \geq 0,$$

og til en udvidet stoptid τ tilordnes σ-algebraen

$$\mathscr{F}_{\tau+} := \{B \in \mathscr{F}_\infty \,|\, B \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t \text{ for alle } t \geq 0\}.$$

Bemærk at τ er en udvidet stoptid mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, hvis og kun hvis τ er en stoptid mht. $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$, samt at $\mathscr{F}_{\tau+}$ netop er stoptids σ-algebraen hørende til τ opfattet som stoptid mht. $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$. Heraf følger, at hvis τ er en stoptid mht. $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$, så er τ en udvidet stoptid mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.

Øvelse 4.2. Eftervis at $\mathscr{F}_\tau$ og $\mathscr{F}_{\tau+}$ vitterlig er del σ-algebraer i $\mathscr{F}$ og at $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ for enhver stoptid τ.

Inden vi giver eksempler på stoptider, opsummeres en række vigtige egenskaber ved disse samt de tilhørende σ-algebraer. Resultaterne er alle forholdsvis umiddelbare konsekvenser af definitionen. Da det overalt drejer sig om stoptider mht. det samme filter, undertrykkes dette i notationen.

Proposition 4.3. *Vi har følgende resultater.*
1) Mængden af stoptider (hhv. udvidede stoptider) er stabil under addition, endelig max og min samt tællelig sup-dannelse. Mængden af udvidede stoptider er endvidere stabil under tællelig inf-dannelse, hvorimod et tælleligt infimum af stoptider generelt kun er en udvidet stoptid.

2) Enhver konstant variabel, dvs. $\tau \equiv t$ for et $t \in \mathbf{R}_+$, er en stoptid og $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$ og $\mathscr{F}_{\tau+} = \mathscr{F}_{t+}$.

3) For ethvert par af stoptider τ_1 og τ_2 er

$$\{\tau_1 \leq \tau_2\}, \{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2} = \mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}.$$

Dvs. $\mathscr{F}_{\tau_1} \subseteq \mathscr{F}_{\tau_2}$, hvis $\tau_1 \leq \tau_2$ punktvis, og τ er målelig mht. $\mathscr{F}_\tau$ for enhver stoptid τ. Påstanden 3) gælder ligeledes for udvidede stoptider.

4) For enhver udvidet stoptid τ er

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_{(\tau\wedge n)+}),$$

og $\mathscr{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}$, hvis τ og τ_n'erne er udvidede stoptider, så at $\tau_n \downarrow \tau$ punktvis.

Bevis. De første tre påstande vises i en opgave. Da første halvdel af påstand 4 ikke er helt oplagt gives et bevis her. Lad for en given udvidet stoptid τ $\mathscr{A}$ betegne σ-algebraen $\sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_{(\tau\wedge n)+})$. Da $\tau \wedge n \leq \tau$ for alle n er inklusionen $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_{\tau+}$ oplagt. Lad derfor $B \in \mathscr{F}_{\tau+}$ være givet og betragt opsplitningen

$$B = [B \cap \{\tau = \infty\}] \cup [B \cap \{\tau < \infty\}].$$

Lighederne

1) $B \cap \{\tau < n\} \cap \{\tau \wedge n < t\} = B \cap \{\tau < t\}$ for $t < n$;

2) $B \cap \{\tau < n\} \cap \{\tau \wedge n < t\} = B \cap \{\tau < n\}$ for $t \geq n$;

viser, at $B \cap \{\tau < n\} \in \mathscr{F}_{(\tau \wedge n)+} \subseteq \mathscr{A}$ for alle n og dermed $B \cap \{\tau < \infty\} \in \mathscr{A}$. Specielt er $\{\tau = \infty\} = \{\tau < \infty\}^c \in \mathscr{A}$, og

$$\mathscr{H} := \{B \in \mathscr{F}_\infty | B \cap \{\tau = \infty\} \in \mathscr{A}\}$$

udgør derfor en del σ-algebra i $\mathscr{F}_\infty$. Vi kan nu afslutte beviset ved at argumentere for at $\mathscr{H} \supseteq \mathscr{F}_\infty$. Pr. definition af $\mathscr{F}_\infty$ er det nok at vise, at $\mathscr{H}$ indeholder $\mathscr{F}_n$ for ethvert $n \geq 1$. Men for $B \in \mathscr{F}_n$ viser lighederne

3) $B \cap \{\tau \geq k\} \cap \{\tau \wedge k < t\} = \emptyset$ for $t \leq k$;

4) $B \cap \{\tau \geq k\} \cap \{\tau \wedge k < t\} = B \backslash (B \cap \{\tau < k\})$ for $t > k$;

at

$$B \cap \{\tau \geq k\} \in \mathscr{F}_{(\tau \wedge k)+} \subseteq \mathscr{A} \quad \text{for } k \geq n.$$

Da

$$B \cap \{\tau = \infty\} = \bigcap_{k=n}^{\infty} B \cap \{\tau \geq k\}$$

følger det ønskede. □

Til en given udvidet stoptid τ defineres for ethvert n en afbildning τ_n ved fastsættelsen

$$\tau_n := k/2^n \text{ på } \{(k-1)/2^n \leq \tau < k/2^n\} \text{ og } \tau_n := \infty \text{ på } \{\tau = \infty\}.$$

τ_n'erne er da stoptider og for alle $n \geq 1$ er

$$\tau < \tau_{n+1} \leq \tau_n \leq \tau + 1/2^n \text{ på } \{\tau < \infty\},$$

dvs. specielt konvergerer $\tau_n \downarrow \tau$ punktvis. Det er endvidere værd at bemærke, at

$$A \cap \{\tau_n = k/2^n\} \in \mathscr{F}_{k/2^n} \text{ for } k, n \geq 1, A \in \mathscr{F}_{\tau+};$$

samt at

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \textstyle\bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n} \text{ og } \mathscr{F}_{\tau_n} = \{B \in \mathscr{F}_\infty | B \cap \{\tau_n = k/2^n\} \in \mathscr{F}_{k/2^n} \;\; k \geq 1\} \text{ for alle n.}$$

Vi kalder (τ_n) for den *diskrete approximation af* τ.

Stoptids σ-algebraerne $\mathscr{F}_\tau$ og $\mathscr{F}_{\tau+}$ omtales ofte som informationsmængden, der er til stede til tid τ, og de nævnte egenskaber viser, at de har meget til fælles med de givne $\mathscr{F}_t$ og $\mathscr{F}_{t+}$. Men hvad med tilstanden til tid τ for en $(\mathscr{F}_t)$-adapteret proces (X_t) er den $\mathscr{F}_\tau/\mathscr{F}_{\tau+}$ målelig? Igen er situationen simpel, hvis tiden er diskret eller mere generelt, hvis τ kun antager tællelig mange værdier, thi her gælder uden videre, at hvis (X_t) er $(\mathscr{F}_t)$-adapteret, så er

$$\omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{defineret på } \{\tau < \infty\}$$

målelig mht. $\mathscr{F}_\tau$, dvs. specielt er

$$X_\tau \text{ målelig mht. } \mathscr{F}_\tau \text{ for enhver endelig stoptid } \tau.$$

I kontinuert tid er situationen som forventet mere kompliceret, men nedenstående giver en nyttig nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at X_τ er $\mathscr{F}_\tau$-målelig på hændelsen $\{\tau < \infty\}$.

Lemma 4.4. *Lad $(S, \mathscr{B})$ være et måleligt rum og være $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ et filtret sandsynlighedsfelt. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-adapteret proces med tilstandsrum S og τ være en vilkårlig $(\mathscr{F}_t)$-stoptid.*

Da er X_τ $\mathscr{F}_\tau$-målelig på $\{\tau < \infty\}$ hvis og kun hvis der for ethvert $t \geq 0$ gælder, at $X_{\tau\wedge t}$ er $\mathscr{F}_t$-målelig.

Bevis. Pr. definition af $\mathscr{F}_\tau$ har vi, at X_τ er $\mathscr{F}_\tau$-målelig på $\{\tau < \infty\}$ hvis og kun hvis der for ethvert $B \in \mathscr{B}$ og $t \geq 0$ gælder

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t. \tag{4.1}$$

Men bemærk at

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau \leq t\}. \tag{4.2}$$

Endvidere er

$$\{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau > t\} = \{X_t \in B\} \cap \{\tau > t\} \in \mathscr{F}_t.$$

Idet der gælder

$$\{X_{\tau\wedge t} \in B\} = \big[\{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau > t\}\big] \bigcup \big[\{X_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau \leq t\}\big],$$

ser vi, at højre side af (4.2) tilhører $\mathscr{F}_t$ hvis og kun hvis $\{X_{\tau\wedge t} \in B\} \in \mathscr{F}_t$. Det vil sige (4.1) er opfyldt for ethvert $B \in \mathscr{B}$ hvis og kun hvis $X_{\tau\wedge t}$ er $\mathscr{F}_t$-målelig.

□

Definition 4.5. Lad S være et metrisk rum. En stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$ med tilstandsrum S defineret på et filtreret sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ siges at være *progressiv målelig* mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, hvis for alle t i $\mathbf{R}_+$

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

er målelig mht. $(\mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t, \mathscr{B}(S))$ som afbildning fra $[0,t] \times \Omega$ ind i S.

Som det næste resultat viser, løser progressiv målelighed generelt problemet vedrørende målelighed af tilstanden til en stoptid.

Sætning 4.6. *Lad S være metrisk. Lad T være $\mathbf{R}_+$ og lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en stokastisk proces med tilstandsrum S defineret på $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Da gælder*

1) Hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er progressiv målelig mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, er X_τ $\mathscr{F}_\tau$-målelig på $\{\tau < \infty\}$ for enhver stoptid τ; specielt er (X_t) $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-adapteret.

2) Processen $(X_t)_{t\geq 0}$ er progressiv målelig mht. $(\mathscr{F}_t)$, hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-adapteret og har lutter højrekontinuerte / venstrekontinuerte udfaldsfunktioner.

Bevis. 1) Lad τ og (X_t) være givet. I følge ovenstående lemma gælder det om at vise, at $X_{\tau\wedge t}$ er $\mathscr{F}_t$-målelig for alle t. Men da $\tau \wedge t$ er $\mathscr{F}_t$-målelig, følger dette umiddelbart af den progressive målelighed ved at betragte sammensætningen

$$\omega \mapsto (\tau(\omega) \wedge t, \omega) \mapsto X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega).$$

2) Lad os af notationsmæssige grunde antage at processen er reel, dvs. $S = \mathbf{R}$. Højrekontinuiteten sikrer, at for givet t konvergerer

$$X_s^n(\omega) := \mathbf{1}_{\{0\}}(s) \cdot X_0(\omega) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{](j-1)t/n, jt/n]}(s) \cdot X_{jt/n}(\omega) \to X_s(\omega)$$

for ethvert punkt $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$; og da

$$(s,\omega) \mapsto X_s^n(\omega)$$

tydeligvis er målelig mht. $(\mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t, \mathscr{B}(S))$ for ethvert $n \geq 1$, følger påstanden af den punktvise konvergens.

Det venstrekontinuerte tilfælde klares analogt. □

Vi får specielt i teorien om martingaler brug for at have variablen X_τ defineret for alle ω selv for ikke endelige stoptider τ. Dette kan selvfølgelig gøres på mange måder, men da vi kun får brug for dette i forbindelse med med reelle processer vælges flg. konvention. For enhver reel proces $(X_t)_{t\geq 0}$ og enhver ikke-negativ variabel τ med værdier i de udvidede reelle tal defineres

$$X_\tau(\omega) := \lim_n X_{\tau\wedge n}(\omega) \;\text{ hvis denne eksisterer i } \mathbf{R} \;\text{ og } X_\tau(\omega) := 0 \;\text{ ellers.}$$

Specielt har X_τ værdien $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ på mængden $\{\tau < \infty\}$, dvs. der er tale om en udvidelse af den tidligere indførte definition. Endvidere ses umiddelbart at X_τ er $\mathscr{F}_\tau$-målelig for enhver stoptid τ og enhver reel $(\mathscr{F}_t)$-progressiv målelig proces $(X_t)_{t\geq 0}$.

5 Hitting Times

De såkaldte *Hitting Times* udgør langt de vigtigste eksempler på stoptider. Lad stadig T være enten $\mathbf{Z}_+$ eller $\mathbf{R}_+$ og lad (X_t) betegne en stokastisk proces med tid T og tilstandsrum S (der er et metrisk rum), defineret på et filtreret sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$. For ethvert $B \subseteq S$ indføres notationen

$$T_B := \inf\{t > 0 | X_t \in B\} \quad \text{hvor } \inf(\emptyset) = \infty,$$

T_B kaldes *første Hitting Time* til mængden B for processen $(X_t)_{t \in T}$.
Flg. resultater er vigtige.

Proposition 5.1. *Der gælder følgende.*
1) $T_B \leq T_A$ *hvis* $A \subseteq B$.

2) $T_{A \cup B} = T_A \wedge T_B$ *og* $T_{\cup_n A_n} = \inf_n T_{A_n}$.

3) $X_{T_A} \in \overline{A}$ *på* $\{T_A < \infty\}$, *hvis alle udfaldsfunktioner er højrekontinuerte.*

4) $T_A = s + T_A^s$ *på* $\{T_A > s\}$, *hvor for ethvert* $s \geq 0$

$$T_A^s := \inf\{t > 0 | X_{s+t} \in A\}.$$

5) Lad (X_t) *og* (Y_t) *betegne to versioner med tilstandsrum* $\mathbf{R}^n$, *som begge har lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner. For enhver åben mængde* $U \subseteq \mathbf{R}^n$ *gælder da*

$$T_U(X) \sim T_U(Y) \;\text{ og }\; X_{T_U(X)} \cdot \mathbf{1}_{\{T_U(X) < \infty\}} \sim Y_{T_U(Y)} \cdot \mathbf{1}_{\{T_U(Y) < \infty\}},$$

hvor $T_U(X)$ *og* $T_U(Y)$ *betegner første Hitting Time til* U *for hhv.* (X_t) *og* (Y_t).

Bevis. Vi viser kun 5). Definer for ethvert $n \geq 1$

$$T_U^n(X) := \inf\{k/2^n > 0 \,|\, X_{k/2^n} \in U\}$$

og tilsvarende $T_U^n(Y)$. Bemærk at de indførte variable er aftagende i n. Umiddelbar anvendelse af definitionen viser, at

$$P(T_U^n(X) = k/2^n) = P(X_{1/2^n} \notin U, \cdots, X_{(k-1)/2^n} \notin U, X_{k/2^n} \in U)$$

$$= P(Y_{1/2^n} \notin U, \cdots, Y_{(k-1)/2^n} \notin U, Y_{k/2^n} \in U) = P(T_U^n(Y) = k/2^n)$$

for alle k, dvs. $T_U^n(X)$ og $T_U^n(Y)$ har samme fordeling for ethvert n. Heraf følger påstanden vedrørende $T_U(X)$ og $T_U(Y)$, thi højrekontinuiteten og det faktum, at U er åben, bevirker, at

$$T_U^n(X) \downarrow T_U(X) \text{ og } T_U^n(Y) \downarrow T_U(Y)$$

punktvis, og denne konvergensform implicerer som bekendt konvergens i fordeling. Argumentet vedrørende det andet par går på samme måde. $\square$

Bemærkning 5.2. a) I 5) kan man ved et tilsvarende argument vise, at $(X_{t\wedge T_U(X)})$ og $(Y_{t\wedge T_U(Y)})$ er versioner.

b) Er tidsparametermængden diskret, gælder 3) uden ekstra antagelser med A i stedet for $\overline{A}$.

Hvornår er Hitting Times stoptider? Hvis tiden er diskret og $B \in \mathscr{B}(S)$, er der ingen problemer, thi da er T_B en stoptid mht. til ethvert filter, hvortil (X_t) er adapteret, specielt det naturlige. Men igen er situationen vanskeligere i kontinuert tid, og vi nøjes her med flg. resultat.

Sætning 5.3. *Lad T være $\mathbf{R}_+$, S være metrisk, og lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-adapteret stokastisk proces med tid T og tilstandsrum S defineret på $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Da gælder*

1) Hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ har lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner, er T_U en udvidet $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-stoptid for enhver åben mængde U.

2) Hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ har lutter kontinuerte udfaldsfunktioner og F en lukket mængde, er T_F en $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-stoptid, hvis $\{T_F = 0\} \in \mathscr{F}_0$.

Bevis. For enhver åben mængde U og ethvert t gælder ifølge højrekontinuiteten, at

$$\{T_U < t\} = \bigcup_{0<r<t,\, r\in Q} \{X_r \in U\},$$

hvilket viser 1). Lad dernæst F betegne en vilkårlig lukket mængde. Da antagelserne sikrer, at $\{T_F \leq 0\} = \{T_F = 0\} \in \mathscr{F}_0$, drejer det sig om at vise, at $\{T_F \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ for ethvert $t > 0$. Lad et sådant t være givet. Definer

$$U_n := \{x \in S \mid d(x,F) < 1/n\} \text{ for } n \geq 1,$$

hvor d er en kompatibel metrik på S. Der gælder nu, at

$$F \subseteq \overline{U}_{n+1} \subseteq U_n \text{ for alle } n \text{ og } F = \bigcap_{n\geq 1} U_n = \bigcap_{n\geq 1} \overline{U}_n.$$

Da F er lukket og alle udfaldsfunktioner højrekontinuerte, er

$$\{T_F \leq t\} = \bigcup_{k\geq 1} \{\exists s \in [1/k, t]\; X_s \in F\},$$

og da de endvidere er kontinuerte, og U_n'erne er åbne, har vi for ethvert k, at

$$\{\exists s \in [1/k,t]\; X_s \in F\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{\exists s \in [\frac{1}{k},t] \cap Q} \{X_s \in U_n\},$$

hvoraf det ønskede umiddelbart følger. $\square$

6 Lévy Processer

Som et led i konstruktionen af Poisson og Wiener processen vil vi i dette afsnit ved hjælp af martingalmodifikationssætningen gøre rede for, at enhver proces med uafhængige stationære tilvækster, som er kontinuert i sandsynlighed, har en cadlag modifikation. Udsagnet er naturligvis kun interessant for processer med kontinuert tid. I denne sammenhæng indføres følgende.

Definition 6.1. En stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$ med tilstandsrum $\mathbf{R}^n$ kaldes en *Lévy proces*, hvis den har uafhængige stationære tilvækster og alle dens udfaldsfunktioner er cadlag.

Bemærkning 6.2. I Opgave 10 viser vi, at en proces med stationære uafhængige tilvækster er højrekontinuert i sandsynlighed hvis og kun hvis den er kontinuert i sandsynlighed. En Lévy proces er derfor kontinuert i sandsynlighed. Dette betyder imidlertid ikke, at en sådan proces har kontinuerte udfaldsfunktioner; se f.eks. Poisson processen senere.

I øvrigt ser vi også fra Sætning 2.6, at højrekontinuiteten i sandsynlighed svarer til regularitet af den tilhørende foldningssemigruppe.

Det næste resultat gælder også for flerdimensionale processer, men vi nøjes her med at se på det reelle tilfælde.

Sætning 6.3. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel proces med uafhængige stationære tilvækster. $(X_t)_{t\geq 0}$ har da en Lévy modifikation, hvis den er højrekontinuert i sandsynlighed.*

Bevis. Vi viser, at $(X_t)_{t\geq 0}$ har en modifikation $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ som er cadlag. Da egenskaben 'stationære og uafhængige tilvækster' bevares under modifikation, følger heraf, at $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ er en Lévy proces. Beviset vil derfor være afsluttet.

Beviset for eksistensen af $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ bygger på martingalmodifikationssætningen, men for ikke at skulle arbejde med komplekse martingaler vil vi yderligere antage, at (X_t) er en integrabel proces. Lad $m_X(t) := E[X(t)]$. Ifølge Sætning 1.11 er

$$(M_t)_{t\geq 0} := (X_t - m_X(t))_{t\geq 0}$$

derfor en martingal. I lemmaet nedenfor viser vi, at $t \mapsto m_X(t)$ er cadlag, og altså specielt højrekontinuert. Heraf følger, at $(M_t)_{t\geq 0}$ er højrekontinuert i sandsynlighed, og martingalmodifikationssætningen sikrer derfor, at $(M_t)_{t\geq 0}$ har en cadlag modifikation $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$. Dermed er $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0} := (M_t + m_X(t))_{t\geq 0}$ en cadlag modifikation af $(X_t)_{t\geq 0}$. □

Lemma 6.4. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel integrabel proces med kontinuert tid og uafhængige stationære tilvækster. Hvis processen er højrekontinuert i sandsynlighed er middelværdifunktionen m_X på formen $t \to m_1 + m_2 \cdot t$, hvor $m_1 = E[X_0]$ og $m_2 = E[X_1 - X_0]$.*

Bevis. Stationariteten af tilvæksterne viser, at for alle $t, s \geq 0$ er

$$m_X(t+s) = E[X_{t+s} - X_s] + E[X_s] = E[X_t - X_0] + E[X_s] = m_X(t) - m_X(0) + m_X(s).$$

D.v.s. $\varphi(t) := m_X(t) - m_X(0)$ opfylder funktionalligningen

$$\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t), \quad \varphi(0) = 0$$

på $[0,\infty)$, og ifølge Appendiks A er $\varphi(t)$ derfor lig $t\cdot\varphi(1)$ for alle $t\in\mathbf{Q}$. Specielt gælder derfor, at

$$\sup\{|E[X_t]|\,|\,t\in[0,n]\cap\mathbf{Q}\}<\infty \quad \text{for alle } n\geq 1,$$

og ifølge Korollar 1.12 er $t\mapsto\varphi(t)$ derfor højrekontinuert. Resultatet følger nu umiddelbart af Appendiks A. $\square$

Inden vi fortsætter formuleres to varianter af Lemma 6.4.

Lemma 6.5. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel kvadratisk integrabel proces med kontinuert tid og uafhængige stationære tilvækster. Variansfunktionen σ_X^2 er da på formen $t\to\sigma_1+\sigma_2\cdot t$, hvor $\sigma_1=Var(X_0)$ og $\sigma_2=Var(X_1-X_0)$.*

Bevis. Da X_0 er uafhængig af alle variable af formen X_t-X_0, og $(X_t-X_0)_{t\geq 0}$ er kvadratisk integrabel med uafhængige stationære tilvækster, kan og vil vi antage, at $X_0=0$ n.s. Simpel udnyttelse af de uafhængige stationære tilvækster viser, at $\varphi(t)=\sigma_X^2(t)$ er en voksende løsning til funktionalligningen

$$\varphi(s+t)=\varphi(s)+\varphi(t),\quad \varphi(0)=0$$

på $[0,\infty)$. Ifølge Appendiks A er den derfor lineær, hvilket netop er det ønskede resultat. $\square$

Lemma 6.6. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel Lévy proces. For ethvert reelt tal a, hvorom det gælder, at processen $(\exp(aX_t))$ er integrabel, er*

$$E[\exp(aX_t))]=c_a\cdot\exp(t\psi_a)\quad \text{for } t\geq 0,$$

hvor $c_a=E[\exp(aX_0))]$ og $\psi_a=\log E[\exp(a(X_1-X_0))]$.

Bevis. De uafhængige stationære tilvækster viser sammen med Fubini's sætning, at vi uden tab af generalitet kan antage, at $X_0=0$ n.s. Simpel teori om middelværdien af et produkt af uafhængige variable viser dernæst, da $X_0=0$ n.s., at funktionen $\varphi(t):=E[\exp(aX_t))]$ opfylder funktionalligningen

$$\varphi(s+t)=\varphi(s)\cdot\varphi(t),\quad \varphi(0)=1$$

på $[0,\infty)$. Da udfaldsfunktionerne er højrekontinuerte og eksponentialfunktionen kontinuert og ikke-negativ, fås af Fatou's lemma, at φ er nedre halvkontinuert fra højre i ethvert punkt t, og som vist i Appendiks A betyder dette, at $\log\varphi$ er lineær, hvilket netop er det ønskede. $\square$

Bemærkning 6.7. Der gælder et resultat analogt til Lemma 6.6 for den karakteristiske funktion.

Vi skal i dette kursus ikke studere generelle Lévy processer, men vi vil dog formulere flg. almene resultat, som viser, at den tidligere omtalte uafhængighed mellem fortiden og fremtidige tilvækster set ud fra en konstant nutid generaliserer til situationen, hvor nutiden er en stoptid. Resultatet, der er uhyre vigtigt, lyder som følger.

Sætning 6.8. *Lad* $(X_t)_{t\geq 0}$ *betegne en reel Lévy proces og lad* τ *betegne en endelig udvidet* $(\mathscr{F}_t^X)$*-stoptid. Da er* $\mathscr{F}_{\tau+}^X$ *og* $\sigma(X_{\tau+t}-X_\tau | t\geq 0)$ *uafhængige, og processen* $(X_t^\tau) := (X_{\tau+t}-X_\tau)_{t\geq 0}$ *er en version af* $(X_t - X_0)_{t\geq 0}$.

Bevis. Da $\tau + t$ for ethvert t igen er en endelig udvidet $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geq 0}$-stoptid, viser et induktionsargument, at det er nok at vise, at for ethvert t er

$$\mathscr{F}_{\tau+}^X \text{ og } X_{\tau+t}-X_\tau \text{ uafhængige og } X_{\tau+t}-X_\tau \sim X_t - X_0. \tag{6.1}$$

Lad $t\geq 0$ og $A\in\mathscr{F}_{\tau+}^X$ være givet. Ifølge Opgave 6 er det, for at vise (6.1), nok at overbevise sig om at der gælder

$$E[\exp(ia(X_{\tau+t}-X_\tau)),A] = E[\exp(ia(X_t-X_0))]\cdot P(A) \tag{6.2}$$

for ethvert $a\in\mathbf{R}$.

Lad (τ_n) betegne den diskrete approksimation til τ, se side 25, og $a\in\mathbf{R}$. Ved brug af højrekontinuiteten af $(X_t)_{t\geq 0}$ fås

$$E[\exp(ia(X_{\tau+t}-X_\tau)),A] = \lim_n E[\exp(ia(X_{\tau_n+t}-X_{\tau_n})),A]. \tag{6.3}$$

For ethvert $n\geq 1$ er

$$E[\exp(ia(X_{\tau_n+t}-X_{\tau_n})),A] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\exp(ia(X_{k/2^n+t}-X_{k/2^n})),\{\tau_n = k/2^n\}\cap A]$$

og da $\{\tau_n = k/2^n\}\cap A\in\mathscr{F}_{k/2^n}^X$ for alle k ifølge egenskaber ved den diskrete approksimation, fås af egenskaben b) side 6 at

$$E[\exp(ia(X_{\tau_n+t}-X_{\tau_n})),A] = E[\exp(ia(X_t-X_0))]\cdot\sum_{k=1}^{\infty}P(\{\tau_n = k/2^n\}\cap A).$$

Idet τ_n er endelig gælder

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\{\tau_n = k/2^n\}\cap A) = P([\cup_{k=1}^{\infty}\{\tau_n = k/2^n\}]\cap A) = P(A),$$

så derfor er

$$E[\exp(ia(X_{\tau_n+t}-X_{\tau_n})),A] = E[\exp(ia(X_t-X_0))]\cdot P(A).$$

Ved at anvende (6.3) følger (6.2). □

Resultatet gælder uændret for flerdimensionale processer, og ligeledes kan antagelsen om endelighed af τ undværes, hvis P erstattes af $P(\cdot\,|\,\tau<\infty)$.

Som en typisk anvendelse af Sætning 6.8 vises, at enhver Lévy proces med uniformt begrænsede spring har momenter af enhver orden.

Sætning 6.9. *Lad* $(X_t)_{t\geq 0}$ *betegne en reel Lévy proces, som er* 0 *i* 0 *n.o. og har begrænsede spring, dvs. der findes et* $c > 0$ *så at*

$$P(\exists t > 0 \mid \triangle X_t| > c) = 0 \quad \text{hvor} \quad \triangle X_t := X_t - X_{t-},$$

Da har X_t *og endog* $\sup_{0\leq s\leq t}|X_s|$ *momenter af enhver orden for alle* t.

Bevis. Lad t være givet. Det er nok at vise påstanden for

$$M_t = \sup_{0\leq s\leq t} |X_s|.$$

Definer successiv stoptider $(\tau_n)_{n\geq 0}$ i hht.: $\tau_0 :\equiv 0$ og for $n \geq 1$

$$\tau_n := \tau_{n-1} + \inf\{t \in (0,1] \mid |X_{\tau_{n-1}+t} - X_{\tau_{n-1}}| > 1\}$$

hvor $\inf(\emptyset)$ sættes lig 1. Læseren opfordres til at overbevise sig om, at der herved er defineret en følge af udvidede stoptider mht. til det naturlige filter. Ifølge Sætning 6.8 er $\tau_n - \tau_{n-1}$'erne uafhængige, og ved brug af et tidligere resultat om Hitting Times til åbne mængder for versioner (Propositon 5.1) ses, at de også er identisk fordelte. Da springstørrelsen er antaget begrænset af c, er

$$|X_{\tau_n} - X_{\tau_{n-1}}| \leq c+1 \text{ n.o. for alle } n$$

og udnyttes dette tillige med Markov's ulighed fås for ethvert $k \geq 1$, at

$$P(M_t > k(1+c)) \leq P(\tau_k \leq t) = P(\sum_{i=1}^{k}(\tau_i - \tau_{i-1}) \leq t)$$

$$\leq E[\exp(-\sum_{i=1}^{k}(\tau_i - \tau_{i-1}))] \cdot \exp(t) \leq a^k \cdot e^t,$$

hvor $a = E[\exp(-(\tau_1 - \tau_0))] < 1$. Men dette viser, at M_t har momenter af enhver orden og endog et eksponentielt moment. □

Lad mig slutte kapitlet med at indføre en notation, som specielt er nyttig, hvis man på samme tid arbejder med flere processer defineret på et filtreret rum $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$.

Definition 6.10. En reel eller flerdimensional stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$ defineret på $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ kaldes en Lévy proces mht. filtret $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, hvis
a) $(X_t)_{t\geq 0}$ er $(\mathscr{F}_t)$-adapteret og har lutter cadlag udfaldsfunktioner.
b) $\mathscr{F}_t$ og $\sigma(\{X_s - X_t \mid t \leq s\})$ er uafhængige for alle $t \geq 0$.

Da $\mathscr{F}_t^X \subseteq \mathscr{F}_t$ for alle t for enhver $(\mathscr{F}_t)$-adapteret proces (X_t), er det klart, at enhver $(\mathscr{F}_t)$-Lévy proces er en Lévy proces i den forstand, vi tidligere har indført. Men som allerede antydet, er det i visse situationer naturligt, at arbejde med filtre, der er større end det naturlige filtre, blandt andet hvis man opererer med flere processer ad gangen.

7 Wiener processen

Vi skal i dette afsnit og Afsnit 9 indføre og studere Wiener processen.

Definition 7.1. Lad $\sigma^2 > 0$ være givet.
1) En reel Lévy proces $(W_t)_{t\geq 0}$ kaldes en *Wiener proces* med parameter σ^2, hvis
a) $W_0 = 0$ n.s. og $W_s - W_t \sim N(0, \sigma^2(s-t))$ for alle $0 \leq t \leq s$.
b) (W_t) har lutter kontinuerte udfaldsfunktioner.

2) En reel proces $(X_t)_{t\geq 0}$ kaldes en *Wiener proces med drift* $\mu \in \mathbf{R}$ og parameter $\sigma^2 > 0$, hvis $(X_t - \mu t)_{t\geq 0}$ er en Wiener proces med parameter σ^2.

Bemærk at da en Lévy proces har stationære tilvækster, er a) ækvivalent med antagelsen
a') $W_0 = 0$ n.s. og $W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$ for $t > 0$.

Lad os først vise at Wiener processen eksisterer. Da foldningssemigruppen $(N(0, \sigma^2 t))_{t\geq 0}$ er regulær, findes der, som vist i Sætning 2.6 og Sætning 6.3, en Lévy proces, der opfylder a). For at vise eksistensen er det derfor nok at vise, at denne proces har en modifikation, som opfylder b).

Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel Lévy proces hørende til foldningssemigruppen $(N(0, \sigma^2 t))_{t\geq 0}$ og lad C_X være som defineret side 18.

Da $(W_t) := (X_t \cdot \mathbf{1}_{C_X})$ har lutter kontinuerte udfaldsfunktioner, er det nok at vise, at $P(C_X) = 1$, thi i givet fald er $(W_t)_{t\geq 0}$ en modifikation af $(X_t)_{t\geq 0}$.

Da Lévy processen $(X_t)_{t\geq 0}$ har lutter cadlag udfaldsfunktioner, er

$$C_X^c = \{\exists t > 0 \mid X_t \neq X_{t-}\} = \bigcup_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq 1} \{\exists t \in (0, m] \mid |X_t - X_{t-}| > 1/k\},$$

og for ethvert m og k er

$$\{\exists t \in (0, m] \mid |X_t - X_{t-}| > 1/k\} \subseteq \bigcup_{p\geq 1} \bigcap_{n=p}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m2^n} \{|X_{i/2^n} - X_{(i-1)/2^n}| > 1/k\}.$$

For at vise $P(C_X) = 1$ eller ækvivalent $P(C_X^c) = 0$, er det derfor tilstrækkeligt at vise, at

$$P(\bigcap_{n=p}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m2^n} \{|X_{i/2^n} - X_{(i-1)/2^n}| > 1/k\}) = 0$$

for alle p, hvilket er opfyldt, hvis

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{m2^n} \{|X_{i/2^n} - X_{(i-1)/2^n}| > 1/k\})$$

er lig 0. Men ifølge subadditiviteten, Markov's ulighed og de stationære tilvækster er denne grænseværdi for ethvert n mindre end

$$m \cdot 2^n \cdot E[\,|X_{1/2^n}|^4] \cdot k^4.$$

Grænseværdien er derfor lig 0, da fjerde momentet i en $N(0,\sigma^2/2^n)$ -fordeling er proportional med $\sigma^4/2^{2n}$. Dette afslutter beviset for eksistensen af Wiener processen.

Sætning 7.2. *Wiener processen med drift er den eneste ikke-trivieelle reelle Lévy proces, som er* 0 *i* 0 *n.s. og har kontinuerte udfaldsfunktioner.*

Bevis. Lad (X_t) være en ikke-triviel reel Lévy proces, som er 0 i 0 n.s. og har kontinuerte udfaldsfunktioner. Ifølge Sætning 6.9 har

$$X_t \quad \text{og} \quad M_t := \sup_{0\le s\le t} |X_s|$$

momenter af enhver orden for alle t, og $m_X(\cdot)$ og $\sigma_X(\cdot)$ er begge lineære. Ved overgang til $(X_t - m_X(t))$ og passende normering kan vi derfor antage, at

$$E[X_t] \equiv 0 \quad \text{og} \quad Var(X_t) = t \quad t \ge 0.$$

Vi skal derfor kun vise, at $X_t \sim N(0,t)$ for $t > 0$. Betragt hertil for givet $t > 0$ det uafhængige trekantsskema

$$\{Y_{kn} \,|\, 1 \le k \le n\} \quad \text{hvor } Y_{kn} = X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n}.$$

Da

$$E[Y_{kn}] = 0 \ \text{ for alle } 1 \le k \le n \ \text{ og } \ s_n^2 := \sum_{k=1}^n Var(Y_{kn}) = t \quad \text{for } n \ge 1$$

er

$$\frac{\sum_{k=1}^n (Y_{kn} - E[Y_{kn}])}{s_n} = \frac{X_t}{\sqrt{t}} \ \text{ for alle } n \ge 1.$$

Dvs. hvis trekantsskemaet opfylder en Lyapounov betingelse, vil Lyapounov's Sætning give det ønskede resultat. Men da $s_n^2 \equiv t$ ses ved brug af de stationære tilvækster, at Lyapounov betingelsen er opfyldt for $\alpha = 4$, hvis vi kan vise

$$E[X_s^4] \le 3s^2 \quad \text{for } \ s \ge 0.$$

Indfør for givet $s > 0$ notationen

$$\triangle X(s,k,n) = X_{ks/n} - X_{(k-1)s/n} \quad \text{for } 1 \le k \le n.$$

Da tilvæksterne er uafhængige og centrerede fås ved simple regnerier, at

$$E[X_s^4] = E[\sum_{k=1}^n \triangle X(s,k,n)^4] + \sum_{k\ne l} E[\triangle X(s,k,n)^2 \cdot \triangle X(s,l,n)^2]$$

$$= E[\sum_{k=1}^n \triangle X(s,k,n)^4] + \frac{3(n-1)}{n} \cdot s^2 \quad \text{for } n \ge 1.$$

Dvs. tallene

$$E[\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^4] \quad n \geq 1 \quad \text{og derfor også} \quad E[(\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^2)^2] \quad n \geq 1$$

er begrænsede, da

$$E[(\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^2)^2] \leq E[\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^4] + 3\sum_{k\neq l} E[\triangle X(s,k,n)^2 \cdot \triangle X(s,l,n)^2]$$

$$\leq E[\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^4] + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot s^2 \leq E[\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^4] + s^2.$$

Men ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed er

$$E[\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^4] \leq E[\sup_k \triangle X(s,k,n)^2 \sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^2]$$

$$\leq \sqrt{E[\sup_k \triangle X(s,k,n)^4]} \cdot \sqrt{E[\left(\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^2\right)^2]}$$

for alle $n \geq 1$, og da

$$\sup_k \triangle X(s,k,n)^4 \to 0 \quad P\text{-n.o.} \quad \text{og} \quad \sup_k \triangle X(s,k,n)^4 \leq 2^4 \cdot M_s^4 \quad P\text{-n.o.}$$

pr. kontinuitet fås af Lebesgue's Sætning, at

$$\lim_n E[\sup_k \triangle X(s,k,n)^4] = 0 \quad \text{og dermed} \quad \lim_n E[\sum_{k=1}^{n} \triangle X(s,k,n)^4] = 0.$$

Indsættes dette i formlen for $E[X_s^4]$ ses, at denne er mindre end $3s^2$, ja der gælder faktisk lighedstegn. Sætningen er hermed vist. $\square$

8 Poisson processen

Definition 8.1. Lad $\lambda > 0$ være givet. En reel Lévy proces $(P_t)_{t\geq 0}$ kaldes en *Poisson proces* med parameter λ, hvis
a) $P_0 = 0$ n.s. og $P_s - P_t \sim po(\lambda(s-t))$ for alle $0 \leq t \leq s$.
b) (P_t) har lutter ikke-aftagende udfaldsfunktioner, som kun antager ikke-negative heltallige værdier.

Bemærk at da en Lévy proces har stationære tilvækster, er a) ækvivalent med antagelsen
a') $P_0 = 0$ n.s. og $P_t \sim po(\lambda t)$ for $t > 0$.

Lad os også her vise, at Poisson processen eksisterer. Da foldningssemigruppen $(po(\lambda t))_{t\geq 0}$ er regulær, findes der, som vist i Sætning 2.6 og Sætning 6.3, en Lévy proces $(X_t)_{t\geq 0}$, der opfylder a). Da egenskaben a) bevares under modifikation, er det, for at vise eksistensen, nok at vise, at $(X_t)_{t\geq 0}$ har en modifikation, som opfylder b).

Lad V_X være defineret som på side 18. Poissonfordelingen er koncentreret på de ikke-negative tal, og derfor er

$$P(X_s \geq X_t) = P(X_s - X_t \geq 0) = 1 \quad \text{for alle } 0 \leq t \leq s.$$

Dette betyder specielt, at $P(V_X) = 1$.

Lad også

$$A := \{X_t \in \mathbf{Z}_+ \text{ for alle } t \in \mathbf{Q}_+\}.$$

Da poissonfordelingen er koncentreret på de ikke-negative hele tal, har vi ligeledes at $P(A) = 1$. Højrekontinuiteten af $(X_t)_{t\geq 0}$ sikrer, at $A = \{X_t \in \mathbf{Z}_+ \text{ for alle } t \geq 0\}$.

Bemærk at der for ethvert $\omega \in A \cap V_X$ gælder at $t \mapsto X_t(\omega)$ er en ikke-aftagende udfaldsfunktion, som kun antager ikke-negative heltallige værdier. Dermed opfylder processen $(P_t)_{t\geq 0} := (X_t \cdot \mathbf{1}_{A\cap V_X})_{t\geq 0}$ kravet i b), og da $P(A \cap V_X) = 1$, er $(P_t)_{t\geq 0}$ en modifikation af $(X_t)_{t\geq 0}$.

Lad os dernæst vise, at Poisson fordelingen har spring af størrelse $+1$, samt at denne egenskab karakteriserer Poisson processen inden for klassen af Lévy processer.

Sætning 8.2. *Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ betegne en Poisson proces med parameter $\lambda > 0$, da er*

$$P(\exists t > 0 : \triangle P_t \notin \{0,1\}) = 0,$$

hvor $\triangle P_t := P_t - P_{t-}$ for $t > 0$.

Bevis. Det er nok at vise, at

$$P(\exists t \in (0,n] \mid \triangle P_t \notin \{0,1\}) = 0$$

for alle $n \geq 1$. Lad derfor n være givet. Da udfaldsfunktionerne pr. definition er ikke-aftagende med værdier i $\mathbf{Z}_+$, er der kun spring af heltallig størrelse, dvs. $\triangle P_t \leq (\triangle P_t)^2$ for alle t, og endvidere giver højrekontinuiteten, at der punktvist gælder, at

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{nk} (P_{i/k} - P_{(i-1)/k})^2 = \sum_{0<s\leq n} (\triangle P_s)^2.$$

Ifølge Fatou's lemma gælder derfor

$$E[\sum_{0<s\leq n}(\triangle P_s)^2] \leq \liminf_k \sum_{i=1}^{nk}(\lambda\cdot 1/k+(\lambda\cdot 1/k)^2) = \lambda\cdot n = E[P_n].$$

Men da $P_n = \sum_{0<s\leq n}\triangle P_s$ P-n.o., følger derfor, at

$$E[\sum_{0<s\leq n}(\triangle P_s)^2] = E[\sum_{0<s\leq n}\triangle P_s]$$

og dermed

$$P\left(\sum_{0<s\leq n}((\triangle P_s)^2-\triangle P_s)=0\right)=1.$$

Hvilket viser den ønskede påstand.

$\square$

Sætning 8.3. *Lad $(N_t)_{t\geq 0}$ betegne en Lévy proces der opfylder at $N_0 = 0$, at alle udfaldsfunktioner er ikke-aftagende og tager værdier i $\mathbf{Z}_+$ samt at*

$$P(\exists t>0 : \triangle N_t \notin \{0,1\}) = 0.$$

Den sidste betingelse siger altså, at springene i $(N_t)_{t\geq 0}$ er af størrelse 1.

Da gælder enten $N_t = 0$ næsten sikkert for ethvert $t \geq 0$ eller også er $(N_t)_{t\geq 0}$ en Poisson proces.

Bevis. Da $(N_t)_{t\geq 0}$ har udfaldsfunktioner der er voksende og tilvæksterne i $(N_t)_{t\geq 0}$ er uafhængige og stationære, gælder for alle $s,t\geq 0$ at

$$P(N_{t+s}=0) = P(N_{t+s}=0, N_t=0) = P(N_{t+s}-N_t=0, N_t=0) = P(N_t=0)\cdot P(N_s=0). \tag{8.1}$$

Endvidere har vi, idet $(N_t)_{t\geq 0}$ er heltallig og har højrekontinuerte udfaldsfunktioner, at $t\mapsto P(N_t=0)$ er højrekontinuert. Da $P(N_0=0)=1$, viser Appendix A at der findes et $\lambda\geq 0$ så at

$$P(N_t=0) = e^{-\lambda t} \quad \text{for ethvert } t\geq 0. \tag{8.2}$$

Vi ser, at i tilfældet $\lambda=0$ er $P(N_t=0)=1$ for ethvert t. Lad os derfor antage at $\lambda>0$ og vise, at $(N_t)_{t\geq 0}$ er en Poisson proces med parameter λ. Pr. antagelse er $(N_t)_{t\geq 0}$ en Lévy proces der opfylder b) side 37, så vi skal overbevise os om at a) også er opfyldt. Men da betingelserne a) og a') side 37 er ækvivalente, er det ifølge a') nok at vise, at der gælder $N_t \sim po(\lambda t)$ for ethvert $t>0$.

Lad derfor $t>0$. For ethvert n er

$$\begin{aligned} N_t &= \sum_{i=1}^n (N_{it/n}-N_{(i-1)t/n}) = \sum_{i=1}^n (N_{it/n}-N_{(i-1)t/n})\mathbf{1}_{\{N_{it/n}-N_{(i-1)t/n}>0\}} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{N_{it/n}-N_{(i-1)t/n}>0\}} + \sum_{i=1}^n (N_{it/n}-N_{(i-1)t/n}-1)\cdot\mathbf{1}_{\{N_{it/n}-N_{(i-1)t/n}\geq 2\}}. \end{aligned}$$

Den sidste sum konvergerer mod 0 pr. antagelse, så derfor er

$$N_t = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{N_{it/n} - N_{(i-1)t/n} > 0\}} \quad P\text{-n.o.} \tag{8.3}$$

Ifølge (8.2) er $\mathbf{1}_{\{N_{it/n} - N_{(i-1)t/n} > 0\}} \sim bi(1, 1 - e^{-\lambda t/n})$, hvilket medfører

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{N_{it/n} - N_{(i-1)t/n} > 0\}} \sim bi(n, 1 - e^{-\lambda t/n}).$$

Læseren bedes overveje at $bi(n, 1 - e^{-\lambda t/n})$-fordelingen konvergerer svagt mod $po(\lambda t)$-fordelingen. (Vis f.eks. at sandsynlighedsfunktionen konvergerer punktvis). Af (8.3) følger derfor at $N_t \sim po(\lambda t)$. $\square$

Lad os nu studere fordelingen af ventetiderne mellem springene i en Poisson proces. Lad $(P_t)_{t \geq 0}$ betegne en Poisson proces med parameter $\lambda > 0$ med tilhørende naturlige filter $(\mathscr{F}_t^P)_{t \geq 0}$. Definer variable $(D_n)_{n \geq 0}$ ved følgende: $D_0 \equiv 0$ og

$$D_n := \inf\{t > 0 \,|\, P_t \geq n\} \quad \text{for } n \geq 1,$$

dvs. $D_0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \cdots \leq D_n \leq \cdots \to \infty$ punktvis. Da Poisson processen, som vist ovenfor, n.s. kun har spring af størrelse 1, er

$$P_{D_n} = n \quad P\text{-n.o. for alle } n \geq 1,$$

og pånær på en nulmængde gælder derfor ligeledes beskrivelsen

$$D_n = \inf\{t > D_{n-1} \,|\, \triangle P_t > 0\} \quad \text{for } n \geq 1.$$

Det vil sige, at D_n angiver tidspunktet for $n$te spring i Processen, og D_n'erne kaldes derfor også de successive springpunkter.
Da $\{D_n \leq t\} = \{P_t \geq n\}$ for alle n og t, er D_n'erne stoptider mht. $(\mathscr{F}_t^P)$.

I en opgave viser vi, at ventetiderne mellem springene er uafhængige og eksponentialfordelte med middelværdi $\frac{1}{\lambda}$. Helt præcist indfører vi vententiden W_n mellen $(n-1)$te og $n$te spring; det vil sige $W_n := D_n - D_{n-1}$ for $n = 1, 2, \ldots$. Resultatet er da følgende:

Sætning 8.4. *Lad $(P_t)_{t \geq 0}$ betegne en Poisson proces med parameter $\lambda > 0$ med tilhørende springpunkter $(D_n)_{n \geq 0}$ og ventetider $W_n = D_n - D_{n-1}$ for $n \geq 1$. De stokastiske variable $W_1, W_2, \ldots$ er da uafhængige og identisk fordelte med fælles fordeling $E(\lambda)$.*

Da $D_n = W_1 + \cdots + W_n$ for $n \geq 1$ har vi derfor specielt at $D_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Korollar 8.5. *Lad $(P_t)_{t \geq 0}$ og $(D_n)_{n \geq 0}$ være som i sætningen. For ethvert n er fordelingen for $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ absolut kontinuert med tæthed*

$$\underline{u} \to \lambda^n \cdot e^{-\lambda u_n} \cdot \mathbf{1}_{\triangle^n}(\underline{u}),$$

hvor $\triangle^n = \{\underline{u} \in \mathbf{R}^n | 0 < u_1 < \cdots < u_n\}$.

Bevis. For givet n er fordelingen for $(D_1, D_2 - D_1, \ldots, D_n - D_{n-1})$ ifølge Sætning 8.4 absolut kontinuert med tæthed

$$\underline{u} \to \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u_i) \cdot e^{-\lambda u_i}.$$

Da

$$(D_1, D_2, \ldots, D_n) = T_n(D_1, D_2 - D_1, \ldots, D_n - D_{n-1}),$$

hvor

$$T_n(\underline{x}) := (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n) \text{ for } \underline{x} \in \mathbf{R}^n$$

med determinant 1 og invers

$$U_n(\underline{x}) := (x_1, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}) \text{ for } \underline{x} \in \mathbf{R}^n,$$

følger derfor af den lineære transformationssætning, at fordelingen for $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ er absolut kontinuert med tæthed

$$\underline{u} \to \lambda \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u_1) \cdot e^{-\lambda u_1} \prod_{i=2}^{n} \lambda \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u_i - u_{i-1}) \cdot e^{-\lambda(u_i - u_{i-1})},$$

som ved omskrivning ses at være det ønskede resutat. □

Korollar 8.6. *Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ og $(D_n)_{n\geq 0}$ være som i sætningen. For ethvert $n \geq 1$ og $t > 0$ er fordelingen for $(D_1, , D_2, \ldots, D_n)$ givet $\{P_t = n\}$ absolut kontinuert med tæthed*

$$\underline{u} \to n!/t^n \cdot \mathbf{1}_{\triangle_t^n}(\underline{u}),$$

hvor $\triangle_t^n = \{\underline{u} \in \mathbf{R}^n | 0 < u_1 < \cdots < u_n < t\}$.

Bevis. Lad n og t være givet. Da

$$P(0 < D_1 < \cdots < D_n) = 1 \text{ og } \{P_t = n\} = \{D_n \leq t\} \cap \{D_{n+1} > t\},$$

er $P(0 < D_1 < \cdots < D_n \leq t | P_t = n) = 1$. En simpel overvejelse viser derfor, at det er nok at vise, at

$$P(D_1 \leq t_1, \ldots, D_n \leq t_n | P_t = n) = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} n!/t^n \cdot \mathbf{1}_{\triangle_t^n}(\underline{u})\, du_n \cdots du_1$$

for alle $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$. Lad et sådant sæt af t_i'er være givet. Ifølge det ovenstående er $P(\{D_1 \leq t_1, \ldots, D_n \leq t_n\} \cap \{P_t = n\})$ lig

$$P(D_1 \leq t_1, \ldots, D_n \leq t_n) - P(D_1 \leq t_1, \ldots, D_n \leq t_n, D_{n+1} \leq t),$$

hvoraf følger ved brug af Sætning 8.4, at

$$P(\{D_1 \leq t_1, \ldots, D_n \leq t_n\} \cap \{P_t = n\}) =$$

$$\int_0^{t_1} \ldots \int_{u_{n-1}}^{t_n} \lambda^n \cdot e^{-\lambda u_n} \, du_n \cdots du_1 - \int_0^{t_1} \ldots \int_{u_n}^{t} \lambda^{n+1} \cdot e^{-\lambda u_{n+1}} \, du_{n+1} \cdots du_1$$
$$= \int_0^{t_1} \ldots \int_{u_{n-1}}^{t_n} \lambda^n \cdot e^{-\lambda t} \, du_n \cdots du_1 = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} \lambda^n \cdot e^{-\lambda t} \cdot \mathbf{1}_{\triangle_t^n}(\underline{u}) \, du_n \cdots du_1.$$

Ved division med

$$P(P_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t},$$

fås derfor

$$P(D_1 \leq t_1, \cdots, D_n \leq t_n | P_t = n) = \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} n!/t^n \cdot \mathbf{1}_{\triangle_t^n}(\underline{u}) \, du_n \cdots du_1.$$

□

Korollar 8.6 viser, at den betingede fordeling for $(D_1, \ldots, D_n)$ givet $\{P_t = n\}$ præcis er fordelingen for vektoren bestående af de n ordensvariable hørende til et sæt $Y_1, \ldots, Y_n$ af n uafhængige stokastiske variable alle uniformt fordelt over intervallet $(0,t)$. Denne bemærkning kan ofte udnyttes i bevis - og beregningssammenhænge.

9 Wienerprocessen - vigtige egenskaber

Vi har i Afsnit 7 defineret og eftervist eksistensen af en standard Wiener proces med parameter σ^2, dvs. en Lévy proces, som er 0 i 0, med lutter kontinuerte udfaldsfunktioner hvis tilvækster over tidsintervaller af længde l er normalt fordelt med middelværdi 0 og varians $\sigma^2 l$. Idet der iøvrigt henvises til de generelle afsnit om Lévy processer, skal vi her kort nævne nogle egenskaber, der er specifikke for Wienerprocessen. Vi starter med et par fordelingsresultater.

Sætning 9.1. *Lad $(W_t)_{t\geq 0}$ betegne en standard Wiener proces med parameter σ^2. Flg. betingelser er da opfyldte.*

a) Skaleringsegenskab. *For $a > 0$ er $(\sqrt{a}\cdot W_{t/a})_{t\geq 0}$ en standard Wiener proces med parameter σ^2.*

b) Tidsinversion. *Processen $(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$ defineret ved $\tilde{W}_0 = 0$ og $\tilde{W}_t = t\cdot W_{1/t}$ for $t > 0$ har samme fordeling som en Wiener proces med parameter σ^2, og dens udfaldsfunktioner er P-n.a. kontinuerte.*

Bevis. Lad $a > 0$ være givet. Processen $(\sqrt{a}\cdot W_{t/a})_{t\geq 0}$ har tydeligvis udfaldsfunktioner af den rigtige type, og ifølge velkendte egenskaber ved normal fordelingen er processen gaussisk med middelværdifunktion 0, vi mangler derfor kun at vise, at den har den rette covariansstruktur, dvs. vise at

$$E[\sqrt{a}\cdot W_{t/a}\cdot\sqrt{a}\cdot W_{s/a}] = \sigma^2\cdot t\wedge s \ \text{ for alle } t,s\geq 0.$$

Men dette følger ligeledes af egenskaber ved normal fordelingen.

Beviset for punkt b) forløber nogenlunde tilsvarende. Først bemærkes at $(\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$ er en gaussisk proces med samme middelværdi - og covariansfunktion som en Wiener proces med parameter σ^2, hvilket viser versionsegenskaben. Videre ses ud fra definitionen, at udfaldsfunktioner alle er kontinuerte på det åbne interval $(0,\infty)$. D.v.s. kontinuitet er et spørgsmål om opførsel i punktet 0. Vi mangler derfor blot at vise, at

$$\sup_{s\leq 1/n}|\tilde{W}_s| \to 0 \ \ P\text{-n.o. for } n\to\infty.$$

Da variablene er aftagende, er det nok at vise konvergens i sandsynlighed. Men dette følger af den viste versionsegenskab, thi for alle $\varepsilon > 0$ og alle $n\geq 1$ er

$$P(\sup_{0<s\leq 1/n}|\tilde{W}_s| > \varepsilon) = P(\sup_{0<s\leq 1/n, s\in\mathbf{Q}}|\tilde{W}_s| > \varepsilon) = P(\sup_{0<s\leq 1/n, s\in\mathbf{Q}}|W_s| > \varepsilon),$$

og denne sandsynlighed går imod 0 for $n\to\infty$, da Wiener processen er kontinuert. □

Tidsinversions resultatet viser, at resultater vist om Wiener processen's opførsel for $t\downarrow 0$, kan oversættes til udsagn om dens opførsel når $t\to\infty$ og omvendt. Som et simpelt eksempel herpå har vi

$$P(\lim_{t\downarrow 0} W_t = 0) = P(\lim_{t\downarrow 0}\tilde{W}_t = 0) = P(\lim_{t\downarrow 0} W_{1/t}/t = 0) = P(\lim_{t\to\infty} 1/t\cdot W_t = 0),$$

dvs., da $P(\lim_{t\downarrow 0} W_t = 0) = 1$, at der gælder flg. procesudgave af de store tals stærke lov

$$\lim_{t\to\infty} W_t/t = 0 \;\; P\text{-n.o.},$$

Vi vil dernæst vende os mod udfaldsfunktionerne, thi godt nok ved vi, at de alle er kontinuerte, men der kan siges meget mere. Vi nøjes dog her med nedenstående resultat.

En funktion $g : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ siges at være at begrænset variation over et interval $[0,t]$, hvis der gælder at

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \;\middle|\; 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t \text{ og } n \geq 1 \right\} < \infty.$$

Hvis g er af begrænset variation over et vilkårligt interval $[0,t]$, siges g at være af begrænset variation.

En funktion der enten er ikke-aftagende eller kontinuert differentiabel, er af begrænset variation. Man kan yderligere vise, at en cadlag funktion $g : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ er af begrænset variation hvis og kun hvis der findes to ikke-aftagende højrekontinuerte funktioner $g^1, g^2 : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ så at $g(t) = g^1(t) - g^2(t)$ for ethvert $t \geq 0$.

Sætning 9.2. *Lad $(W_t)_{t\geq 0}$ betegne en standard Wiener proces med parameter σ^2. Da gælder for P-n.a. ω*

a) $t \mapsto W_t(\omega)$ er intetsteds differentiabel,

b) $t \mapsto W_t(\omega)$ er af ubegrænset variation over ethvert endeligt interval.

c) For alle $t > 0$ er $\lim_n \sum_{i=1}^{2^n} (W_{ti/2^n} - W_{t(i-1)/2^n})^2 = \sigma^2 t$ P-n.o. og i L^2.

Bevis. Punkt a) vises i en opgave.

Lad os vise c). Lad $t > 0$ være givet. Ved brug af de uafhængige stationære tilvækster samt momentformler for normalfordelingen ses, at der findes en konstant r, så at

$$E[\left(\sum_{i=1}^{2^n} (W_{it/2^n} - W_{(i-1)t/2^n})^2 - \sigma^2 t\right)^2] \leq r \cdot 1/2^n \;\text{ for alle } n \geq 1.$$

Heraf fås c) ved hjælp af Borel-Cantelli lemmaet.

Sammen med kontinuiteten viser c), at vi for ethvert $t > 0$ har

$$\sup_n \sum_{i=1}^{2^n} |W_{it/2^n} - W_{(i-1)t/2^n}| = \infty \; P\text{-n.o.}$$

thi $\sup_i |W_{it/2^n} - W_{(i-1)t/2^n}| \to 0$ punktvis for $n \to \infty$ ifølge kontinuiteten og

$$\sum_{i=1}^{2^n} (W_{it/2^n} - W_{(i-1)t/2^n})^2 \leq \sum_{i=1}^{2^n} |W_{it/2^n} - W_{(i-1)t/2^n}| \cdot \sup_i |W_{it/2^n} - W_{(i-1)t/2^n}|.$$

Næsten alle udfaldsfunktioner er derfor af ubegrænset variation på $[0,t]$. Udnyttes dette på processen $(W_t^s)_{t\geq 0}$, som for ethvert s igen er en Wiener proces, sluttes, at for ethvert interval (a,b) har n.a. udfaldsfunktioner ubegrænset variation på (a,b). Ved nu at tage foreningsmængde over alle nulmængderne svarende til intervaller med rationale endepunkter, ses at for P-n.a. ω er $t \to X_t(\omega)$ af ubegrænset variation over ethvert endeligt interval. Sætningen er hermed vist. $\square$

Hvis tiden tillod det, ville det have været på sin plads at undersøge kontinuitetsegenskaberne nærmere. Jeg tænker her på *Loven om den Itererede Logaritme* samt sætninger angående den præcise *Hölder Kontinuitet* af udfaldsfunktionerne. Dette undlades dog, og vi vil i stedet diskutere optionalitet af stoptider i forbindelse med de tilknyttede fundamentale martingaler, dvs.

$$(W_t)_{t\geq 0},\ (W_t^2-\sigma^2 t)_{t\geq 0} \text{ og } (\exp(aW_t - 1/2\cdot(\sigma a)^2\cdot t))_{t\geq 0} \text{ for } a>0.$$

Kontinuiteten sikrer, at de alle martingaler mht. filtret $(\overline{\mathscr{F}}^W_{t+})_{t\geq 0}$. Vi nøjes med flg. simple, men ofte anvendelige kriterium. For simpelheds skyld sættes $\sigma^2=1$, men der gælder tilsvarende resultater for ethvert σ^2.

Sætning 9.3. *Enhver udvidet $(\overline{\mathscr{F}}^W_{t+})$-stoptid T med endelig middelværdi er optional for $(W_t)_{t\geq 0}$ og $(W_t^2-t)_{t\geq 0}$.*

Resultatet er i en vis forstand optimalt for martingalen $(W_t^2-t)_{t\geq 0}$, hvorimod det relevante integrabilitets krav for $(W_t)_{t\geq 0}$ er $E[\sqrt{T}\,]<\infty$.

Bevis. Betragt martingalen $(W_{T\wedge t})_{t\geq 0}$. Ifølge Sætning E.1 side 32 er

$$E[W^2_{T\wedge t} - T\wedge t] = 0 \text{ og dermed } E[W^2_{T\wedge t}] = E[T\wedge t] \leq E[T] < \infty.$$

Ifølge Doob's ulighed er $\sup_{t\geq 0} W^2_{T\wedge t}$ derfor integrabel, hvilket viser, at T er optional mht. $(W_t)_{t\geq 0}$. Men da

$$|W^2_{T\wedge n} - T\wedge n| \leq \sup_{t\geq 0} W^2_{T\wedge t} + T$$

for alle n, er T også optional for $(W_t^2-t)_{t\geq 0}$. $\square$

Korollar 9.4. *Lad T være som i sætningen. Da er W_T og W_T^2 integrable og*

$$E[W_T] = 0 \quad \text{og} \quad E[W_T^2] = E[T].$$

Definer for $-\infty < a < 0 < b < \infty$ og $\mu \in \mathbf{R}$ variable

$$T_{a,b}(\mu) = \inf\{t>0 \mid \mu t + W_t \in [a,b]^c\}.$$

Husk på at $\inf(\emptyset)=\infty$. Hvis $\mu = 0$ skrives kort $T_{a,b}$.
Teorien om Hitting times viser, at $T_{a,b}(\mu)$'erne er stoptider mht. $(\overline{\mathscr{F}}^W_{t+})_{t\geq 0}$, og set i lyset af ovenstående sætning er flg. resultat interessant.

Lemma 9.5. *For alle valg af a,b og μ har $T_{a,b}(\mu)$ momenter af enhver orden.*

Bevis. Lad a,b og μ være givet. Vi skal vise, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot P(T_{a,b}(\mu) > n) < \infty \text{ for } k \geq 1.$$

For ethvert n er

$$P(T_{a,b}(\mu) > n) \leq P(\bigcap_{i=0}^{n} \{\mu i + W_i \in [a,b]\})$$

$$\leq P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\mu + W_i - W_{i-1} \in [a-b, b-a]\}) = r^n,$$

hvor

$$r = P(\mu + W_1 \in [a-b, b+a]) < 1.$$

$P(T_{a,b}(\mu) > n)$ konvergerer med andre ord eksponentielt hurtigt mod 0, hvilket viser det ønskede. □

Med baggrund i disse resultater kan vi nu udlede nogle eksplicitte fordelingsresultater vedrørende Wienerprocessen $(W_t)_{t\geq 0}$. Husk på at vi har antaget $\sigma^2 = 1$.
Betragt først $\mu = 0$. Ifølge det ovenstående er $P(T_{a,b} < \infty) = 1$ for ethvert valg af parametre $a < 0 < b$ og dermed ifølge kontinuiteten samt Sætning 9.3

$$P(W_{T_{a,b}} = a) + P(W_{T_{a,b}} = b) = 1 \text{ samt } E[W_{T_{a,b}}] = 0 \text{ og } E[W_{T_{a,b}}^2] = E[T_{a,b}].$$

Ved simpel udregning fås derfor flg. identiteter

$$P(W_{T_{a,b}} = a) = \frac{b}{b-a}, \ P(W_{T_{a,b}} = b) = \frac{-a}{b-a} \text{ og } E[T_{a,b}] = b \cdot (-a).$$

Antag dernæst at μ er forskellig fra 0. Situationen er her lidt mere kompliceret, idet vi får brug for en martingal af eksponentiel type, nærmere bestemt processen

$$(e^{-2\mu W_t - 1/2(-2\mu)^2 t})_{t\geq 0} = (e^{-2\mu(W_t + \mu t)})_{t\geq 0}.$$

Da $\sup_{s \leq T_{a,b}(\mu)} \exp(-2\mu(W_s + \mu s)) \leq \exp(2|\mu|(b-a))$ fås ifølge Optional Sampling, Sætning E.4 side 88, at

$$E[e^{-2\mu(W_{T_{a,b}(\mu)} + \mu T_{a,b}(\mu))}] = 1,$$

hvilket ved beregninger af samme type som ovenfor viser, at

$$P(W_{T_{a,b}(\mu)} + \mu T_{a,b}(\mu) = a) = \frac{r^{-a} - r^{b-a}}{1 - r^{b-a}}$$

og

$$P(W_{T_{a,b}(\mu)} + \mu T_{a,b}(\mu) = b) = \frac{1 - r^{-a}}{1 - r^{b-a}},$$

hvor $r = e^{-2\mu}$. Tillige fås, da $E[W_{T_{a,b}(\mu)}] = 0$ og dermed

$$\mu \cdot E[T_{a,b}(\mu)] = E[W_{T_{a,b}(\mu)} + \mu T_{a,b}(\mu)],$$

at

$$E[T_{a,b}(\mu)] = \frac{(b-a)(1-r^{-a})}{\mu(1-r^{b-a})} + a/\mu.$$

Vi vil dernæst studere de såkaldte ensidige passage tider, dvs. $T_a(\mu)$ defineret ved

$$T_a(\mu) = \inf\{t > 0 \,|\, \mu t + W_t > a\} \text{ hvis } a > 0,\ \mu \in \mathbf{R}$$

og

$$T_a(\mu) = \inf\{t > 0 \,|\, \mu t + W_t < a\} \text{ hvis } a < 0,\ \mu \in \mathbf{R}.$$

Da udfaldsfunktionerne er kontinuerte og dermed begrænsede på begrænsede intervaller, konvergerer $T_{-n}(\mu)$'erne punktvis mod ∞ for ethvert μ. D.v.s. for alle $a > 0$ har vi

$$P(T_a(\mu) < \infty) = \lim_n P(T_a(\mu) < T_{-n}(\mu)) = \lim_n P(W_{T_{-n,a}(\mu)} + \mu T_{-n,a}(\mu) = a),$$

og dermed ifølge ovenstående formler

$$P(T_a(\mu) < \infty) = 1 \text{ hvis } \mu \geq 0 \text{ og } P(T_a(\mu) < \infty) = e^{-2|\mu|a} \text{ hvis } \mu < 0.$$

Bemærk at i tilfældet $\mu < 0$ kan resultatet ækvivalent formuleres som

$$\sup_{t\geq 0}(W_t + \mu t) \sim E(-2|\mu|).$$

Da $T_{-n,a}(\mu)$, som allerede nævnt, konvergerer punktvis opad mod $T_a(\mu)$ fås af Monoton konvergens, at

$$E[T_a(\mu)] = a/\mu \text{ hvis } \mu > 0 \ \text{ og } \ E[T_a(\mu)] = \infty \text{ hvis } \mu = 0.$$

Ved hjælp af de eksponentielle martingaler kan vi endog bestemme fordelingen for $T_a(\mu)$. Vi ser kun på tilfældet $\mu \geq 0$. For ethvert $x > 0$ er

$$(e^{xW_t - 1/2x^2 t})_{t\geq 0} = (e^{x(W_t + \mu t) - (1/2x^2 + x\mu)t})_{t\geq 0}.$$

Ved hjælp af optional sampling sætningen sluttes derfor, da

$$T_a(\mu) < \infty \ \ P\text{-n.o.} \ \text{ og } \ W_{T_a(\mu)} + \mu T_a(\mu) = a \ \ P\text{-n.o.},$$

at

$$E[e^{-(1/2x^2 + x\mu)T_a(\mu)}] = e^{-xa} \quad \text{for } x > 0.$$

Hvilket ved substitution giver, at

$$E[e^{-uT_a(\mu)}] = e^{a\mu} \cdot e^{-a\sqrt{\mu^2 + 2u}} \quad \text{for } u > 0$$

Entydighedssætningen for Laplace transformationen viser derfor, at $T_a(\mu)$ er en såkaldt *Invers Gauss* fordeling med parametre a^2 og μ^2, dvs. absolut kontinuert med tæthed

$$t \to \frac{a\,e^{a\mu}}{\sqrt{2\pi}}\,t^{-3/2}\,e^{-(a^2t^{-1}+\mu^2t)/2} \quad \text{for } t > 0.$$

Da $(-W_t)_{t\geq 0}$ også er en Wiener proces, har $T_a(\mu)$ og $T_{-a}(-\mu)$ samme fordeling for alle a og μ, og det overlades derfor til læseren at formulere de relevante resultater for $a < 0$.

Det er også af interesse at se på tilfældet $a = 0$, og i denne forbindelse defineres for alle $\mu \in \mathbf{R}$

$$T_{0+}(\mu) = \inf\{t > 0 \,|\, \mu t + W_t > 0\}$$

og

$$T_{0-}(\mu) = \inf\{t > 0 \,|\, \mu t + W_t < 0\}.$$

Men da $T_{0+}(\mu) \leq T_a(\mu)$ for ethvert $a > 0$ og tilsvarende $T_{0-}(\mu) \leq T_a(\mu)$ for ethvert $a < 0$ ses let, at både $T_{0+}(\mu)$ og $T_{0-}(\mu)$ er lig 0 P-n.s. for alle $\mu \in \mathbf{R}$.

Overvej at dette viser, at

$$\{t > 0 \,|\, \mu t + W_t(\omega) = 0\}$$

for ethvert $\mu \in \mathbf{R}$ er en lukket overtællelig mængde for P-n.a. ω. Man kan endog vise, at den P-n.s. har dimension 1/2.

10 $0-1$ love for Lévy processer

Fra Sandsynlighedsteori 2 og 1.2 kender I den såkaldte Kolmogorov's $0-1$ lov, som siger, at hale σ-algebraen hørende til en følge af uafhængige stokastiske variable er triviel, idet den kun indeholder hændelser, der har sandsynlighed 0 eller 1. Vi skal i dette afsnit se, at der gælder tilsvarende $0-1$ love for Lévy processer.

Lad derfor $(X_t)_{t\geq 0}$ være en Lévy proces, som er 0 i 0 med sandsynlighed 1, defineret på et sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ med tilhørende naturlige filter $(\mathscr{F}_t^X)$. Lad $A \in \mathscr{F}_{0+}^X$ være givet. Da $A \in \mathscr{F}_\varepsilon^X$ sikrer de uafhængige tilvækster, at A er uafhængig af enhver vektor af formen

$$(X_{t_1+\varepsilon} - X_\varepsilon, \ldots, X_{t_n+\varepsilon} - X_\varepsilon) \text{ hvor } \varepsilon > 0 \text{ og } 0 \leq t_1 < \cdots t_n.$$

A er derfor uafhængig af $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, da

$$(X_{t_1+\varepsilon} - X_\varepsilon, \ldots, X_{t_n+\varepsilon} - X_\varepsilon) \to (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

i sandsynlighed for $\varepsilon \to 0$, fordi processen er højrekontinuert og 0 i 0. Standard argumenter viser derfor, at A er uafhængig af $\mathscr{F}_\infty^X$ og dermed af sig selv, hvilket betyder, at $P(A) = 0$ eller 1. Bemærk at argumentet ikke gjorde brug af stationariteten af tilvæksterne og ej heller, at der var tale om en en-dimensional proces. Alt i alt har vi vist.

Sætning 10.1. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel eller flerdimensional Lévy proces, som er* 0 *i* 0 *med sandsynlighed* 1. *Enhver hændelse i $\mathscr{F}_{0+}^X$ har da sandsynlighed enten* 0 *eller* 1.

Korollar 10.2. *For enhver udvidet $\mathscr{F}_t^X$-stoptid τ er $P(\tau = 0)$ enten* 0 *eller* 1.

Lad os dernæst undersøge, hvad der sker, når tiden går mod uendelig, dvs. lad os se på 'hale'-σ-algebraen

$$\mathscr{F}^{X,\infty} = \bigcap_{t\geq 0} \mathscr{F}^{X,t} = \bigcap_{t\geq 0} \sigma(X_s \,|\, s \geq t).$$

Her gælder tilsvarende flg. resultat.

Sætning 10.3. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ betegne en reel eller flerdimensional Lévy proces, som er* 0 *i* 0 *med sandsynlighed* 1. *Enhver hændelse i $\mathscr{F}^{X,\infty}$ har da sandsynlighed enten* 0 *eller* 1.

Bevis. Bevis Lad $A \in \mathscr{F}^{X,\infty}$ være givet. Da $A \in \sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_n^X)$ viser et velkendt resultat for diskret tids martingaler, at

$$E[\mathbf{1}_A \,|\, \mathscr{F}_n^X] \to \mathbf{1}_A \;\; P-\text{n.o. for } n \to \infty.$$

For givet n er A specielt indeholdt i $\mathscr{F}^{X,n}$, og overvejelser af samme type som benyttet i beviset for Sætning 1.11 side 9 viser derfor, at

$$E[\mathbf{1}_A \,|\, \mathscr{F}_n^X] = \phi_n(X_n)$$

for en reel Borel funktion ϕ_n, som opfylder $0 \le \phi_n \le 1$. D.v.s. da $X_0 = 0$ n.o., at

$$\mathbf{1}_A = \limsup_n \phi_n(X_n) = \limsup_n \phi_n(X_n - X_0) \;\; P - \text{n.o.}$$

Men $\limsup_n \phi_n(X_n - X_0)$ er tydeligvis målelig mht. hale-σ-algebraen frembragt af følgen $(X_n - X_0)_{n\ge 1}$, og da

$$X_n - X_0 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1})$$

samt $(X_i - X_{i-1})_{i\ge 1}$ er en iid-følge, er det ønskede resultat derfor en konsekvens af flg. sætning kendt under navnet *Hewitt-Savage's* $0-1$-*lov*. □

Sætning 10.4. *Lad $(X_i)_{i\ge 1}$ betegne en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, og lad $(S_n)_{n\ge 1}$ betegne de tilhørende partial summer. $P(A)$ er da 0 eller 1 for enhver hændelse i hhv.*

$$\mathscr{F}^{X,\infty} = \bigcap_{n\ge 1} \mathscr{F}^{X,n} = \bigcap_{n\ge 1} \sigma(X_k \,|\, k \ge n)$$

og

$$\mathscr{F}^{S,\infty} = \bigcap_{n\ge 1} \mathscr{F}^{S,n} = \bigcap_{n\ge 1} \sigma(S_k \,|\, k \ge n).$$

Bevis. Da $X_n = S_n - S_{n-1}$ er

$$\mathscr{F}^{X,n} \subseteq \mathscr{F}^{S,n-1} \text{ for alle } n \text{ og dermed } \mathscr{F}^{X,\infty} \subseteq \mathscr{F}^{S,\infty}.$$

Som allerede nævnt viser Kolmogorov's sætning, at $\mathscr{F}^{X,\infty}$ er triviel, og vi vil nu vise, at dette også gælder $\mathscr{F}^{S,\infty}$.
Lad derfor $A \in \mathscr{F}^{S,\infty}$ være givet og sæt $f = \mathbf{1}_A$. Betragt et $n \ge 1$. Da

$$\mathscr{F}^{S,\infty} \subseteq \mathscr{F}^{S,2n} = \sigma(S_{2n}, X_{2n+1}, \dots)$$

og

$$(X_1, \cdots, X_n, S_{2n}, X_{2n+1}, \dots) \text{ og } (X_{n+1}, \dots, X_{2n}, S_{2n}, X_{2n+1}, \dots)$$

er identisk fordelte, gælder dette også vektorerne

$$(X_1, \cdots, X_n, f) \;\text{ og }\; (X_{n+1}, \dots, X_{2n}, f).$$

Variablene

$$E[f \,|\, X_1, \dots, X_n] \;\text{ og }\; E[f \,|\, X_{n+1}, \dots, X_{2n}]$$

har derfor også samme fordeling specielt samme anden moment. Heraf fås ved udregning, at

$$E[(f - E[f \,|\, X_1, \dots, X_n])^2] = E[(f - E[f \,|\, X_{n+1}, \dots, X_{2n}])^2],$$

og da $E[\,\cdot\,|\,\mathscr{F}^{X,n}]$ er en kontraktion i L^2, har vi tillige, at

$$E[\big(E[f \,|\, \mathscr{F}^{X,n}] - E[f \,|\, X_{n+1}, \dots, X_{2n}]\big)^2] \le E[(f - E[f \,|\, X_{n+1}, \dots, X_{2n}])^2].$$

Simple vurderinger viser nu, at $E[\,\big(f - E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,n}]\big)^2]/4$ er mindre end

$$E[\,(f - E[\,f\,|X_{n+1},\ldots,X_{2n}])^2] + E[\,\big(E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,n}] - E[\,f\,|X_{n+1},\ldots,X_{2n}]\big)^2]$$

for alle n og derfor

$$E[\,\big(f - E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,n}]\big)^2] \leq 8 \cdot E[\,(f - E[\,f\,|X_1,\ldots,X_n])^2] \rightarrow_{n\to\infty} 0.$$

D.v.s. $f = \lim_n E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,n}]$ i L^2 og dermed $f = E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,\infty}]$ P-n.o., thi fra teorien om baglæns martingaler vides, at

$$E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,n}] \to E[\,f\,|\,\mathscr{F}^{X,\infty}] \quad P-\text{n.o. og i } L^2 \text{ for } n \to \infty.$$

Men σ-algebraen $\mathscr{F}^{X,\infty}$ indeholder, som nævnt, kun hændelser med sandsynlighed 0 eller 1, og der findes derfor en konstant c, så at $P(f = c) = 1$. Men pr. definition er $f = \mathbf{1}_A$, og dette er derfor kun muligt, hvis $P(A)$ er enten 0 eller 1. $\square$

11 Tælleprocesser

Definition 11.1. En reel stokastisk proces $(N_t)_{t\geq 0}$ med kontinuert tid kaldes en *tælleproces*, hvis $t \to N_t(\omega)$ er ikke-aftagende og højrekontinuert med værdier i $\mathbf{Z}_+$ for alle ω.

Bemærk at enhver Poisson proces er en tælleproces.

Da udfaldsfunktionerne i en tælleproces pr. definition er ikke-aftagende, højrekontinuerte med værdier i $\mathbf{Z}_+$, vokser de kun i form af spring af heltallig størrelse, og tælleprocessen siges at være *simpel*, hvis for P-n.a. ω alle spring er af størrelse 1. Der er ikke problemer med at tilordne denne mængde en sandsynlighed, idet

$$\{\omega \mid \exists t > 0 \; \triangle N_t(\omega) \notin \{0,1\}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid \exists t \in (0,n] \; \triangle N_t(\omega) \notin \{0,1\}\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n2^k} \{N_{i/2^k} - N_{(i-1)/2^k} > 1\},$$

viser, at det er en hændelse. Specielt er Poisson processerne simple tælleprocesser, og de er, som bemærket tidligere, de eneste simple tælleprocesser, der er 0 i 0 og har uafhængige stationære tilvækster.

Tælleprocesser fremkommer ofte på flg. vis.

Lad $(\xi_n)_{n\geq 1}$ betegne reelle ikke-negative stokastiske variable defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, og lad A betegne hændelsen $\{\liminf_n \xi_n = \infty\}$. Da definerer

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(\xi_n(\omega)) \cdot \mathbf{1}_A(\omega) \;\; t \geq 0, \; \omega \in \Omega$$

en tælleproces, som omtales som tælleprocessen bestemt ved følgen $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Tilfældet hvor $P(\xi_n \leq \xi_{n+1}) = 1$ for alle n er specielt vigtigt, idet N_t'erne her, tolkende ξ_n som tidspunktet for den n'te ankomst, kan opfattes som antallet af ankomster i perioden $[0,t]$. I denne situation gælder tydeligvis, at

$$P(N_{t_1} \geq n_1, \dots, N_{t_k} \geq n_k) = P(\xi_{n_1} \leq t_1, \dots, \xi_{n_k} \leq t_k),$$

dvs. (N_t)'s fordeling kan bestemmes direkte ud fra fordelingen for $(\xi_n)_{n\geq 1}$.

Hvis ξ_n'erne specielt er på formen $(S_n)_{n\geq 1}$, hvor S_n er n'te partialsum for en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable $(X_i)_{i\geq 1}$ med fordeling F kaldes den tilhørende tælleproces en *Renewal tælleproces* med *ventetidsfordeling* F. Normalt forlanger man, at $F(0) = 0$, thi i givet fald er den tilhørende tælleproces simpel.

Lad $(N_t)_{t\geq 0}$ være en tælleproces defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ og lad $(D_n)_{n\geq 1}$ betegne de ikke-negative variable defineret ved

$$D_n = \inf\{t > 0 \mid N_t \geq n\}.$$

Pr. definition er $D_n(\omega) \le D_{n+1}(\omega)$ for alle n og ω, og da $(N_t)_{t\ge0}$ har lutter ikke-aftagende højrekontinuerte udfaldsfunktioner med heltallige værdier, konvergerer $D_n(\omega)$ mod uendelig for ethvert ω, dvs.

$$\{\liminf_n D(\omega) = \infty\}.$$

Da $\{D_n \le t\} = \{N_t \ge n\}$ for alle t og n, er D_n'erne stoptider mht. $(\mathscr{F}_t^N)_{t\ge0}$ det naturlige filter hørende til (N_t). D_n'erne er derfor specielt stokastiske variable, og da identiteten $\{D_n \le t\} = \{N_t \ge n\}$ viser, at

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_t\ge n\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(D_n)$$

ses, at enhver tælleproces fremkommer på ovennævnte måde. Bemærk at (N_t) er simpel, hvis og kun hvis

$$P(D_n = D_{n+1}) = 0 \quad \text{for alle } n \ge 1.$$

Ifølge Sætning 8.4 er Poisson processen med parameter $\lambda > 0$ en Renewal proces hørende til eksponential fordelingen med parameter λ; og blandt Renewal processerne kan Poisson processerne karakteriseres ved at den tilhørende middelværdifunktion er lineær. Dette formuleres som en sætning.

Sætning 11.2. *Lad $(N_t)_{t\ge0}$ være en Renewal proces med ventetidsfordeling F, hvor $F(0) = 0$. F er da en eksponential fordeling med parameter $\lambda > 0$, hvis og kun hvis $m_N(t) = \lambda t$ for alle $t \ge 0$.*

Bevis. Antag F er en eksponential fordeling med parameter λ og lad $(X_i)_{i\ge1}$ betegne en følge af uafhængige stokastiske variable med fordeling F. Idet S_n betegner den n'te partialsum af X_i'erne, gælder for ethvert t

$$m_N(t) = E[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} E[\mathbf{1}_{[0,t]}(S_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t s^{n-1}/(n-1)! \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda s}\, ds = \lambda \int_0^t e^{\lambda s} \cdot e^{-\lambda s}\, ds = \lambda t.$$

Antag omvendt at $t \to E[N_t]$ er på formen $t \to \lambda t$. Idet L_F betegner Laplacetransformen hørende til F, har vi for alle $a > 0$

$$\lambda/a^2 = \int_0^\infty e^{-at} \cdot E[N_t]\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-at} \cdot P(S_n \le t)\, dt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} -1/a \cdot ([e^{-at} \cdot P(S_n \le t)]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-at}\, dP(S_n \le t))$$
$$= 1/a \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{-aS_n}] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/a \cdot L_F(-a)^n = \frac{L_F(-a)}{a(1-L_F(-a))}.$$

D.v.s.

$$L_F(-a) = \lambda/(\lambda + a) \quad \text{for } a > 0,$$

hvilket er ensbetydende med, at F er en eksponential fordeling med parameter λ.

12 Stokastisk integration

12.1 Indledning

I mange sammenhænge betragter man en deterministisk proces $(x_t)_{t\geq 0}$, der løser en differentialligning af typen

$$dx_t = a(x_t)dt.$$

Det vil sige

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s)ds \quad \text{for } t \geq 0.$$

Men i den virkelige verden er der imidlertid ofte 'støj' i ligningen, således at en mere rimelig model er en stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$, der løser en ligning på formen $dX_t = a(X_t)dt +$ støj. Antager man at støjen er normalfordelt, kommer man frem til at $(X_t)_{t\geq 0}$ løser en *stokastisk differentialligning*

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{12.1}$$

hvor $(W_t)_{t\geq 0}$ er en Wienerproces. Ideen er her, at en tilvækst $X_{t+dt} - X_t$ for dt lille approksimativt er givet ved

$$X_{t+dt} - X_t \approx a(X_t)dt + \sigma(X_t)(W_{t+dt} - W_t),$$

således at der cirka gælder $X_{t+dt} - X_t \sim N(a(X_t)dt, \sigma^2(X_t)dt)$, når vi betinger på X_t.

Hvis man skal gøre ovenstående mere præcist, skal (12.1) oversættes til integralligningen

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s.$$

Vi er med andre ord nødt til at overveje, hvordan man definerer (stokastiske) integraler på formen $\int_0^t \phi_s dW_s$. Dette er emnet for nærværende kapitel.

Før vi definerer det stokastiske integral, vil vi dog først se lidt på 'normal' integration. Antag derfor at $(g_t)_{t\geq 0}$ er en (deterministisk) funktion, der opfylder $g_0 = 0$ samt at $t \mapsto g_t$ er ikke-aftagende og højrekontinuert. Vi ved da, at $(g_t)_{t\geq 0}$ inducerer et (entydigt) mål λ_g på $[0,\infty[$ som opfylder $\lambda_g(\{0\}) = 0$ og $\lambda_g(]a,b]) = g(b) - g(a)$. Definér funktionen $(\int_0^t \phi_s dg_s)_{t\geq 0}$ ved

$$\int_0^t \phi_s dg_s := \int_0^t \phi_s d\lambda_g(s) \quad t \geq 0,$$

når integralet på højre side eksisterer for ethvert t. Vi kalder $(g_t)_{t\geq 0}$ for integratoren, $(\phi_t)_{t\geq 0}$ for integranten og$(\int_0^t \phi_s dg_s)_{t\geq 0}$ for integralfunktionen. Her antages integranten at opfylde, at afbildningen $t \mapsto \phi_t$ er målelig mht. $(\mathscr{B}(\mathbf{R}_+), \mathscr{B}(\mathbf{R}))$.

Vi siger, at $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er lokalt begrænset, hvis $\sup_{0\leq t\leq T} |\phi_t| < \infty$ for ethvert T og $t \mapsto \phi_t$ er målelig mht. $(\mathscr{B}(\mathbf{R}_+), \mathscr{B}(\mathbf{R}))$. I givet fald eksisterer $\int_0^t \phi_s dg_s$ og er endelig for ethvert t.

Integralet har følgende egenskaber, hvor vi for nemheds skyld kun vil betragte lokalt begrænsede integranter:

(E1) (Linearitet) For $a, b \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$ og $(\phi_t^1)_{t\geq 0}$ og $(\phi_t^2)_{t\geq 0}$ lokalt begrænsede er

$$\int_0^t (a\phi_s^1 + b\phi_s^2) dg_s = a \int_0^t \phi_s^1 dg_s + b \int_0^t \phi_s^2 dg_s, \quad t \geq 0.$$

(E2) (Integralets værdi på indikatorfunktioner). Der gælder

$$\int_0^t \mathbf{1}_{]a,b]}(s) dg_s = g_{b\wedge t} - g_{a\wedge t}, \quad t \geq 0, \tag{12.2}$$

for $a < b$.

(E3) (Integralfunktionen som funktion af t) Hvis $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er lokalt begrænset, så gælder at $t \mapsto \int_0^t \phi_s dg_s$ er en cadlag funktion fra $\mathbf{R}_+$ til $\mathbf{R}$. Hvis yderligere $t \mapsto g_t$ er kontinuert, så er $t \mapsto \int_0^t \phi_s dg_s$ kontinuert.

(E4) (Domineret konvergens) Antag at $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$ for er lokalt begrænset for $n = 1, 2, \ldots$ samt at der findes en funktion $(\phi_t)_{t\geq 0}$ således at $\phi_t^n \to \phi_t$ for ethvert $t \geq 0$. Antag også at der for ethvert $T > 0$ findes en konstant $C_T < \infty$ således at $|\phi_t^n| \leq C_T$ for alle n og ethvert $t \leq T$. Da gælder

$$\int_0^t \phi_s^n dg_s \to \int_0^t \phi_s dg_s$$

for ethvert t.

(E5) (Analysens Fundamentalsætning) Antag f er kontinuert differentiabel. Da gælder

$$f(g_t) - f(g_0) = \int_0^t f'(g_s) dg_s \tag{12.3}$$

for $t > 0$. (Analysens Fundamentalsætning som I kender den fra Matematisk Analyse svarer til funktionen $g_t = t$, der inducerer Lebesguemålet).

(E6) (Positivitet af integralet) Hvis $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er lokalt begrænset og ikke-negativ, så er

$$\int_0^t \phi_s dg_s \geq 0 \quad \text{for ethvert } t \geq 0.$$

Hvis mere generelt $(g_t)_{t\geq 0}$ er en cadlag funktion af begrænset variation med $g_0 = 0$, så kan man vise at $(g_t)_{t\geq 0}$ kan skrives som $g_t = g_t^1 - g_t^2$ hvor $(g_t^i)_{t\geq 0}$ er ikke-aftagende højrekontinuerte med $g_0^i = 0$ for $i = 1, 2$. I givet fald definerer vi

$$\int_0^t \phi_s dg_s := \int_0^t \phi_s dg_s^1 - \int_0^t \phi_s dg_s^2 \tag{12.4}$$

under antagelse af at begge integraler på højre side er endelige. Når $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er lokalt begrænset, afhænger integralet $\int_0^t \phi_s dg_s$ ikke af $(g_t^i)_{t\geq 0}$ men kun af $(g_t)_{t\geq 0}$; se Opgave 43. Egenskaberne (E1)–(E5) ovenfor gælder også, når $(g_t)_{t\geq 0}$ er af begrænset variation, mens dette ikke er tilfældet for (E6).

Eksempel 12.1. Antag at $(h_t)_{t\geq 0}$ er højrekontinuert og ikke-aftagende med $h_0 = 0$. Lad $(\phi_t)_{t\geq 0}$ være lokalt begrænset og sæt $g_t := \int_0^t \psi_s dh_s$ for $t \geq 0$. Idet

$$g_t = \int_0^t \psi_s^+ dh_s - \int_0^t \psi_s^- dh_s,$$

kan vi af (E3) og (E6) slutte, at $(g_t)_{t\geq 0}$ er af begrænset variation. Endvidere har vi for $(\phi_t)_{t\geq 0}$ lokalt begrænset at

$$\int_0^t \phi_s dg_s = \int_0^t \phi_s \psi_s dh_s.$$

Ønsker man at definere et 'integralbegreb' som har egenskaberne ovenfor, er det nødvendigt at antage at integratoren er af begrænset variation. Lad os være mere præcise og antage at $(g_t)_{t\geq 0}$ er en reel cadlag funktion med $g_0 = 0$ som opfylder at der findes et 'integral' $(\int_0^t \phi_s \, dg_s)_{t\geq 0}$ defineret for $(\phi_t)_{t\geq 0}$ lokalt begrænset. Antag at dette 'integral' besidder egenskaberne (E1), (E2) og (E4). Da kan man vise, at $(g_t)_{t\geq 0}$ er af begrænset variation.

Vi skal benytte følgende følgende pendant til (E3).

Lemma 12.2. *Antag at $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er målelig som funktion af t og opfylder $\int_0^t |\phi_s| ds < \infty$ for ethvert $t > 0$. Da er $t \mapsto \int_0^t \phi_s ds$ kontinuert.*

Bevis. Vi har

$$\int_0^t \phi_s ds = \int_0^\infty \mathbf{1}_{]0,t]}(s)\phi_s ds$$

for ethvert $t \geq 0$. Hvis $t_n \to t$ har vi

$$\mathbf{1}_{]0,t_n]}(s)\phi_s \to \mathbf{1}_{]0,t]}(s)\phi_s \quad \text{for } n \to \infty$$

for ethvert $s \neq t$. Da $\{t\}$ er en nulmængde mht. Lebesguemålet, følger fra Lebesgues Sætning om Domineret Konvergens at

$$\int_0^{t_n} \phi_s ds = \int_0^\infty \mathbf{1}_{]0,t_n]}(s)\phi_s ds \to \int_0^\infty \mathbf{1}_{]0,t]}(s)\phi_s ds = \int_0^t \phi_s ds$$

som ønsket.

□

Lad os nu vende tilbage til vort ønske om at definere integralet det stokastiske integral $\int_0^t \phi_s dW_s$. Hvis vi har et ω hvor $t \mapsto W_t(\omega)$ er af begrænset variation, kan vi naturligvis bare definere det stokastiske integral $\int_0^t \phi_s \, dW_s(\omega)$ ved hjælp af 'sædvanlig' integrationsteori som ovenfor. MEN! Vi har i Sætning 9.2 set, at næsten alle udfaldsfunktioner for Wienerprocessen er af ubegrænset variation, så der er simpelthen ikke mulighed for at lave et 'sædvanligt' integral mht. $(W_t)_{t\geq 0}$. Vi skal derfor indføre et nyt integralbegreb for Wienerprocesen og udlede egenskaber ved dette integral.

Først vil vi definere og studere integralet for en lille klasse af integranter; det såkaldt 'simple integral'. Desuden vises egenskaber ved det simple integral, herunder martingalenskaben af simple integraler. Dernæst udvides mængden af integranter og vi definerer det generelle integral ved et approksimationsargument. Endelig vil vi udlede *Ito's formel*, der er den stokastiske kalkyles svar på Analysens Fundamentalsætning. Approksimationsargumentet er baseret på følgende nyttige resultat.

Sætning 12.3. *Betragt et filtreret sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Lad $(M_t^n)_{t\geq 0}$ betegne en $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-martingal for $n = 1, 2, \ldots$.*

(1) Hvis $(M_t)_{t\geq 0}$ er adapteret integrabel proces således at der for hvert $t \geq 0$ gælder $M_t^n \to M_t$ i $L^1(P)$, så er $(M_t)_{t\geq 0}$ en $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-martingal.

(2) Antag at der for ethvert $t \geq 0$ gælder at $(M_t^n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy følge i $L^1(P)$ samt at alle udfaldsfunktioner for $(M_t^n)_{t\geq 0}$ er højrekontinuerte (kontinuerte). Da findes en og op til uskelnelighed kun en progressivt målelig $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-martingal $(M_t)_{t\geq 0}$, der opfylder (i) at udfaldsfunktionerne næsten alle er højrekontinuerte (kontinuerte) og (ii) at $M_t^n \to M_t$ i $L^1(P)$ for ethvert $t \geq 0$.

(3) Lad situation være som i (2). Hvis filtret er komplet, kan processen $(M_t)_{t\geq 0}$ vælges således at alle udfaldsfunktioner er højrekontinuerte (kontinuerte).

Bevis. (1) overlades til læseren.

(2) Vi viser, at der findes en delfølge $n_1 < n_2 < \ldots$ og en progressivt målelig proces $(M_t)_{t\geq 0}$ således at

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^{n_k} - M_t| \to 0 \quad n.s. \quad \text{for } k \to \infty \tag{12.5}$$

for ethvert $T > 0$. Dernæst viser vi, at $(M_t)_{t\geq 0}$ har alle de ønskede egenskaber.

Da $(M_k^n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy følge i $L^1(P)$ for ethvert $k \geq 1$, har vi pr. definition, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et N således at $E\left[|M_k^n - M_k^m|\right] < \varepsilon$ for $n, m \geq N$. Specielt kan vi vælge en delfølge $n_1 < n_2 < \ldots$ således at

$$E\left[|M_k^{n_{k+1}} - M_k^{n_k}|\right] < 2^{-k} \quad \text{for ethvert } k. \tag{12.6}$$

Definér

$$M_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} M_t^{n_k}(\omega) & \text{hvis grænseværdien eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{12.7}$$

Bemærk at $(M_t^{n_k})_{t\geq 0}$ er progressivt målelig, idet den har højrekontinuerte udfaldsfunktioner og er adapteret. Da målelighed bevares ved punktvis grænseovergang, er $(M_t)_{\geq 0}$ ligeledes progressivt målelig.

Lad $T > 0$. For at vise (12.5) argumenterer vi som følger. Maksimaluligheden i Sætning C.3 anvendt på submartingalen $(|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}|)_{t\geq 0}$ for $k > T$ viser sammen med (12.6) at

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}| > k^{-2}\right) \leq P\left(\sup_{0\leq t\leq k} |M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}| > k^{-2}\right) \leq k^2 2^{-k}$$

Idet $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 2^{-k} < \infty$ giver Borel-Cantelli

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}| > k^{-2} \text{ for uendelig mange } k\right) = 0.$$

Dermed findes en nulmængde N således at der for $\omega \notin N$ findes et $k' = k'(\omega)$ så at

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}|(\omega) \leq k^{-2} \quad \text{for } k \geq k'.$$

Vi viser, at der for dette ω gælder $\sup_{0\leq t\leq T} |M_t(\omega) - M_t^{n_k}(\omega)| \to 0$ for $k \to \infty$, hvilket afslutter beviset for (12.5). Men for $m > k$ er

$$M_t^{n_m}(\omega) = M_t^{n_k}(\omega) + \sum_{j=k}^{m-1} (M_t^{n_{j+1}}(\omega) - M_t^{n_j}(\omega)) \tag{12.8}$$

og dermed viser trekantsuligheden at for $k' \leq k < m$ er

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T} |M_t^{n_m} - M_t^{n_k}|(\omega) &\leq \sup_{0\leq t\leq T} \sum_{j=k}^{m-1} |M_t^{n_{j+1}} - M_t^{n_j}|(\omega) \\ &\leq \sum_{j=k}^{m-1} \sup_{0\leq t\leq T} |M_t^{n_{j+1}} - M_t^{n_j}|(\omega) \leq \sum_{j=k}^{m-1} j^{-2} \leq \sum_{j=k}^{\infty} j^{-2}. \end{aligned}$$

Da den sidste sum konvergerer mod 0 for $k \to \infty$, ser vi at $(M_t^{n_k}(\omega))_{k\geq 1}$ er en Cauchy følge i $\mathbf{R}$ for $t \leq T$. Det vil sige $\lim_{k\to\infty} M_t^{n_k}(\omega)$ eksisterer og ifølge (12.7) betegnes grænsen $M_t(\omega)$. Lader vi $m \to \infty$ i (12.8), følger at

$$M_t(\omega) = M_t^{n_k}(\omega) + \sum_{j=k}^{\infty} (M_t^{n_{j+1}}(\omega) - M_t^{n_j}(\omega))$$

og trekantsuligheden viser som ovenfor at

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_t - M_t^{n_k}|(\omega) \leq \sum_{j=k}^{\infty} j^{-2} \to \infty \quad \text{for } k \to \infty.$$

Dette afslutter beviset for (12.5).

Vi mangler nu at vise, at $(M_t)_{t\geq 0}$ har de ønskede egenskaber.

Da $(M_t^n)_{t\geq 0}$ har højrekontinuerte udfaldsfunktioner, viser (12.5), at næsten alle udfaldsfunktioner for $(M_t)_{t\geq 0}$ er højrekontinuerte (og kontinuerte, hvis (M_t^n) har kontinuerte udfaldsfunktioner).

Lad $t \geq 0$. Da $(M_t^n)_{n\geq 1}$ er en Cauchy følge i $L^1(P)$, sikrer fuldstændigheden af $L^1(P)$, at $(M_t^n)_{n\geq 1}$ konvergerer i $L^1(P)$. Da vi samtidig fra (12.5) ved, at delfølgen $(M_t^{n_k})_{k\geq 1}$ konvergerer næsten sikkert mod M_t, ser vi at M_t^n konvergerer i $L^1(P)$ mod M_t for $n \to \infty$.

Martingalegenskaben af $(M_t)_{t\geq 0}$ kommer fra (1).

Lad os til sidst argumentere for entydigheden. Lad $(N_t)_{t\geq 0}$ betegne en integrabel proces, der dels har udfaldsfunktioner som næsten alle er højrekontinuerte og dels opfylder at $M_t^n \to N_t$ i $L^1(P)$ for ethvert $t \geq 0$. Da en $L^1(P)$-grænse er næsten sikkert entydigt bestemt, følger at $(M_t)_{t\geq 0}$ og $(N_t)_{t\geq 0}$ er modifikationer. Dermed er de også uskelnelige, idet udfaldsfunktionerne er højrekontinuerte.

(3) Lad os nu vise, at hvis filtret er komplet kan vi konstruere en adapteret proces $(N_t)_{t\geq 0}$, som er uskelnelig fra $(M_t)_{t\geq 0}$ i (12.7). Lad $N \in \mathscr{F}$ være en nulmængde således at der ethert $\omega \in N^c$ gælder at $t \mapsto M_t(\omega)$ er højrekontinuert (kontinuert). Lad $N_t := \mathbf{1}_{N^c} M_t$. Da har $(N_t)_{t\geq 0}$ lutter højrekontinuerte (kontinuerte) udfaldsfunktioner. Endvidere er $(N_t)_{t\geq 0}$ adapteret, idet der for ethvert $t \geq 0$ gælder $M_t = N_t$ næsten sikkert og filtret er komplet; se opgave 19. Da de to processer er modifikationer, er de, på grund af de højrekontinuerte udfaldsfunktioner, også uskelnelige.

Vi kan derfor lade processen $(N_t)_{t\geq 0}$ erstatte $(M_t)_{t\geq 0}$ i (2).

□

Bemærkning 12.4. Undertiden er det nyttigt at *alle* udfaldsfunktioner for martingalen $(M_t)_{t\geq 0}$ er højrekontinuerte, som i (3) ovenfor. F.eks. har vi kun formuleret optional sampling i kontinuert tid for martingaler hvor alle udfaldsfunktioner er højrekontinuerte; se Appendix E.

I resten af kapitlet er vort set-up som følger:

Vi betragter et filtreret sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Når vi taler om martingaler, menes $(\mathscr{F}_t)$-martingaler; tilsvarende kalder vi en proces progressivt målelig, når den er progressivt målelig mht. $(\mathscr{F}_t)$. Lad $(W_t)_{t\geq 0}$ betegne en Wienerproces med parameter 1 mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Det vil sige, at $W_0 = 0$, $(W_t)_{t\geq 0}$ har kontinuerte udfaldsfunktioner og for alle $0 \leq s < t$ er $W_t - W_s$ uafhængig af $\mathscr{F}_s$ med $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

Vi får brug for at definere integralprocessen $(\int_0^t \phi_s \, ds)_{t\geq 0}$ af en progressivt målelig reel proces $(\phi_t)_{t\geq 0}$ der opfylder $\int_0^t |\phi_s| ds < \infty$ n.s. for ethvert $t > 0$. Vi lader derfor

$$\int_0^t \phi_s \, ds(\omega) := \begin{cases} \int_0^t \phi_s(\omega) ds & \text{hvis } \int_0^t |\phi_s(\omega)| \, ds < \infty \\ 0 & \text{hvis } \int_0^t |\phi_s(\omega)| \, ds = \infty. \end{cases}$$

Integralprocessen $(\int_0^t \phi_s \, ds)_{t\geq 0}$ er da progressivt målelig og næsten alle udfaldsfuntioner er kontinuerte ifølge Lemma 12.2.

12.2 Integration af simple processer

I dette afsnit skal vi definere det stokastiske integral af simple processer.

Definition 12.5. En proces $(\phi_t)_{t\geq 0}$ siges at være *simpel*, hvis den er på formen

$$\phi_t = Y_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} Y_i \mathbf{1}_{]u_i,v_i]}(t), \quad t \geq 0, \tag{12.9}$$

hvor $n \geq 0$, Y_0 er begrænset og $\mathscr{F}_0$-målelig, og Y_i er begrænset og $\mathscr{F}_{u_i}$-målelig og $0 \leq u_i < v_i$ for $i = 1, \ldots, n$.

Mængden af simple processer betegnes med $\mathscr{S}$.

Læg mærke til at en simpel proces er ventrekontinuert og adapteret; specielt er den progressivt målelig.

Bemærkning 12.6. I (12.9) kan intervallerne $]u_i, v_i]$ lappe ind over hinanden, og derfor har en simpel proces $(\phi_t)_{t\geq 0}$ generelt mere end en opskrivning som i (12.9). Ved eventuelt at indføre ekstra delepunkter kan man dog altid antage, at intervallerne ikke lapper ind over hinanden. Vi siger, at en simpel proces $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er skrevet på kanonisk form, hvis

$$\phi_t = Y_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} Y_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \quad t \geq 0 \tag{12.10}$$

hvor $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, Y_0 er $\mathscr{F}_0$-målelig og Y_i er $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-målelig for $i = 1, \ldots, n$. Enhver simpel proces kan altså skrives på kanonisk form.

Eksempel 12.7. Antag at $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er givet ved

$$\phi_t = Y_1 \cdot \mathbf{1}_{]1,3]}(t) + Y_2 \cdot \mathbf{1}_{]2,9]}(t). \tag{12.11}$$

hvor Y_1 er $\mathscr{F}_1$ målelig, Y_2 er $\mathscr{F}_2$-målelig, og begge stokastiske variable er begrænsede. Da er en kanonisk opskrivning

$$\phi_t = Y_1 \cdot \mathbf{1}_{]1,2]}(t) + (Y_1 + Y_2) \cdot \mathbf{1}_{]2,3]}(t) + Y_2 \cdot \mathbf{1}_{]3,9]}(t). \tag{12.12}$$

Lad $(\phi_t)_{t\geq 0}$ være en simpel proces givet ved (12.9). Vi definerer da processen $(\int_0^t \phi_s dW_s)_{t\geq 0}$, der kaldes *det stokastiske integral af* $(\phi_t)_{t\geq 0}$ *med hensyn til* $(W_t)_{t\geq 0}$, på følgende måde:

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s := \sum_{i=1}^{n} Y_i (W_{t\wedge v_i} - W_{t\wedge u_i}), \quad t \geq 0. \tag{12.13}$$

Også her kaldes $(\phi_t)_{t\geq 0}$ for integranten og $(W_t)_{t\geq 0}$ for integratoren.

Overvej at det stokastiske integral er veldefineret; altså at højre side af (12.13) ikke afhænger af den valgte opskrivning i (12.9). Bemærk også, at integralet ikke afhænger af ϕ_0. Sammenlign ligeledes integralet med (12.2) og læg mærke til at integralet af $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er defineret på samme måde som hvis $(W_t)_{t\geq 0}$ havde været af begrænset variation.

Eksempel 12.8. Det kan måske være vanskeligt gennemskue hvordan integralet egentlig er defineret, så lad os se på $(\phi_t)_{t\geq 0}$ givet ved

$$\phi_t = Y\mathbf{1}_{]u,v]}(t) \tag{12.14}$$

hvor Y er $\mathscr{F}_u$-målelig og begrænset. For en sådan proces er

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s = \begin{cases} 0 & \text{hvis } t \leq u \\ Y(W_t - W_u) & \text{hvis } t \in [u,v] \\ Y(W_v - W_u) & \text{hvis } t \geq v. \end{cases} \tag{12.15}$$

Heraf ses også at $t \mapsto \int_0^t \phi_s \, dW_s$ er kontinuert samt at integralet er adapteret.

Sætning 12.9. *Vi har følgende resultater.*

(1) Lad $(\phi_t)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$. Da er $(\int_0^t \phi_s \, dW_s)_{t\geq 0}$ en kvadratisk integrabel martingal med kontinuerte udfaldsfunktioner. Endvidere er processen

$$\left(\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s \right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds \right)_{t\geq 0} \tag{12.16}$$

en martingal, der ligeledes har kontinuerte udfaldsfunktioner.

(2) (Linearitet af integralet). Lad $(\phi_t^i)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ for $i = 1,2$ og $a,b \in \mathbf{R}$. Da gælder

$$\int_0^t (a\phi_s^1 + b\phi_s^2) \, dW_s = a \int_0^t \phi_s^1 \, dW_s + b \int_0^t \phi_s^2 \, dW_s \tag{12.17}$$

for alle $t \geq 0$.

(3) Antag at $(\phi_t)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$. For ethvert $T > 0$ har vi da

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \phi_t \, dW_s \right|^2 \right] \leq 4E\left[\int_0^T \phi_t^2 dt \right]. \tag{12.18}$$

Bevis. Lineariteten i (2) følger direkte fra definitionen af integralet.

Lad os herefter se på (1). Da $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er begrænset og $(W_t)_{t\geq 0}$ er kvadratisk integrabel, er processen $(\int_0^t \phi_s \, dW_s)_{t\geq 0}$ kvadratisk integrabel.

Martingalegenskaben af $(\int_0^t \phi_s \, dW_s)_{t\geq 0}$: På grund af lineariteten i (2) er det nok at betragte et $(\phi_t)_{t\geq 0}$ givet ved (12.14). Vi skal vise

$$E\left[\int_0^t \phi_r \, dW_r \mid \mathscr{F}_s \right] = \int_0^s \phi_r \, dW_r$$

for alle $0 \le s < t$, og nøjes med at eftervise dette når $u \le s \le t \le v$. Da er

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^t \phi_r \, dW_r \mid \mathscr{F}_s\right] \\
& = E\left[Y(W_t - W_u) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
& = YE\left[(W_t - W_u) \mid \mathscr{F}_s\right] \\
& = Y(W_s - W_u) = \int_0^s \phi_r \, dW_r
\end{aligned}
$$

hvor vi undervejs udnyttede, at Y er $\mathscr{F}_u$-målelig (og dermed $\mathscr{F}_s$-målelig) og at $(W_r)_{r\ge 0}$ er en martingal.

Lad os dernæst eftervise martingalegenskaben af (12.16). Bemærk først at da $(\phi_t)_{t\ge 0}$ er begrænset, gælder det samme for $\int_0^t \phi_r^2 dr$ for ethvert t. Da det stokastiske integral som nævnt er kvadratisk integrabelt, følger at processen i (12.16) er integrabel. Lad $(\phi_t)_{t\ge 0}$ være opskrevet på kanonisk form som

$$\phi_t = Y_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n \phi_t^i, \quad t \ge 0,$$

hvor

$$\phi_t^i = Y_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t) \tag{12.19}$$

og $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, og Y_i er begrænset og $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-målelig. Da er

$$\phi_t^2 = Y_0^2 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n (\phi_t^i)^2, \quad t \ge 0,$$

(overvej at det er vigtigt at $(\phi_t)_{t\ge 0}$ er på kanonisk form for at dette gælder), og dermed er

$$\int_0^t \phi_r^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_0^t (\phi_r^i)^2 ds.$$

Samtidig har vi

$$\left(\int_0^t \phi_r \, dW_r\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t \phi_r^i \, dW_r\right)^2 + \sum_{i\neq j} \int_0^t \phi_r^i \, dW_r \cdot \int_0^t \phi_r^j \, dW_r. \tag{12.20}$$

Da der for $i \neq j$ gælder at intervallerne $]t_{i-1}, t_i]$ og $]t_{j-1}, t_j]$ er disjunkte, kan man ud fra definitionen af integralet overbevise sig om, at leddene i den sidste sum på højre side af (12.20) er martingaler. For at afslutte beviset skal vi derfor indse, at

$$\left(\int_0^t \phi_r^i \, dW_r\right)^2 - \int_0^t (\phi_r^i)^2 dr$$

er en martingal for ethvert $i = 1,\ldots,n$. Hold i fast. Igen er der flere tilfælde man skal checke, og vi nøjes med at se på s,t så $t_{i-1} \leq s \leq t \leq t_i$. Da er

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t \phi_r^i dW_r\right)^2 &= Y_i^2 \left(W_t - W_{t_{i-1}}\right)^2 \\ &= Y_i^2 \left[(W_t - W_s)^2 + \left(W_s - W_{t_{i-1}}\right)^2 + 2\left(W_t - W_s\right) \cdot \left(W_s - W_{t_{i-1}}\right)\right].\end{aligned}$$

Da $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ er uafhængig af $\mathscr{F}_s$, og Y_i samt $W_s - W_{t_{i-1}}$ er $\mathscr{F}_s$-målelige følger

$$\begin{aligned}E\left[\left(\int_0^t \phi_r^i dW_r\right)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] &= Y_i^2 E\left[\left(W_t - W_{t_{i-1}}\right)^2 \mid \mathscr{F}_s\right] \\ &= Y_i^2\left[(t-s) + (W_s - W_{t_{i-1}})^2\right] \\ &= \int_s^t (\phi_r^i)^2 dr + \left(\int_0^s \phi_r^i dW_r\right)^2,\end{aligned}$$

hvilket er det ønskede resultat.

Processen i (12.16) har kontinuerte udfaldsfunktioner, hvilket følger af at $t \mapsto \int_0^t \phi_s\, dW_s$ er kontinuert samt Lemma 12.2.

Lad os endelig vise 3). Eftersom (12.16) er en martingal der starter i 0, er

$$E\left[\left(\int_0^T \phi_s\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T \phi_s^2 ds\right]$$

og Doob's ulighed giver derfor det ønskede.

□

12.3 En udvidelse

Ovenfor definerede vi det stokastiske integral for en meget lille klasse af integranter, og vi skal nu se, at det er muligt at udvide mængden af integranter på en sådan måde, at egenskaberne i Sætning 12.9 forbliver sande.

Definition 12.10. Lad H_2 betegne mængden af progressivt målelige reelle processer $(\phi_t)_{t\geq 0}$ der opfylder

$$E[\int_0^T \phi_t^2 dt] < \infty$$

for ethvert $T > 0$.

Bemærk at vi som tidligere nævnt har at en simpel proces er progressivt målelig og begrænset, og dermed er $\mathscr{S}$ en delmængde af H_2.

Hvis $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$ og $(\phi_t)_{t\geq 0}$ tilhører H_2, siger vi at $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$ konvergerer mod $(\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2 (og skriver $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2), hvis der gælder

$$E\left[\int_0^T (\phi_t^n - \phi_t)^2 dt\right] \to 0 \tag{12.21}$$

for ethvert $T > 0$. Dette svarer til konvergens i $L^2(P \times \lambda_T)$ for ethvert $T > 0$ hvor λ_T betegner Lebesguemålet på $[0,T]$, og derfor har vi

$$(\phi_t^{n,i})_{t\geq 0} \to (\phi_t^i)_{t\geq 0} \text{ for } i = 1,2 \text{ medfører } (a\phi_t^{n,1} + b\phi_t^{n,2})_{t\geq 0} \to (a\phi_t^1 + b\phi_t^2)_{t\geq 0} \quad (12.22)$$

for alle a, b, hvor konvergensen er i H_2.

For at konstruere integralet behøver vi følgende lemma.

Lemma 12.11. *Lad* $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$.

(1) Antag $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ *med* $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ *i* H_2. *Der findes da en og op til uskelnelighed kun en kvadratisk integrabel progressivt målelig martingal* $(M_t)_{t\geq 0}$ *som har næsten alle udfaldsfunktioner kontinuerte og opfylder at*

$$\int_0^t \phi_s^n \, dW_s \to M_t \quad i\ L^2(P)\ for\ t \geq 0. \tag{12.23}$$

(2) Processen $(M_t)_{t\geq 0}$ *afhænger ikke af den valgte følge* $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$. *Det vil sige at hvis* $(\psi_t^n)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ *med* $(\psi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ *i* H_2, *så gælder*

$$\int_0^t \psi_s^n \, dW_s \to M_t \quad i\ L^2(P)\ for\ t \geq 0.$$

Bevis. (1) Bemærk at der ifølge Sætning 12.9 (1) for ethvert $t \geq 0$ gælder at

$$E\left[\left(\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^m)\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (\phi_s^m - \phi_s^n)^2 ds\right]. \tag{12.24}$$

Da $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2 konvergerer højre side mod 0, når n og m konvergerer mod uendelig. Følgen $(\int_0^t \phi_s^n \, dW_s)_{n\geq 1}$ er derfor Cauchy i $L^2(P)$, og konvergerer derfor såvel i $L^2(P)$ som i $L^1(P)$. Da $L^2(P)$- og $L^1(P)$-grænserne er identiske (næsten sikkert), er det nok at konstruere en proces $(M_t)_{t\geq 0}$ med de ønskede egenskaber, hvor $L^2(P)$-konvergensen i (12.23) erstattes af $L^1(P)$-konvergens. Men eksistens og entydighed af $(M_t)_{t\geq 0}$ følger så fra Sætning 12.3.

(2) Lad $(\psi_t^n)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ med $(\psi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. Fra (1) med $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$ erstattet af $(\psi_t^n)_{t\geq 0}$ har vi, at der findes en progressivt målelig stokastisk proces $(N_t)_{t\geq 0}$ hvor næsten alle udfaldsfunktioner er kontinuerte så $\int_0^t \psi_s^n \, dW_s \to N_t$ i $L^2(P)$ for ethvert $t \geq 0$. Vi skal vise at $(M_t)_{t\geq 0}$ og $(N_t)_{t\geq 0}$ er uskelnelige.

Definer en ny følge at simple processer $(\xi_t^n)_{t\geq 0}$ ved $(\xi_t^n)_{t\geq 0} := (\psi_t^n)_{t\geq 0}$ når n er ulige og $(\xi_t^n)_{t\geq 0} := (\psi_t^n)_{t\geq 0}$ når n er lige. Da $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2 og $(\psi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2 har vi $(\xi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. Dermed findes ifølge (1) en progressivt målelig kvadratisk integrabel proces $(P_t)_{t\geq 0}$ med næsten alle udfaldsfunktioner kontinuerte således at $\int_0^t \xi_s^n \, dW_s \to P_t$ i $L^2(P)$ for ethvert $t \geq 0$. Ved at gå igennem ulige n ser vi at $(P_t)_{t\geq 0}$ og $(N_t)_{t\geq 0}$ er uskelnelige, og ved at gå igennem lige n ser vi at $(P_t)_{t\geq 0}$ og $(M_t)_{t\geq 0}$ er uskelnelige. Dermed er $(M_t)_{t\geq 0}$ og $(N_t)_{t\geq 0}$ uskelnelige.

□

Vi kan nu definere det stokastiske integral for enhver proces i H_2. Vi skal benytte at der for ethvert $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$ findes en følge $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ med $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. Beviset for eksistensen af en sådan følge findes i Øksendal: *Stochastic Differential Equations*.

Definition 12.12. Lad $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$. Vi definerer processen $(\int_0^t \phi_s \, dW_s)_{t\geq 0}$, der kaldes det stokastiske integral af $(\phi_t)_{t\geq 0}$ med hensyn til $(W_t)_{t\geq 0}$, som

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s := M_t \quad \text{for } t \geq 0,$$

hvor $(M_t)_{t\geq 0}$ er processen der optræder i Lemma 12.11.

Læg mærke til at hvis $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er simpel, så kan vi vælge den approksimerende følge $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ i Lemma 12.11 til bare at være $(\phi_t)_{t\geq 0}$. Dermed ses, at ovenstående definition stemmer helt overens med vor tidligere definition (12.13), når $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er simpel.

Sætning 12.13. *Vi har følgende resultater.*

(1) Lad $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$. Da er $(\int_0^t \phi_s \, dW_s)_{t\geq 0}$ en progressivt målelig kvadratisk integrabel martingal, hvor næsten alle udfaldsfunktioner er kontinuerte. Endvidere er processen

$$\left(\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s \right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds \right)_{t\geq 0} \tag{12.25}$$

en martingal, hvor næsten alle udfaldsfunktioner er kontinuerte.

(2) (Linearitet af integralet). Lad $(\phi_t^i)_{t\geq 0} \in H_2$ for $i = 1,2$ og $a,b \in \mathbf{R}$. Da gælder

$$\int_0^t a\phi_s^1 + b\phi_s^2 \, dW_s = a \int_0^t \phi_s^1 \, dW_s + b \int_0^t \phi_s^2 \, dW_s \quad \textit{for alle } t \geq 0 \ \textit{n.s.} \tag{12.26}$$

(3) Antag at $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$. For ethvert $T > 0$ har vi da

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \phi_t \, dW_s \right|^2 \right] \leq 4E\left[\int_0^T \phi_t^2 dt \right]. \tag{12.27}$$

(4) (Konvergens af integraler) Antag at $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$, $n \geq 1$, og $(\phi_t)_{t\geq 0}$ tilhører H_2 samt at $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. Da gælder

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t \phi_t \, dW_s - \int_0^t \phi_t^n \, dW_s \right|^2 \right] \leq 4E\left[\int_0^T (\phi_t - \phi_t^n)^2 dt \right] \to 0 \tag{12.28}$$

for ethvert $T > 0$.

Bevis. Beviset bygger dels på at martingalegenskaben bevares ved grænseovergang i $L^1(P)$ (Sætning 12.3) og dels på at de tilsvarende resultater gælder for det simple integral.

Ifølge Lemma 12.11 har vi allerede vist (1), på nær egenskaberne vedrørende processen i (12.25). Antag $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ med $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. Vi har da

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_s^n \, dW_s &\to \int_0^t \phi_s \, dW_s \quad \text{i } L^2(P) \\ \int_0^t (\phi_s^n)^2 ds &\to \int_0^t \phi_s^2 ds \quad \text{i } L^1(P) \end{aligned}$$

for ethvert $t \geq 0$, hvor det nederste konvergensresultat følger af Lemma 13 i noterne til Sandsynlighedsteori 1.1. Benyt nu Sætning 12.3 (1) med $M_t^n = (\int_0^t \phi_s^n \, dW_s)^2 - \int_0^t (\phi_s^n)^2 ds$ og $M_t = (\int_0^t \phi_s \, dW_s)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$ til at slutte, at (12.25) er en martingal. Da der gælder $\int_0^T \phi_s^2 ds < \infty$ næsten sikkert for ethvert T, viser Lemma 12.2 at (12.25) har kontinuerte udfaldsfunktioner (næsten sikkert).

(2) Vi skal vise, at processerne på højre og venstre side af (12.26) er uskelnelige. Da de indgående processer har kontinuerte udfaldsfunktioner (næsten sikkert), er det nok at vise, at højre og venstre side er modifikationer. Lad derfor $t \geq 0$ være fast i det følgende.

Lad $(\phi_s^{i,n})_{s\geq 0} \in \mathscr{S}$ således at $(\phi_s^{i,n})_{t\geq 0} \to (\phi_s^i)_{t\geq 0}$ i H_2 for $i = 1,2$. Vi har da $(a\phi_s^{1,n} + b\phi_s^{2,n})_{s\geq 0} \to (a\phi_s^1 + b\phi_s^2)_{s\geq 0}$ i H_2 ifølge (12.22). Udnytter vi nu lineariteten af det simple integral, ses at

$$\begin{aligned} & a\int_0^t \phi_s^1 \, dW_s + b\int_0^t \phi_s^2 \, dW_s \\ =& a\lim_{n\to\infty} \int_0^t \phi_s^{1,n} \, dW_s + b\lim_{n\to\infty} \int_0^t \phi_s^{2,n} \, dW_s \\ =& \lim_{n\to\infty} \left[a\int_0^t \phi_s^{1,n} \, dW_s + b\int_0^t \phi_s^{2,n} \, dW_s \right] \\ =& \lim_{n\to\infty} \int_0^t a\phi_s^{1,n} + b\phi_s^{2,n} \, dW_s \\ =& \int_0^t a\phi_s^1 + b\phi_s^2 \, dW_s \end{aligned}$$

hvor konvergensen er i $L^2(P)$.

(3) Martingalegenskaben i (12.25) medfører

$$E\left[\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s \right)^2 \right] = E\left[\int_0^t \phi_s^2 ds \right] \tag{12.29}$$

og derfor følger (3) fra Doob's ulighed.

(4) følger direkte fra (3). □

Generelt har man ikke en 'pæn' analytisk repræsentation af integralet $\int_0^t \phi_s \, dW_s$ og det er heller ikke muligt at angive fordelingen. Vi skal nu se på nogle eksempler.

Eksempel 12.14. Lad $u < v$ og Y være kvadratisk integrabel og $\mathscr{F}_u$-målelig. Lad $\phi_t := Y\mathbf{1}_{]u,v]}(t)$. Vi har da $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$. Endvidere er

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s = Y(W_{t\wedge v} - W_{t\wedge u}) \quad \text{for ethvert } t \geq 0 \;\; n.s. \tag{12.30}$$

Sammenlign med (12.15).

For at vise dette resultat benyttes et approksimationsargument. Lad $\phi_t^n = Y_n\mathbf{1}_{]u,v]}(t)$, hvor Y_n er den begrænsede stokastiske variabel $Y_n := Y\mathbf{1}_{\{-n<Y<n\}}$. Det vil sige $Y_n \to Y$ i $L^2(P)$. Da gælder $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2 og dermed $\int_0^t \phi_s^n \, dW_s \to \int_0^t \phi_s \, dW_s$ i $L^2(P)$ ifølge Sætning 12.13 (4). Men ifølge (12.15) er

$$\int_0^t \phi_s^n \, dW_s = Y_n(W_{t\wedge v} - W_{t\wedge u}).$$

Da $Y_n \to Y$ i $L^2(P)$, ser vi at $Y_n(W_{t\wedge v} - W_{t\wedge u}) \to Y(W_{t\wedge v} - W_{t\wedge u})$ i $L^2(P)$, som er det ønskede resultat.

Eksempel 12.15. Antag at $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er en kvadratisk integrabel progressivt målelig proces der opfylder at $t \mapsto \phi_t$ er kontinuert i $L^2(P)$.[1] Denne betingelse er specielt opfyldt, hvis $(\phi_t)_{t\geq 0}$ har kontinuerte udfaldsfunktioner og $\sup_{0\leq t\leq T} |\phi_t| \in L^2(P)$ for ethvert $T > 0$.

Da gælder $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$ og i det følgende vil vi vise, at integralet $\int_0^t \phi_s \, dW_s$ kan approksimeres med en 'venstresum'.

Lad for ethvert $n = 1, 2, \ldots$, $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$ være defineret ved

$$\phi_t^n := \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{\frac{i-1}{2^n}} \mathbf{1}_{]\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]}(t)$$

Det vil sige, at $(\phi_t^n)_{t\geq 0}$ approksimerer $(\phi_t)_{t\geq 0}$ fra venstre. Integralet $\int_0^t \phi_s^n \, dW_s$ kan ifølge Eksempel 12.14 beregnes som 'venstresummen'

$$\int_0^t \phi_s^n \, dW_s = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{\frac{i-1}{2^n}} \left(W_{t\wedge\frac{i}{2^n}} - W_{t\wedge\frac{i-1}{2^n}} \right) \tag{12.31}$$

Den uendelige sum der optræder på højre side er i virkeligheden kun en endelig sum for ethvert fast t. F.eks. har vi for $t = 1$ at

$$\int_0^1 \phi_s^n \, dW_s = \sum_{i=1}^{2^n} \phi_{\frac{i-1}{2^n}} \left(W_{\frac{i}{2^n}} - W_{\frac{i-1}{2^n}} \right).$$

Der gælder endvidere $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. For ethvert $t \geq 0$ har vi dermed

$$\int_0^t \phi_s^n \, dW_s \to \int_0^t \phi_s \, dW_s \quad \text{i } L^2(P). \tag{12.32}$$

Ønsker man at beregne (simulere) $\int_0^t \phi_s \, dW_s$, så kan man altså approksimere dette integral ved venstresummen i (12.31).

[1] Det vil sige at for $t_n \to t$ gælder $E[|\phi_{t_n} - \phi_t|^2] \to 0$

Eksempel 12.16. I foregående eksempel så vi, at man undertiden kan approksimere integraler ved 'venstresummer'. Her er det imidlertid helt afgørende, at vi benytter venstre- og ikke højre- eller midtsummer. Typisk vil sidstnævnte nemlig ikke konvergere; og hvis de konvergerer, vil det som som regel ikke være mod det stokastiske integral. Lad os give et eksempel.

Lad $(\phi_t)_{t\geq 0} = (W_t)_{t\geq 0}$. Bemærk at da $(W_t)_{t\geq 0}$ er en adapteret proces med kontinuerte udfaldsfunktioner, så er den også progressivt målelig. Endvidere er $\sup_{t0\leq t\leq T}|W_t| \in L^2(P)$ for ethvert $T > 0$ ifølge Doob's ulighed.

Lad os evaluere integralet i punktet $t = 1$. Vi har da som nævnt ovenfor, at

$$\sum_{i=1}^{2^n} W_{\frac{i-1}{2^n}}\left(W_{\frac{i}{2^n}} - W_{\frac{i-1}{2^n}}\right) \to \int_0^1 W_s\, dW_s. \tag{12.33}$$

Endvidere har vi tidligere set at

$$\sum_{i=1}^{2^n}\left(W_{\frac{i}{2^n}} - W_{\frac{i-1}{2^n}}\right)^2 \to 1 \quad n.s.,$$

så heraf følger, at der om højresummen gælder

$$\sum_{i=1}^{2^n} W_{\frac{i}{2^n}}\left(W_{\frac{i}{2^n}} - W_{\frac{i-1}{2^n}}\right) \to \int_0^1 W_s\, dW_s + 1 \tag{12.34}$$

i sandsynlighed. Vi viser senere, ved hjælp af Ito's formel, at $\int_0^t W_s\, dW_s = (W_t^2 - t)/2$.

Eksempel 12.17. Som tidligere nævnt kan man typisk ikke angive fordelingen eksplicit af et stokastisk integral. Dog kan man med en deterministisk integrant vise, at integralet er normalfordelt. Helt præcist har vi følgende: Antag at $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er deterministisk, målelig og opfylder at $\int_0^T \phi_t^2 dt < \infty$ for ethvert T. Processen $(\int_0^t \phi_s\, dW_s)_{t\geq 0}$ har da uafhængige tilvækster og

$$\int_0^t \phi_u\, dW_u - \int_0^s \phi_u\, dW_u \sim N\left(0, \int_s^t \phi_u^2 du\right) \quad s < t. \tag{12.35}$$

Dette resultat kan vises i følgende skridt:

(1) Vis først det ønskede, når integranten er deterministisk og simpel.

(2) Vis dernæst ved Monoton Klasse, at resultatet gælder, når $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er deterministisk og begrænset.

(3) Vis til sidst resultatet ved at approksimere et generelt $(\phi_t)_{t\geq 0}$ med $\phi_t^n := \phi_t \mathbf{1}_{\{|\phi_t|<n\}}$.

Bemærkning 12.18. Man kan faktisk lave endnu en meget nyttig udvidelse af det stokastiske integral; mere præcist kan $\int_0^t \phi_s\, dW_s$ defineres for alle progressivt målelige processer $(\phi_t)_{t\geq 0}$ der opfylder $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$ med sandsynlighed 1 for ethvert $t > 0$. Vi skal her ikke komme nærmere ind på hvordan denne udvidelse er defineret, men lad os blot nævne et par egenskaber:

1. Integralet er lineært;
2. $(\int_0^t \phi\, dW_s)_{t\geq 0}$ er generelt kun en såkaldt lokal martingal; dog er processen en martingal, hvis

$$E\left[\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$$

for ethvert $t > 0$.
3. Processen $\left(\left(\int_0^t \phi_s\, dW_s\right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds\right)_{t\geq 0}$ er en lokal martingal;
4. hvis $(\phi_t)_{t\geq 0}$ har kontinuerte udfaldsfunktioner, kan integralet approksimeres ved venstresummer; det vil sige

$$\int_0^t \phi_s^n\, dW_s \to \int_0^t \phi_s\, dW_s \tag{12.36}$$

i sandsynlighed, hvor

$$\phi_t^n = \phi_{\frac{k-1}{2^n}} \text{ for } t \in]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}] \text{ og } k = 1, 2, \ldots$$

Endvidere er

$$\int_0^t \phi_s^n\, dW_s = \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{\frac{i-1}{2^n}} \left(W_{\frac{i}{2^n}} - W_{\frac{i-1}{2^n}}\right) + \phi_{\frac{k-1}{2^n}} \left(W_t - W_{\frac{k-1}{2^n}}\right) \tag{12.37}$$

for $t \in]\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$.

12.4 Ito's formel

En stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$ kaldes en Ito proces, hvis den kan skrives på formen

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s\, dW_s + \int_0^t a_s ds, \quad t \geq 0, \tag{12.38}$$

hvor $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$ og $(a_t)_{t\geq 0}$ er progressivt målelig og opfylder $\int_0^t |a_s(\omega)| ds < \infty$ for alle t og ω. I anvendelser vil man ofte kort skrive $(X_t)_{t\geq 0}$ på 'differentialform' som følger

$$dX_t = \phi_t\, dW_t + a_t dt \tag{12.39}$$

Vi skal i det følgende gennemgå *Ito's formel*, der er den stokastiske kalkyles svar på Analysens Fundamentalsætning. Denne formel siger, at hvis man tager en glat funktion på en Ito proces, så vil den resulterende proces stadig være en Ito proces; desuden gives en opskrivning på formen (12.38) for den resulterende proces.

Lad

$$f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$$
$$f : (x, t) \mapsto f(x, t)$$

opfylde at de partielle afledede

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}f(x,t), \quad \frac{\partial^2}{\partial^2 x}f(x,t)$$

eksisterer for alle (x,t) og er kontinuerte som funktion af (x,t). Vi siger da, at f tilhører $C^{2,1}(\mathbf{R}^2)$.

Sætning 12.19. *(Ito's formel) Lad $f \in C^{2,1}(\mathbf{R}^2)$ og $(X_t)_{t\geq 0}$ være en Ito proces givet ved* (12.38). *Antag at $(\frac{\partial}{\partial x}f(X_t,t))_{t\geq 0} \in H_2$. Da er*

$$\begin{aligned} f(X_t,t) = f(X_0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}f(X_s,s)\phi_s\,dW_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}f(X_s,s)a_s ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}f(X_s,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial^2 x}f(X_s,s)\phi_s^2 ds \quad \textit{for ethvert } t \geq 0 \ \textit{n.s.} \end{aligned}$$

Bemærkning 12.20. Husk på at pr. definition er det stokastiske integral progressivt målelig, så antagelsen $(\frac{\partial}{\partial x}f(X_t,t))_{t\geq 0} \in H_2$ siger altså, at processen opfylder integrabilitesbetingelsen i Definition 12.10. Dette er en lidt irriterende antagelse, som skyldes, at I pt kun har lært at integrere processer i H_2. Er man villig til at benytte udvidelsen af integralet, der er skitseret i Bemærkning 12.18, kan antagelsen $(\frac{\partial}{\partial x}f(X_t,t))_{t\geq 0} \in H_2$ droppes. Til gengæld vil man så generelt kun have at $(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}f(X_s,s)\phi_s\,dW_s)_{t\geq 0}$ er en såkaldt lokal martingal.

Ito's formel viser, at 'differentialet' af $f(X_t,t)$ er

$$df(X_t,t) = \frac{\partial}{\partial x}f(X_t,t)(\phi_t dW_t + a_t dt) + \frac{\partial}{\partial t}f(X_t,t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}f(X_t,t)\phi_t^2 dt,$$

og udnyttes (12.38), kan dette kort skrives

$$df(X_t,t) = \frac{\partial}{\partial x}f(X_t,t)dX_t + \frac{\partial}{\partial t}f(X_t,t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}(X_t,t)\phi_t^2 dt$$

Eksempel 12.21. Lad os se på nogle specialtilfælde af Ito's formel.

1. Antag at $X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds$. Da er, for en funktion $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ der er $C^2(\mathbf{R})$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)a_s ds = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s. \tag{12.40}$$

(Her er det kun nødvendigt at antage $f \in C^1(\mathbf{R})$). Ved sidste lighedstegn benyttede vi Eksempel 12.1. Specielt har vi

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s)ds$$

2. Antag at $X_t = W_t$ (der svarer til $\phi_t = 1$ og $a_t = 0$). For en funktion $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ der er $C^2(\mathbf{R})$, har vi da, idet $W_0 = 0$, at

$$f(W_t) = f(0) + \int_0^t f'(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds \quad \text{for alle } t \geq 0 \;\; n.s. \tag{12.41}$$

Hvis man vil være sikker på at $(f'(W_t))_{t\geq 0}$ tilhører H_2, kan man f.eks. antage at f'' er begrænset.

Lad specielt $f(x) = x^2$. Da er $f'(x) = 2x$ og $f''(x) = 2$. Dvs.

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s\,dW_s + t$$

og dermed er $\int_0^t W_s\,dW_s = (W_t^2 - t)/2$.

3. Lad $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ tilhøre $C^{2,1}(\mathbf{R}^2)$. Vi har da

$$f(W_t,t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(W_s,s)\,dW_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(W_s,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(W_s,s)ds. \tag{12.42}$$

Bevis for Ito's formel. Vi vil kun bevise (12.41) og kun i tilældet hvor $f \in C^2(\mathbf{R})$ med f' og f'' begrænsede. Beviset i det generelle tilfælde forløber på samme måde som nedenfor, men er mere pakket ind i notation.

Beviset bygger på at f kan Taylorudvikles som

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2 + R(x,y)(y-x)^2, \quad x,y \in \mathbf{R} \tag{12.43}$$

hvor $R(x,y)$ er (simultant) kontinuert i (x,y) og opfylder $R(x,x) = 0$.

Vi vil vise at processerne på højre og venstre side af (12.41) er uskelnelige, og da begge sider har kontinuerte udfaldsfunktioner næsten sikkert, er det nok at vise, at de er modifikationer.

Hold derfor $t > 0$ fast og lad os vise at (12.41) er opfyldt for dette t næsten sikkert. Betragt en inddeling $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t$ af intervallet $[0,t]$. Ved at benytte en teleskoperende sum samt at $W_0 = 0$ ser vi at

$$f(W_t) - f(0) = \sum_{j=1}^{k} \left(f(W_{t_j}) - f(W_{t_{j-1}}) \right) \tag{12.44}$$

Taylorudviklingen ovenfor viser, at der for hvert j gælder

$$\begin{aligned} f(W_{t_j}) - f(W_{t_{j-1}}) = &\; f'(W_{t_{j-1}})\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}f''(W_{t_{j-1}})\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 \\ &+ r(W_{t_{j-1}}, W_{t_j})\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 \end{aligned}$$

og dermed er

$$
\begin{aligned}
f(W_t) - f(W_0) = &\sum_{j=1}^{k} f'(W_{t_{j-1}}) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) && (12.45)\\
&+ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} f''(W_{t_{j-1}}) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 && (12.46)\\
&+ \sum_{j=1}^{k} r(W_{t_{j-1}}, W_{t_j}) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 . && (12.47)
\end{aligned}
$$

Vi lader nu finheden af inddelingen gå mod 0 og viser, at højre side af (12.45) konvergerer mod første led på højre side af (12.41) (i $L^2(P)$), at (12.46) konvergerer mod andet led på høreside af (12.41) (i sandsynlighed) samt at (12.47) konvergerer mod 0 (i sandsynlighed). Resultatet vil så være vist.

Lad os nu for nemhed skyld antage, at $t = 1$ og lad $t_j = \frac{j}{2^n}$ for $j = 1, \ldots, 2^n$. Det vil sige, at vi har $k = 2^n$ delepunkter.

Konvergens af højre side af (12.45). Ifølge Eksempel 12.15 har vi

$$
\sum_{j=1}^{2^n} f'(W_{t_{j-1}}) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right) \to \int_0^1 f'(W_s)\, dW_s
$$

for $n \to \infty$, som ønsket.

Konvergens af (12.47) *mod* 0. Bemærk at

$$
\sum_{j=1}^{2^n} r(W_{t_{j-1}}, W_{t_j}) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 \leq \sup_{j=1,\ldots,2^n} |r(W_{t_{j-1}}, W_{t_j})| \sum_{j=1}^{2^n} \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 . \qquad (12.48)
$$

Da $(x,y) \mapsto r(x,y)$ er kontinuert (og dermed uniformt kontinuert for x og y i begrænsede intervaller) med $r(x,x) = 0$, ser vi, at

$$
\sup_{j=1,\ldots,2^n} |r(W_{t_{j-1}}, W_{t_j})| \to 0 \quad \text{punktvis}
$$

for $n \to \infty$. Da yderligere

$$
\sum_{j=1}^{2^n} \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 \to t = 1
$$

i sandsynlighed ifølge Sætning 9.2, konvergerer venstre side af (12.48) mod 0 i sandsynlighed.

Konvergens af (12.46). Lad os bemærke at

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2^n} f''(W_{t_{j-1}}) \left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 = &\sum_{j=1}^{2^n} f''(W_{t_{j-1}})(t_j - t_{j-1})\\
&+ \sum_{j=1}^{2^n} f''(W_{t_{j-1}}) \left[\left(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\right)^2 - (t_j - t_{j-1})\right].
\end{aligned}
$$

Lebesgue's Sætning om Domineret Konvergens viser, at første led på højre side konvergerer punktvis (og dermed i sandsynlighed) mod $\int_0^1 f''(W_s)ds$. For at afslutte beviset mangler vi blot at vise, at andet led på højre side konvergerer mod 0 i $L^2(P)$. Men man kan overbevise sig om, at de stokastiske variable

$$f''(W_{t_{j-1}})\left[\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)^2-(t_j-t_{j-1})\right], \quad j=1,\dots,2^n,$$

har middelværdi 0, varians

$$2(t_j-t_{j-1})^2(E\left[\left(f''\left(W_{t_{j-1}}\right)\right)^2\right]$$

og er ukorrelerede. Derfor er

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{2^n} f''(W_{t_{j-1}})\left[\left(W_{t_j}-W_{t_{j-1}}\right)^2-(t_j-t_{j-1})\right]\right)^2\right]=\sum_{j=1}^{2^n} E\left[\left(f''\left(W_{t_{j-1}}\right)\right)^2\right]2(t_j-t_{j-1})^2.$$

Da $t_j-t_{j-1}=\frac{1}{2^n}$ og f'' er begrænset, følger konvergensen i $L^2(P)$.

$\square$

A En vigtig funktionalligning

Funktionalligningen

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(0) = 0,$$

hvor φ er en reel funktion på $\mathbf{R}_+$, dukker op flere gange i forbindelse med processer med uafhængige stationære tilvækster, og vi skal i dette appendiks studere den tilhørende løsningsmængde. Bemærk at betingelsen $\varphi(0) = 0$ er en nødvendighed for at opnå reelle værdier.

Lineære funktioner $x \to \lambda x$, hvor λ er en reel konstant, opfylder tydeligvis betingelserne, og det kan vises, at disse er de eneste målelige løsninger til problemet. Dette skal vi dog ikke vise her, hvor vi nøjes med flg. simplere overvejelser.

Ved gentagen brug af funktionalligningen ses, at enhver løsning φ opfylder betingelserne

$$\varphi(\tfrac{n}{m}x) = \tfrac{n}{m}\varphi(x) \qquad \text{for alle } x \geq 0 \text{ og alle } n, m \geq 1,$$

dvs. $\varphi(t) = t \cdot \varphi(1)$ for alle $t \in \mathbf{Q}_+$. Ved hjælp heraf følger nu let.

Sætning A.1. *En løsning φ til funktionalligningen er lineær, hvis φ er nedre halvkontinuert fra højre i mindst et punkt $t \geq 0$, dvs. $\liminf_n \varphi(t_n) \geq \varphi(t)$ for enhver følge $t_n \downarrow t$.*

Funktioner, der er højrekontinuert i mindst et punkt, specielt monotone funktioner, opfylder betingelsen, og løsninger af denne art er derfor lineære.

Bevis. Funktionalligningen viser, at vi kan antage, at det givne punkt t er lig 0, dvs.

$$\liminf_n \varphi(t_n) \geq 0 \text{ for enhver følge } t_n \downarrow 0.$$

Ved fornyet brug af ligningen følger dernæst, at den antagede egenskab gælder i ethvert punkt $t \geq 0$, og da $\mathbf{Q}_+$ er tæt i $\mathbf{R}_+$, betyder dette, at

$$\varphi(t) \leq \liminf_{q_n \in \mathbf{Q}_+, q_n \downarrow t} \varphi(q_n) = t \cdot \varphi(1) \text{ for alle } t \geq 0.$$

Lad nu $t \geq 0$ være vilkårligt givet, og vælg $s \geq 0$ så at $t + s \in \mathbf{Q}_+$. Ifølge det ovenstående gælder derfor

$$\varphi(t) + \varphi(s) = \varphi(t+s) = (t+s) \cdot \varphi(1)$$

og derfor

$$\varphi(t) - t \cdot \varphi(1) = s \cdot \varphi(1) - \varphi(s) \geq 0.$$

D.v.s. alt i alt $\varphi(t) = t \cdot \varphi(1)$, hvilket er det ønskede resultat. $\square$

Det overlades til læseren at eftervise, at der gælder et tilsvarende resultat, hvis $\mathbf{R}_+$ udskiftes med et interval af formen $[0, a]$.

Læseren bør også overveje, at ved transformation med logaritmefunktionen kan ovenstående benyttes til at vise, at enhver højrekontinuert ikke-negativ funktion φ defineret på $\mathbf{R}_+$, som opfylder funktionalligningen

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \varphi(1) = 1,$$

er på formen $x \to \exp(\lambda x)$ for et eller andet reelt tal λ. Dette resultat gælder ligeledes for komplekse funktioner φ, hvilket ses ved at studere $|\varphi|$ og $\arg \varphi$ hver for sig.

B Regulære betingede fordelinger

Vi betragter et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ hvorpå alle stokastiske variable i det følgende er defineret.

Lad X og Y være stokastiske variable. I det følgende skal vi undersøge hvordan man kan definere en betinget sandsynlighed af typen $P(X \in A \mid Y = y)$. Når $P(Y = y) > 0$ er der ikke så meget at spille om, for da vil vi lade

$$P(X \in A \mid Y = y) = \frac{P(\{X \in A\} \cap \{Y = y\})}{P(Y = y)} \tag{B.1}$$

Generelt er det dog nødvendigt at benytte følgende definition, der knytter sig til definitionen af en betinget sandsynlighed givet en σ-algebra.

Definition B.1. Lad X og Y være stokastiske variable der tager værdier i polske rum S_1 og S_2. Vi siger da, at $P_{X|Y}(A \mid y)$, defineret for $A \in \mathscr{B}(S_1)$ og $y \in S_2$, er er en *regulær betinget fordeling af X givet Y*, hvis følgende er opfyldt.

1) $A \mapsto P_{X|Y}(A \mid y)$ er et sandsynlighedsmål på $(S_1, \mathscr{B}(S_1))$ for ethvert $y \in S_2$.
2) $y \mapsto P_{X|Y}(A \mid y)$ er målelig mht $(\mathscr{B}(S_2), \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ for ethvert $A \in \mathscr{B}(S_1)$.
3) $P_{X|Y}(A \mid Y) = E[\mathbf{1}_{\{X \in A\}} \mid Y]$ P-n.s.

Vi viser i en opgave, at egenskaben 3) ækvivalent kan formuleres som *Loven om Total Sandsynlighed*:

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_B P_{X|Y}(A \mid y) P_Y(dy) \tag{B.2}$$

for alle $A \in \mathscr{B}(S_1)$ og $B \in \mathscr{B}(S_2)$.

Man kan vise, at der findes en og op til nulmængder kun en regulær betinget fordeling af X givet Y. Se Hoffmann bind 2 for eksistensen. Helt præcis kan entydigheden formuleres som følger: Hvis $P_{X|Y}$ og $P'_{X|Y}$ er regulære betingede fordelinger af X givet Y, så er $P_{X|Y}(\cdot \mid y) = P'_{X|Y}(\cdot \mid y)$ for P_Y-næsten alle y.

Overalt i det følgende vil vi lade $P_{X|Y}(A \mid y)$ betegne en regulær betinget fordeling af X givet Y. Når vi taler om *fordelingen af X givet $Y = y$*, så mener vi blot sandsynlighedsmålet $P_{X|Y}(\cdot \mid y)$. Denne fordeling vil også blive betegnet $X \mid Y = y$. Desuden vil vi ofte skrive $P(X \in A \mid Y = y)$ i stedet for $P_{X|Y}(A \mid y)$.

En afbildning $\mu(A, y_2)$ defineret for $y_2 \in S_2$ og $A \in \mathscr{B}(S_1)$, der opfylder 1) og 2) ovenfor (med $P_{X|Y}(\cdot \mid \cdot)$ erstattet af $\mu(\cdot, \cdot)$), kaldes i øvrigt for en *Markovkerne*.

Standardbeviset viser, at der for $f \in b\mathscr{B}(S_1)$ gælder

$$E[f(X) \mid Y] = \int_{S_1} f(x) P_{X|Y}(dx \mid Y). \tag{B.3}$$

Vi definerer derfor

$$E[f(X) \mid Y = y] := \int_{S_1} f(x) P_{X|Y}(dx \mid y) \tag{B.4}$$

og noterer, at en anvendelse af den lille transformationssætning viser, at

$$E[f(X)] = \int_{S_2} E[f(X) \mid Y = y] P_Y(dy). \tag{B.5}$$

Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel B.2. Antag at $y_0 \in S_2$ med $P(Y = y_0) > 0$. Da gælder

$$P_{X|Y}(A \mid y_0) = \frac{P(\{X \in A\} \cap \{Y = y_0\})}{P(Y = y_0)} \tag{B.6}$$

Eksempel B.3. Antag at $S_1 = S_2 = \mathbf{R}$ og at (X,Y) er er absolut kontinuert med tæthed $f_{X,Y}$. Da gælder, at givet $Y = y$ er X absolut koninuert med tæthed $x \mapsto \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$. Her er der dog det (lille) problem, at nævneren kan være nul. Lad os derfor indføre en vilkårlig tæthed g på $\mathbf{R}$ og definere

$$f_{X|Y}(x \mid y) := \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{hvis } f_Y(y) > 0 \\ g(x) & \text{hvis } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

Da gælder $P_{X|Y}(A \mid y) = \int_A f_{X|Y}(x \mid y) dx$.

Der er desuden et par vigtige regneregler for betingede sandsynligheder, som I bør kende.

Proposition B.4. *1) De stokastiske variable X og Y er uafhængige hvis og kun hvis der for P_Y-næsten alle y gælder $P(X \in A \mid Y = y) = P(X \in A)$ for alle $A \in \mathscr{B}(S_1)$.*
2) Lad $\phi : S_1 \times S_2 \mapsto S_3$ hvor S_3 er et polsk rum og ϕ er målelig. Da er

$$P(\phi(X,Y) \in A \mid Y = y) = P(\phi(X,y) \in A \mid Y = y), \quad A \in \mathscr{B}(S_3), \tag{B.7}$$

for P_Y-næsten alle y.

Egenskaben 1) siger altså, at X og Y er uafhængige hvis og kun hvis fordelingen $X \mid Y = y$ ikke afhænger af y. Bemærk også at hvis der findes et sandsynlighedsmål μ på S_1 således at der for P_Y-næsten alle y gælder $P(X \in A \mid Y = y) = \mu(A)$ for alle $A \in \mathbf{B}(S_1)$, så er X og Y uafhængige og μ er fordelingen for X. (Dette følger af (B.2).)

Endvidere 2) kan formuleres som egenskaben at

$$\phi(X,Y) \mid Y = y \sim \phi(X,y) \mid Y = y$$

for P_Y-næsten alle y. I øvrigt viser 1) og 2) sammen at hvis X og Y er uafhængige, så er

$$\phi(X,Y) \mid Y = y \ \sim \ \phi(X,y).$$

Resultatet i 2) er kendt under navnene *Nyttig Regel* og *Den Bevidstløse Statistikers Regneregel*.

Lad os se på nogle anvendelser.

Eksempel B.5. Antag at X og Y er reelle stokastiske variable så $X \mid Y = y \sim N(y,1)$. Da gælder, at $X-Y$ og Y er uafhængige samt at $X-Y \sim N(0,1)$.

Bemærk nemlig at egenskaben $X \mid Y = y \sim N(y,1)$ ifølge den Bevidstløse Statistiker medfører

$$X-Y \mid Y=y \;\sim\; X-y \mid Y=y \;\sim N(0,1).$$

Da den betingede fordeling af $X-Y$ givet $Y=y$ således ikke afhænger af y, følger fra Proposition B.4 1) at $X-Y$ og Y er uafhængige samt at $X-Y$ har den angivne fordeling.

Eksempel B.6. Lad os generalisere Eksempel B.5. Antag at $S_1 = S_2 = \mathbf{R}^n$ og at μ er et sandsynlighedsmål på $\mathbf{R}^n$. Da gælder, at $X-Y$ og Y er uafhængige hvis og kun hvis

$$P_{X|Y}(A \mid y) := \mu(A-y), \quad y \in S_2, A \in \mathscr{B}(S_1)$$

er en regulær betinget fordeling af X givet Y. I givet fald har $X-Y$ fordeling μ.

Ved hælp af regulære betingede fordelinger kan vi endvidere formulere Markovegenskaben som følger

Sætning B.7. *Lad $T = \mathbf{R}_+$ eller $T = \mathbf{Z}_+$ og S være polsk. Lad $(X_t)_{t\in T}$ være en stokastisk proces med tilstandsrum S. Følgende udsagn er da ækvivalente.*

(1) $(X_t)_{t\in T}$ er Markov.

(2) For alle $t,s \in T$ og $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq t$ gælder

$$P(X_{t+s} \in A \mid X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) = P(X_{t+s} \in A \mid X_t = x)$$

for alle $A \in \mathscr{B}(S)$ og $P_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t)}$-næsten alle $(x_1,\ldots,x_n,x)$.

Bevis. Egenskaben i (2) kan pr. definition af regulære betingede fordelinger også formuleres som

$$E[\mathbf{1}_{\{X_{t+s}\in A\}} \mid \sigma(X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t)] = E[\mathbf{1}_{\{X_{t+s}\in A\}} \mid \sigma(X_t)] \quad P-n.s.$$

og at dette er ækvivelent med (1) ses derfor af Proposition 1.10. □

Resultatet i (2) kan også formuleres som egenskaben

$$X_{t+s} \mid (X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) \;\sim\; X_{t+s} \mid X_t = x$$

Eksempel B.8. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en reel proces med uafhængige tilvækster, og lad os via den Bevidstløse Statistiker vise, at denne proces er Markov. Lad nemlig $s > 0$ og $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < t$. Da har vi

$$\begin{aligned} &X_{t+s} \mid (X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) \\ =&(X_{t+s} - X_t) + X_t \mid (X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) \\ \sim&(X_{t+s} - X_t) + x \mid (X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) \end{aligned}$$

og da $X_{t+s} - X_t$ er uafhængig af $(X_{t_1},\ldots,X_{t_n},X_t)$ ser vi at

$$X_{t+s} \mid (X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n, X_t = x) \sim x + (X_{t+s} - X_t).$$

Da fordelingen ikke afhænger af $x_1,\ldots,x_n$, følger Markov egenskaben.

C Martingaler

Martingalerne udgør en meget vigtig og velstuderet procestype. Den store interesse for disse processer skyldes, at de dukker naturligt op i utroligt mange sammenhænge, og at man for martingalerne blandt andet kan vise flotte maksimaluligheder samt interessante konvergenssætninger. Derudover er den tidligere omtalte modifikationssætning for martingaler særdeles vigtig.

I har i Sandsynlighedsteori 2 eller 1.2 allerede studeret diskret tids martingaler, og vi vil derfor her især koncentrere os om processer med kontinuert tid, dvs. $T = \mathbf{R}_+$. Alle processer omtalt i det følgende tænkes defineret på et givent sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Definition. Lad $T \subseteq \mathbf{R}$. Processen $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ kaldes en martingal, hvis $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ er et filter i $\mathscr{F}$, og $(X_t)_{t\in T}$ er en reel integrabel $\mathscr{F}_t$-adapteret proces, så at

$$E[X_s \,|\, \mathscr{F}_t] = X_t \quad P-\text{n.o.} \quad \text{for alle } 0 \le t \le s \text{ hvor } s,t \in T.$$

Hvis $=$ erstattes af $\le$ hhv. $\ge$ taler man om en super- hhv. submartingal.

Da $(\mathscr{F}_t)$ indeholder $(\mathscr{F}_t^X)$, dvs. $\mathscr{F}_t^X \subseteq \mathscr{F}_t$ for alle t, er (X_t) specielt en martingal i hht. definitionen på side 6.

I tilfældene $T = \mathbf{Z}_- = \{\dots,-2,-1,0\}$ og $T = \mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$, kalder vi også en martingal for en *baglæns martingal*; en lignende sprogbrug benyttes i sub- og supermartingaltilfældene.

Som det er bekendt fra det tids diskrete tilfælde, er $(aX_t + bY_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ en martingal for alle reelle tal a og b, hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ og $(Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ er martingaler, hvorimod det tilsvarende resultat for sub - og supermartingaler kun holder for ikke-negative a og b. Derimod er $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ en submartingal, hvis og kun hvis $(-X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ er en supermartingal. Tilsvarende viser Jensen's ulighed for betingede middelværdier, at hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ er en martingal, og $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en konveks funktion, så er $(\varphi(X_t), \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ en submartingal, hvis processen $(\varphi(X_t))$ er integrabel. Er $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ kun en submartingal, gælder resultatet stadigt, hvis det yderligere antages, at φ er ikke-aftagende. Specielt er $(|X_t|, \mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ en submartingal, hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ er en martingal og $(X_t^+, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ en submartingal for enhver submartingal $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$.

Vort første mål er at vise maksimaluligheder og konvergenssætninger for martingaler med kontinuert tid. Ideen i beviserne er at overføre de tilsvarende resultater fra diskret tid til kontinuert tid via observationen, at hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ er en martingal (sub eller super), så er

$$(Y_n, \mathscr{G}_n)_{n\ge 0}, \text{hvor } Y_n := X_{t_n},\ \mathscr{G}_n := \mathscr{F}_{t_n} \text{ og } 0 \le t_0 \le \cdots \le t_n \le \cdots,$$

en diskret tids martingal (sub eller super). Tilsvarende har vi at hvis $t_0 \ge t_1 \ge \ldots \ge t_n \ge \ldots \ge 0$ så definerer

$$(Y_n, \mathscr{G}_n)_{n\le 0}, \text{hvor } Y_n := X_{t_{-n}},\ \mathscr{G}_n := \mathscr{F}_{t_{-n}} \text{ for } n \le 0$$

en diskret tids baglæns martingal (sub eller super).

Vi skal gøre brug af følgende resultat.

Lemma C.1. *Lad $T \subseteq \mathbf{R}_+$ og antag $0 \in T$. Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ være en submartingal. Da gælder $\sup_{t\in T} E[X_t^+] < \infty$ hvis og kun hvis $\sup_{t\in T} E[|X_t|] < \infty$.*

Bevis. Bemærk at for $t \in T$ er $E[X_t^+] \leq E[|X_t|]$, hvilket giver 'hvis'-delen.
Desuden gælder

$$E[|X_t|] = 2E[X_t^+] - E[X_t] \leq 2E[X_t^+] - E[X_0]$$

hvor vi ved sidste ulighedstegn udnyttede at submartingalegenskaben sikrer $E[X_0] \leq E[X_t]$. Dette viser 'kun hvis'-delen. □

C.1 Resultater i diskret tid

De fleste af resultaterne nedenfor har I mødt tidligere.

Resultat 1. *Optional Sampling*.
Hvis $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er en martingal, så er

$$E[X_T \mid \mathscr{F}_S] = X_S \quad P\text{-n.o.}$$

for ethvert par af begrænsede $(\mathscr{F}_n)$-stoptider $0 \leq S \leq T$. Processen $(X_{T\wedge n}, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er specielt en martingal for enhver $(\mathscr{F}_n)$-stoptid T. (Der gælder et tilsvarende resultat for sub - og supermartingaler.)

Resultat 2. *Maksimaluligheder*.
Hvis $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er en submartingal, så gælder for alle $n \geq 1$ og alle $\lambda > 0$

1) $\lambda \cdot P(\min_{0\leq k\leq n} X_k \leq -\lambda) \leq -E[X_0] + E[X_n^+]$,

2) $\lambda \cdot P(\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq E[X_n, \max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda] \leq E[X_n^+]$.

specielt er $\lambda \cdot P(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq \lambda) \leq 3 \cdot \max_{0\leq k\leq n} E[|X_k|]$, og dermed

$$\lambda \cdot P(\sup_k |X_k| \geq \lambda) \leq 3 \cdot \sup_k E[|X_k|] \quad \text{for alle } \lambda > 0.$$

D.v.s. variablen $\sup_k |X_k|$ er endelig P-n.o., hvis $\sup_k E[|X_k|] < \infty$.

Resultat 3. *Opkrydsningsuligheder*.
Hvis $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er en submartingal, gælder for alle $n \geq 1$ og alle $a < b$ reelle tal

$$E[U^X(\cdot, \{0,1,\ldots,n\}; [a,b])] \leq E[(X_n - a)^+ - (X_0 - a)^+]/(b-a).$$

Ved at lade $n \to \infty$ fås specielt, at $E[U^X(\cdot, \mathbf{Z}_+; [a,b])]$ er endelig P-n.o. for alle reelle tal $a < b$, hvis $\sup_k E[|X_k|] < \infty$. (Se Lemma C.1).

Ovenfor betegner $U^X(\cdot, \{0,1,\ldots,n\}; [a,b])$ antal opkrydsninger for $(X_m)_{m=0}^n$ over $[a,b]$. Se Appendix F for den præcise definition.

En vigtig anvendelse af de to foregående resultater samt **Resultat C** i appendix F giver følgende version af martingalkonvergenssætningen.

Resultat 4. *Konvergenssætninger*.
Hvis $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er en submartingal, eksisterer $\lim_n X_n$ P-n.o. og er P-integrabel, hvis $\sup_n E[\,|X_n|\,] < \infty$. Der er derfor konvergens P-n.o. samt i L^1, hvis og kun hvis $\{X_n \,|\, n \geq 1\}$ er uniformt integrabel.

Resultat 5. *Doob's Ulighed*.
Lad $p > 1$ med tilhørende konjugerede tal q være givet. Hvis $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er en martingal eller en ikke-negativ submartingal, så eksisterer $\lim_n X_n$ P-n.o. og i L^p hvis og kun hvis $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$, og der gælder flg. uligheder

$$\|\sup_{k\leq n}|X_k|\,\|_p \leq q\cdot\|X_n\|_p \quad \text{for alle } n\geq 0 \quad \text{og} \quad \|\sup_n|X_n|\,\|_p \leq q\cdot\sup_n\|X_n\|_p.$$

Bemærk at tallene $\|X_n\|_p$ vokser med n.

Resultat 6 Antag at $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\leq 0}$ er en baglæns submartingal. Så eksisterer $\lim_{n\to-\infty} X_n$ P-n.o. og i L^1 hvis og kun hvis $\inf_n E[X_n] > -\infty$.

Resultat 6 er nyt, så lad os skitsere et bevis.

Bevis. 'Kun hvis'-delen er oplagt, så vi skal kun se på 'hvis'-delen.

Lad os først indse at $(X_n)_{n\leq 0}$ er uniformt integrabel. Vi vil dog kun vise dette i tilfældet hvor $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\leq 0}$ er en baglæns martingal. (Et bevis i det generelle tilfælde findes i Hoffmann, bind 1). I martingaltilfældet er $X_n = E[X_0 \mid \mathscr{F}_n]$ og da familien $(E[X_0 \mid \mathscr{F}_n])_{n\leq 0}$ som bekendt er uniformt integrabel, følger det ønskede.

For en unformt integrabel familie gælder, at konvergens næsten sikkert medfører konvergens i L^1. For at afslutte beviset mangler vi derfor bare at vise at $\lim_{n\to-\infty} X_n$ eksisterer P-n.o. Dette følger imidlertid ved at argumentere som i beviset for martingalkonvergenssætning. Det vil sige, at man ved hjælp af opkrydsningsuligheden i Resultat 3 viser, at med sandsynlighed 1 foretager processen $(X_n)_{n\leq 0}$ kun endeligt mange opkrydsninger over et vilkårligt interval $[a,b]$. Heraf følger som i Appendix F, at X_n konvergerer næsten sikkert. □

Lad os give en vigtig anvendelse.

Sætning C.2. *(Lévy's Sætning). Lad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt og lad $(\mathscr{F}_n)_{n\leq 0}$ være et filter. Det vil sige at for hele tal $n,m \leq 0$ med $n \leq m$ er $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_m \subseteq \mathscr{F}$. Sæt $\mathscr{F}_{-\infty} := \cap_{n\geq 0}\mathscr{F}_n$. Lad X betegne en stokastisk variabel med endelig middelværdi.*

Da gælder at $E[X \mid \mathscr{F}_n] \to E[X \mid \mathscr{F}_{-\infty}]$ P-n.o. og i $L^1(P)$ for $n \to -\infty$.

Bevis. Det er velkendt, at hvis vi definerer $X_n := E[X \mid \mathscr{F}_n]$, så er $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\leq 0}$ en baglæns martingal.

Lad

$$X_{-\infty}(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to-\infty} X_n(\omega) & \text{hvis grænseværdien eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Resultat 6 viser, at $X_n \to X_{-\infty}$ P-n.o. og i $L^1(P)$.

Vi mangler derfor blot at vise, at $X_{-\infty} = E[X \mid \mathscr{F}_{-\infty}]$. Bemærk at X_n er $\mathscr{F}_m$-målelig for ethvert $n \leq m$. Derfor er $X_{-\infty}$ pr. definition også $\mathscr{F}_m$-målelig for ethvert m. Da $\mathscr{F}_{-\infty} = \cap_{m\leq 0}\mathscr{F}_m$ følger, at $X_{-\infty}$ er $\mathscr{F}_{-\infty}$-målelig. Vi skal derfor blot, pr. definition af en betinget middelværdi, vise at

$$E[X_{-\infty}, A] = E[X, A], \quad \text{for } A \in \mathscr{F}_{-\infty}. \tag{C.1}$$

Men vi bemærker at for $n \leq 0$ er

$$\begin{aligned} E[X_{-\infty}, A] &= E[X_{-\infty} - X_n, A] + E[X_n, A] \\ &= E[X_{-\infty} - X_n, A] + E[X, A] \end{aligned}$$

hvor vi ved sidste lighedstegn benyttede at $X_n = E[X \mid \mathscr{F}_n]$. Da $X_n - X_{-\infty} \to 0$ i $L^1(P)$ har vi $E[X_{-\infty} - X_n, A] \to 0$ for $n \to -\infty$, og heraf følger (C.1).

$\square$

C.2 Resultater i kontinuert tid

Vi vil nu se på resultater i kontinuert tid. Lad hertil $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en submartingal, og lad $\triangle$ betegne en given tællelig delmængde af $\mathbf{R}_+$ indeholdt i et begrænset interval $[l, r]$. Da $\triangle$ er tællelig kan vi vælge en følge af endelige delmængder $(D_n)_{n\geq 1}$, så at

$$D_n \subseteq D_{n+1} \ \text{ for alle } n \ \text{ og } \ \bigcup_n D_n = \triangle.$$

Kontinuiteten af sandsynlighedsmålet samt monoton konvergens sætning sikrer derfor, at for alle $\lambda > 0$ er

$$P(\sup_{t\in\triangle} X_t > \lambda) = \lim_n P(\max_{t\in D_n} X_t > \lambda)$$

og tilsvarende

$$P(\inf_{t\in\triangle} X_t < -\lambda) = \lim_n P(\min_{t\in D_n} X_t < -\lambda)$$

samt for alle reelle tal $a < b$

$$E[U^X(\cdot, \triangle, [a,b])] = \lim_n E[U^X(\cdot, D_n, [a,b])].$$

Ved en passende nummerering kan vi antage $D_n = \{t_0, \ldots, t_{k_n}\}$, hvor

$$l \leq t_0 \leq \cdots \leq t_{k_n} \leq r.$$

Resultat 2 og **3** anvendt på den diskrete submartingal $(X_{t_i}, \mathscr{F}_{t_i})_{0\leq i\leq k_n}$ giver derfor, da $t \to E[X_t]$ og ligeledes $t \to E[X_t^+]$ er voksende, at

$$P(\max_{t\in D_n} X_t > \lambda) \leq \lambda^{-1} E[X_r^+]$$

og

$$P(\min_{t\in D_n} X_t < -\lambda) \leq \lambda^{-1}(E[X_r^+] - E[X_l])$$

samt

$$E[\,U^X(\,\cdot\,,D_n,[a,b])\,] \le E[\,(X_r-a)^+ - (X_l-a)^+\,]/(b-a).$$

Indsættes dette i det ovenstående, har vi hermed vist følgende sætning.

Sætning C.3. *Lad $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ betegne en submartingal, og lad $\triangle$ betegne en tællelig delmængde af $\mathbf{R}_+$ indeholdt i et begrænset interval $[l,r]$. For ethvert $\lambda>0$ og ethvert par af reelle tal $a<b$ gælder da*

$$P(\sup_{t\in\triangle} X_t \ge \lambda) \le \lambda^{-1}E[X_r^+],$$

$$P(\inf_{t\in\triangle} X_t \le -\lambda) \le \lambda^{-1}(E[X_r^+]-E[X_l])$$

og derfor ved addition $P(\sup_{t\in\triangle}|X_t|\ge\lambda) \le 3/\lambda\cdot\sup_{t\in[l,r]}E[\,|X_t|\,]$, samt

$$E[\,U^X(\,\cdot\,,\triangle,[a,b])\,] \le E[\,(X_r-a)^+ - (X_l-a)^+\,]/(b-a).$$

Hvis $(X_t)_{t\ge 0}$ har lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner gælder tilsvarende uligheder for $\triangle$ erstattet af hele intervallet $[l,r]$.

Den sidste påstand følger umiddelbart af højrekontinuiteten ved at bruge ulighederne svarende til den tællelige mængde $\triangle = \{l,r\}\cup(\mathbf{Q}_+\cap[l,r])$.

Vi vil dernæst studere konvergensresultater. Disse deler sig naturligt i to kategorier omhandlende dels konvergens P-n.o. og dels konvergens i L^p $(p\ge 1)$. Den sidste type er den simpleste, thi da konvergens i L^p er metrisk, gælder for enhver reel proces $(X_t)_{t\ge 0}$ og ethvert $p\ge 1$, følgende betingelse for eksistens af grænseværdi

$\lim_{t\to\infty}X_t$ eksisterer i L^p, hvis og kun hvis $\lim_{n\to\infty}X_{t_n}$ eksisterer i L^p for enhver følge af voksende tidspunkter t_n, som går mod ∞.

Dvs. L^p-konvergens for $t\to\infty$ for en proces med kontinuert tid er et spørgsmål om L^p-konvergens af følger. Vi har derfor flg. direkte generalisation af ovenstående resultat omhandlende diskret tid.

Sætning C.4. *Hvis $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ er en submartingal, så eksisterer $\lim_{t\to\infty}X_t$ i L^1, hvis og kun hvis $\{X_t\,|\,t\ge 0\}$ er uniformt integrabel. Hvis $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ er en martingal eller en ikke-negativ submartingal, så eksisterer for ethvert $p>1$ $\lim_{t\to\infty}X_t$ i L^p, hvis og kun hvis $\sup_t\|X_t\|_p<\infty$.*

Lad $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ være en submartingal. Husk på at da er $(X_t^+,\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ ligeledes en submartingal. Da der dermed gælder, at $t\mapsto E[X_t^+]$ er voksende, giver Lemma C.1, at $t\mapsto E[|X_t|]$ er begrænset på endelige intervaller. Heraf følger fra **Resultat 6**, at følgende gælder.

Lemma C.5. *For en submartingal $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ er $t\mapsto X_t$ højrekontinuert i sandsynlighed hvis og kun hvis $t\mapsto X_t$ er højrekontinuert i L^1.*

Bevis. Da begge konvergensformer er metriske, er det nok at se på følger. Men for sådanne er resultatet en umiddelbar konsekvens af teorien om baglæns submartingaler, se **Resultat 6** side 80. □

Vi kan få et resultat vedrørende konvergens P-n.o. ved at benytte opkrydsningsulighederne samt **Resultat C** i Appendiks F. Helt præcist gælder følgende.

Sætning C.6. *Lad* $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *betegne en submartingal hvis udfaldsfunktioner alle er højrekontinuerte. Da eksisterer* $\lim_{t\to\infty} X_t$ $P-$n.o.*, hvis* $\sup_t E[\,|X_t|\,] < \infty$. *I givet fald er* $\lim_{t\to\infty} X_t \in L^1(P)$.

Hvis mængden $\{X_t \,|\, t \geq 0\}$ *er uniformt integrabel, er der også* L^1*-konvergens.*

Bevis. Ifølge Sætning C.3 betyder antagelserne, at hændelserne

$$\{\sup_{s\in\mathbf{Q}_+} |X_s| < \infty\} \text{ og } \bigcap_{a<b,a,b\in\mathbf{Q}} \{U^X(\,\cdot\,, \mathbf{Q}_+, [a,b]) < \infty\}$$

begge har sandsynlighed 1. Dvs. for n.a. ω opfylder $t \mapsto X_t(\omega)$ betingelsen i **Resultat C** i Appendiks F. Dette giver eksistensen af en grænseværdien P-n.o., og integrabiliteten af $\lim_t X_t$ er derefter en umiddelbar konsekvens af Fatou's lemma. Påstanden angående konvergens i L^1 følger ved standard argumenter, thi som allerede nævnt, er det nok at se på følger, og her er det velkendt, at uniform integrabilitet og konvergens P-n.o. sikrer konvergens i L^1. □

Til slut formuleres Doob's ulighed for processer med kontinuert tid.

Sætning C.7. *Doob's Ulighed.*
Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *betegne en martingal eller en ikke-negativ submartingal med lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner. Lad* $p > 1$ *samt det tilhørende konjugerede tal* q *være givet. Da gælder flg. uligheder*

$$\|\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|\,\|_p \leq q \cdot \|X_t\|_p \text{ for alle } t \geq 0 \text{ og } \|\sup_{t\geq 0} |X_t|\,\|_p \leq q \cdot \sup_{t\geq 0} \|X_t\|_p.$$

Bevis. Resultatet er en konsekvens af højrekontinuiteten og **Resultat 5** anvendt på processerne $(X_{n/2^k}, \mathscr{F}_{n/2^k})_{n\geq 0}$ svarende til ethvert $k \geq 1$. Thi for ethvert dyadisk rationalt tal t er

$$\sup_{0\leq s\leq t} |X_s| = \sup_k \sup_{n:\, n/2^k\leq t} |X_{n/2^k}| \text{ og } \sup_{t\geq 0} |X_t| = \sup_k \sup_n |X_{n/2^k}|.$$

□

D Martingalmodifikationssætningen

Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en submartingal. Lige før Lemma C.5 argumenterede vi for, at $t \mapsto E[\,|X_t|\,]$ er begrænset på begrænsede intervaller.

Maksimal - og opkrydsningsulighederne (Sætning C.3) viser, at hændelsen

$$\Omega' = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\sup_{s\in\mathbf{Q}\cap[0,n]}|X_s| < \infty\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{a<b,a,b\in\mathbf{Q}}\{U^X(\,\cdot\,,\mathbf{Q}\cap[0,n],[a,b]) < \infty\}$$

har sandsynlighed 1. Ifølge appendiks F, **Resultat B**, definerer fastsættelsen

$$X_t^h(\omega) := \lim_{s\downarrow\downarrow t,\, s\in\mathbf{Q}} X_t(\omega)\cdot \mathbf{1}_{\Omega'}(\omega) \quad t\geq 0,\, \omega\in\Omega$$

derfor en reel proces $(X_t^h)_{t\geq 0}$ med cadlag, og dermed lokalt begrænsede, udfaldsfunktioner. For ethvert $t \geq 0$ og enhver følge $(t_n) \subseteq \mathbf{Q}$, så at $t_n \downarrow\downarrow t$ gælder derfor

$$X_t^h = \lim_n X_{t_n} \quad P\text{-n.o.},$$

thi pr. definition er $X_t^h(\omega) = \lim_n X_{t_n}(\omega)\cdot\mathbf{1}_{\Omega'}(\omega)$ for alle ω. Heraf uddrages umiddelbart flg. resultat.

Martingalmodifikationssætningen.
Enhver submartingal, der er højrekontinuert i sandsynlighed, har en cadlag modifikation.

Vi vil nu se nærmere på processen (X_t^h).
Da Ω' er en målelig nulmængde er $X_t\cdot\mathbf{1}_{\Omega'} \in \overline{\mathscr{F}}_t$ for alle $t\geq 0$. Ved grænseovergang følger derfor, at

$$(X_t^h) \text{ er } (\overline{\mathscr{F}}_{t+})\text{-adapteret.}$$

Endvidere er (X_t^h) en integrabel proces, thi ifølge Fatou's lemma gælder for ethvert $t\geq 0$ og enhver følge $(t_n)\subseteq\mathbf{Q}$, $t_n\downarrow\downarrow t$, at

$$E[\,|X_t^h|\,] \leq \liminf_n E[\,|X_{t_n}|\,] < \infty$$

Udnyttes teorien om baglæns submartingaler (se side 80) fås tillige, at $X_t^h = \lim_n X_{t_n}$ i L^1. Dette giver yderligere, at $t\mapsto E[X_t^h]$ er højrekontinuert, idet

$$E[X_t^h] = \lim_n E[X_{t_n}] = \lim_{s\downarrow t} E[X_s] = m_X(t+).$$

Men betinget middelværdidannelse er som bekendt en kontraktion L^1, og for alle $t\geq 0$ og enhver følge $(t_n)\subseteq\mathbf{Q}$, $t_n\downarrow\downarrow t$ gælder derfor

$$E[X_t^h\,|\,\mathscr{F}_t] = \lim_n E[X_{t_n}\,|\,\mathscr{F}_t] \quad \text{i } L^1,$$

hvilket ved overgang til en delfølge (n_k), hvor der er konvergens P-n.o., betyder, at

$$E[X_t^h \,|\, \mathscr{F}_t] = \lim_k E[X_{t_{n_k}} \,|\, \mathscr{F}_t] \geq X_t \quad P\text{-n.o.}$$

Ved successiv betingning udvider dette for alle $0 \leq s < t$ til uligheden

$$E[X_t^h \,|\, \mathscr{F}_s] \geq X_s \quad P\text{-n.o.}$$

Hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ er en martingal, kan $\geq$ overalt erstattes med $=$.
Vi har derfor i det væsentlige vist flg. sætning.

Sætning D.1. *Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en submartingal. Den reelle proces (X_t^h) har da flg. egenskaber*

1) Udfaldsfunktionerne er cadlag, specielt lokalt begrænsede.

2) (X_t^h) er en integrabel $(\overline{\mathscr{F}}_{t+})$-adapteret proces, og m_{X^h} er højrekontinuert.

3) $(X_t^h, \overline{\mathscr{F}}_{t+})_{t\geq 0}$ er en submartingal og

$$E[X_t^h \,|\, \mathscr{F}_t] \geq X_t \ P\text{-n.o. for } t \geq 0.$$

Punkt 3 gælder med $=$ i stedet for $\geq$, hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er en martingal.

Bevis. Det eneste vi mangler at vise, er submartingalegenskaben i punkt 3. Lad derfor $0 \leq s < t$ være givet og lad $(s_n) \subseteq \mathbf{Q}$ betegne en følge af rationale tal så at $s < s_n < t$ for alle n og $s_n \downarrow s$. Ifølge det ovenstående har vi

$$E[X_t^h \,|\, \mathscr{F}_{s_n}] \geq X_{s_n} \ \ P\text{-n.o. for alle } n \geq 1$$

og derfor også

$$E[X_t^h \,|\, \overline{\mathscr{F}}_{s_n}] \geq X_{s_n} \ \ P\text{-n.o.}$$

for alle n, da

$$E[X_t^h \,|\, \mathscr{F}_{s_n}] = E[X_t^h \,|\, \overline{\mathscr{F}}_{s_n}] \ \ P\text{-n.o.}$$

pr. definition af komplettering. Påstanden følger derfor, da $X_{s_n} \to X_s^h$ P-n.o. og $\overline{\mathscr{F}}_{s+} = \bigcap_n \overline{\mathscr{F}}_{s_n}$ og dermed (ifølge Lévy's Sætning C.2)

$$\lim_n E[X_t^h \,|\, \overline{\mathscr{F}}_{s_n}] = E[X_t^h \,|\, \overline{\mathscr{F}}_{s+}] \ \text{ i } L^1.$$

□

Korollar D.2. *Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en submartingal. Processerne $(X_t)_{t\geq 0}$ og $(X_t^h)_{t\geq 0}$ er da modifikationer, hvis $\overline{\mathscr{F}}_{t+} = \mathscr{F}_t$ for alle $t \geq 0$, og middelværdifunktionen $t \to E[X_t]$ er højrekontinuert. Dette sidste gælder specielt, hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er en martingal.*

Bevis. Antagelsen om filtret og uligheden i punkt 3 viser, at for ethvert t er

$$X_t^h \geq X_t \quad P\text{-n.o.},$$

hvoraf påstanden følger ved at tage middelværdi på begge sider og udnytte, at

$$E[X_t^h] = \lim_{s \downarrow t} E[X_s] = m_X(t+) = m_X(t) = E[X_t].$$

□

E Optional sampling i kontinuert tid

I dette afsnit generaliseres **Resultat 1** side 79 til processer med kontinuert tid, idet vi viser flg. pendant til **Resultat 1**.

Sætning E.1. *Optional Stopping*
Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en højrekontinuert submartingal, og lad $0 \leq S \leq T$ betegne begrænsede udvidede $(\mathscr{F}_t)$-stoptider. Da er X_T og X_S integrable og

$$E[X_T \,|\, \mathscr{F}_{S+}] \geq X_S \quad P\text{-n.o..}$$

Hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er en martingal, kan $\geq$ erstattes af $=$.

Inden vi beviser sætningen uddrages flg. korollar. Vi formulerer det kun i submartingal tilfældet, men det gælder også med de naturlige præciseringer i martingal tilfældet.

Korollar E.2. *$E[X_T] \geq E[X_0]$ for enhver begrænset udvidet stoptid T. $(X_{T\wedge t}, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er en højrekontinuert submartingal for enhver udvidet stoptid T.*

Bevis for korollaret. Da første del af korollaret er en umiddelbar konsekvens af sætningen, koncentrerer vi os udelukkende om at vise anden del. Lad T betegne en given udvidet stoptid. For ethvert t er $T \wedge t$ en begrænset udvidet stoptid, og den er $\mathscr{F}_t$-målelig. Sætningen sikrer derfor, at $(X_{T\wedge t})$ er en integrabel proces, og ifølge højrekontinuiteten og den deraf følgende progressive målelighed er $(X_{T\wedge t})$ også $(\mathscr{F}_t)$-adapteret.
For givne $0 \leq s < t$ følger submartingalegenskaben nu af sætningen, thi da $\{T < s\} \in \mathscr{F}_s$, er

$$\begin{aligned}
E[X_{T\wedge t} \,|\, \mathscr{F}_s] &= E[X_{T\wedge t} \cdot (\mathbf{1}_{\{T<s\}} + \mathbf{1}_{\{T\geq s\}}) \,|\, \mathscr{F}_s] \\
&= E[X_{T\wedge s} \cdot \mathbf{1}_{\{T<s\}} + X_{T\wedge t\vee s} \cdot \mathbf{1}_{\{T\geq s\}} \,|\, \mathscr{F}_s] \\
&= X_{T\wedge s} \cdot \mathbf{1}_{\{T<s\}} + E[X_{T\wedge t\vee s} \,|\, \mathscr{F}_s] \cdot \mathbf{1}_{\{T\geq s\}} \\
&\geq X_{T\wedge s} \cdot \mathbf{1}_{\{T<s\}} + X_s \cdot \mathbf{1}_{\{T\geq s\}} = X_{T\wedge s} \quad P\text{−n.o.}
\end{aligned}$$

□

Bevis for Sætningen. Lad (S_n) og (T_n) betegne de diskrete approksimationer til hhv. S og T. Betragt for givent n den tidsdiskrete proces

$$(X_{k/2^{n+1}}, \mathscr{F}_{k/2^{n+1}}).$$

Ifølge egenskaber ved den diskrete approksimation er S_n, S_{n+1}, T_n og T_{n+1} begrænsede stoptider mht. $(\mathscr{F}_{k/2^{n+1}})_{k\geq 0}$, dvs.

$$\{T = k/2^{n+1}\} \in \mathscr{F}_{k/2^{n+1}} \quad \text{for alle } k, n,$$

hvor T er enten S_n, S_{n+1}, T_n eller T_{n+1}, og da

$$0 \leq S_{n+1} \leq S_n \leq T_n \quad \text{og} \quad T_{n+1} \leq T_n,$$

følger af **Resultat 1** side 79, at variablene $X_{S_{n+1}}, X_{S_n}, X_{T_n}$ og $X_{T_{n+1}}$ alle er integrable med middelværdier, der er større end $E[X_0]$, og endvidere holder ulighederne

$$E[X_{T_n} \,|\, \mathscr{F}_{T_{n+1}}] \geq X_{T_{n+1}}, \;\; E[X_{S_n} \,|\, \mathscr{F}_{S_{n+1}}] \geq X_{S_{n+1}} \text{ og } E[X_{T_n} \,|\, \mathscr{F}_{S_n}] \geq X_{S_n} \quad P-\text{n.o.} \quad \text{(E.1)}$$

Lad $(Y_n, \mathscr{G}_n)_{n\leq 0}$ og $(Z_n, \mathscr{H}_n)_{n\leq 0}$ være defineret ved

$$Y_{-n} := X_{T_n}, \; Z_{-n} := X_{S_n}, \; \mathscr{H}_{-n} := \mathscr{F}_{T_n} \; \mathscr{H}_{-n} := \mathscr{F}_{S_n} \quad n \geq 0$$

Ligning (E.1) viser da, at $(Y_n, \mathscr{G}_n)_{n\leq 0}$ og $(Z_n, \mathscr{H}_n)_{n\geq 0}$ er baglæns submartingaler. Højrekontinuiteten af udfaldsfunktionerne for $(X_t)_{t\geq 0}$ viser, at $Y_n \to X_T$ og $Z_n \to Y_S$ for $n \to -\infty$ punktvis. Men konvergenssætningen for baglæns submartingaler side 80 viser så, at

$$X_{T_n} \to X_T \text{ og } X_{S_n} \to X_S \text{ i } L^1,$$

hvilket specielt viser, at X_T og X_S er integrable. Successiv betingning viser, at

$$E[X_{T_n} \,|\, \mathscr{F}_{S_k}] \geq X_{S_k} \;\; P\text{-n.o. for alle } k \geq n.$$

Da $\bigcap_k \mathscr{F}_{S_k} = \mathscr{F}_{S+}$ følger af Lévy's Sætning C.2, at

$$E[X_{T_n} \,|\, \mathscr{F}_{S+}] \geq X_S \;\; P\text{-n.o.},$$

hvoraf den ønskede ulighed følger ved at lade n gå mod uendelig og udnytte, at betinget middelværdidannelse er en kontraktion i L^1. □

Til slut vil vi undersøge, hvad der gælder for generelle stoptider. Lad fortsat $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en højrekontinuert submartingal. Ifølge Sætning E.1 er

$$(X_{T\wedge n}, \mathscr{F}_{(T\wedge n)+})_{n\geq 0} \;\text{ og }\; (X^+_{T\wedge n}, \mathscr{F}_{(T\wedge n)+})_{n\geq 0}$$

submartingaler for enhver udvidet $(\mathscr{F}_t)$-stoptid T. Dette betyder, at der for ethvert n gælder et sæt af uligheder, og vi vil nu lade n gå mod uendelig og se, hvad vi får. Som det er bekendt fra den tilsvarende teori i diskret tid, er flg. begreb vigtigt i denne sammenhæng.

Definition E.3. En udvidet $(\mathscr{F}_t)$-stoptid T siges at være optional for $(X_t)_{t\geq 0}$, hvis $\{X_{T\wedge n} \,|\, n \geq 0\}$ er uniformt integrabel.

Den tids diskrete konvergenssætning for submartingaler sikrer, at hvis T er optional for $(X_t)_{t\geq 0}$, så eksisterer $\lim_n X_{T\wedge n}$ P-n.o. og i L^1. Med den indførte definition af X_T betyder dette, at X_T er integrabel og $X_{T\wedge n} \to X_T$ i L^1.

Lad fortsat T være optional for $(X_t)_{t\geq 0}$, og betragt en vilkårlig udvidet $(\mathscr{F}_t)$-stoptid $S \leq T$. Ved fornyet brug af Sætning E.1 fås for alle n, at

$$0 \leq X^+_{S\wedge n} \leq E[X^+_{T\wedge n} \,|\, \mathscr{F}_{(S\wedge n)+}] \;\; P\text{-n.o.}$$

D.v.s. $(X_{S\wedge n}, \mathscr{F}_{(S\wedge n)+})_{n\geq 0}$ er en L^1-begrænset submartingal, og $\lim_n X_{S\wedge n}$ eksisterer derfor P-n.o. som en integrabel variabel. Specielt er X_S integrabel. Men da vi tillige har uligheden

$$E[X_{T\wedge k} \,|\, \mathscr{F}_{(S\wedge n)+}] \geq X_{S\wedge n} \;\; P\text{-n.o.}$$

for alle $k \geq n$ sluttes ved for ethvert n først at lade $k \to \infty$ og udnytte, at $X_{T\wedge k} \to X_T$ i L^1, at

$$E[X_T \,|\, \mathscr{F}_{(S\wedge n)+}] \geq X_{S\wedge n} \;\; P\text{-n.o.}$$

for alle n, hvilket ved grænseovergangen $n \to \infty$ giver

$$E[X_T \,|\, \mathscr{F}_{S+}] \geq X_S \;\; P\text{-n.o.}$$

da $\sigma(\bigcup_n \mathscr{F}_{(S\wedge n)+}) = \mathscr{F}_{S+}$. $\geq$ kan erstattes af $=$, hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er en martingal. Alt i alt har vi vist.

Sætning E.4. *Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en højrekontinuert submartingal og lad T betegne en udvidet $(\mathscr{F}_t)$-stoptid, som er optional for $(X_t)_{t\geq 0}$. Da er X_S integrabel for enhver udvidet $(\mathscr{F}_t)$-stoptid S, hvor $S \leq T$, og*

$$E[X_T \,|\, \mathscr{F}_{S+}] \geq X_S \;\; P\text{-n.o.}$$

Hvis $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er en martingal, kan $\geq$ erstattes af $=$, og enhver udvidet $(\mathscr{F}_t)$-stoptid $S \leq T$, er ligeledes optional for $(X_t)_{t\geq 0}$.

F Opkrydsninger

For fuldstændighedens skyld præciseres den nødvendige notation og teori angående opkrydsninger. Beviserne for de formulerede påstande overlades til læseren.

Lad $(x_i)_{i\geq 0}$ betegne en reel talfølge og $a < b$ reelle tal. For ethvert $n \geq 1$ betegnes med

$$U((x_i)_{i\geq 0}, \{0,\dots,n\}, [a,b])$$

antallet af opkrydsninger over intervallet $[a,b]$ af den endelige følge $x_0,\dots,x_n$. Helt præcist kan dette antal defineres som følger.

Lad $v_0 = 0$ og for $l \geq 1$ lad

$$v_{2l-1} := \inf\{i \geq v_{2(l-1)} \,|\, x_i < a\} \;\text{ og }\; v_{2l} := \inf\{i \geq v_{2l-1} \,|\, x_i > b\}$$

hvor $\inf(\emptyset) = \infty$. Det vil sige at

- v_1 er det første i hvor $x_i < a$ (og $v_1 = +\infty$ hvis der ikke findes et sådant i);
- v_2 er det første i efter v_1 hvor $x_i > b$ (og $v_1 = +\infty$ hvis der ikke findes et sådant i);
- v_3 er det første i efter v_2 hvor $x_i < a$ (og $v_1 = +\infty$ hvis der ikke findes et sådant i);

og så videre. Da defineres

$$U((x_i)_{i\geq 0}, \{0,\dots,n\}, [a,b]) := k$$

hvor $k \in \{0,1\dots,n\}$ er entydigt bestemt ved $v_{2k} \leq n$ og $v_{2(k+1)} > n$.

Det vil sige at $U((x_i)_{i\geq 0}, \{0,\dots,n\}, [a,b])$ angiver antallet af gange $x_0,\dots,x_n$ bevæger sig fra et niveau under a til et niveau over b.

Lad $U((x_i)_{i\geq 0}, [a,b]) := \lim_{n\to\infty} U((x_i)_{i\geq 0}, \{0,\dots,n\}, [a,b])$ betegne antallet af gange $x_0, x_1, \dots$ bevæger sig fra et niveau under a til et niveau over b.

Der gælder nu flg. resultat.

Resultat A Lad $(x_i)_{i\geq 0}$ betegne en reel talfølge, så at $U((x_i)_{i\geq 0}, [a,b]) < \infty$ for ethvert par af rationale tal $a < b$. Da er et af flg. tre punkter opfyldte.

$$1)\; x_n \to \infty,\;\; 2)\; x_n \to -\infty,\;\; 3)\; \exists x_\infty \in \mathbf{R} : x_n \to x_\infty.$$

Specielt ses, at hvis følgen $(x_i)_{i\geq 0}$ er begrænset, er den konvergent med en endelig grænseværdi.

Lad nu f betegne en reel funktion defineret på $\mathbf{R}_+$. For ethvert par af reelle tal $a < b$ og enhver endelig delmængde $D = \{t_1,\dots,t_n\} \subset \mathbf{R}_+$, hvor $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ defineres

$$U(f,D,[a,b]) := U((a_i)_{i\geq 0}, [a,b]) \;\text{ hvor } a_i = f(t_{i\wedge n})\; i \geq 0.$$

Dette udvides til vilkårlige delmængder H af $\mathbf{R}_+$ ved fastsættelsen

$$U(f,H,[a,b]) := \sup_{D\subseteq H,\, D \text{endelig}} U(f,D,[a,b]).$$

Bemærk at $U(f,H,[a,b]) = \sup_n U(f,H_n,[a,b])$ hvis $H_n \uparrow H$.

Her får vi brug for flg. to resultater.

Resultat B Lad $f : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ være givet. Hvis for alle $n \geq 1$ og alle par af rationale tal $a < b$

$$U(f,[0,n]\cap\mathbf{Q},[a,b]) + \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbf{Q}} |f(t)| < \infty,$$

så er der ved fastsættelsen

$$t \mapsto f^h(t) := \lim_{s\downarrow\downarrow t,\, s\in\mathbf{Q}} f(s) \quad t \geq 0$$

defineret en cadlag funktion på $\mathbf{R}_+$ med reelle værdier.

Resultat C Lad $f : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ højrekontinuert være givet. Da er

$$U(f,[0,\infty),[a,b]) = U(f,\mathbf{Q}_+,[a,b]) \text{ for alle reelle tal } a < b,$$

og $\lim_{t\to\infty} f(t)$ eksisterer i $\mathbf{R}$, hvis

$$U(f,\mathbf{Q}_+,[a,b]) + \sup_{t\in\mathbf{Q}_+} |f(t)| < \infty \quad \text{for alle rationale tal } a < b.$$

Notation i forbindelse med processer.
Hvis $(X_n)_{n\geq 0}$ er en reel diskret tids proces defineres for alle $\omega \in \Omega$ og alle reelle tal $a < b$

$$U^X(\,\cdot\,,[a,b])(\omega) := U((X_n(\omega))_{n\geq 0},[a,b]).$$

Det ses let, at dette definerer $U^X(\,\cdot\,,[a,b])$ som en målelig variabel.
Hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er en reel kontinuert tids proces defineres for alle $\omega \in \Omega$, alle reelle tal $a < b$ samt alle delmængder H af $\mathbf{R}_+$

$$U^X(\,\cdot\,,H,[a,b])(\omega) := U((t \to X_t(\omega)),H,[a,b]).$$

Hvis H er endelig eller tællelig, er $U^X(\,\cdot\,,H,[a,b])$ målelig, hvorimod dette for vilkårlige H kræver regularitet f.eks. højrekontinuitet af udfaldsfunktionerne, thi i givet fald er

$$U^X(\,\cdot\,,H,[a,b]) = U^X(\,\cdot\,,H\cap\mathbf{Q},[a,b]).$$

hvis H er et interval med rationale endepunkter.

G Monoton Klasse Lemma

I det følgende betegner E en ikke-tom mængde.

Lad $\mathscr{R}$ betegne en multiplikativ mængde af begrænsede funktioner fra E ind i $\mathbf{R}$. Multiplikativ betyder, at $f,g \in \mathscr{R}$ medfører $f \cdot g \in \mathscr{R}$. Lad $\mathscr{F} := \sigma(\mathscr{R})$ være σ-algebraen frembragt af $\mathscr{R}$. Det vil sige $\mathscr{R}$ er den mindste σ-algebra på E, der gør alle $f \in \mathscr{R}$ målelige.

Lad os nu forestille os, at $\mathscr{H}$ er en mængde af begrænsede funktioner fra E ind i $\mathbf{R}$. Vi siger, at $\mathscr{H}$ er et MVR, hvis

(1) $\mathscr{H}$ er et vektorrum.

(2) Den kostante funktion 1 tilhører $\mathscr{H}$.

(3) Mængden $\mathscr{H}$ er lukket under monoton begrænset konvergens. Hermed menes følgende:

Hvis

(i) $f_n : E \mapsto \mathbf{R}$ er begrænset og tilhører $\mathscr{H}$ for ethvert n,

(ii) der gælder $0 \leq f_1(e) \leq f_2(e) \leq \ldots$,

(iii) der findes en konstant $C < \infty$ så $f_n(e) \leq C$ for ethvert n og ethvert e,

så tilhører $f := \lim f_n$ ligeledes $\mathscr{H}$.

Sætning G.1 (Det Monotone Klasse Lemma)**.** *Lad $\mathscr{R}$ og $\mathscr{F}$ være som ovenfor og antag at $\mathscr{H}$ er et MVR.*

Hvis $\mathscr{R}$ er en delmængde af $\mathscr{H}$, vil enhver $\mathscr{F}$-målelig begrænset funktion $f : E \mapsto \mathbf{R}$ tilhøre $\mathscr{H}$.

Bemærkning G.2. Vi skal ofte anvende det Monotone Klasse Lemma på følgende måde:

Lad $\mathscr{F}$ være en σ-algebra på E. Vi ønsker da at vise, at enhver $\mathscr{F}$-målelig begrænset funktion fra E ind i $\mathscr{R}$ har en attraktiv egenskab, p. Hertil benyttes følgende skridt.

(a) Vi finder først en 'lille' klasse $\mathscr{R}$ af begrænsede funktioner der opfylder at

- Enhver funktion i $\mathscr{R}$ har egenskaben p;
- $\mathscr{R}$ er en multiplikativ mængde;
- $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{F}$.

(b) Vi lader dernæst $\mathscr{H}$ betegne mængde af $\mathscr{F}$-målelige begrænsede funktioner $f : E \mapsto \mathbf{R}$, der har egenskaben p og efterviser at $\mathscr{H}$ er et MVR. (Som regel er dette uproblematisk).

(c) Monoton Klasse siger da, at enhver $\mathscr{F}$-målelig begrænset funktion fra E ind i $\mathscr{R}$ har den ønskede egenskab p.

Standardbeviset, som I tidligere har leget med, svarer til specialtilfældet hvor $\mathscr{R} = \{\mathbf{1}_A \mid A \in \mathscr{F}\}$, men vi skal også betragte andre valg af $\mathscr{R}$.

Lad os nu give en lille anvendelse at det Monotone Klasse Lemma.

Eksempel G.3. Antag at μ, ν er to sandsynlighedsmål på $[0,1]$ som opfylder

$$\int_0^1 f\,d\mu = \int_0^1 f\,d\nu \tag{G.1}$$

for enhver kontinuert funktion $f : [0,1] \mapsto \mathbf{R}$. Da gælder $\mu = \nu$; det vil sige

$$\mu(A) = \nu(A) \quad \text{for ethvert } A \in \mathscr{B}([0,1]). \tag{G.2}$$

Vi vil vise mere generelt, at (G.1) er opfyldt for en vilkårlig målelig og begrænset funktion $f\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. Det vil sige at den attraktive egenskab p altså er, at (G.1) er opfyldt. Specialiserer vi til $f = \mathbf{1}_A$ for $A \in \mathscr{B}([0,1])$ følger (G.2).

(a) Lad $\mathscr{R} = \{f \mid f : [0,1] \mapsto \mathbf{R} \text{ er kontinuert}\}$. Fra et tidligere kursus ved I, at

$$\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{B}([0,1]). \tag{G.3}$$

Desuden er $\mathscr{R}$ multiplikativ. Pr. antagelse har vi (G.1) for $f \in \mathscr{R}$.

(b) Lad $\mathscr{H}$ være mængde af begrænsede målelige funktioner $f\colon [0,1] \mapsto \mathbf{R}$, der opfylder (G.1). Lineariteten af integralet viser, at (1) i definitionen af et MVR er opfyldt, og da

$$\int 1_{[0,1]} d\mu = \mu([0,1]) = 1 = \nu([0,1]) = \int 1_{[0,1]} d\nu$$

ser vi, at (2) ligeledes er opfyldt. Antag til sidst at f_n og f er som angivet under (i)–(iii). Da $f_n \uparrow f$ og $\int_0^1 f_n d\mu = \int_0^1 f_n d\nu$, følger af Monoton Konvergens på begge sider at $\int_0^1 f\,d\mu = \int_0^1 f\,d\nu$, og dermed ses, at f ligeledes tilhører $\mathscr{H}$. Det vil sige (3) er også opfyldt.

(c) Monoton Klasse viser nu, at enhver målelig begrænset funktion $f\colon [0,1] \mapsto \mathbf{R}$ har egenskaben p; det vil sige opfylder (G.1), som ønsket.

Da enhver kontinuert funktion på intervallet $[0,1]$ kan approksimeres med polynomier, får vi følgende resultat som korollar.

Antag at μ, ν er to sandsynlighedsmål på $[0,1]$ som opfylder

$$\int_0^1 x^n\,d\mu(x) = \int_0^1 x^n\,d\nu(x) \tag{G.4}$$

for ethvert $n = 0, 1, \ldots$. Da gælder $\mu = \nu$.

Dette følger som nævnt af at (G.4) medfører (G.1).

H Opgaver

Opgave 1. Lad $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ være stokastiske processer med tilstandsrum $\mathbf{R}^n$, der er defineret på det samme grundlæggende sandsynlighedsfelt $(\Omega,\mathscr{F},P)$.

Vis, at $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ er modifikationer hvis og kun hvis processerne $(X_t,Y_t)_{t\in T}$ og $(X_t,X_t)_{t\in T}$, der har tilstandsrum $\mathbf{R}^{2n}$, er versioner af hinanden.

Opgave 2. Giv et eksempel på to reelle (det vil sige tilstandsrummet er $\mathbf{R}$) stokastiske processer $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ der opfylder

(i) X_t og Y_t har samme fordeling for ethvert $t\in T$; det vil sige $P(X_t\in A)=P(Y_t\in A)$ for alle t og alle $A\in\mathscr{B}(\mathbf{R})$;

(ii) $(X_t)_{t\in T}$ og $(Y_t)_{t\in T}$ er *ikke* versioner hinanden.

Sammenlign (i) med betingelsen (1.1), der sikrer, at processerne er versioner af hinanden.

Opgave 3. (Uafhængighed af stokastiske processer) Lad $(X_t)_{t\in T_1}$ og $(Y_s)_{s\in T_2}$ være stokastiske processer, der hhv. har tilstandsrum $(S_1,\mathscr{B}_1)$ og $(S_2,\mathscr{B}_2)$. Vi siger, at de to stokastiske processer er uafhængige, hvis $\sigma(X_t\mid t\in T_1)$ og $\sigma(Y_s\mid s\in T_2)$ er uafhængige.

Vis, at $(X_t)_{t\in T_1}$ og $(Y_s)_{s\in T_2}$ er uafhængige hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

> For alle $n_1,n_2\geq 1$, $t_1,\dots,t_{n_1}\in T_1$ og $s_1,\dots,s_{n_2}\in T_2$ gælder, at de stokastiske vektorer $(X_{t_1},\dots,X_{t_{n_1}})$ og $(Y_{s_1},\dots,Y_{s_{n_2}})$ er uafhængige. (Disse stokastiske vektorer tager hhv. værdier i $(S_1^{n_1},\mathscr{B}_1^{n_1})$ og $(S_2^{n_2},\mathscr{B}_2^{n_2})$.)

VINK til 'hvis'-delen: Benyt Monoton Klasse samt at

$$\sigma(X_t\mid t\in T_1)=\sigma(\cap_{i=1}^{n_1}\{X_{t_i}\in A_i\}\mid n_1\geq 1 \text{ og } t_i\in T_1 \text{ og } A_i\in\mathscr{B}_1 \text{ for } =1,\dots,n_1)$$

med en tilsvarende opskrivning for $\sigma(Y_s\mid s\in T_2)$.

Opgave 4. Lad $T=\mathbf{R}_+$ og $S=\mathbf{R}$, og lad ν være $N(0,1)$-fordelingen. Det vil sige

$$\nu(A)=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \quad \text{for } A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

For $0\leq t_1<t_2\cdots<t_n$ definér $\pi(t_1,\dots,t_n):=\nu\times\nu\times\cdots\times\nu$, hvor $\times$ angiver produktmålet og ν optræder n gange på højre side. Det vil sige at $\pi(t_1,\dots,t_n)$ er målet på $\mathbf{R}^n$ der opfylder

$$\pi(t_1,\dots,t_n)(A_1\times\cdots\times A_n)=\nu(A_1)\cdots\nu(A_n) \quad \text{for } A_1,\dots,A_n\in\mathscr{B}(\mathbf{R}).$$

(1) Vis, at $\{\pi(t_1,\dots,t_n) \mid 0 \le t_1 < \cdots < t_n\}$ er konsistent.

(2) Lad $(X_t)_{t\ge 0}$ betegne en realisation. Gør rede for at $(X_t)_{t\ge 0}$ er stationær og angiv kovariansfunktionen Γ_X. Undersøg også om $(X_t)_{t\ge 0}$ har uafhængige tilvækster.

Lad os nu indføre en anden familie $\{\pi'(t_1,\dots < t_n) \mid 0 \le t_1 < \dots t_n\}$ af fordelinger som følger. Lad $\pi'(t_1) := N(0,2)$ for ethvert $t_1 \in \mathbf{R}_+$. Når $n \ge 2$ lader vi $\pi'(t_1,\dots,t_n) := \pi(t_1,\dots,t_n)$.

(3) Undersøg om $\{\pi'(t_1,\dots,t_n) \mid 0 \le t_1 < \cdots < t_n\}$ er konsistent.

Opgave 5. Lad $(X_t)_{t\ge 0}$ og $(Y_t)_{t\ge 0}$ betegne reelle stokastiske processer; det vil sige tilstandsrummet er $\mathbf{R}$. Antag at disse processer er versioner.

Vis, at $(X_t)_{t\ge 0}$ er en martingal hvis og kun hvis $(Y_t)_{t\ge 0}$ er en martingal.

Opgave 6. Lad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt og $\mathscr{G}$ være en σ-algebra så $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Lad X være en stokastisk variabel og antag at

$$E[\exp(i\theta X)\mathbf{1}_A] = P(A)E[\exp(i\theta X)]$$

for ethvert $\theta \in \mathbf{R}$ og $A \in \mathscr{G}$.

Vis, at $\mathscr{G}$ og X er uafhængige. (Det vil sige at A og X er uafhængige for ethvert $A \in \mathscr{G}$. Ækvivalent: $\mathbf{1}_A$ og X er uafhængige stokastiske variable).

VINK: Entydighedssætningen for karakteristiske funktioner.

Opgave 7. I nærværende opgave skal vi benytte et lille resultat, som I har vist i et tidligere kursus: Antag at X og Y er uafhængige stokastiske variable så at $X+Y \in L^1$. Da gælder, at X og Y tilhører L^1. Dette resultat må I tage for givet.

Lad $(X_t)_{t\ge 0}$ være en proces med tilstandsrum $\mathbf{R}$, der har uafhængige stationære tilvækster. Vis, at hvis der findes et $t_0 > 0$ således at $X_{t_0} \in L^1$, så gælder for ethvert $t \ge 0$ at $X_t \in L^1$.

Opgave 8. Lad $(X_t)_{t\ge 0}$ være en proces med tilstandsrum $\mathbf{R}$, der har uafhængige stationære tilvækster. Antag for nemheds skyld $X_0 = 0$.

(1) Antag i dette spørgsmål at $(X_t)_{t\ge 0}$ er en integrabel proces.

Vis, at $m_X(s+t) = m_X(s) + m_X(t)$ for alle $s,t \ge 0$.

Slut heraf at $m_X(t) = t m_X(1)$ for ethvert $t \in \mathbf{Q}_+$.

Vis, at hvis $t \mapsto X_t$ er højrekontinuert i sandsynlighed, så er $m_X(t) = t m_X(1)$ for ethvert $t \ge 0$.

(2) Antag at $(X_t)_{t\geq 0}$ er en kvadratisk integrabel proces. Vis, at $\sigma_X(t+s) = \sigma_X(t) + \sigma_X(s)$ for alle $t,s \geq 0$. Slut heraf at der gælder $\sigma_X(t) = t\sigma_X(1)$ for ethvert $t \geq 0$.

Opgave 9. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ og $(Y_t)_{t\geq 0}$ være reelle processer med stationære uafhængige tilvækster som opfylder at $X_t \sim Y_t$ for ethvert $t \geq 0$. Gør rede for at $(X_t)_{t\geq 0}$ og $(Y_t)_{t\geq 0}$ er versioner af hinanden.

Opgave 10. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en reel proces med stationære uafhængige tilvækster. Vis, at følgende tre udsagn er ækvivalente

(1) $(X_t)_{t\geq 0}$ er højrekontinuert i sandsynlighed.

(2) For $t_n \downarrow 0$ gælder at $X_{t_n} \to X_0$ i sandsynlighed.

(3) $(X_t)_{t\geq 0}$ er kontinuert i sandsynlighed.

Opgave 11. Antag at $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ for $n = 1,2,\dots$ samt at $\mu_n \to \mu$ og $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.
Vis, at $X_n \xrightarrow{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.

Opgave 12. Lad S_1 og S_2 være polske rum. Lad X og Y være stokastiske variable så X tager værdier i S_1 og Y i S_2. Lad $P_{X|Y}(A \mid y)$, defineret for $y \in S_2$ og $A \in \mathscr{B}(S_1)$, betegne en regulær betinget fordeling af X givet Y.

Vis, at $y \mapsto \int_{S_1} g(x,y) P_{X|Y}(dx \mid y)$ er $(\mathscr{B}(S_2), \mathscr{B}(\mathbf{R}))$-målelig samt at

$$E[g(X,Y)] = \int_{S_2}\int_{S_1} g(x,y) P_{X|Y}(dx \mid y) P_Y(dx)$$

for enhver funktion $g : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbf{R}$ der er $(\mathscr{B}(S_1) \times \mathscr{B}(S_2), \mathscr{B}(\mathbf{R}))$-målelig og begrænset.

Opgave 13. I denne opgave skal vi vise Nyttig Regel.

Lad S_1, S_2 og S_3 være polske rum og antag at $P_{X|Y}(A \mid y)$ defineret for $y \in S_2$ og $A \in \mathscr{B}(S_1)$ er en regulær betinget fordeling af X givet Y, hvor X tager værdier i S_1 og Y i S_2. Lad $\phi : S_1 \times S_2 \mapsto S_3$. Definér

$$P_{\phi(X,Y)|Y}(B \mid y) := \int_{S_1} \mathbf{1}_B(\phi(x,y)) P_{X|Y}(dx \mid y) \quad \text{for } B \in \mathscr{B}(S_3), y \in S_2.$$

Vis, at $P_{\phi(X,Y)|Y}$ er en regulær betinget fordeling af $\phi(X,Y)$ givet Y.

Opgave 14. Lad $X_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ være uafhængige reelle stokastiske variable, hvor ε'erne er identisk fordelte. Lad $\phi : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ være målelig. Definér

$$X_{n+1} = \phi(X_n, \varepsilon_{n+1}) \quad \text{for } n = 0,1,\dots$$

(1) Vis, at $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ er Markov ved hjælp af Nyttig Regel og Sætning B.7.

(2) Vis, at $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ er Markov ved hjælp af Proposition 1.10.

(3) Vis, at $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ er stationær hvis og kun hvis $X_0 \sim X_1$.

Opgave 15. Lad X,Y være stokastiske variable der tager værdier i polske rum S_1 og S_2 rum. Lad $P_{X|Y}(A \mid y), A \in \mathscr{B}(S_1), y \in S_2$, være en Markovkerne.

(1) Vis, at $P_{X|Y}$ er en regulær betinget fordeling af X givet Y hvis og kun hvis der gælder

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_B P_{X|Y}(A \mid y) P_Y(dy)$$

for alle $A \in \mathscr{B}(S_1)$ og $B \in \mathscr{B}(S_2)$.

(2) Antag nu at $P_{X|Y}$ er en regulær betinget fordeling af X givet Y. Vis, at hvis $y' \in S_2$ opfylder $P(Y = y') > 0$, så er

$$P_{X|Y}(A \mid y') = \frac{P(X \in A, Y = y')}{P(Y = y')}, \quad A \in \mathscr{B}(S_1).$$

Opgave 16. Lad (X,Y) være en absolut kontinuert stokastisk vektor på $\mathbf{R}^2$ med tæthed $f_{X,Y}$. Antag for nemheds skyld at den marginale tæthed f_Y for Y opfylder $f_Y(y) > 0$ for alle y.

Lad

$$f_{X|Y}(x \mid y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Vis, at

$$P_{X|Y}(A \mid y) := \int_A f_{X|Y}(x \mid y) dx$$

er en regulær betinget fordeling af X givet Y. Det vil sige at fordelingen af X givet $Y = y$ er absolut kontinuert med tæthed $f_{X|Y}(\cdot \mid y)$.

Opgave 17. Lad (X,Y) være absolut kontinuert med tæthed

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-y-\frac{x}{y}} & \text{hvis } x > 0 \text{ og } y > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

(1) Vis, at der gælder $X \mid Y = y \sim E(\frac{1}{y})$ for (P_Y-næsten alle) $y > 0$, hvor $E(\lambda)$ angiver eksponentialfordelingen med middelværdi λ^{-1}.

(2) Vis, at Y og $\frac{X}{Y}$ er uafhængige med $Y \sim \frac{X}{Y} \sim E(1)$.

Opgave 18. (AR(1)-processen).

Lad $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ være uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable så at $\varepsilon_n \sim N(0,1)$ for alle n. Lad $\theta \in]0,1[$.

(1) Vis, at $\sum_{i=0}^{\infty} \theta^i \varepsilon_i$ konvergerer i L^2, sandsynlighed og næsten overalt. Angiv ligeledes fordelingen af denne sum.

Antag at $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ er en proces der opfylder

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{H.1}$$

En sådan proces kaldes i øvrigt for en *autoregressiv proces af orden 1*. (Kort: en AR(1)-proces). Nedenfor vil vi finde den fordelingen af X_n, når $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ er en stationær proces.

(2) Angiv den betingede fordeling $X_{n+1} \mid X_n = x$.

(3) Vis, at der for ethvert $m = 1,2,\ldots$ gælder

$$X_n = \theta^m X_{n-m} + \sum_{j=0}^{m-1} \theta^j \varepsilon_{n-j}$$

(4) Antag yderligere at $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ er en stationær proces og find fordelingen af X_n.

Opgave 19. Lad $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt. Antag at $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er P-komplet.

(1) Antag at $X : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ er $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$-målelig og opfylder $X = 0$ P-n.s. Vis, at X er $(\mathscr{F}_0, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$-målelig.

(2) Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ og $(Y_t)_{t\geq 0}$ betegne reelle stokastiske processer, der er modifikationer. Vis, at den ene proces er adapteret hvis og kun hvis den anden er adapteret.

Opgave 20. Lad $\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ være et filter og $\tau : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$. Vis, at τ er en udvidet stoptid mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ hvis og kun hvis τ er en stoptid mht. $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$.

Opgave 21. Øvelse 4.2. Vis desuden 1)–3) i Proposition 4.3.

Opgave 22. Vis, at hvis $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er et højrekontinuert filter, så er det kompletterede filter $(\overline{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}$ ligeledes højrekontinuert.

Opgave 23. Vis, at hvis $(M_t)_{t\geq 0}$ er en submartingal mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, så er $(M_t)_{t\geq 0}$ er en submartingal mht. $(\overline{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}$.

Opgave 24. Antag at $(M_t)_{t\geq 0}$ er en submartingal mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ samt at alle udfaldsfunktioner for $(M_t)_{t\geq 0}$ er højrekontinuerte.

Vis, at $(M_t)_{t\geq 0}$ er en submartingal mht. $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geq 0}$.

Opgave 25. Lad $V_1, V_2, \ldots$ være en følge af ikke-negative, ikke-degenererede uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable med $EV_1 = 1$. Lad $V_0 := 1$. Definer

$$\mathscr{F}_n := \sigma(V_0, \ldots, V_n), \quad Z_n := V_0 \cdot V_1 \cdots V_n \quad \text{for } n \geq 0.$$

Da V_1 er ikke-degenereret, viser Jensen's ulighed at $E(\sqrt{V_1}) < \sqrt{E(V_1)} = 1$.

(1) Vis, at $(Z_n)_{n=0,1,\ldots}$ er en ikke-negativ martingal med hensyn til $(\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\ldots}$.

(2) Gør rede for at $Z_\infty := \lim_{n\to\infty} Z_n$ eksisterer med sandsynlighed 1.

(3) Vis, at $E(\sqrt{Z_n}) \to 0$ for $n \to \infty$. Slut heraf af $E(\sqrt{Z_\infty}) = 0$ samt at $Z_\infty = 0$ n.s.

(4) Er familien $(Z_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ uniformt integrabel?

Opgave 26. (At knække kridt).

Lad $U_1, U_2, \ldots$ være en følge af uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable, der er uniformt fordelte på $]0,1[$. Lad $U_0 := 1$.

Lad $L_n := U_0 \cdot U_1 \cdots U_n$ for $n = 0, 1, \ldots$ (Fortolk L_n som kridtstykkets længde efter n knæk).

Lad $\alpha \in \mathbf{R}$ opfylde $\alpha > -1$ og $\alpha \neq 0$.

(1) Vis, at med sandsynlighed 1 gælder

$$\lim_{n\to\infty} \left((1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^n \cdot L_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } \alpha > 0 \\ \infty & \text{hvis } -1 < \alpha < 0. \end{cases}$$

VINK: Sæt $V_k := (1+\alpha)U_k^\alpha$ og benyt foregående opgave.

(2) Vis, at med sandsynlighed 1 gælder

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{\lambda^n} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } \lambda > 1/e \\ \infty & \text{hvis } 0 < \lambda < 1/e. \end{cases} \tag{H.2}$$

VINK: Benyt at $\alpha \uparrow 0$ medfører $(1+\alpha)^{1/\alpha} \uparrow e$ samt at $\alpha \downarrow 0$ medfører $(1+\alpha)^{1/\alpha} \downarrow e$.

Det er lidt af en overraskelse at (H.2) gælder. Mange ville nok have gættet på et skift ved $\lambda = 1/2$.

Opgave 27. (Det klassiske ruinproblem). I denne opgave skal vi, ved hjælp af martingaler, udregne nogle ruinsandsynligheder, som I sikkert for mødt i et tidligere kurset, hvor Hoffmann er forelæser. Se en fortolkning til sidst i opgaven.

Lad $Y_1, Y_2, \ldots$ betegne en følge af uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable med $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$. Lad $Y_0 := 0$. Lad $(\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\ldots}$ betegne det naturlige filter frembragt af $(Y_n)_{n=0,1,\ldots}$.

Lad $X_n := Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ for $n = 0, 1, \ldots$.

(1) Gør rede for at processerne $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ og $(X_n^2 - n)_{n=0,1,\ldots}$ er martingaler med hensyn til $(\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\ldots}$.

Lad a, b være to strengt positive hele tal og sæt $K_n := a + Y_n$ for $n \geq 0$.

Lad $T_{a,b} := \inf\{n \mid K_n = 0 \text{ eller } K_n = a + b\}$.

(2) Gør rede for at $E(X_{T_{a,b} \wedge n}) = 0$ og $(T_{a,b} \wedge n) = E(X^2_{T_{a,b} \wedge n})$ for ethvert n. Slut heraf at $E(T_{a,b}) \leq \min\{a^2, b^2\}$ samt at $T_{a,b}$ er endelig med sandsynlighed 1.

(3) Gør rede for at $T_{a,b}$ er optional for processerne $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ og $(X_n^2 - n)_{n=0,1,\ldots}$.

VINK: Gør rede for, og udnyt at, $E(X_{T_{a,b}}) = 0$.

(4) Vis, at $P(K_{T_{a,b}} = 0) = \frac{b}{a+b}$ samt at $E(T_{a,b}) = ab$.

Fortolkning: To personer, α og β, spiller en serie af spil, hvor hver person har sandsynlighed 1/2 for at vinde et givet spil. Vinderen af et spil får 1 kr af taberen. Tænk på Y_n som udfaldet af $n$te spil. Da betegner K_n spiller α's kapital efter n spil, idet α har startkapital a og β har startkapital b. Stoptiden $T_{a,b}$ angiver da tidspunktet hvor en af de spillere bliver ruineret; hændelsen $\{K_{T_{a,b}} = 0\}$ svarer til at α ruineres og $E(T_{a,b})$ er middelventetiden på ruin.

Man kan i øvrigt også beregne de samme sandsynligheder, når de to spillere ikke har samme sandsynlighed for at vinde et spil, men man skal så have fat i nogle lidt andre martingaler.

Opgave 28. Lad $(W_t)_{t \geq}$ betegne en Wiener proces med parameter 1. Lad $S_t := \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$ betegne maksimum af $(W_s)_{s \in [0,t]}$. Lad os for nemheds skyld antage $W_0(\omega) = 0$ for *alle* ω. For $a > 0$ lad $T_a := \inf\{s > 0 \mid W_s \geq a\}$. Bemærk at da $W_0 = 0$ er $S_t \geq 0$.

(1) Gør rede for at der for $a, t > 0$ gælder

$$\{S_t \geq a\} = \{T_a \leq t\}$$
$$\{S_t \geq a, W_t < a\} = \{T_a \leq t, W_{T_a + (t - T_a)} - W_{T_a} < 0\}.$$

(2) Vis, at $P(S_t \geq a, B_t < a) = \frac{1}{2} P(S_t \geq a)$ for $a, t > 0$.

(3) Vis, at $P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a)$ for $a, t > 0$.

(4) Lad $t > 0$. Gør rede for at $S_t \sim |B_t|$.

Opgave 29. Antag at $(M_t)_{t\geq 0}$ er en submartingal mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Lad $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ være et filter så at $\mathscr{G}_t$ og $\mathscr{F}_t$ er uafhængige for ethvert $t \geq 0$. Lad $(\mathscr{H}_t)_{t\geq 0}$ være det mindste filter der indeholder både $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ og $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$; det vil sige

$$\mathscr{H}_t := \sigma(A \cap B \mid A \in \mathscr{G}_t, B \in \mathscr{F}_t).$$

Vis, at $(M_t)_{t\geq 0}$ er en submartingal mht. $(\mathscr{H}_t)_{t\geq 0}$.

VINK: Monoton klasse.

Opgave 30. Lad $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ være et filter og antag at $(X_t)_{t\geq 0}$ er en integrabel Lévy proces med hensyn til dette filter (se Definition 6.10). Antag $X_0 = 0$ og lad $\mu := E(X_1)$.

(1) Vis, at $(X_t - t\mu)_{t\geq 0}$ er en martingal med hensyn til $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.

(2) Antag nu yderligere at $(X_t)_{t\geq 0}$ er en kvadratisk integrabel proces og lad $\sigma^2 := Var(X_1)$. Vis, at $\big((X_t - t\mu)^2 - t\sigma^2\big)_{t\geq 0}$ er en martingal med hensyn til $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$.

Opgave 31. Lad τ være en udvidet stoptid mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ og $A \in \mathscr{F}_{\tau+}$. Vis, at $\tau_A := \tau \cdot \mathbf{1}_A + \infty \cdot \mathbf{1}_{A^c}$ er en udvidet stoptid mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$

Opgave 32. Lad $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ være et filter.

Gør rede for at hvis $(X_t)_{t\geq}$ og $(Y_t)_{t\geq 0}$ er progressivt målelige reelle processer, så er $(X_t + Y_t)_{t\geq 0}$ og $(X_t \cdot Y_t)_{t\geq 0}$ progressivt målelige.

Gør desuden rede for at hvis $(X_t^n)_{t\geq 0}$ er progressivt målelig for $n = 1, 2, \ldots$ og vi lader

$$X_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega) & \text{hvis grænseværdien eksisterer i } \mathbf{R} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

så er $(X_t)_{t\geq 0}$ progressivt målelig.

Opgave 33. Lad $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ være et filter. Lad $0 \leq u < v \leq \infty$ samt $A \in \mathscr{F}_u$. Lad $B \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$ opfylde at $B \cap [0, u[= \emptyset$.

Vis, at følgende processer er $(\mathscr{F}_t)$-progressivt målelige:

$$X(t,\omega) := \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{[u,v[}(t)$$
$$Y(t,\omega) := \mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_B(t).$$

Opgave 34. Vis Sætning 2.6 (1).

Opgave 35. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en Lévy proces.

Vis, at $(X_t)_{t\geq 0}$ er kontinuert i sandsynlighed; det vil sige at hvis $t_n \to t$ så gælder $X_{t_n} \to X_t$ i sandsynlighed.

Opgave 36. Lad $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ være et filter og $(X_t)_{t\geq 0}$ være en reel proces (det vil sige processen har tilstandsrum $\mathbf{R}$).

(1) Vis, at hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er en Lévy proces mht. $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ (se Definition 6.10), så er $(X_t)_{t\geq 0}$ en Lévy proces i henhold til Definition 6.1.

(2) Vis, at hvis $(X_t)_{t\geq 0}$ er en Lévyproces i henhold til Definition 6.1, så er $(X_t)_{t\geq 0}$ en Lévy proces mht. $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geq 0}$.

Opgave 37. Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en Poissonproces med parameter $\lambda > 0$. Vis, at der gælder $\frac{P_t}{t} \to \lambda$ næsten sikkert for $t \to \infty$.

Præcisering: udsagnet $\frac{P_t}{t} \to \lambda$ næsten sikkert for $t \to \infty$ betyder, at der findes en nulmængde N således at der for ethvert $\omega \in N^c$ gælder $\frac{P_t(\omega)}{t} \to \lambda$ for $t \to \infty$.

VINK: Start med at benytte Store Tals Lov til at vise at $\frac{P_k}{k} \to \lambda$ næsten sikkert for $k \to \infty$. Lav dernæst en ulighed, der kan vise resultatet.

Opgave 38. Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en Poissonproces med parameter $\lambda > 0$ og $D_1, D_2, \ldots,$ være de successive springtidspunkter. Lad $W_1 := D_1$ og $W_n := D_n - D_{n-1}$ for $n \geq 2$ være ventetiderne mellem springene.

(1) Vis, at $D_1 \sim E(\lambda)$.

VINK: Benyt at $P(D_1 > t) = P(P_t = 0)$.

(2) Vis ved induktion i n, at følgende er opfyldt for ethvert $n = 1, 2\ldots$

  (a) D_n er endelig;

  (b) $(P_{D_n+t} - P_{D_n})_{t\geq 0}$ er en Poisson process, der er uafhængig af $(D_1, \ldots, D_n)$.

  (c) W_{n+1} er uafhængig af $(D_1, \ldots, D_n)$ og $W_{n+1} \sim W_1$.

(3) Overvej at vi har vist, at $W_1, W_2, \ldots$ er en følge af uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable med $W_n \sim E(\lambda)$ for ethvert n.

Opgave 39. Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ betegne en Poisson proces med parameter λ. Lad $(D_n)_{n\geq 1}$ være de tilhørende ventetidspunkter og lad $T > 0$ være et fast tal. Bemærk at D_{P_T} angiver tidspunktet for sidste spring før tid T og D_{P_T+1} angiver tidspunktet for første spring efter tid T.

Vi indfører

$U_T := T - D_{P_T}$; det vil sige U_T er ventetiden fra sidste spring før tid T til tid T;

$Y_T := D_{P_T+1} - T$; det vil sige Y_T er ventetiden fra tid T til første spring efter tid T.

$X_T := U_T + Y_T = D_{P_T+1} - D_{P_T}$; det vil sige X_T er ventetiden fra sidste spring før tid T til første spring etfer tid T.

(1) Skitser en udfaldsfunktion for $(P_t)_{t\geq 0}$ og afsæt T, D_{P_T} og D_{P_T+1} på tidsaksen. Marker desuden U_T, Y_T og X_T.

(2) Giver Opgave 38 en formodning om fordelingen eller middelværdien af X_T? Hvad er i bekræftende fald din formodning?

(3) Vis, at U_T og Y_T er uafhængige; angiv fordelingen af Y_T og fordelingsfunktionen for U_T.

(4) Beregn $E(X_T)$ samt $\lim_{T\to\infty} E(X_T)$ og sammenlign med (2).

Opgave 40. (En sum af Poisson processer). Poissonprocessen defineres og studeres i Kapitel 8. Lad os os her betragte to uafhængige Poisson processer $(M_t)_{t\geq 0}$ og $(K_t)_{t\geq 0}$ med parametre λ og μ. Lad $N_t := M_t + K_t$ for $t \geq 0$.

(1) Vis, at $(N_t)_{t\geq 0}$ er en Poisson proces med parameter $\lambda + \mu$.

(2) Lad $n = 1, 2, \ldots$. Vis, at

$$P(K_t = k \mid N_t = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^k \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-k} \quad \text{for } k = 0, 1, \ldots, n.$$

(3) Lad T_N betegne ventetiden på første spring i $(N_t)_{t\geq 0}$; det vil sige $T_N = \inf\{t > 0 \mid N_t = 1\}$. Lad tilsvarende T_K og T_M betegne ventetiderne på første spring i $(K_t)_{t\geq 0}$ og $(M_t)_{t\geq 0}$. Bemærk at $T_N = \min\{T_M, T_K\}$

Lad $A := \{T_K < T_M\}$ være hændelsen at første spring i $(K_t)_{t\geq 0}$ kommer før første spring i $(M_t)_{t\geq 0}$.

Vis, at T_N og A er uafhængige samt at $P(A) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$.

Opgave 41. (Opsplitning af en Poissonproces i to). Lad $(N_t)_{t\geq 0}$ være en Poissonproces med parameter $\lambda > 0$. Lad $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ være en følge af uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable som opfylder $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ for ethvert n; det vil sige at X_n antager værdierne 1 og 0 med sandsynlighed p og $1 - p$. Processerne $(N_t)_{t\geq 0}$ og $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ antages at være uafhængige.

Definer $K_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n$ og $M_t := N_t - K_t = \sum_{n=1}^{N_t} (1 - X_n)$.

(1) Vis, at der for $n \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ og $k_i, m_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ gælder

$$\begin{aligned} &P(K_{t_i} - K_{t_{i-1}} = k_i, M_{t_i} - M_{t_{i-1}} = m_i,\ i = 1, \ldots, n) \\ = &\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Po}(p\lambda(t_i - t_{i-1}); k_i)\mathrm{Po}((1-p)\lambda(t_i - t_{i-1}); m_i), \end{aligned}$$

hvor $\mathrm{Po}(\mu; k)$ angiver sandsynlighedsfunktionen i punktet k for en Poissonfordeling med parameter μ.

(2) Vis, at $(M_t)_{t\geq 0}$ og $(K_t)_{t\geq 0}$ er uafhængige Poissonprocesser med parametre $(1-p)\lambda$ og $p\lambda$.

Opgave 42. Lad $(g_t)_{t\geq 0}$ være en ikke-aftagende funktion med $g_0 = 0$. Lad $(\phi_t)_{t\geq 0}$ være lokalt begrænset og lad $h_t := \int_0^t \phi_s \, dg_s$.

Vis, at $t \mapsto h_t$ er cadlag med $\Delta h_t = \phi_t \Delta g_t$ for $t > 0$.

Opgave 43. Lad $(g_t)_{t\geq 0}$ være givet ved

$$g_t = g_t^1 - g_t^2 = h_t^1 - h_t^2$$

for ethvert $t \geq 0$, hvor $g_0^1 = g_0^2 = h_0^1 = h_0^2 = 0$ og $(g_t^i)_{t\geq 0}$ og $(h_t^i)_{t\geq 0}$ er ikke-aftagende og højrekontinuerte. Vis, at der for $(\phi_t)_{t\geq 0}$ lokalt begrænset gælder

$$\int_0^t \phi_s d(g_s^1 - g_s^2) = \int_0^t \phi_s d(h_s^1 - h_s^2) \qquad \text{for } t \geq 0.$$

Opgave 44. Vis Analysens Fundamentalsætning (E5) når $(g_t)_{t\geq 0} = (g_t^1 - g_t^2)_{t\geq 0}$ hvor $(g_t^i)_{t\geq 0}$ er ikke-aftagende og højrekontinuerte med $g_0^i = 0$.

VINK: Når f er kontinuert differentiabel, har vi at f kan Taylorudvikles som $f(x) - f(y) = f'(x)(x-y) + R(x,y)(x-y)$, hvor $(x,y) \mapsto R(x,y)$ er kontinuert med $R(x,x) = 0$.

Lad $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t$ være en inddeling af $[0,t]$ og bemærk at

$$f(g_t) - f(g_0) = \sum_{i=1}^{k} [f(g_{t_i}) - f(g_{t_{i-1}})].$$

Benyt Taylorudviklingen på hvert led på højre side og lad finheden af inddelingen gå mod 0.

Opgave 45. lad $p > 1$ med tilhørende konjugerede tal q være givet.

Doob's ulighed for en martingal med diskret tid siger følgende:

Hvis $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ er en martingal eller en ikke-negativ submartingal, så gælder

$$\| \sup_{k\leq n} |X_k| \, \|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p$$

for ethvert $n \geq 1$.

Benyt dette til at vise følgende resultat:

Lad $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ betegne en martingal eller en ikke-negativ submartingal med lutter højrekontinuerte udfaldsfunktioner. Da gælder

$$\| \sup_{0\leq s\leq t} |X_s| \, \|_p \leq q \cdot \|X_t\|_p \qquad \text{for ethvert } t \geq 0.$$

I de sidste opgaver antager vi, at $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ er en filtration og at $(W_t)_{t\geq 0}$ er en Wienerproces mht. dette filter. Martingalegenskaben er med hensyn til dette filter nedenfor.

Opgave 46. Lad $(X_t)_{t\geq 0}$ være en Ito proces som i (12.38). Antag at $E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2] < \infty$ for ethvert $T > 0$ samt at processen $(\phi_t)_{t\geq 0}$ i (12.38) er begrænset. Angiv en proces $(b_t)_{t\geq 0}$ således at

$$\left(X_t^2 - \int_0^t b_s ds \right)_{t\geq 0}$$

er en martingal.

Opgave 47. Vis at

$$\left(\cos^2(W_t) + \int_0^t \sin(W_s) ds \right)_{t\geq 0}$$

er en martingal.

Opgave 48. Vis resultatet i Eksempel 12.17.

Opgave 49. Lad $(\phi_t^n)_{t\geq 0}, (\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$ med $(\phi_t^n)_{t\geq 0} \to (\phi_t)_{t\geq 0}$ i H_2. Antag at $(\psi_t)_{t\geq 0} \in H_2$ samt at $(\psi_t)_{t\geq 0}$ er begrænset (det vil sige der findes et $C > 0$ så at $|\psi_t(\omega)| \leq C$ for alle (t, ω).)

Gør rede for at $(\phi_t^n \psi_t)_{t\geq 0}, (\phi_t \psi_t)_{t\geq 0} \in H_2$ samt at $(\phi_t^n \psi_t)_{t\geq 0} \to (\phi_t \psi_t)_{t\geq 0}$ i H_2.

Opgave 50. Lad $(\phi_t)_{t\geq 0} \in H_2$.

(1) Gør rede for at for $r \geq 0$ er $(\phi_t \mathbf{1}_{]0,r]}(t)) \in H_2$. Vis også at der gælder

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s = \int_0^t \phi_s \mathbf{1}_{]0,r]}(s) \, dW_s \quad n.s. \tag{H.3}$$

for ethvert $t \leq r$. (Overvej at dette er et rimeligt resultat set i lyset af, at de to integranter stemmer overens op til tid t.)

VINK til sidste del: Start med at overveje at ligheden gælder, når $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er på formen (12.14). Overvej dernæst at ligheden gælder, når $(\phi_t)_{t\geq 0}$ er simpel, og benyt et approksimationsargument til at afslutte beviset.

(2) (Standsning af integraler) Lad $r \geq 0$ Vis, at

$$\int_0^{t\wedge r} \phi_s \, dW_s = \int_0^t \mathbf{1}_{]0,r]}(s) \phi_s \, dW_s \quad \text{for alle } t \geq 0 \;\; n.s. \tag{H.4}$$

Her husker vi på at

$$\int_0^{t\wedge r} \phi_s \, dW_s = \begin{cases} \int_0^r \phi_s \, dW_s & \text{hvis } r \leq t \\ \int_0^t \phi_s \, dW_s & \text{hvis } r \geq t. \end{cases}$$

(3) (Integration fra s til t). Lad $s < t$. Vi definerer $\int_s^t \phi_u \, dW_u := \int_0^t \phi_u \, dW_u - \int_0^s \phi_u \, dW_u$. Vis, at der for $T \geq t$ gælder

$$\int_s^t \phi_u \, dW_u = \int_0^T \mathbf{1}_{]s,t]}(u) \phi_u \, dW_u \quad n.s.$$

(4) (Stokastiske konstanter udenfor integraler). Lad Z være begrænset og $\mathscr{F}_s$-målelig. Vis, at der for $t > s$ gælder

$$\int_0^t Z \mathbf{1}_{]s,t]}(r) \phi_r \, dW_r = Z \int_0^t \mathbf{1}_{]s,t]}(r) \phi_r \, dW_r = Z \int_s^t \phi_r \, dW_r \quad n.s.$$

Opgave 51. (Ornstein-Uhlenbeck processen)

Lad $\lambda > 0$ og X_0 være $\mathscr{F}_0$-målelig. Definer *Ornstein-Uhlenbeck processen* $(X_t)_{t\geq 0}$ som følger

$$X_t := e^{-\lambda t}(X_0 + \int_0^t e^{\lambda u} \, dW_u).$$

(1) Vis, at

$$X_t = X_0 - \lambda \int_0^t X_s ds + W_t \quad \text{for alle } t \geq 0 \;\; n.s.$$

(2) Vis, at der for $0 \leq s \leq t$ gælder

$$X_t = e^{-\lambda(t-s)} \left(X_s + \int_s^t e^{\lambda(u-s)} \, dW_u \right) \quad n.s.,$$

hvor $\int_s^t \phi_u \, dW_u := \int_0^t \phi_u \, dW_u - \int_0^s \phi_u \, dW_u$.

(3) Gør rede for at $(X_t)_{t\geq 0}$ er Markov, og angiv den betingede fordeling $X_t \mid X_s = x$ for $0 \leq s < t$ og $x \in \mathbf{R}$.

Opgave 52. Betragt situationen i beviset for Sætning 12.9. Vis, at der for $i \neq j$ gælder, at processen

$$\left(\int_0^t \phi_r^i \, dW_s \cdot \int_0^t \phi_r^j \, dW_s\right)_{t\geq 0}$$

er en martingal.