Aarhus Tech
SRP

20. december 2017

Monto Carlo Lokalisering

Forfatter
Jacob Emil Ulvedal Rosborg

Vejleder
Mikkel Stouby Petersen
Jørn Sanggaard

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Indhold

1. Indledning

Nogle problemer er så komplicerede at de næsten er umulige at analysere, modellere og løse algebraisk, f.eks den kaotiske og tilfældige process der finder sted når man spalter uran-235 (neutron diffusion). Dette problem stod forskerne over i 1940 under under udviklingen af atombomben i Manhattan projektet. Her blev Monte Carlo Simulering anvendt til at simulere neutroner's vandring og dette blev brugt til at vurdere de optimale fysiske forhold for den kæde reaktion der skulle få bomben til at sprænge atom [2].

Begrebet Monte Carlo Metod*en* dækker egentlig over en række metoder der kan bruges til at analyse problemer der ikke fremstår løsbare, så som neutron diffusion. For eksempel findes der metoder så som Monte Carlo Simulering, Lokalisering og ud over disse er der yderligere metoder inden for Finans og Medicin. Denne opgave vil fokusere på numerisk integration og lokalisering. Jeg vil yderlig mere komme ind på stokastiske variabler og deres egenskaber, samt anvendelse og implementation af Monte Carlo Lokalisering hvilket er en form for partikelfilter i en anatom robot.

Monte Carlo Metoden blev først rigtigt anvendt da vi fik udviklede computere som kunne udføre disse simulering også kaldet eksperimenter for os. Da disse simuleringer kræver et forholds vis stort antal gentagelser, et antal der både ville have krævet arbejdskraft og tid af umådelige proportioner. Alt dette for at opnå et resultat der relativt brugbart. Dette resultat vil altid være en approximering hvor imod en algebraisk tilgang ville udlede værdien og derved være eksakt. Til gengæld er man i stand til at takle problemer der så komplekse i sin natur at det ikke er praktisk muligt at udlede disse problemer algebraisk [3]

1.1. Opgaveformulering

(I) Redegør for, hvad Monte Carlo-algoritmer er, og giv eksempler både praktiske og teoretiske anvendelser. For eksempel i forbindelse med numerisk integration.

(II) Forklar centrale egenskaber ved stokastiske variable i det omfang det er nødvendigt for at forstå algoritmernes virkemåde.

(III) Vis, hvordan Monte Carlo-algoritmer kan anvendes til lokalisering af robotter. Kom herunder ind på, hvordan algoritmen kan implementeres.

(IV) Diskuter Monte Carlo-metodens muligheder og begrænsninger i forbindelse med anvendelse i en konkret autonom robot.

1.2. Afgrænsning

Denne opgave henvender sig til studenrende på 3. årgang på en gymnasial uddannelse. For at læse opgaven kræves der ikke en dybdegående forståelse for hverken statistik eller algoritmer. Opgaven vil forklare de begreber der er nødvendige for at forstå Monte Carlo Metoden, men kun på et redegørende niveau.

2. Stokastiske Variable

For at forstå Stokastiske Variabler kræves der en forståelse for nogle simplere begreber inden for statistiske. Disse begreber er udfaldsrum, delmængde, sandsynlighedsfunktion samt sandsynlighedsfelt. Disse begreber er essentielle inden for statistisk.

2.1. Udfaldsrum og delmængder

Der findes to type af udfaldsrum, henholdsvis diskret og kontinuert udfaldsrum. Forskellen på disse to er deres

Forskellen på disse to er måden at et endeligt udfaldsrum er tællelig til modsætning er et kontinuert. Et eksempel på et diskret udfaldsrum kunne være en seksidet terning. Denne seksidet terning vil have et udfaldsrum på formen $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ hvor u_i er et udfald udfaldsrummet U. Dette er et diskret endeligt udfaldsrum, dette skal forståes på den måde at udfaldsrummet ikke er et interval i de Reelle tal, men kun Heltal i intervallet en til seks $1 \geq u_i \leq 6 \quad \text{og} \quad u_i \in \mathbb{Z}$. Altså det er endelig fordi der kun er seks mulige udfald. Et eksempel på et kontinuert udfaldsrum kunne være højden af bygninger, der er ikke noget minimum højde forskel på bygninger. Altså udfaldsrummet kunne være $1 \geq u_i \leq 1000 \quad u_i \in \mathbb{R}$

2.2. Sandsynlighedsfunktion

Sandsynlighedsfunktion P beskriver sandsynligheden for en givet mængde i udfaldsrummet U. For eksempel kunne $P(\{1, 2\}) = 0.8$ og $P(3) = 0.2$ i udfaldsrummet $U = \{1, 2, 3\}$. Dette vil betyde at der er en meget støre sandsynelighed for 1 eller 2 end der for 3. Nedenstående er additionsloven og den desuden gældende [5].

$$P(1) + P(2) + P(3) = 1 \tag{2.1}$$

$$P(\{1, 2\}) + P(3) = 1 \tag{2.2}$$

Desuden kan $\{1, 2\}$ også beskrives som en delmængde af U på formen $A = \{1, 2\}$ af U altså så det er gældende at

$$P(A) = P(1) + P(2) \tag{2.3}$$

2.3. Sandsynlighedsfelt

Et sandsynlighedsfelt findes på to former, vi vil kun beskæftige os med det endelige sandsynlighedsfelt. Det endelig sandsynlighedsfelt (U, P) er bestående af et udfaldsrum U og en sandsyneligheds funktion P. Dette er derfor gældende for sandsynlighedsfeltet.

$$0 \geq P(u_i) \leq 1 \quad \text{for ethvert udfald} \quad u_i \quad \text{i U} \tag{2.4}$$

$$P(U_1) + P(U_2) + ... + P(U_n) = 1 \tag{2.5}$$

De to udsagn udtrykker derved at sandsyneligheden for $P(U_i)$ er i intervallet $[0;1]$ samt at den samlede sandsynlighed for feltet er 1, hvor $1 = 100\%$.

et endeligt og et er bestående af både et udfaldsrum og dens delmængder samt en sandsyneligheds funktion der beskrive sandsyneligheden for hvert given [5]

2.4. Stokastiske variabler

Stokastiske variabler findes af to type der begge beskrives med X, disse to type er henholdsvis diskret og kontinuert. Diskret stokastiske variabler har et endeligt udfaldsrum,

Stokastiske variabler opfører sig på en måde hvor X variables tilstand er alle mulige udfald i udfaldsrummet U i sandsynlighedsfeltet med sandsynelighederne $P(U_n)$

3. Monte Carlo Metoden

I dette afsnit vil opgaven komme ind på...

Monte Carlo Metodens blev navngivet dette efter Stanislaw Ulams onkel som ofte spillede på Casino Monte Carlo i Monaco. Ulam var en af de forskere arbejde på Monte Carlo Metoden under Manhatten Projektet. Metoden blev udviklede for at kunne simulere neutron diffusion. Dette var nødvendigt at simulere på denne måde, da problemet var for komplekst til at kunne blive afledt algebragisk. Metoden blev først anvendt på gamle analog computere hvilket begrænsede kompleksiteten af simulationen [2].

Yderlig mere er Monte Carlo Metoden er også en algoritme, det betyder at det er en process som er udført i nogle logiske trin. Trin som beskrive gøremåden for metoden. En algoritme kunne f.eks. være trinnene involveret i at sortere et sæt kort. Lad et s̈ætv̈ære kortspillet og ët elementët kort i spillet, sortering af et sæt kort kan således udføres på følgende måde.

1. Vælg et vilkårligt element e_i fra sættet.
2. Placere elementet bagest i sættet.
3. Sammenlign nu e_i med elementet lige før e_{i-1} hvis $e_i > e_{i-1}$ bytter de plads. Dette gentages indtil $e_i < e_{i-1}$ eller $i = 0$.
4. Gentag denne process indtil kort spillet er sorteret

Denne sorterings algoritme er også kaldet boblesortering og dets navn kommer af måden de elementer i sættet bobler til toppen. [4]

3.1. Plat eller Krone

Et eksempel på udførelse af Monte Carlo Simulering kunne være Plat eller Krone, spillets regler er som følgende.

1. Hver spiller satser på en side af mønten.
2. Mønten kastes op i luften.
3. Vinderen er den spiller hvis sats er den side af mønten der vender op af.

Man kan også beskrive Plat og Krone med et symmetrisk sandsynlighedsfelt (U, P), hvor udfaldsrummet U ville være $U = \{Plat, Krone\}$ og sandsynlighedsfunktionen P hvor følgende er sandt da det er et symmetrisk sandsynlighedsfelt.

$$P(Plat) = P(Krone) = \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

Vi kan desuden beskrive mønten med en stokastiske variable X. Den forventede værdi af X kan ligedes beskrives som værende $\frac{1+2}{2} = 1.5$ hvis $Plat = 1$ og $Krone = 2$ altså den gennemsnitlig værdi af udfaldsrummet.

Vi kan finde frem til en aproximering af den forventede værdi af X ved brug af Monte Carlo Simulering. I den sammenhæng lad $\mathbb{E}[X]$ værende den forventede værdi af X. Vi kan derved opskrive følgende udsagn hvor x_i er en konkret simulering af X.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \tag{3.2}$$

Vi kan udfører en simulering der simulere 1000 eksperimenter, hvor X er uafhængig.

```
import random

random.seed(42)
print(sum([random.randint(1,2) for _ in range(1000)]) / 1000.000)
```

Dette vil give os $\mathbb{E}[X] = 1.519$, hvis vi udførte dette eksperiment 100 gange ville vi finde at vores resultat variere. Dette skyldes at X er tilfældigt bestemt for hvert simulering og er uafhængig af forgående simulering, altså normal opførelse for en mønt [1].

3.2. Numerisk integration

Det overstående eksempel med Plat eller Krone virker måske lidt dumt da vi med nemhed kan udlede det algebraisk, altså tage summen udfaldsrummet og dele med antallet af mulige udfald. Men et andet tilfælde hvor man kan anvende Monte Carlo Metoden er numerisk integration. I nogle tilfælde er det let at udlede integralet algebragisk, men der findes også tilfæde hvor det er umuligt. Disse funktioneners integraler kan udledes ved hjælp af numerisk metoder, her i blandt Monte Carlo Metoden.

Lad os betragte en cirkel der befinder sig iden for et kvadratisk område, som set på nedenstående figur.

Firgur

Hvis vi ønsker at finde arealet af cirklen, ved brug af Monte Carlo Simulering, skal vi først bestemme udfaldsrummet. Udfaldsrummet for dette tilfæde er kvadraten hvor cirklen befinder sig inden for. Det vil sige at vi har et kontinuert udfaldsrum U som indenholder uendelige punkter der befinder sig i kvadratet. Da vi skal simulere dette på en computer omdefinere vi udfaldsrummet til et diskret udfaldsrum, da en computere ikke kan håndtere infinitesimaler, men kun tal af en given størelse. Altså vi kunne vælge et udfaldsrum hvor vi har inddelt kvadraten 100×100

Hvis vi tager funktionen $f(x) =$, denne funktion er ikke diffrentierbar da den ikke er kontinuer og kan derfor ikke løses algebragisk. Men vi kan stadig finde dens integral ved brug af Monte Carlo. Vi vælger et tilfældigt punkt, dette punks x værdi bruger vi i funktionen, vi får der efter en y værdi, vi notere os derefter om denne y værdi er højere eller lavere end det tilfældige punkts y værdi. Vi gentage dette tusinds vis af gange til at vi har fået os et forholdshvis stort prøve område. Vi kan nu udregne dets integrale ved at tage arealet det rum vi valgte tilfældige punkter indenfor og derefter gange det med sandsyneligheden for at et punkt er inden for integralet af funktionen, altså sandsyneligheden for at det tilfældige punkt er u

Hvis vi ønsker at lave en numerisk integration ved brug af Monte Carlo Metoden skal vi først finde ud af hvordan vi k

4. Monte Carlo Lokalisering

Man kan anvende Monte Carlo Metoden til at lokalisere, f.eks. en anatom robot, på et kendt kort. Dette kan lade sig gøre ved brug af Monte Carlo Lokalisering, dette er også en form for partikel filter. Grunden til at Monte Carlo lokalisering er et partikel filter er grundet i at måden hvordan metoden lokalisere. Lad os sige vi har et sandsynlighedsfelt hvor udfaldsrummet U er alle de mulig positioner. Lad X være en stokastisk variable i sandsyneligheds feltet, altså så X er en tilfældig mulig position for robotten på kortet. Vi kan nu lave et eksperiment, hvor X bestemmes til et punkt i sandsynlighedsfeltet, vi kan nu udregne

Monte Carlo Lokalisering består af et sæt af trin som gentages hver gang den anatom robot bevæger sig.

Lad os sige at vi har et kvadratisk område med forskelig farvet fliser, som set på nedenstående figur.

FIGUR!

4.1. Opbygning

4.2. implementering

5. Diskussion

6. Konklusion og perspektivering

Bibliografi

[1] Kasper K. Berthelsen. „Note om Monte Carlo metoden“. I: (2014).

[2] Atomic Heritage Foundation. *Computing and the Manhattan Project*. 2014. URL: `https://www.atomicheritage.org/history/computing-and-manhattan-project`.

[3] Daniel Kjær. „Sandsynlighedsbaserede metoder [Monte Carlo-metoden]“. I: (2013).

[4] toptal. *Dubble Sort*.

[5] Nitschky Schmidt Vestergaard. *Statistik C*. Systime, 2008.

A. Test