1 Monte Carlo Metoden

I dette afsnit vil opgaven vise og redegøre for hvad Monte Carlo Metoden er, og hvordan den kan anvendes til at udregne et integral.

Monte Carlo Metoden har sit navn efter Stanislaw Ulams onkel, som ofte spillede på Casino Monte Carlo i Monaco. Metoden refererer herved til de sandsynligheder og de tilfældige udkom der kan finde sted i sådanne spil. Ulam var en af de forskere der arbejdede på Monte Carlo Metoden under Manhatten Projektet, som blev iværksat i 1942 [**MSD**]. Metoden blev udviklet for at kunne simulere neutroners diffusion. Det var nødvendigt at udvikle og benytte denne metode, da problemet var for komplekst til at kunne blive afledt algebragisk eller blive løst med datidens metoder. Metoden blev først anvendt på gamle analoge computere, hvilket begrænsede kompleksiteten af simulationen [**AHF**].

Der ud over er Monte Carlo Metoden også en algoritme, hvilket betyder at det er en process som er udført i nogle logiske trin. Trinene beskriver udførelse af metoden. En algoritme kunne for eksempel være de trin, som er involveret i sorteringen et sæt kort. Lad kortspillet være et sæt kort og et element værende ét enkelt spillekort. Kortspillet kan således sorteres på følgende måde:

1. Vælg et vilkårligt element e_i fra sættet.
2. Placere elementet bagerst i sættet.
3. Sammenlign nu e_i med elementet lige før e_{i-1} hvis $e_i > e_{i-1}$ bytter de plads. Dette gentages indtil $e_i < e_{i-1}$ eller $i = 0$.
4. Gentag denne process indtil kortspillet er sorteret.

Denne sorterings algoritme er også kaldet boblesortering og navnet kommer af måden elementerne i sættet bobler til toppen. [**BS**]

I det følgende afsnit vil opgaven give et eksempel på, hvordan spillet Plat eller Krone kan ses som en simpel Monte Carlo Simulering.

1.1 Plat eller Krone

Et eksempel på udførelse af Monte Carlo Simulering er spillet Plat eller Krone. Spillets regler er som følgende:

1. Hver spiller satser på en side af mønten.
2. Mønten kastes op i luften.
3. Vinderen er den spiller hvis sats er den side af mønten der vender op af.

Man kan også beskrive Plat og Krone med et symmetrisk sandsynlighedsfelt (U, P), hvor udfaldsrummet $U = \{Plat, Krone\}$ og sandsynlighedsfunktionen P, hvor følgende er sandt, da det er et symmetrisk sandsynlighedsfelt:

$$P(Plat) = P(Krone) = \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

Vi kan desuden beskrive mønten med en stokastiske variable X. Den forventede værdi af X kan ligedes beskrives som værende $\mathbb{E}[X] = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ hvis $Plat = 1$ og $Krone = 2$ altså den gennemsnitlig værdi af udfaldsrummet.

Man kan finde frem til en approximering af den forventede værdi af X ved brug af Monte Carlo Simulering. I den sammenhæng lad $\mathbb{E}[X]$ være den forventede værdi af X. Vi kan derved opskrive følgende udsagn, hvor x_i er en konkret simulering af X:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \tag{1.2}$$

Vi kan udføre en simulering der simulere 1000 eksperimenter, hvor X er uafhængig.

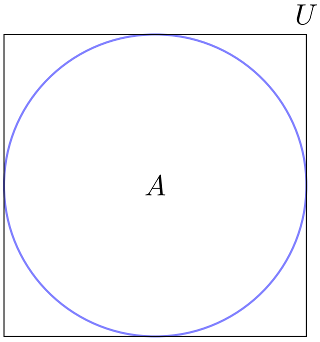
```
import random

random.seed(42)

print(sum([random.randint(1,2) for _ in range(1000)]) / 1000.000)
```

Dette giver os $\mathbb{E}[X] = 1{,}519$. Hvis vi udfører dette eksperiment 100 gange vil resultat varierer. Det skyldes, at X er tilfældigt bestemt for hver simulering og er uafhængig af forgående simuleringer. Det betragtes som normal opførelse for en fair mønt [**NM**].

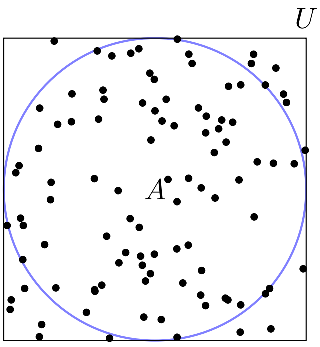
1.2 Numerisk integration

Det overstående eksempel med Plat eller Krone virker måske lidt dumt da vi med nemhed kan udlede det algebraisk ved at tage summen af udfaldsrummet og dele det med antallet af mulige udfald. Et andet tilfælde, hvor man kan anvende Monte Carlo Metoden er numerisk integration. I nogle tilfælde er det let at udlede integralet algebragisk, men der findes også tilfæde hvor det er umuligt. Disse figurer eller funktioners integraler kan udledes ved hjælp af numeriskemetoder, heriblandt Monte Carlo Metoden også kaldet Hit-or-Miss. [**SBM**]

Lad os betragte enhedscirkelen, der befinder sig inden for et kvadrat med dimensionerne 2×2. Denne figurs integral kan let udledes, men er valgt for nemheds skyld.



Vi kan starte med at bestemme udfaldsrummet af den overstående figur. Udfaldsrummet er U og indenholder alle de punkter der findes i kvadratets plan. Det integral vi ønsker at finde er cirklen, hvor vi lader de punkter der befinder si i cirklen være delmængde A. Desuden er sandsynligheden P for alle udfald i udfaldsrummet U lig hinanden. Det vil sige, at to givne udfald i U er sandsynligheden $P(u_1) = P(u_2)$. Dette betyder at der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, med et udfaldsrum der er bestående af punkter der findes på kvadratets plan. Den stokastiske variabel X vil ligeledes repræsentere et muligt punkt på kvadratets plan. Dette felt er i teorien et kontinuert sandsynlighedsfelt, hvilket også ville gøre vores stokastiske variabel til en kontinuerlig variabel.
Hvis vi har n stokastiske variabler X og n' betegner de stokastiske variabler, der ligger inden for cirklens areal altså således at hvis $X = (0{,}5; 0{,}5)$ vil det være et udfald i delmængden A. Det betyder, at alle elementer i delmængden A vil opfylde $a_i x^2 + a_i y^2 \leq 1^2$, hvor a_i er et konkret tilfælde og $a_i x$ er dets x koordinat samt $a_i y$ er dets y koordinat. Nedenstående figur viser et eksempel på n antal konkrete stokastiske variabler x_i i udfaldsrummet U, hvor n' er de konkrete x_i som befinder sig i A.



Vi kan herved udregne en approximering af sandsynligheden for $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n'}{n} \tag{1.3}$$

Hvis vi ønsker af finde arealet af cirklen skal vi gange med arealet af vores udfaldsrum, da dette var et kvadrat med dimensionerne 2×2 får vi følgende udtryk.

$$Areal(A) = \frac{n'}{n} \times 4 \tag{1.4}$$

En simulering af dette kan udtrykkes i følgende Python kode, hvor vi har 100000 konkrete stokastiske variabler

```
import random

random.seed(42)

kvadrattet = [(random.uniform(-1,1),
               random.uniform(-1,1)) for _ in range(100000)]
cirklen = [p for p in kvadrattet
             if p[0]*p[0] + p[1]*p[1] <= 1]

nk = len(kvadrattet) # lad dette vaere n
nc = len(cirklen)    # lad dette vaere n'
a = 2 * 2            # lad dette vaere arealet af kvadrattet

print("areal = {:d}/{:d}*{:d}={:f}".format(nc, nk, a, nc/nk*a))
```

Ud fra ovenstående simulering, vil arealet af cirklen være 3,140280 og derved vil $\pi = 3{,}140280$. Da fejlen ved udregningen af et integral på denne måde er $\sqrt{\frac{1}{n}}$ ville vi finde at vi skulle øge antallet af punkter med en faktor 100 for at reducere fejlen med en faktor 10 [**SBM**].