Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии (ИУ-7)»

Лабораторная работа № 5

Тема: Построение и программная реализация алгоритмов численного интегрирования.

Студент Сироткина П.Ю.

Группа ИУ7-46Б

Оценка (баллы)

Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2021 год

Цель работы: получение навыков построения алгоритма вычисления двукратного интеграла с использованием квадратурных формул Гаусса и Симпсона.

Задание: построить алгоритм и программу для вычисления двукратного интеграла при фиксированном значении параметра τ:

$$\varepsilon(\tau) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} [1 - \exp(-\tau \frac{l}{R})] \cos\theta \sin\theta \, d\theta ,$$

где $$\frac{l}{R} = \frac{2\cos\theta}{1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi},$$

θ, φ - углы сферических координат.

Применить метод последовательного интегрирования.

По одному направлению использовать формулу Гаусса, а по другому - формулу Симпсона.

Входные данные: количество узлов сетки N применения для внешнего интегрирования и количество узлов сетки M для применения внутреннего интегрирования, значения аргумента τ, выбор очередности применения методов для последовательного интегрирования (какой метод будет использоваться для внешнего случая, какой для внутреннего).

Выходные данные: значение интеграла при заданном аргументе τ, график зависимости в диапазоне τ ∊ [0.05, 10].

Описание алгоритма:

Пусть интеграл вычисляется на стандартном интервале [1; 1]. Задача состоит в том, чтобы подобрать точки t_1, t_2, …, t_n и коэффициенты A_1, A_2, ..., A_n так, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \qquad (1)$$

была точной для всех полиномов наивысшей возможной степени.

Для того, чтобы формула (5.1) была точна для полинома, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для степенных функций t^k при k = 0 … 2n – 1, т.е.:

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k \qquad k = 0,1,2,..,2n-1 \qquad (2)$$

Эта система дает 2n соотношений для определения 2n неизвестных A_i и T_i:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^2 = \frac{2}{3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{cases}$$

При этом:

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & , \text{ при } k \text{ четном} \\ 0 & , \text{ при } k \text{ нечетном} \end{cases}$$

Система нелинейная и решить ее довольна трудно.

Для ее решения используют полиномы Лежандра, которые определяются по формуле:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\ ,\quad n = 0,1,2,...$$

Полиномы Лежандра обладают рядом полезных свойств:

1) $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n$, $n = 0,1,2,...$;

2) $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{mn}N_m, N_m = \frac{2}{2m+1}$;

3) полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n различных и действительных корней, расположенных на интервале $[-1;1]$.

4) Справедливо рекуррентное соотношение

$$P_m(x) = \frac{1}{m}\left[(2m-1)\,x\,P_{m-1}(x) - (m-1)\,P_{m-2}(x)\right]\ .$$

По узлам интегрирования составляется многочлен n-степени:

$$w_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$$

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,P_m(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i w_n(x_i)P_m(x_i) = 0$$

Разложим $w_n(x)$ в ряд по ортогональным многочленам Лежандра:

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x)\ ,$$

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,P_m(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x)\right]P_m(x) = b_m N_m = 0\ ,$$

$m \le n-1$,

т.е. все коэффициенты $b_m = 0$ при $m \le n-1$. Значит $w_n(x)$ с точностью до численного множителя совпадает с $P_n(x)$.

Таким образом, узлами формулы Гаусса являются нули многочлена Лежандра степени n. Зная t_i, из линейной теперь системы первых n уравнений легко найти коэффициенты A_i. Определитель этой системы есть определитель Вандермонда.

Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов A_i и t_i, используя полином Лежандра и его свойства. Сам полином строится по рекуррентной формуле, а корни (t_i) ищутся численными методами, например, методом половинного деления. При этом корни полинома достаточно искать только на интервале [0;1], т.к. кратных корней не может быть в виду особенностей полинома, т.к. они все действительны и различны. Затем, с помощью найденных корней из системы определяются A_i.

Также необходимо проводить следующие преобразования для применения квадратурной формулы Гаусса:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \ .$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt \ ,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \ ,$$

Код программы:

```python
# Функция f(t) - степень черноты полупрозрачного однородного по объему цилиндра с большим отношением длины к радиу
def f(t):
    sub_func = lambda tetta, phi: 2 * cos(tetta) / (1 - sin(tetta) ** 2 * cos(phi) ** 2)
    main_func = lambda tetta, phi: (4 / pi) * (1 - exp(-t * sub_func(tetta, phi))) * cos(tetta) * sin(tetta)
    return main_func


# Конвертация функции с двумя переменными в функцию с одной переменной (вторая переменная считается константой)
def to_single_temp(f, value):
    return lambda y: f(value, y)


# Преобразование переменной t в x, [a;b] - интервал интегрирования
def convert_t_to_x(t, a, b):
    return (b + a) / 2 + (b - a) * t / 2


# Метод интегрирования, использующий формулу Симпсона
def simpson(func, a, b, degree):
    if degree < 3 or not degree % 2:
        raise ValueError
    h = (b - a) / (degree - 1)
    x = a
    result = 0
    for i in range((degree - 1) // 2):
        result += func(x) + 4 * func(x + h) + func(x + 2 * h)
        x += 2 * h
    return result * (h / 3)
```

```python
# Метод интегрирования, использующий формулу Симпсона
def simpson(func, a, b, degree):
    if degree < 3 or not degree % 2:
        raise ValueError
    h = (b - a) / (degree - 1)
    x = a
    result = 0
    for i in range((degree - 1) // 2):
        result += func(x) + 4 * func(x + h) + func(x + 2 * h)
        x += 2 * h
    result *= h / 3
    return result

# Метод интегрирования, использующий формулу Гаусса
def gauss(func, a, b, degree):
    args, coeffs = leggauss(degree)
    result = 0
    for i in range(degree):
        result += (b - a) / 2 * coeffs[i] * func(convert_t_to_x(args[i], a, b))
    return result
```

```python
# Вычисление двукратного интеграла
# f - интегрируемая функция
# limits - пределы интегрирования для каждого из интегралов (внутреннего и внешнего)
# degrees - количество узлов для каждого из направлений интегрирования
# integrators - функции интегрирования(внешняя и внутренняя)
def integrate_2_dims(f, limits, degrees, integrators):
    # Интегрирование внутренней функции
    internal_func = lambda x: integrators[1](to_single_temp(f, x), limits[1][0], limits[1][1], degrees[1])
    # Интегрирование внешней функции
    return integrators[0](internal_func, limits[0][0], limits[0][1], degrees[0])
```

Результат:

1. Описать алгоритм вычисления n корней полинома Лежандра n-ой степени $P_n(x)$ при реализации формулы Гаусса.

Эта процедура выполняется численным методом, например, можно применить метод половинного деления.

Суть половинного метода заключается в следующем: если на отрезке есть корень, то функция на концах рассматриваемого отрезка должна принимать разные значения. Сначала рассматривается весь отрезок, затем его делят пополам и берут ту из половинок, на концах которой функция по-прежнему принимает значения противоположных знаков. Если значение функции в серединной точке оказалось искомым нулём, то процесс завершается. Процедуру следует продолжать до достижения заданной точности. Для поиска произвольного значения достаточно вычесть из значения функции искомое значение и искать ноль получившейся функции.

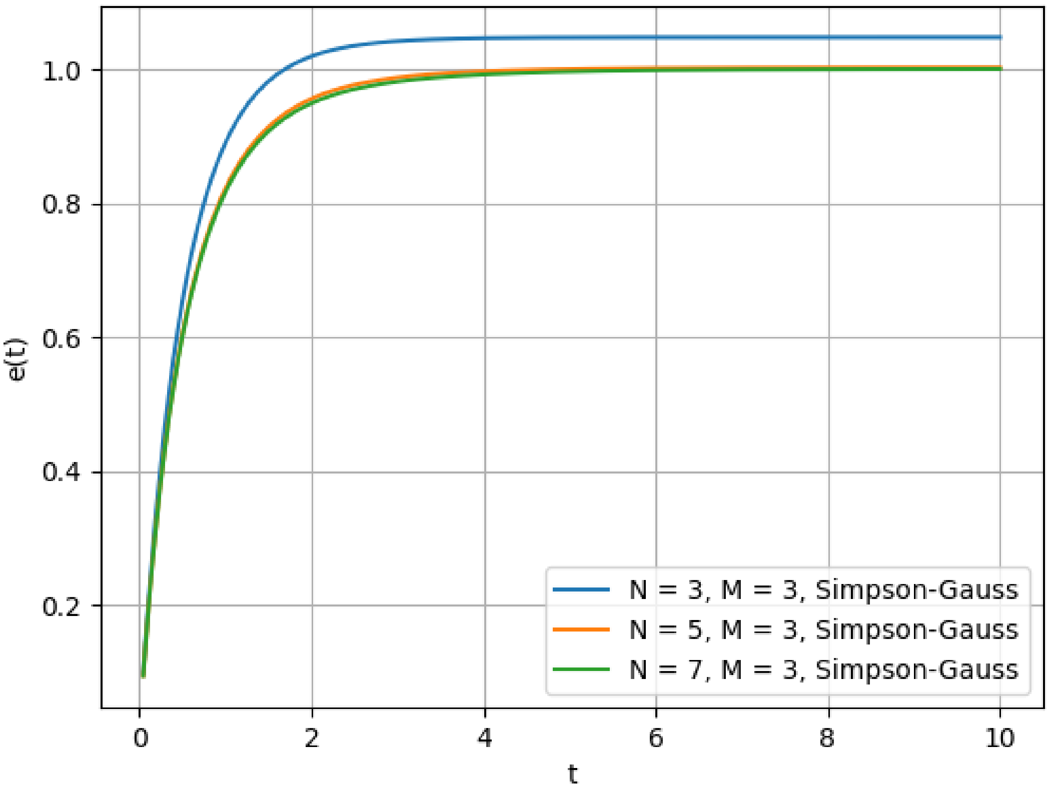
Сам полином строится по рекуррентной формуле, описанной выше, а для начала процесса используются полиномы $P_0(t)$ и $P_1(t)$ (рекуррентная база).

Процедура повторяется до тех пор, пока не будут найдены все n корней полинома.

При этом следует учитывать свойство полиномов, согласно которому все эти корни располагаются на интервале [1;1], и они все действительны и различны, т.е. кратных корней нет (поэтому можно искать корни только на половине интервала, т.е. [0;1]).

2. Исследовать влияние количества выбираемых узлов сетки по каждому направлению на точность расчетов.

Исследование для внешнего направления при методе Симпсона (количество узлов для внутреннего метода Гаусса везде равно 3):



Приведем для наглядности работу с интерфейсом:

```
Введите N для внешней функции: 3
Введите M для внутренней функции: 3
Введите параметр t: 1
Внешняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 2
Внутренняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 1
E(1.0) = 0.889
Завершить работу?
1) Да
2) Нет
```

```
Введите N для внешней функции: 5
Введите M для внутренней функции: 3
Введите параметр t: 1
Внешняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 2
Внутренняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 1
E(1.0) = 0.821
```

```
Введите N для внешней функции: 7
Введите M для внутренней функции: 3
Введите параметр t: 1
Внешняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 2
Внутренняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 1
E(1.0) = 0.815
```

M = 3: e(1) = 0.889

M = 5: e(1) = 0.821

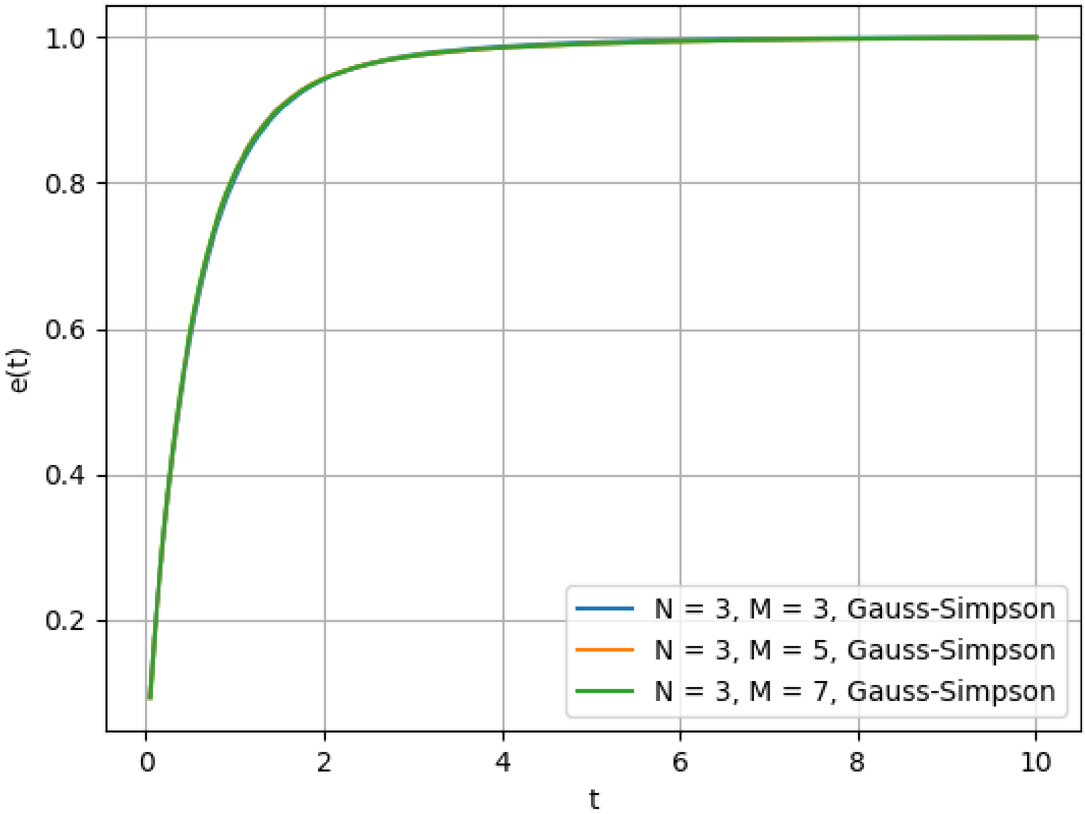
M = 7: e(1) = 0.815

Можно заметить, что при малой степени (M = 3) график является неточным и видна довольно большая погрешность, в то время как при степени M >= 5 графики почти неразличимы - это говорит о том, что все они строят одинаково хорошо и точно.

Истинное значение функции в этой точке составляет 0.814..., как видим, при M = 7 результат практически совпал (расхождения начались только после третьего знака после запятой).

Внутренний метод интегрирования при этом исследовании не менялся.

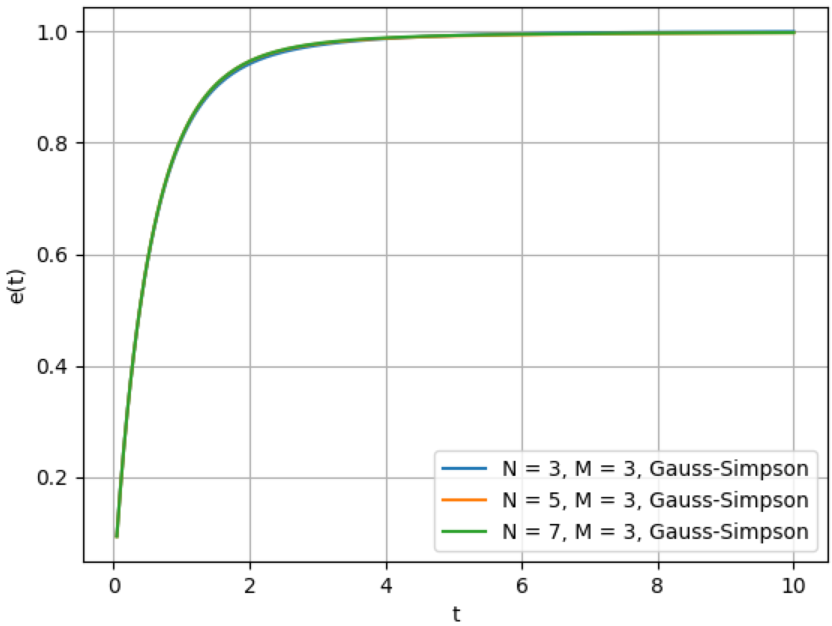
Теперь проанализируем метод Симпсона в качестве “внутреннего” метода, не меняя внешний.



Как видим, графики совпали.

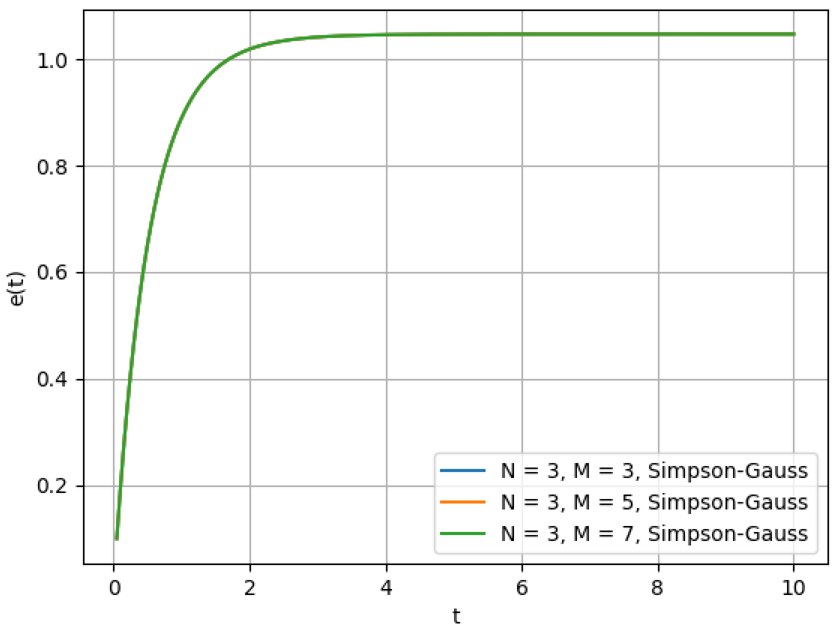
Можно сделать вывод, что формула Гаусса на внешнем направлении более эффективна. В качестве внешнего метода формула Симпсона будет вносить большие погрешности.

Проанализируем метод Гаусса в качестве внешнего, не меняя внутренний:



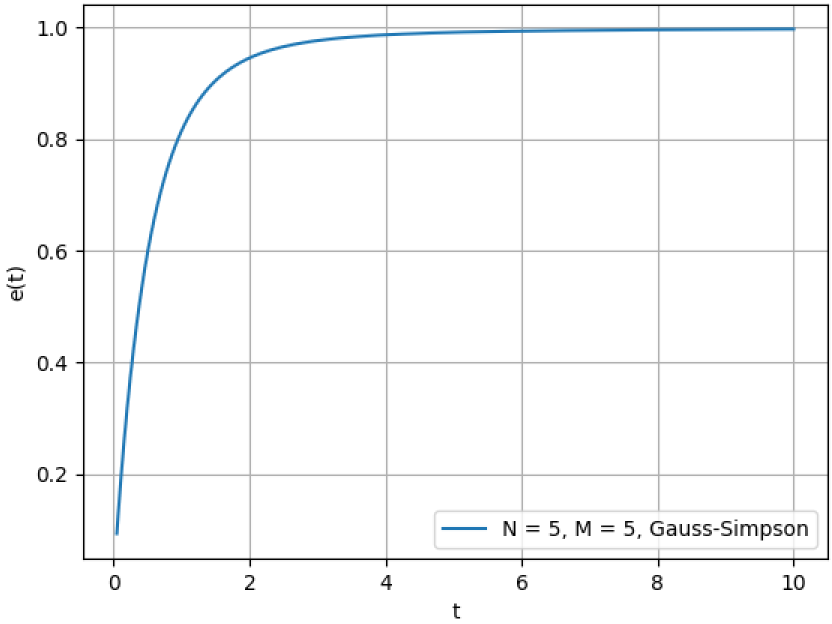
Графики совпали, что еще раз подтвердило вывод о том, что лучше использовать метод Гаусса в качестве внешнего.

Аналогично поступим для внутреннего:



Как видим, метод Симпсона в качестве внешнего вносит большую погрешность и значение e(t) превышает 1, хотя теоретически это невозможно.

<u>3. Построить график зависимости ε(τ) в диапазоне изменения [0.05-10]. Указать, при каком количестве узлов получены результаты.</u>



N = 5 и внешнем методом выбран метод Гаусса.

M = 5 и внутренним методом выбран метод Симпсона.

```
Введите N для внешней функции: 5
Введите M для внутренней функции: 5
Введите параметр t: 1
Внешняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 1
Внутренняя функция:
1) Функция Гаусса
2) Функция Симпсона
Ваш выбор: 2
E(1.0) = 0.814
```

Полученное значение e(1) очень близко к настоящему и дальнейшее увеличение количества узлов практически бессмысленно.

Ответы на контрольные вопросы:

1. В каких ситуациях теоретический порядок квадратурных формул численного интегрирования не достигается.

Порядок квадратурных формул численного интегрирования не достигается, когда подынтегральная функция не имеет соответствующих произвольных. Порядок точности равен порядку последней существующей производной.

Например, если на отрезке интегрирования не существуют 3 и 4 производные, то порядок точности формулы будет только 2.

2. Построить формулу Гаусса численного интегрирования при одном узле.

$$\sum_{i=1}^{n} Ai = 2$$

$$P_1(x) = x$$

$$\text{Очевидно, что корень этого полинома } x = 0$$

$$\text{Имеем}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot 0)dt = (b-a) \cdot f(\frac{b+a}{2})$$

3. Построить формулу Гаусса численного интегрирования при двух узлах.

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3 \cdot x^2 - 1)$$

$$\text{Откуда получаем } x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Система примет вид :}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} A_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Откуда} A_1 = A_2 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\text{Получаем}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} f((\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}) + (\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}))$$

4. Получить обобщенную кубатурную формулу для вычисления двойного интеграла методом последовательного интегрирования на основе формулы трапеций с тремя узлами по каждому направлению.

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy =$$

$$= \int_a^b F(x)dx = h_x(\frac{1}{2}F0 + F1 + \frac{1}{2}F2) =$$

$$= h_x \cdot h_y(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}f(x_0,y_0) + f(x_0,y_1) + \frac{1}{2}f(x_0,y_2)) +$$

$$+(\frac{1}{2}f(x_1,y_0) + f(x_1,y_1) + \frac{1}{2}f(x_1,y_2)) +$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}f(x_2,y_0) + f(x_2,y_1) + \frac{1}{2}f(x_2,y_2)))$$

$$h_x = \frac{b-a}{2}, h_y = \frac{d-c}{2}$$