**Министерство науки и высшего образования**

**Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана**

**(национальный исследовательский университет)»**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

**ФАКУЛЬТЕТ** «Информатика и системы управления»

**КАФЕДРА** «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии (ИУ-7)»

**Лабораторная работа № 4**

**Тема:** Построение и программная реализация алгоритма наилучшего среднеквадратичного приближения.

**Студент** Сироткина П.Ю.

**Группа** ИУ7-46Б

**Оценка (баллы)**

**Преподаватель** Градов В.М.

Москва, 2021 год

**Цель работы:**

Получение навыков построения алгоритма метода наименьших квадратов с использованием полинома заданной степени при аппроксимации табличных функций с весами.

**Исходные данные:**

1. Таблица функции с весами $p_i$ с количеством узлов N. Сформировать таблицу самостоятельно со случайным разбросом точек.
2. Степень аппроксимирующего полинома - n.

**Результат:** аппроксимирующий полином. Графическая иллюстрация: полином и сами точки.

**Описание алгоритма:**

Алгоритм наилучшего среднеквадратичного приближения целесообразно применять в тех случаях, когда значения функции в узлах определены неточно, или, когда требуется построить аппроксимирующую функцию для всего диапазона задания таблицы.

Под близостью в среднем исходной **y** и аппроксимирующей **φ** функций будем понимать результат оценки суммы:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2$$

□□ □ □ (1)

$P_i$ - вес точки.

Суммирование выполняется по всем N узлам заданной функции.

Необходимо найти наилучшее приближение, т.е.:

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = min \quad (2)$$

Разложим **φ** на линейно независимые функции:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(x) \quad (3)$$

Определим скалярное произведение в пространстве дискретно заданных функций:

$$(f, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \, f(x_i) \, \varphi(x_i), \;\; \rho_i > 0 .$$

Несложно установить, что:

1. $(f, \varphi) = (\varphi, f)$
2. $(f + \varphi, \gamma) = (f, \gamma) + (\varphi, \gamma)$

Подставим (3) в (2):

$$((y - \varphi), (y - \varphi)) = (y, y) - 2\sum_{k=0}^{n} a_k (y, \varphi_k) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = min$$

Дифференцируя это выражение по k a и приравнивая производные нулю, найдем:

$$\sum_{m=0}^{n}(\varphi_k,\varphi_m)\,a_m=(y,\varphi_k),\quad 0\le k\le n\ .$$

(4)

Матрица данной системы представляет собой матрицу Грама. Определитель этой матрицы в силу линейной независимости функций $\varphi_k(x)$ не равен нулю.

Следовательно, из системы (4) можно найти коэффициенты $a_k$, определяющие функцию $\varphi_k$ согласно (3) и минимизирующие (1). Таким образом, наилучшее среднеквадратичное приближение существует, и оно единственно.

В качестве $\varphi_k(x)$ чаще всего используют полиномы Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита, ортогональные с заданным весом.

Наиболее употребительный вариант метода наименьших квадратов соответствует случаю степенного вида функций $\varphi_k(x)$. Обычно степень полинома не превышает пяти-шести. Система уравнений (4) при этом принимает вид:

$$\sum_{m=0}^{n}(x^k,x^m)\ a_m=(y,x^k)\ ,\ 0\le k\le n\ ,$$

где $\quad (x^k,x^m)=\sum_{i=1}^{N}\rho_i x_i^{k+m},\quad (y,x^k)=\sum_{i=1}^{N}\rho_i y_i x_i^k\ .$

(5)

Итоговой алгоритм:

1. Выбирается степень полинома n<<N. Обычно степень полинома не превышает 5-6.

2. Составляется система линейных алгебраических уравнений типа (5).

3. В результате решения СЛАУ находятся коэффициенты полинома $a_k$.

**Код программы:**

Решение СЛАУ для нахождения коэффициентов полинома:

```
def solve_slae(p, x, y, degree):

    slae = make_slae(p, x, y, degree)

    for i in range(degree + 1):
        for j in range(degree + 1):
            if i == j:
                continue
            mul = slae[j][i] / slae[i][i]
            for k in range(degree + 2):
                slae[j][k] -= mul * slae[i][k]

    for i in range(degree + 1):
        div = slae[i][i]
        for j in range(degree + 2):
            slae[i][j] /= div

    return [slae[i][-1] for i in range(len(slae))]
```

Подфункция составления СЛАУ по имеющимся данным:

```
def make_slae(p, x, y, degree):

    slae = [0] * (degree + 1)
    for i in range(degree + 1):
        slae[i] = [0] * (degree + 2)

    for i in range(degree + 1):
        for j in range(degree + 1):
            slae[i][j] = get_coeff(p, x, x, i, j)
        slae[i][degree + 1] = get_coeff(p, y, x, 1, i)

    return slae
```

Подфункция вычисления так называемого скалярного произведения:

```python
def get_coeff(p, a, b, degree_a, degree_b):
    coeff = 0

    for i in range(len(p)):
        coeff += p[i] * (a[i] ** degree_a) * (b[i] ** degree_b)

    return coeff
```

Примечание:

В отчете приведены только ключевые функции. Организация меню, ввода и редактирования данных, рисовка графиков опущены, т.к. мешают описанию и понимаю главной идеи алгоритма в отчете и нагромождают его.

Полный код программы можно посмотреть в приложении к отчету.

**Результат работы программы:**

Таблица с одинаковыми весами:

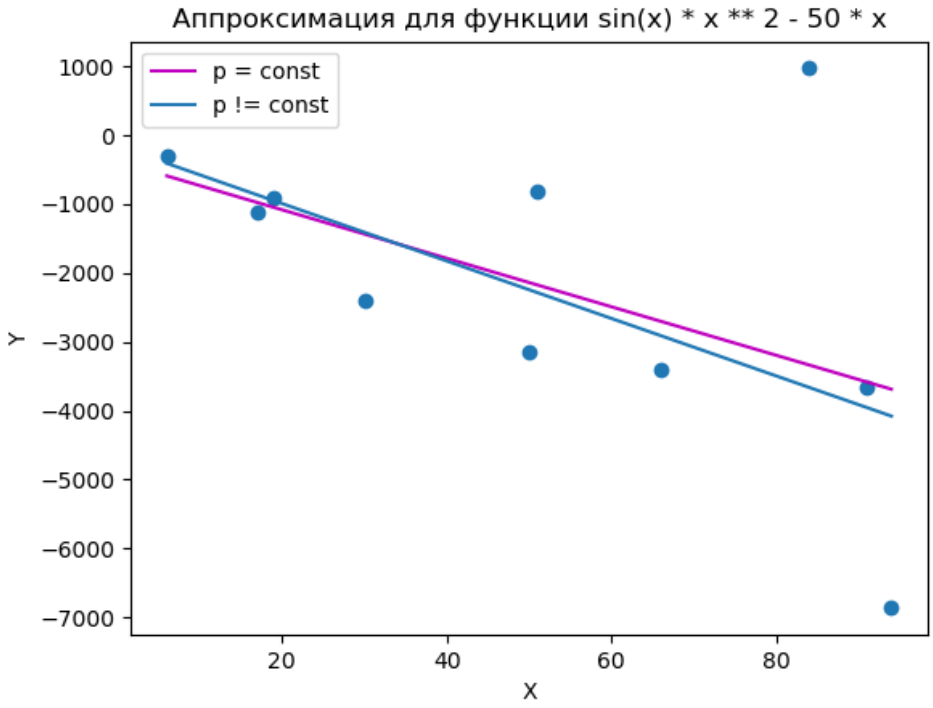
| № узла | X | Y | Вес |
|---|---|---|---|
| 1 | 6.00 | -310.06 | 1.00 |
| 2 | 17.00 | -1127.84 | 1.00 |
| 3 | 19.00 | -895.89 | 1.00 |
| 4 | 30.00 | -2389.23 | 1.00 |
| 5 | 50.00 | -3155.94 | 1.00 |
| 6 | 51.00 | -806.73 | 1.00 |
| 7 | 66.00 | -3415.66 | 1.00 |
| 8 | 84.00 | 973.39 | 1.00 |
| 9 | 91.00 | -3672.32 | 1.00 |
| 10 | 94.00 | -6867.05 | 1.00 |

Аналогичная таблица, в которой веса выбраны случайным образом:

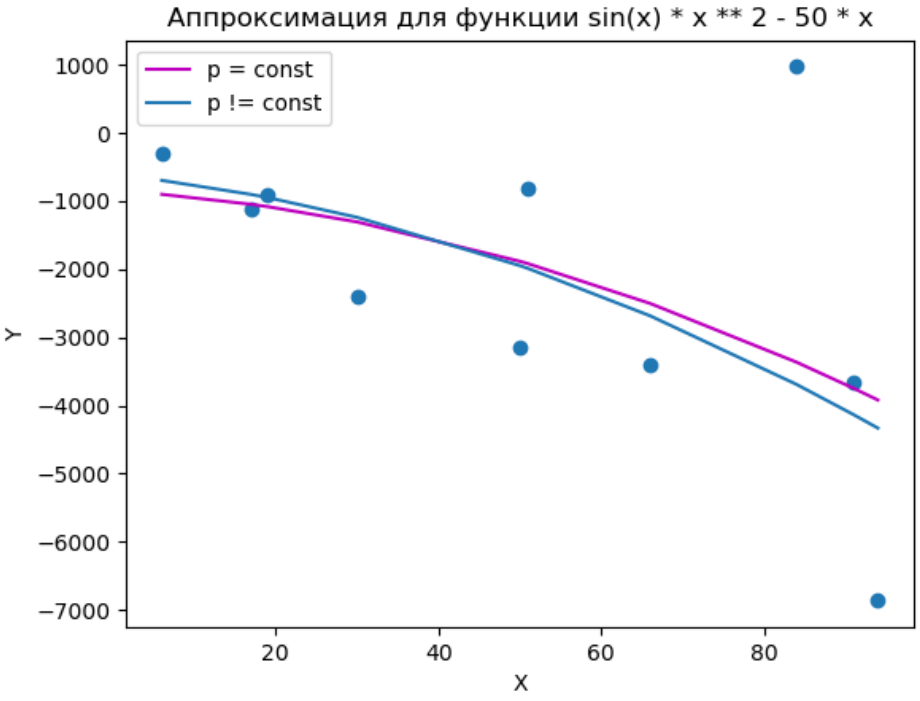
| № узла | X | Y | Вес |
|---|---|---|---|
| 1 | 6.00 | -310.06 | 0.85 |
| 2 | 17.00 | -1127.84 | 0.67 |
| 3 | 19.00 | -895.89 | 0.43 |
| 4 | 30.00 | -2389.23 | 0.11 |
| 5 | 50.00 | -3155.94 | 0.89 |
| 6 | 51.00 | -806.73 | 0.46 |
| 7 | 66.00 | -3415.66 | 0.83 |
| 8 | 84.00 | 973.39 | 0.62 |
| 9 | 91.00 | -3672.32 | 0.58 |
| 10 | 94.00 | -6867.05 | 0.84 |

Проведем сравнение в соответствии с приведенными выше данными:

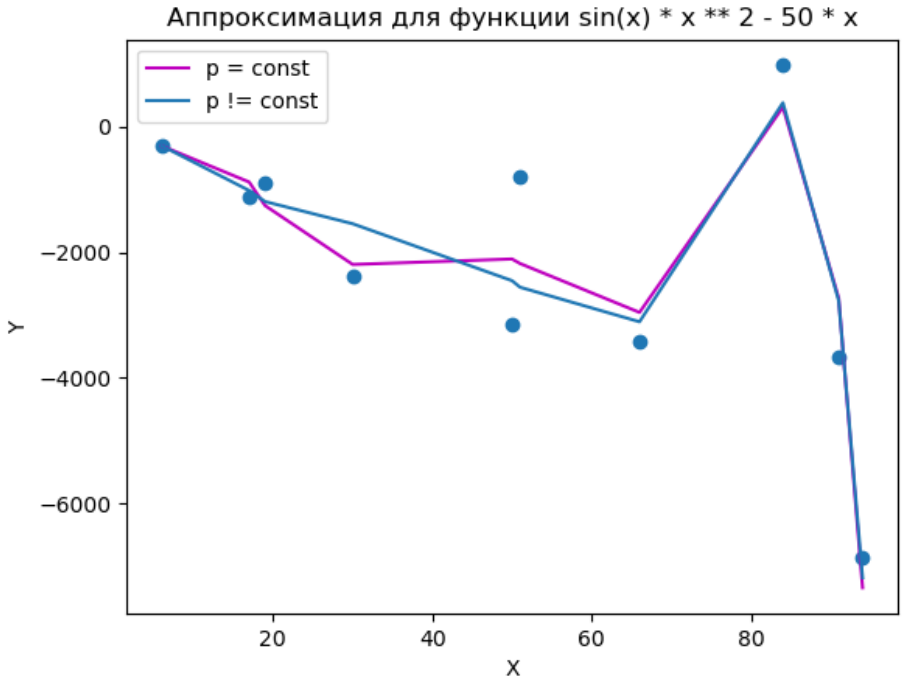
N = 1:


Аппроксимация для функции sin(x) * x ** 2 - 50 * x
p = const
p != const
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
−5000
−6000
−7000
Y
20
40
60
80
X

N = 2:


Аппроксимация для функции sin(x) * x ** 2 - 50 * x
p = const
p != const
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
−5000
−6000
−7000
Y
20
40
60
80
X

N = 6:




**Ответы на контрольные вопросы:**

***1. Что произойдет при задании степени полинома n=N-1 (числу узлов таблицы минус 1)?***

N точками можно однозначно определить полином N – 1 степени. Это означает, что следующее выражение будет тождественно равно 0:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i [y(x_i) - \varphi(x_i)]^2$$

Это значит, что никак не используется информация о весах точек. Следовательно, независимо от веса, полином будет иметь одни и те же коэффициенты.

***2. Будет ли работать Ваша программа при n >= N? Что именно в алгоритме требует отдельного анализа данного случая и может привести к аварийной остановке?***

Программа будет работать, но некорректно. Это связано с тем, что при n>= N уравнения СЛАУ перестают быть линейно зависимыми и определитель матрицы становится тождественно равен нулю. К аварийной

остановке может привести деление на ноль (в своей программе я решала СЛАУ методом Гаусса-Жордана, ошибка может произойти при приведении диагональной матрицы к единичной). Лучше всего проводить анализ во время ввода степени полинома и количества узлов в таблице, хотя так же можно обрабатывать эту ситуацию и во время решения СЛАУ.

***3. Получить формулу для коэффициента полинома $a_0$ при степени полинома n=0. Какой смысл имеет величина, которую представляет данный коэффициент?***

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} \rho_i}$$

Разделив числитель и знаменатель на сумму весов по всем узлам, то получим математическое ожидание:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \rho_i$$

***4. Записать и вычислить определитель матрицы СЛАУ для нахождения коэффициентов полинома для случая, когда n = N = 2. Принять все $p_i$ =1.***

Система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_0 + (x_0 + x_1) \cdot a1 + (x_0^2 + x_1^2) \cdot a_2 &= y_0 + y_1 \\ (x_0 + x_1) \cdot a_0 + (x_0^2 + x_1^2) \cdot a1 + (x_0^3 + x_1^3) \cdot a_2 &= y_0 \cdot x_0 + y_1 \cdot x_1 \\ (x_0^2 + x_1^2) \cdot a_0 + (x_0^3 + x_1^3) \cdot a1 + (x_0^4 + x_1^4) \cdot a_2 &= y_0 \cdot x_0^2 + y_1 \cdot x_1^2 \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен 0:

$$\begin{aligned} \triangle = (x_0^2 + x_1^2) \cdot (x_0^4 + x_1^4) + (x_0 + x_1) \cdot (x_0^3 + x_1^3) \cdot (x_0^2 + x_1^2) + (x_0^2 + x_1^2) \cdot (x_0 + x_1) \cdot (x_0^3 + x_1^3) \\ - (x_0^2 + x_1^2) \cdot (x_0^2 + x_1^2) \cdot (x_0^2 + x_1^2) - (x_0^3 + x_1^3) \cdot (x_0^3 + x_1^3) - (x_0 + x_1) \cdot (x_0 + x_1) \cdot (x_0^4 + x_1^4) = 0 \end{aligned}$$

Система не будет иметь решений, как это было описано ранее при ответе на вопрос 2.

***5. Построить СЛАУ при выборочном задании степеней аргумента полинома***

***□ ( x ) □ a 0 □ a 1 x m □ a 2 x n , причем степени n и m в этой формуле известны.***

***6. Предложить схему алгоритма решения задачи из вопроса 5, если степени n и m подлежат определению наравне с коэффициентами $a_k$, т.е. количество неизвестных равно 5.***