Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии (ИУ-7)»

Лабораторная работа № 6

Тема: Построение и программная реализация алгоритмов численного дифференцирования.

Студент Сироткина П.Ю.

Группа ИУ7-46Б

Оценка (баллы)

Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2021 год

Цель работы: получение навыков построения алгоритма вычисления производных от сеточных функций.

Задание:

Задана табличная (сеточная) функция. Имеется информация, что закономерность, представленная этой таблицей, может быть описана формулой:

$$y = \frac{a_0 x}{a_1 + a_2 x},$$

При этом параметры функции неизвестны и определять их не нужно.

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571					
2	0.889					
3	1.091					
4	1.231					
5	1.333					
6	1.412					

Вычислить первые разностные производные от функции и занести их в столбцы (1)-(4) таблицы:

1 - односторонняя разностная производная.

2 - центральная разностная производная.

3 – 2-я формула Рунге с использованием односторонней производной.

4 - введены выравнивающие переменные.

В столбец 5 занести вторую разностную производную.

Результат работы программы:

Заполненная таблица.

В отчете дать краткие комментарии по поводу использованных формул и их точности.

Код программы:

Реализация алгоритмов:

```python
def left_diff_derivative(y, step, i):
    if i > 0:
        return (y[i] - y[i - 1]) / step
    else:
        return None

def right_diff_derivative(y, step, i):
    if i + 1 < len(y):
        return (y[i + 1] - y[i]) / step
    else:
        return None

def center_diff_derivative(y, step, i):
    if 0 < i < (len(y) - 1):
        return (y[i + 1] - y[i - 1]) / (2 * step)
    else:
        return None

def second_diff_derivative(y, step, i):
    if 0 < i < (len(y) - 1):
        return (y[i - 1] - 2 * y[i] + y[i + 1]) / (step ** 2)
    else:
        return None


def runge_left_derivative(y, step, i):
    if i > 1:
        f = left_diff_derivative(y, step, i)
        w = (y[i] - y[i - 2]) / (2 * step)
        return 2 * f - w
    else:
        return None

def align_vars_derivative(x, y, i):
    if i > (len(y) - 2):
        return None
    else:
        align_vars_diff = (1 / y[i + 1] - 1 / y[i]) / (1 / x[i + 1] - 1 / x[i])
        return y[i] * y[i] / (x[i] * x[i]) * align_vars_diff
```

Организация вывода данных на экран:

```python

x = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
y = [0.571, 0.889, 1.091, 1.231, 1.333, 1.412]

def print_float(value):
    if value == None:
        print("┃" + " " * 3 + "----" + " " * 2, end=" ")
    else:
        print("┃" + str("%9.3f" % value), end=" ")
def print_char(value):
    print("┃" + " " * 4 + value + " " * 4, end=" ")
def print_header():
    print("┏" + ("━" * 10 + "┳") * 6 + "━" * 10 + "┓")
def print_end():
    print("\n┗" + ("━" * 10 + "┻") * 6 + "━" * 10 + "┛")
def print_between_line():
    print("\n┣" + ("━" * 10 + "╋") * 6 + "━" * 10 + "┫")


print_header()
print_char("x")
print_char("y")
for i in range(1, 6):
    print_char(str(i))
print("┃", end="")
print_between_line()

step = x[1] - x[0]

for i in range(len(x)):
    print_char(str(x[i]))
    print_float(y[i])
    print_float(left_diff_derivative(y, step, i))
    print_float(center_diff_derivative(y, step, i))
    print_float(runge_left_derivative(y, step, i))
    print_float(align_vars_derivative(x, y, i))
    print_float(second_diff_derivative(y, step, i))
    print("┃", end=" ")
    if i != (len(x) - 1):
        print_between_line()

print_end()
```

Результат работы программы:

x	y	1	2	3	4	5
1	0.571	----	----	----	0.408	----
2	0.889	0.318	0.260	----	0.247	-0.116
3	1.091	0.202	0.171	0.144	0.165	-0.062
4	1.231	0.140	0.121	0.109	0.118	-0.038
5	1.333	0.102	0.090	0.083	0.089	-0.023
6	1.412	0.079	----	0.068	----	----

Комментарии к полученным результатам:

1. ***Односторонняя разностная производная.***

   В вычислениях использовалась следующая формула для односторонней разностной производной (в данном случае левой):

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)\,.$$

   Формула выводится на основе разложения в ряды Тейлора, принимая за центр разложения точку x_n:

$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y_n'' - \frac{h^3}{3!}y_n''' + \frac{h^4}{4!}y_n^{IV} - \ldots$$

   Правая односторонняя производная выводится аналогично.

   Порядок точности: O(h).

2. ***Центральная разностная производная.***

В вычислениях использовалась следующая формула:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)\,.$$

Формула выводится на основе разложения в ряды Тейлора, принимая за центр разложения точку x_n:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \frac{h^3}{3!}y_n''' + \frac{h^4}{4!}y_n^{IV} + \ldots.$$

$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y_n'' - \frac{h^3}{3!}y_n''' + \frac{h^4}{4!}y_n^{IV} - \ldots.$$

Вычитая нижнее выражение из верхнего, получим искомую формулу.

Порядок точности: $O(h^2)$.

3. 2-ая формула Рунге с использованием односторонней производной.

В вычислениях использовалась следующая формула:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})\,.$$

Погрешность многих дифференциальных формул имеет вид:

$$R = \psi(x)\,h^p,$$

где $\psi(x)$ - некоторая функция.

Если некоторая приближенная формула Ф для вычисления величины Ω имеет следующую структуру:

$$\Omega = \Phi(h) + \psi(x) h^p + O(h^{p+1}), \tag{1}$$

То, записав разностный аналог второй производной (см. дальше) для сетки с шагом mh, получим:

$$\Omega = \Phi(mh) + \psi(x)(mh)^p + O(h^{p+1}). \tag{2}$$

Организуем разность следующих величин:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y'_0 + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \frac{h^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots.$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2!} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''' + \frac{(2h)^4}{4!} y_0^{IV} + \ldots.$$

И получим 1-ую формулу Рунге:

$$\psi(x) h^p = \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1}).$$

В этих формулах p - точность используемой формулы.

Комбинируя (1) и (2) выражение, получим 2-ую формулу Рунге, позволяющую за счет расчета на двух сетках с отличающимися шагами получить решение с более высокой точностью, чем заявленная теоретическая точность используемой формулы:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1}).$$

Порядок точности: $O(h^2)$.

4. *Использование выравнивающих переменных при дифференцировании.*

В вычислениях использовалась следующая формула:

$$y'_x = y'_\eta \eta'_\xi \xi'_x = \frac{\eta'_\xi \xi'_x}{\eta'_y}.$$

Где $\xi = \xi(x),\ \eta = \eta(y)$ - выравнивающие переменные.

При удачном выборе этих переменных исходная кривая может быть преобразована в прямую линию, производная от которых вычисляется точно по самым простым формулам.

В данной реализации использовались следующие выравнивающие переменные:

$$\eta(y) = 1/y$$
$$\xi(x) = 1/x$$

В конкретном случае алгоритм можно описать следующим образом:

$$y'(x) = \frac{\eta'(\xi) \cdot \xi'(x)}{\eta'(y)}$$
$$\eta'(y) = -\frac{1}{y^2}$$
$$\xi'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$\eta'(\xi)$определяется по формуле

односторонней (правой) разностной производной :

$$\eta'(\xi) = \frac{\left(\frac{1}{y_i+1} - \frac{1}{y_i}\right)}{\left(\frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_i}\right)}$$

Итоговая формула :

$$y'(x) = \frac{\eta'(\xi) \cdot \xi'(x)}{\eta'(y)} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{y_i+1} - \frac{1}{y_i}\right)}{\left(\frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_i}\right)}$$

Порядок точности: оценка затруднительная, так как неизвестны точные параметры, однако этот метод в целом имеет высокую точность.

5. ***Вторая разностная производная.***

В вычислениях использовалась следующая формула:

$$y_n'' = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + O(h^2)\,.$$

Формула выводится на основе разложения в ряды Тейлора, принимая за центр разложения точку x_n:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \frac{h^3}{3!}y_n''' + \frac{h^4}{4!}y_n^{IV} + \ldots.$$

$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!}y'_n + \frac{h^2}{2!}y_n'' - \frac{h^3}{3!}y_n''' + \frac{h^4}{4!}y_n^{IV} - \ldots.$$

Сложив эти выражения и выразив y′′(n), получим искомое выражение.

Порядок точности: в общем случае $O(h^2)$.

Ответы на контрольные вопросы:

1. Получить формулу порядка точности $O(h^2)$ для первой разностной производной y'_N в крайнем правом узле x_N.

$$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!} \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_n - \frac{h^3}{3!} \cdot y'''_n + \ldots$$

$$y_{n-2} = y_n - \frac{2 \cdot h}{1!} \cdot y'_n + \frac{4 \cdot h^2}{2!} \cdot y''_n - \frac{8 \cdot h^3}{3!} \cdot y'''_n + \ldots$$

$$4 \cdot y_{n-1} - y_{n-2} = 3 \cdot y_n - 2 \cdot h \cdot y'_n + O(h^2)$$

$$y'_n = \frac{y_{n-2} - 4 \cdot y_{n-1} + 3 \cdot y_n}{2} + O(h^2)$$

2. Получить формулу порядка точности O(h^2) для второй разностной производной y''_0 в крайнем левом узле x_0.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} \cdot y'_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_0 + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''_0 + \ldots$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2 \cdot h}{1!} \cdot y'_0 + \frac{4 \cdot h^2}{2!} \cdot y''_0 + \frac{8 \cdot h^3}{3!} \cdot y'''_0 + \ldots$$

$$4 \cdot y_1 - y_2 = 3 \cdot y_0 + 2 \cdot h \cdot y'_0 + O(h^2)$$

$$y'_0 = \frac{4 \cdot y_1 - y_2 - 3 \cdot y_0}{2 \cdot h} + O(h^2)$$

$$y_1 + y_2 = 2 \cdot y_0 + 3 \cdot h \cdot y'_0 + \frac{5}{2} \cdot h^2 \cdot y''_0 + O(h^2)$$

$$y''_0 = (y_1 + y_2 - 2 \cdot y_0 - 3 \cdot h \cdot y'_0) \cdot \frac{2}{5 \cdot h^2} + O(h^2)$$

$$\text{Учтем } y'_0 = \frac{4 \cdot y_1 - y_2 - 3 \cdot y_0}{2 \cdot h} + O(h^2)$$

$$\text{Получим :}$$

$$y''_0 = (y_1 + y_2 - 2 \cdot y_0 - 3 \cdot h \cdot \frac{4 \cdot y_1 - y_2 - 3 \cdot y_0}{2 \cdot h}) \cdot \frac{2}{5 \cdot h^2} + O(h^2)$$

$$\text{Преобразуем :}$$

$$y''_0 = (\frac{2 \cdot h \cdot y_1 + 2 \cdot h \cdot y_2 - 4 \cdot h \cdot y_0 - 12 \cdot h \cdot y_1 + 3 \cdot h \cdot y_2 + 9 \cdot h \cdot y_0}{2 \cdot h}) \cdot \frac{2}{5 \cdot h^2} + O(h^2)$$

$$y''_0 = (\frac{5 \cdot y_0}{2} - 5 \cdot y_1 + \frac{5 \cdot y_2}{2}) \cdot \frac{2}{5 \cdot h^2} + O(h^2)$$

$$\text{Итоговая формула : } y''_0 = \frac{y_0 - 2 \cdot y_1 + y_2}{h^2} + O(h^2)$$

3. Используя 2-ую формулу Рунге, дать вывод выражения (9) из Лекции № 7 для первой производной y'_0 в левом крайнем узле.

Выражение (9) из лекции №7:

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + \frac{2h^2}{3!} y'''_0 + \ldots = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)\,. \tag{9}$$

2-ая формула Рунге:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(mh)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})\,.$$

Вывод:

$$\Omega = \Phi(h) + \frac{\Phi(h) - \Phi(m \cdot h)}{m^p - 1} + O(h^{p+1})$$

$$m = 2, p = 1$$

$$\Omega = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot h}}{2^1 - 1} + O(h^2)$$

$$\Omega = 2 \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot h} + O(h^2)$$

$$\Omega = \frac{-3 \cdot y_0 + 4 \cdot y_1 - y_2}{2 \cdot h} + O(h^2)$$

4. Любым способом из Лекций № 7, 8 получить формулу порядка точности $O(h^3)$ для первой разностной производной y'_0 в крайнем левом узле x_0.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} \cdot y'_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_0 + \frac{h^3}{3!} \cdot y'''_0 + O(h^3)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2 \cdot h}{1!} \cdot y'_0 + \frac{4 \cdot h^2}{2!} \cdot y''_0 + \frac{8 \cdot h^3}{3!} \cdot y'''_0 + O(h^3)$$

$$y_3 = y_0 + \frac{3 \cdot h}{1!} \cdot y'_0 + \frac{9 \cdot h^2}{2!} \cdot y''_0 + \frac{27 \cdot h^3}{3!} \cdot y'''_0 + O(h^3)$$

$$\text{Из 1 выражения :}$$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0 - \frac{h^2}{2!}\cdot y_0'' - \frac{h^3}{3!}\cdot y_0'''}{h} + O(h^3)$$

$$\text{Из 2 выражения :}$$

$$y_0'' = \frac{y_2 - y_0 - 2\cdot h\cdot y_0' - \frac{4}{3}\cdot h^3\cdot y_0'''}{2\cdot h^2} + O(h^3)$$

$$\text{Из 3 выражения :}$$

$$y_0''' = \frac{y_3 - y_0 - 3\cdot h\cdot y_0' - \frac{9}{2}\cdot h^2\cdot y_0''}{\frac{9}{2}\cdot h^3} + O(h^3)$$

$$\text{Подставим } y_0''' \text{ в } y_0'' \text{ :}$$

$$y_0'' = \frac{y_2 - y_0 - 2\cdot h\cdot y_0' - \frac{4}{3}\cdot h^3\cdot \frac{y_3 - y_0 - 3\cdot h\cdot y_0' - \frac{9}{2}\cdot h^2\cdot y_0''}{\frac{9}{2}\cdot h^3}}{2\cdot h^2} + O(h^3)$$

$$\text{Упростим :}$$

$$y_0'' = \frac{-\frac{19}{9}\cdot y_0 + 3\cdot y_2 - \frac{8}{9}\cdot y_3 - \frac{10}{3}\cdot h\cdot y_0'}{2\cdot h^2} + O(h^3)$$

$$\text{Подставим } y_0'' \text{ в } y_0''' \text{ :}$$

$$y_0''' = \frac{y_3 - y_0 - 3\cdot h\cdot y_0' - \frac{9}{2}\cdot h^2\cdot \frac{-\frac{19}{9}\cdot y_0 + 3\cdot y_2 - \frac{8}{9}\cdot y_3 - \frac{10}{3}\cdot h\cdot y_0'}{2\cdot h^2}}{\frac{9}{2}\cdot h^3} + O(h^3)$$

$$\text{Упростим :}$$

$$y_0''' = \frac{\frac{15}{4}\cdot y_0 - \frac{27}{4}\cdot y_2 + 3\cdot y3 + \frac{9}{2}\cdot h\cdot y_0'}{\frac{9}{2}\cdot h^3} + O(h^3)$$

$$\text{Подставим } y_0'' \text{ и } y_0''' \text{ в } y_0' \text{ :}$$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0 - \frac{h^2}{2!}\cdot y_0'' - \frac{h^3}{3!}\cdot y_0'''}{h} + O(h^3)$$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0 - \frac{h^2}{2!}\cdot \frac{-\frac{19}{9}\cdot y_0 + 3\cdot y_2 - \frac{8}{9}\cdot y_3 - \frac{10}{3}\cdot h\cdot y_0'}{2\cdot h^2} - \frac{h^3}{3!}\cdot \frac{\frac{15}{4}\cdot y_0 - \frac{27}{4}\cdot y_2 + 3\cdot y3 + \frac{9}{2}\cdot h\cdot y_0'}{\frac{9}{2}\cdot h^3}}{h} + O(h^3)$$

$$\text{Упростим :}$$

$$y_0' = \frac{-99\cdot y_0 + 72\cdot y_1 - 36\cdot y_2 + 8\cdot y_3}{24\cdot h} + O(h^3)$$

- итоговая формула.