Math pour bras motorisé 5 servomoteurs (3 segments mobiles + base rotative + pince)

Par X. HINAULT – Juillet -Aout 2011 – Tous droits réservés – www.mon-club-elec.fr

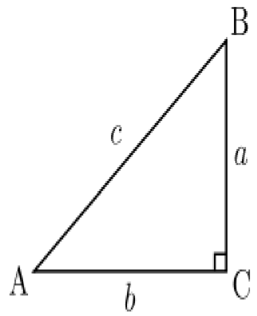
- L'objectif ici est de trouver comment calculer les angles d'un bras robotisé pour préhension d'un objet (une balle) à partir de la position connue de l'objet. La position correspondra au centre de la balle et au centre de la pince du bras robotisé.
- L'application envisagée à terme est de pouvoir réaliser la préhension d'un objet automatiquement par le bras robotisé à partir du calcul de sa position à partir d'une reconnaissance visuelle de l'objet par traitement programmé d'une image vidéo issue d'une webcam, permettant ainsi un comportement évolué du bras robotisé qui sera capable de saisir des objets sans connaissance préalable de la position d'un objet.

Préalables mathématiques utiles (rappels...)

Théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore — Si un triangle ABC est rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

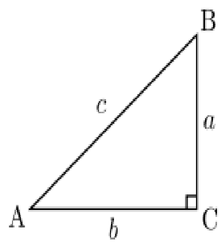
Avec les notations usuelles $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ (*cf* figure ci-dessous), la formule s'écrit encore : $a^2 + b^2 = c^2$.



Voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Pythagore

Trigonométrie du triangle rectangle

Une définition possible des fonctions trigonométriques est d'utiliser les triangles rectangles, c'est-à-dire les triangles qui possèdent un angle droit (90° degrés ou π/2 radians).



Et parce que la somme des angles d'un triangle fait 180° (ou π radians), l'angle le plus grand dans un tel triangle est l'angle droit. Le côté le plus long dans un triangle rectangle, c'est-à-dire le côté opposé à l'angle le plus grand (l'angle droit), s'appelle l'hypoténuse.

Dans la figure à droite, l'angle $\widehat{ACB}$ forme l'angle droit. Le côté AB l'hypoténuse.

Les fonctions trigonométriques se définissent ainsi, avec l'angle $\widehat{BAC} = A$:

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{b}{c} \qquad \tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{a}{b}$$

Avec *opp* pour longueur du côté opposé, *adj* pour longueur du côté adjacent et *hyp* pour longueur de l'hypoténuse.

Ce sont les fonctions trigonométriques les plus importantes. Elles ont été définies pour les angles entre 0° et 90° (soit entre 0 et π/2 radians). En utilisant le cercle unité, on peut étendre cette définition.

Voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Trigonom%C3%A9trie

Théorème de Al-kashi (ou pythagore généralisé)

Le théorème d'Al-Kashi est également connu sous le nom de **théorème de Pythagore généralisé** [4], car le théorème de Pythagore en est un cas particulier :

L'angle γ est droit (autrement dit lorsque cos γ = 0) si et seulement si $c^2 = a^2 + b^2$, d'après le théorème d'Al-Kashi.

Le théorème s'utilise en triangulation (voir Fig. 3) pour résoudre un triangle, à savoir déterminer

- le troisième côté d'un triangle dont on connaît un angle et les côtés adjacents :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma};$$

- les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés :

$$\gamma = \arccos\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ces formules sont instables numériquement dans le cas de triangles en épingle, c'est-à-dire lorsque *c* est petit devant *a* et *b* — ou, de façon équivalente, lorsque γ est petit devant 1.

Il existe un corollaire du théorème d'al-Kashi : pour deux triangles directement semblables ABC et A'B'C'

$$cc' = aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\gamma.$$

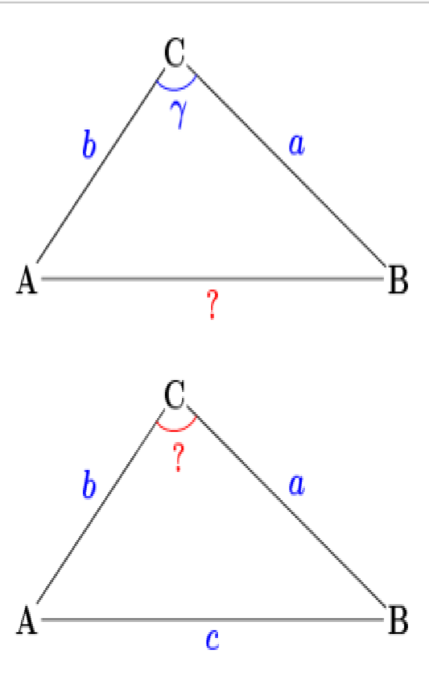


Fig. 3 - Utilisation du théorème d'Al-Kashi : angle ou côté inconnu.

Voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27Al-Kashi

Ressources utilisées

- Ce document a été réalisé sous Ubuntu (Gnu/Linux) avec la suite bureautique libre OpenOffice devenue LibreOffice (voir : http://fr.libreoffice.org/)
- Les schémas géométriques présentés ici ont été réalisés sous Ubuntu (Gnu/Linux) à l'aide de l'excellent logiciel libre Geogebra (voir : http://www.geogebra.org/cms/fr)

Cas simplifié d'un bras à 2 segments mobiles

J'ai commencé par étudier ce cas plus simple en phase préparatoire d'un bras à 3 segments.

Structure du bras

Soit un bras à 2 segments :

- P1(x1,y1) est l'axe de rotation (servomoteur) du premier segment r1
- P2(x2,y2) est l'axe de rotation (servomoteur) du second segment r2
- P(x,y) est la position de l'objet à prendre, P correspond en fait au centre de la pince du bras.

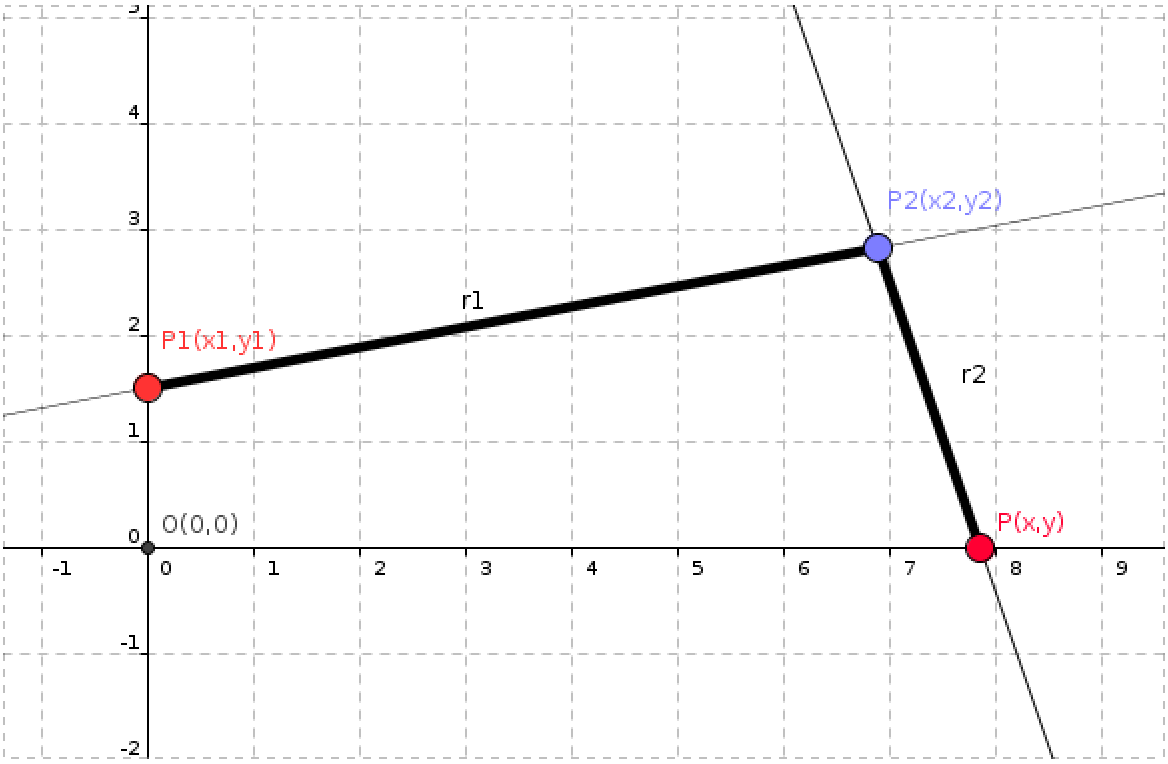
Ce bras est donc composé de 2 segments de longueur connue :

- r1 entre P1(x1,y1) et P2(x2,y2)
- r2 entre P2(x2,y2) et P(x,y)

Par convention :

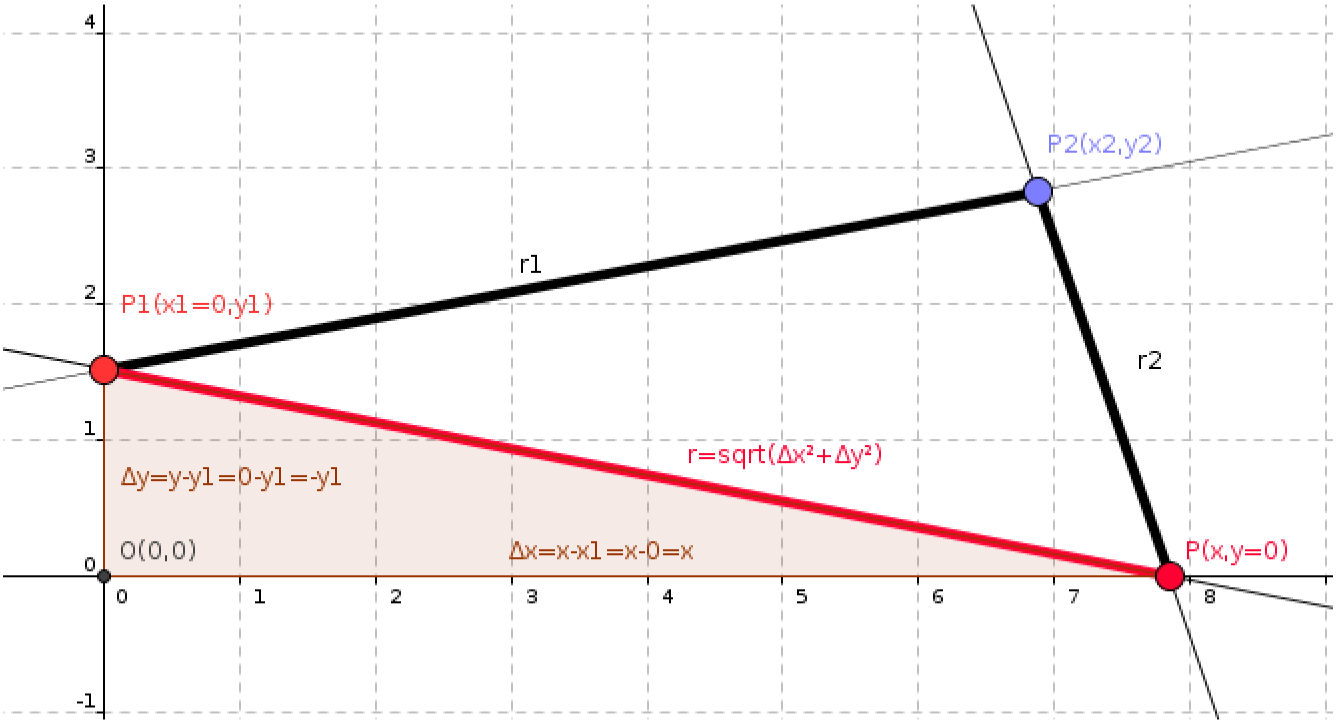
- on fait passer l'axe des abscisses par P(x,y), et donc y=0.
- on fait passer l'axe des ordonnées par P1(x1,y1) et donc x1=0
- on appelle O le point O(0,0)

Graphiquement, on a :



Calcul du segment r

Afin de pouvoir réaliser des calculs d'angles dans le triangle P1,P2,P, à l'aide du théorème de Al-Kashi, il est nécessaire de connaître la longueur du segment [P1,P]. On appelle r, la distance entre P1(x1,y1) et P(x,y). Il est facile de calculer r dans le triangle rectangle P1,0,P à l'aide du théorème de Pythagore selon :

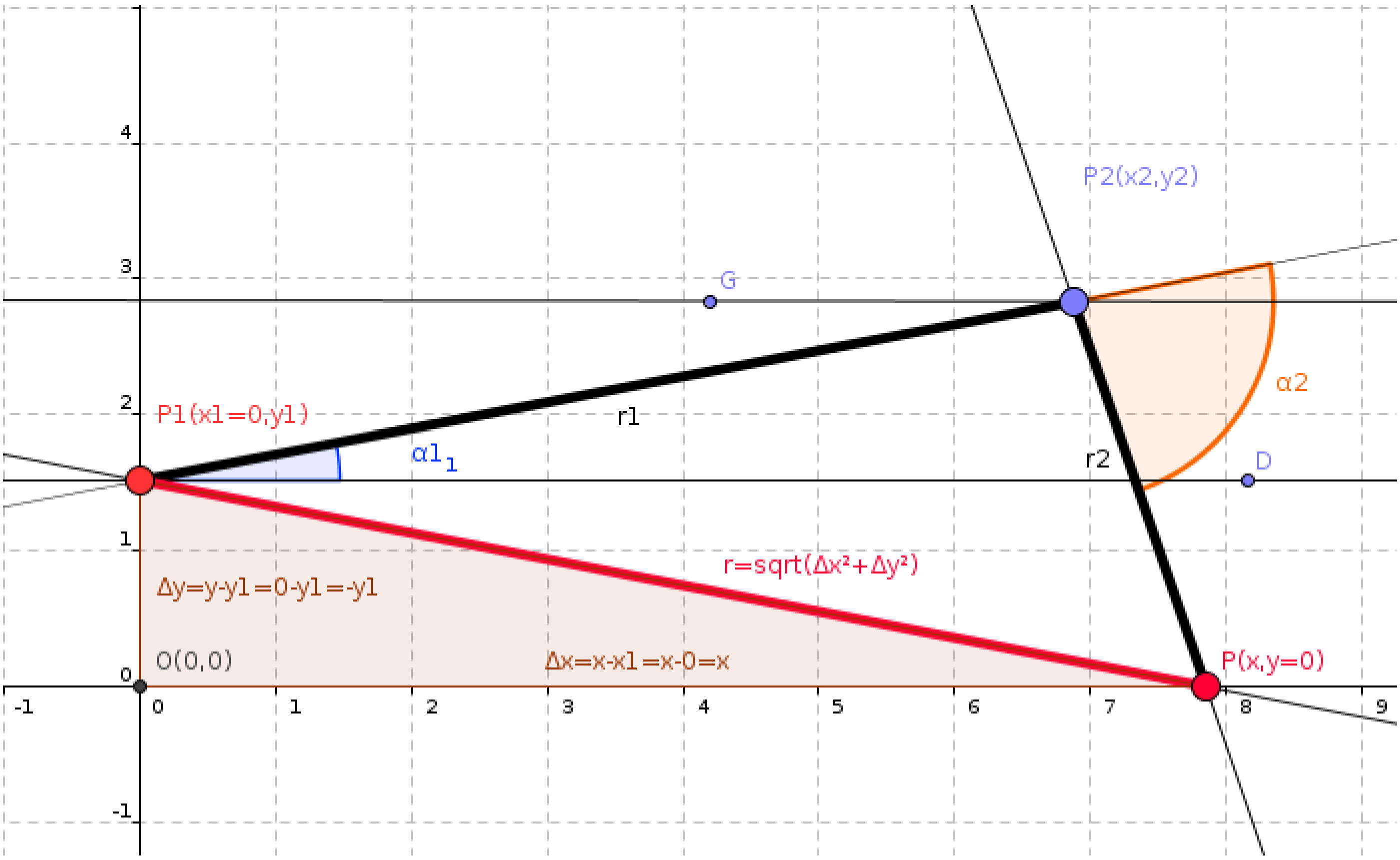


Ce que l'on veut calculer...

Dans le cas du bras robotisé, on veut pouvoir positionner automatiquement le bras à 2 segments uniquement à partir des coordonnées du point P(x,0), connaissant les coordonnées du point P1(0,y1).

A partir de la connaissance de x, abscisse du point P(x,0), les angles que l'on veut calculer sont :

- $\alpha 1$: l'angle entre l'horizontale et l'axe r1 (angle du servomoteur en P1)
- $\alpha 2$: l'angle entre r1 et l'axe r2 (angle du servomoteur en P2)

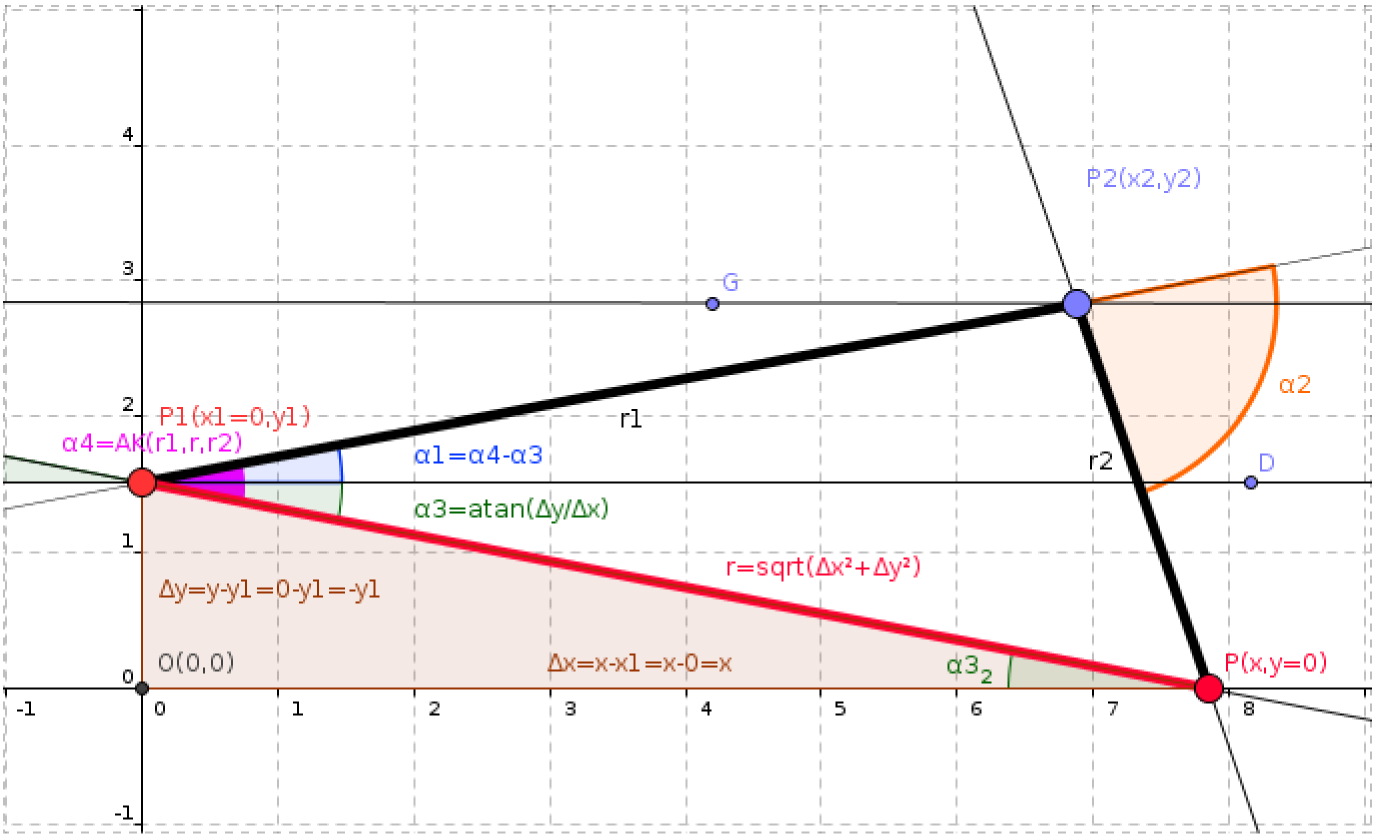


Calcul de l'angle α1

On peut constater que :

- l'angle α3 formé entre les points 0,P,P1 est calculable via la tangente de l'angle α3 dans le triangle rectangle P1,0,P.
- l'angle α4 formé entre les points P2,P1,P est calculable via le théorème de Al-Kashi appliqué au triangle P1,P2,P dont on connaît les 3 côtés.
- L'angle α1=α4-α3, et peut donc ainsi être calculé.

Géométriquement, on a :

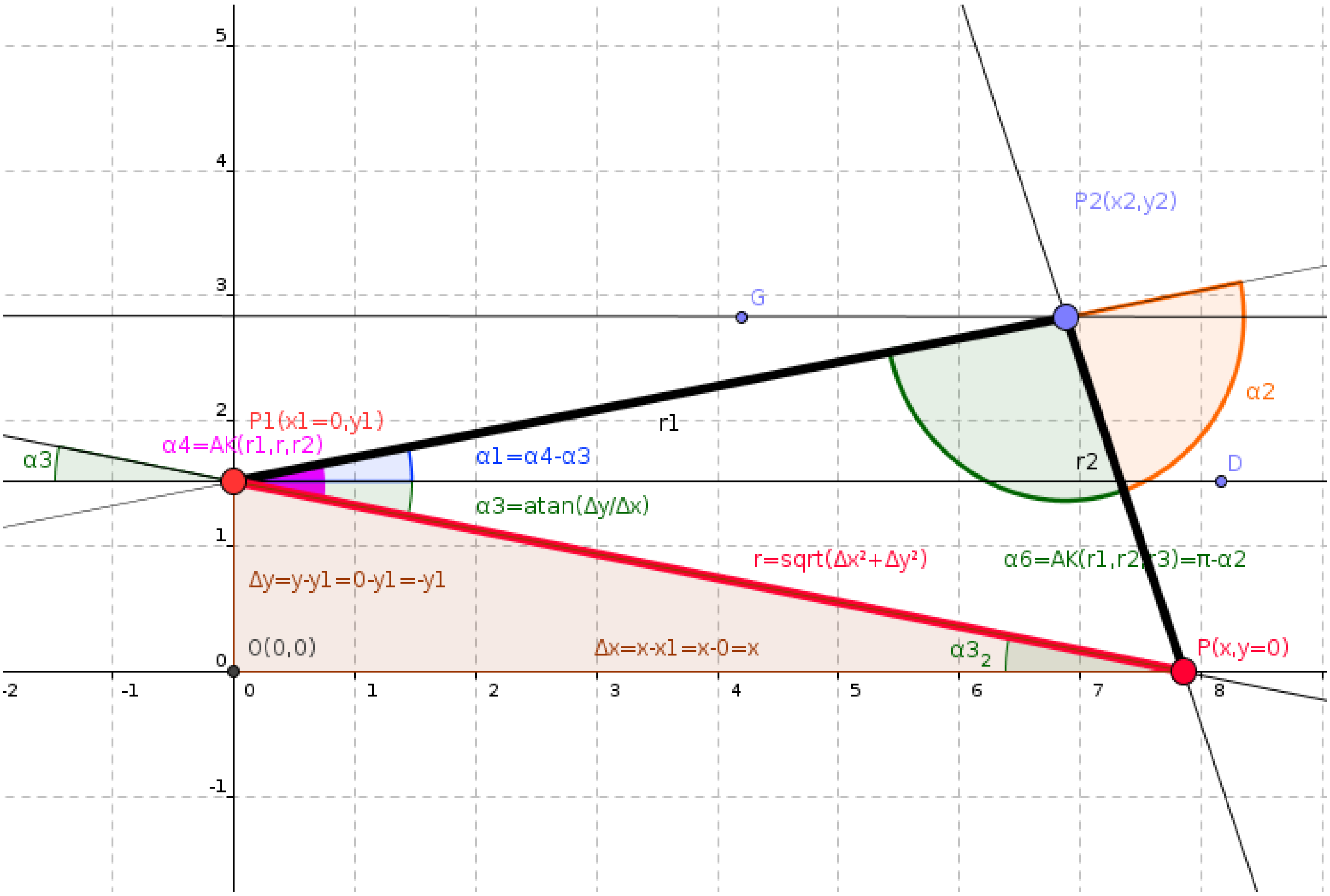


Calcul de l'angle α2

On peut constater que :

- dans le triangle P1,P2,P, l'angle α6 est calculable via le théorème de Al-Kashi à partir de r1,r2 et r,
- α6 vaut également α6=π-α2 et donc α2 est calculable selon α2=π-α6

Graphiquement, on a :



Conclusion dans le cas d'un bras à 2 axes

Via le théorème de Al-Kashi, il est tout à fait possible de calculer la valeur des 2 angles des 2 servomoteurs d'un bras motorisé à 2 axes à partir de la simple connaissance :

- de la position de P
- de la position de la base P1 du premier segment r1 et de la longueur de r1
- de la longueur de r2

Cas d'un bras motorisé à 3 segments

Dans ce cas, les choses sont plus compliquées, puisque les possibilités de position sont multiples pour une même position de l'objet P(x,y). Il va donc falloir faire certains choix « arbitraires » qui devront être le plus logique possible...

Structure du bras à 3 segments mobiles

Soit un bras à 2 segments :

- P1(x1,y1) est l'axe de rotation (servomoteur) du premier segment r1
- P2(x2,y2) est l'axe de rotation (servomoteur) du second segment r2

– P3(x3,y3) est l'axe de rotation (servomoteur) du troisième segment r3
– P(x,y) est la position de l'objet à prendre, P correspond en fait au centre de la pince du bras.

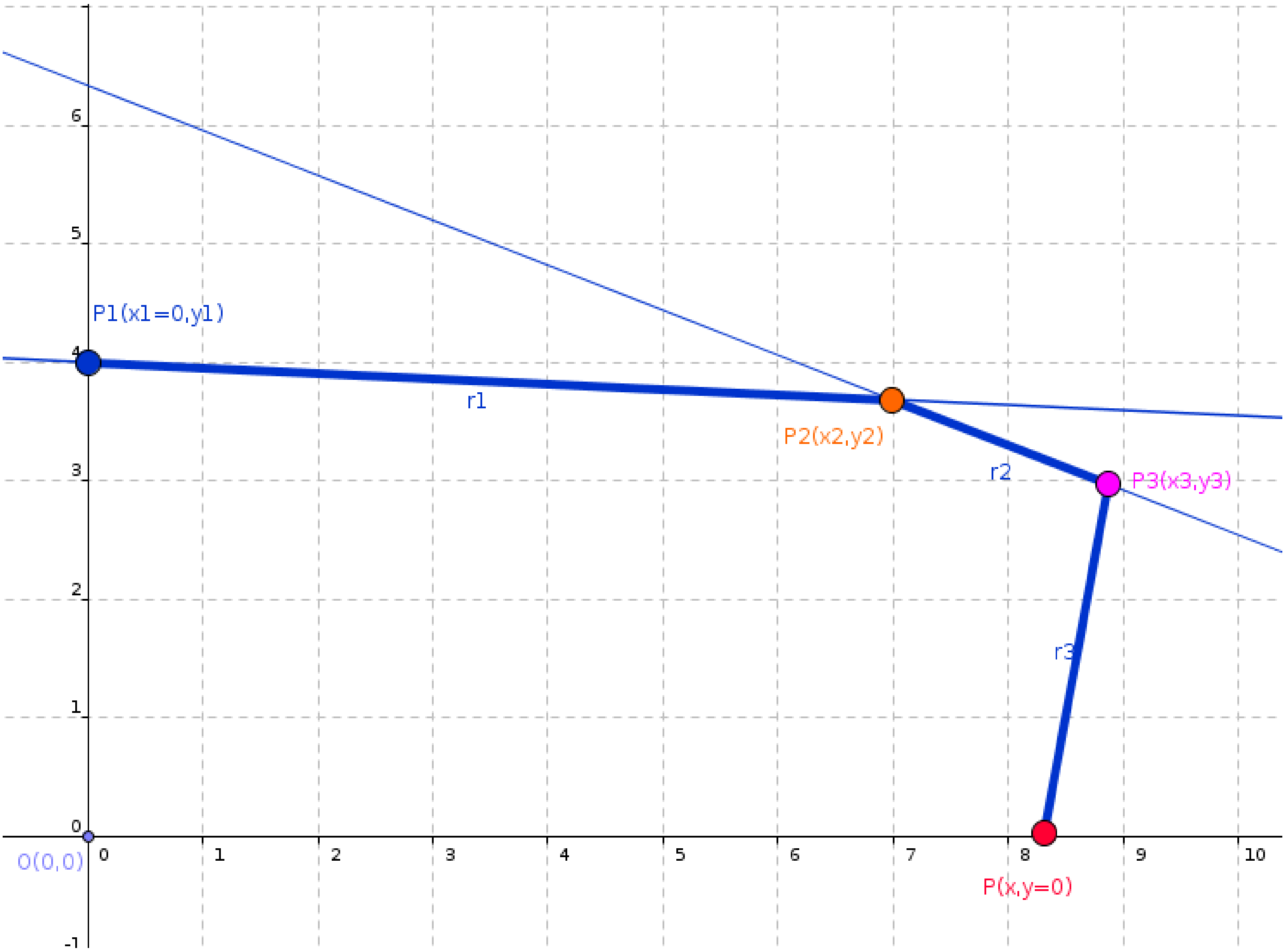
Ce bras est donc composé de 3 segments de longueur connue :

– r1 entre P1(x1,y1) et P2(x2,y2)
– r2 entre P2(x2,y2) et P3(x3,y3)
– r3 entre P2(x3,y3) et P(x,y)

Par convention :

– on fait passer l'axe des abscisses par P(x,y), et donc y=0.
– on fait passer l'axe des ordonnées par P1(x1,y1) et donc x1=0
– on appelle O le point O(0,0)

Ce qui donne graphiquement :

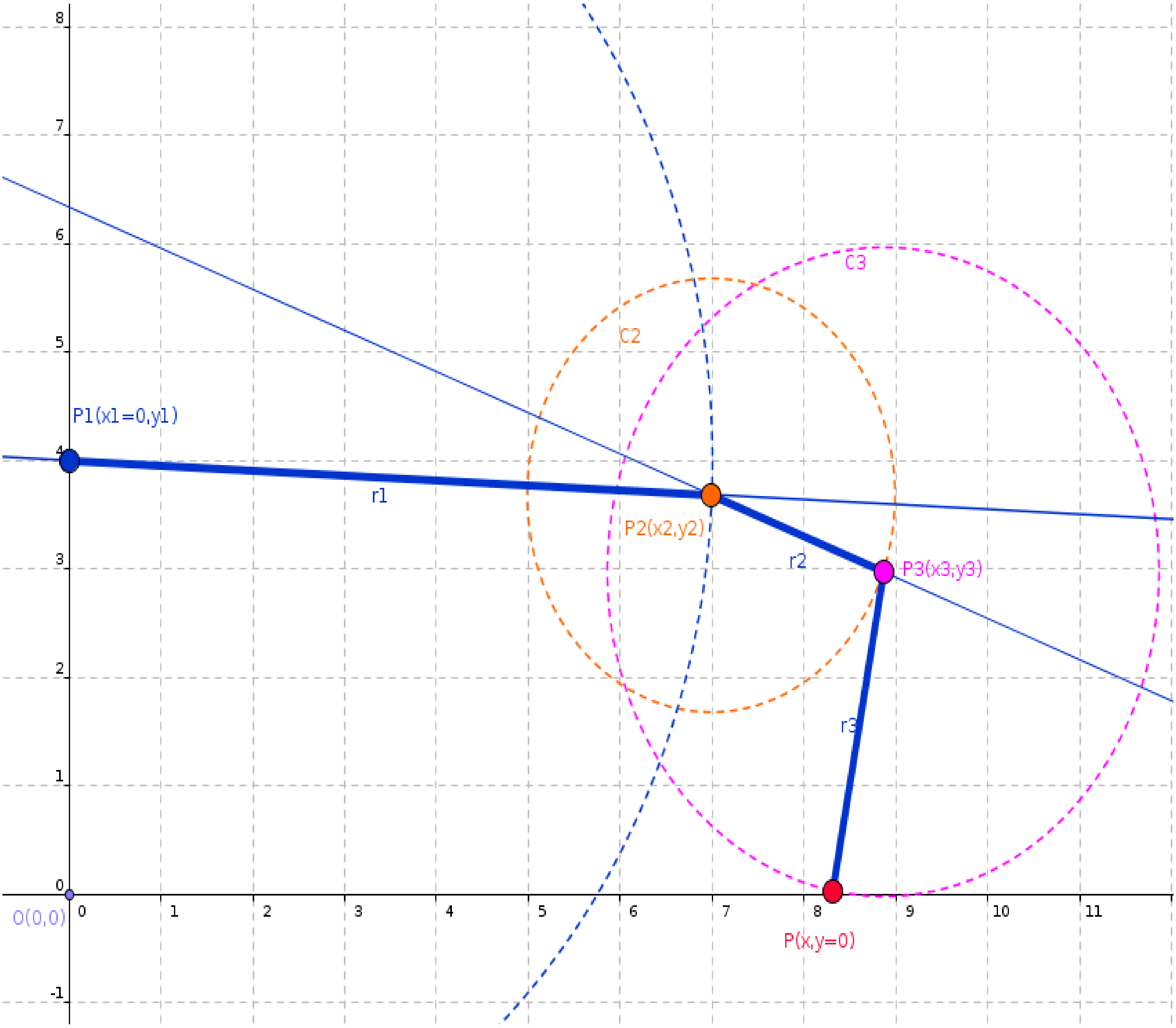


Approche des mouvements du bras

On peut commencer par tracer les cercles correspondant aux positions possibles pour l'extrémité de chaque segment dans une position donnée du bras :

- le cercle C1 centré sur P1 de diamètre r1,
- le cercle C2 centré sur P2 de diamètre r2,
- le cercle C2 centré sur P3 de diamètre r3.

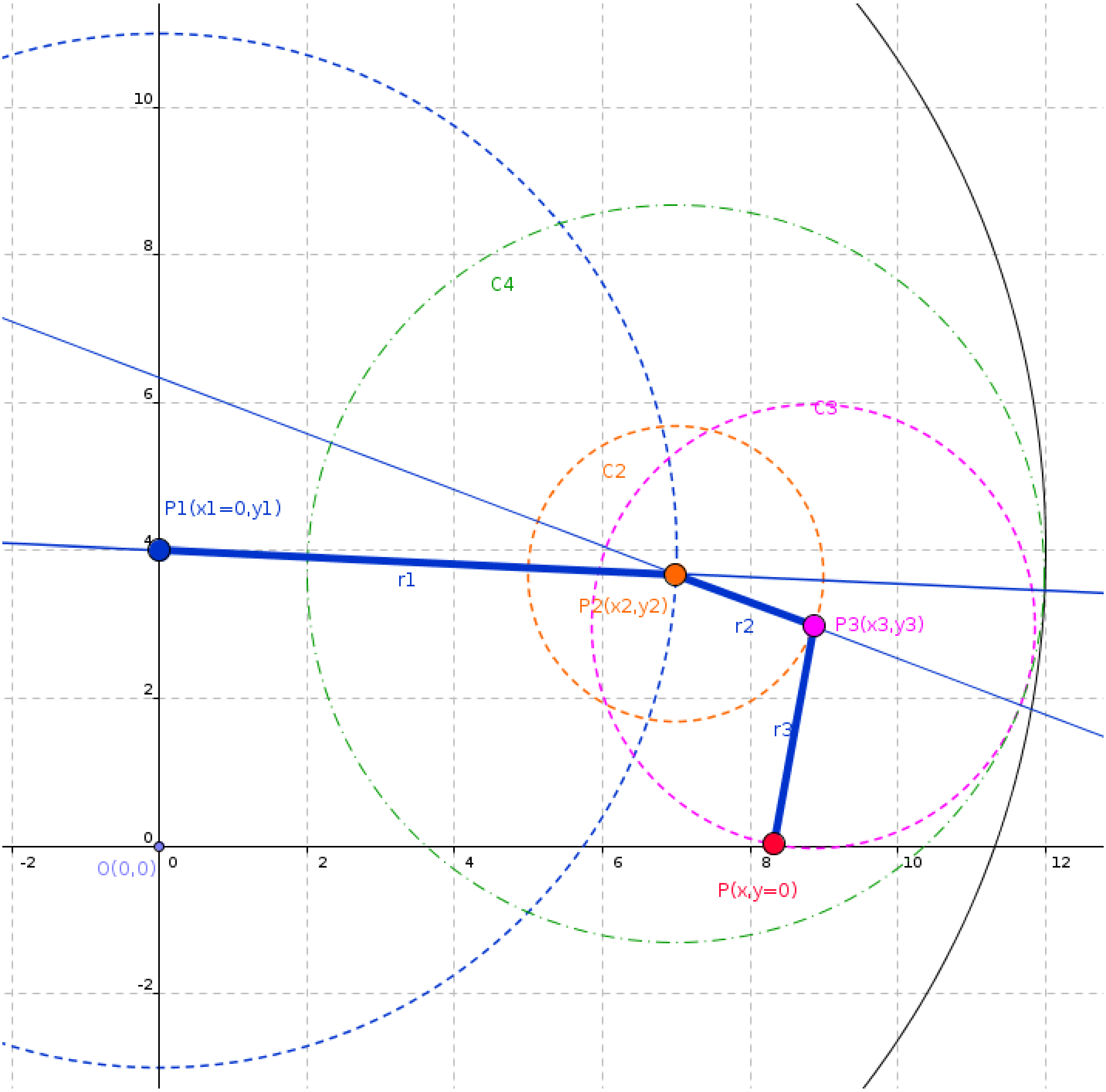
Ce qui donne graphiquement :



Il y a également 2 autres cercles intéressants à tracer :

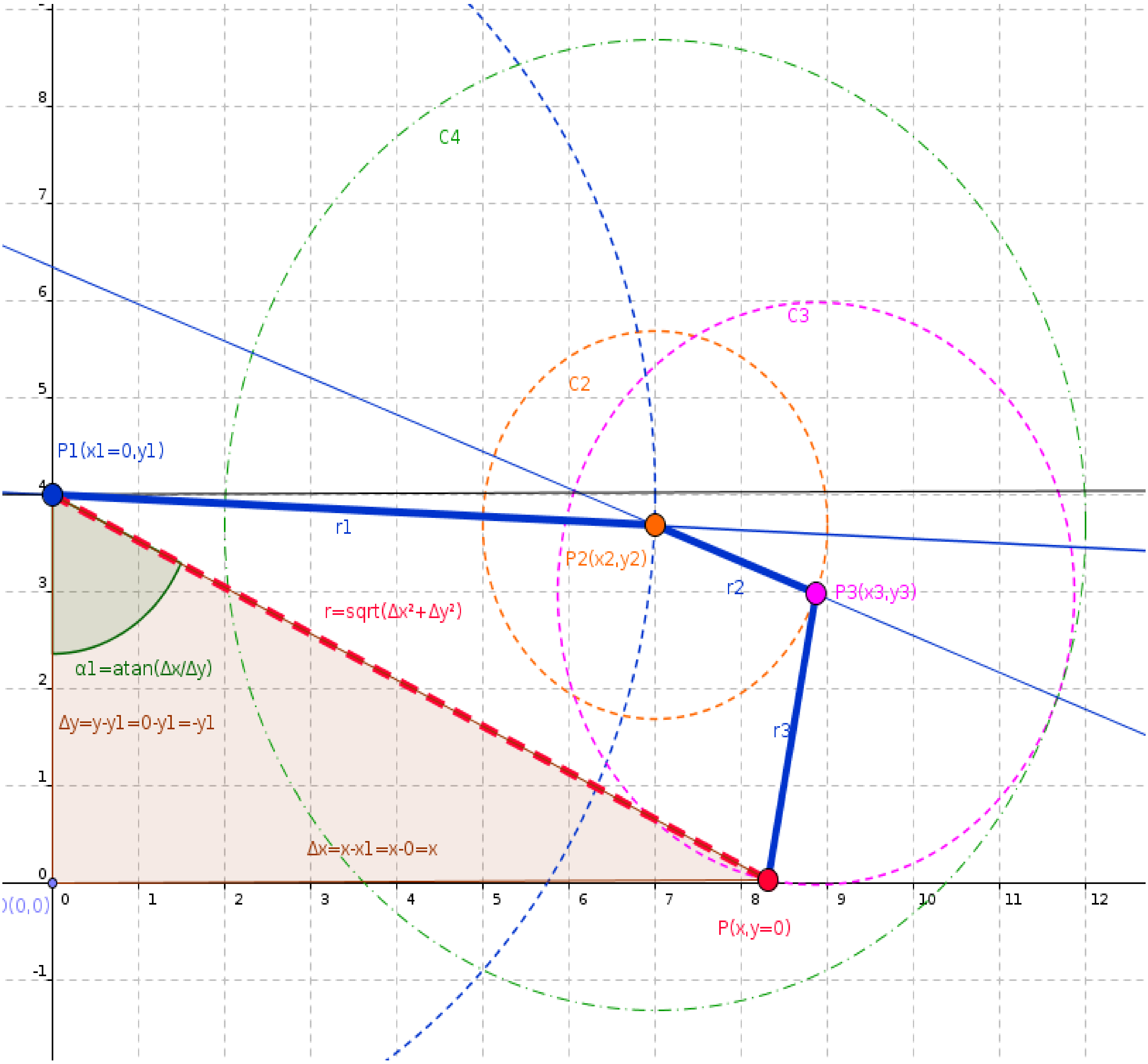
- le cercle C0 centré en P1 et de rayon r1+r2+r3 qui correspond en fait à la limite maximale que peut atteindre le bras complètement étiré,
- le cercle C4 centré en P2 et de rayon r2+r3 qui correspond à la position maximale possible dans le cas où les segments r2 et r3 sont alignés, ce qui ramène la situation à celle du bras à 2 segments déjà étudié.

Graphiquement, on obtient :



Calcul du segment r et angle α1.

Un autre élément que l'on peut constater est que l'on peut facilement calculer le segment [P1,P] que nous appellerons r en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle P1,O,P selon :



Dans le triangle rectangle P1,O,P, on peut également calculer l'angle α1 (angle O,P1,P) qui vaut au choix atan(Δx/ Δy) ou asin (Δx/r) ou acos(Δy/r) .

En pratique, il semble plus judicieux d'utiliser la fonction asin() ou acos() qui seront plus stable que la fonction atan() notamment sur les petits angles. On peut même préférer asin() à acos(), la valeur Δy restant fixe au fil des déplacement du point P.

Ce que l'on veut calculer...

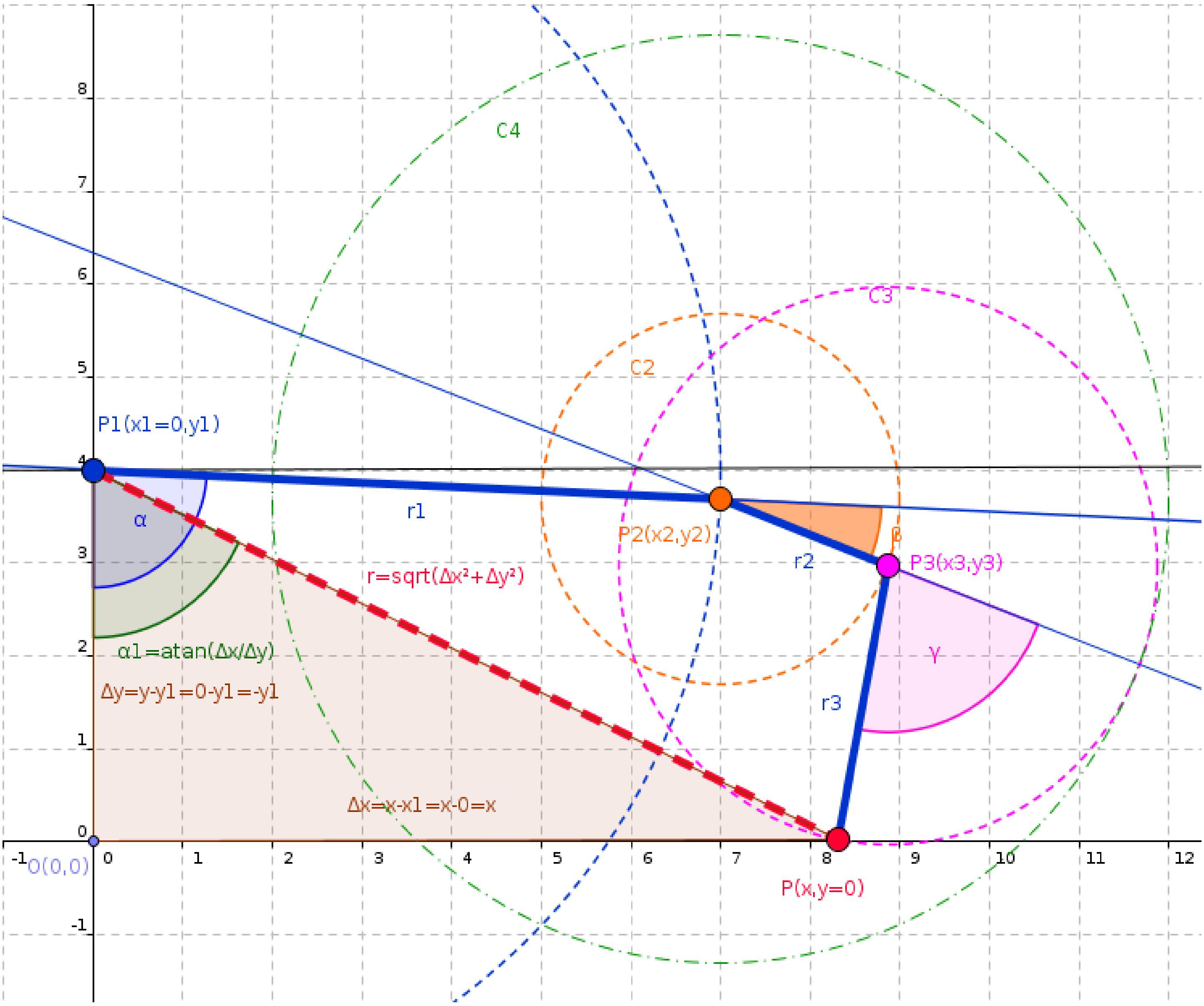
Dans le cas du bras robotisé, on veut pouvoir positionner automatiquement le bras à 3 segments uniquement à partir des coordonnées du point P(x,0), connaissant également les coordonnées du point P1(0,y1).

A partir de la connaissance de x, abscisse du point P(x,0), les angles que l'on veut calculer sont :

- α : l'angle entre la verticale (ou l'horizontale en retranchant 90°) et l'axe r1 (angle du servomoteur en P1)
- β : l'angle entre r1 et l'axe r2 (angle du servomoteur en P2)

– γ : l'angle entre r2 et l'axe r3 (angle du servomoteur en P3)

Géométriquement cela donne :



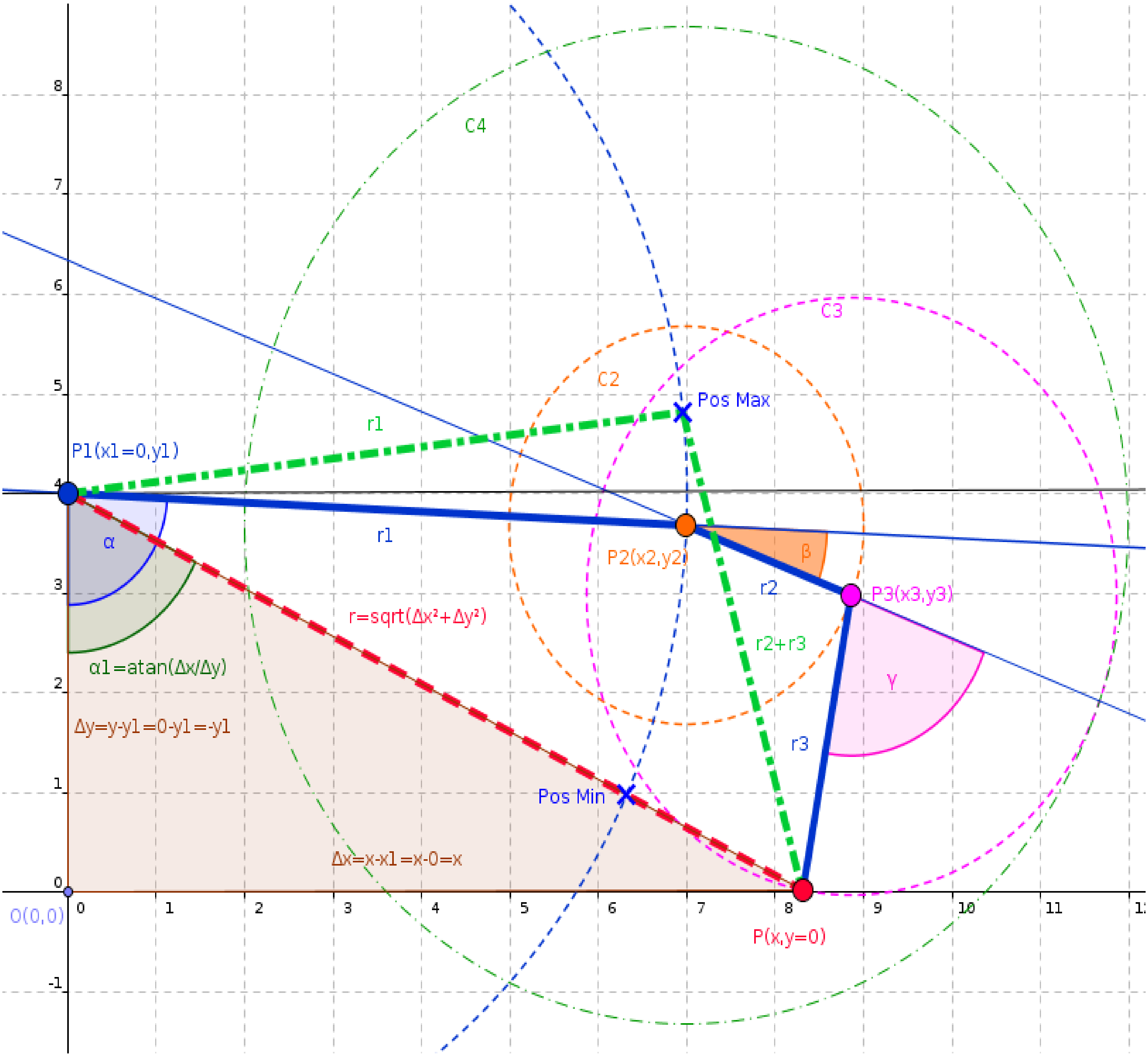
Calcul de l'angle α (1er servomoteur)

A ce stade, on n'est pas plus avancé : même si on imagine un point P fixe, on se rend vite compte qu'il y a plusieurs possibilités de positionnement des segments r1, r2, r3 pour un même point P.... Le logiciel Geogebra permet de mobiliser les différents points et de voir comment les choses se passent, comment les segments se positionnent...

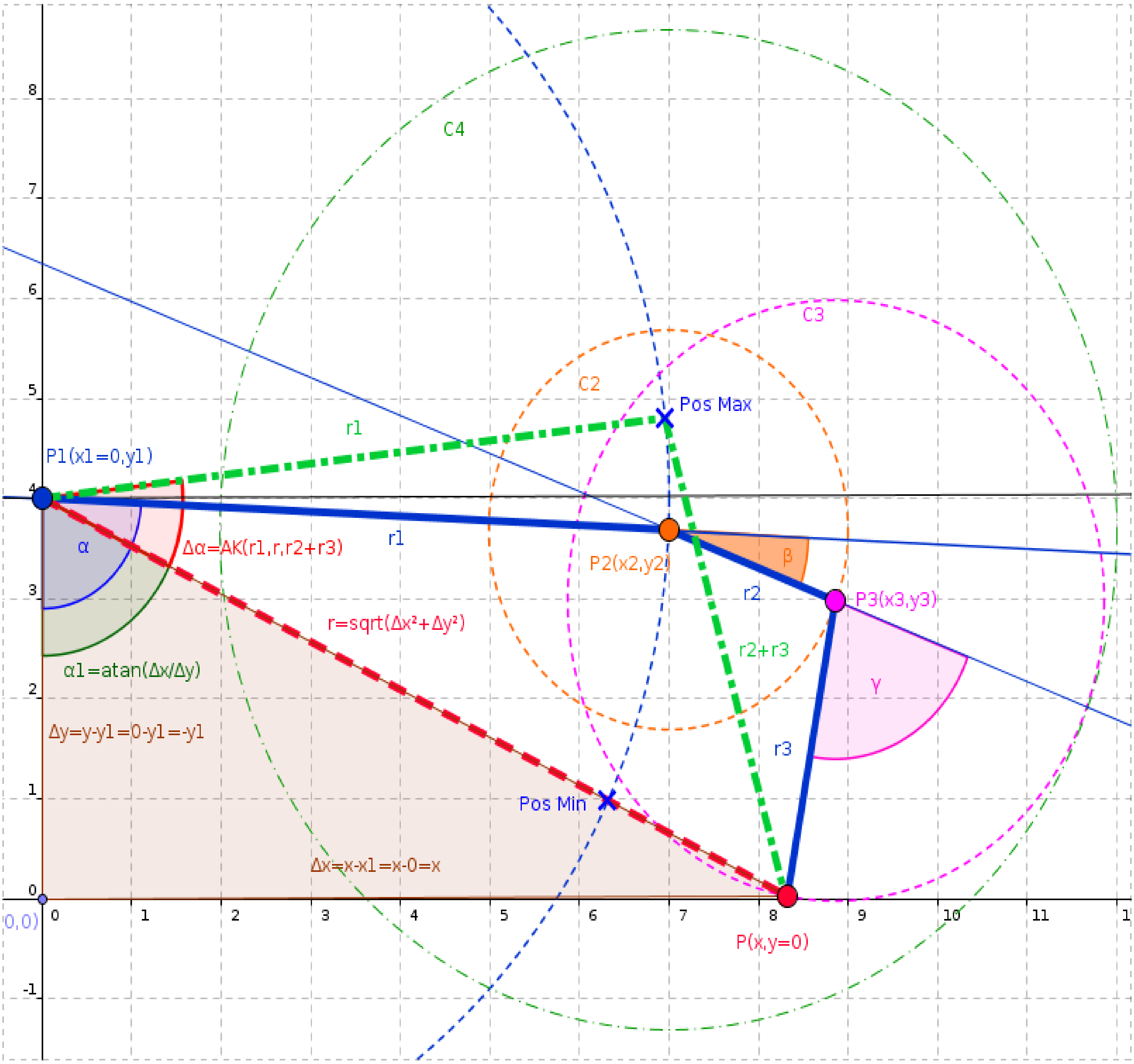
En fait, on peut remarquer que l'angle α peut varier entre 2 positions extrêmes :

- entre le chemin le plus court entre P1 et P d'une part : position **Pos Min** sur le cercle C1. **Dans ce cas, le segment [P2,P] vaut r-r1 : c'est sa valeur minimale.**
- entre le chemin le plus long possible correspondant à la situation d'un bras à 2 segments, r1 étant le premier segment, le second segment étant de taille r2+r3 : position **Pos Max** sur le cercle C1. **Dans ce cas, le segment [P2,P] vaut r2+r3 : c'est sa valeur maximale.**

Graphiquement, on a :



Une fois ce constat fait, on peut calculer **<u>l'angle de variation possible pour α : c'est l'angle (PosMax, P1,PosMin) appelé ici Δα</u>**. Cet angle est calculable dans le triangle P1,PosMax,P à l'aide du théorème de Al-Kashi :

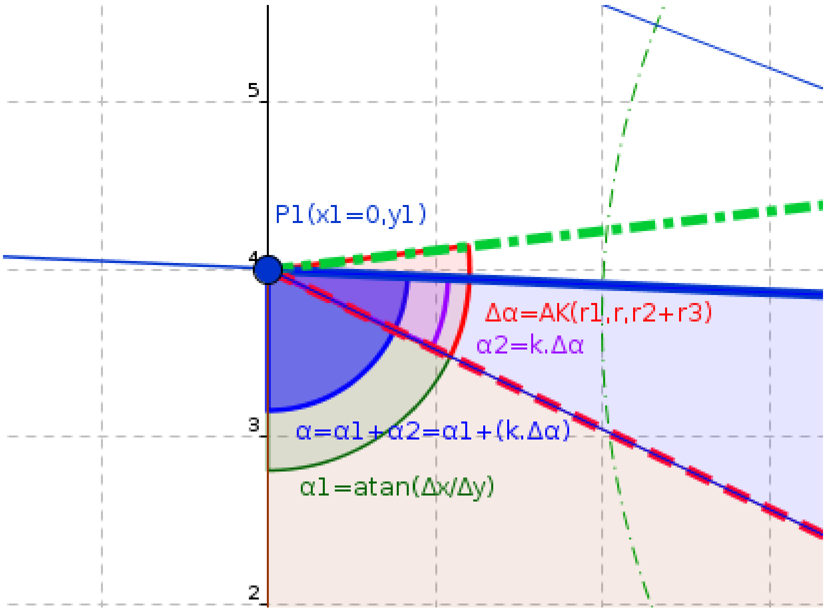


Une fois que $\Delta\alpha$ est connu, il devient possible fixer arbitrairement α en posant $\alpha=\alpha 1+$ (k x $\Delta\alpha$)

soit par exemple les ¾ de l'angle $\Delta\alpha$ afin d'obtenir un positionnement « équilibré », ce qui donne $\alpha=\alpha 1+$ (0.75 x $\Delta\alpha$)

bien que tout choix pour le coefficient appliqué à $\Delta\alpha$ soit possible.

Géométriquement, en appelant $\alpha 2$ l'angle $k.\Delta\alpha$, on a :



Ensuite, une fois que α est fixé et donc connu, les choses sont relativement simples à l'aide du théorème de Al-Kashi.

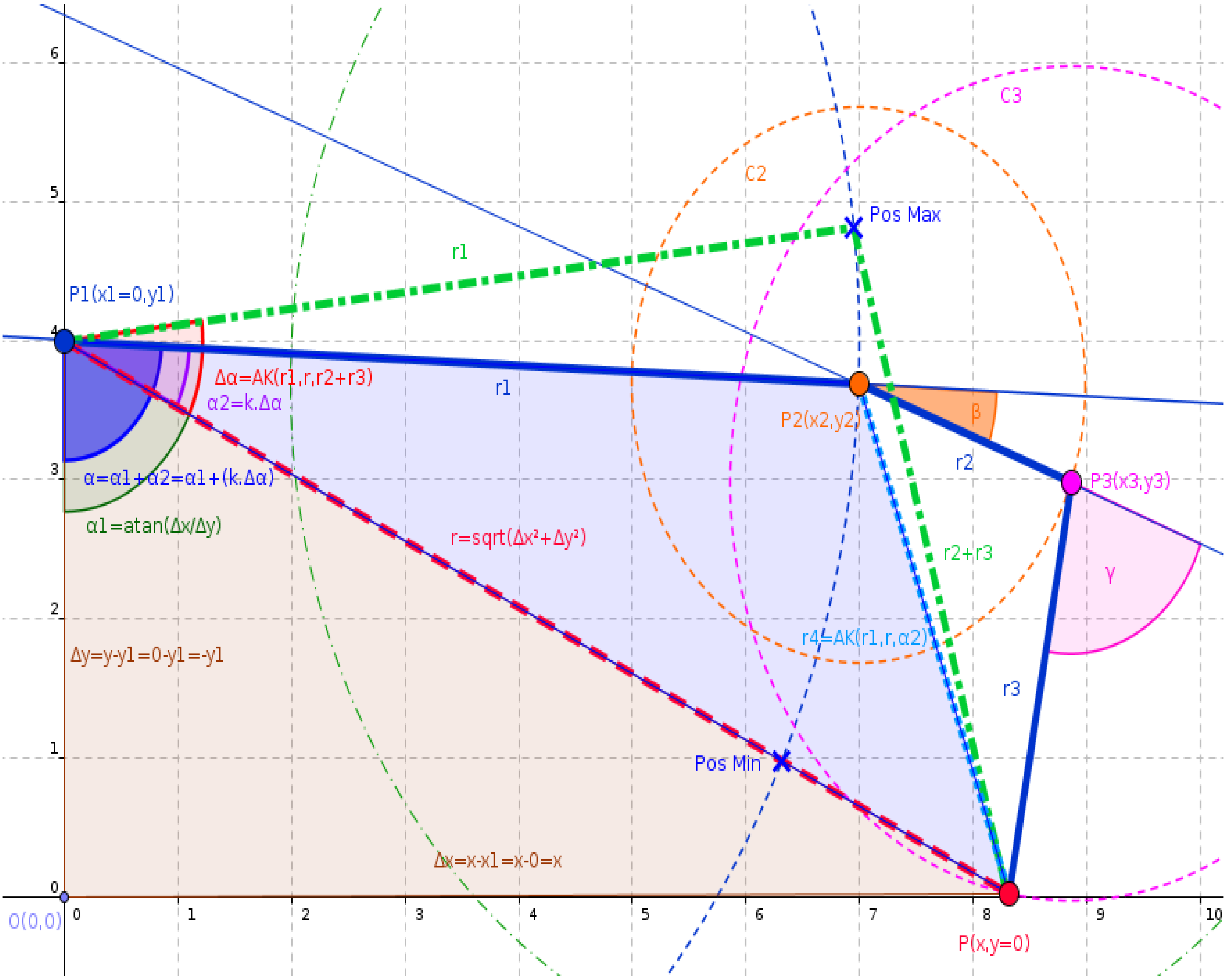
Calcul de r4

A présent, on se positionne dans le triangle P1,P2,P : on appelle r4 le segment [P2,P]. **Cette longueur r4 correspond en fait au 2ème bras « virtuel » d'un bras à 2 segments P1,P2,P.** On peut remarquer que c'est cette longueur r4 qui varie lors des mouvements du bras à 3 segments. Comme on l'a déjà dit :

- lorsque P2 est en position PosMax, r4 prend sa valeur maximale et vaut r4=r2+r3 (c'est à dire que l'angle entre r2 et r3 vaut 180°, r2 et r3 sont alignés)
- lorsque P2 est en position PosMin, r4 prend sa valeur minimale et vaut r4=r-r1 (qui correspond au chemin le plus court entre P1 et P)

Ici, ce qui nous intéresse, c'est la valeur de r4 pour l'angle α=α1+ α2=α1+(k .Δα) où k est fixé par choix arbitraire comme on l'a vu. Dans ce triangle, on connait les 2 côtés r1 et r ainsi que l'angle α2= k .Δα, Δα étant connu par calcul dans le triangle P1,PosMax,P à l'aide du théorème de Al-Kashi comme on l'a vu précédemment. Donc, on peut calculer grâce au même théorème de Al-Kashi la valeur de r4.

Géométriquement on a :



A présent, les 3 côtés du triangle P2,P3,P et du triangle P1,P2,P étant connus , on peut calculer les angles utiles du triangle P2,P3,P et du triangle P1,P2,P toujours à l'aide du théorème de Al-Kashi !

Calcul de l'angle béta (2ème servomoteur)

Calcul de l'angle P1,P2,P

On appelle β1 l'angle P1,P2,P. Connaissant r1, r et r4, en appliquant le théorème de Al-Kashi dans le triangle P1,P2,P, on peut calculer l'angle P1,P2,P appelé β1.

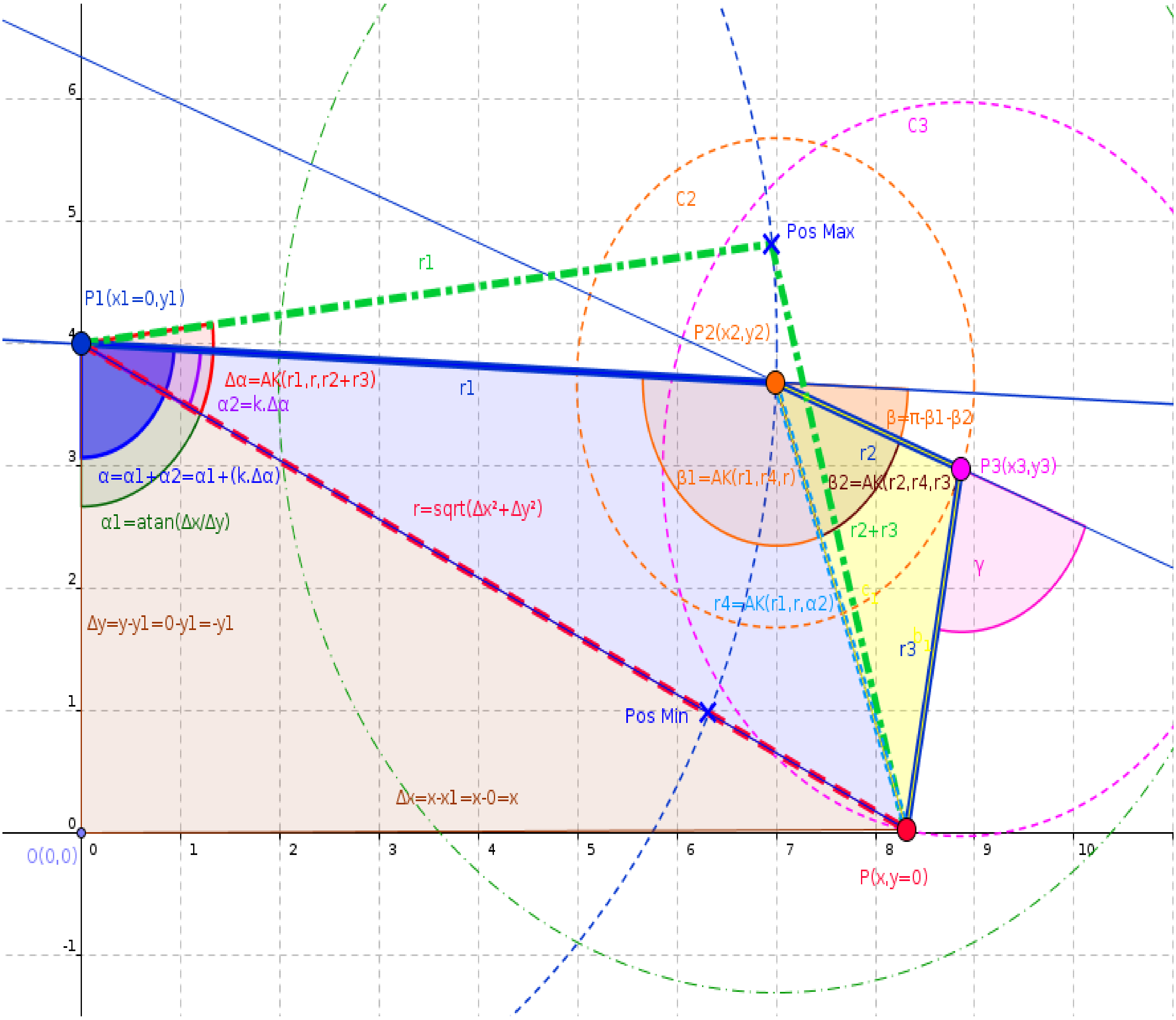
Calcul de l'angle P,P2,P3

On appelle β1 l'angle P,P2,P3. Connaissant r4, r2 et r3, en appliquant le théorème de Al-Kashi dans le triangle P,P2,P3, on peut calculer l'angle P,P2,P3 appelé β2.

Calcul final de l'angle β

A présent, il est facile de calculer l'angle β en posant β =π-β1-β2 (Attention : pi et pas 2pi !)

Géométriquement, on a :



Calcul de l'angle Gamma (3ème servomoteur)

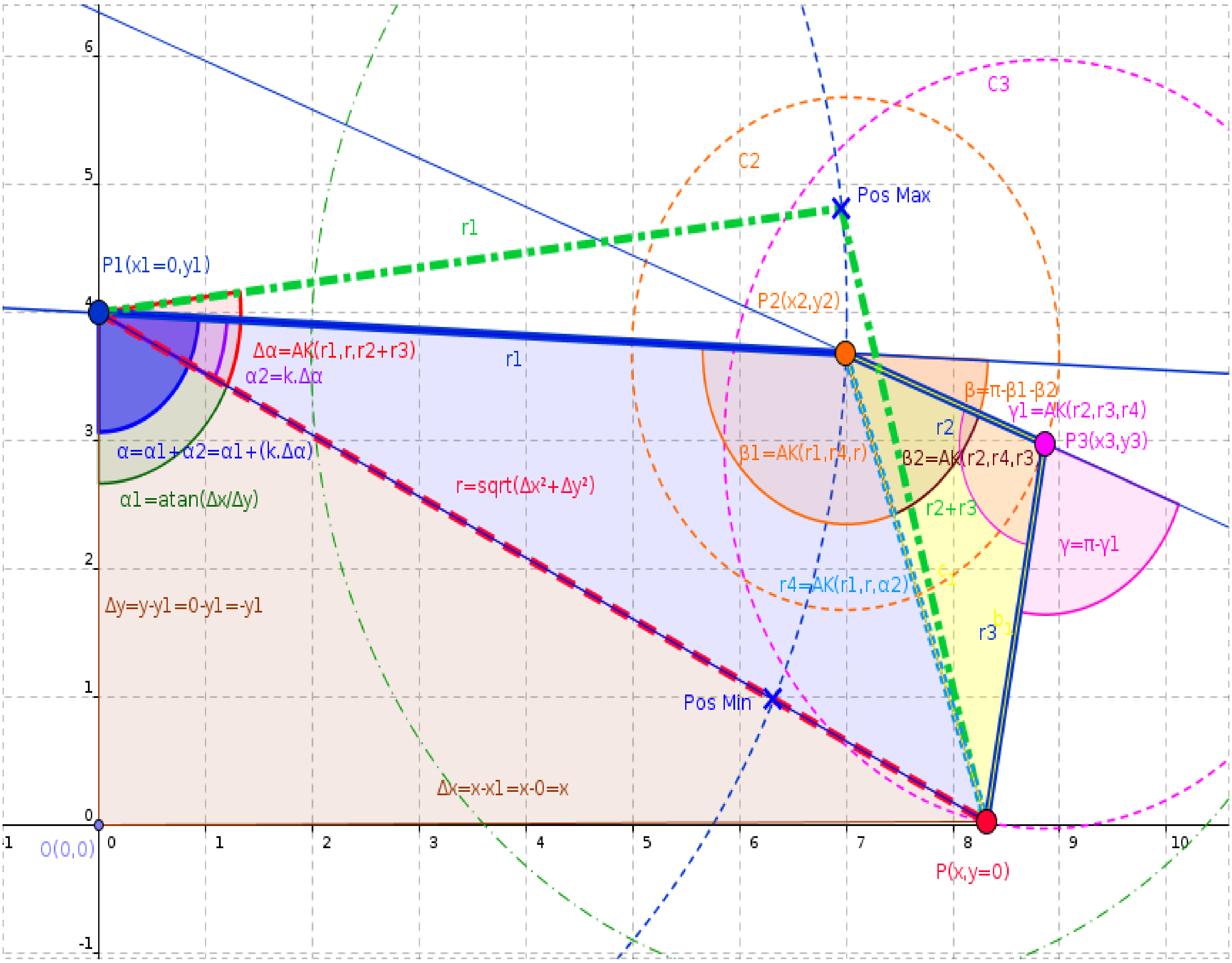
Calcul de l'angle P2,P3,P

Dans le triangle P2,P3,P, connaissant les 3 côtés r2,r3 et r4, il est possible de calculer l'angle P2,P3,P , appelé γ1, à l'aide du théorème de Al-Kashi.

Calcul final de l'angle Gamma

A présent, il est facile de calculer γ qui vaut $\gamma=\pi-\gamma 1$ (attention pi et pas 2pi !)

Géométriquement, on a :



Conclusion

Cette fois, on a obtenu le résultat escompté : à partir de la seule position de P, connaissant P1, les longueurs r1,r2 et r3 et fixant le coefficient k, il est possible de connaître les 3 angles des servomoteurs ayant l'axe situé en P1, P2 et P3 permettant un positionnement automatisé du bras motorisé à 3 segments par la simple connaissance de la position de l'objet à saisir avec la pince du bras.

Champagne !

Remarque

Dans le cas d'une application Arduino/Processing, la question qui se pose est de décider de quel « côté » il est le plus judicieux de coder la séquence de calcul décrite ici. A première vue, il semble plus pertinent de coder cette séquence du côté Processing (PC) ce qui permettra :

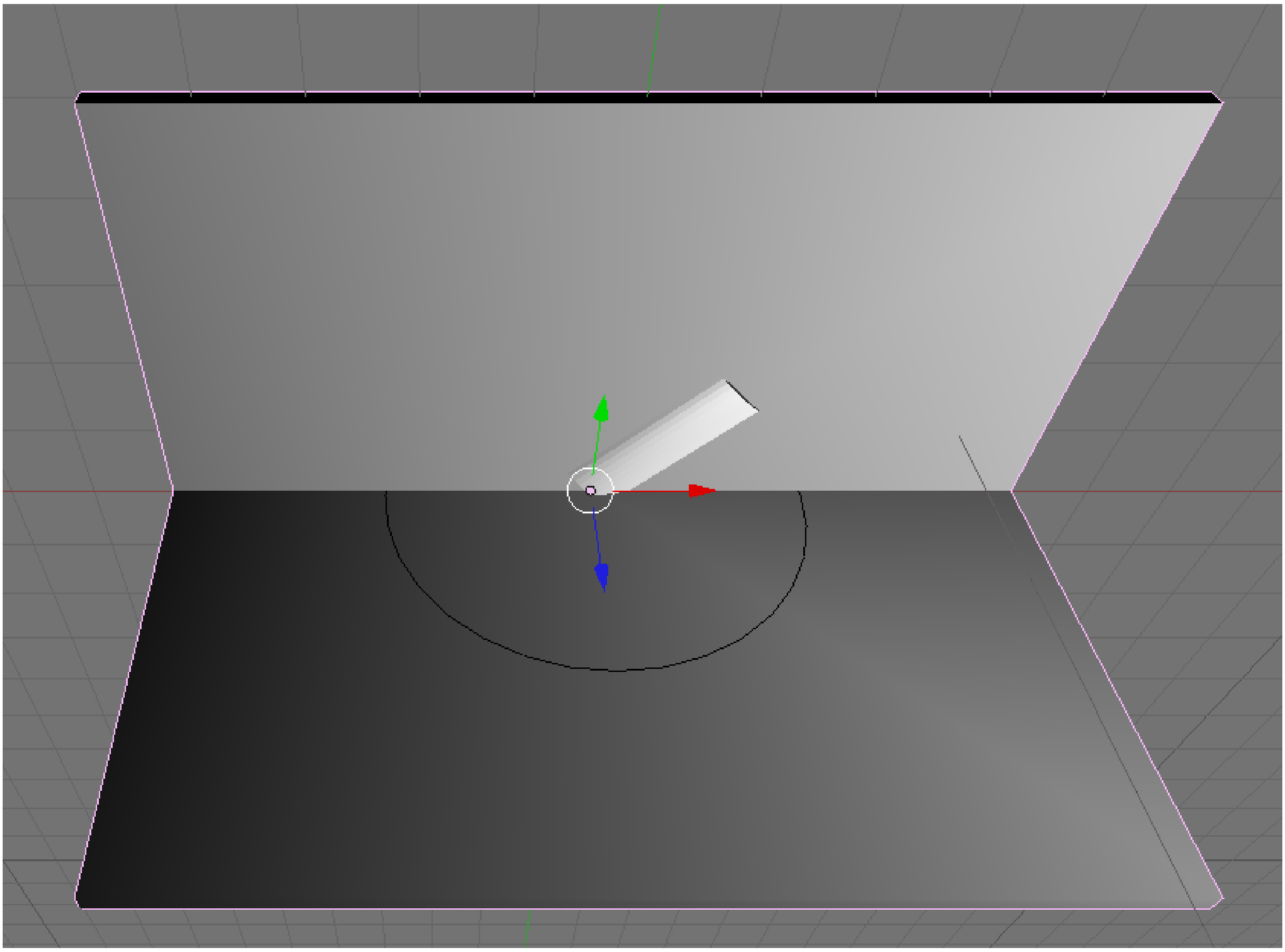
- de réaliser un affichage graphique des segments du bras
- mais également de réaliser plus aisément les calculs faisant intervenir notamment les fonctions acos() et atan(), bien que l'Arduino puisse réaliser ces calculs mais avec une précision moindre.

D'autre part, le positionnement automatique du bras sera utilisé avec une reconnaissance visuelle associée, ce qui veut dire une interface Processing. Il est donc logique de coder dans cette interface la séquence de calcul des angles des servomoteurs du bras.

Côté Arduino, on programmera les fonctions de positionnement du bras à partir de la valeur des angles. Une communication par chaine de caractères permettra d'interfacer le code Processing et le code Arduino.

Calcul de l'angle du servomoteur de la base à partir des coordonnées du point cible (x,z)

Jusqu'à présent, nous n'avons raisonné que dans le plan (x,y) (axe x en rouge et axe y en vert sur le dessin). En ce qui concerne le positionnement de la base du bras, il faut raisonner dans le plan (x,z) (axe x en rouge et axe z en bleu sur le dessin)



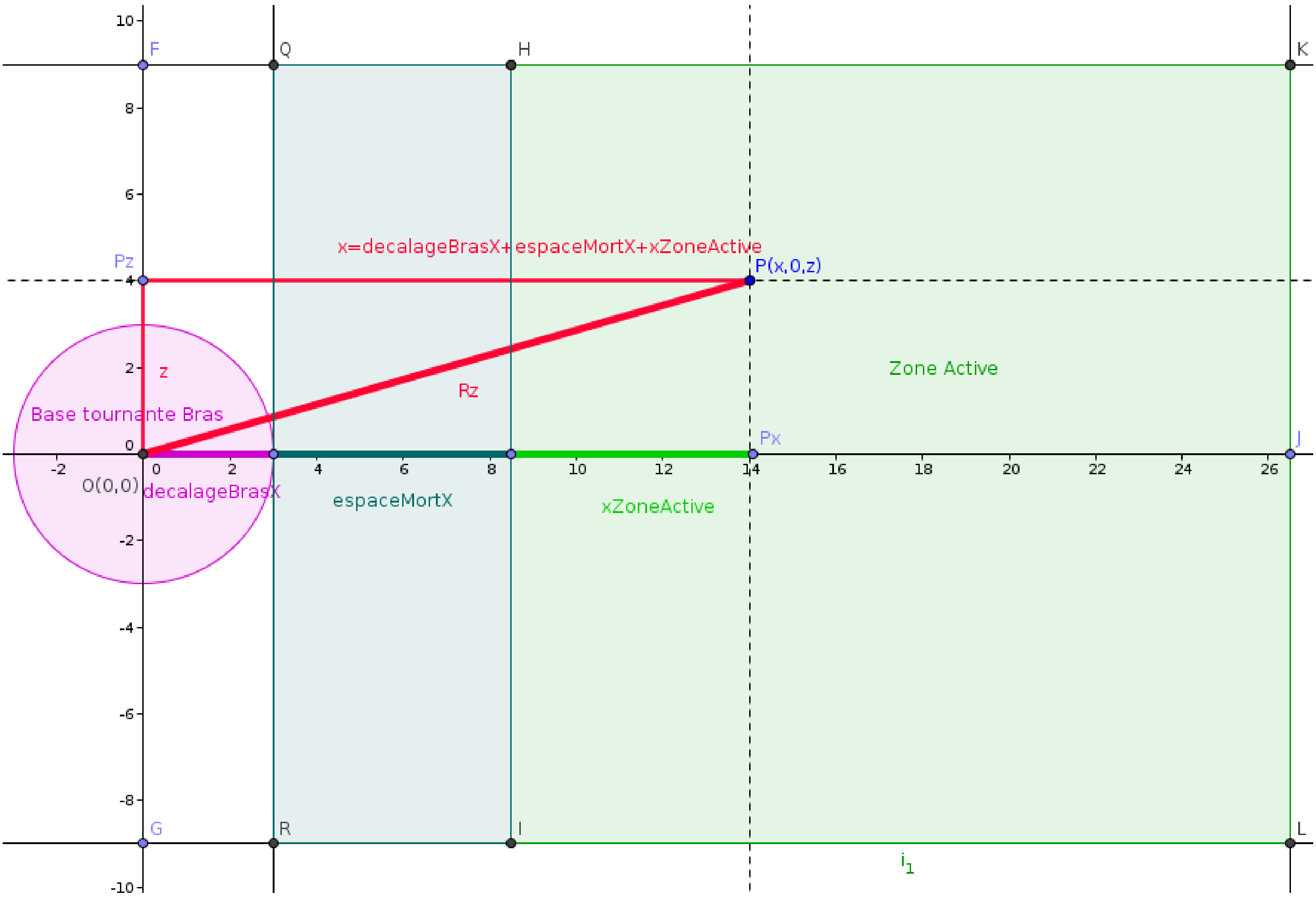
Dans le plan (x,z), on a :

- 2 zones distinctes face au bras motorisé :
  - l'espace mort qui correspond à la zone face au bras où aucun objet ne peut être pris
  - la zone active qui correspond à la zone dans laquelle le bras peut prendre un objet.
- le point O(0,0) correspondant par convention au même point que celui utilisé dans le plan (x,y) à savoir le point correspondant à l'intersection de l'axe x correspondant à l'axe face à la base du bras et dans le

plan de l'objet à prendre (point P(x,0,0) dans l'espace 3D) et de l'axe y passant par l'axe du servomoteur 1 (point P1(0,y1,0) dans l'espace 3D.

- Le point P(x,0,z) qui est le point où se trouve l'objet dans la zone active. Ce point est connu par analyse de l'image vidéo issue de la webcam de la zone active (reconnaissance visuelle) .
- la distance entre le point O(0,0) et le point P(x,0) dans le plan (x,z) est appelé Rz.
- la distance entre le point O(0,0) et le début de la zone active pour la préhension de l'objet correspond à la somme de :
  - decalageBrasX qui correspond à la longueur entre l'axe de rotation du servomoteur de la base et l'avant de la base du bras
  - espaceMortX qui correspond à la zone graduée devant le bras qui est inaccessible pour la préhension d'un objet.
- On appelle enfin xZoneActive la valeur de l'abscisse de l'objet dans la zone active. Noter ici que l'ordonnée dans la zone active du point vaut z.

Géométriquement, on a :

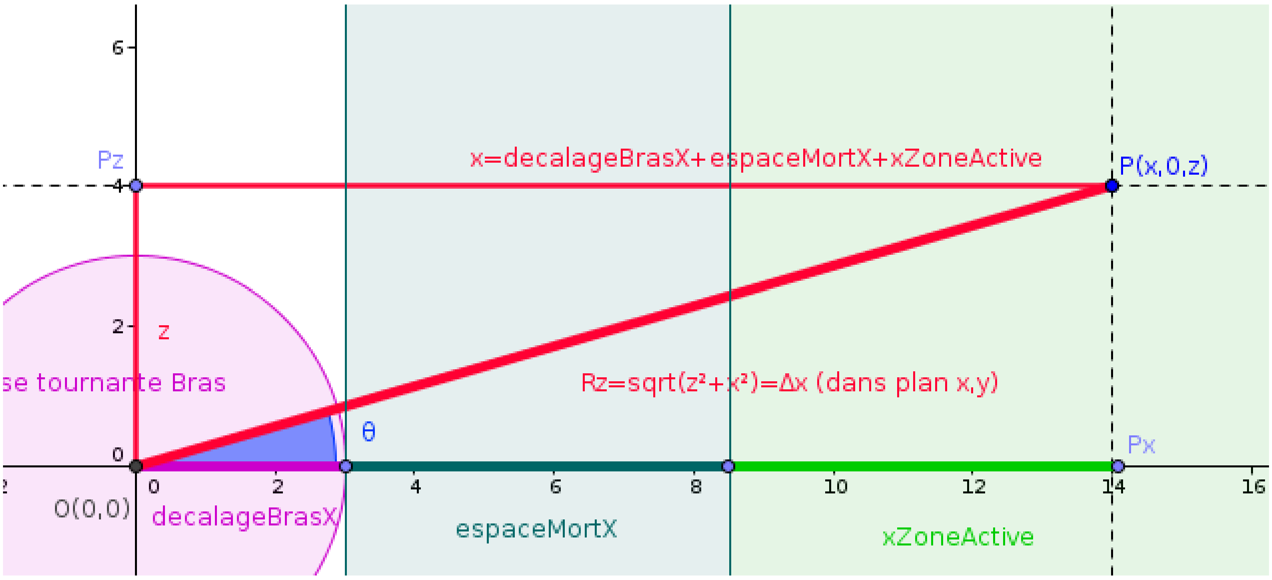


Ce que l'on veut calculer

On veut ici connaître, à partir de la position connue de l'objet à prendre P(x,0,z), connaître les coordonnées dites « polaires » du point P dans le plan (x,z), à savoir :

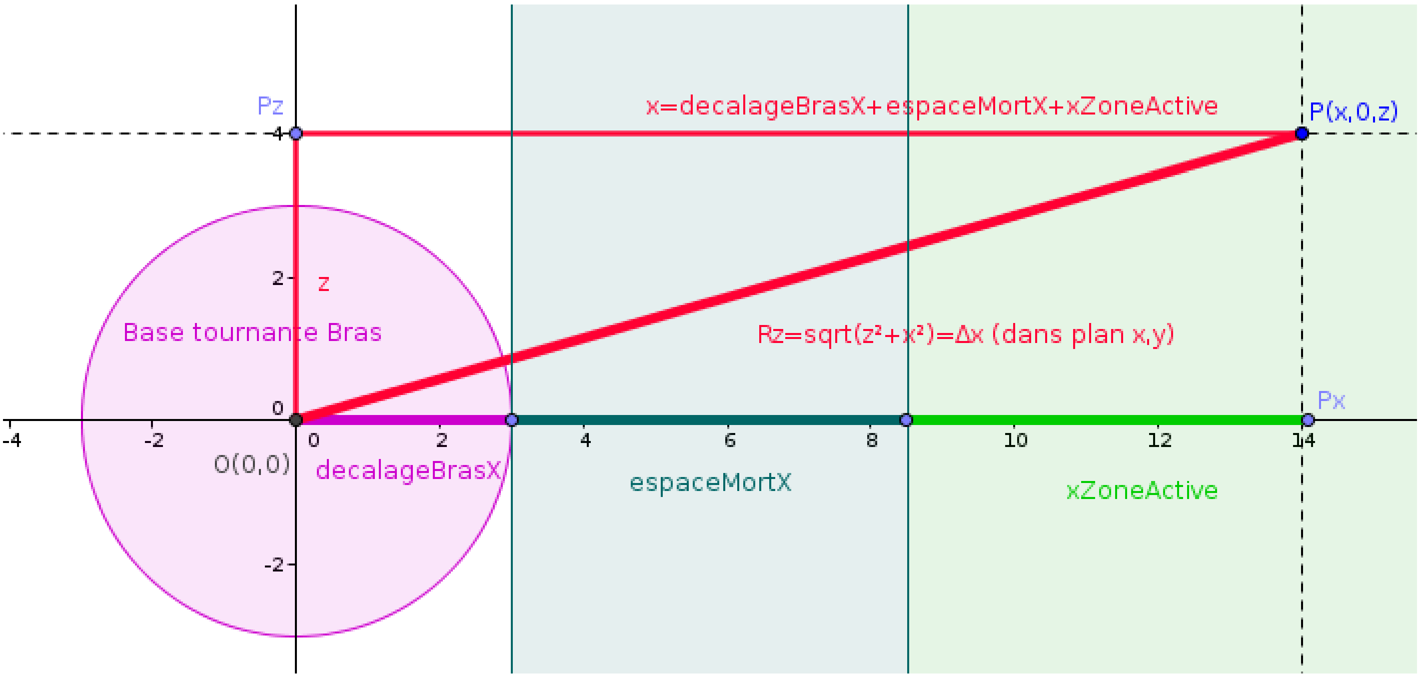
- la distance, que l'on appelle Rz, entre le point P(x,0,z) et le point O(0,0,0). A noter que Rz correspond aussi à la valeur Δx utilisée précédemment dans le dans le plan (x,y)

– l'angle θ (théta) qui correspond en fait à l'angle relatif du servomoteur de la base du bras motorisé par rapport à l'axe Ox dans le plan (x,z).



Calcul de Rz

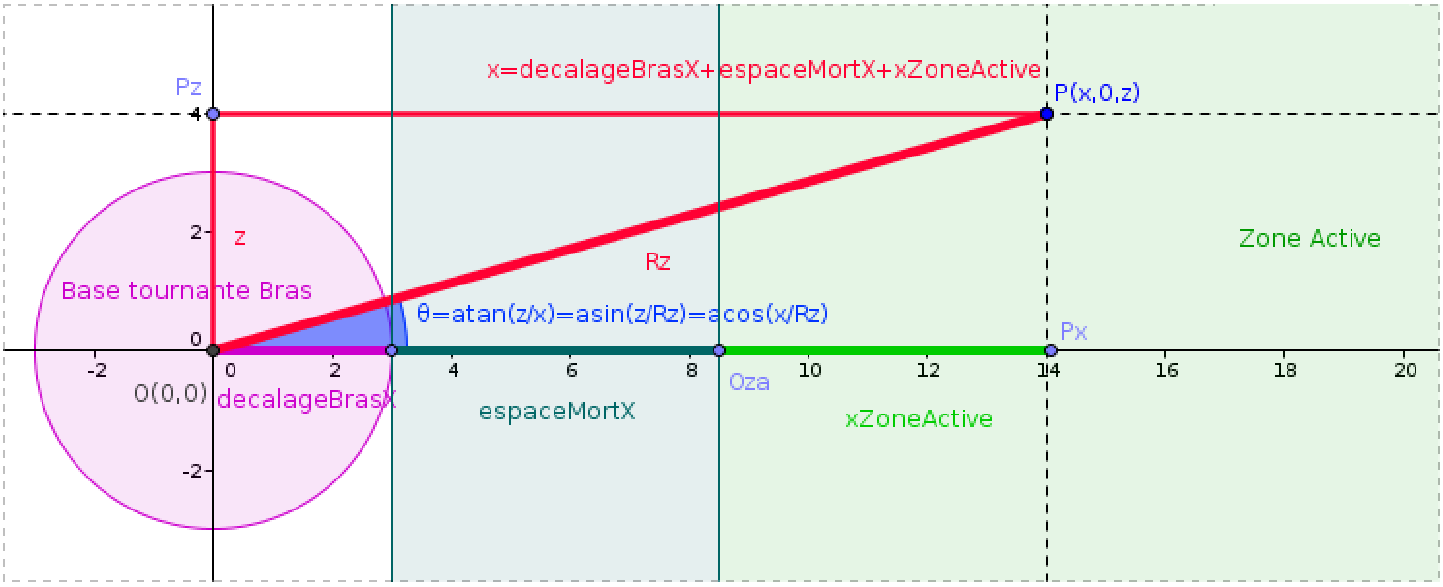
En applicant le théorème de Pythagore dans le triangle O,P,Px, on a :



A noter :Tout se passe comme si le plan (x,y) utilisé précédemment pour le calcul des angles des servomoteurs du bras à 3 segments était tournant autour de l'axe Oy : la valeur Δx utilisée pour la procédure de calcul des angles du bras robotisé devient ainsi Rz !

Calcul de l'angle théta, θ

L'angle théta, θ, se calcule simplement dans le triangle rectangle O,Px,P et vaut (plusieurs possibilités) :



En pratique, le plus judicieux semble être d'utiliser la fonction asin() qui permettra :

- d'avoir le signe de l'angle
- sera plus facile à calculer, utilisant simplement la valeur z au lieu de x
- et sera plus stable que la fonction atan().

Conclusion

Ainsi, connaissant uniquement la position du point P(x,0,z) dans le plan (x,z), il est possible de calculer :

- la position des 3 servomoteurs du bras robotisé à 3 segments via la valeur de Rz.
- la position du servomoteur de la base rotative du bras robotisé.