

CCPC Final 2017 Solutions



Practice Round

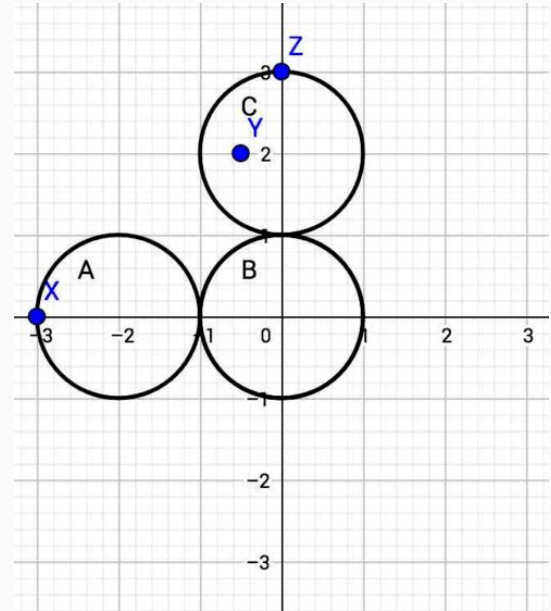
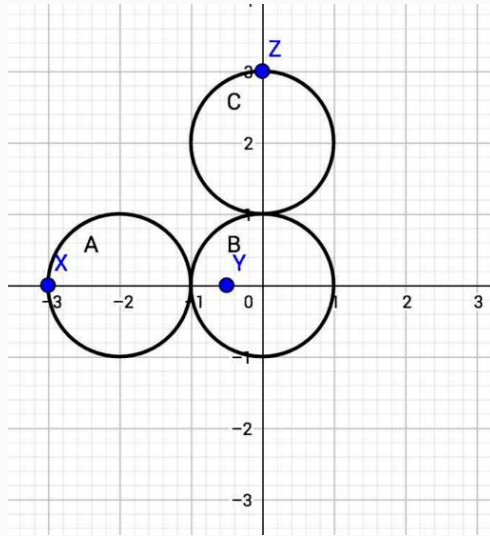
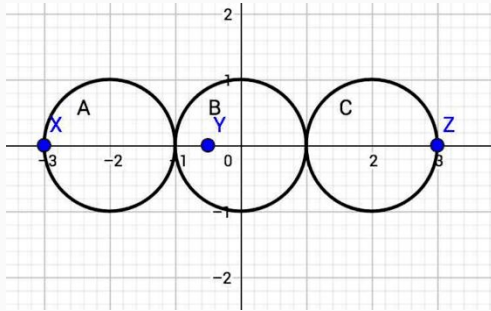
A. Square Counting

$$\text{answer} = \text{Sigma}(a*x^3 + b*x^2 + c*x + d)$$

B. Catch Them All

$n \geq 3$ 时, 1000轮以后, 几乎所有点的概率都相同。

C. Black Hole



Final Round

Problem A. Dogs and Cages

问随机产生的长度为 n 的排列 $\{A_i\}$, 求期望有多少位置满足 $A[i] \neq i$ 。

Problem A. Dogs and Cages

做法: 组合递推 or 公式。

和的期望等于期望的和。设 $\text{Diff}(i)$ 表示第 i 个位置对答案的贡献。

$$\text{Ans} = \text{Sum}(\text{Diff}(i)) = ((n-1)/n) * n = n-1。$$

Problem B. Same Digit

用最少的数字 D, 和 +、-、*、/、阶乘、乘方以及开方运算, 凑成数字 N。注意 D 可以连写表示一个多位数。

The image shows a calculator keypad with a dark background and light-colored buttons. Overlaid on the keypad is the text "50#8" in a large, bold font. Below this, a mathematical expression is shown: $50 = \sqrt{\sqrt{2\sqrt{8} + 3\sqrt{8} + 4\sqrt{\sqrt{84 + 8}}}}$. The expression is written in a white, stylized font. The keypad buttons are visible in the background, showing numbers 4, 3, 5, 6 in the top row, 5, 4, 4, 5, 5 in the second row, and 3, 5, 4, 4, 5, 2 in the third row.

Problem B. Same Digit

做法: 搜索剪枝。

考虑中间结果是整数情况得到答案的上界很小。搜索实数解的时候只需要搜索到整数的步数-1即可

处理根号时需要考虑精度误差。

最后即使跑得慢一点, 可以打表。

Problem C. Rich Game

简单题。

corner case: 如果赚的钱大于赔的, 全都可以赢。

否则, 赢就是11:9, 输就是0:11.

Problem D. Mr. Panda and Circles

给一条长度为 M 的线段, 放置 N 个圆(半径 R_1, R_2, \dots, R_N)在该线段上, 圆心必须放置在线段的整点, 对于每一种放置方案 P , 记不被圆覆盖到的区间的长度和为 $L(P)$, 求 $\sum_P L(P)^2$.

圆放置方案分三种情况:

最左边和最右边的点没有被圆覆盖: $C(N+M-2*\sum R, N)$

最左边和最右边有一个点被圆覆盖:

枚举 R_i , 枚举该圆超出线段部分的长度 K , $C(N-1+M-2*\sum R+K, N-1)*2$

Problem D. Mr. Panda and Circles

最左边和最右边点都被圆覆盖:

枚举 R_i, R_j , 枚举这两个圆超出选段的部分长度 K_i, K_j ,

$C(N-2+M-2*\text{sum}R+K_i+K_j, N-2)$

FFT 计算 R_i 和 R_j 超出线段部分长度的和 $K_i + K_j$ 的方案数

计算组合数注意细节: 分子分母维护 MOD 的次数, int64 overflow

Problem E. Evil Forest

签到题。

Problem F. Fair Lottery

一次抽奖活动，有 n 个 group 参加，每个 group 有 a_i 个人，每个 group 要么一起中奖，要么一起不中奖。抽奖活动允许抽出 $\leq m$ 个人中奖。要求每个人的中奖概率必须一样，问，中奖概率最高是多少？

提取全部子集，列出不等式，做线性规划。

Problem G. Alice's Stamps

从 N 个区间中选择 K 个区间, 问最多覆盖多长的长度。

$dp[i][j]$ 表示到 i 这个位置, 选择了 j 个区间时, 能覆盖的最长长度

- 如果选择覆盖 i , 一定会选右端点最远的区间, 转移到 $dp[k][j+1]$
- 如果不覆盖 i , 则转移到 $dp[i+1][j]$

Problem H. Equidistance

在 N 维空间中, 存在 $N + 1$ 个点, 两两距离为 1, 现在已知其中 M 个点, 找出其他 $N + 1 - M$ 个点。

考虑每次添加一个点, 添加的点与添加点之前的重心的连线显然与之前添加的点所构成的子空间正交, 每次添加点后重心移动的方向构成了 N 维空间的一组正交基。第 i 次添加点重心移动的距离为 $\sqrt{i * (i + 1) / 2} / (i * (i + 1) / 4)$. 问题变成了如何将 N 为空间中一组正交基扩张到满秩。

Problem I. Inkopolis

给定一棵有 n 个节点的基环树(一棵树 + 一条边)和 m 个操作, 初始每条边有一个颜色。每个操作是修改一条边的颜色, 每次修改操作结束后要输出当前这棵图上, 所有边形成了多少个色块。两条边属于同一个色块当且仅当它们颜色相同且有一个公共点。

$n, m \leq 2e5$ 。

Problem I. Inkopolis

先考虑是一棵树的情况，每个节点对色块数的贡献，答案为每个节点边的颜色数之和 - $(n - 1)$ ，对于每次修改操作，统计节点的增量即可。

基环树是一个环上每一个节点连接了一棵树，和树的情况类似。答案为每个节点边的颜色数之和 - n 。同时要注意，如果整个环上只有一种颜色，答案还要 + 1。

Problem J. Subway Chasing

A, B 两个人要坐地铁从起点到达终点，一共有 n 站，但两个人出发的时间不同，B 坐上了比 A 晚 K 分钟的地铁。当两个人同时在地铁上的时候 A 和 B 会彼此共享他们的位置。每个位置信息都是当 A 到达某一站或者是在某两站之间时，B 在某一站或者是在某两站之间。

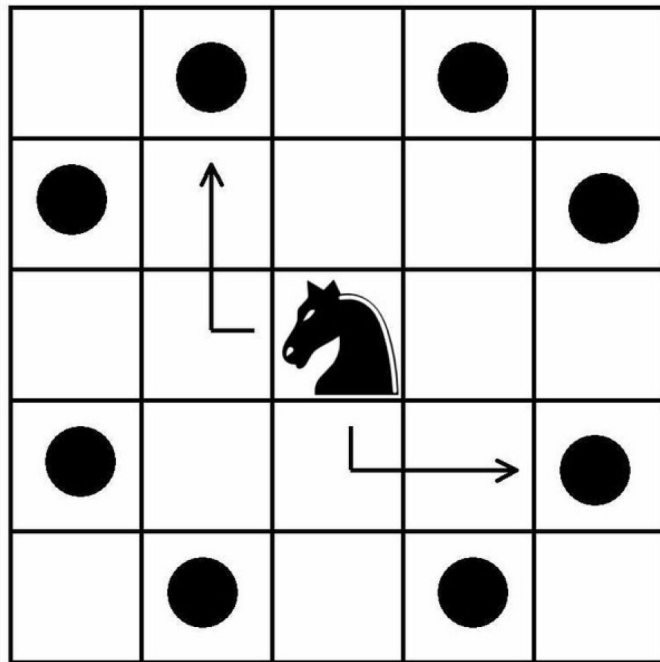
求任意一组可能的， $n - 1$ 个相邻两站之间的耗时，或者告知无解。在地铁站停留的时间忽略不计。

Problem J. Subway Chasing

差分约束系统。设 $D[i]$ 表示到达第 i 个点的最少时间, 则最终个区间的长度等于 $D[i] - D[i-1]$ 。题目中的每个条件都等价一组不等关系, 则原问题我们求出任意一组满足所有这些不等关系的解。用 Bellman-Ford 求出满足条件的解即可。

Problem K. Knightmare

给定一张无限大的国际象棋棋盘，问一个骑士走至多 k 步的情况下，有可能停留在多少不同的格子上。



Problem K. Nightmare

Basic idea: 数学直觉告诉我们答案是一个多项式(二次多项式)。

Solution: 打表找规律 and 待定系数法。

Problem K. Nightmare

证明？考虑增量。

设至少需要 k 步可以走到的格子的数目 $F[n]$ 。

$$F[0..4] = \{1, 8, 32, 68, 96\}$$

$$F[n] = 28n - 20 \mid n \geq 5。$$

10																		9	10	
9																	8	9	10	9
8														7	8	9	8	9	10	
7												6	7	8	7	8	9	10	9	
6										5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
5								4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	
4								5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
3								4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	
2								5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
1								4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	
0		K						5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
-1								4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	
-2								5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
-3								4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	
-4								5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
-5								4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	
-6										5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	
-7												6	7	8	7	8	9	10	9	
-8														7	8	9	8	9	10	
-9																8	9	10	9	
-10																		9	10	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$$\Delta 1[n] = 24 + (4n - 5) = 4n + 4$$

18		10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12
17		9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13
16		8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12
15		9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11
14		8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12
13		7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11
12		6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10
11		7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
10		6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10
9		5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9
8		4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10
7		5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	10	9
6		4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10
5		3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9
4		2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10
3		3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9
2		2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10
1		3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9
0		K	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$$\Delta 2[n] = 3n - 9$$

8	9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8
9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
8	7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7
8	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	8
7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6
7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5
6	7	6	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	4	1	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	2	3	K	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	4	1	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5
6	7	6	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6
7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5
6	7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6
7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7
8	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	8
7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	8	7
8	7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	8	7	8
9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
8	9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8

$$F[n] = 4(\Delta 1[n] + \Delta 2[n]) = 28n - 20 \blacksquare$$

Thanks!