ALUNO: VICTOR MEDEIROS MARTINS / MATRÍCULA: 401339

QUESTÃO 1

1) No passo único, a próxima solução é obtida a partir da solução atual. Por exemplo, o próximo valor y[n-1] é calculado a partir do valor atual y[n]. Pode não ter uma boa precisão para múltiplos passos, mas cada etapa independe uma da outra. Ou seja, se tiver um erro em uma etapa, não afeta as seguintes.

No passo múltiplo se utiliza informações de múltiplos pontos anteriores pra calcular o próximo ponto, e isso aumenta a precisão da previsão. Porém, um erro lá atrás pode gerar em cascata erros de pontos seguintes.

2) Método explícito: a próxima solução no tempo t+1 é calculada a partir da solução do tempo atual t. A vantagem é que são mais rápidos computacionalmente, mas depende do tamanho do passo de tempo.

Método implícito: a solução no tempo seguinte t+1 depende da solução do tempo atual e do tempo seguinte. Ou seja, pra resolver a equação que inclui y(t+1), precisa incluir a própria y(t+1). A vantagem é que não depende do tamanho do passo de tempo, mas exigem mais tempo computacionalmente.

3) A condição de Dirichlet é usada pra especificar o valor da função solução na borda do domínio. Ou seja, a restrição da condição de contorno especifíca para a própria função u^ h(x) com (x em Γ_u) que está contido em ΩD, onde ΩD é a borda do domínio D.

4) A condição de Neumann em vez de especificar o valor da função na borda, ela faz isso na derivada da função na borda. Ou seja, a restrição de condição de contorno especifica para a derivada da função u^h(x) com (x em Γ_du) que está contido em ΩD.

QUESTÃO 2

$m = 1 + (4+0+1+3+3+9) \% 4 = 1$

$k = 4$

$\omega = \sqrt{k/m} = 2$

$\zeta = 0.05$

p/ $t = 0$, $x(0) = 0$, $v(0) = 0$

p/ $t = 1.2s$, $x(1.2) = ?$, $v(1.2) = ?$

Preciso reescrever a equação diferencial de segunda ordem como um sistema de duas eq. diferenciais de primeira ordem.

Pra isso introduzo v(t), que é a velocidade do carrinho, e é igual a 1° derivada de x(t).

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{f(t)}{m} - 2\zeta\omega v(t) - \omega^2 x(t)$$

Sabendo que:

$$x(0) = 0$$
$$v(0) = 0$$

Defino o passo como sendo h = 0.1 inicialmente, podendo reduzir ainda mais dependendo se atingiu ou não a tolerância comparado com o resultado de h de passo maior

E defino as derivadas de ordem maior

$$\frac{dx}{dt} = h \cdot v(t_i)$$

i = índice que corresponde aos tempos analizados dentro do intervalo [0, 1.2], com passos h = 0.1

$$\frac{dv}{dt} = h \cdot \left[\frac{f(t_i)}{m} - 2\zeta\omega v(t_i) - \omega^2 x(t_i)\right]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = h \cdot \left[v(t_i) + 0.5\frac{dv}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = h \cdot \left[\frac{f(t_i) + 0.5 \cdot h}{m} - 2\zeta\omega\left(v(t_i) + 0.5 \cdot \frac{dv}{dt}\right) - \omega^2\left(x(t_i) + 0.5\frac{dx}{dt}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = h \cdot v\left(t_i + \frac{d^3v}{dt}\right)$$

$$\frac{d^4v}{dt^4} = h \cdot \left[\frac{f(t_{i+1})}{m} - 2 \cdot \zeta \cdot \omega\left(v(t_i) + \frac{d^3v}{dt^3}\right) - \omega^2\left(x(t_i) + \frac{d^3x}{dt^3}\right)\right]$$

Próxima página...

Agora eu atualizo os valores de x e v

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \frac{1}{6}\left[\frac{dx}{dt} + 2\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^4x}{dt^4}\right]$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \frac{1}{6}\left[\frac{dv}{dt} + 2\cdot\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{d^3v}{dt^3} + \frac{d^4v}{dt^4}\right]$$

E faço isso para todos os t's.

Com uma tolerância de 10^-6 (sempre dividindo delta_t por 10 e comparando com o resultado de uma nova redução de intervalo pelo anterior até atingir a tolerância), e a função f como sendo a força em função do tempo sendo:

$$f(t)\begin{cases} 4t, & \text{se } t < 0.5 \\ 4\cdot(1-t), & \text{se } t < 1.0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O resultado aproximado de x(1.2) e v(1.2) para t = 1.2,
são respectivamente

$$\boxed{\begin{aligned} x(1.2) &= 0.422326\ m \\ v(1.2) &= 0.112158\ m/s \end{aligned}}$$

QUESTÃO 3

$$T = 4+0+1 = 5$$

$$P = 3+3+9 = 15$$

$$N = 4+(4+0+1+3+3+9)\%4 = 4$$

No método precisaremos substituir a derivada por uma aproximação usando diferenças finitas.

Intervalo r entre 0.2 e 0.5: divido em 4 partições h

$$h = \frac{0.5-0.2}{4} = 0.075$$

Agora discretizo a eq. diferencial. A segunda e primeira derivada num ponto podem ser aproximadas com as fórmulas de df:

$$y''(r) \approx [y(r+h) - 2y(r) + y(r-h)] / h^2$$

$$y' \approx [y(r+h) - y(r-h)] / 2h$$

A equação diferencial da questão é:

$$Ty''(r) + \frac{T}{r} y'(r) = -P$$

Substituindo com y''(r) e y'(r):

$$T[y(r+h) - 2y(r) + y(r-h)] / h^2 + \frac{T}{r}[y(r+h) - y(r-h)]/2h = -P$$

Sendo r_i = 0.2 + i*h para i no intervalo [0,4], a equação vira

$$T[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] / h^2 + \frac{T}{r_i}[y_{i+1} - y_{i-1}] / 2h = -P$$

Essa equação não se aplica nos extremos r = 0.2 e r = 0.5, pois o deslocamento já é conhecido pelas C.C.: y(0.2) = 0 e y(0.5) = 0.

O objetivo agora é buscar os valores para i = 1,2 e 3.

$$T[y_2 - 2y_1 + y_0]/0.0056 + \frac{T}{0.275}[y_2 - y_0]/0.15 = -P$$

$$T[y_3 - 2y_2 + y_1]/0.0056 + \frac{T}{0.35}[y_3 - y_1]/0.15 = -P$$

$$T[y_4 - 2y_3 + y_2]/0.0056 + \frac{T}{0.425}[y_4 - y_2]/0.15 = -P$$

Substituindo T e P, temos (prox. página)

$$5[y_2 - 2y_1 + y_0]/0.0056 + \frac{5}{0.275}[y_2 - y_0]/0.15 = -15$$

$$5[y_3 - 2y_2 + y_1]/0.0056 + \frac{5}{0.35}[y_3 - y_1]/0.15 = -15$$

$$5[y_4 - 2y_3 + y_2]/0.0056 + \frac{5}{0.425}[y_4 - y_2]/0.15 = -15$$

Simplificando e isolando as variáveis, temos:

$$\frac{5}{0.0056}y_2 - \frac{10}{0.0056}y_1 + \frac{5}{0.0056}y_0 + \frac{5}{0.0413}y_2 - \frac{5}{0.0413}y_0 = -15$$

$$\frac{5}{0.0056}y_3 - \frac{10}{0.0056}y_2 + \frac{5}{0.0056}y_1 + \frac{5}{0.0525}y_3 - \frac{5}{0.0525}y_1 = -15$$

$$\frac{5}{0.0056}y_4 - \frac{10}{0.0056}y_3 + \frac{5}{0.0056}y_2 + \frac{5}{0.0638}y_4 - \frac{5}{0.0638}y_2 = -15$$

$$\Downarrow$$

$$1013.9225y_2 - 1785.7143y_1 + 771.7918y_0 = -15$$

$$988.0952y_3 - 1785.7143y_2 + 797.6190y_1 = -15$$

$$971.2270y_4 - 1785.7143y_3 + 814.4872y_2 = -15$$

Sabendo que y_0 e y_4 são zeros, então:

$$1013.9225y_2 - 1785.7143y_1 = -15$$

$$988.0952y_3 - 1785.7143y_2 + 797.6190y_1 = -15$$

$$-1785.7143y_3 + 814.4872y_2 = -15$$

Temos um sistema linear com 3 icógnitas. Resolvendo por métodos de decomposição e eliminação, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 0.0277 \\ y_2 &= 0.0340 \\ y_3 &= 0.024 \end{aligned}}$$