

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Robotica e dell'Automazione



# Land Vehicle Dynamics-Aided Inertial Navigation

J-H. WANG, Y. GAO

Studente: Francesco Iotti  
Pietro Gori  
Vincenzo Degiacomo

Corso di Sistemi di Guida e Navigazione  
Prof: Lorenzo Pollini

Novembre 2022

Anno accademico 2022/2023



## PROBLEMA

Rapida deriva degli errori di navigazione per INS di tipo MEMS in assenza di sensori ausiliari.

## OBIETTIVO

Design e implementazione di un metodo di correzione degli errori autonomo e basato sulla dinamica.

Dimostrazione dell'efficacia di tale metodo in navigazione INS/GPS durante lunghe assenze di dati GPS.

# INTRODUZIONE

Sistemi di navigazione inerziale (INS) supportati con altri sensori (es. GPS) sono largamente utilizzati nelle applicazioni pratiche. In alcuni casi però i sensori di correzione potrebbero non essere sempre disponibili.

Durante tali periodi di navigazione stand-alone, il filtro di navigazione predice e corregge gli errori di navigazione sulla base delle ultime stime dell'errore del sensore inerziale e il modello dinamico dell'errore.

Sfortunatamente, per INS low-cost basati su dispositivi MEMS, con grandi variazioni di bias ed errori randomici, entrambi difficili da caratterizzare, gli errori di navigazione non possono essere predetti accuratamente dal filtro di Kalman e divergono rapidamente.

Nel caso di veicoli terrestri, i vincoli sul moto possono essere usati per ridurre tale deriva.



# INTRODUZIONE



Nell'articolo preso in esame, si propone di ricavare misure aggiuntive dalla conoscenza della dinamica del veicolo al fine di controllare l'errore di navigazione dell'INS durante i periodi in modalità stand-alone.

Ad esempio, informazioni sul rollio e sulla velocità di avanzamento possono essere ricavate in certe condizioni di moto, ad esempio in curva o rettilineo. Insieme alle classiche tecniche ZUPTs (Zero Updates Velocity), le informazioni derivanti dalla dinamica sono ora disponibili sia quando il veicolo è fermo che quando è in movimento.

Per usare correttamente tali informazioni però, la tipologia di moto del veicolo deve essere prima identificata correttamente e per fare ciò è stato implementato un sistema basato sulla logica Fuzzy.

A questo punto i dati ricavati direttamente dalla dinamica sono usati per aggiornare il filtro di navigazione (navigation Kalman filter) quando le risorse di correzione primaria, come il GPS, diventano non disponibili.

# LAND VEHICLE MOTION MODEL



$$\dot{V}_f = A_{Bx} - g \sin \theta \quad (1)$$

$$V_f \omega_{Bz} = A_{By} + g \sin \phi \cos \theta \quad (2)$$

$$V_f \omega_{By} = -A_{Bz} - g \cos \phi \cos \theta \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \omega_{Bx} + \sin \phi \tan \theta \omega_{By} + \cos \phi \tan \theta \omega_{Bz} \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \cos \phi \omega_{By} - \sin \phi \omega_{Bz} \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \omega_{By} + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \omega_{Bz} \quad (6)$$

$$\dot{P}_{Nn} = V_f \cos \theta \cos \psi \quad (7)$$

$$\dot{P}_{Ne} = V_f \cos \theta \sin \psi \quad (8)$$

$$\dot{P}_{Nd} = V_f \sin \theta \quad (9)$$

Il modello utilizzato è quello proposto da Brandt e Gardner ([articolo](#)). Esso tiene conto dei vincoli non olonomi tipici dei veicoli terrestri.

Si assume trascurabile la rotazione della Terra e costante il vettore gravità.

N indica il navigation frame, di tipo NED (North East Down), B invece il body frame composto da assi ortogonali lungo le direzioni di avanzamento (x) di traverso (y) e verso il basso (z) del veicolo.

# LAND VEHICLE MOTION MODEL



$$\dot{V}_f = A_{Bx} - g \sin \theta \quad (1)$$

$$V_f \omega_{Bz} = A_{By} + g \sin \phi \cos \theta \quad (2)$$

$$V_f \omega_{By} = -A_{Bz} - g \cos \phi \cos \theta \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \omega_{Bx} + \sin \phi \tan \theta \omega_{By} + \cos \phi \tan \theta \omega_{Bz} \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \cos \phi \omega_{By} - \sin \phi \omega_{Bz} \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \omega_{By} + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \omega_{Bz} \quad (6)$$

$$\dot{P}_{Nn} = V_f \cos \theta \cos \psi \quad (7)$$

$$\dot{P}_{Ne} = V_f \cos \theta \sin \psi \quad (8)$$

$$\dot{P}_{Nd} = V_f \sin \theta \quad (9)$$

- $[P_{Nn}, P_{Ne}, P_{Nd}]$  posizione del veicolo nel navigation frame.
- $V_f$  velocità di avanzamento del veicolo
- $[\phi, \theta, \psi]$  assetto del veicolo espresso tramite angoli di Eulero RPY
- $[A_{Bx}, A_{By}, A_{Bz}]$  accelerazione misurata in Body frame
- $[\omega_{Bx}, \omega_{By}, \omega_{Bz}]$  velocità angolari misurate in terna Body
- $g$  costante gravitazionale

# Considerazioni sul modello



$$\dot{V}_f = A_{Bx} - g \sin \theta \quad (1)$$

$$V_f \omega_{Bz} = A_{By} + g \sin \phi \cos \theta \quad (2)$$

$$V_f \omega_{By} = -A_{Bz} - g \cos \phi \cos \theta \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \omega_{Bx} + \sin \phi \tan \theta \omega_{By} + \cos \phi \tan \theta \omega_{Bz} \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \cos \phi \omega_{By} - \sin \phi \omega_{Bz} \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \omega_{By} + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \omega_{Bz} \quad (6)$$

$$\dot{P}_{Nn} = V_f \cos \theta \cos \psi \quad (7)$$

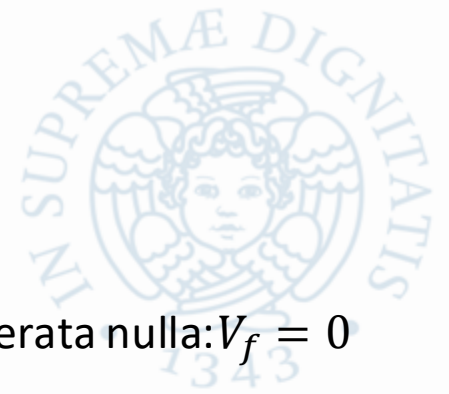
$$\dot{P}_{Ne} = V_f \cos \theta \sin \psi \quad (8)$$

$$\dot{P}_{Nd} = V_f \sin \theta \quad (9)$$

Analizzando (1) e (2) si può osservare che:

- La velocità di avanzamento può essere calcolata direttamente conoscendo  $A_{By}$ ,  $\phi$  e  $\theta$  se la velocità angolare  $\omega_{Bz}$  è significativamente grande (es. in curva)
- Il rollio e il beccheggio possono calcolati direttamente in particolari fasi di moto, es. fase stazionaria ( $V_f = 0$ ,  $\dot{V}_f = 0$ ) o rettilinea ( $\omega_{Bz} = 0$ )

# VEHICLE DYNAMICS-DERIVED OBSERVABLES: Fase stazionaria



La prima grandezza ricavabile durante la fase stazionaria riguarda la velocità di avanzamento, considerata nulla:  $V_f = 0$

Per la correzione delle stime di assetto si usano invece le misure fornite dall'accelerometro; considerando la  $V_f$  nulla e invertendo le eq (1) e (2) si possono determinare direttamente beccheggio ( $\phi$ ) e rollio ( $\theta$ ):

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{A_{Bx}}{g} \right)$$

In accordo con queste due equazioni, non sono richiesti passi di integrazione e l'accuratezza della stima dipende solo dagli errori di misura come rumore e bias.

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{-A_{By}}{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2}} \right)$$

Inoltre, poiché il veicolo è fermo, l'imbardata ( $\psi$ ) può essere assunta costante secondo la relazione:  $\psi(t_s) = \psi(t_s - 1)$  con  $t_s$  tempo di campionamento durante la fase stazionaria.

Ultimo beneficio di questa fase di moto è la possibilità di stimare direttamente i bias del giroscopio assumendo che la velocità angolare vera sia nulla e mediando le uscite del gyro sul periodo di stazionarietà.



## VEHICLE DYNAMICS-DERIVED OBSERVABLES: Fase stazionaria

Utilizzando la tecnica di perturbazione si possono ricavare le seguenti equazioni che descrivono la relazione tra l'errore di misura dell'accelerometro e quello di assetto:

$$\delta\theta = \frac{1}{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2}} \delta A_{Bx}$$

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2 - A_{By}^2}}{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2}} \left( \frac{-\delta A_{By}}{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2}} - \frac{A_{Bx} A_{By} \delta A_{Bx}}{(g^2 - A_{Bx}^2)^{3/2}} \right) \\ &= \sqrt{g^2 - A_{Bx}^2 - A_{By}^2} \left( \frac{-\delta A_{By}}{(g^2 - A_{Bx}^2)} - \frac{A_{Bx} A_{By} \delta A_{Bx}}{(g^2 - A_{Bx}^2)^2} \right) \\ &\cong - \frac{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2 - A_{By}^2}}{(g^2 - A_{Bx}^2)} \delta A_{By} \end{aligned}$$

Dove  $\delta\theta$  e  $\delta\phi$  sono rispettivamente errore di beccheggio e di rollio, mentre  $\delta A_{Bx}$  e  $\delta A_{By}$  sono gli errori di misura dell'accelerometro sugli assi x e y rispettivamente.

Comparato con i valori di assetto derivanti dall'integrazione delle misure del giroscopio con larghe derivate degli errori, il metodo su proposto è relativamente accurato e fornisce una correzione diretta dell'errore di assetto.

## VEHICLE DYNAMICS-DERIVED OBSERVABLES: Fase rettilinea



Quando il veicolo si muove in direzione retta, la  $A_{By}$  fornita dall'accelerometro può essere usata per determinare l'angolo di rollio a partire dalla (2) e imponendo  $\omega_{Bz} = 0$  :

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{A_{Bx}}{g} \right)$$

Tale relazione è la stessa vista nel caso precedente e le considerazioni sull'errore saranno analoghe.

I possibili disturbi dovuti a slittamenti laterali o vibrazioni possono essere invece ridotti con una media mobile temporale.

# VEHICLE DYNAMICS-DERIVED OBSERVABLES: Fase di curva



Le elevate velocità angolari e accelerazioni trasversali durante le fasi di curva permettono di ricavare direttamente una stima della velocità di avanzamento  $V_f$ :

$$V_f = \frac{1}{\omega_{Bz}}(A_{By} + g \sin \phi \cos \theta)$$

La presenza di  $\omega_{Bz}$  al denominatore rende questa relazione utilizzabile solo quando il rapporto segnale/rumore di tale misura è sufficientemente elevato (es. in curva).

Per quanto riguarda l'errore, applicando la tecnica di perturbazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta V_f &= \frac{1}{\omega_{Bz}} \left( \delta A_{By} - g \cos \phi \cos \theta \frac{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2 - A_{By}^2}}{(g^2 - A_{Bx}^2)} \delta A_{By} - g \sin \phi \sin \theta \delta \theta \right) - \frac{1}{\omega_{Bz}^2} (A_{By} + g \sin \phi \cos \theta) \delta \omega_{Bz} \\ &\cong \frac{1}{\omega_{Bz}} \left( 1 - g \cos \phi \cos \theta \frac{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2 - A_{By}^2}}{(g^2 - A_{Bx}^2)} \right) \delta A_{By} - \frac{1}{\omega_{Bz}^2} (A_{By} + g \sin \phi \cos \theta) \delta \omega_{Bz}. \end{aligned}$$

Da tale relazione si evince che l'accuratezza della stima dipende esclusivamente dagli errori dell'asse y dell'accelerometro e dall'asse z del giroscopio.

# VEHICLE DYNAMICS-DERIVED OBSERVABLES: Riepilogo

Le grandezze ricavabili dalla dinamica durante le varie fasi di moto sono riassunte nella seguente tabella:



	Direct Estimation of INS Navigation States and Sensor Errors				
Vehicle Dynamics	Pitch	Roll	Yaw	Forward Velocity	Gyro Bias
Stationary	$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{A_{Bx}}{g} \right)$	$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{-A_{By}}{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2}} \right)$	$\psi(t_s) = \psi(t_s - 1)$	$V_f = 0$	$b_{\omega_{Bx}} = \omega_{Bx}$ $b_{\omega_{By}} = \omega_{By}$ $b_{\omega_{Bz}} = \omega_{Bz}$
Straight-line Motion	N/A	$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{-A_{By}}{\sqrt{g^2 - A_{Bx}^2}} \right)$	N/A	N/A	N/A
Cornering Motion	N/A	N/A	N/A	$V_f = \frac{A_{By} + g \sin \phi \cos \theta}{\omega_{Bz}}$	N/A



# VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION

Le misure di accelerazione e velocità angolare sono fortemente correlate alla dinamica del veicolo, e potrebbero essere utilizzate nell'identificazione attraverso un insieme di regole or/and.

Nelle applicazioni reali tuttavia la presenza di disturbi nei sensori, dovuti a rumori o vibrazioni, possono alterare le misure. Pertanto il sistema deve essere anche in grado di gestire le imprecisioni nelle misure inerziali.

In modo da riconoscere la fase di moto in cui si trova il veicolo, è stato implementato un sistema che incorpora la logica fuzzy e un insieme di regole empiriche nel suo processo di elaborazione.



# VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Logica Fuzzy

Per prima cosa definiamo le variabili di ingresso al sistema Fuzzy  $J(t_k)$  e  $W(t_k)$  come segue:

$$J(t_k) = \sum_{t_i=t_k-n}^{t_k} |A_{norm}(t_i) - A_{norm}(t_i - 1)|$$

$$W(t_k) = \sum_{t_i=t_k-n}^{t_k} |\omega_{norm}(t_i)|$$

Definendo:

$$A_{norm} = \sqrt{A_{Bx}^2 + A_{By}^2 + A_{Bz}^2} \quad \omega_{norm} = \sqrt{\omega_{Bx}^2 + \omega_{By}^2}$$

In uscita dal sistema si ottiene l'indicatore dinamico  $DI(t_k)$  dalla combinazione dei due input dinamici.



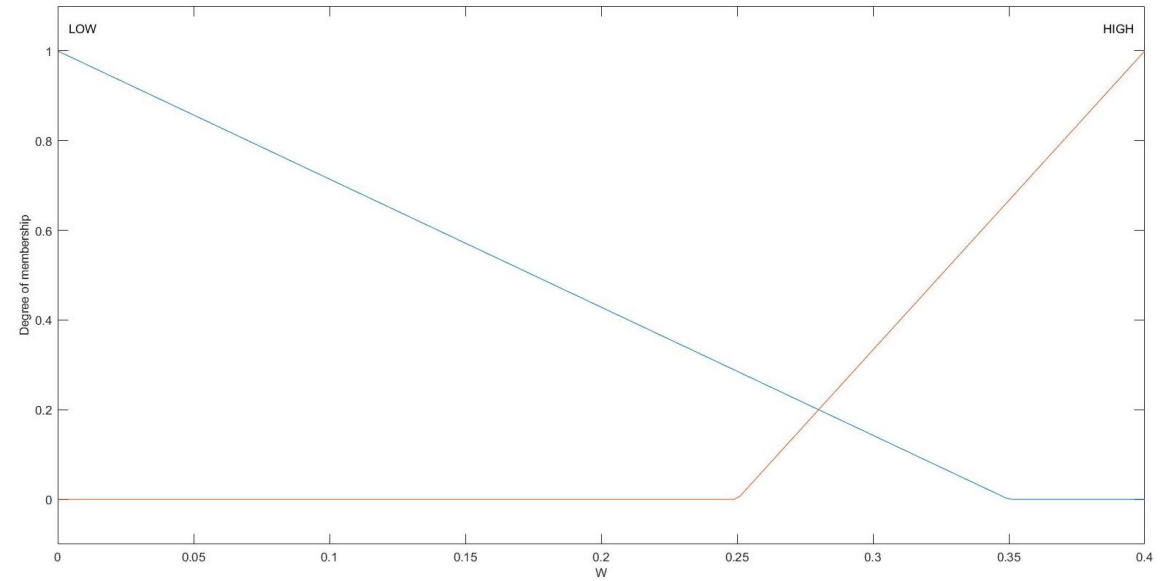
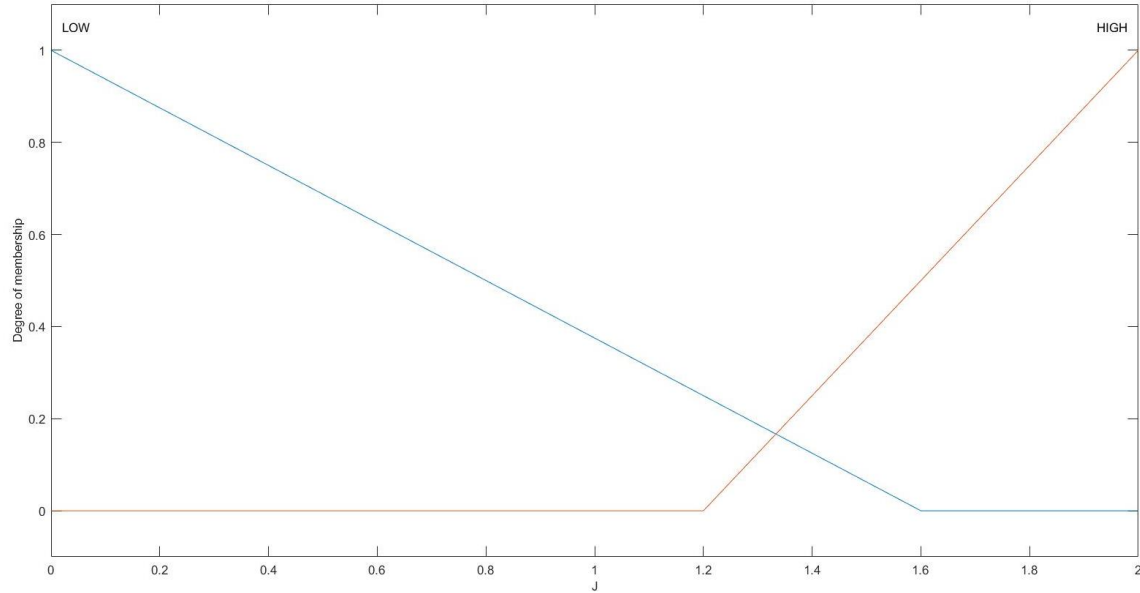
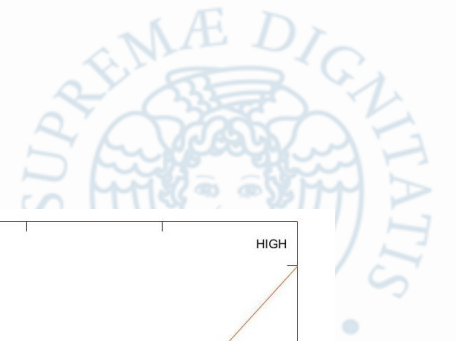
## VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Logica Fuzzy

Nel problema considerato, sono state definite due membership function 'low' e 'high', per ognuna delle variabili di ingresso; rappresentando il valore 'grande' e 'piccolo' della dinamica lineare e angolare. Per semplicità è stata considerata la funzione a triangolo.

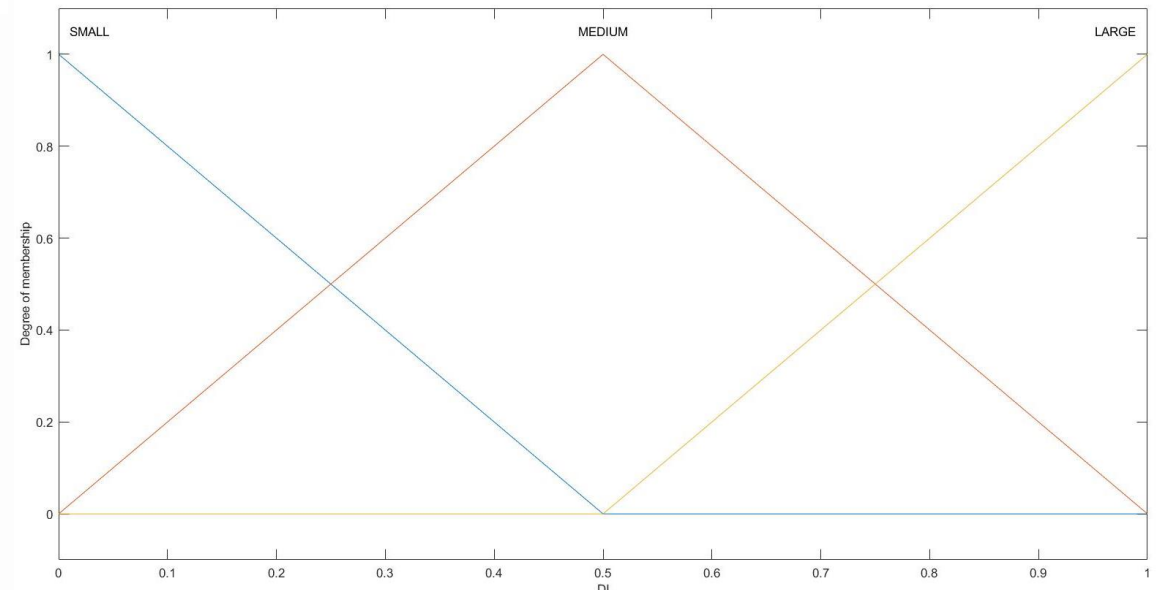
I parametri per queste membership function sono state determinati empiricamente basandosi su un test data.

Per la variabile di uscita sono state utilizzate tre membership function a triangolo definite 'small', 'medium', 'large'. Con il termine 'large' intendiamo che c'è una buona possibilità che il veicolo sia in moto.

# VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Logica Fuzzy



Membership functions di J  
(in alto a sinistra) W (in alto  
a destra) e DI (in basso)







## VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Logica Fuzzy

Infine vengono definite un insieme di regole if-then per ottenere l'uscita dalle variabili di ingresso. Queste regole sono state scelte dalla conoscenza del problema e dal buon senso.

***$R_1$ : if  $J$  is LOW and  $W$  is LOW then  $DI$  is SMALL***

***$R_2$ : if  $J$  is HIGH and  $W$  is LOW then  $DI$  is MEDIUM***

***$R_3$ : if  $J$  is LOW and  $W$  is HIGH then  $DI$  is MEDIUM***

***$R_4$ : if  $J$  is HIGH and  $W$  is HIGH then  $DI$  is LARGE***

Come valore di soglia per distinguere tra dinamica stazionaria e non stazionaria è stato preso 0.5, perché il valore di  $DI$  rimaneva in un range compreso tra  $1/6$  e  $5/6$ .



## VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Regole empiriche

L'indicatore della dinamica DI viene calcolato prendendo in considerazione i valori di J e W dell'epoca precedente, pertanto si avrebbe un ritardo nell'identificazione della dinamica. Per ovviare a questo problema definiamo un nuovo parametro per la dinamica lineare  $DA_x(t_k)$  per misura la dinamica di avanzamento istantanea:

$$DA_x(t_k) = \sum_{t_i = t_k - p}^{t_k} |A_{Bx}(t_i) - A_{Bx}(t_k - p)|$$

Nel quale p è il tempo di ritardo nel calcolo della differenza di accelerazione.

Quando il veicolo inizia a muoversi avviene un grosso cambiamento della dinamica nella direzione di avanzamento. In questo caso  $DA_x$  può essere utilizzato per indicare istantaneamente se il veicolo è in moto.

In base alle condizioni su DI e  $DA_x$  è stato elaborato un insieme di if-then rules per distinguere la dinamica del veicolo, sia stazionaria che non stazionaria.



## VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Regole empiriche

Quando la dinamica del veicolo identificata è non stazionaria, il passo successivo è distinguere tra moto in linea retta e in curva.

Dal momento che gli angoli di rollio e di beccheggio sono piccoli durante la fase di curva, è stato preso in considerazione un ulteriore parametro che tiene conto della velocità angolare  $\omega_z$ ,  $M \omega_z(t_k)$ :

$$M \omega_z(t_k) = \frac{1}{m} \sum_{t_i = t_k - m}^{t_k} \omega_{Bz}(t_i)$$

Dove  $m$  è la finestra temporale per la media mobile.

In base alle condizioni su  $M \omega_z$  è stato elaborato un set di if-then rules per classificare la dinamica non stazionaria in linea retta o in curva.



# VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Regole empiriche

Regole empiriche per riconoscimento dinamica stazionaria non stazionaria

***Quando il veicolo era stazionario all'epoca precedente:***

***Se  $Da_x$  è maggiore di un certo valore di soglia, allora il veicolo è non stazionario.***

***Quando il veicolo era non stazionario all'epoca precedente:***

***Se  $Da_x$  è minore di un certo valore di soglia e  $DI$  è minore di 0.5, allora il veicolo è stazionario.***

Regole empiriche per riconoscimento fase di moto in linea retta o in curva

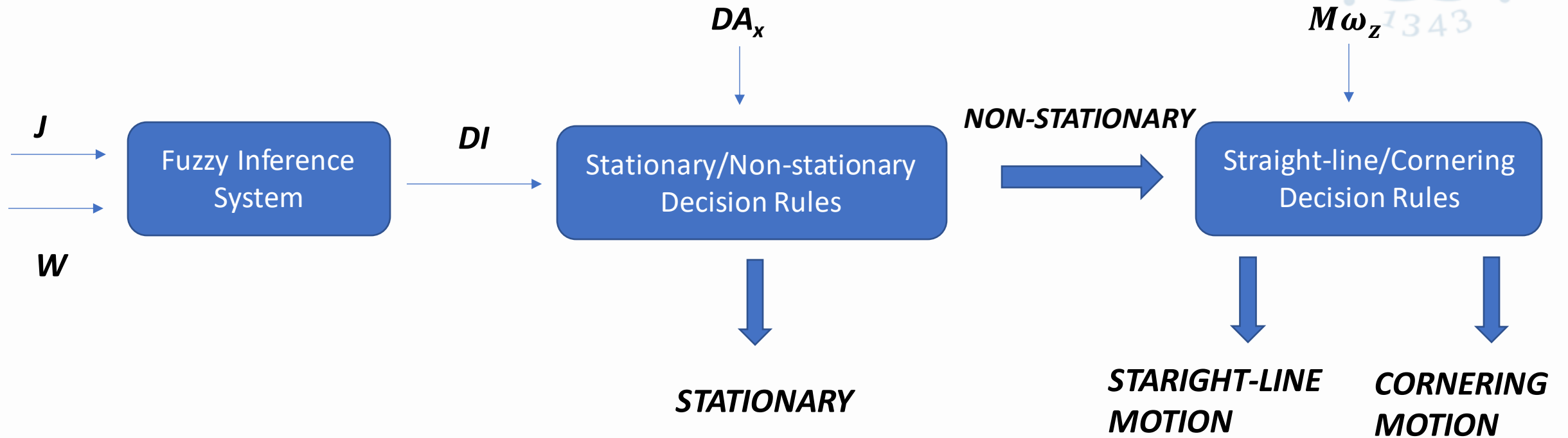
***Quando il veicolo era in moto in linea retta all'epoca precedente:***

***Se  $M \omega_z$  è maggiore di un certo valore di soglia, allora il veicolo è in curva.***

***Quando il veicolo era in moto in curva all'epoca precedente:***

***Se  $M \omega_z$  è minore di un certo valore di soglia, allora il veicolo è in moto in linea retta.***

# VEHICLE DYNAMICS IDENTIFICATION: Schema riassuntivo



Schema per l'identificazione della dinamica del veicolo

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN



L'obiettivo è quello di stimare gli errori di navigazione e i bias dei sensori attraverso le misure dynamics-aided o quelle provenienti da sensori esterni. In particolare ci soffermiamo sulle stime di velocità e di assetto.

Il filtro di Kalman implementato è di tipo indiretto che appunto permette di stimare gli errori di navigazione.

Il modello su cui si basa il filtro sono le equazioni che descrivono il veicolo terrestre, mostrate in precedenza, a cui è applicata la *perturbation technique*.

Bias e rumori sono modellati come delle random-walk nel KF.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Stima dei bias



È importante fare una piccola premessa riguardo i bias. Infatti per garantire l'incorrelazione tra rumore di processo e rumore di misura non è possibile sfruttare le misure dynamics-derived per stimare questi ultimi. Questo aspetto non è di poca rilevanza in quanto è necessario avere una corretta stima dei bias per avere una buona stima degli errori di misura.

Per risolvere questa problematica si stimano i bias a priori sfruttando le misure di sensori esterni - i.e. GPS. Questo assicura la stabilità della loro stima ed evita il fatto che le misure dynamics-aided siano correlate con le stime del filtro.

Nel nostro caso, poiché il lavoro è completamente simulato, i bias vengono tolti a priori dalle misure in quanto dai datasheet dei sensori non è stato possibile estrapolare il loro drift.

Nonostante questo effettuiamo una stima dei bias con i metodi proposti per valutare la correttezza dei valori sottratti a priori.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Stima dei bias



Gli unici bias che si possono stimare sfruttando il sistema proposto sono:  $b_{\omega_{Bx}}$ ,  $b_{\omega_{By}}$ ,  $b_{\omega_{Bz}}$  e  $b_{A_{By}}$ .

I bias dei tre gyro e quello dell'accelerazione lungo y in terna Body.

I bias dei gyro vengono stimati valutando le velocità angolari durante ogni fase di stop, infatti le velocità angolari sono nulle in questa fase, pertanto le misure fornite dai giroscopi, mediate nel tempo, forniranno un valore diverso da zero. Tale valore non può che essere il bias dei sensori.

Per la stima di  $b_{A_{By}}$  l'articolo propone una formula derivata da un approccio statistico basato sulla stima di  $V_f$ .

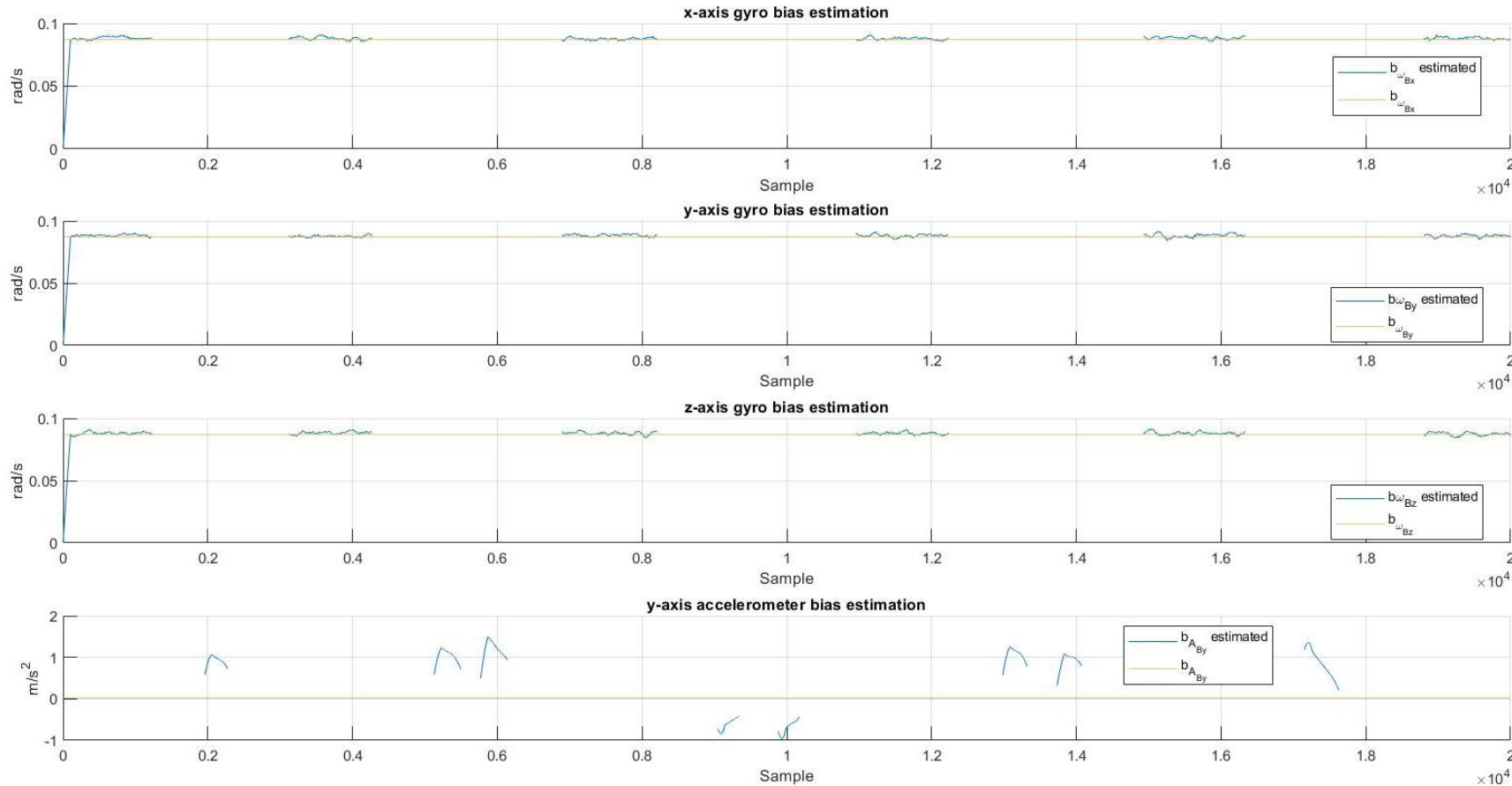
Sostanzialmente l'idea è quella di mediare nel tempo la differenza tra l'accelerazione  $A_{By}$  proveniente dal sensore e quella calcolata sfruttando le grandezze stimate e la dinamica del veicolo.

Al fine di avere una stima più accurata facciamo questo calcolo durante la fase di cornering.

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{\omega_{Bx}} = \omega_{Bx} \\ b_{\omega_{By}} = \omega_{By} \\ b_{\omega_{Bz}} = \omega_{Bz} \\ \hat{b}_{A_{By}} = \frac{1}{M} \sum_{t_k=1}^M A_{By}(t_k) - \bar{\omega}_{Bz}(t_k) \hat{V}_f(t_k) + g \sin \hat{\phi}(t_k) \cos \hat{\theta}(t_k) \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Fase di stop} \\ \longrightarrow \text{Fase di curva} \end{array}$$



# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Stima dei bias



Come risultati della stima otteniamo che i bias dei gyro si riescono a stimare abbastanza bene mentre si hanno problemi per il bias di  $A_{By}$ . Ciò è dovuto a problematiche che saranno evidenziate più avanti

Da notare che, come detto in precedenza, la stima dei bias di gyro e accelerometro non avvengono mai nella stessa fase temporale.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello dinamico



Applicando la *perturbation technique* e definendo il vettore di stato come  $\delta x = [\delta V_f \delta \phi \delta \theta \delta \psi b_{A_{Bx}}]^T$  e il vettore dei rumori di processo come  $w = [w_{A_{Bx}} w_{\omega_{Bx}} w_{\omega_{By}} w_{\omega_{Bz}} w_b]^T$ , si ottiene il seguente modello:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \dot{V}_f \\ \delta \dot{\phi} \\ \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{\psi} \\ \dot{b}_{A_{Bx}} \end{bmatrix}}_{\delta \dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \cos \theta & 0 & 1 \\ 0 & f_{\phi\phi} & f_{\phi\theta} & 0 & 0 \\ 0 & f_{\theta\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{\psi\phi} & f_{\psi\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} \delta V_f \\ \delta \phi \\ \delta \theta \\ \delta \psi \\ b_{A_{Bx}} \end{bmatrix}}_{\delta x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} w_{A_{Bx}} \\ w_{\omega_{Bx}} \\ w_{\omega_{By}} \\ w_{\omega_{Bz}} \\ w_b \end{bmatrix}}_w$$

$$\begin{aligned} f_{\phi\phi} &= \cos \phi \tan \theta \omega_{By} - \sin \phi \tan \theta \omega_{Bz}; \\ f_{\phi\theta} &= \sin \phi \sec^2 \theta \omega_{By} + \cos \phi \sec^2 \theta \omega_{Bz}; \\ f_{\theta\phi} &= -\sin \phi \omega_{By} - \cos \phi \omega_{Bz}; \\ f_{\psi\phi} &= \cos \phi \sec \theta \omega_{By} - \sin \phi \sec \theta \omega_{Bz}; \\ f_{\psi\theta} &= \sin \phi \sec \theta \tan \theta \omega_{By} + \cos \phi \sec \theta \tan \theta \omega_{Bz}. \end{aligned}$$

$$\delta \dot{x} = F \delta x + G w$$

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello dinamico



La matrice di covarianza associata al processo è la seguente:

$$Q = \text{diag}(q_{A_{Bx}}, q_{\omega_{Bx}}, q_{\omega_{By}}, q_{\omega_{Bz}}, q_b)$$

$$\begin{cases} q_{A_{Bx}} = 0.001 \\ q_{\omega_{Bx}} = 0.1 \\ q_{\omega_{By}} = 0.1 \\ q_{\omega_{Bz}} = 0.1 \\ q_b = 1 \end{cases}$$

I valori delle varianze sono ricavate dai datasheet dei sensori, considerando la banda e la densità spettrale di ciascuno di essi.

Non avendo informazioni  $q_b$  è stato modellato come un semplice rumore bianco con varianza unitaria.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello delle misure



Il modello utilizzato in correzione non rimane costante nel tempo, ma varia a seconda della fase di moto identificata dalla logica Fuzzy.

Come specificato in precedenza, le fasi di moto identificate sono tre:

- moto stazionario;
- moto rettilineo;
- moto in curva.

Le correzioni, poiché vogliamo stimare degli errori, sono rappresentate dalla differenza tra le grandezze provenienti dalla meccanizzazione e quelle 'corrette' calcolate sfruttando la dinamica in relazione a quali siano osservabili di volta in volta. Chiaramente in funzione della fase di moto identificata, il modello delle misure cambia. Le grandezze non corrette subiranno solamente la fase di predizione del filtro.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello delle misure

Quando il veicolo è fermo, è possibile effettuare una stima diretta di della velocità e dell'assetto del veicolo. Il modello delle misure diventa:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_f - 0 \\ \phi - \phi^A \\ \theta - \theta^A \\ \psi - \psi^P \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \delta V_f \\ \delta \phi \\ \delta \theta \\ \delta \psi \\ b_{A_{Bx}} \end{bmatrix}}_{\delta x} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{v_f^{ZUPT}} \\ v_{\phi^A} \\ v_{\theta^A} \\ v_{\psi^P} \end{bmatrix}}_v$$

$$R = \text{diag}(\sigma_{\delta V_f^{ZUPT}}^2, \sigma_{\delta \phi^A}^2, \sigma_{\delta \theta^A}^2, \sigma_{\delta \psi^P}^2)$$

Dove  $\psi^P$  è l'imbardata del veicolo prima che si fermasse; 0,  $\phi^A$  e  $\theta^A$  sono i valori di velocità, rollio e beccheggio calcolate usando le misure dell'accelerometro una volta tolto il bias.

Il vettore  $v$  contiene i rumori associati ad ogni grandezza.

R è la matrice di covarianza legata al rumore delle misure e rappresenta la fiducia associata alle nuove misure di correzione

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello delle misure



Durante il moto rettilineo, l'unica grandezza che è possibile correggere è il rollio.

Il modello diventa:

$$\underbrace{[\phi - \phi^A]}_z = \underbrace{[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \delta V_f \\ \delta \phi \\ \delta \theta \\ \delta \psi \\ b_{A_{Bx}} \end{bmatrix}}_{\delta x} + \underbrace{[v_{\phi^A}]}_v$$
$$R = k\sigma_{\delta\phi^A}^2 \quad \text{con } k = 10^3$$

In questo caso avremo solo la correzione calcolata per il rollio e di conseguenza il rumore e la varianza a lei associati. Per aumentare la sfiducia nella correzione, al fine di migliorare la stima del rollio, è stata inserita una costante che moltiplica la varianza.

## DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello delle misure

Similmente al caso precedente, in curva è possibile osservare solo una grandezza: la velocità di avanzamento  
Il modello delle misure diventa:

$$\underbrace{[V_f - V_f^C]}_z = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]}_H \underbrace{\begin{bmatrix} \delta V_f \\ \delta \phi \\ \delta \theta \\ \delta \psi \\ b_{ABx} \end{bmatrix}}_{\delta x} + \underbrace{[v_{v_f^C}]}_v$$

$$R = k\sigma_{\delta V_f^C}^2 \quad \text{con } k = 10$$

Ancora avremo solamente rumore e varianza associati alla misura di velocità lineare.

Anche in questo caso è stato necessario aggiungere una costante moltiplicativa per diminuire la fiducia del filtro nei confronti della misura di correzione della velocità  $V_f$ .

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Modello delle misure



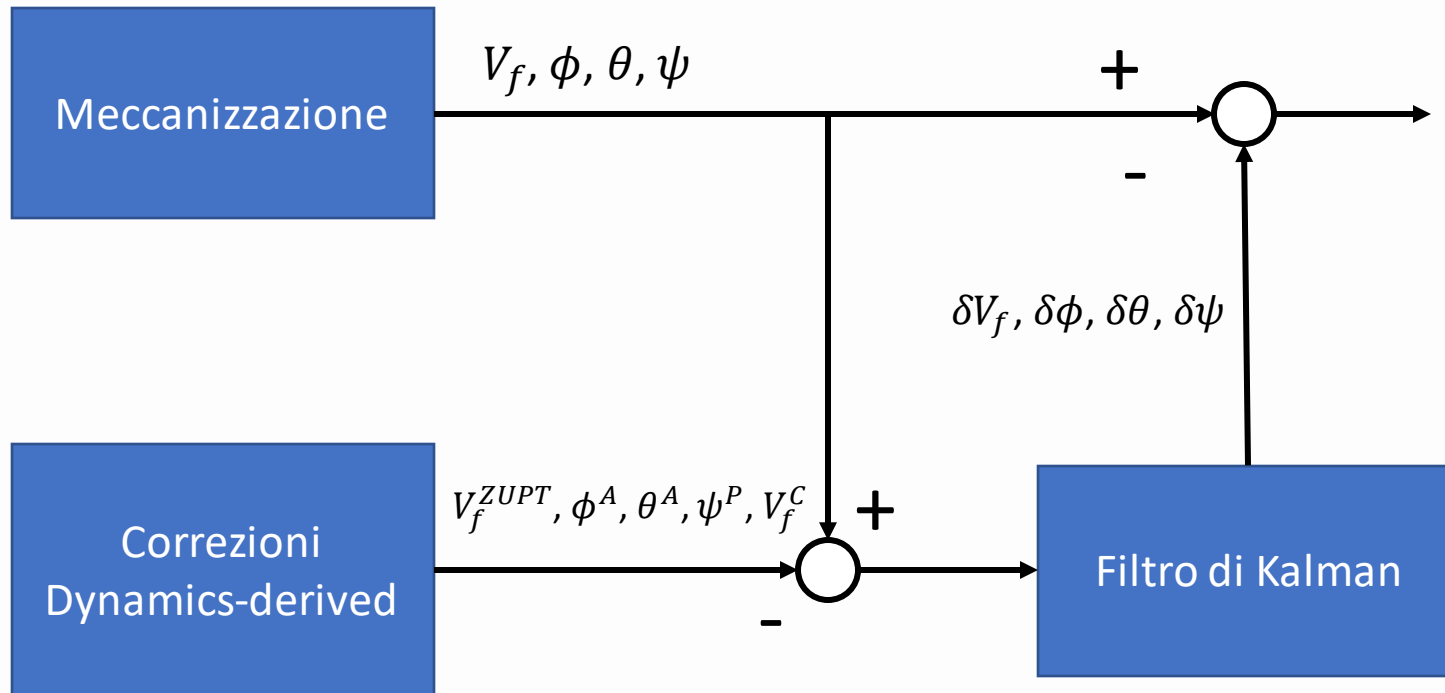
I valori delle varianze associate alle misure sono stati scelti in maniera semi-empirica.

Infatti l'articolo suggeriva di assegnare  $\sigma_{\delta\phi^A} = \sigma_{\delta\theta^A} = 0.2 \text{ deg}$  (sia in moto stazionario che in quello rettilineo) mentre suggeriva solamente di assegnare valori piccoli a  $\sigma_{\delta v_f^{ZUPT}}$  ed a  $\sigma_{\delta\psi^P}$  poiché ci si fida molto di tali quantità. Pertanto si è deciso di assegnare a queste grandezze un valore di 0.02 ovvero un ordine di grandezza inferiore alle altre due deviazioni standard.

In curva il valore di  $\sigma_{\delta v_f^C}$  è stato tarato basandosi sui dati ottenuti.



# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Filtro di Kalman indiretto



Per la stima degli errori di navigazione si è optato per una struttura loosely-coupled (o feedforward) in cui il filtro riceve in ingresso le grandezze provenienti dalla meccanizzazione e le correzioni calcolate di volta in volta in funzione della fase di moto identificata.

Ad ogni step il filtro prima calcola la stima predetta dello stato e poi valuta la correzione di quest'ultimo.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Filtro di Kalman indiretto



## Predizione

$$\begin{cases} \delta x_{k|k-1} = \delta x_{k-1} \\ P_{k|k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \end{cases}$$

Poiché è stata scelta la struttura in feedforward, il filtro deve essere in grado di tenere traccia delle correzioni effettuate al passo precedente, per questo la predizione propaga semplicemente lo stato corretto in precedenza. Questo è dovuto al fatto che le variabili di navigazione corrette non rientrano nella meccanizzazione. Le matrici  $F_k$  e  $G_k$  sono utilizzate solo per la predizione della covarianza e vengono calcolate ad ogni passo considerando gli ultimi valori provenienti dalla meccanizzazione e dai sensori.

# DEAD-RECKONING KALMAN FILTER DESIGN – Filtro di Kalman indiretto



## Correzione

$$\begin{cases} e_k = z_k - H_k \delta x_{k|k-1} \\ S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R \\ L_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \\ \delta x_{k|k} = \delta x_{k|k-1} + L_k e_k \\ P_{k|k} = (I - L_k H_k) P_{k|k-1} (I - L_k H_k)^T + L_k R_k L_k^T \end{cases}$$

Come mostrato in precedenza, in base alla fase di moto identificata, cambiano le grandezze corrette, quindi cambia la dimensione di  $z_k$  e di  $H_k$ .

Da notare che per evitare problemi a livello numerico la matrice  $P_{k|k}$  è calcolata in forma di Joseph.

Ad ogni step solo le grandezze corrette vengono aggiornate, mentre le altre rimangono invariate fino alla loro futura correzione.

Ovviamente la bontà di quest'ultima dipende da quanto sono rumorose le misure provenienti dalla IMU.

# SIMULATION RESULTS AND DISCUSSIONS



In questa sezione mostriamo come tutto ciò è stato implementato in simulazione e i risultati ottenuti.

I punti cardine del lavoro svolto sono i seguenti:

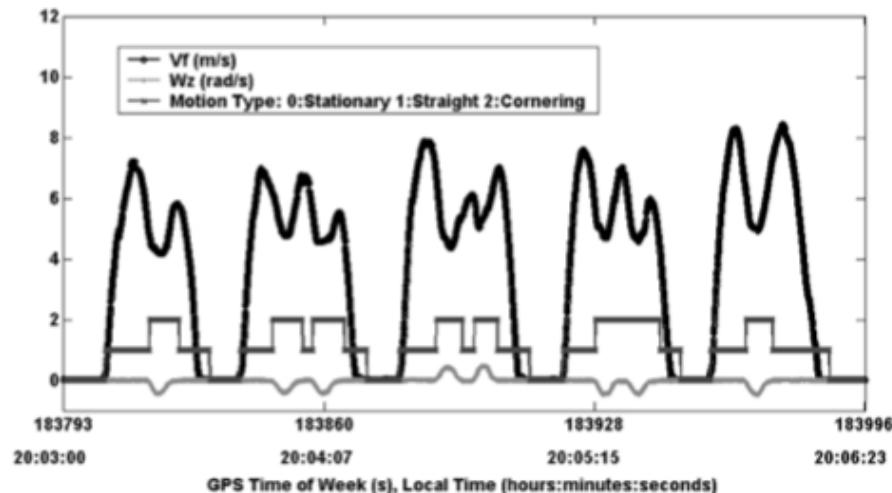
- generazione della traiettoria desiderata e modellazione dei sensori;
- identificazione delle fasi di moto (logica Fuzzy);
- stima degli errori di navigazione (filtro di Kalman);
- discussione dei risultati.

# Generazione della traiettoria

La traiettoria è stata generata a partire dal riferimento grafico presente sull'articolo, sfruttando l'interpolazione dei punti tramite B-Spline.

Sono stati individuati grossolanamente dei punti sui grafici reali e, su questa base, sono stati creati dei set di punti che, con qualche aggiustamento manuale, hanno permesso di ottenere degli andamenti molto simili a quelli dell'articolo.

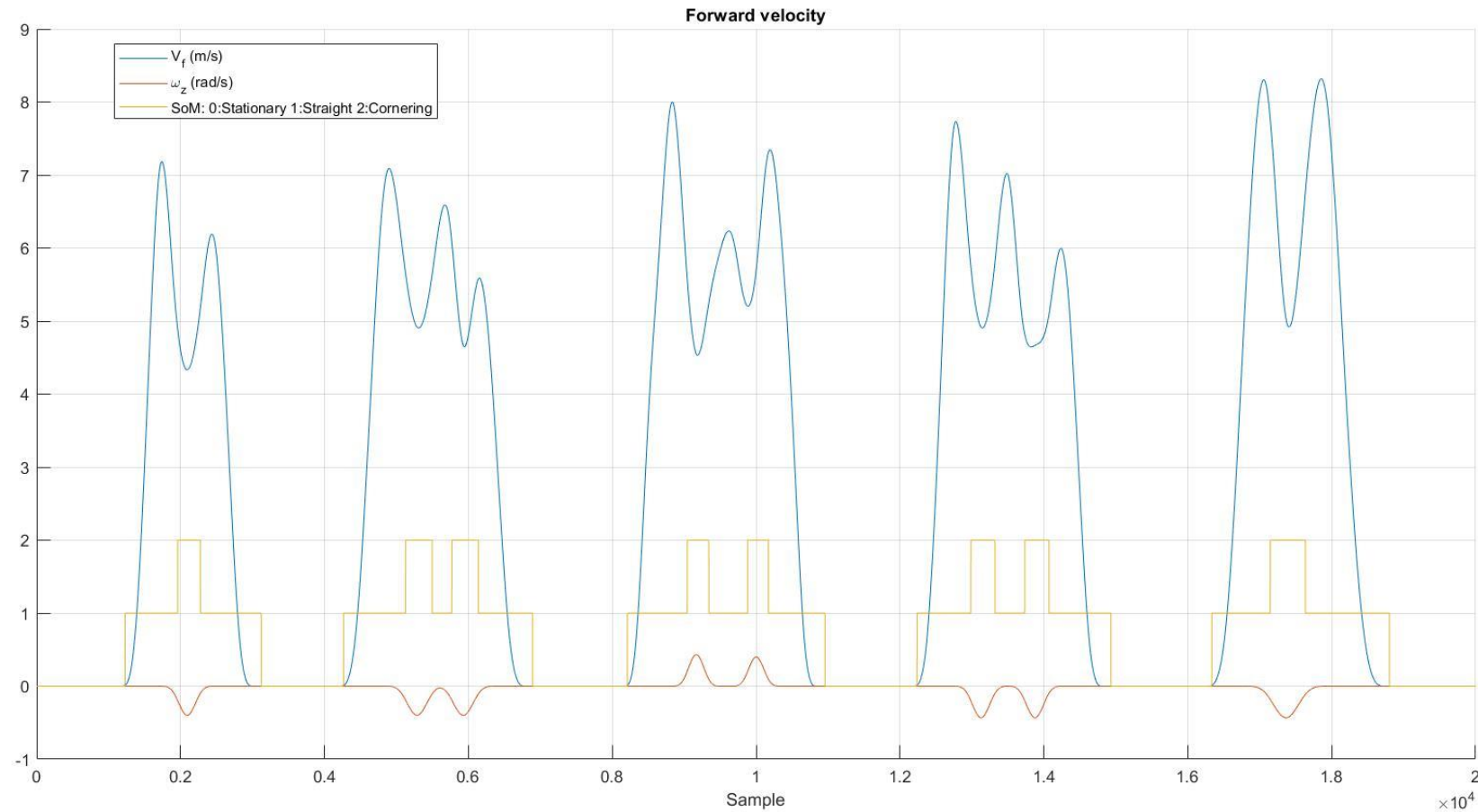
Questa operazione è stata effettuata per definire sia il riferimento in termini di velocità di avanzamento ( $V_f$ ) che di velocità angolare ( $\omega_Z$ ).



Sostanzialmente si è pensato di generare la traiettoria dividendola in cinque parti: una per ogni fase di moto; ciascuna intervallata da una fase di stop della durata di 10 secondi.

Per avere un comportamento il più fedele possibile alla realtà  $V_f$  e  $\omega_Z$  sono state generate utilizzando lo stesso numero di punti da interpolare.

# Generazione della traiettoria



In figura si vede anche il risultato dell'identificazione della fase di moto del veicolo, rappresentata dalla linea gialla

# Generazione delle misure



Poiché non si avevano a disposizione le misure di accelerometri e giroscopi, per poter svolgere la simulazione correttamente è stato necessario ottenere queste grandezze.

Tutto questo è stato possibile invertendo la dinamica del veicolo terrestre e dando in ingresso i riferimenti di velocità:  $[V_f \ 0 \ 0 \ \omega_Z]$ ; dove gli ultimi tre elementi sono  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  del veicolo in Navigation frame.

In questo modo siamo riusciti ad ottenere gli andamenti delle accelerazioni  $A_B = [A_{Bx} \ A_{By} \ A_{Bz}]^T$  e delle velocità angolari in terna Body  $\omega_B = [\omega_{Bx} \ \omega_{By} \ \omega_{Bz}]^T$ .

# Modello dei sensori



Una volta acquisite le misure dei sensori, è stato necessario perturbare queste misure come se effettivamente venissero fornite da un sensore.

Per fare questo è stato implementato il modello di ogni sensore con cui vengono introdotte quelle non idealità, estratte dai datasheet dei sensori reali usati nell'articolo, che rendono le misure più realistiche.

$$\begin{cases} \delta A_B = B_a + S_a \cdot A_B + w_{n_A} \\ \delta \omega_B = B_\omega + S_\omega \cdot \omega_B + w_{n_\omega} \end{cases}$$

$B_{a/\omega}$  = vettore dei bias

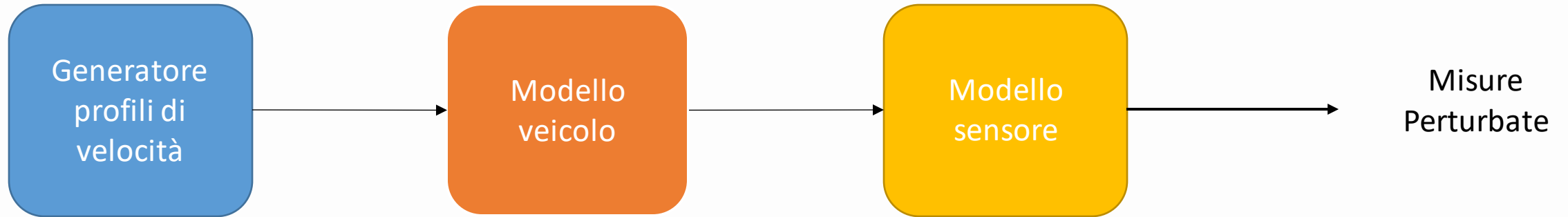
$S_{a/\omega}$  = matrice di scale factor e misalignment error sulla misura reale

$w_{n_{A/\omega}}$  = rumore di misura

Le perturbazioni così ottenute vengono aggiunte alle misure reali calcolate in precedenza.



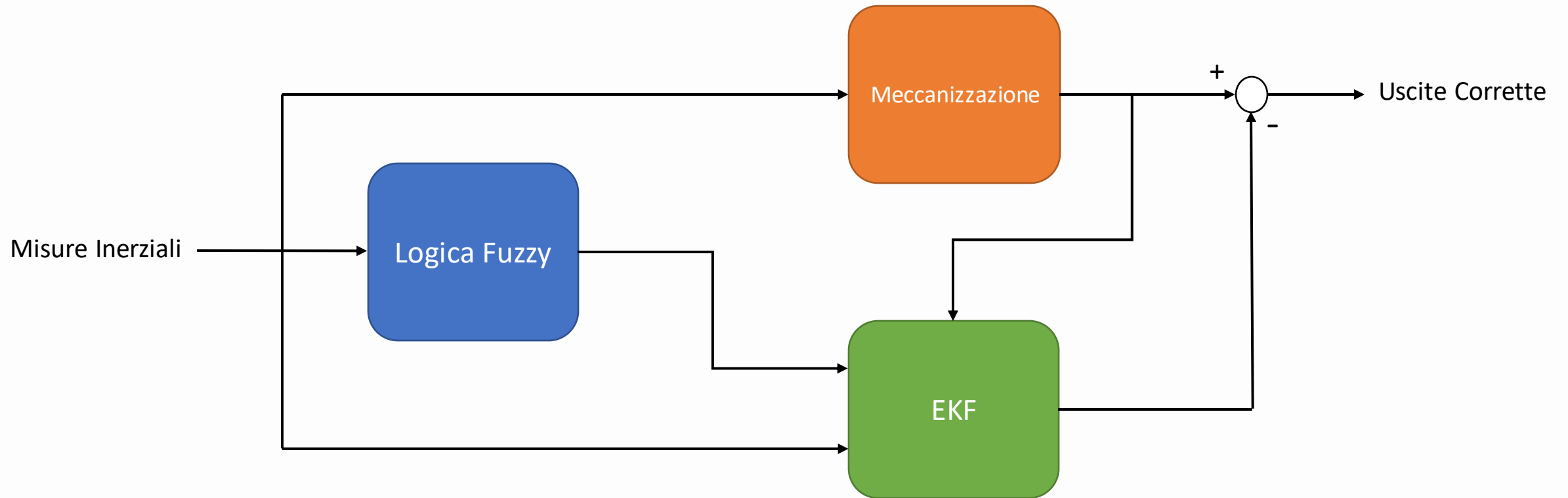
# Schema Generazione Misure



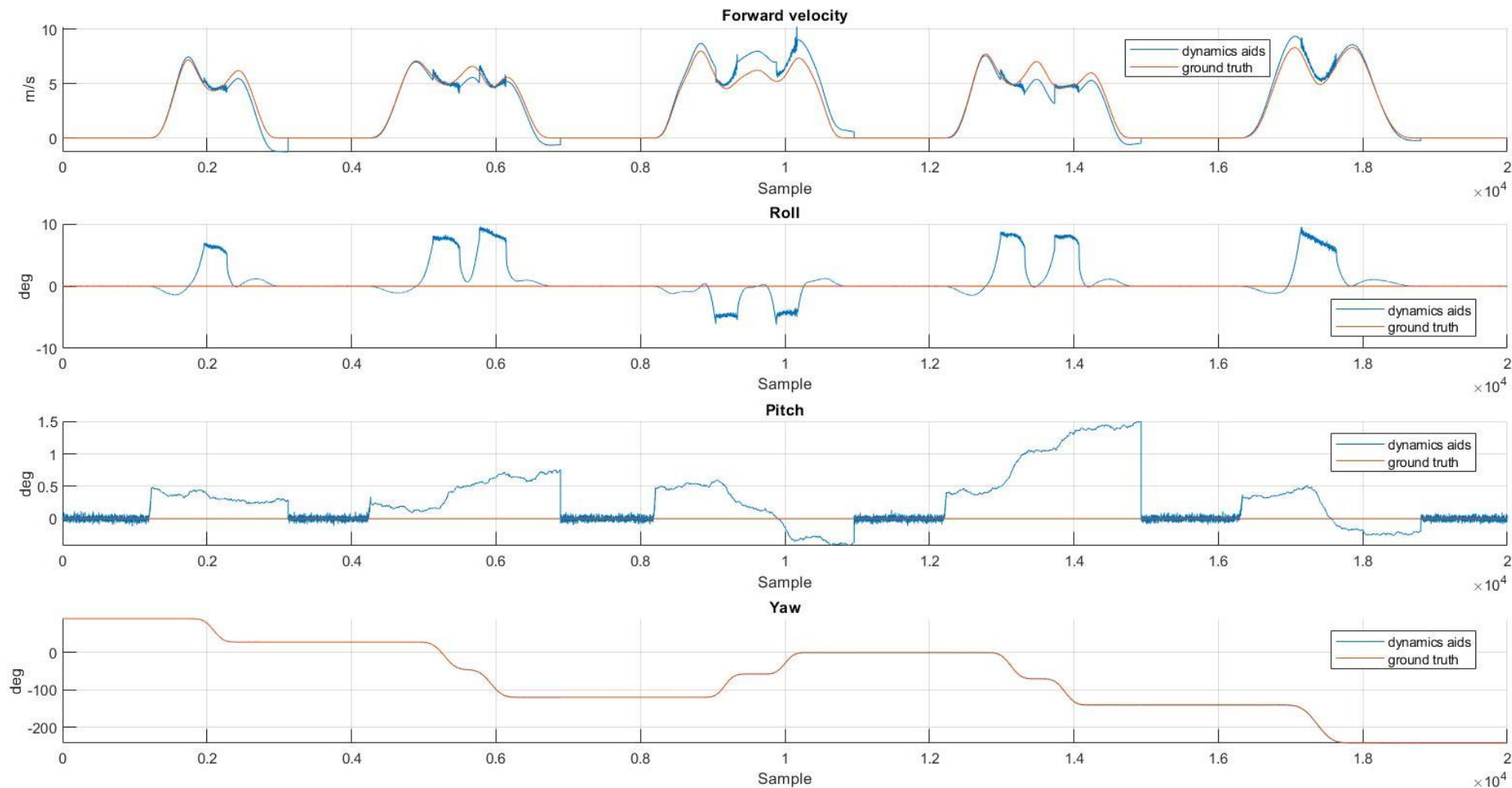
Lo schema rappresenta la procedura su descritta, implementata nel file simulink  
`Measure_collection_Vf_W.slx`

# Schema Implementativo

Il file `simulink_Fuzzy_and_EKF.slx` implementa invece il metodo di correzione e riconoscimento delle fasi di moto precedentemente descritti. Di seguito se ne riporta uno schema riassuntivo:

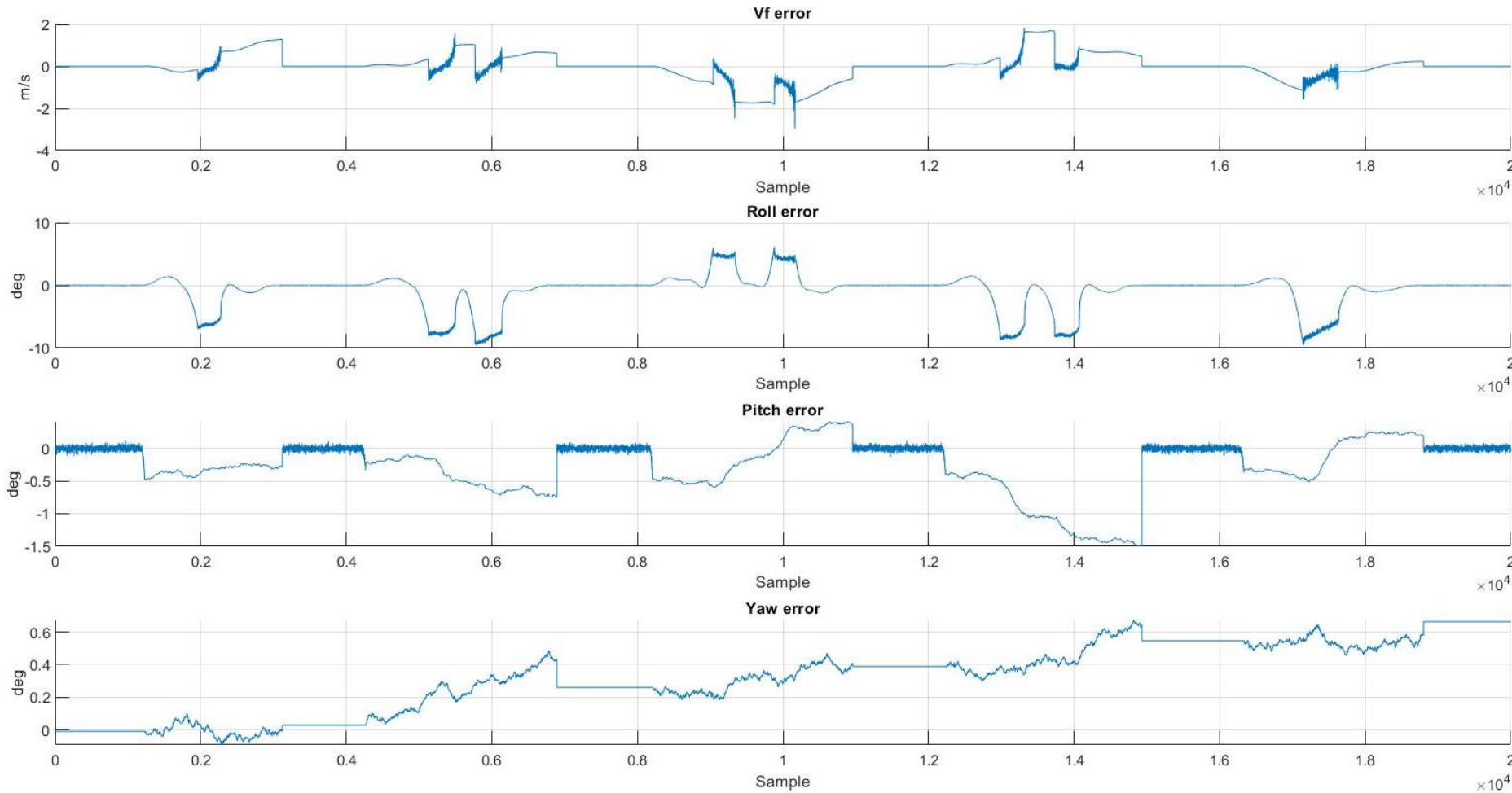


# Risultati della simulazione



Confronto tra la  
meccanizzazione  
corretta con le stime  
del filtro e il ground  
truth.

# Risultati della simulazione



Andamento degli  
errori di stima:

$\text{errore} = \text{ground truth} - \text{stima}$

# Risultati della simulazione



L'asse dei tempi è espresso in campioni e la distanza tra due campioni è di 0.01 s.  
La simulazione complessiva (in tutti i grafici) ha una durata di 200 s.

Come è ben visibile nei grafici delle due slide precedenti, la stima di velocità è più o meno accettabile, nonostante in alcuni punti si raggiunga un errore massimo vicino ai 2 m/s.

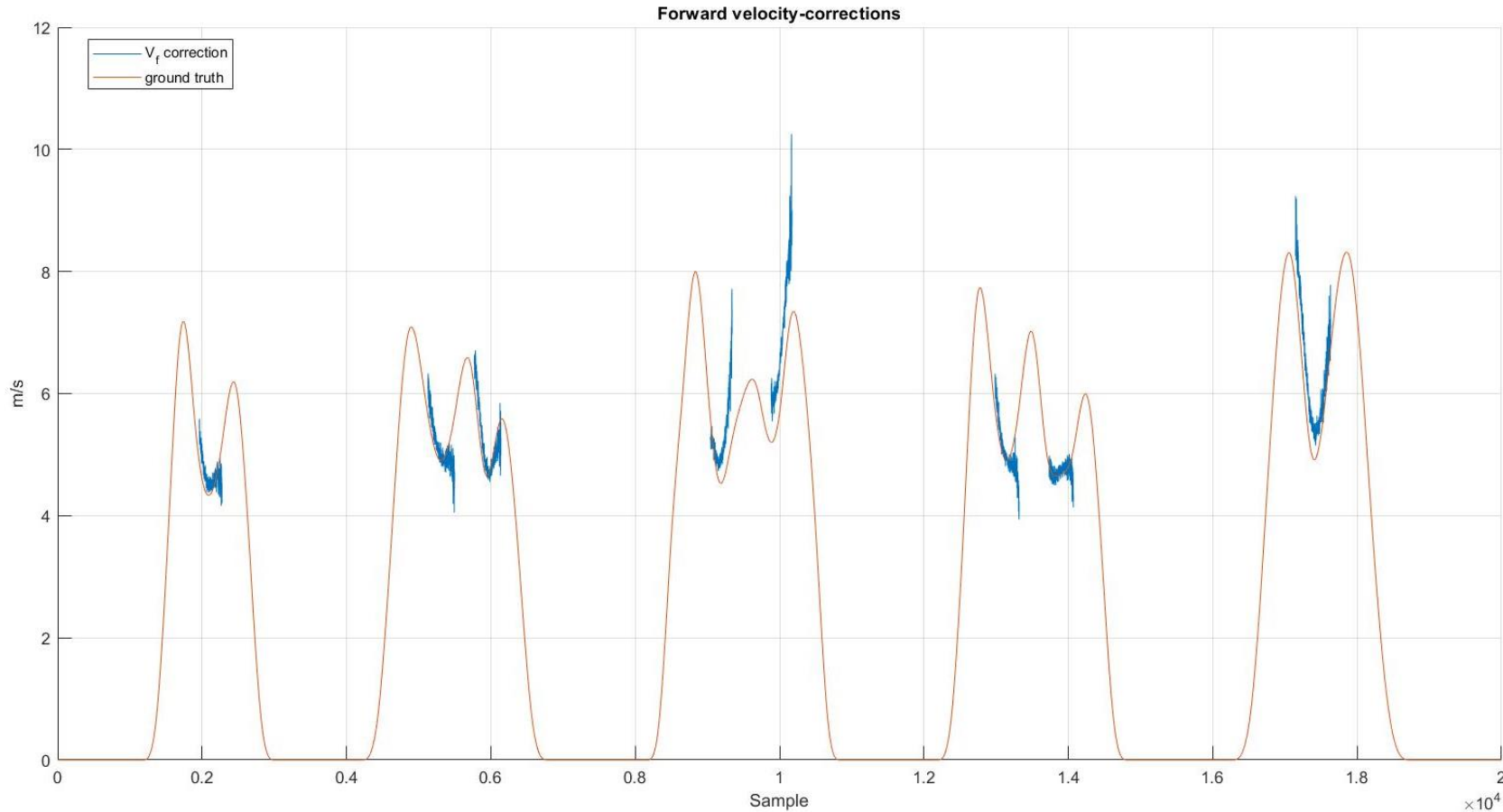
Quello che salta all'occhio sono le stime di roll e pitch. Queste infatti presentano regolarmente dei tratti che possono far pensare a una divergenza della stima; tutto ciò non è corretto in quanto per entrambi gli angoli le correzioni seguono l'andamento di un arcoseno e, in corrispondenza dei tratti in cui si passa dall'identificazione della fase di straight-line a quella di cornering (e viceversa) i valori delle accelerazioni sono tali da avere valori dell'arcoseno elevati in relazione al ground truth.

Questo andamento è peggiorativo anche rispetto alla meccanizzazione senza aiuti (come verrà mostrato nelle slide successive).

Tuttavia la stima del pitch è significativamente migliore (con un errore massimo di 1.5 gradi in valore assoluto) rispetto a quella del roll (errore massimo di circa 10 gradi in valore assoluto).

Infine la stima di imbardata risulta abbastanza buona, con un errore massimo minore di 1 grado al termine della simulazione.

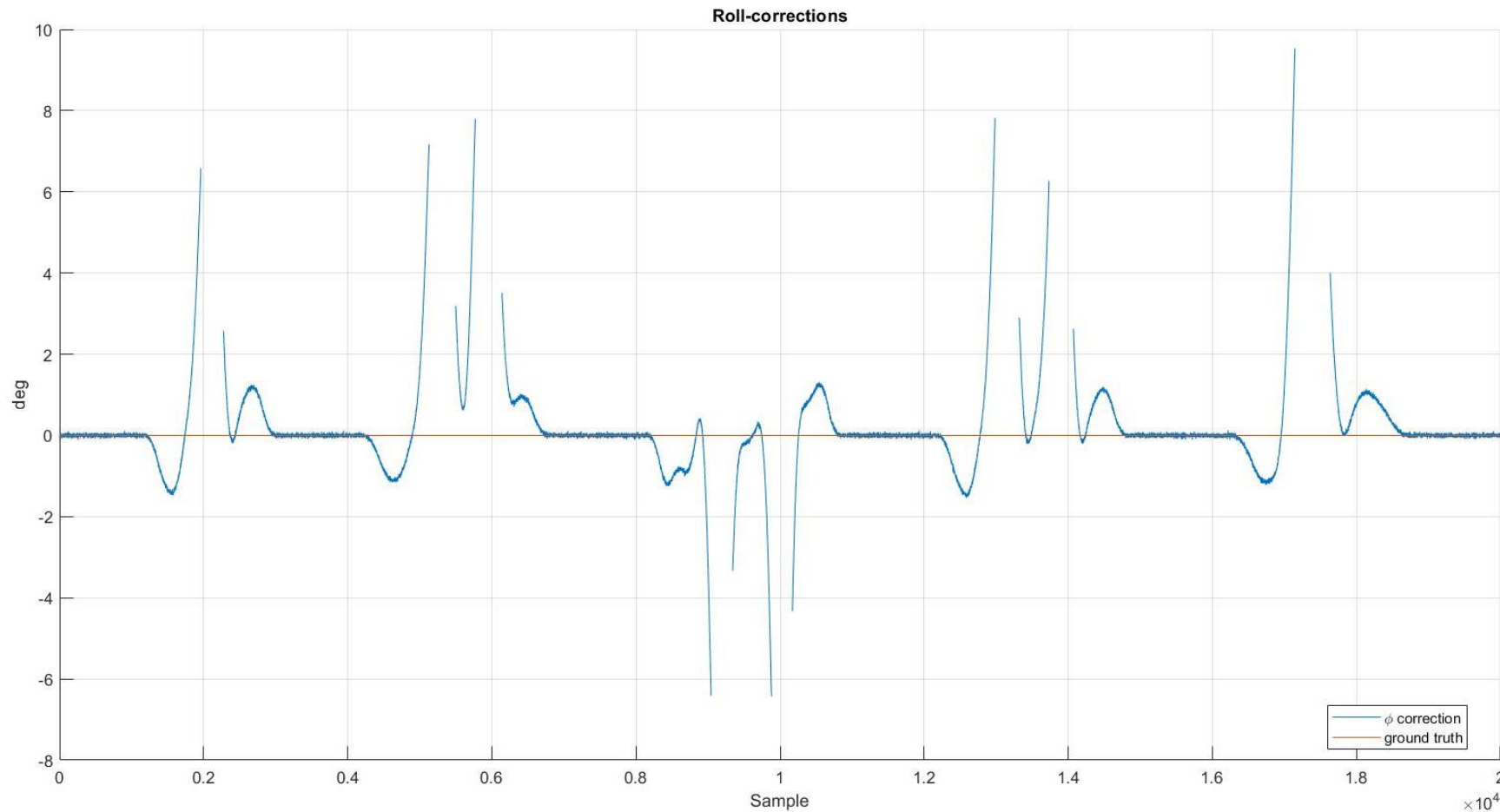
# Correzioni di velocità



Da notare il fatto che alla fine della fase di cornering, la stima si discosta leggermente dal valore reale. Questo accade perché il valore di  $\omega_{BZ}$  è piccolo al termine della fase di curva.

È interessante valutare quanto le correzioni applicate sfruttando la dinamica del veicolo siano effettivamente vicine ai valori desiderati. Dal grafico si nota come, a parte nella zona centrale (le due curve a sinistra), le correzioni di velocità stimate in curva siano abbastanza affidabili.

# Correzioni di rollio

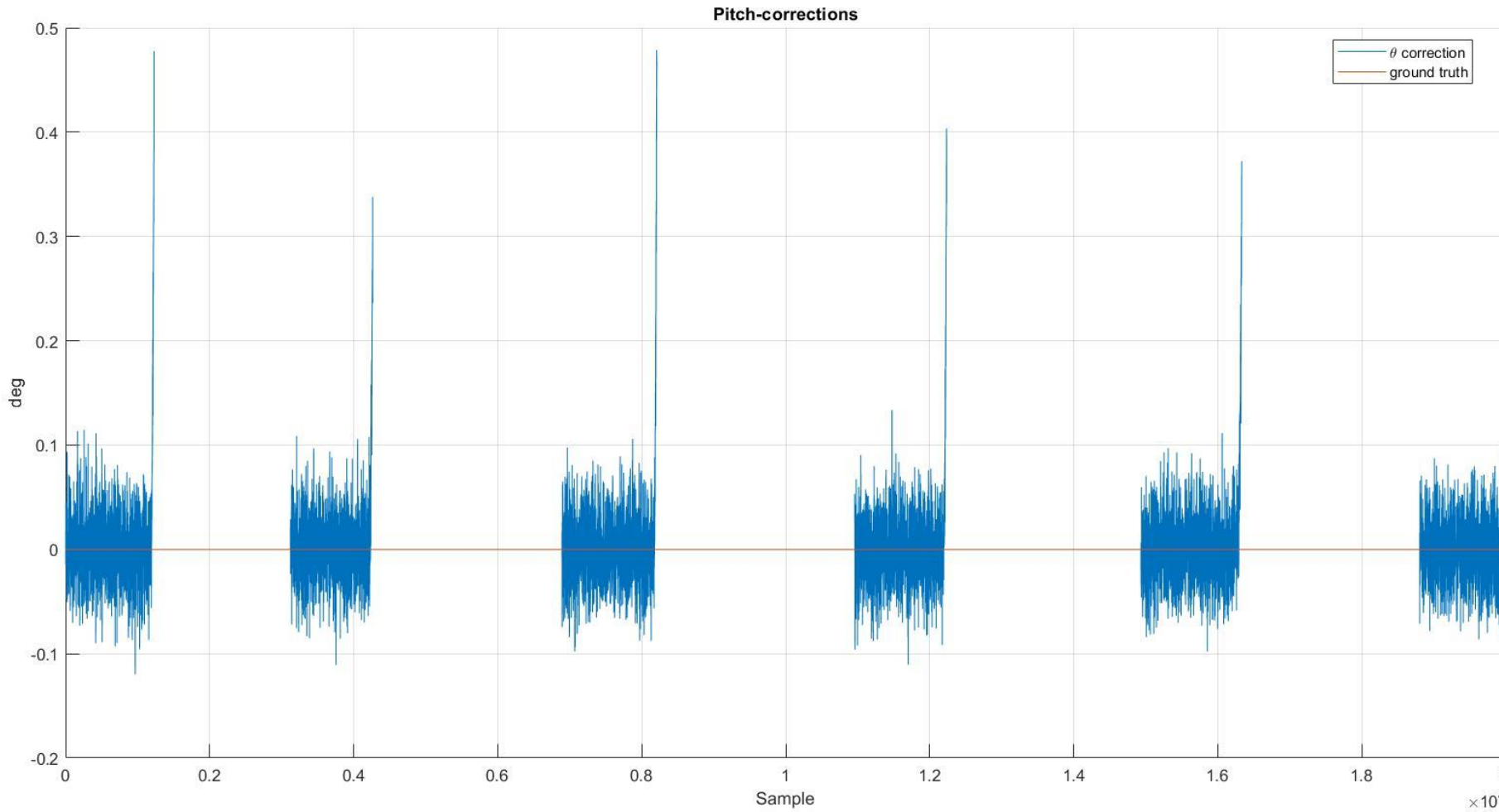


Da notare che solo in curva il rollio non viene corretto

In questo grafico è ben visibile come avvenga il fenomeno spiegato in precedenza, associato al rollio. Infatti la fonte di errore è proprio la correzione perché il peso dell'arcoseno diventa troppo elevato, a causa dei valori delle accelerazioni a cavallo delle transizioni da moto rettilineo a moto in curva (e viceversa).



# Correzioni di beccheggio

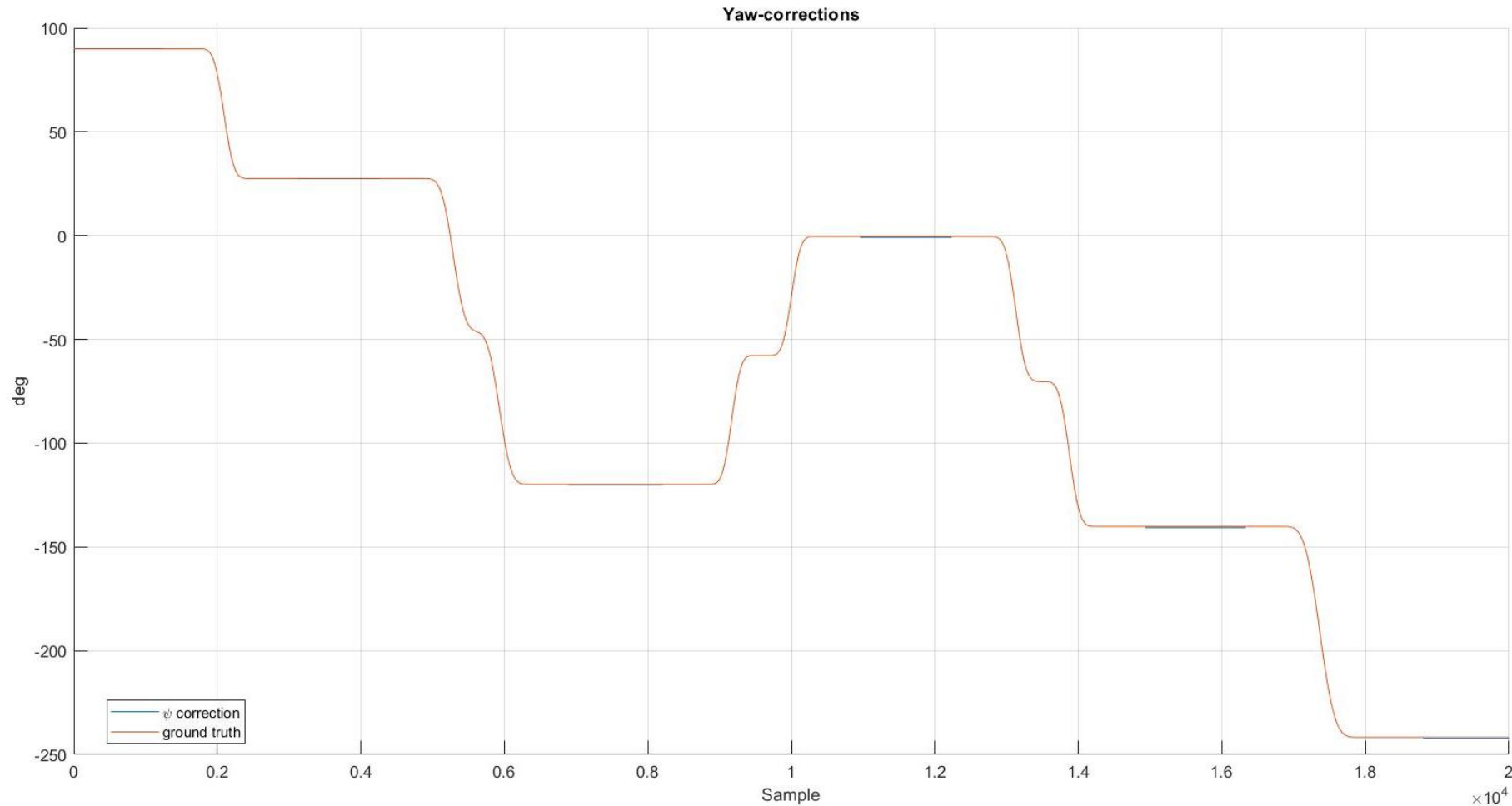


Il beccheggio  
viene corretto  
solo quando il  
veicolo è fermo

In modo molto simile al rollio, anche nel beccheggio si ha un eccessivo valore della correzione a causa del fatto che pure questa segue l'andamento di un arcoseno.



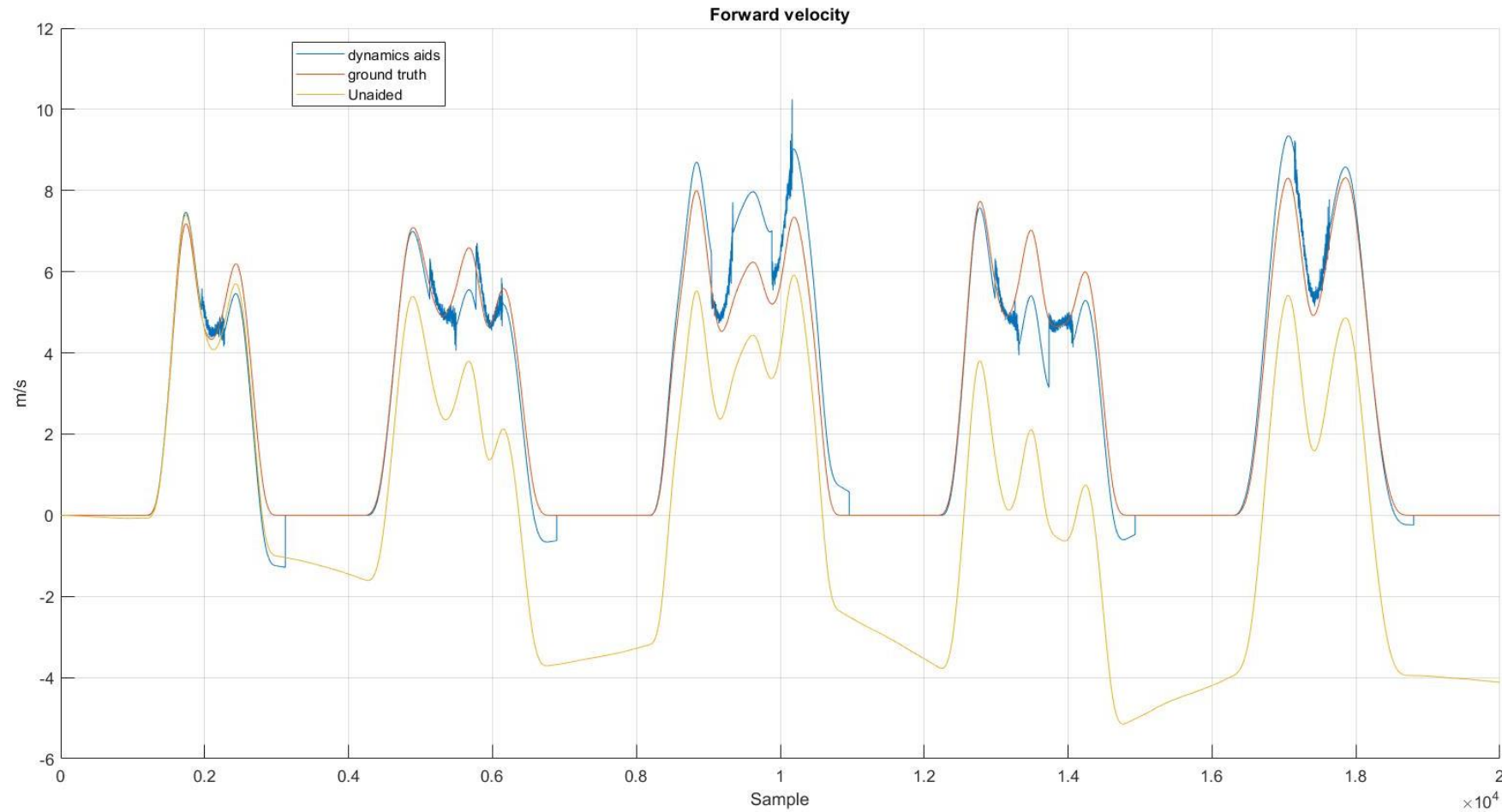
# Correzioni di imbardata



Il risultato migliore si ottiene con lo yaw che, anche con la sola meccanizzazione, non sbaglia eccessivamente. Si nota come la correzione avvenga solo quando il veicolo viene identificato in stato di fermo e per correggere si considera il valore dell'imbardata appena il veicolo è fermo.

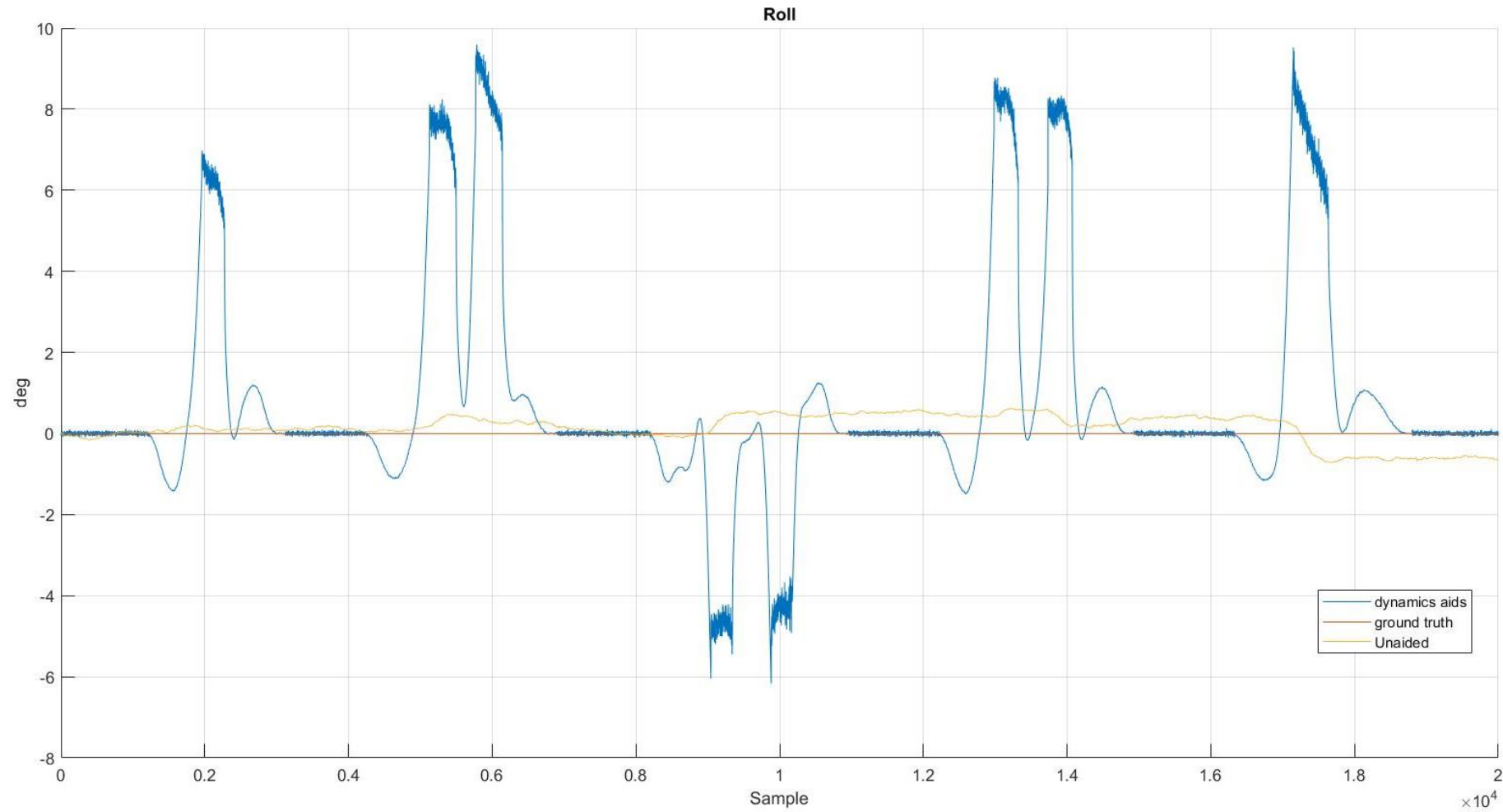


# Confronto tra le stime di velocità di avanzamento



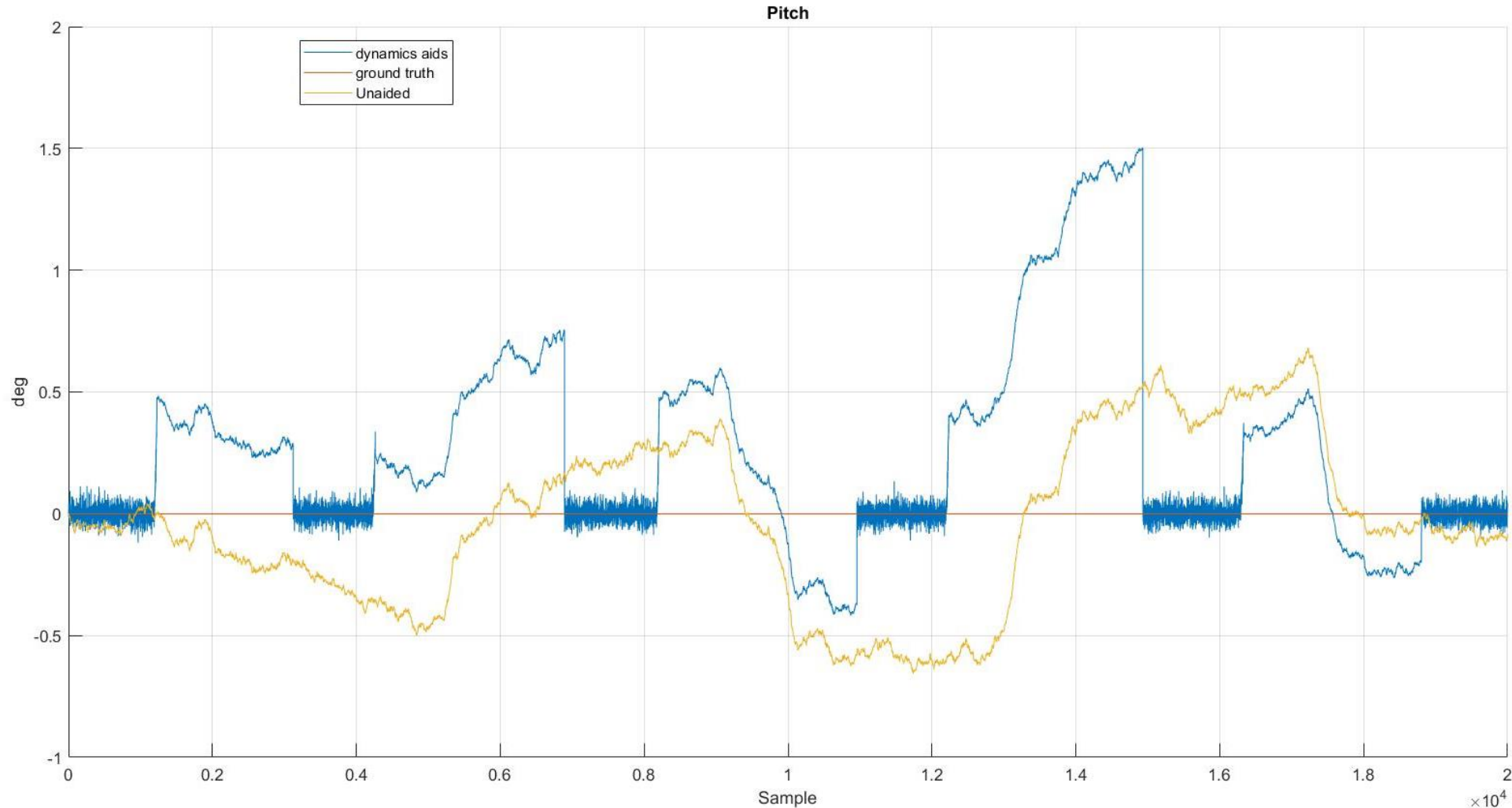
Appare chiaro come la meccanizzazione corretta sia abbastanza aderente al profilo di velocità ideale.

# Confronto tra le stime di rollio



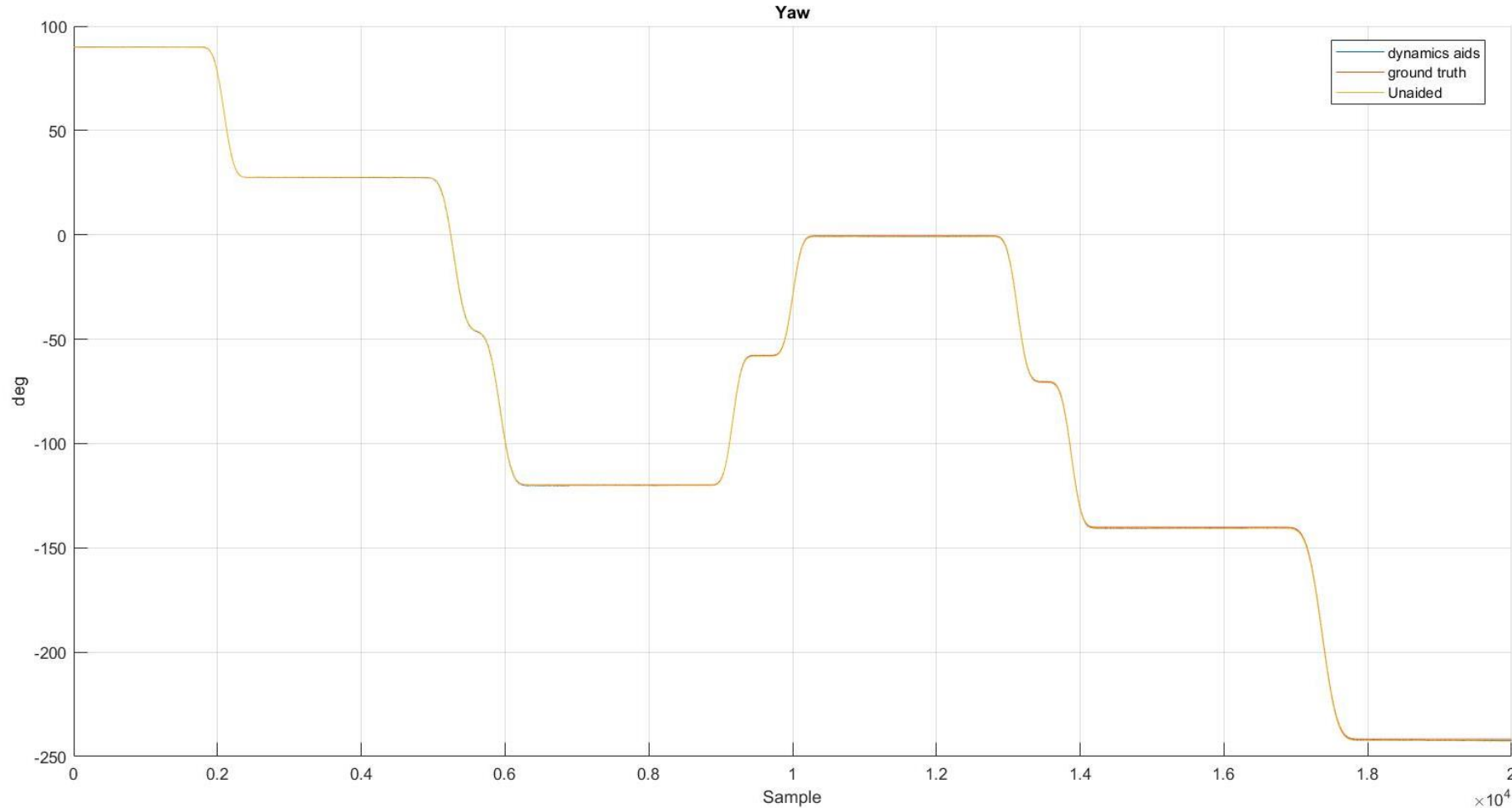
Guardando attentamente si può notare che il rollio nel caso unaided sia di gran lunga migliore rispetto al caso dynamics-aided. Questo suggerisce che è possibile ignorare la correzione.

# Confronto tra le stime di beccheggio



Si nota molto bene come nella fase in cui il beccheggio non viene corretto, lui segue correttamente l'andamento unaided.

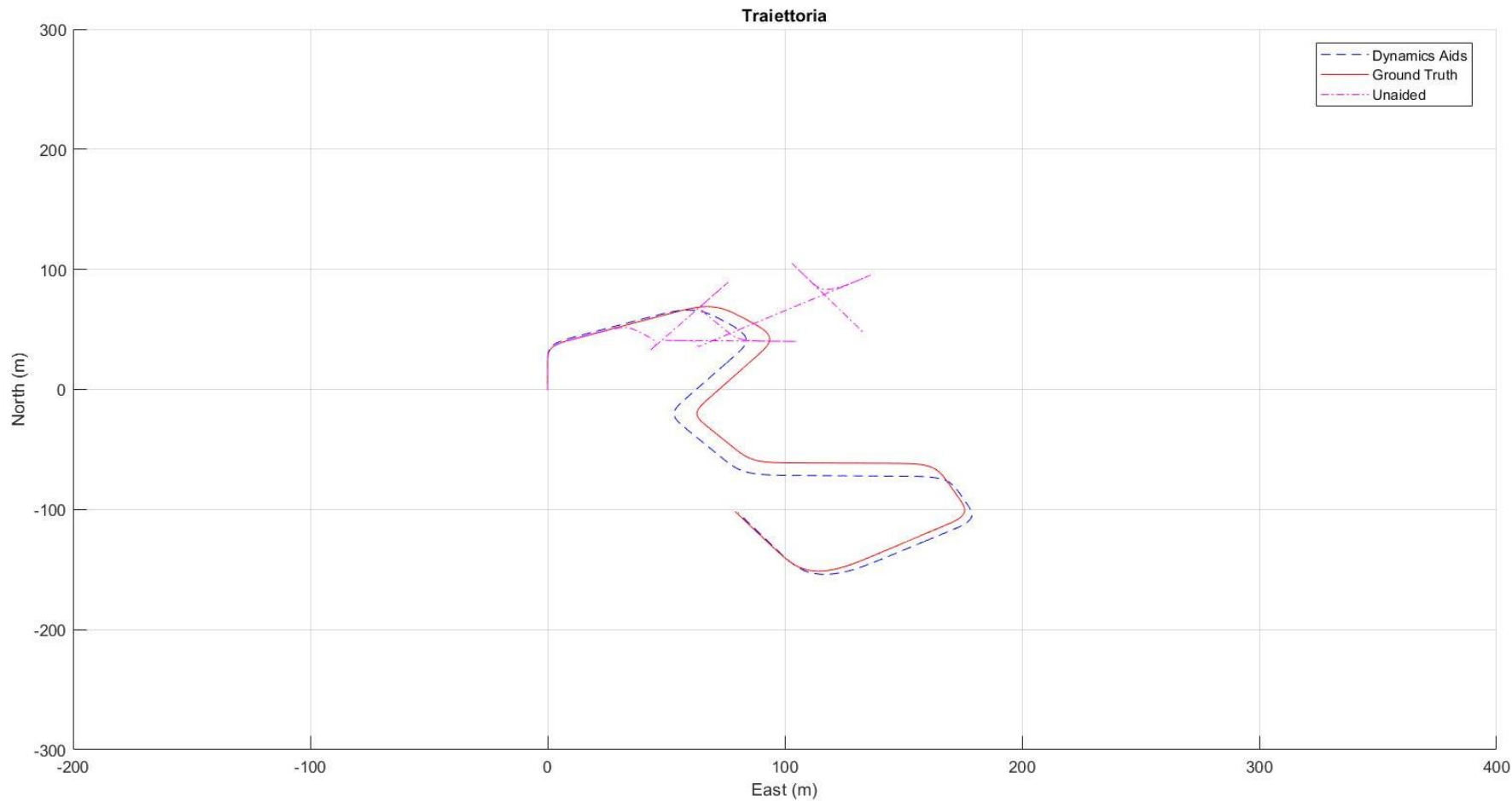
## Confronto tra le stime di imbardata



Dal grafico appare evidente come in tutti e tre i casi i valori dell'imbardata siano più o meno coincidenti. Dunque la stima di questo angolo risulta molto buona in ogni situazione.



# Risultati della simulazione



Stima di posizione risultante dalla stima delle variabili di navigazione vista in precedenza.

Nel grafico è inclusa anche l'evoluzione della posizione nel caso unaided.

## Risultati della simulazione



Si nota come la posizione ottenuta dalla meccanizzazione corretta sia molto vicina a quella reale. Questo perché, dal modello del veicolo, è evidente come le posizioni nel frame di navigazione dipendano principalmente da  $V_f$ ,  $\theta$  e  $\psi$  (velocità, beccheggio e imbardata) che sono stimati piuttosto accuratamente, soprattutto  $V_f$  e  $\psi$ .

Dunque gli errori sulla stima del rollio influiscono ben poco sulla stima di posizione.

Inoltre risalta subito che l'errore maggiore è commesso nella parte centrale del percorso; ovvero proprio nella parte in cui la stima di velocità sbaglia maggiormente.

Per quanto riguarda il caso *unaided*, è evidente come gli errori visti nei grafici precedenti portino ad una stima di posizione molto lontana da quella desiderata.

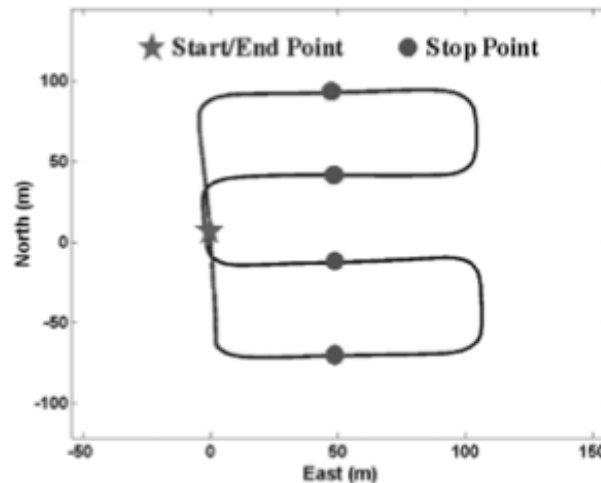
# Generazione della traiettoria



In un secondo luogo è stato deciso di ricreare la stessa traiettoria proposta dall'articolo, a partire dal profilo di velocità ( $V_f$ ) stimato in precedenza, andando a modificare la sola velocità angolare ( $\omega_z$ ).

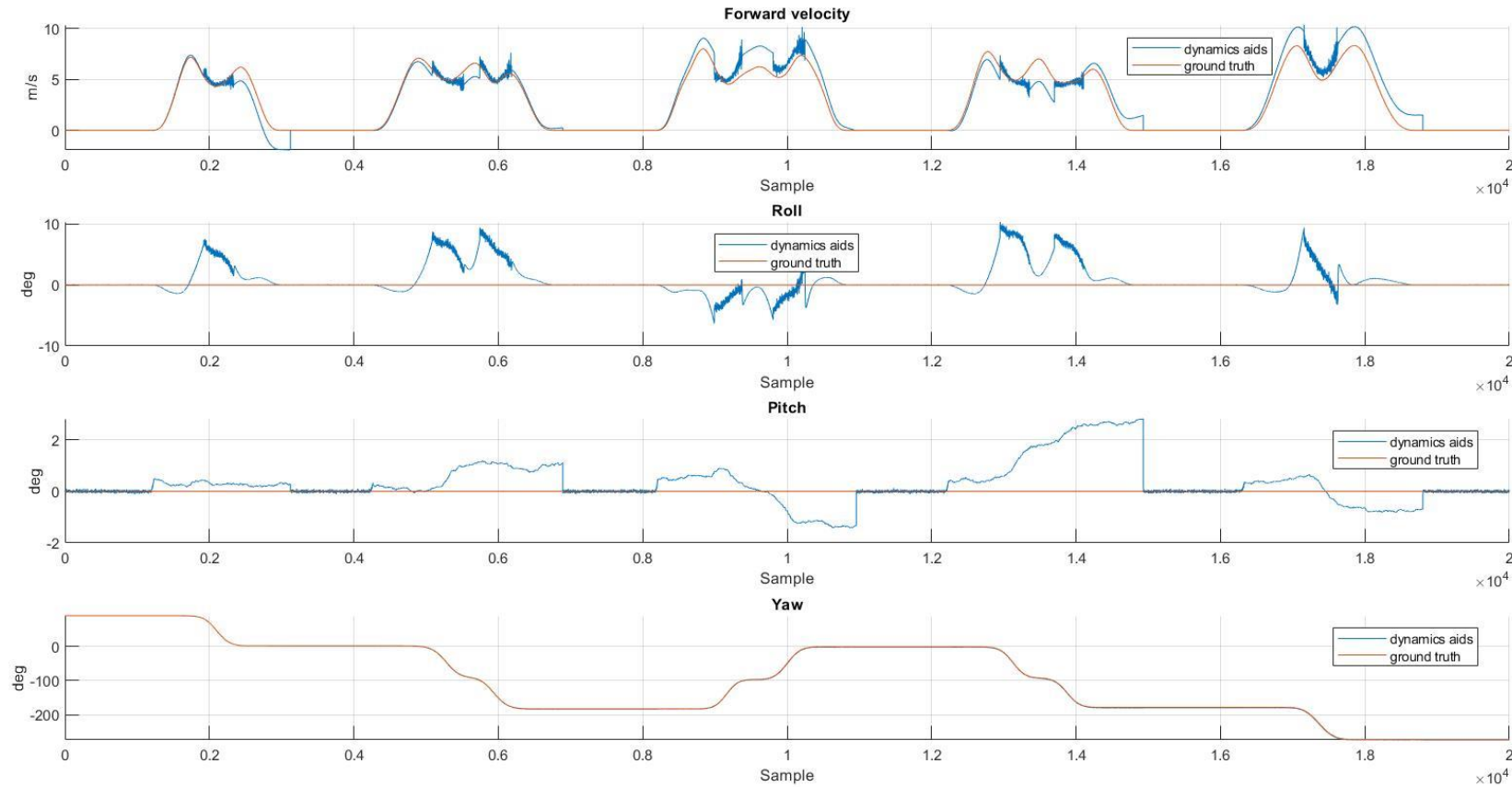
Alla fine il percorso ottenuto è pressoché simile a quello proposto nell'articolo.

Per quanto riguarda il modello dei sensori e la generazione delle misure non è stato cambiato nulla.





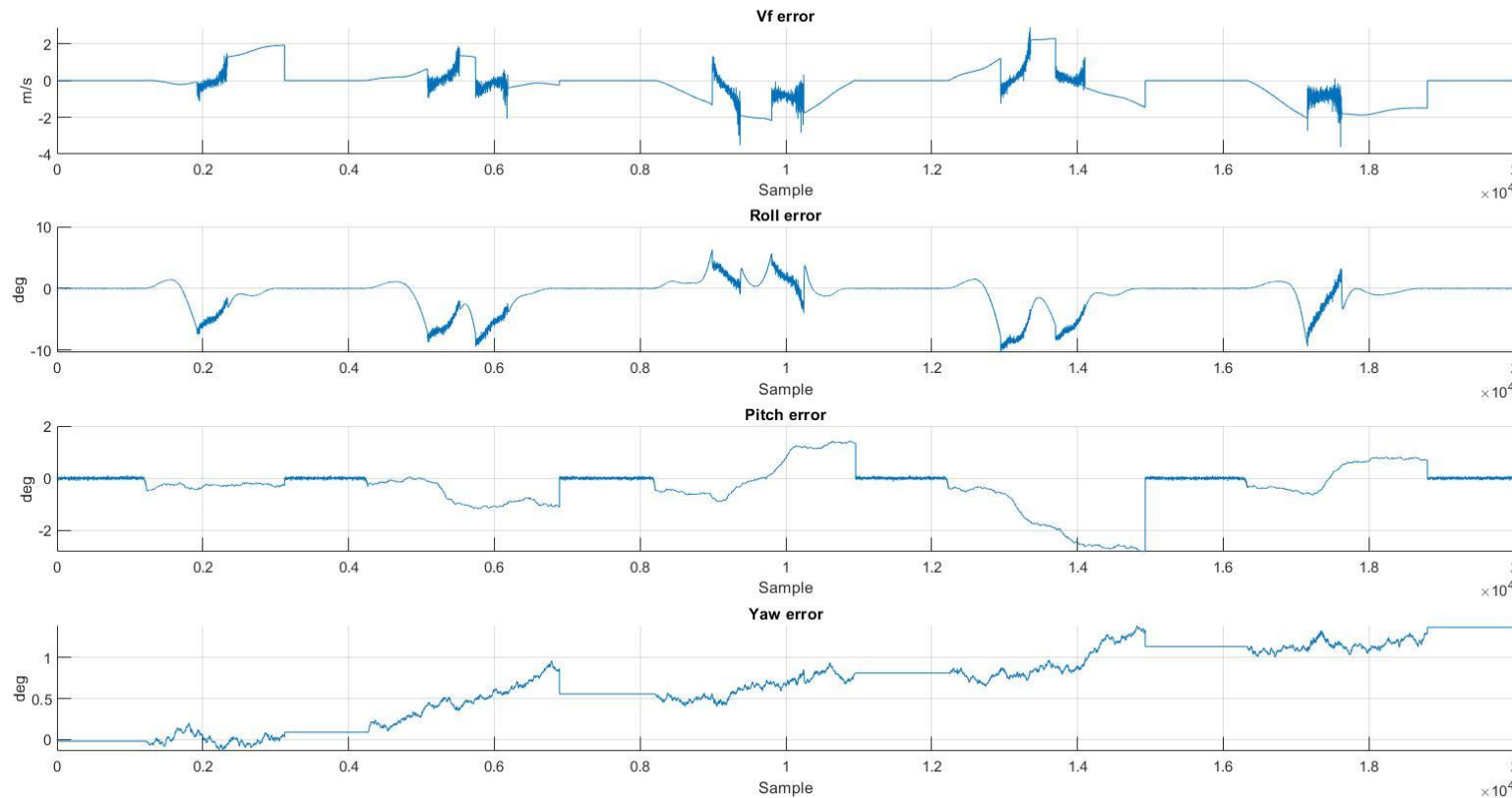
# Risultati della simulazione



Confronto tra la  
meccanizzazione  
corretta con le stime  
del filtro e il ground  
truth.



## Risultati della simulazione



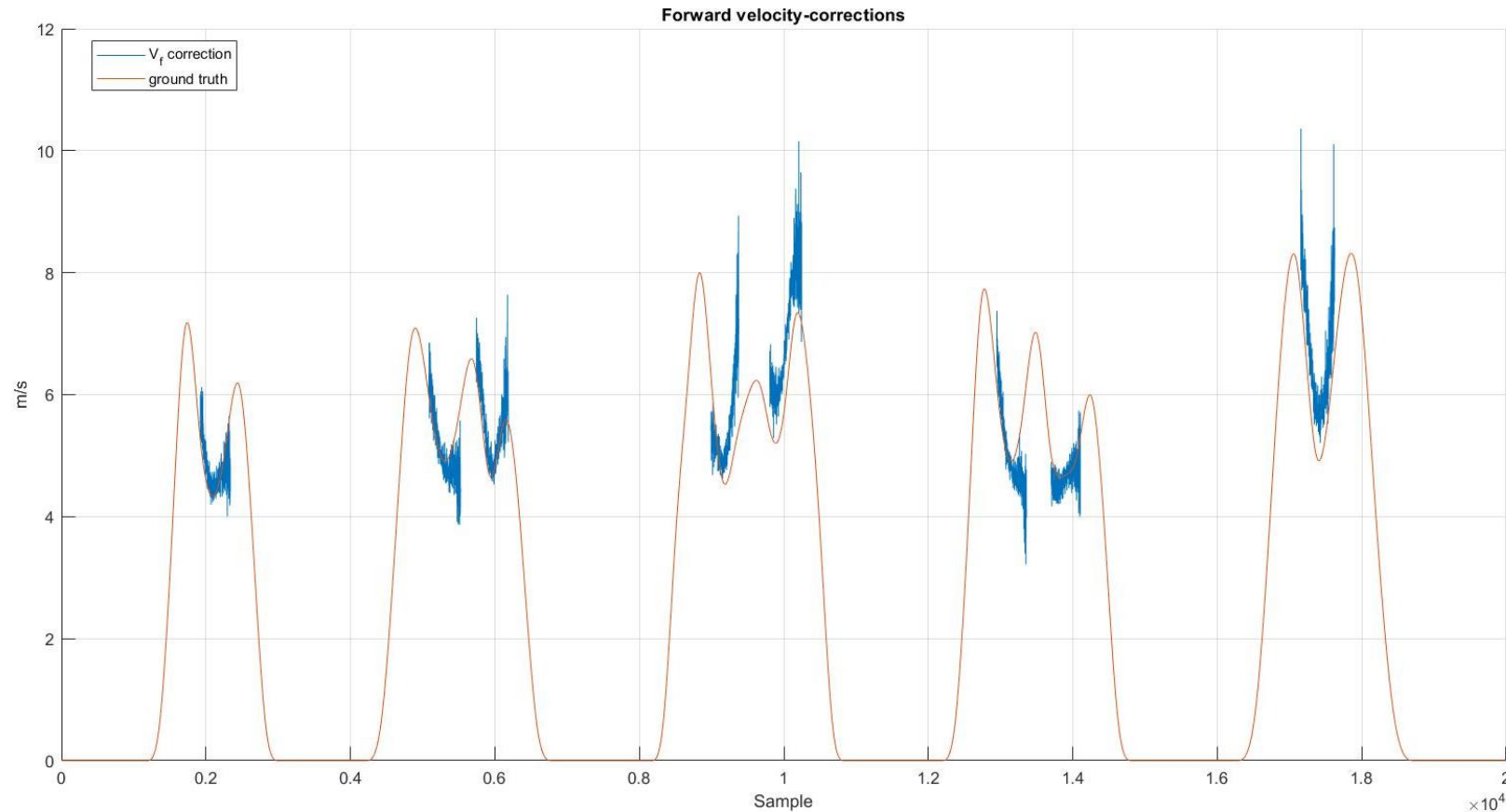
Andamento degli  
errori di stima:

$\text{errore} = \text{ground truth} - \text{stima}$

Rispetto alla traiettoria precedente, gli errori di stima sono aumentati leggermente per tutte e quattro le variabili.



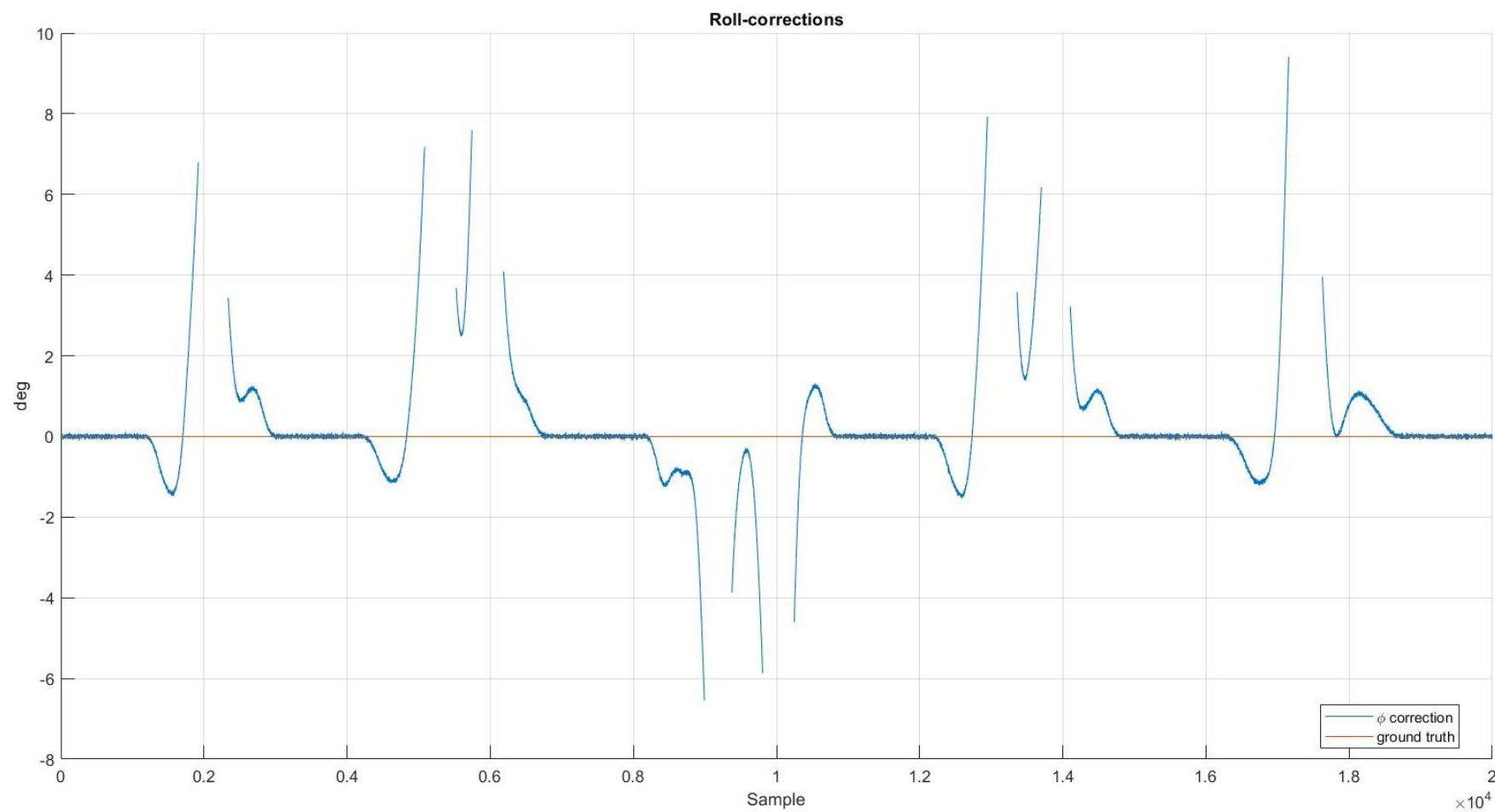
## Correzioni di velocità



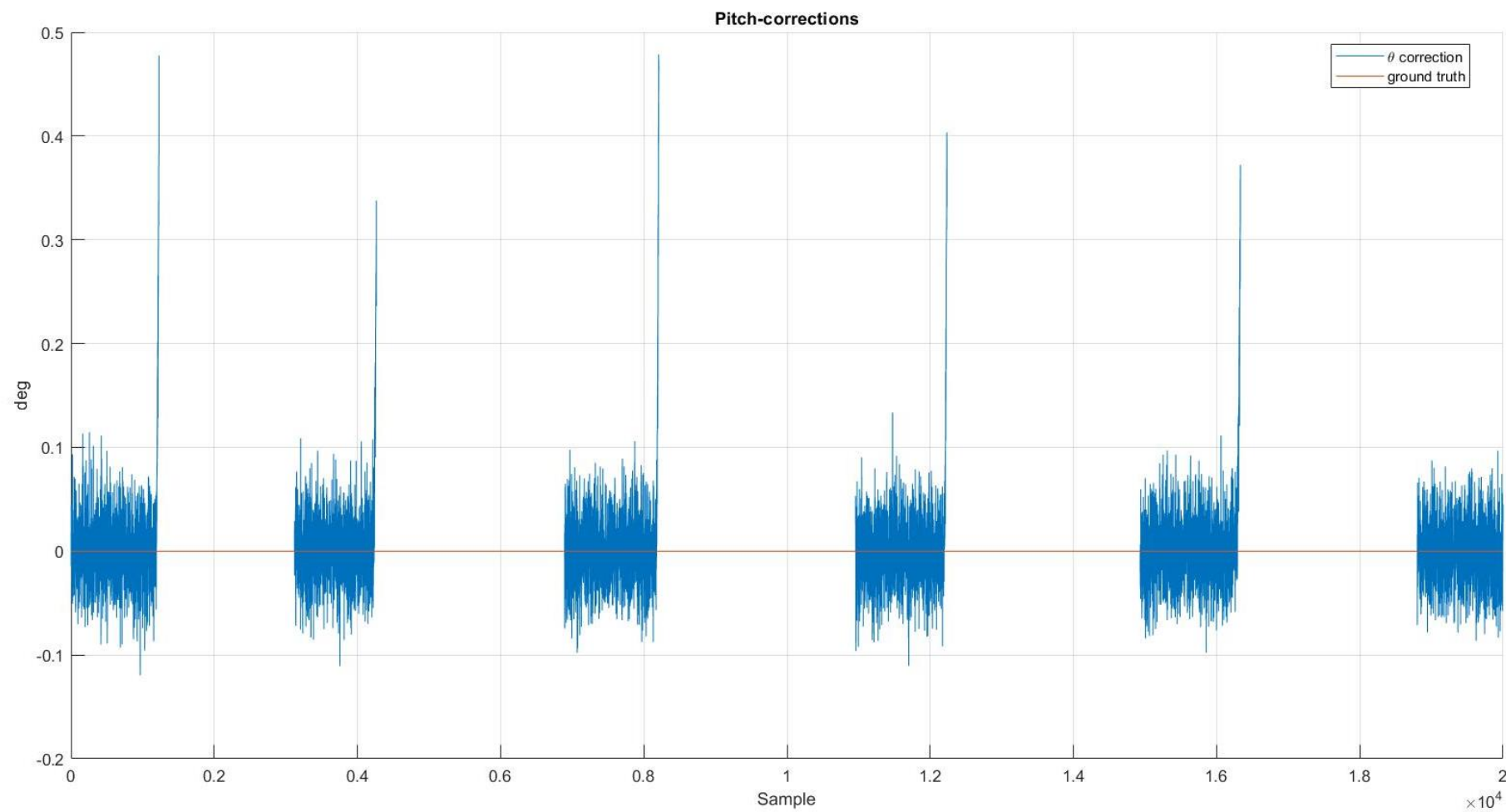
Tutti i ragionamenti fatti per i grafici relativi alla traiettoria precedente possono essere ripetuti per questi ultimi.

In aggiunta, rispetto ai precedenti, si notano valori delle stime più distanti dai rispettivi ground truth; questo va a giustificare l'aumento degli errori analizzati nella slide precedente.

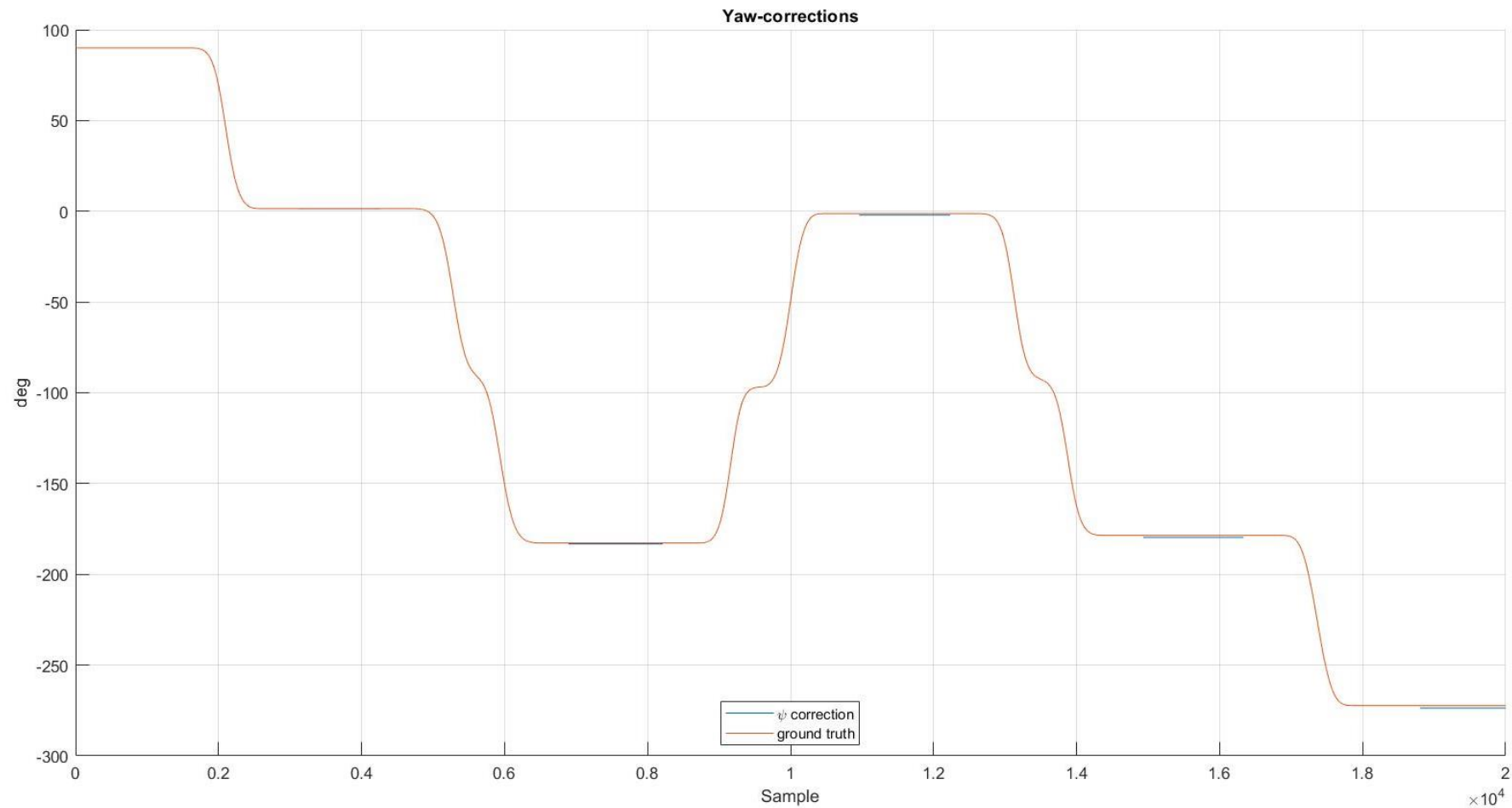
# Correzioni di rollio



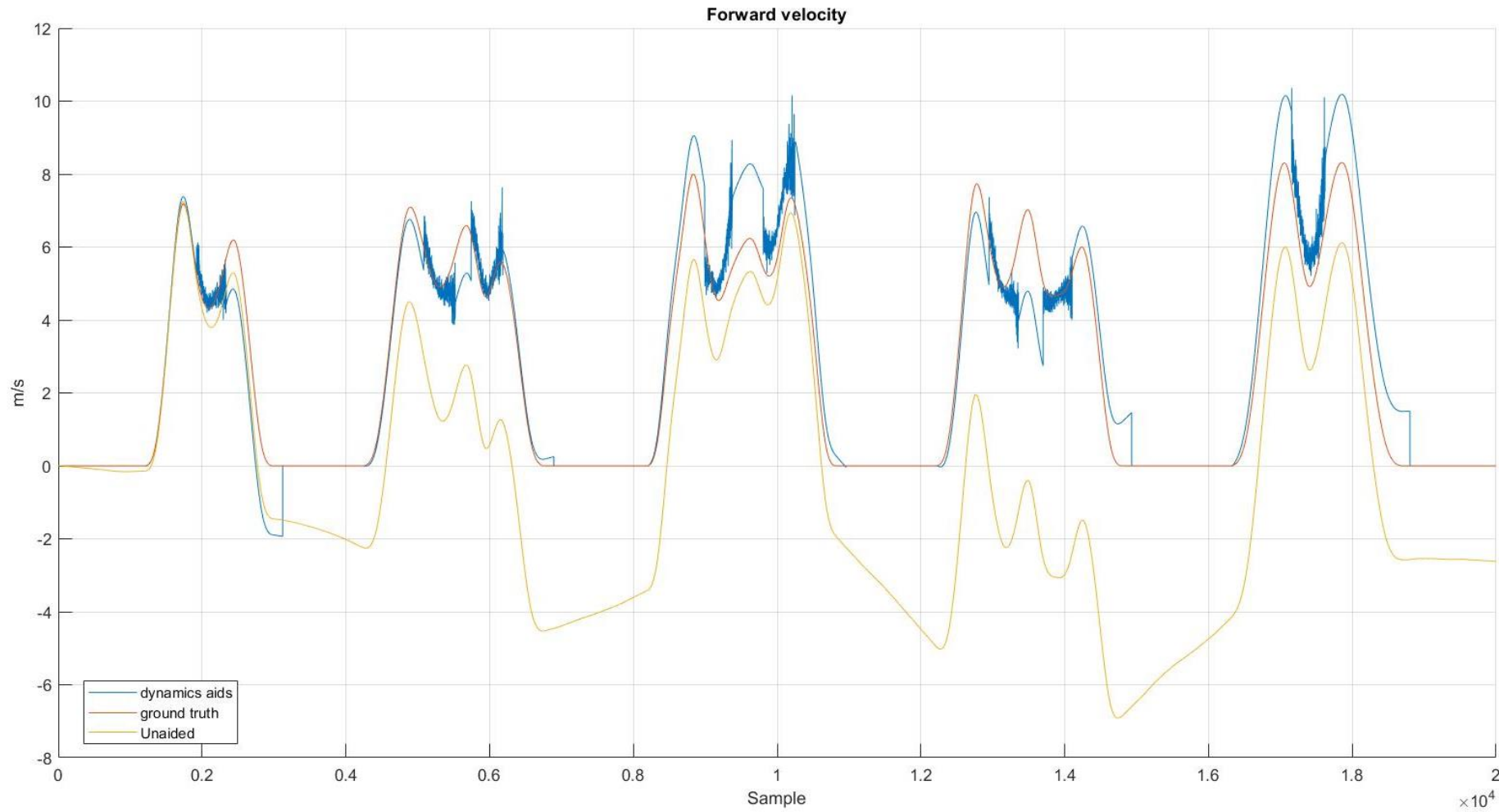
# Correzioni di beccheggio



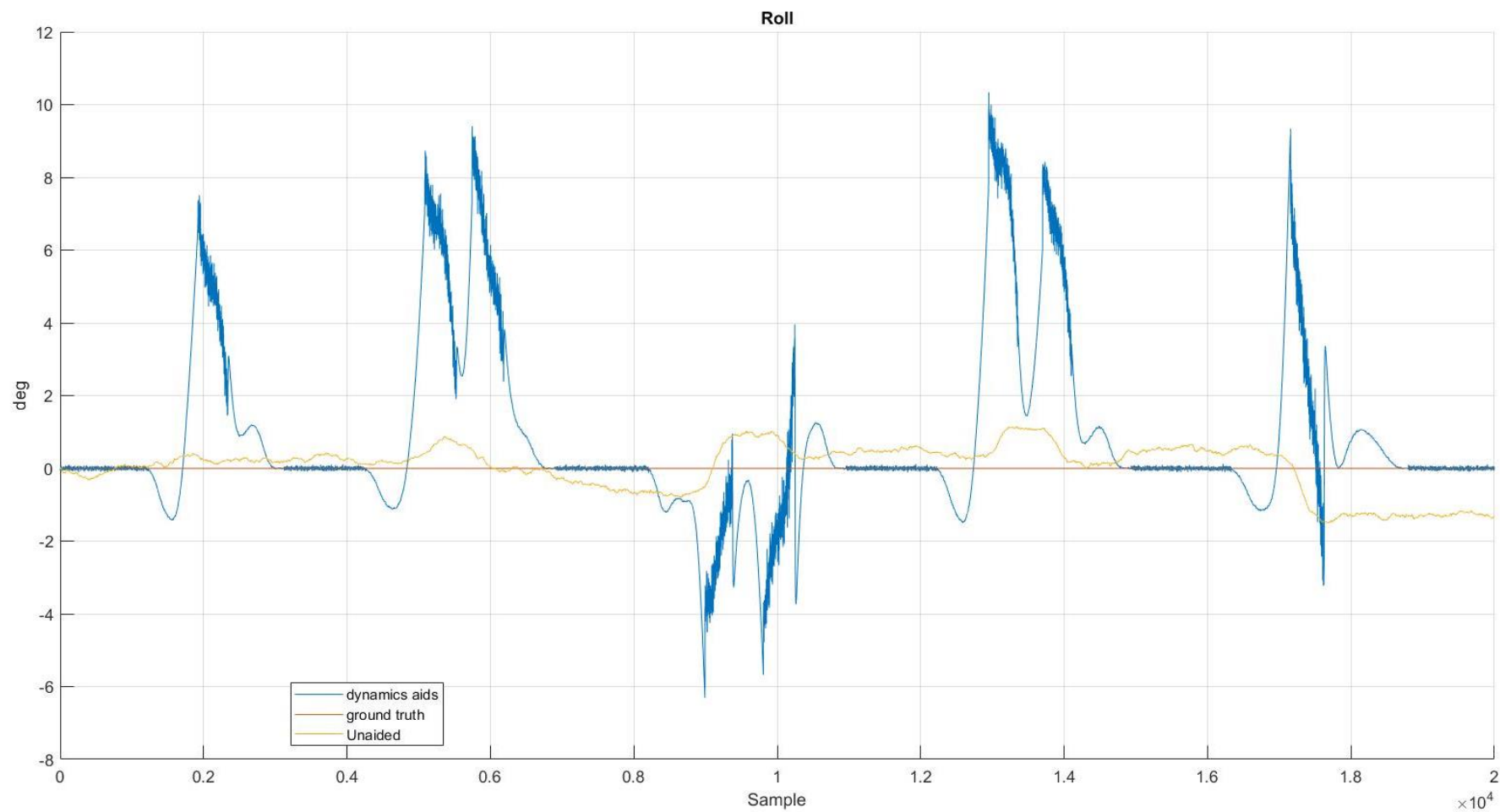
# Correzioni d'imbardata



# Confronto tra le stime della velocità di avanzamento

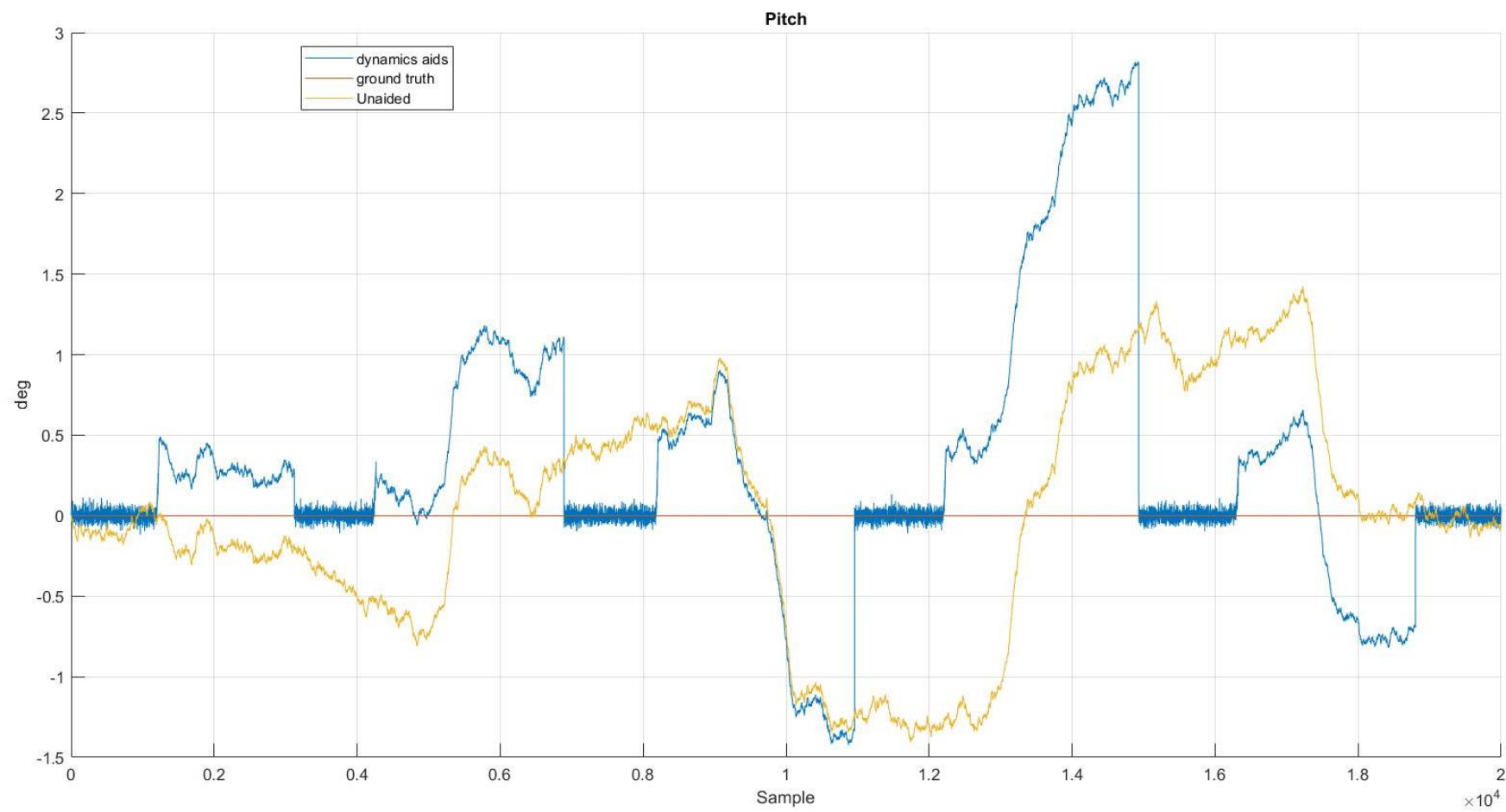


## Confronto tra le stime di rollio

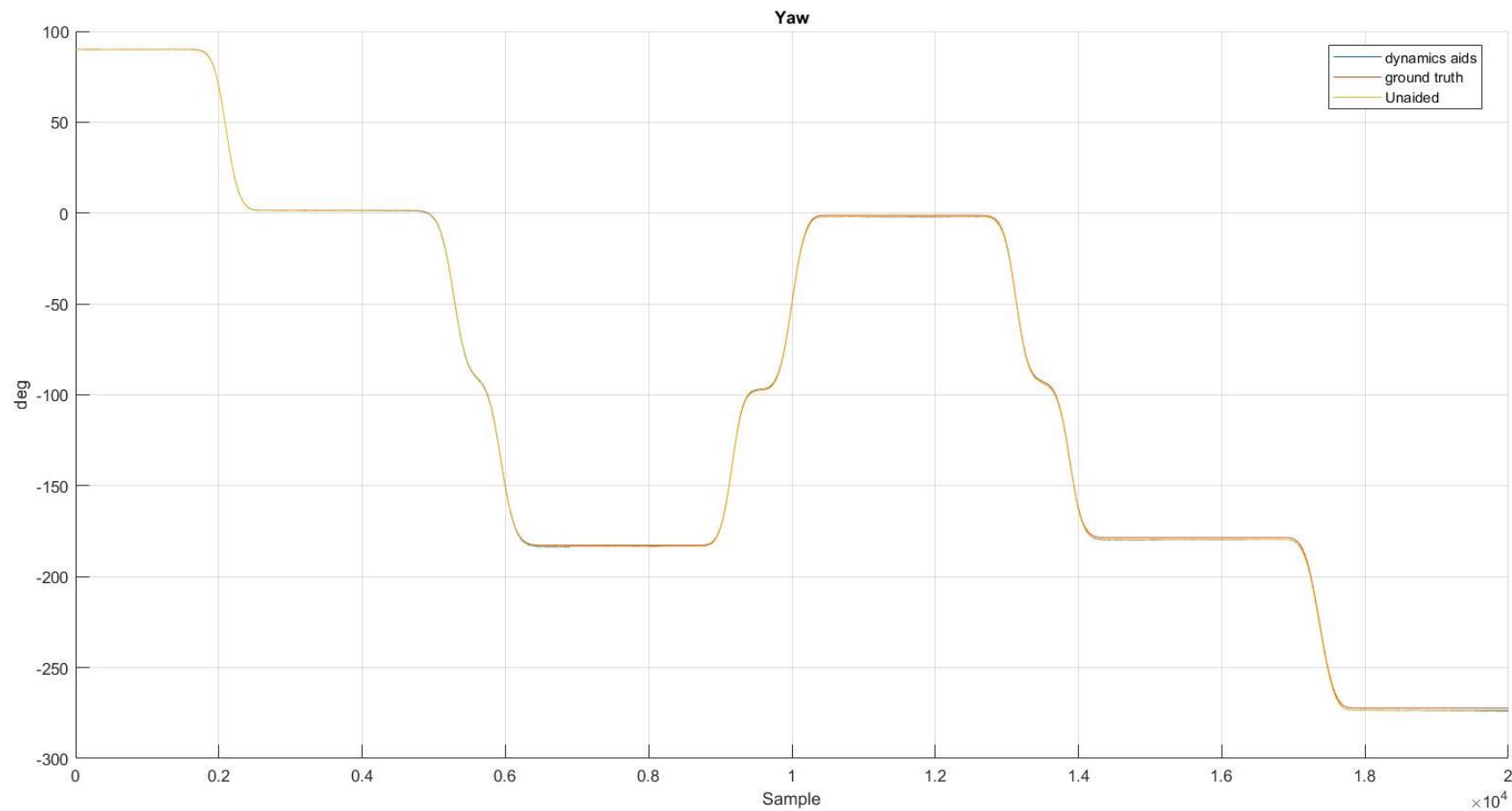




# Confronto tra le stime di beccheggio

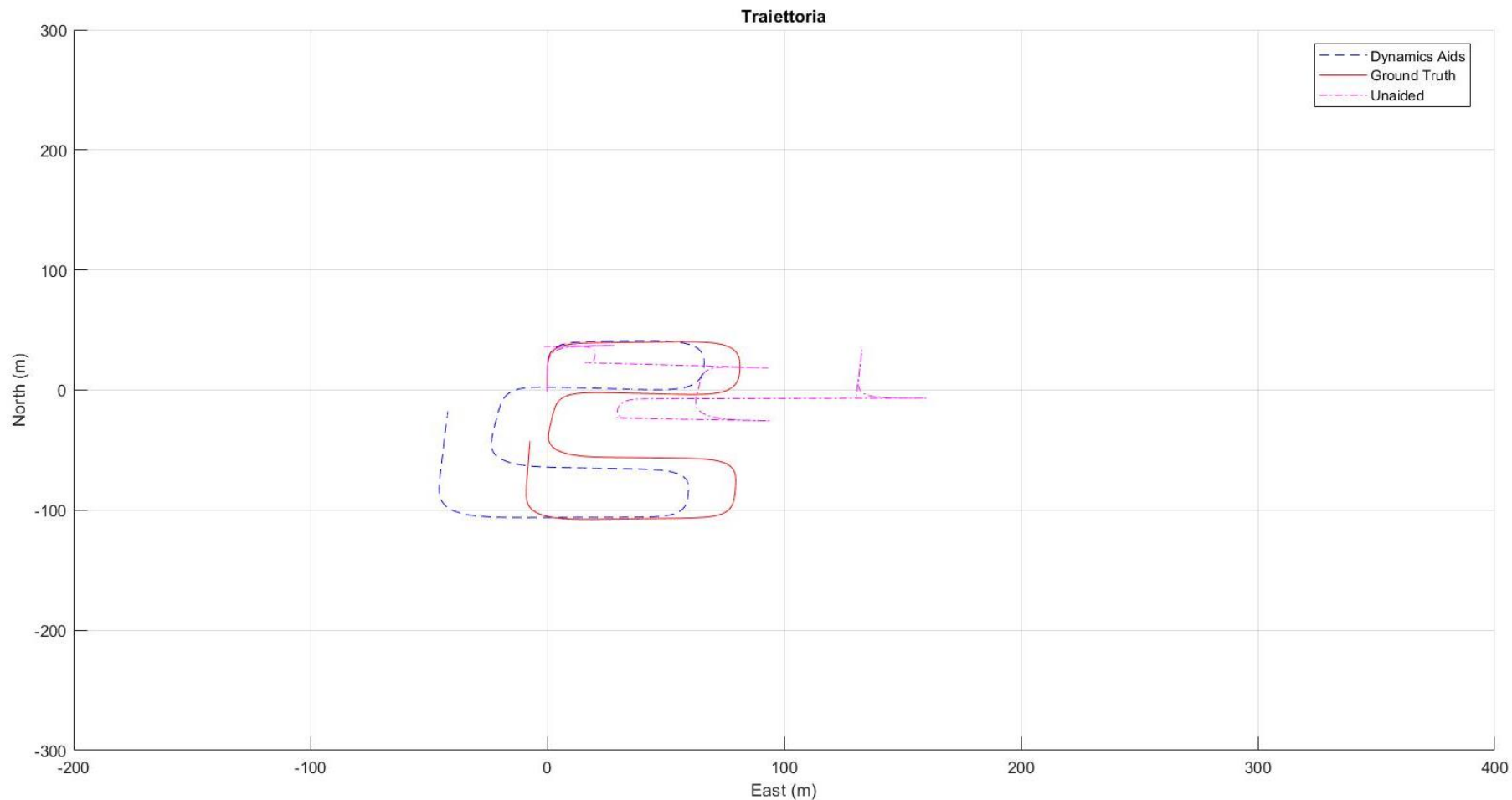


## Confronto tra le stime di imbardata





## Risultati della simulazione



Stima di posizione risultante dalla stima delle variabili di navigazione vista in precedenza.

Nel grafico è inclusa anche l'evoluzione della posizione nel caso unaided.

# Risultati della simulazione



Con la traiettoria di riferimento più simile a quella proposta nell'articolo, la stima di posizione peggiora sensibilmente.

Questo è correlato al fatto che tutte le variabili di navigazione presentano errori di stima maggiori rispetto al caso precedente.

Ancora la stima di posizione unaided presenta errori piuttosto elevati. Ciò porta ad un percorso molto diverso da quello ideale.

## Risultati della simulazione



	Errore di velocità (m/s)		Errore di rollio (deg)		Errore di beccheggio (deg)		Errore di imbardata (deg)	
	Media	Std dev.	Media	Std dev.	Media	Std dev.	Media	Std dev.
Traiettoria 1	-0.02	0.59	-0.86	2.72	-0.25	0.41	0.32	0.21
Traiettoria 2	-0.18	0.83	-0.84	2.40	-0.29	0.79	0.67	0.44
Traiettoria articolo	0.27	0.66	0.25	0.76	0.18	0.54	0.93	1.51

Come si evince dai dati riportati in tabella, gli errori sulla seconda traiettoria sono maggiori. Ciò è dovuto alla necessità di avere  $\omega_{Bz}$  e  $A_{By}$  elevati al fine di riprodurre la traiettoria dell'articolo. Infatti dall'analisi degli errori con la *perturbation technique*, questi dipendono in maniera diretta dagli errori di  $A_{By}$  e  $\omega_{Bz}$ .

## Risultati della simulazione



	Errore in direzione Nord (m)		Errore in direzione Est (m)	
	Max	Std dev.	Max	Std dev.
Traiettoria 1	10.94	4.22	10.13	6.00
Traiettoria 2	24.76	8.16	36.77	10.15
Traiettoria articolo	25.44	12.51	19.74	9.97

Il discorso fatto in precedenza si estende naturalmente anche agli errori di posizione.

## CONCLUSIONS – Limiti e problematiche del metodo proposto



Analizzando i dati delle simulazioni e confrontandoli con quelli proposti nell'articolo di riferimento sono emerse alcune problematiche legate al metodo proposto.

In prima istanza la logica Fuzzy necessita di avere un numero consistente di dati, introducendo un ritardo intrinseco nell'identificazione dello stato di moto. Qualora si cercasse di restringere la finestra temporale, prendendo un numero minore di dati, si potrebbero riscontrare delle problematiche nel determinare le soglie di riferimento.

La seconda limitazione è dovuta proprio a tali soglie, che determinano gli istanti in cui le ipotesi di semplificazione del modello sono ritenute valide.

Per chiarire meglio questa problematica ipotizziamo di scegliere una soglia di commutazione da moto rettilineo a moto in curva relativamente bassa. Ciò fornisce correzioni su  $V_f$  anche per  $\omega_{Bz}$  molto piccole (che violano le ipotesi fatte in precedenza, essendo  $V_f \propto \frac{1}{\omega_{Bz}}$ ), e di fatto errate; al contrario però le correzioni sul rollio  $\phi$  saranno ottimali, poiché disponibili solo in tratti di puro rettilineo ( $\omega_{By} \approx 0$  e  $A_{By}$  molto piccole, come da ipotesi).

Una situazione duale e opposta si verifica nel caso in cui si sceglie una soglia di commutazione elevata.

Essendo il rollio direttamente implicato nella stima dell'imbardata  $\psi$ , è opportuno scegliere tale soglia in maniera accurata (trade off tra errore su  $\phi$  e su  $V_f$ ), al fine di un errore minimo sulla traiettoria finale.

# Bibliografia

1. J. -H. Wang and Y. Gao, "Land Vehicle Dynamics-Aided Inertial Navigation," in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 46, no. 4, pp. 1638-1653, Oct. 2010, doi: 10.1109/TAES.2010.5595584.
2. Salychev, O. *Inertial Systems in Navigation and Geophysics*. Moscow, Russia: Bauman MSTU Press, 1998.
3. Kandel, A. (Ed.) *Fuzzy Expert Systems*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1992.
4. Jang, J-S. R., Sun, C-T., and Mizutani, E. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.
5. Mamdani, E. H. and Assilian, S. An experiment in linguistic synthesis with fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7, 1 (1975), 1—13.
6. *Materiale del corso di Sistemi di Guida e Navigazione*, Prof. Lorenzo Pollini.