



UNIVERSITÀ DI PISA
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Corso di Laurea Magistrale in
INGEGNERIA ROBOTICA E DELL'AUTOMAZIONE

Studio dell'influenza degli errori di misura sensoriali sulle Equazioni di Navigazione

Relazione del progetto d'esame per il corso di
Sistemi di Guida e Navigazione

sviluppato da

Simona Casini

Matteo Razzanelli

Relatori:

Prof. Lorenzo Pollini

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione	iii
1 Sistemi di Coordinate e Trasformazioni	1
1.1 Matrice di Trasformazione	3
2 Equazioni di Meccanizzazione dell'Errore	5
2.1 Navigazione "Short Time Short Range"	9
3 Modello dell'Errore di Navigazione	13
3.1 Errori Deterministici	14
3.1.1 Accelerometro	14
3.1.2 Giroscopio	16
3.2 Errori Stocastici	18
3.2.1 Angle Random Walk	20
3.2.2 Velocity Random Walk	22
4 Implementazioni e Validazioni	25
4.1 Sorgenti di Corruzione e Segnali in Input	27
4.2 Rappresentazione Tramite Quaternioni	30
4.3 Validazione del Modello di Errore	32
4.3.1 Assetto	32
4.4 Velocità e Posizione	35
4.5 Validazione della Predizione di Errore e PSE	37
4.6 Densità di Probabilità delle Singole Sorgenti di Errore	50
5 Conclusioni	53
5.1 Giroscopio	54
5.2 Accelerometro	56
A Unità di misura	57
B Dimostrazione errori di assetto	59
C Errore di quantizzazione	63

D Codice	67
Bibliografia	73

Introduzione

La misura dei sensori inerziali è, come noto, affetta da errori. Questi si ripercuotono sulle equazioni di navigazione e in senso più generale, sulla stima di posizione e assetto del corpo. L'obiettivo che viene posto in questo studio è quello di individuare le sorgenti di errore e studiare come queste influiscano sulle misure dei sensori, quali accelerometri e giroscopi.

Prendendo in analisi le equazioni di errore di velocità ed assetto e considerando il caso di navigazione di tipo Short Time Short Range, si assumeranno quindi come valide alcune ipotesi semplificative per la definizione di un nuovo sistema di equazioni lineari, sul quale verranno ricavate le equazioni di influenza che si singoli errori hanno sulla corruzione totale della misura. I diversi contributi saranno trattati in modo separato sia per errori di tipo deterministico (Bias Instability, Axis Misalignment, Scale Factor) che stocastico (Angle/Velocity Random Walk).

Dopo una prima parte teorica di definizione dei sistemi di riferimento e realizzazione del modello di errore, verrà esposta una meccanizzazione (implementata tramite Simulink) che permetterà di validare i ragionamenti precedenti e servirà successivamente per realizzare simulazioni montecarlo utilizzate per la verifica dell'ipotesi di utilizzo del principio di sovrapposizione degli effetti delle varie corruzioni.

In conclusione verrà effettuato uno studio numerico sull'effettiva influenza di ogni singolo contributo di errore.

Il lavoro effettuato mostra come il modello scelto possa effettivamente considerarsi corretto e come le stime teoriche predicano effettivamente (al 90/95%) l'evoluzione temporale dell'errore introdotto dai sensori inerziali.

Capitolo 1

Sistemi di Coordinate e Trasformazioni

Quando si parla di navigazione si intende determinare posizione, velocità ed assetto di un corpo rispetto ad un sistema di riferimento fissato. In caso di navigazione di tipo inerziale, vengono sfruttati sensori quali per esempio accelerometri e giroscopi. Questi ultimi forniscono misure di accelerazione e velocità angolare, che permettono di implementare lo schema risolutivo mostrato in Fig.(1.1).

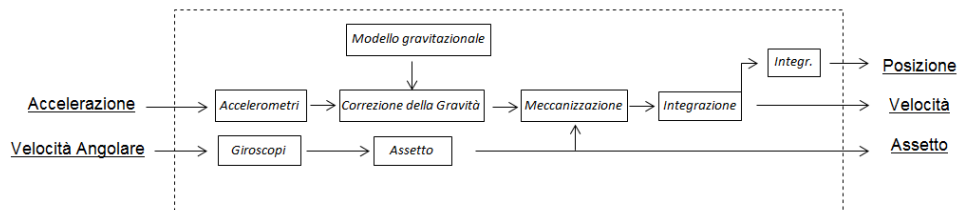


Figura 1.1: Schema risolutivo problema di navigazione

La meccanizzazione che ne consegue dipende dal tipo di montaggio effettuato:

- *Piattaforma StrapDown*: tre accelerometri e tre giroscopi posizionati in modo ortogonale e solidali al corpo preso in esame;
- *Piattaforma Stabilizzante*: tre accelerometri e tre giroscopi posizionati in modo ortogonale su una piattaforma svincolata dalle rotazioni del corpo, che quindi permette di mantenere l'orientamento iniziale per tutto l'arco di tempo della navigazione.

Questo studio è finalizzato all'implementazione della navigazione *StrapDown*.

Come noto esistono sistemi di riferimento differenti attraverso i quali possono essere espresse le grandezze di interesse quali: Inerziale (*Earth-Centered Inertial - ECI*); Terrestre (*Earth-Centered-Earth-Fixed - ECEF*); Navigazione (*Navigation*) e Assi Corpo (*Body*).

Tutti i sistemi menzionati sono definiti come terne cartesiane ortogonali destre.

ECI (indicato da ora in avanti con l'indice 'i') ed ECEF (indicato da ora in avanti con l'indice 'e'), si riferiscono a sistemi con origine al centro della terra. Il primo è coincidente con il riferimento inerziale ed è fisso rispetto al moto di rotazione terrestre, mentre il secondo è solidale alla Terra ed al suo moto di rotazione.

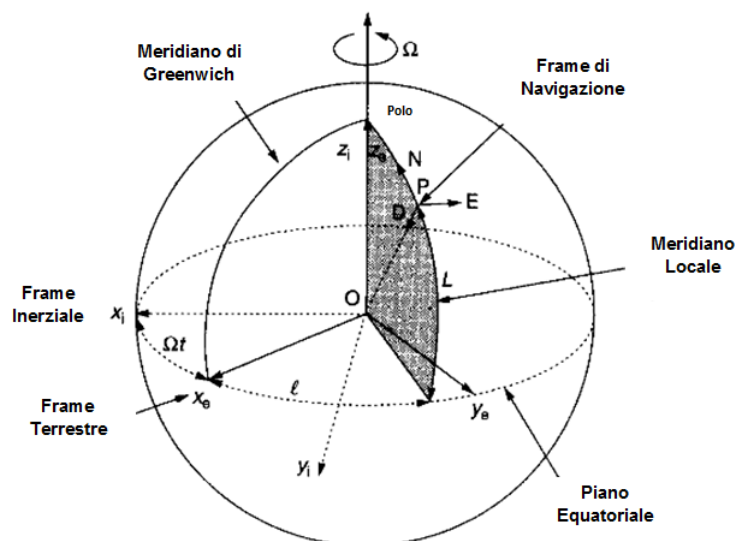


Figura 1.2: Frame di Navigazione

Frame di Navigazione Indicato da ora in avanti con l'indice 'n', è un frame locale con origine nel sistema di navigazione considerato, punto P, ed assi allineati con la verticale locale (D - down) e le direzioni nord (N) ed est (E) Fig.(1.2).

La verticale locale D, è definita dalla normale rispetto all'elissoide di riferimento. Le direzioni N ed E si riferiscono rispettivamente alla direzione di proiezione del vettore di velocità angolare terrestre lungo il piano orizzontale di navigazione ed alla direzione definita per il completamento della terna destra.

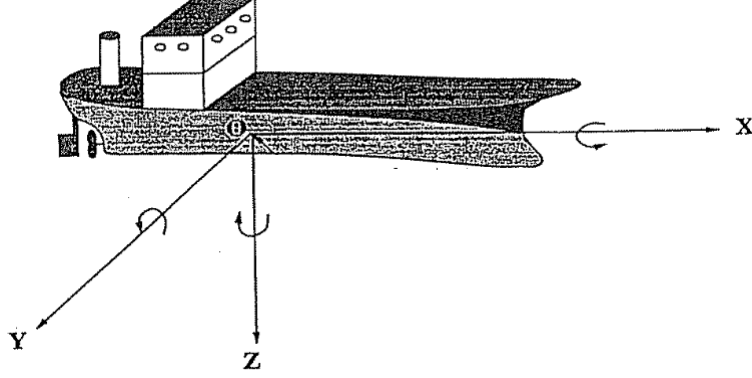


Figura 1.3: Frame Body

Frame Body Indicato da ora in avanti con l'indice 'b', è il sistema di riferimento della piattaforma, con origine nel suo baricentro (punto O). Convenzionalmente gli assi sono allineati con la direzione di moto (X), la verticale locale (Z) e la direzione data dal completamento della terna destra (Y). Le misure di accelerometri e giroscopi sono indicate in frame body. Si assumerà quindi:

- $\omega_{i/b}^b$: vettore di velocità angolare, misurata dai giroscopi, della piattaforma rispetto al frame inerziale;
- f^b : vettore di accelerazione della piattaforma misurata dagli accelerometri.

1.1 Matrice di Trasformazione

Dato che le equazioni di meccanizzazione sono definite nel frame di navigazione, è necessario introdurre una matrice di rotazione che permetta il cambio di coordinate dal frame body nel quale sono espresse le misure sensoriali. Questa matrice è indicata come C_b^m ed è descritta dalla composizione di rotazioni elementari rispetto agli angoli di roll (φ), pitch (θ) e yaw (ψ)¹. Fisicamente si interpreta come il disallineamento angolare che si ha tra la terna body e quella di navigazione.

$$C_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\varphi) & s(\varphi) \\ 0 & -s(\varphi) & c(\varphi) \end{bmatrix} \quad C_y(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & -s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix}$$

$$C_z(\psi) = \begin{bmatrix} c(\psi) & s(\psi) & 0 \\ -s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¹Si veda [3] - Capitolo 3 per ulteriori dettagli

$$C_b^n = C_z^T(\psi) C_y^T(\theta) C_x^T(\varphi)$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} c(\theta) c(\psi) & c(\psi) s(\theta) s(\varphi) - s(\psi) c(\varphi) & c(\psi) s(\theta) c(\varphi) + s(\psi) s(\varphi) \\ s(\psi) c(\theta) & s(\psi) s(\theta) s(\varphi) + c(\psi) c(\varphi) & -c(\psi) s(\varphi) + s(\psi) s(\theta) c(\varphi) \\ -s(\theta) & c(\theta) s(\varphi) & c(\theta) c(\varphi) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Per la trattazione successiva, si assumerà valida l'ipotesi di frame allineati, quindi:

$$[\varphi \theta \psi]^T \equiv [0 \ 0 \ 0]^T$$

si assumerà di conseguenza:

$$C_b^n = C_z^T(0) C_y^T(0) C_x^T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fisicamente, questo equivale a considerare, durante il moto della piattaforma, il frame body allineato rispetto al frame navigation.

Capitolo 2

Equazioni di Meccanizzazione dell'Errore

Equazione di Velocità Si consideri:

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n - (\boldsymbol{\omega}_{e/n}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{i/e}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (2.1)$$

Questa equazione fornisce la descrizione dell'evoluzione della velocità nel frame di navigazione locale in cui:

- \mathbf{f}^n : output dell'accelerometro riportato nel navigation frame;
- $\boldsymbol{\omega}_{e/n}^n$: transport rate. Indica il moto relativo del frame di navigazione rispetto all' ECEF;
- $\boldsymbol{\omega}_{i/e}^n$: velocità angolare terrestre;
- \mathbf{v}^n : velocità della piattaforma;
- \mathbf{g}^n : accelerazione gravitazionale.

In realtà, a causa di inizializzazioni, sensori inerziali ed altre corruzioni, ogni termine dell'equazione precedente non è conosciuto in modo esatto ma è affetto da errori. Risulta quindi necessario introdurre una nuova notazione, a cui si farà riferimento quando verranno trattate grandezze di cui non si ha la conoscenza esatta. Si dirà quindi che una grandezza è misurata o stimata, ad esempio la velocità, quando è composta dalla somma di due termini: valore reale \mathbf{v}^n ed errore $\delta\mathbf{v}^n$,

$$\bar{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n$$

E quindi la sua derivata vale ovviamente

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}^n = \dot{\mathbf{v}}^n + \delta\dot{\mathbf{v}}^n \quad (2.2)$$

Applicando questo ragionamento ad ogni termine della (2.1), si implementeranno modelli di errori differenti a seconda della sorgente dell'errore. Convenzionalmente, nei casi in cui l'errore derivi da una conoscenza non esatta della matrice di rotazione tra frame, il modello sarà moltiplicativo; in tutti gli altri sarà additivo. Viene definita quindi tra due sistemi di riferimento generici x, y , la matrice di rotazione misurata:

$$\bar{C}_y^x = (\mathbf{I} - \phi \times) C_y^x = C_y^x - \delta C_y^x \quad (2.3)$$

Dove con ϕ si indica il vettore degli errori in funzione di roll, pitch, yaw. Fisicamente indica la conoscenza non esatta della matrice di rotazione tra il frame x e il frame y . La sua forma in skew-symmetric matrix ($\phi \times$) è definita come

$$\phi \times = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

Dato che la matrice di rotazione viene utilizzata per il cambio di coordinate tra frame body e frame navigation (C_b^n), l'unica grandezza acquisita in body è l'accelerazione.

Si avrà quindi:

$$\bar{\mathbf{f}}^n = \bar{C}_b^n \bar{\mathbf{f}}^b = [I - \phi \times] C_b^n (\mathbf{f}^b + \delta \mathbf{f}^b) = [I - (\phi \times)] \mathbf{f}^n + [I - (\phi \times)] \delta \mathbf{f}^n$$

Si ricorda che per le regole teoriche sull'operazione di prodotto vettoriale si ha:

$$-(\phi \times) \mathbf{f}^n = (\mathbf{f}^n \times) \phi = \begin{bmatrix} 0 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 0 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_x^n \\ \ddot{x}_y^n \\ \ddot{x}_z^n - g^n \end{bmatrix}$$

Come risultato delle considerazioni effettuate, sviluppando ogni termine della (2.1) si ha:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{f}}^n = [I - (\phi \times)] \mathbf{f}^n + [I - (\phi \times)] \delta \mathbf{f}^n \\ \bar{\omega}_{e/n}^n = \omega_{e/n}^n + \delta \omega_{e/n}^n \\ \bar{\omega}_{i/e}^n = \omega_{i/e}^n + \delta \omega_{i/e}^n \\ \bar{\mathbf{g}}^n = \mathbf{g}^n + \delta \mathbf{g}^n \end{cases} \quad (2.4)$$

Sostituendo in (2.2) le espressioni date da (2.1) e (2.4) nell'equazione di velocità misurata (2.2) i termini di errore si ottiene:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n \times \phi + \delta \mathbf{f}^n \times \phi + \delta \mathbf{f}^n + \delta \mathbf{g}^n - [\omega_{e/n}^n + 2\omega_{i/e}^n] \times \delta \mathbf{v}^n - [\delta \omega_{e/n}^n + 2\delta \omega_{i/e}^n] \times \mathbf{v}^n \quad (2.5)$$

in cui:

- ϕ vettore degli errori di assetto;
 - dato che quando viene effettuato fisicamente un processo di navigazione, non si hanno a disposizione φ, θ, ψ , si può dimostrare che ϕ viene ricavato dall'integrale del vettore di errore della velocità angolare misurata dai giroscopi. L'approfondimento di questo ragionamento verrà esposto nella sezione successiva.
- δf^n errore di misura proprio dello strumento;
- δg^n errore dovuto alla conoscenza non esatta dell'accelerazione gravitazionale;
- δv^n errore di stima in velocità che porta ad una compensazione errata degli effetti di Coriolis;
- $\delta \omega_{e/n}^n$ errore sul termine di transport rate;
- $\delta \omega_{i/e}^n$ errore dovuto alla conoscenza non esatta della velocità di rotazione terrestre.

Equazione di Assetto Per quanto riguarda l'assetto della piattaforma, l'evoluzione dell'errore - ricavabile dall'equazione $\dot{C}_b^n = -\omega_{b/n}^n \times C_b^n$ considerando la corruzione sulla matrice di rotazione come definita precedentemente nella (2.3) - è data da:

$$\dot{\phi} = \delta \rho + \omega_{i/e}^n \times \delta \theta + \phi \times \omega_{i/n}^n - \epsilon^n \quad (2.6)$$

in cui:

- $\delta \rho$ errore di transport rate;
- $\delta \theta$ errore di posizione riportato nel frame di navigazione;
- ϕ vettore degli errori di assetto;
- ϵ^n misura non esatta dello strumento che deriva dal termine di errore di $\omega_{b/n}^n$. Questa grandezza rappresenta la velocità della piattaforma rispetto al frame di navigazione secondo l'equazione:

$$\omega_{b/n}^n = \omega_{i/n}^n - C_b^n \omega_{i/b}^b = \omega_{e/n}^n + \omega_{i/e}^n - C_b^n \omega_{i/b}^b$$

Introducendo la corruzione si ha quindi:

$$\bar{\omega}_{b/n}^n = \bar{\omega}_{i/n}^n - \bar{C}_b^n \bar{\omega}_{i/b}^b = \bar{\omega}_{i/n}^n - \bar{C}_b^n (\omega_{i/b}^b + \epsilon^b) = \bar{\omega}_{i/n}^n - [I - \phi \times] C_b^n (\omega_{i/b}^b + \epsilon^b)$$

Considerando solo il termine $\boldsymbol{\varepsilon}^b$:

$$(\boldsymbol{\phi} \times -I) C_b^n \boldsymbol{\varepsilon}^b = -C_b^n \boldsymbol{\varepsilon}^b + \boldsymbol{\phi} \times C_b^n \boldsymbol{\varepsilon}^b = -\boldsymbol{\varepsilon}^n + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^n$$

Le due componenti verranno considerate come unico errore $-\boldsymbol{\varepsilon}^n$.

2.1 Navigazione “Short Time Short Range”

Considerando le equazioni di errore appena esposte si possono identificare due cause di principali di errore:

- inizializzazioni errate (es: velocità di rotazione terrestre, transport rate e posizione, velocità e assetto al tempo $t = 0$);
- errori propri degli strumenti di misura.

L’analisi di questi termini verrà effettuata attraverso due approcci differenti: uno più generale che riguarda una navigazione di tipo Short Time Short Range (STSR - raggio di azione e tempo limitati), l’altro più specifico che riguarda il processo di calibrazione degli strumenti (sotto ipotesi di veicolo fermo e quindi accelerazioni nulle, considerato come caso particolare del primo).

Errore di Velocità Si consideri nuovamente l’equazione di errore di velocità (2.5):

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \mathbf{f}^n + \delta \mathbf{g}^n - [\boldsymbol{\omega}_{e/n}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{i/e}^n] \times \delta \mathbf{v}^n - [\delta \boldsymbol{\omega}_{e/n}^n + 2\delta \boldsymbol{\omega}_{i/e}^n] \times \mathbf{v}^n$$

Sotto l’ipotesi di navigazione STSR, il transport rate ed i termini di Coriolis possono non essere considerati (in quanto troppo piccoli rispetto alle altre grandezze in gioco), per cui: $\boldsymbol{\omega}_{e/n}^n = 0$, $\delta \boldsymbol{\omega}_{e/n}^n = 0$, $2\boldsymbol{\omega}_{i/e}^n \times \delta \mathbf{v}^n = 0$.

La velocità di rotazione terrestre, così come la gravità, è supposta nota: $\delta \boldsymbol{\omega}_{i/e}^n = 0$, $\delta \mathbf{g}^n = 0$.

Applicando le semplificazioni esposte si ottiene:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta \mathbf{f}^n \quad (2.7)$$

In componenti si ha:

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_x^n = f_y^n \phi_z - f_z^n \phi_y - \delta f_z^n \phi_y + \delta f_y^n \phi_z + \delta f_x^n \\ \delta \dot{v}_y^n = -f_x^n \phi_z + f_z^n \phi_x - \delta f_x^n \phi_z + \delta f_z^n \phi_x + \delta f_y^n \\ \delta \dot{v}_z^n = f_x^n \phi_y - f_y^n \phi_x - \delta f_y^n \phi_x + \delta f_x^n \phi_y + \delta f_z^n \end{cases}$$

La misura dell’accelerometro è composta, come noto, dalla differenza tra l’accelerazione della piattaforma e quella di gravità: $\mathbf{f}^n = \ddot{\mathbf{x}}^n - \mathbf{g}^n$. Sostituendo $\mathbf{g}^n = [0 \ 0 \ g]^T$:

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_x^n = \ddot{x}_y^n \phi_z - \ddot{x}_z^n \phi_y + g \phi_y - \delta f_z^n \phi_y + \delta f_y^n \phi_z + \delta f_x^n \\ \delta \dot{v}_y^n = -\ddot{x}_x^n \phi_z + \ddot{x}_z^n \phi_x - g \phi_x - \delta f_x^n \phi_z + \delta f_z^n \phi_x + \delta f_y^n \\ \delta \dot{v}_z^n = \ddot{x}_x^n \phi_y - \ddot{x}_y^n \phi_x - \delta f_y^n \phi_x + \delta f_x^n \phi_y + \delta f_z^n \end{cases} \quad (2.8)$$

Nota: la terza componente non è influenzata dal termine di accelerazione gravitazionale. Il prodotto vettore assicura infatti che su ogni asse agiscano le componenti di accelerazione miste (es. su X agiscono Y e Z e così via). Volendo osservare come cambiano tali equazioni in caso di calibrazione, si può effettuare un'ulteriore semplificazione sotto l'ipotesi di veicolo fermo e quindi accelerazioni nulle. In questo modo l'errore in velocità è definito come somma di due termini che rappresentano l'errore di misura proprio dello strumento e la corruzione dovuta all'assetto che si ripercuote in una compensazione parziale del termine di gravità.

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_x^n = g \phi_y - \delta f_z^n \phi_y + \delta f_y^n \phi_z + \delta f_x^n \\ \delta \dot{v}_y^n = -g \phi_x - \delta f_x^n \phi_z + \delta f_z^n \phi_x + \delta f_y^n \\ \delta \dot{v}_z^n = -\delta f_y^n \phi_x + \delta f_x^n \phi_z + \delta f_z^n \end{cases}$$

Il sistema precedente mostra in modo ancora più esplicito dove il contributo della gravità agisce o meno.

Errore di Assetto Si consideri nuovamente l'equazione di evoluzione dell'errore di assetto (2.6):

$$\dot{\phi} = \delta \rho + \omega_{i/e}^n \times \delta \theta + \phi \times \omega_{i/n}^n - \varepsilon^n$$

anche in questo caso vale l'approssimazione di considerare transport rate e termini di Coriolis trascurabili. Quindi, avendo $\omega_{i/n}^n = \omega_{i/e}^n + \omega_{e/n}^n$, si ha $\omega_{i/n}^n = \omega_{i/e}^n$, che in componenti risulta $\omega_{i/e}^n = [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z]^T$. Avendo supposto nota la velocità di rotazione della Terra ne consegue che $\delta \omega_{i/e}^n = 0$. Per definizione $\delta \omega_{i/e}^n = \omega_{i/e}^n \times \delta \theta$, quindi si ha l'annullamento del prodotto vettore, che fisicamente si può giustificare se si considera il prodotto tra grandezze che numericamente sono trascurabili.

Applicando le considerazioni appena fatte, si ottiene l'equazione sottostante, in cui l'evoluzione dell'errore di assetto si riduce alla somma di due termini che rappresentano rispettivamente un errore nella rotazione da frame body al navigation e l'errore sulla misura di velocità angolare proprio del giroscopio:

$$\dot{\phi} = \phi \times \omega_{i/e}^n - \varepsilon^n \quad (2.9)$$

in componenti:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_x = -\phi_z \Omega_y + \phi_y \Omega_z - \varepsilon_x^n \\ \dot{\phi}_y = \phi_z \Omega_x - \phi_x \Omega_z - \varepsilon_y^n \\ \dot{\phi}_z = -\phi_y \Omega_x + \phi_x \Omega_y - \varepsilon_z^n \end{cases} \quad (2.10)$$

Questa forma è equivalente sia per navigazione STSR sia per la calibrazione.

In termini numerici è possibile verificare che il contributo del primo termine di errore, introdotto dalla velocità angolare terrestre, ha un’influenza di circa quattro ordini di grandezza inferiori rispetto al termine in ε per cui da ora in avanti, per semplicità di trattazione, si considererà valida:

$$\dot{\phi} = -\varepsilon^n$$

Le equazioni che compongono i sistemi appena ricavati, quali (2.8);(2.10), sono lineari. Senza togliere generalità al problema, è possibile quindi studiare i singoli contributi in modo separato.

L’equazione di velocità è composta dalla somma di quattro termini: tre rappresentano il contributo dell’errore di assetto sulle componenti di accelerazione, mentre il quarto l’errore proprio dell’accelerometro. Dato che le componenti della corruzione sull’assetto, derivano dalle equazioni sulle quali agisce la misura del giroscopio, volendo studiare separatamente i contributi si analizzeranno prima le componenti del vettore $\delta \mathbf{f}^n$, successivamente le componenti del prodotto vettore $\mathbf{f}^n \times \phi + \delta \mathbf{f}^n \times \phi$.

Per entrambi i sensori verranno ricavate le equazioni di evoluzione dell’errore in velocità e posizione per quattro corruzioni che in termini numerici risultano essere più significative:

1. Bias Instability (B - additiva)
2. Scale Factor (SF - moltiplicativa)
3. Axis Misalignment (MIS - moltiplicativa)
4. Random Walk (W - additiva, definizione stocastica)

Da notare che le equazioni a cui si fa riferimento sono quelle del termine di errore $\delta \mathbf{v}^n$ e non della misura corrotta $\bar{\mathbf{v}}^n$, quindi in eventuali simulazioni o implementazioni dei modelli ricavati, per lo Scale Factor non si dovrà fare riferimento al valore tabellato nei data sheet (SF_{ds}) ma dovrà essere considerato:

$$SF = 1 - SF_{ds}$$

Per l’Axis Misalignment (altro errore moltiplicativo) l’assunzione precedente può non essere fatta dato che per piccoli angoli si può approssimare:

$$\delta \mathbf{f}^b = MIS \mathbf{f}^b$$

Capitolo 3

Modello dell'Errore di Navigazione

Per quanto esposto fino a questo momento, per ricavare le evoluzioni in assetto velocità e posizione (degli errori di misura), si utilizzeranno le seguenti equazioni:

$$\begin{bmatrix} \delta f_x^b \\ \delta f_y^b \\ \delta f_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \\ B_{az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} SF_{ax} & MIS_{axy} & MIS_{axz} \\ MIS_{ayx} & SF_{ay} & MIS_{ayz} \\ MIS_{azz} & MIS_{azy} & SF_{az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^b \\ f_y^b \\ f_z^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{ax} \\ W_{ay} \\ W_{az} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^b \\ \varepsilon_y^b \\ \varepsilon_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{gx} \\ B_{gy} \\ B_{gz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} SF_{gx} & MIS_{gxy} & MIS_{gxz} \\ MIS_{gyx} & SF_{gy} & MIS_{gyz} \\ MIS_{gzx} & MIS_{gzy} & SF_{gz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i/b_x}^b \\ \omega_{i/b_y}^b \\ \omega_{i/b_z}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{gx} \\ W_{gy} \\ W_{gz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Le equazioni precedenti (3.1) e (3.2) possono essere scomposte in 3 termini principali lineari:

- \mathbf{B} vettore delle componenti di bias di accelerometro (\mathbf{B}_a) e giroscopio (\mathbf{B}_g);
- termine moltiplicativo composto da scale factor (\mathbf{SF}_a e \mathbf{SF}_g) e misalignment (\mathbf{MIS}_a e \mathbf{MIS}_g);
- \mathbf{W} vettore delle componenti di white noise di accelerometro (\mathbf{W}_a) e giroscopio (\mathbf{W}_g).

E' possibile quindi studiare gli effetti dei singoli elementi separatamente per poi sommarne i contributi secondo il principio di sovrapposizione degli effetti.

Tutti gli errori verranno espressi dimensionalmente secondo il Sistema Internazionale (SI), mentre i riferimenti alle unità di misura che convenzionalmente si trovano tabellate sui data sheet verranno indicati in Appendice A.

3.1 Errori Deterministici

L'accelerazione della piattaforma non è costante, può essere considerata tale però la sua media, per cui si definisce:

$$\ddot{X}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{x}(\tau) d\tau$$

Da ora in avanti tutte le accelerazioni tempo varianti verranno considerate costanti ed indicate con la lettera maiuscola.

3.1.1 Accelerometro

Il sistema di equazioni a cui si fa riferimento è il seguente:

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_x^n = \delta F_x^n \\ \delta \dot{v}_y^n = \delta F_y^n \\ \delta \dot{v}_z^n = \delta F_z^n \end{cases}$$

Si richiama l'attenzione sul fatto che la matrice di trasformazione è identica ed esatta.

Bias Instability $\delta \mathbf{F}^b = \mathbf{B}_a$

L'equazione dell'errore risulta quindi:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{B}_a = \mathbf{I}_3 \mathbf{B}_a$$

La corruzione sulla velocità (dimensionalmente in $\frac{m}{s}$) deriva dall'integrale della precedente:

$$\delta \mathbf{v}^n(t) = \int \delta \dot{\mathbf{v}}^n d\tau = \int \mathbf{B}_a d\tau = \mathbf{B}_a t$$

da cui si ottiene la corruzione in posizione (dimensionalmente in m) :

$$\delta \mathbf{p}^n(t) = \int \delta \mathbf{v}^n d\tau = \int \mathbf{B}_a t d\tau = \frac{1}{2} \mathbf{B}_a t^2$$

Nel caso di calibrazione, l'equazione rimane la medesima.

Dimensionalmente il Bias si indica in $\frac{m}{s^2}$.

Scale Factor $\delta \mathbf{F}^b = SF_a \mathbf{F}^b$

Con SF_a si intende:

$$SF_a = \begin{bmatrix} SF_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & SF_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & SF_{az} \end{bmatrix}$$

L'equazione dell'errore risulta quindi:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = C_b^n SF_a \mathbf{F}^b = I_3 SF_a \mathbf{F}^b$$

La corruzione sulla velocità (dimensionalmente in $\frac{m}{s}$) risulta:

$$\delta \mathbf{v}^n = \int \delta \dot{\mathbf{v}}^n d\tau = \int SF_a \mathbf{F}^n d\tau = SF_a \mathbf{F}^n t$$

Per la posizione (dimensionalmente in m) si ha:

$$\delta \mathbf{p}^n = \int \delta \mathbf{v}^n d\tau = \int SF_a \mathbf{F}^n t d\tau = \frac{1}{2} SF_a \mathbf{F}^n t^2$$

Nel caso di calibrazione: $\mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g^n \end{bmatrix}$.

Lo Scale Factor è adimensionale.

Axis Misalignment $\delta \mathbf{F}^b = MIS_a \mathbf{F}^b$

Con MIS_a si intende:

$$MIS_a = \begin{bmatrix} 0 & MIS_{axy} & MIS_{axz} \\ MIS_{ayx} & 0 & MIS_{ayz} \\ MIS_{azx} & MIS_{azy} & 0 \end{bmatrix}$$

L'equazione dell'errore risulta:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = C_b^n MIS_a \mathbf{F}^b = I_3 MIS_a \mathbf{F}^b$$

Da cui la corruzione sulla velocità (dimensionalmente in $\frac{m}{s}$):

$$\delta \mathbf{v}^n(t) = \int \delta \dot{\mathbf{v}}^n d\tau = \int MIS_a \mathbf{F}^n d\tau = MIS_a \mathbf{F}^n t$$

La posizione (dimensionalmente in m):

$$\delta \mathbf{p}^n(t) = \int \delta \mathbf{v}^n d\tau = \int MIS_a \mathbf{F}^n t d\tau = \frac{1}{2} MIS_a \mathbf{F}^n t^2$$

In caso di calibrazione: $\mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g^n \end{bmatrix}$.

Dimensionalmente l'Axis Misalignment è una variazione angolare misurata in radianti.

3.1.2 Giroscopio

Il sistema di equazioni a cui si fa riferimento è il seguente:

$$\begin{cases} \delta \dot{v}_x^n = \ddot{X}_y^n \phi_z - \ddot{X}_z^n \phi_y + g_z^n \phi_y - \delta F_z^n \phi_y + \delta F_y^n \phi_z \\ \delta \dot{v}_y^n = -\ddot{X}_x^n \phi_z + \ddot{X}_z^n \phi_x - g_z^n \phi_x - \delta F_x^n \phi_z + \delta F_z^n \phi_x \\ \delta \dot{v}_z^n = \ddot{X}_x^n \phi_y - \ddot{X}_y^n \phi_x - \delta F_y^n \phi_x + \delta F_x^n \phi_z \\ \dot{\phi}_x = -\epsilon_x^n \\ \dot{\phi}_y = -\epsilon_y^n \\ \dot{\phi}_z = -\epsilon_z^n \end{cases}$$

Bias Instability $\epsilon^b = \mathbf{B}_g$

Il vettore di assetto quindi risulta:

$$\phi(t) = \int -\mathbf{B}_g d\tau = -\mathbf{B}_g t$$

L'equazione di errore:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = C_b^n \mathbf{F}^b \times \phi + \delta \mathbf{F}^n \times \phi = \begin{bmatrix} -B_z (F_y^n + \delta F_y^n) t + B_y (F_z^n + \delta F_z^n) t \\ B_z (F_x^n + \delta F_x^n) t - B_x (F_z^n + \delta F_z^n) t \\ -B_y (F_x^n + \delta F_x^n) t + B_x (F_y^n + \delta F_y^n) t \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui il Bias sui tre giroscopi sia lo stesso, è possibile considerare questa corruzione come una grandezza scalare:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = B_g \mathbf{F}^n t$$

Dove con \mathbf{F}^n è indicato il vettore di accelerazione derivato dal prodotto

$$\text{vettore } \mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} -(F_y^n + \delta F_y^n) + (F_z^n + \delta F_z^n) \\ (F_x^n + \delta F_x^n) - (F_z^n + \delta F_z^n) \\ -(F_x^n + \delta F_x^n) + (F_y^n + \delta F_y^n) \end{bmatrix}.$$

La corruzione su velocità (dimensionalmente in $\frac{m}{s}$) e posizione (dimensionalmente in metri) quindi risulta:

$$\delta \mathbf{v}^n = \int \delta \dot{\mathbf{v}}^n d\tau = \frac{1}{2} \mathbf{B}_g \mathbf{F}^n t^2$$

$$\delta \mathbf{p}^n = \int \delta \mathbf{v}^n d\tau = \frac{1}{6} \mathbf{B}_g \mathbf{F}^n t^3$$

$$\text{Nel caso di calibrazione quindi } \mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} -(g^n + \delta g^n) \\ (g^n + \delta g^n) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimensionalmente il Bias è espresso in $\frac{rad}{s}$.

Scale Factor $\varepsilon^b = SF_g \omega_{i/b}^b$

dove:

$$SF_g = \begin{bmatrix} SF_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & SF_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & SF_{gz} \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$\phi(t) = \int -SF_g \omega_{i/b}^b d\tau = -SF_g \int \omega_{i/b}^b d\tau = -SF_g \delta \mathbf{H}(t)$$

Dove con SF_g si è indicata la matrice di Scale Factor e con $\delta \mathbf{H}(t)$

$$\delta \mathbf{H}(t) = \int \omega_{i/b}^b d\tau$$

da ora in avanti la dipendenza dal tempo verrà omessa per semplicità di notazione.

Fisicamente questa grandezza non ha significato ma fornisce una stima della variazione di rotta che è stata effettuata. Nel caso in cui lo Scale Factor sui tre giroscopi sia lo stesso, è possibile considerare questa corruzione come una grandezza scalare:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}^n &= C_b^n \mathbf{F}^b \times \phi + \delta \mathbf{F}^n \times \phi \\ &= SF_g \begin{bmatrix} -\delta H_z (F_y^n + \delta F_y^n) + \delta H_y (F_z^n + \delta F_z^n) \\ \delta H_z (F_x^n + \delta F_x^n) - \delta H_x (F_z^n + \delta F_z^n) \\ -\delta H_y (F_x^n + \delta F_x^n) + \delta H_x (F_y^n + \delta F_y^n) \end{bmatrix} \\ &= SF_g \delta \mathbf{H} \mathbf{F}^n \end{aligned}$$

Dove con $\delta \mathbf{H} \mathbf{F}^n$ è indicato il vettore di accelerazione derivato dal prodotto vettore. Dall' integrale della precedente si ottiene la corruzione su velocità (dimensionalmente in $\frac{m}{s}$):

$$\delta \mathbf{v}^n = \int \delta \dot{\mathbf{v}}^n d\tau = SF_g \delta \mathbf{H} \mathbf{F}^n t$$

Mentre la posizione (dimensionalmente in metri):

$$\delta \mathbf{p}^n = \int \delta \mathbf{v}^n d\tau = \frac{1}{2} SF_g \delta \mathbf{H} \mathbf{F}^n t^2$$

Nel caso di calibrazione si avrà: $\delta \mathbf{H} \mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} -\delta H_y (g^n + \delta g^n) \\ \delta H_x (g^n + \delta g^n) \\ 0 \end{bmatrix}$

Lo Scale Factor è adimensionale.

Axis Misalignment $\varepsilon^b = MIS_g \omega_{i/b}^b$
 nello specifico:

$$MIS_g = \begin{bmatrix} 0 & MIS_{gxy} & MIS_{gxz} \\ MIS_{gyx} & 0 & MIS_{gyz} \\ MIS_{gzx} & MIS_{gzy} & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\phi(t) = -MIS_g \delta \mathbf{H}$$

L'equazione di errore risulta:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}^n &= C_b^n \mathbf{F}^b \times \phi + \delta \mathbf{F}^n \times \phi \\ &= \begin{bmatrix} -MIS_{gxy} \delta H_z (F_y^n + \delta F_y^n) + MIS_{gxz} \delta H_y (F_z^n + \delta F_z^n) \\ MIS_{gyx} \delta H_z (F_x^n + \delta F_x^n) - MIS_{gyz} \delta H_x (F_z^n + \delta F_z^n) \\ -MIS_{gzx} \delta H_y (F_x^n + \delta F_x^n) + MIS_{gzy} \delta H_x (F_y^n + \delta F_y^n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La corruzione su velocità (dimensionalmente in $\frac{m}{s}$) e posizione (dimensionalmente in metri) quindi risulta:

$$\delta \mathbf{v}^n = \int \delta \dot{\mathbf{v}}^n d\tau = \delta \dot{\mathbf{v}}^n t$$

$$\delta \mathbf{p}^n = \int \delta \mathbf{v}^n d\tau = \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{v}}^n t^2$$

Nel caso di calibrazione si avrà: $\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \begin{bmatrix} -MIS_{gxz} \delta H_y (g^n + \delta g^n) \\ MIS_{gyz} \delta H_x (g^n + \delta g^n) \\ 0 \end{bmatrix}$

Dimensionalmente l'Axis Misalignment è una variazione angolare misurata in radianti.

3.2 Errori Stocastici

Seguendo l'equazione di modellazione degli errori, riportata precedentemente nelle equazioni (3.1), (3.2) rimangono da analizzare le componenti additive di rumore bianco.

Si vuole quindi andare a studiare la propagazione dell'errore considerando il vettore di stato

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{p}}^n(t) \\ \delta \dot{\mathbf{v}}^n(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}$$

noto ad un certo istante di tempo t_i . La matrice di covarianza dell'errore è definita come

$$P(t) = E\{[\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x(t)][\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x(t)]^T\}$$

Sotto l'assunzione di media dell'errore di stima nulla[7]

$$P(t) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T\}$$

E' possibile dimostrare[3] che tale matrice evolve in base all'equazione differenziale di Lyapunov:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) A^T(t) + A(t) P(t) + Q(t) \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Si consideri un sistema tempo continuo del tipo:

$$d\mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) dt + \mathbf{\Gamma}(t) \quad (3.4)$$

dove con $\mathbf{\Gamma}$ si intende la forzante del sistema definita in relazione al white noise come

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) dt$$

con

$$\boldsymbol{\omega}(t) \sim N(0, \sigma_{wn}^2).$$

Calcolando l'aspettazione sul vettore di stato, si ha (la dipendenza dal tempo è omessa per semplicità):

$$\begin{aligned} dP &= E\{[\mathbf{x} + d\mathbf{x}][\mathbf{x} + d\mathbf{x}]^T - \mathbf{x} \mathbf{x}^T\} = \\ &= E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T + \mathbf{x} d\mathbf{x}^T + d\mathbf{x} \mathbf{x}^T + d\mathbf{x} d\mathbf{x}^T - \mathbf{x} \mathbf{x}^T\} = \\ &= E\{\mathbf{x} [\mathbf{\Gamma}^T + \mathbf{x}^T A^T dt] + [A \mathbf{x} dt + \mathbf{\Gamma}] \mathbf{x}^T + [A \mathbf{x} dt + \mathbf{\Gamma}][\mathbf{\Gamma}^T + \mathbf{x}^T A^T dt]\} = \\ &= E\{\mathbf{x} \mathbf{\Gamma}^T + \mathbf{x} \mathbf{x}^T A^T dt + A \mathbf{x} \mathbf{x}^T dt + \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}^T + A \mathbf{x} \mathbf{\Gamma}^T dt + A \mathbf{x} \mathbf{x}^T A^T dt + \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^T + \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}^T A^T dt\} \end{aligned}$$

Il valore dello stato \mathbf{x} ed il random walk $\mathbf{\Gamma}$ non sono correlati, per cui i termini incrociati (come: $E\{\mathbf{\Gamma} \mathbf{x}^T\}$) sono nulli.

$$dP = E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T A^T dt + A \mathbf{x} \mathbf{x}^T dt + \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^T + A \mathbf{x} \mathbf{x}^T A^T dt\} =$$

$$= E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} A^T dt + A E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} dt + E\{\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^T\} + E\{A \mathbf{x} \mathbf{x}^T A^T\} dt =$$

Definendo $Q dt = E\{\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^T\}$ matrice di covarianza del rumore bianco:

Non considerando gli ordini superiori $O\,dt = E\{A\,\mathbf{x}\,\mathbf{x}^T\,A^T\}dt$:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) A^T(t) + A(t) P(t) + Q(t)$$

In questo caso verrà preso in considerazione il giroscopio. Riprendendo quindi i ragionamenti esposti precedentemente per gli errori deterministici si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{\mathbf{p}}^n(t) = \delta \mathbf{v}^n(t) \\ \delta \dot{\mathbf{v}}^n(t) = C_b^n \mathbf{F}^b(t) \times \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{F}^n(t) \times \boldsymbol{\phi}(t) + \delta \mathbf{F}^n \times \boldsymbol{\phi} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{W}^n(t) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Che in forma matriciale risulta (tutte le grandezze sono espresse in frame navigation, gli apici verranno omessi):

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{p}} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

Specificando la dinamica su i tre assi, si ottiene una matrice 9x9, che permette di ricavare l'evoluzione della varianza.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{p}_x \\ \delta \dot{p}_y \\ \delta \dot{p}_z \\ \hline \delta \dot{v}_x \\ \delta \dot{v}_y \\ \delta \dot{v}_z \\ \hline \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
\dots & & & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & 0 & (\ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g) & -(\ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y) \\
\dots & & & -(\ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g) & 0 & (\ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x) \\
\dots & & & (\ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y) & -(\ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x) & 0 \\
\dots & & & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & 0 & 0 & 0 \\
\dots & & & 0 & 0 & 0
\end{array} \left[\begin{array}{c} \delta p_x \\ \delta p_y \\ \delta p_z \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{array} \right]$$

$$+ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_x \\ W_y \\ W_z \end{array} \right]$$

Dove la matrice \mathbf{F}^n è definita come skew symmetric matrix del tipo:

$$\mathbf{F}^n = \begin{bmatrix} 0 & (\ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g) & -(\ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y) \\ -(\ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g) & 0 & (\ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x) \\ (\ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y) & -(\ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{vec}(\mathbf{F}^n) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x \\ \ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y \\ \ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g \end{bmatrix}$$

Da sottolineare, come già osservato in precedenza, che sulla terza componente $\delta\dot{v}_z$, l'accelerazione gravitazionale non ha influenza.

Applicando al sistema (3.5) l'equazione differenziale di Lyapunov si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} & \dot{p}_{13} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} & \dot{p}_{23} \\ \dot{p}_{31} & \dot{p}_{32} & \dot{p}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{wn}^2 \end{bmatrix}$$

Risolvendo la precedente ed integrando i termini ottenuti si ottiene in forma generale (le componenti verranno specificate nelle tabelle conclusive per chiarezza espositiva):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20}F^2\sigma_{wn}^2t^5 & \frac{1}{8}F^2\sigma_{wn}^2t^4 & \frac{1}{6}F\sigma_{wn}^2t^3 \\ \frac{1}{8}F^2\sigma_{wn}^2t^4 & \frac{1}{3}F^2\sigma_{wn}^2t^3 & \frac{1}{2}F\sigma_{wn}^2t^2 \\ \frac{1}{6}F\sigma_{wn}^2t^3 & \frac{1}{2}F\sigma_{wn}^2t^2 & \sigma_{wn}^2t \end{bmatrix}$$

I termini di interesse risultano quelli sulla diagonale, che forniscono la varianza di deriva sulla posizione (p_{11}), velocità (p_{22}) ed assetto (p_{33}). Considerando quindi:

$$p_{11} = \frac{1}{20}F^2\sigma_{wn}^2t^5$$

$$p_{22} = \frac{1}{3}F^2\sigma_{wn}^2t^3$$

$$p_{33} = \sigma_{wn}^2t$$

Si ricava:

$$\sigma_{pg} = \frac{1}{\sqrt{20}}F\sigma_{wn}\sqrt{t^5}$$

$$\sigma_{vg} = \frac{1}{\sqrt{3}}F\sigma_{wn}\sqrt{t^3}$$

$$\sigma_{\phi} = \sigma_{wn}\sqrt{t}$$

Dimensionalmente, l'ARW ϕ è misurato in radianti.

3.2.2 Velocity Random Walk

In questo caso, si fa riferimento all'accelerometro:

$$\begin{cases} \delta\dot{\mathbf{p}}^n(t) = \delta\mathbf{v}^n(t) \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^n(t) = \mathbf{W}^n(t) \end{cases}$$

In termini matriciali (tutte le grandezze sono espresse in frame navigation, gli apici verranno omessi):

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{p}} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

Specificando le componenti, da un vettore di stato 2x1 si ricava un 9x1 che permette di ricavare l'evoluzione della varianza sui singoli assi.

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{p}_x \\ \delta \dot{p}_y \\ \delta \dot{p}_z \\ \delta \dot{v}_x \\ \delta \dot{v}_y \\ \delta \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_x \\ \delta p_y \\ \delta p_z \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}$$

Svolgendola in termini di covarianza, come in precedenza per il giroscopio :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{wn}^2 \end{bmatrix}$$

si ottiene (le componenti verranno sempre specificate nelle tabelle conclusive):

$$p_{11} = 2\left(\frac{1}{6}\sigma_{wn}^2 t^3\right)$$

$$p_{22} = \sigma_{wn}^2 t$$

Secondo la definizione convenzionale di VRW della densità spettrale di potenza del rumore bianco¹ si ha:

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_{22}}{2}}$$

Da cui si ottiene:

$$\sigma_{pa} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_{wn}\sqrt{t^3}$$

$$\sigma_{va} = \sigma_{wn}\sqrt{t}$$

Dimensionalmente il VRW $\delta \mathbf{v}$ è misurato in $\frac{m}{s}$.

¹Si veda [6] per approfondimenti

Capitolo 4

Implementazioni e Validazioni

L'implementazione dello studio teorico precedente è stata fatta attraverso la sintesi di schemi Simulink. Gli scopi prefissati sono principalmente due: validare i modelli dell'errore (2.9) e (2.7) definiti nella Sezione 2.1 e validare le formule di predizione dell'errore studiate nel Capitolo 3.

1. Per quanto riguarda il primo obiettivo verranno utilizzate tutte le sorgenti di errore (bias, scale factor, misalignment, white noise, quantizzazione).
 - Si prendano in considerazione i segnali di accelerazione (\mathbf{f}^b) e velocità angolare ($\omega_{i/b}^b$) come *ingressi veri*;
 - processando questi segnali attraverso il modello del sensore, si otterranno gli *ingressi misurati* ($\bar{\mathbf{f}}^b, \bar{\omega}_{i/b}^b$);
 - si suppone quindi di conoscere l'*errore di misura effettivo* che fisicamente corrisponde alla corruzione ($\delta\mathbf{f}^b, \delta\omega_{i/b}^b$).

$$\begin{cases} \delta\mathbf{f}^b = \bar{\mathbf{f}}^b - \mathbf{f}^b \\ \delta\omega_{i/b}^b = \bar{\omega}_{i/b}^b - \omega_{i/b}^b \end{cases} \quad (4.1)$$

Da notare che nella realtà queste grandezze non sono note.

- elaborando separatamente *ingressi veri* ed *ingressi misurati* attraverso le equazioni di navigazione nel caso STSR esaminato, si ottengono rispettivamente le *uscite vere* ($\mathbf{v}^n, \mathbf{p}^n, C_b^n$) e le *uscite stimate* ($\bar{\mathbf{v}}^n, \bar{\mathbf{p}}^n, \bar{C}_b^n$);
- parallelamente all'operazione precedente, $\delta\mathbf{f}^b$ e $\delta\omega_{i/b}^b$ vengono processati tramite le equazioni di meccanizzazione dell'errore ottenendo gli *errori di meccanizzazione stimati* ($\delta\hat{\mathbf{v}}^n, \delta\hat{\mathbf{p}}^n, \hat{\phi}$)

- Gli *errori di stima effettivi* risultano

$$\begin{cases} \delta \mathbf{v}^n = \bar{\mathbf{v}}^n - \mathbf{v}^n \\ \delta \mathbf{p}^n = \bar{\mathbf{p}}^n - \mathbf{p}^n \\ \phi = \text{vect}(I - (C_b^{nT} \bar{C}_b^n)) \end{cases} \quad (4.2)$$

- la procedura di validazione si conclude confrontando gli *errori di stima effettivi* con gli *errori di meccanizzazione stimati*. Se la differenza fra i due sarà inferiore all'1%, allora il modello di meccanizzazione dell'errore verrà considerato valido;
2. Per quanto riguarda il secondo obiettivo gli *errori di meccanizzazione stimati* verranno calcolati separatamente per ogni singola sorgente di errore (bias, scale factor, misalignement, white noise, quantizzazione). Si andrà ad effettuare quindi un confronto rispetto ai singoli termini predetti nel Capitolo 3.

In questo caso, gli *errori di meccanizzazione stimati* dovranno essere contenuti al 90/95% all'interno delle predizioni suddette.

Per meglio comprendere la suddetta descrizione si riporta lo schema concettuale complessivo

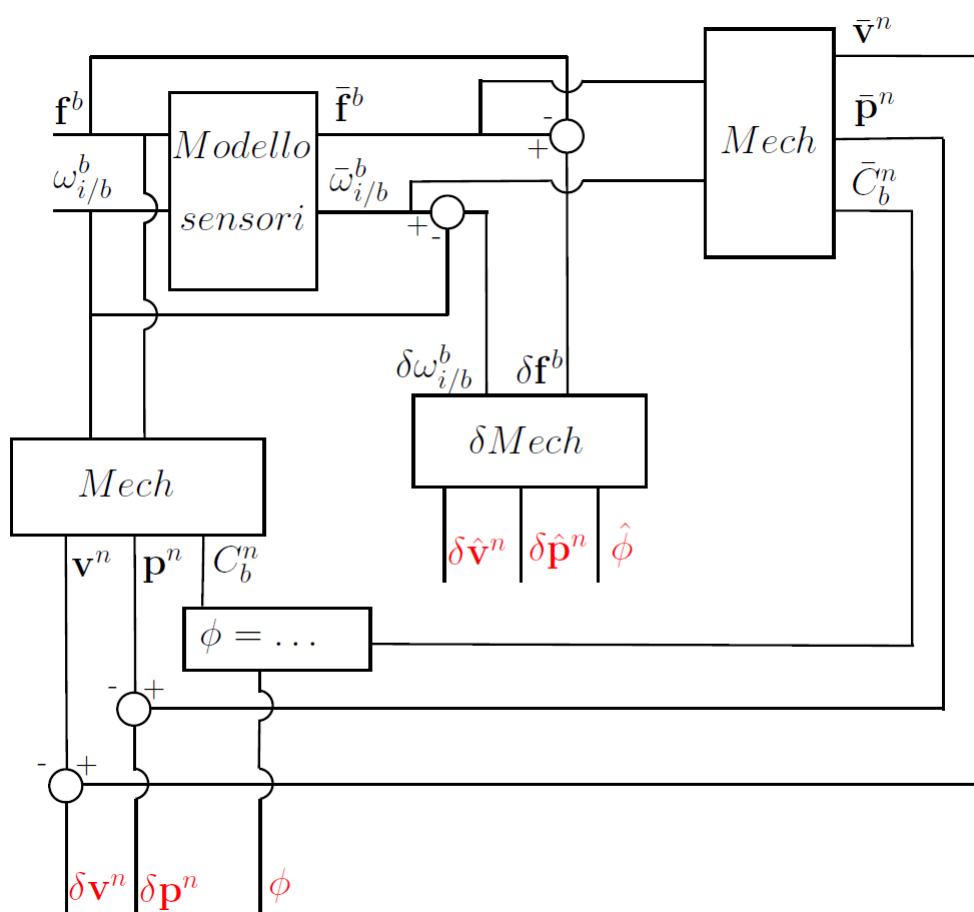


Figura 4.1: Modello concettuale complessivo

4.1 Sorgenti di Corruzione e Segnali in Input

La corruzione viene introdotta in modo additivo sui segnali di velocità angolare ed accelerazione che si è visto derivare da quattro sorgenti principali (Sezione 2.1). In realtà vi è un'altra sorgente di errore, implicita del sistema, riguardante il rumore di quantizzazione che sarà trattata in Appendice. In Fig.(4.2) viene mostrato lo schema Simulink di quanto descritto.

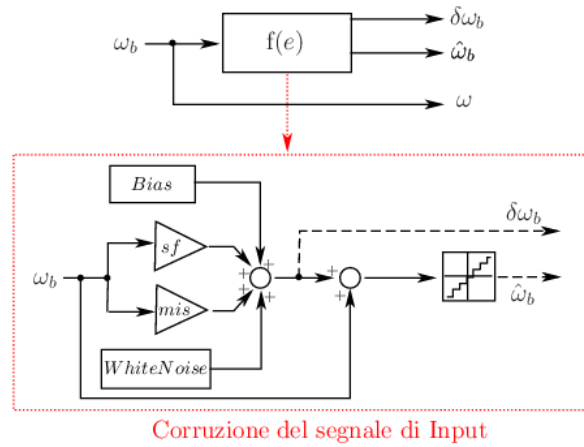


Figura 4.2: Corruzioni Segnale di Velocità Angolare ed Accelerazione

Per quanto riguarda i segnali in input, in questo caso, verranno utilizzati dati derivanti da una prova di volo di un quadrotor effettuata in un arco di tempo di circa 86 secondi. Gli andamenti di velocità angolare ed accelerazione (misurati in frame Body) sono visibili nelle Fig.(4.3, 4.4) sottostanti.

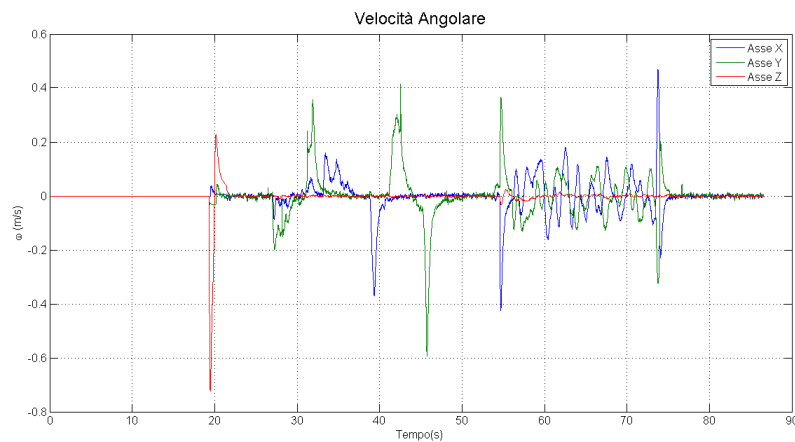


Figura 4.3: Velocità Angolare - Input

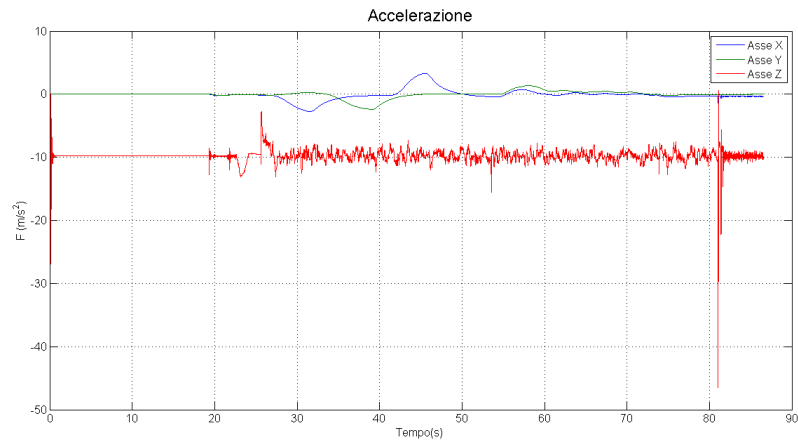


Figura 4.4: Accelerazione - Input

4.2 Rappresentazione Tramite Quaternioni

L'utilizzo degli angoli di Eulero per la definizione della matrice di trasformazione, non risulta totalmente affidabile a causa di singolarità ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$) e non ortogonalità della matrice stessa.

Una soluzione a questo problema è data dall'utilizzo di una rappresentazione a quaternioni, che permette di costruire una matrice ortogonale non affetta da singolarità.

Questo tipo di rappresentazione è basata su quattro parametri (un versore e tre angoli), che permettono di esprimere un generico passaggio di coordinate come una singola rotazione di un angolo δ , attorno ad un versore λ .

La definizione formale è la seguente:

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\delta}{2} \\ q_1 = \lambda_1 \sin \frac{\delta}{2} = \cos \alpha \sin \frac{\delta}{2} \\ q_2 = \lambda_2 \sin \frac{\delta}{2} = \cos \beta \sin \frac{\delta}{2} \\ q_3 = \lambda_3 \sin \frac{\delta}{2} = \cos \gamma \sin \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

dove con gli angoli α , β e γ si definisce l'orientazione del versore.

Riprendendo la definizione (1.1) utilizzata per la C_b^n , la corrispondenza tra le due definizioni è la seguente:

$$\begin{aligned} C_b^n &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c(\theta) c(\psi) & c(\psi) s(\theta) s(\varphi) - s(\psi) c(\varphi) & c(\psi) s(\theta) c(\varphi) + s(\psi) s(\varphi) \\ s(\psi) c(\theta) & s(\psi) s(\theta) s(\varphi) + c(\psi) c(\varphi) & -c(\psi) s(\varphi) + s(\psi) s(\theta) c(\varphi) \\ -s(\theta) & c(\theta) s(\varphi) & c(\theta) c(\varphi) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove le componenti q_i soddisfano la seguente condizione di ortogonalità:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

L'evoluzione temporale del vettore q è descritta dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & -\omega_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dove con ω_i si indicano le componenti del vettore di velocità angolare ω fornito.

In Figura (4.5) è visibile l'implementazione delle equazioni precedenti. Le condizioni iniziali di integrazione sono fornite da workspace come un vettore di tre componenti che identifica la configurazione iniziale degli Angoli di Eulero.

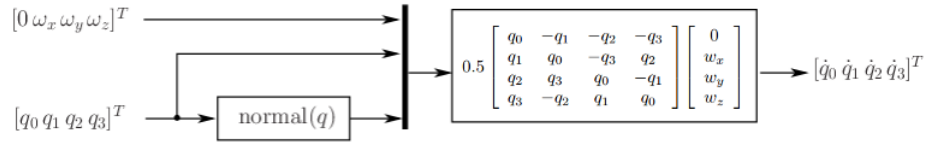


Figura 4.5: Definizione Quaternioni

4.3 Validazione del Modello di Errore

Per poter validare la meccanizzazione proposta, è stato implementato uno schema Simulink comprendente le evoluzioni temporali di tutte e tre le grandezze (assetto, velocità e posizione).

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi \times \omega_{i/e}^n - \varepsilon^n \\ \delta \dot{v}^n = f^n \times \phi + \delta f^n \times \phi + \delta f^n \\ \delta \dot{p}^n = \delta v^n \end{cases}$$

4.3.1 Assetto

Si consideri l'errore di assetto. L'idea è quella di implementare una meccanizzazione tempo discreta tramite quaternioni - TD - utilizzata con due input differenti: il primo coinciderà con la velocità angolare della piattaforma $\omega_{i/b}^b$, mentre il secondo con $\bar{\omega}_{i/b}^b$ e quindi considerando la corruzione dei vari errori di misura. La differenza tra i due output, fornirà una $\delta\omega_{i/b}^b$ che verrà utilizzata per la validazione del modello dell'errore.

$$\bar{\omega}_{i/b}^b - \omega_{i/b}^b = \delta\omega_{i/b}^b$$

La meccanizzazione TD implementata con il solo segnale di velocità angolare (non corrotto), a partire dal vettore $\dot{\mathbf{q}}$, è necessaria per ricavare la matrice di rotazione esatta C_b^n e gli angoli di eulero φ, θ, ψ . La meccanizzazione implementata invece con il segnale di velocità angolare corrotto, permette di ricavare quella che è stata definita nella (2.3) come matrice di rotazione misurata \bar{C}_b^n . La differenza matriciale di queste due rotazioni tra frame fornirà l'errore ϕ .

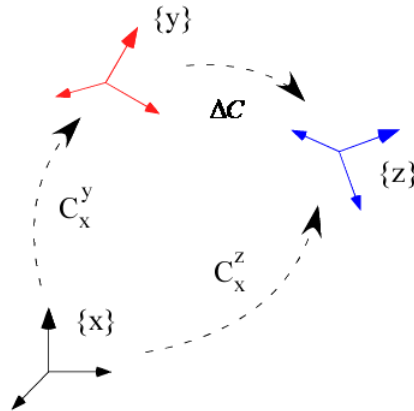


Figura 4.6: Differenza Matriciale

Sviluppando la composizione di rotazioni in Fig.(4.6):

$$C_x^z = \Delta C C_x^y = [I - \phi \times] C_x^y$$

Da cui

$$\Delta C = C_x^{y^T} C_x^z = I - \phi \times$$

Quindi

$$\phi \times = I - \Delta C$$

Nello specifico caso in esame si avrà:

$$(\phi \times) = I - (C_b^{nT} \bar{C}_b^n) \quad (4.5)$$

In questo modo, utilizzando gli angoli ricavati dalla meccanizzazione esatta (φ, θ, ψ) , la matrice ϕ , e considerando:

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \\ \bar{\theta} = \theta + \delta\theta \\ \bar{\psi} = \psi + \delta\psi \end{cases}$$

si ottiene¹:

$$\begin{cases} \delta\varphi = -\frac{s\psi\phi_y + c\psi\phi_x}{c\theta} \\ \delta\theta = -c\psi\phi_y + s\psi\phi_x \\ \delta\psi = -\phi_z + (-c\psi\phi_x - s\psi\phi_y)t\theta \end{cases} \quad (4.6)$$

che rappresentano gli errori angolari sui tre assi. In Figura(4.7) viene mostrato lo schema implementativo della meccanizzazione con e senza corruzione.

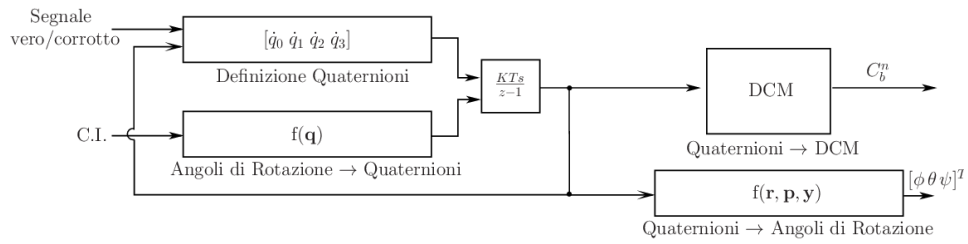
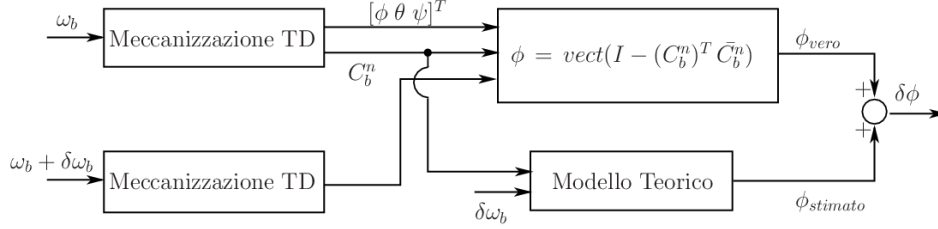


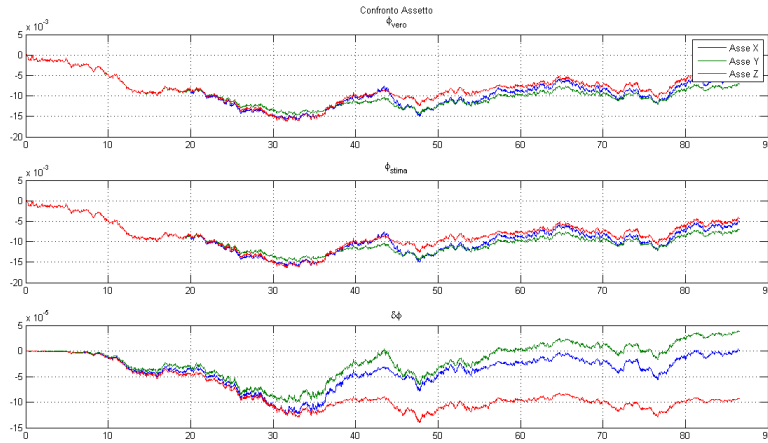
Figura 4.7: Meccanizzazioni TD

Per effettuare la validazione è stato effettuato il confronto tra il risultato appena ottenuto e quello derivante dall'implementazione della prima equazione del sistema di inizio sezione, che corrisponderà ad un vettore ϕ stimato (come visibile in Fig.(4.8)).

¹Si veda Appendice B per la dimostrazione

Figura 4.8: Modello Simulink ϕ

Si verifica che l'output $\delta\phi$ è due ordini di grandezza inferiore ai singoli segnali considerati, Fig.(4.9) , per cui tale modello è da considerarsi validato. Nel caso in cui questa circostanza non fosse verificata ed i due segnali fossero equivalenti in termini di ordine di grandezza, la predizione dell'errore non potrebbe essere considerata del tutto attendibile e sarebbe necessario effettuare nuovamente lo studio considerando un modello teorico differente.

Figura 4.9: Errore $\delta\phi$

4.4 Velocità e Posizione

Lo stesso ragionamento effettuato per il calcolo della stima degli errori angolari, viene utilizzato per ricavare quelli di velocità e posizione. Le equazioni utilizzate per la meccanizzazione *esatta* sono:

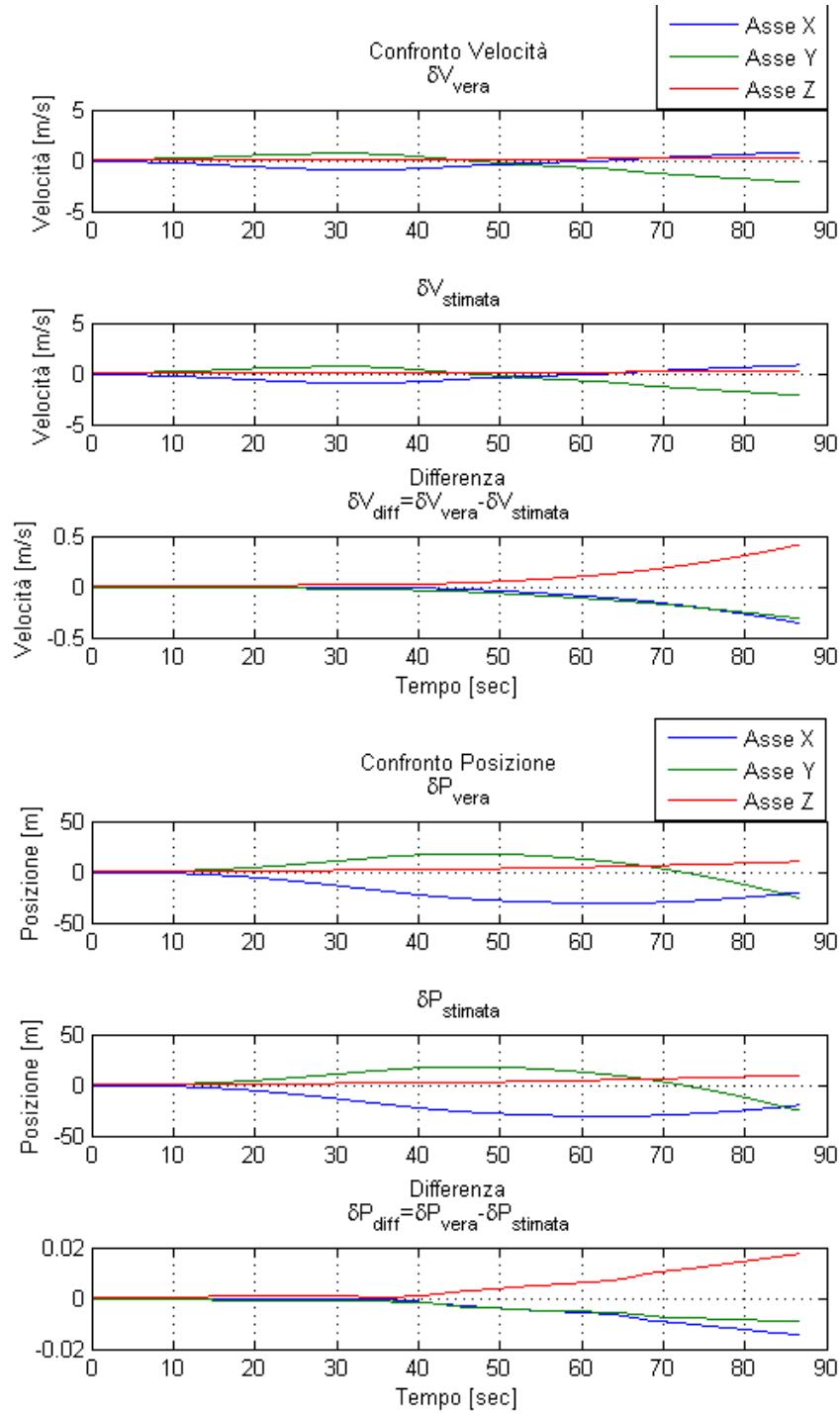
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{g}^n + C_b^n \mathbf{f}^b - \boldsymbol{\omega}_{i/e}^n \times \mathbf{v}^n \\ \dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{v}^n \end{cases}$$

Da cui si ricava l'errore di velocità e posizione

$$\delta \mathbf{v}^n = \int \dot{\mathbf{v}}^n - \dot{\hat{\mathbf{v}}}^n dt \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{p}^n = \int \delta \mathbf{v}^n dt$$

Non essendo presente un prodotto vettore diretto per il calcolo delle grandezze in questione (come nel caso dell'assetto) viene effettuata una differenza semplice tra posizioni e velocità effettive e misurate. La validazione, anche in questo caso deriva dal confronto tra l'errore calcolato e la stima di quest ultimo uscente dall'equazione teorica: $\delta \mathbf{p} = \delta f_n - \phi \times f_n + \delta f_n \times \phi$.

Essendo l'errore tra i due segnali inferiore di due ordini di grandezza rispetto ai singoli segnali considerati, il modello risulta validato.

Figura 4.10: Errore $\delta \mathbf{p} - \delta \mathbf{v}$

4.5 Validazione della Predizione di Errore e PSE

Per verificare la correttezza delle equazioni di predizione degli errori, occorre:

- singolarmente, validare le equazioni analitiche di stima per ciascuna sorgente;
- nel complesso, verificare/validare se sull'insieme delle equazioni analitiche valga il principio di sovrapposizione degli effetti.

La prima analisi è stata effettuata su ciascun output: assetto, velocità, posizione.

La singola realizzazione per ogni tipo di corruzione, deve dar luogo ad una predizione perfetta. L'output dello schema Simulink deve essere quindi, a meno di errori numerici di simulazione, coincidente con la banda costruita a partire dalle equazioni del modello. Senza perdita di generalità, i risultati di questo singolo punto saranno proposti in norma.

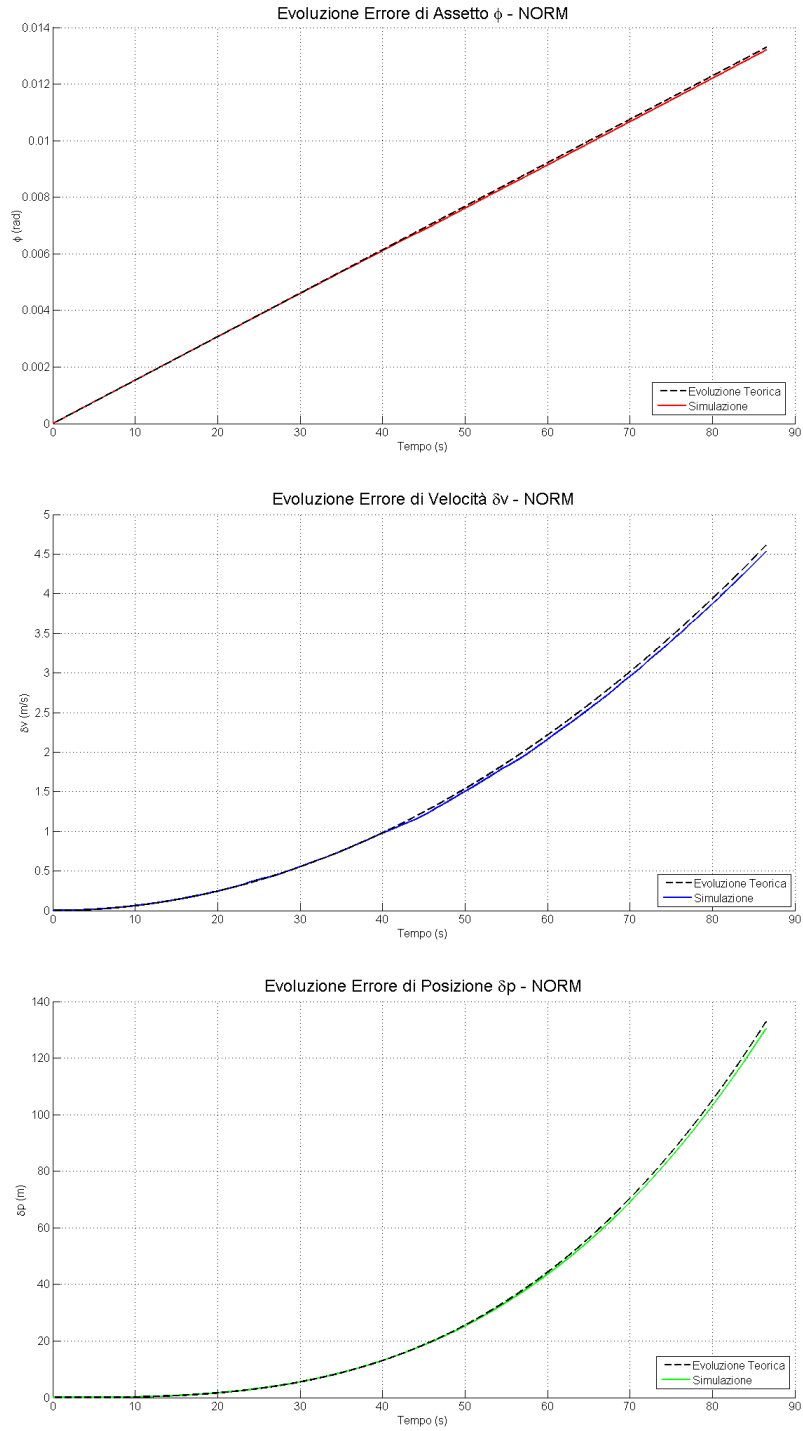


Figura 4.11: Validazione banda teorica - BIAS GYRO

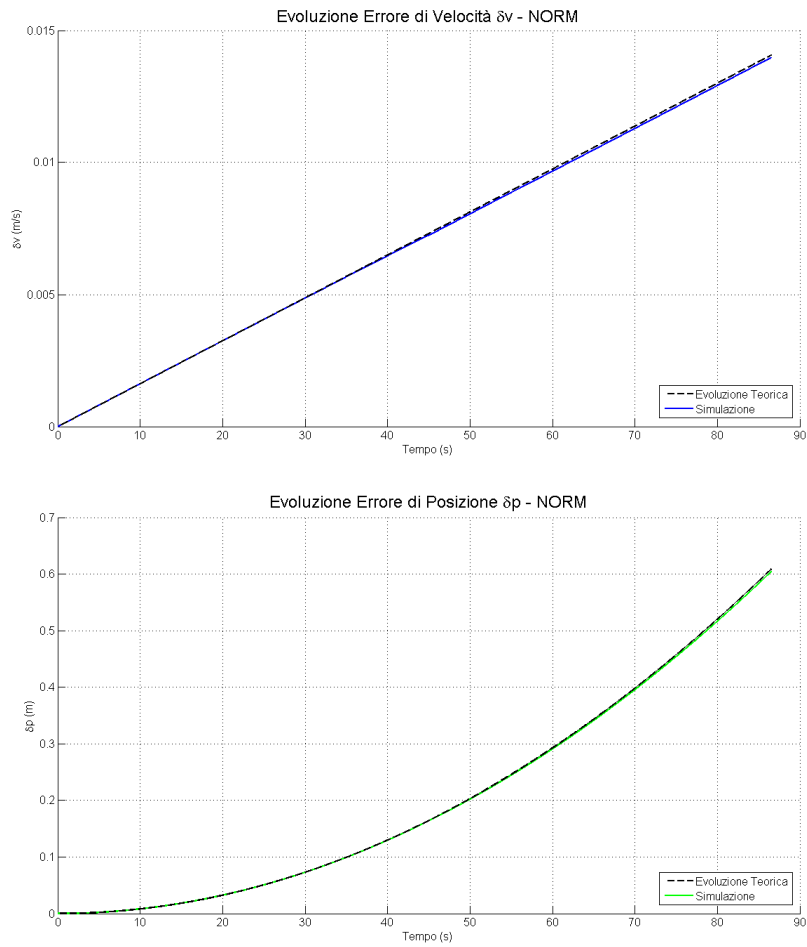


Figura 4.12: Validazione banda teorica - BIAS ACC

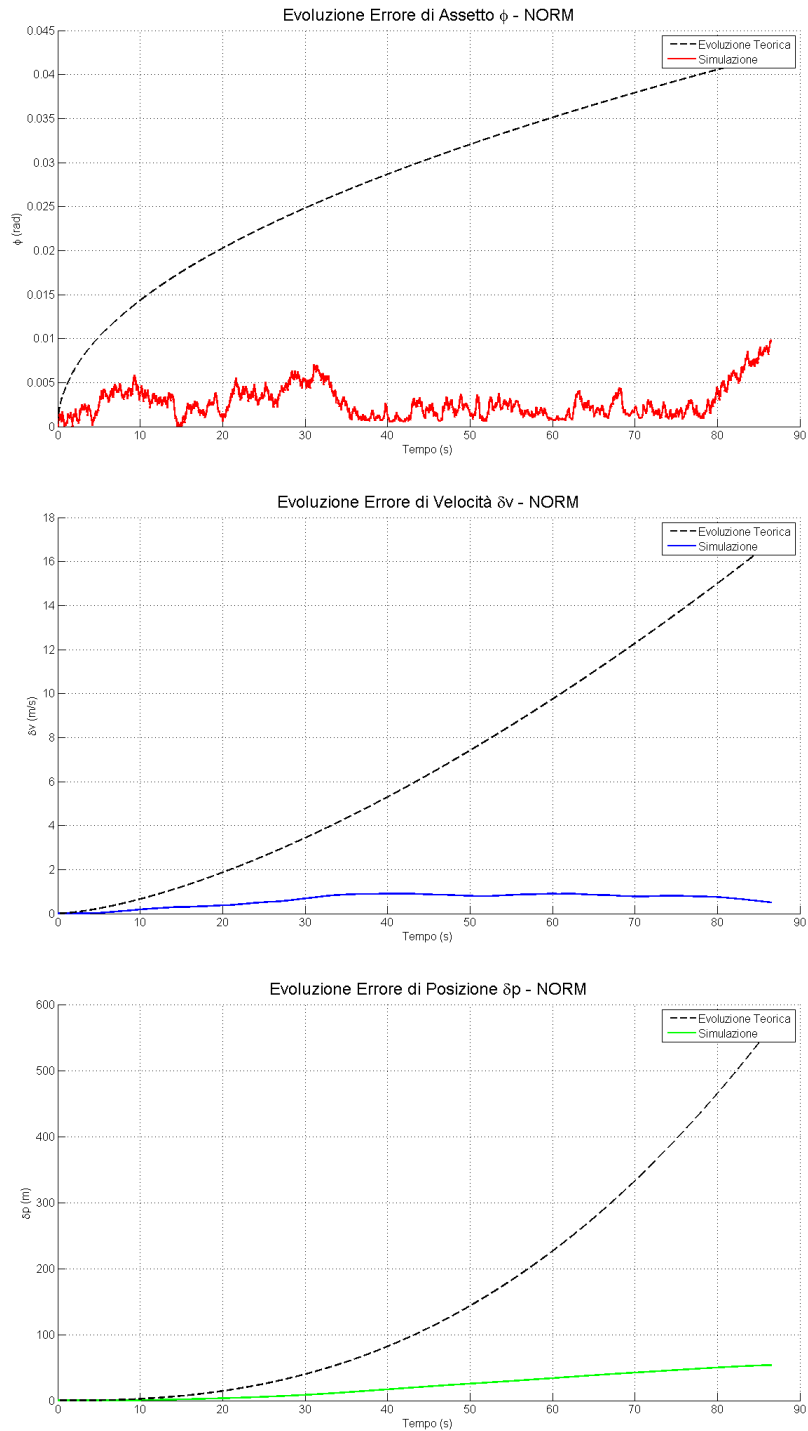


Figura 4.13: Validazione banda teorica - WN GYRO

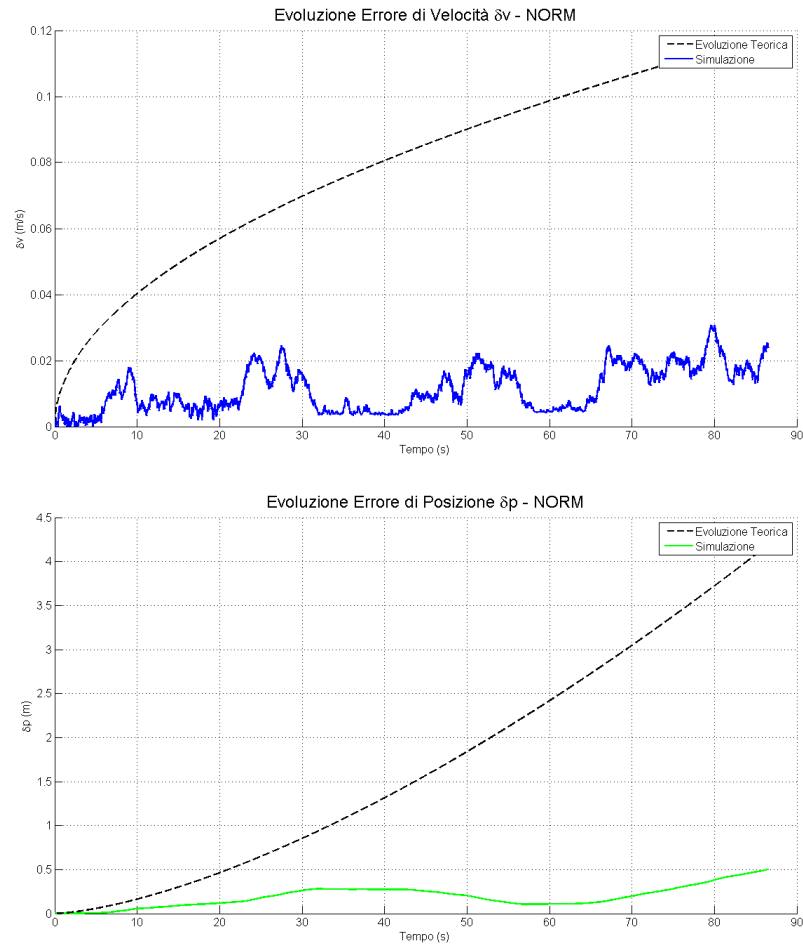


Figura 4.14: Validazione banda teorica - WN ACC

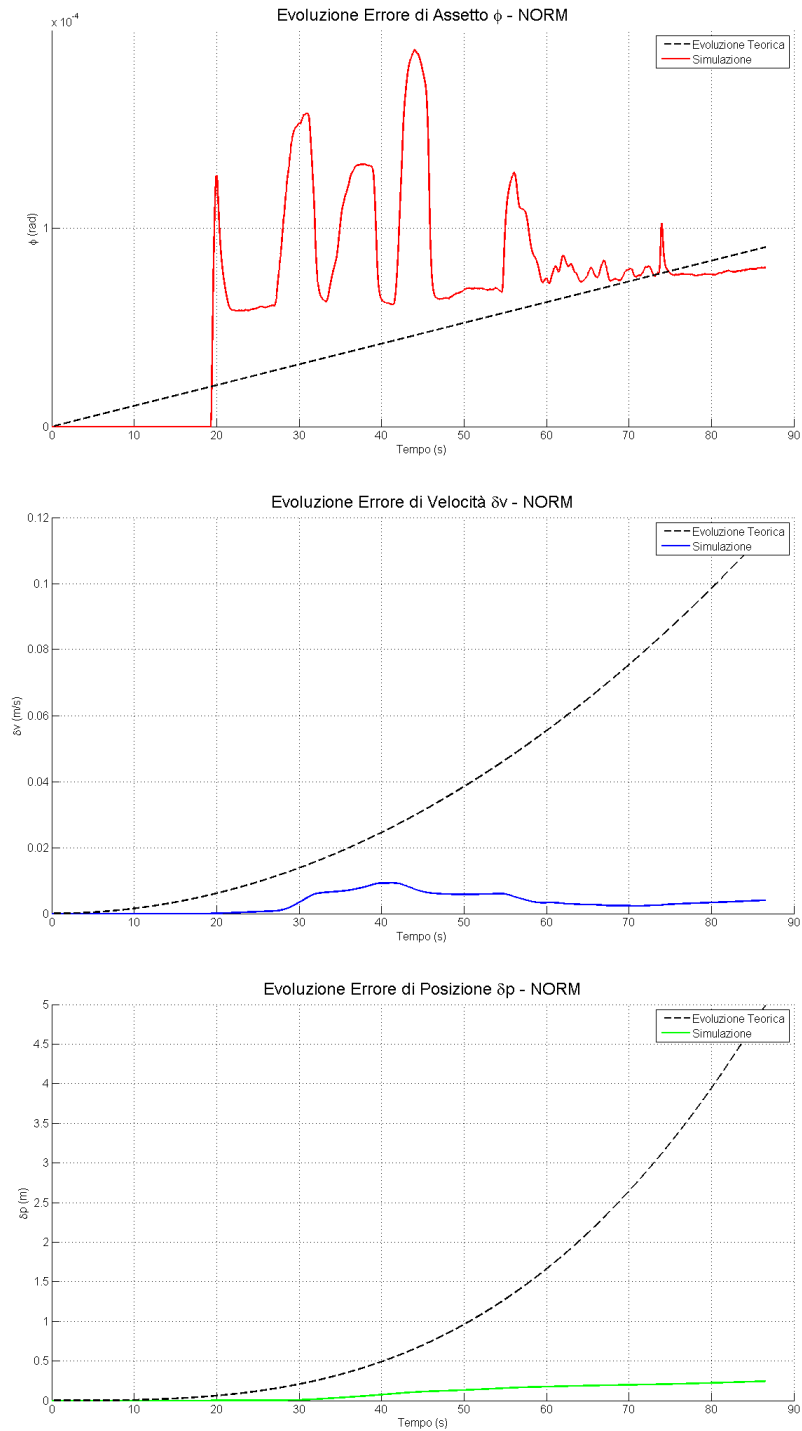


Figura 4.15: Validazione bande teoriche - SF GYRO

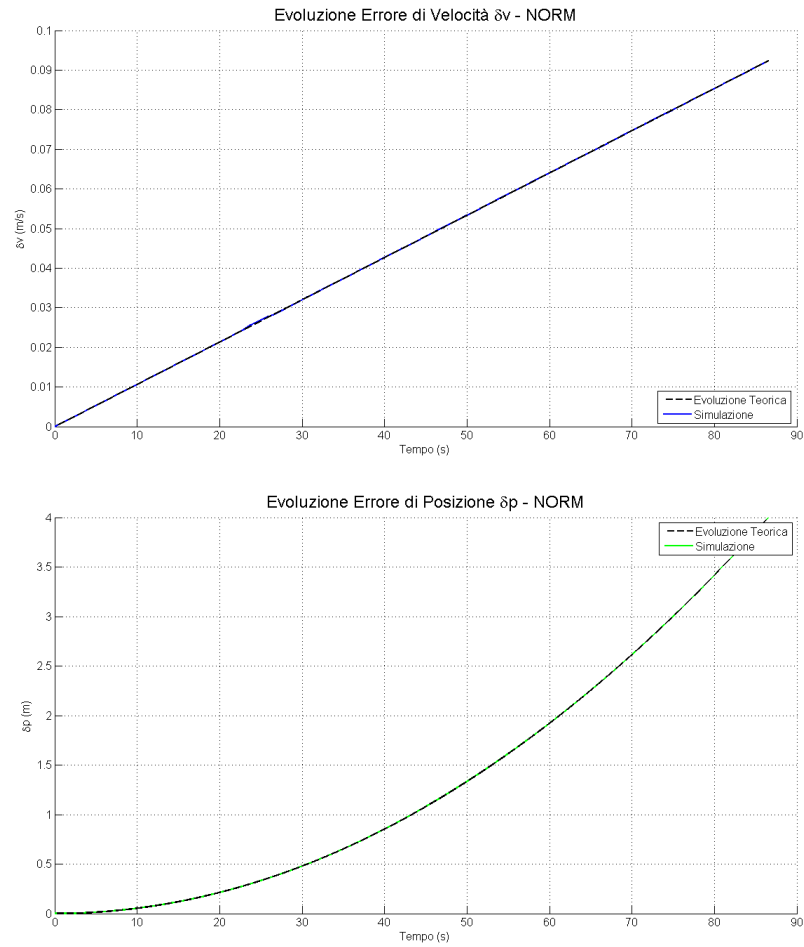


Figura 4.16: Validazione bande teoriche - SF ACC

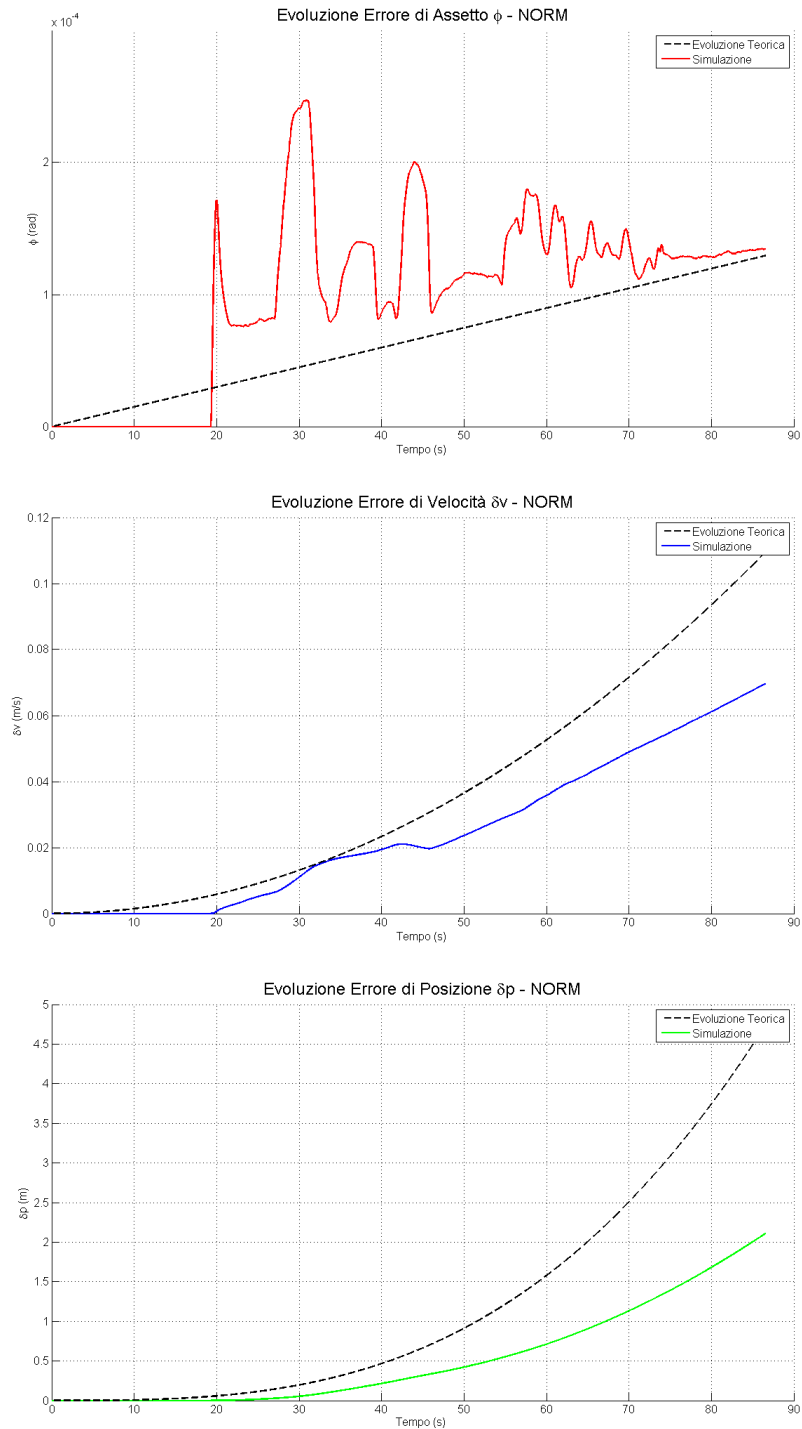


Figura 4.17: Validazione bande teoriche - MIS GYRO

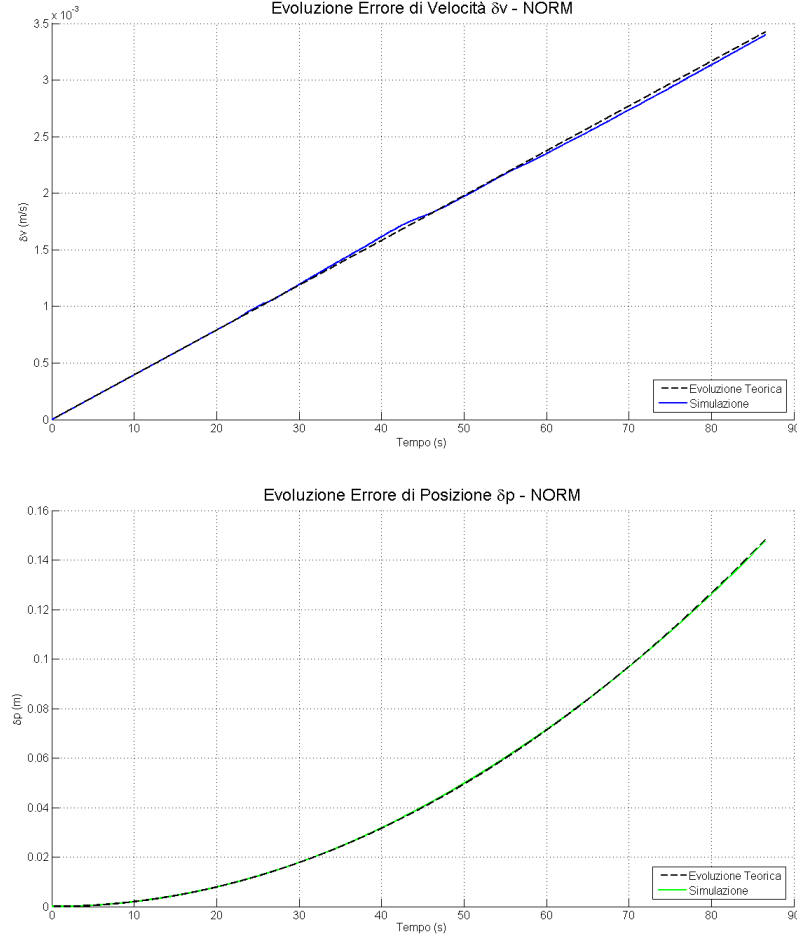


Figura 4.18: Validazione bande teoriche - MIS ACC

In realtà, come si può notare nelle Fig.(4.13, 4.14, 4.15, 4.17) la coincidenza non viene sempre verificata ed i motivi sono principalmente due:

1. Per quanto riguarda il White Noise, la definizione stessa ne garantisce la casualità e quindi la sovrapposizione alla banda non è garantita;
2. In caso di Scale Factor e Axis Misalignment lo scostamento dal comportamento ideale è da attribuirsi al fatto che, nel calcolo della banda teorica di assetto, viene utilizzata la media della velocità angolare, mentre l'errore da predire (output della simulazione) dipende direttamente dal modello utilizzato. Tale effetto non risulterà influente nel caso di velocità e posizione in quanto l'integrazione (doppia nel caso della posizione) ha effetto passa-basso sul segnale.

Per verificare la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, sono state effettuate simulazioni montecarlo. In questo caso, rispetto al preceden-

te, sono state considerate tutte le corruzioni di accelerometro e di giroscopio. I valori di riferimento per le sorgenti di errore (si veda Fig.4.2), sono riferiti al datasheet del sensore inerziale preso in esame per il progetto². Mantenendo costanti questi valori nelle realizzazioni, però, l'unico parametro che introduce variabilità risulta il rumore bianco. Per ovviare a questo problema sono state implementate distribuzioni uniformi dalle quali, ad ogni realizzazione, viene estratto un valore di riferimento ϵ da dare in input allo schema Simulink. La definizione di tali intervalli è la seguente:

$$-|DS| \leq \epsilon \leq |DS|$$

dove con DS si intende il valore da datasheet del singolo errore considerato. In Fig.(4.19) si nota che su 5000 realizzazioni complessive, tranne che sulla terza componente di velocità e posizione, si ha il rispetto della specifica imposta del 95% delle realizzazioni all'interno della banda teorica.

Analizzando le equazioni teoriche esposte precedentemente nella (2.8), come più volte sottolineato, si riscontra come l'incidenza dell'accelerazione della piattaforma (Fig.4.4), in velocità e posizione, sia in componenti miste. Il prodotto vettore garantisce che non compaia quindi la gravità (e di conseguenza la componente di accelerazione che risulta essere maggiore) sulla terza componente. Questo porta ad una stima della banda teorica sul terzo asse leggermente inferiore rispetto a quello che si verifica in realtà dalle simulazioni. Calcolando la percentuale di realizzazioni che non soddisfano le specifiche stimate si ottiene³:

- Velocità : 12,8% di realizzazioni esterne alla predizione;
- Posizione : 11,8%.

E' possibile verificare che aumentando il numero di simulazioni questa percentuale diminuisce e la predizione migliora. Nel caso, ad esempio di 10000 realizzazioni si ha:

- Velocità: 9.2%;
- Posizione: 10.5%.

Un'altra analisi in conclusione allo studio precedente è il calcolo del contributo che ogni singola sorgente di corruzione apporta all'errore totale su tutte e tre le grandezze. In Fig.(4.20, 4.21, 4.22) vengono mostrate tre tabelle in cui: nella colonna 'DataSheet' viene riportato il valore di targa, nella colonna 'Contributo Totale' il calcolo del contributo effettivo dei singoli errori suddiviso per assi.

²IG 500A - SBG System

³Codice riportato in Appendice

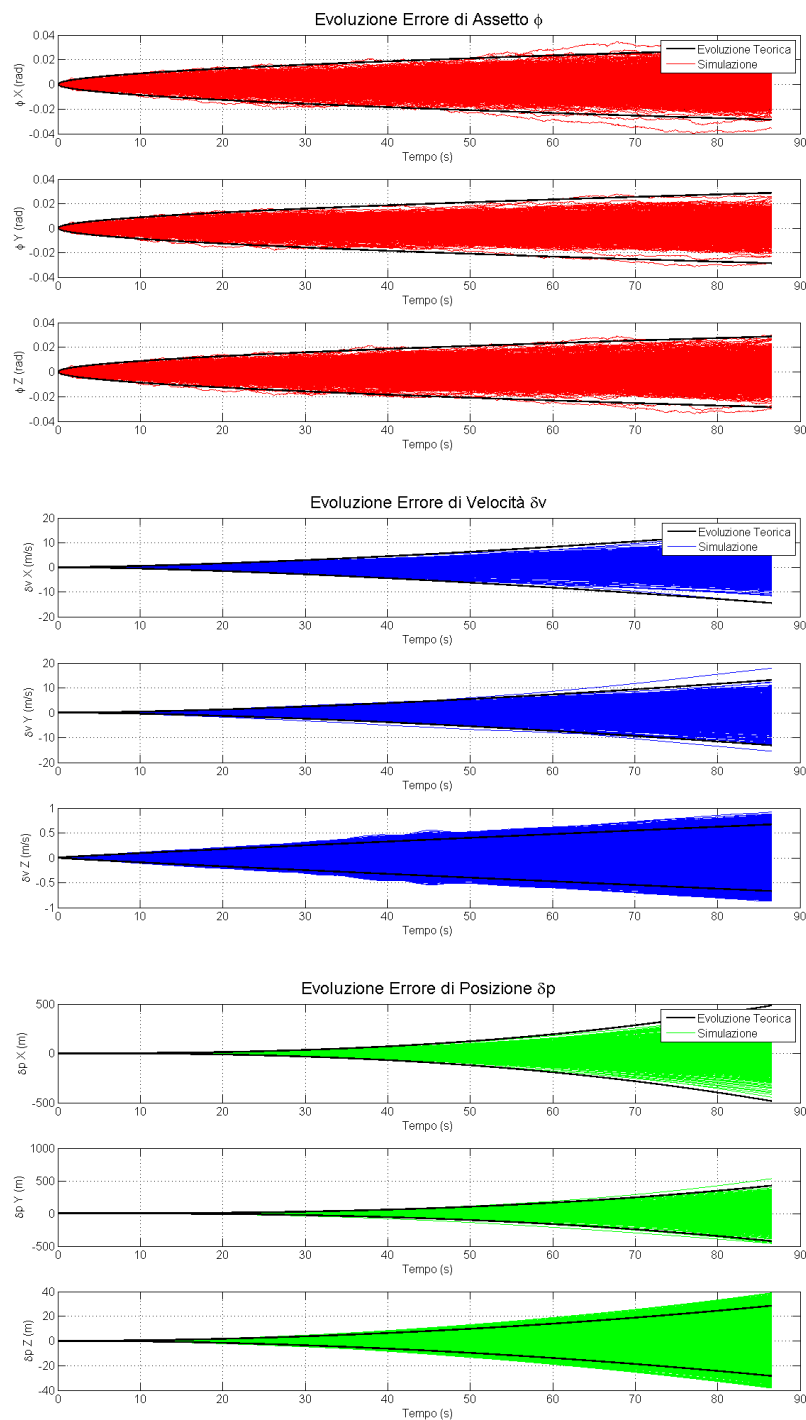


Figura 4.19: Simulazioni Montecarlo: 5000 realizzazioni

'ASSETTO'	'DATASHEET'	'Contributo Totale'
'White Noise Acc'	[0.0025]	[0]
'Bias Acc'	[6.0000e-04]	[0]
'Scale Factor X Acc'	[1.0000e-03]	[0]
'Scale Factor Y Acc'	[1.0000e-03]	[0]
'Scale Factor Z Acc'	[1.0000e-03]	[0]
'Misalignment X Acc'	[8.7266e-04]	[0]
'Misalignment Y Acc'	[8.7266e-04]	[0]
'Misalignment Z Acc'	[8.7266e-04]	[0]
'White Noise Gyro X'	[8.7266e-04]	[0.0081]
'White Noise Gyro Y'	[8.7266e-04]	[0.0081]
'White Noise Gyro Z'	[8.7266e-04]	[0.0081]
'Bias X Gyro'	[9.6963e-05]	[-0.0084]
'Bias Y Gyro'	[9.6963e-05]	[-0.0084]
'Bias Z Gyro'	[9.6963e-05]	[-0.0084]
'Scale Factor X Gyro'	[5.0000e-04]	[-3.0524e-07]
'Scale Factor Y Gyro'	[5.0000e-04]	[1.3776e-05]
'Scale Factor Z Gyro'	[5.0000e-04]	[9.9658e-05]
'Mis. X Gyro'	[8.7266e-04]	[1.9798e-04]
'Mis. Y Gyro'	[8.7266e-04]	[1.7340e-04]
'Mis. Z Gyro'	[8.7266e-04]	[2.3512e-05]
'Contributo Massimo Gyro X'		[0.0084]
'Contributo Massimo Gyro Y'		[0.0084]
'Contributo Massimo Gyro Z'		[0.0084]
'Contributo Massimo Acc'		[0]

Figura 4.20: Contributo Errori - Assetto

'VELOCITA'	'DATASHEET'	'Contributo Totale'
'White Noise Acc'	[0.0025]	[0.0228]
'Bias Acc'	[6.0000e-04]	[0.0519]
'Scale Factor X Acc'	[1.0000e-03]	[3.5613e-04]
'Scale Factor Y Acc'	[1.0000e-03]	[-1.9268e-05]
'Scale Factor Z Acc'	[1.0000e-03]	[-0.8485]
'Misalignment X Acc'	[8.7266e-04]	[-0.7405]
'Misalignment Y Acc'	[8.7266e-04]	[-0.7402]
'Misalignment Z Acc'	[8.7266e-04]	[2.9397e-04]
'White Noise Gyro X'	[8.7266e-04]	[-3.9796]
'White Noise Gyro Y'	[8.7266e-04]	[3.9812]
'White Noise Gyro Z'	[8.7266e-04]	[-0.0016]
'Bias X Gyro'	[9.6963e-05]	[-3.5620]
'Bias Y Gyro'	[9.6963e-05]	[3.5634]
'Bias Z Gyro'	[9.6963e-05]	[-0.0014]
'Scale Factor X Gyro'	[5.0000e-04]	[0.0844]
'Scale Factor Y Gyro'	[5.0000e-04]	[-0.0963]
'Scale Factor Z Gyro'	[5.0000e-04]	[3.5778e-05]
'Mis. X Gyro'	[8.7266e-04]	[0.1473]
'Mis. Y Gyro'	[8.7266e-04]	[-0.1681]
'Mis. Z Gyro'	[8.7266e-04]	[6.2444e-05]
'Contributo Massimo Gyro X'		[3.9796]
'Contributo Massimo Gyro Y'		[3.9812]
'Contributo Massimo Gyro Z'		[0.0016]
'Contributo Massimo Acc X'		[0.7405]
'Contributo Massimo Acc Y'		[0.7402]
'Contributo Massimo Acc Z'		[0.8485]

Figura 4.21: Contributo Errori - Velocità

'POSIZIONE'	'DATASHEET'	'Contributo Totale'
'White Noise Acc'	[0.0025]	[0.8058]
'Bias Acc'	[6.0000e-04]	[2.2459]
'Scale Factor X Acc'	[1.0000e-03]	[0.0154]
'Scale Factor Y Acc'	[1.0000e-03]	[-8.3357e-04]
'Scale Factor Z Acc'	[1.0000e-03]	[-36.7090]
'Misalignement X Acc'	[8.7266e-04]	[-32.0354]
'Misalignement Y Acc'	[8.7266e-04]	[-32.0212]
'Misalignement Z Acc'	[8.7266e-04]	[0.0127]
'White Noise Gyro X'	[8.7266e-04]	[-133.3576]
'White Noise Gyro Y'	[8.7266e-04]	[133.4114]
'White Noise Gyro Z'	[8.7266e-04]	[-0.0537]
'Bias X Gyro'	[9.6963e-05]	[-102.7324]
'Bias Y Gyro'	[9.6963e-05]	[102.7738]
'Bias Z Gyro'	[9.6963e-05]	[-0.0414]
'Scale Factor X Gyro'	[5.0000e-04]	[0.5056]
'Scale Factor Y Gyro'	[5.0000e-04]	[0.0103]
'Scale Factor Z Gyro'	[5.0000e-04]	[1.2682e-04]
'Mis. X Gyro'	[8.7266e-04]	[6.3709]
'Mis. Y Gyro'	[8.7266e-04]	[-7.2742]
'Mis. Z Gyro'	[8.7266e-04]	[0.0027]

Figura 4.22: Contributo Errori - Posizione

Si nota che:

- Assetto: il contributo maggiore è dato dall'errore di Bias su tutti e tre gli assi. Questo perchè, anche se da DataSheet si ha un valore di un ordine di grandezza minore rispetto ad esempio a ScaleFactor e Misalignment (rispettivamente 10^{-5} e 10^{-4}), questi ultimi (come da equazioni espresse in Sezione 3.1.2) vengono moltiplicati per la velocità angolare $\omega_{i/b}^b$ (sempre minore di uno) (Fig.4.3);
- Velocità: sugli assi X ed Y prevale la componente stocastica del giroscopio mentre sull'asse Z la deterministica dell'accelerometro. Questo perchè, per quanto riguarda il giroscopio, in velocità si ha il contributo additivo dell'accelerazione corrotta $\mathbf{F}^n + \delta\mathbf{F}^n$ (Sezione 3.2). Facendo riferimento alla Fig.(4.4), avendo nelle equazioni componenti incrociate date dal prodotto vettore, sui primi due assi ha influenza la terza componente dell'accelerazione (che risulta la più significativa per la presenza della gravità). Sul terzo asse invece prevale lo Scale Factor dell'accelerometro che, considerando le componenti lineari dell'accelerazione vera \mathbf{F}^n , ha sull'asse Z l'accelerazione maggiore;
- Posizione: rispetto alla velocità viene effettuata un'operazione di integrazione per cui rimangono validi i ragionamenti appena esposti.

4.6 Densità di Probabilità delle Singole Sorgenti di Errore

Volendo studiare gli istogrammi delle realizzazioni montecarlo per analizzare la densità di probabilità dell'errore, quello che ci si può aspettare è che vengano confermati i dati appena analizzati. Nel caso prevalga la componente deterministica rispetto a quella stocastica, la parte centrale dell'istogramma risulterà tendente ad una distribuzione uniforme mentre le code tenderanno ad un andamento gaussiano; in caso contrario invece (o comunque nel caso in cui i due contributi si bilancino) si avrà una campana simil gaussiana con la parte centrale più *'allargata'* che evidenzierà l'influenza degli errori uniformi. Quanto appena esposto può essere confermato osservando le Fig.(4.23, 4.24, 4.25) dove sono stati definiti gli istogrammi dei vari errori prendendo in considerazione tre tempi specifici per analizzare gli andamenti in fase di simulazione (1/3 - 2/3 - 3/3 del tempo totale).

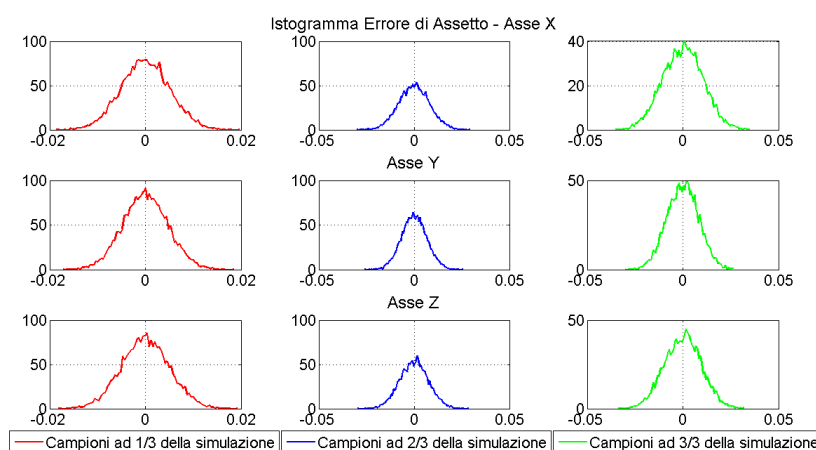


Figura 4.23: Istogramma Assetto - 3 Tempi

In Fig.(4.23) è visibile l'andamento dell'errore di assetto. Analizzando solamente gli istogrammi calcolati sui punti terminali della simulazione (che hanno corrispondenza con le tabelle sopraesposte) si può notare come sugli tutti e tre gli assi le componenti di Bias e White Noise si controbilancino, facendo risultare i due contributi praticamente equivalenti, dando luogo ad una campana gaussiana modificata dalla componente deterministica che ne allarga la parte centrale. Andamenti differenti si riscontrano invece nelle Fig.(4.24, 4.25) di velocità e posizione. Se si analizzano i tre assi in modo separato si ha:

- Assi X - Y: equivalenza delle due componenti (deterministica e gaussiana), che porta ad un andamento simile a quello visualizzato in assetto - ovviamente con scale di riferimento differenti;

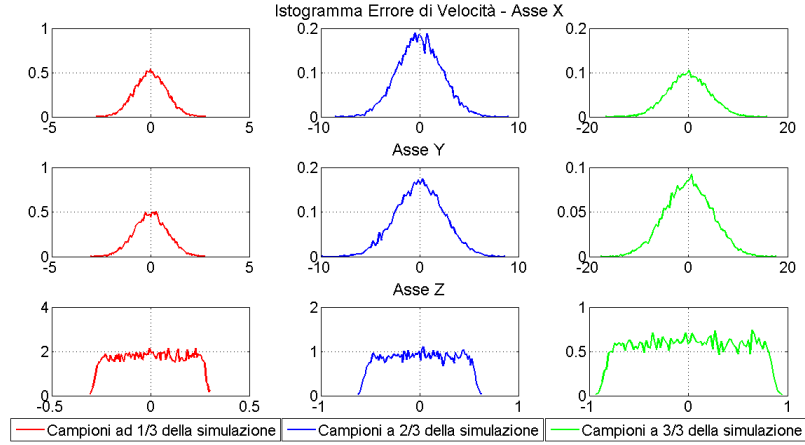


Figura 4.24: Istogramma Velocità - 3 Tempi

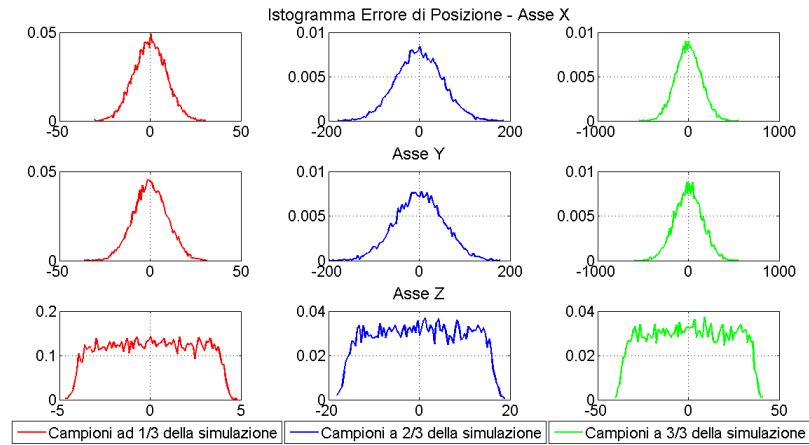


Figura 4.25: Istogramma Posizione - 3 Tempi

- Asse Z: dominanza della componente deterministica, che porta ad una visibile distribuzione uniforme nella parte centrale dell'istogramma con code gaussiane ai lati.

Capitolo 5

Conclusioni

Lo studio effettuato è servito a ricavare equazioni di evoluzione dell'errore di misura di giroscopi ed accelerometri in assetto, velocità e posizione per errori di tipo deterministico e stocastico (Bias, Scale Factor, Axis Misalignment e White Noise). Il modello di errore utilizzato è stato implementato e validato. E' risultato quindi che le stime teoriche predicessero in modo corretto il risultato delle simulazioni. E' stata inoltre effettuata una ricerca sul contributo di ogni singola corruzione all'errore totale ricavato, con una verifica di quanto trovato attraverso lo studio degli istogrammi delle tre grandezze. Una parentesi a parte è stata sviluppata per quanto riguarda l'errore di quantizzazione, che è stato verificato modellabile come un rumore stocastico e ne è stato valutato il contributo sulla digitalizzazione dei segnali di velocità angolare e accelerazione in ingresso al sistema. In conclusione vengono riportate le seguenti tabelle che riassumono le equazioni di stima sulla corruzione degli errori studiati.

5.1 Giroscopio

Nota: le componenti dell'accelerazione corrotta su ogni singolo asse sono miste (prodotto vettore).

Errori di Assetto $\phi(t)$

	<i>STSR</i>
<i>Bias Instability</i>	$\mathbf{B}_g t$
<i>Scale Factor</i>	$SF_g \delta \mathbf{H}$
<i>Axis Misalignment</i>	$MIS_g \delta \mathbf{H}$
<i>Random Walk</i>	$\sigma_\phi = \begin{bmatrix} \sigma_{wnx} \sqrt{t} \\ \sigma_{wny} \sqrt{t} \\ \sigma_{wnz} \sqrt{t} \end{bmatrix}$

Errori di Velocità $\delta \mathbf{v}^n(t)$

	<i>STSR</i>
<i>Bias Instability</i>	$\frac{1}{2} B_g \mathbf{F} t^2$
<i>Scale Factor</i>	$SF_g \delta \mathbf{H} \mathbf{F} t$
<i>Axis Misalignment</i>	$\delta \dot{\mathbf{v}} t$
<i>Random Walk</i>	$\sigma_{vg} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{F} \sigma_{wn} \sqrt{t^3}$

Specificando le componenti sulle varianze del Random Walk:

$$\sigma_{vg} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} [(\ddot{x}_z - g + \delta \ddot{x}_z - \delta g) \sigma_{wny} - (\ddot{x}_y + \delta \ddot{x}_y) \sigma_{wnz}] \sqrt{t^3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} [-(\ddot{x}_z - g + \delta \ddot{x}_z - \delta g) \sigma_{wnx} + (\ddot{x}_x + \delta \ddot{x}_x) \sigma_{wnz}] \sqrt{t^3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} [(\ddot{x}_y + \delta \ddot{x}_y) \sigma_{wnx} - (\ddot{x}_x + \delta \ddot{x}_x) \sigma_{wny}] \sqrt{t^3} \end{bmatrix}$$

Errori di Posizione $\delta \mathbf{p}^n(t)$

	<i>STSR</i>
<i>Bias Instability</i>	$\frac{1}{6} B_g \mathbf{F} t^3$
<i>Scale Factor</i>	$\frac{1}{2} SF_g \delta \mathbf{H} \mathbf{F} t^2$
<i>Axis Misalignment</i>	$\frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{v}} t^2$
<i>Random Walk</i>	$\sigma_{pg} = \frac{1}{\sqrt{20}} \mathbf{F} \sigma_{wn} \sqrt{t^5}$

Specificando le componenti sulle varianze del Random Walk:

$$\sigma_{pg} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20}[(\ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g) \sigma_{wny} - (\ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y) \sigma_{wnz}] \sqrt{t^5} \\ \frac{1}{20}[-(\ddot{x}_z - g + \delta\ddot{x}_z - \delta g) \sigma_{wnx} + (\ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x) \sigma_{wnz}] \sqrt{t^5} \\ \frac{1}{20}[(\ddot{x}_y + \delta\ddot{x}_y) \sigma_{wnx} - (\ddot{x}_x + \delta\ddot{x}_x) \sigma_{wny}] \sqrt{t^5} \end{bmatrix}$$

5.2 Accelerometro

Nota: le componenti dell'accelerazione non corrotta sono quelle rispettive all'asse considerato.

Errori di Velocità $\delta \mathbf{v}^n(t)$

	<i>STSR</i>
<i>Bias Instability</i>	$\mathbf{B}_a t$
<i>Scale Factor</i>	$SF_a \mathbf{F}^n t$
<i>Axis Misalignment</i>	$MIS_a \mathbf{F}^n t$
<i>Random Walk</i>	$\boldsymbol{\sigma}_{va} = \begin{bmatrix} \sigma_{wnx} \sqrt{t} \\ \sigma_{wny} \sqrt{t} \\ \sigma_{wnz} \sqrt{t} \end{bmatrix}$

Errori di Posizione $\delta \mathbf{p}^n(t)$

	<i>STSR</i>
<i>Bias Instability</i>	$\frac{1}{2} \mathbf{B}_a t^2$
<i>Scale Factor</i>	$\frac{1}{2} SF_a \mathbf{F}^n t^2$
<i>Axis Misalignment</i>	$\frac{1}{2} MIS_a \mathbf{F}^n t^2$
<i>Random Walk</i>	$\boldsymbol{\sigma}_{pa} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \sigma_{wnx} \sqrt{t^3} \\ \frac{1}{6} \sigma_{wny} \sqrt{t^3} \\ \frac{1}{6} \sigma_{wnz} \sqrt{t^3} \end{bmatrix}$

Appendice A

Unità di misura

Dal punto di vista dimensionale tutti gli errori sono stati espressi secondo il Sistema Internazionale. In realtà, nei data sheet si trovano unità di misura differenti che risultano più agevoli per l'utilizzo operativo numerico (Tab. sottostante).

<i>TIPO DI ERRORE</i>	SI_a	$DataSheet_a$	SI_g	$DataSheet_g$
<i>Bias Instability</i>	$\frac{m}{s^2}$	mg	$\frac{m}{s}$	$\frac{^\circ}{h}$
<i>Scale Factor</i>	-	$ppm = \frac{m/s^2}{10^6 m/s^2}$	-	$ppm = \frac{m/s}{10^6 m/s}$
<i>Axis Misalignment</i>	rad	rad	rad	rad
<i>Angle Random Walk</i>	$/$	$/$	$\frac{rad}{\sqrt{s}}$	$\frac{^\circ}{\sqrt{h}}$
<i>Velocity Random Walk</i>	$\frac{m/s}{\sqrt{s}}$	$\frac{m/s}{\sqrt{h}}$	$/$	$/$

Appendice B

Dimostrazione errori di assetto

Gli errori di assetto angolari possono essere espressi come una funzione del vettore di disallineamento $\phi = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$. Si supponga che il vettore ϕ sia noto, mentre il vettore $[\delta\varphi \ \delta\theta \ \delta\psi]^T$ sia incognito. Gli angoli di titl possono essere definiti attraverso la matrice di rotazione \bar{C}_b^n misurata come segue:

$$\bar{C}_b^n = [I - \phi \times] C_b^n$$

$$\left\{ \begin{aligned} [I - \phi \times] &= \begin{bmatrix} 1 & \phi_z & -\phi_y \\ -\phi_z & 1 & \phi_x \\ \phi_y & -\phi_x & 1 \end{bmatrix} \\ C_b^n &= \begin{bmatrix} c(\theta) c(\psi) & c(\psi) s(\theta) s(\varphi) - s(\psi) c(\varphi) & c(\psi) s(\theta) c(\varphi) + s(\psi) s(\varphi) \\ s(\psi) c(\theta) & s(\psi) s(\theta) s(\varphi) + c(\psi) c(\varphi) & -c(\psi) s(\varphi) + s(\psi) s(\theta) c(\varphi) \\ -s(\theta) & c(\theta) s(\varphi) & c(\theta) c(\varphi) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$\bar{C}_b^n = \begin{bmatrix} c(\theta) c(\psi) + \phi_z s(\psi) c(\theta) + s(\theta) & \dots \\ -\phi_z c(\theta) c(\psi) + s(\psi) c(\theta) - \phi_x s(\theta) & \dots \\ \phi_y c(\theta) c(\psi) - \phi_x s(\psi) c(\theta) - s(\theta) & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dots & c(\psi) s(\theta) s(\varphi) - s(\psi) c(\varphi) + \phi_z (s(\psi) s(\theta) s(\varphi) + c(\psi) c(\varphi)) - \phi_y (c(\theta) s(\varphi)) & \dots \\ \dots & -\phi_z (c(\psi) s(\theta) s(\varphi) - s(\psi) c(\varphi)) + s(\psi) s(\theta) s(\varphi) + c(\psi) c(\varphi) + \phi_x (c(\theta) s(\varphi)) & \dots \\ \dots & \phi_y (c(\psi) s(\theta) s(\varphi) - s(\psi) c(\varphi)) - \phi_x (s(\psi) s(\theta) s(\varphi) + c(\psi) c(\varphi)) + c(\theta) s(\varphi) & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots & c(\psi) s(\theta) c(\varphi) + s(\psi) s(\varphi) + \phi_z (-c(\psi) s(\varphi) + s(\psi) s(\theta) c(\varphi)) - \phi_y (c(\theta) c(\varphi)) \\ \dots & -\phi_z (c(\psi) s(\theta) c(\varphi) + s(\psi) s(\varphi)) - c(\psi) s(\varphi) + s(\psi) s(\theta) c(\varphi) + \phi_x (c(\theta) c(\varphi)) \\ \dots & \phi_y (c(\psi) s(\theta) c(\varphi) + s(\psi) s(\varphi)) - \phi_x (-c(\psi) s(\varphi) + s(\psi) s(\theta) c(\varphi)) + c(\theta) c(\varphi) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \dots \\ \dots \\ \dots \end{aligned}} \right]$$

L'uguaglianza che deve essere verificata è tra la \bar{C}_b^n precedente e:

$$\bar{C}_b^n = \begin{bmatrix} c(\bar{\theta}) c(\bar{\psi}) & c(\bar{\psi}) s(\bar{\theta}) s(\bar{\varphi}) - s(\bar{\psi}) c(\bar{\varphi}) & c(\bar{\psi}) s(\bar{\theta}) c(\bar{\varphi}) + s(\bar{\psi}) s(\bar{\varphi}) \\ s(\bar{\psi}) c(\bar{\theta}) & s(\bar{\psi}) s(\bar{\theta}) s(\bar{\varphi}) + c(\bar{\psi}) c(\bar{\varphi}) & -c(\bar{\psi}) s(\bar{\varphi}) + s(\bar{\psi}) s(\bar{\theta}) c(\bar{\varphi}) \\ -s(\bar{\theta}) & c(\bar{\theta}) s(\bar{\varphi}) & c(\bar{\theta}) c(\bar{\varphi}) \end{bmatrix}$$

dove gli angoli di roll, pitch e yaw:

$$\begin{cases} \bar{\psi} = \psi + \delta\psi \\ \bar{\theta} = \theta + \delta\theta \\ \bar{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \end{cases}$$

Si consideri il termine (3,1) della matrice di rotazione precedente:

$$\bar{C}_b^n(3,1) = \phi_y c(\theta) c(\psi) - \phi_x c(\theta) s(\psi) - s(\theta)$$

$$\bar{C}_b^n(3,1) = -s(\bar{\theta}) = -s(\theta + \delta\theta) = -s(\theta) c(\delta\theta) - s(\delta\theta) c(\theta)$$

per piccoli angoli vale:

$$\begin{cases} c(\delta\theta) \cong 1 \\ s(\delta\theta) \cong \delta\theta \end{cases}$$

$$s(\theta) - \delta\theta c(\theta) = \phi_y c(\theta) c(\psi) - \phi_x c(\theta) s(\psi) - s(\theta)$$

$$\delta\theta = -\phi_y c(\psi) + \phi_x s(\psi) \quad (\text{B.1})$$

Lo stesso ragionamento verrà applicato per il termine (2,1) della matrice di rotazione per trovare $\delta\psi$:

$$\bar{C}_b^n(2,1) = -\phi_z c(\psi) c(\theta) + s(\psi) c(\theta) - \phi_x s(\theta)$$

$$\bar{C}_b^n(2,1) = s(\bar{\psi}) c(\bar{\theta}) = (s(\psi + \delta\psi)) (c(\theta + \delta\theta)) =$$

$$= (s(\psi) c(\delta\psi) + s(\delta\psi) c(\psi)) (c(\theta) c(\delta\theta) - s(\theta) s(\delta\theta))$$

$$\begin{cases} c(\delta\psi) \cong 1 \\ s(\delta\psi) \cong \delta\psi \\ c(\delta\theta) \cong 1 \\ s(\delta\theta) \cong \delta\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_b^n(2,1) &= (s(\psi) + c(\psi) \delta\psi) (c(\theta) - s(\theta) \delta\theta) = \\ &= s(\psi) c(\theta) - s(\psi) s(\theta) \delta\theta + c(\psi) \delta\psi c(\theta) - c(\psi) \delta\psi s(\theta) \delta\theta\end{aligned}$$

Si trascurino i termini di ordine superiore:

$$\bar{C}_b^n(2,1) = s(\psi) c(\theta) - s(\psi) s(\theta) \delta\theta + c(\psi) \delta\psi c(\theta)$$

$$s(\psi) c(\theta) - s(\psi) s(\theta) \delta\theta + c(\psi) \delta\psi c(\theta) = -\phi_z c(\psi) c(\theta) + s(\psi) c(\theta) - \phi_x s(\theta)$$

$$c(\psi) \delta\psi c(\theta) = s(\psi) s(\theta) \delta\theta - \phi_z c(\psi) c(\theta) - \phi_x s(\theta)$$

Sostituendo l'equazione (B.1) nella precedente si ottiene:

$$c(\psi) \delta\psi c(\theta) = -s(\psi) s(\theta) c(\psi) \phi_y + s(\psi) s(\theta) \phi_x s(\psi) - \phi_z c(\psi) c(\theta) - \phi_x s(\theta)$$

$$\delta\psi = -tg(\theta) s(\psi) \phi_y - \phi_z - \left[tg(\psi) s(\psi) + \frac{1}{c(\psi)} \right] \phi_x tg(\theta)$$

$$\left[tg(\psi) s(\psi) + \frac{1}{c(\psi)} \right] = \frac{s(\psi)}{c(\psi)} s(\psi) + \frac{1}{c(\psi)} = \frac{s^2(\psi) + 1}{c(\psi)} = \frac{c^2(\psi)}{c(\psi)} = c(\psi)$$

$$\delta\psi = -tg(\theta) s(\psi) \phi_y - \phi_z - c(\psi) \phi_x tg(\theta)$$

$$\delta\psi = -\phi_z + tg(\theta)(-s(\psi) \phi_y - c(\psi) \phi_x) \quad (\text{B.2})$$

Si consideri a questo punto il termine (3,2) della matrice di rotazione per ricavare $\delta\varphi$:

$$\bar{C}_b^n(3,2) = \phi_y(-c(\varphi) s(\psi) + s(\varphi) s(\theta) c(\psi)) - \phi_x(c(\varphi) c(\psi) + s(\varphi) s(\theta) s(\psi)) + c(\theta) s(\varphi)$$

$$\bar{C}_b^n(3,2) = c(\bar{\theta}) s(\bar{\varphi}) = c(\theta + \delta\theta) s(\varphi + \delta\varphi) =$$

$$= (c(\theta) c(\delta\theta) - s(\theta) s(\delta\theta)) (s(\varphi) c(\delta\varphi) + c(\varphi) s(\delta\varphi))$$

$$\begin{cases} c(\delta\theta) \cong 1 \\ s(\delta\theta) \cong \delta\theta \\ c(\delta\varphi) \cong 1 \\ s(\delta\varphi) \cong \delta\varphi \end{cases}$$

$$\bar{C}_b^n(3, 2) = c(\bar{\theta}) s(\bar{\varphi}) = (c(\theta) - s(\theta) \delta\theta) (s(\varphi) + c(\varphi) \delta\varphi) =$$

$$= c(\theta) s(\varphi) + c(\theta) c(\varphi) \delta\varphi - s(\theta) s(\varphi) \delta\theta - s(\theta) \delta\theta c(\varphi) \delta\varphi$$

Si trascurino i termini di ordine superiore:

$$\bar{C}_b^n(3, 2) = c(\theta) s(\varphi) + c(\theta) c(\varphi) \delta\varphi - s(\theta) s(\varphi) \delta\theta$$

Sostituendo l'equazione B.1 nella precedente si ottiene:

$$\bar{C}_b^n(3, 2) = c(\theta) s(\varphi) + c(\theta) c(\varphi) \delta\varphi + s(\theta) s(\varphi) \phi_y c(\psi) - s(\theta) s(\varphi) \phi_x s(\psi)$$

$$- \phi_y c(\varphi) s(\psi) + \phi_y s(\varphi) s(\theta) c(\psi) - \phi_x c(\varphi) c(\psi) - \phi_x s(\varphi) c(\theta) s(\psi) + c(\theta) s(\varphi) =$$

$$= c(\theta) s(\varphi) + c(\theta) c(\varphi) \delta\varphi + s(\theta) s(\varphi) \phi_y c(\psi) - s(\theta) s(\varphi) \phi_x s(\psi)$$

$$c(\theta) c(\varphi) \delta\varphi = -\phi_y c(\varphi) s(\psi) - \phi_x c(\varphi) c(\psi)$$

$$\delta\varphi = -\frac{1}{c(\theta)} (\phi_y s(\psi) + \phi_x c(\psi)) \quad (\text{B.3})$$

Appendice C

Errore di quantizzazione

Questo tipo di errore deriva dalla digitalizzazione e corrisponde alla differenza tra il segnale analogico reale ed il segnale digitale quantizzato. L'errore di quantizzazione in un convertitore analogico digitale ideale è uniformemente distribuito tra $-\frac{1}{2} LSB$ ed $\frac{1}{2} LSB$, dove con LSB si indica il bit del quantizzatore meno significativo (Least Significant Bit). Lo studio che è stato fatto riguarda la possibilità di trattare il rumore di quantizzazione come un rumore gaussiano dopo il suo passaggio attraverso un modello lineare. In questo modo per la definizione del modello di errore complessivo (definito come somma dei singoli), sarà possibile definire il contributo della quantizzazione utilizzando le stesse equazioni del rumore bianco (gaussiano). La Figura (C.1) mostra lo schema Simulink implementato per lo studio di questo problema.

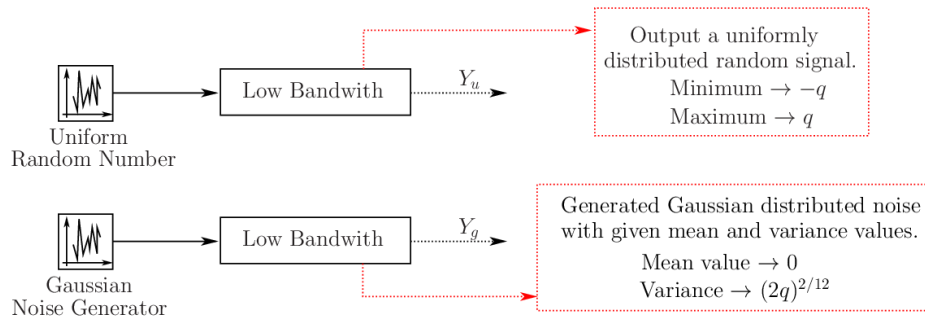


Figura C.1: Esempio di implementazione

Nel primo caso, viene definito un rumore uniforme che viene fatto passare all'interno di un modello lineare (es.: filtro passabasso). Nel secondo viene effettuato lo stesso procedimento definendo in input un rumore gaussiano equivalente. Definito il parametro per l'intervallo del rumore uniforme q , per la definizione del rumore gaussiano, i parametri di media e varianza risultano:

$$\begin{cases} m = \frac{q+(-q)}{2} \\ \sigma = \frac{(2|q|)^2}{12} \end{cases}$$

Considerando la funzione *normpdf* (che definisce la funzione di densità di probabilità della distribuzione normale con media e varianza su un vettore di valori) su entrambe le uscite, si nota che le approssimazioni gaussiane su tali segnali coincidono e quindi l'ipotesi di considerare il rumore di quantizzazione gaussiano può essere considerata corretta.

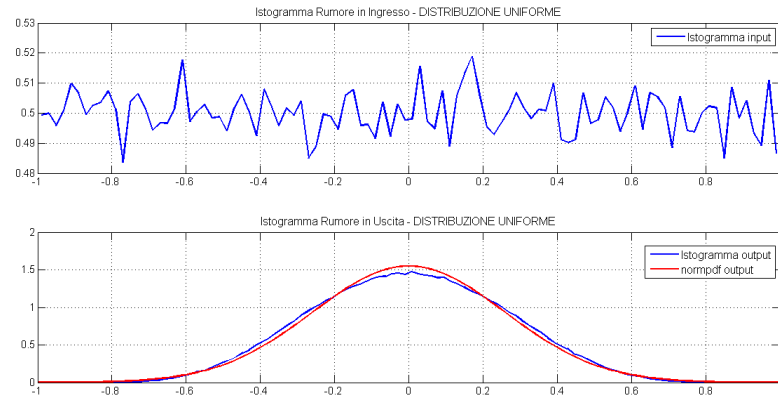


Figura C.2: Rumore uniforme

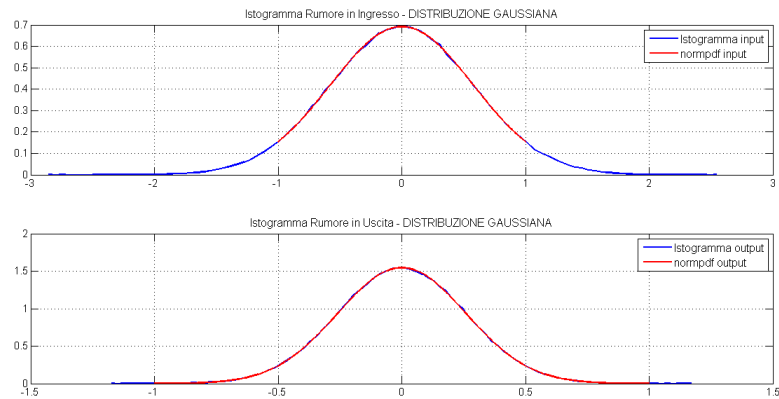


Figura C.3: Rumore gaussiano

La differenza tra le due approssimazioni è mostrata in Fig.(C.4)

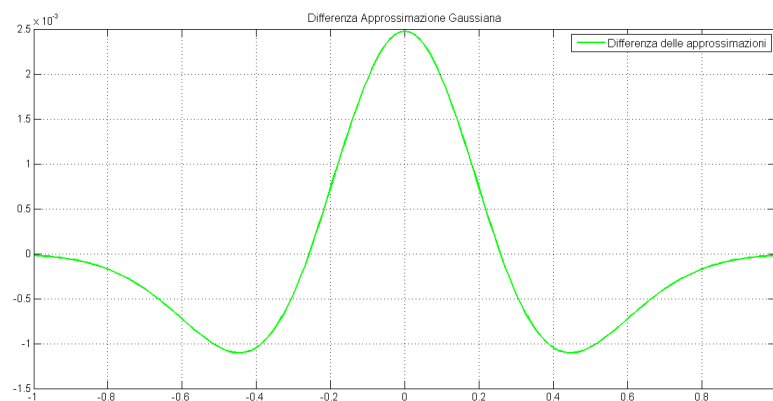


Figura C.4: Differenza approssimazioni gaussiana

Se considerato singolarmente, escludendo quindi gli altri errori, si nota che l'ordine di grandezza di incidenza di tale rumore è 10^{-7} .

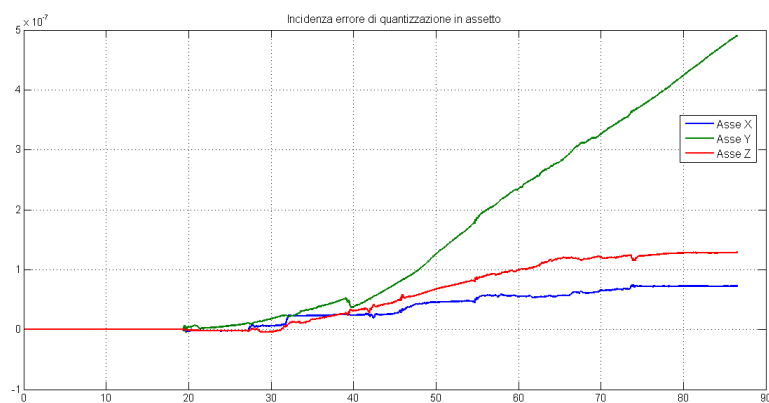


Figura C.5: Incidenza errore di quantizzazione

Appendice D

Codice

Listing D.1: Equazioni di Modellazione

```
1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 %% Scelta numero realizzazioni
6 disp('Numero di realizzazioni:');
7 no_realization = input('');
8 % no_realization = 30;
9
10 %% load PARAMETRI
11 load('simulazione_4.mat');
12
13 wib(:,1) = sim_omega(:,1);
14 wib(:,2) = sim_omega(:,2);
15 wib(:,3) = sim_omega(:,3);
16 Eul_0 = [0 0 0 0];
17 Frequency = 100;
18 SampleTime = 1/Frequency;
19
20 stop_time = floor(sim_t(end)*100)/100;
21 step_time = SampleTime;
22 axis_no = 3;
23 long = 09.8333; % La Spezia
24 lat = 44.1167; % La Spezia
25 Wie = 7.27e-5; % Velcita' angolare terrestre in rad/s
26
27 GyST = SampleTime;
28 AccST = SampleTime;
29
30 bias_g_DS = (20*pi/180)/3600; % 20 gradi/h
31 bias_a_DS = 0.06e-2; % 0.06 mg
```



```

32
33 SF_a_DS = 0.1/100; % < 0.1%
34 SF_g_DS = 0.05/100; % < 0.05%
35
36 MIS_a_DS = 0.05*pi/180; % 0.05 gradi
37 MIS_g_DS = 0.05*pi/180; % 0.05 gradi
38
39 Mean_g = zeros(axis_no,1);
40 GyroNoiseDensity = (0.05*pi/180)^2;%0.05 gradi/s/sqrt(Hz)
41
42 Mean_a = zeros(axis_no,1);
43 AccNoiseDensity = (9.81*0.25*1e-3)^2; % 0.25 mg/sqrt(Hz)
44
45 GyCOF = 250;
46 AccCOF = 250;
47
48 Quant_pqr = (2*300*pi/180)/(2^16);
49 Quant_acc = (2*5*9.81)/(2^16);
50
51 %% Enable errori
52
53 Gyro_En = 0;
54 Acc_En = 1;
55 Gyro_Quant_En = 0;
56 Acc_Quant_En = 0;
57
58 bias_EN_g = 0;
59 SF_EN_g = 0;
60 MIS_EN_g = 0;
61 WN_EN_g = 0;
62
63 bias_EN_a = 1;
64 SF_EN_a = 0;
65 MIS_EN_a = 0;
66 WN_EN_a = 1;
67
68
69 %% Scrittura su un .mat per il salvataggio dei parametri
70 %% utilizzati per le simulazioni
71
72 PARAM = cell(27,1);
73 PARAM{1,1} = no_realizzazione;
74 PARAM{2,1} = 'simulazione_4.mat';
75 PARAM{3,1} = Eul_0;
76 PARAM{4,1} = Frequency;
77 PARAM{5,1} = SampleTime;
78 PARAM{6,1} = stop_time;
79 PARAM{7,1} = axis_no;
80 PARAM{8,1} = long;

```

```

81 PARAM{9,1} = lat;
82 PARAM{10,1} = Wie;
83 PARAM{11,1} = GyST;
84 PARAM{12,1} = GyCOF;
85 PARAM{13,1} = AccST;
86 PARAM{14,1} = AccCOF;
87 PARAM{15,1} = bias_g_DS;
88 PARAM{16,1} = bias_a_DS;
89 PARAM{17,1} = SF_a_DS;
90 PARAM{18,1} = SF_g_DS;
91 PARAM{19,1} = MIS_a_DS;
92 PARAM{20,1} = MIS_g_DS;
93 PARAM{21,1} = Mean_g;
94 PARAM{22,1} = GyroNoiseDensity;
95 PARAM{23,1} = Mean_a;
96 PARAM{24,1} = AccNoiseDensity;
97 PARAM{25,1} = Quant_pqr;
98 PARAM{26,1} = Quant_acc;
99 PARAM{27,1} = sim_t;
100
101 ENABLE = [Gyro_En Acc_En Gyro_Quant_En Acc_Quant_En ...
102           bias_EN_g SF_EN_g MIS_EN_g WN_EN_g bias_EN_a ...
103           SF_EN_a MIS_EN_a WN_EN_a]';
104
105 %% SIMULAZIONI
106
107 simulazioni;
108
109 save('./SIMULAZIONI/PARAMETERS.mat','PARAM');
110 save('./SIMULAZIONI/ENABLES.mat','ENABLE');

```

Listing D.2: Simulazioni

```

1 %% Parametri random per ogni realizzazione
2
3 Fmis_max = zeros(8653,1);
4 DeltaF_max = zeros(8653,1);
5
6 for i = 1:no_realization
7     seed = floor(10000*rand);
8
9     % Distribuzione uniforme
10    % r = a + (b-a).*rand(100,1)
11
12    bias_g = bias_g_DS + (-2*bias_g_DS)*rand;
13    bias_a = bias_a_DS + (-2*bias_a_DS)*rand;
14    SF_g = SF_g_DS + (-2*SF_g_DS)*rand;
15    SF_a = SF_a_DS + (-2*SF_a_DS)*rand;

```

```

16 MIS_g = MIS_g_DS + (-2*MIS_g_DS)*rand;
17 MIS_a = MIS_a_DS + (-2*MIS_a_DS)*rand;
18 sim('EqModellazione_montecarlo.mdl');
19 % sto cercando il massimo dell'accelerazione solo
20 % sulla terza componente per la costruzione delle
21 % bande
22 if norm(Fmis_n.signals.values(:,3)) > norm(Fmis_max)
23     Fmis_max = Fmis_n.signals.values(:,3);
24 end
25 if norm(DeltaF_n.signals.values(:,3)) > ...
26     norm(DeltaF_max)
27     DeltaF_max = DeltaF_n.signals.values(:,3);
28 end
29
30 % Salvataggio dei parametri in .mat
31
32 SIGNALS = cell(16,1);
33 SIGNALS{1,1} = Fvera_n.signals.values;
34 SIGNALS{2,1} = DeltaF_n.signals.values;
35 SIGNALS{3,1} = Fmis_n.signals.values;
36 SIGNALS{4,1} = Vel_effettiva.signals.values;
37 SIGNALS{5,1} = Pos_effettiva.signals.values;
38 SIGNALS{6,1} = phi.signals.values;
39 SIGNALS{7,1} = Delta_Vn.signals.values;
40 SIGNALS{8,1} = Delta_Pn.signals.values;
41 SIGNALS{9,1} = bias_g;
42 SIGNALS{10,1} = bias_a;
43 SIGNALS{11,1} = SF_g;
44 SIGNALS{12,1} = SF_a;
45 SIGNALS{13,1} = MIS_g;
46 SIGNALS{14,1} = MIS_a;
47 SIGNALS{15,1} = seed;
48 SIGNALS{16,1} = phi.time;
49 stringa = strcat('./SIMULAZIONI/Realizzazione_',...
50     num2str(i),'.mat');
51 save(stringa, 'SIGNALS');
52
53 i
54
55 end
56
57 %% Coefficienti per il plot delle bande teoriche
58
59 alfa_stoc = 3;
60 alfa_det = 1;
61
62 sa = sqrt(AccNoiseDensity);
63 sg = sqrt(GyroNoiseDensity);
64

```

```
65 %% Parametri Bande
66 Fmis_n.signals.values(:,3) = Fmis_max;
67 DeltaF_n.signals.values(:,3) = DeltaF_max;
68 if (1),
69     BANDS = cell(3,1);
70     graph_aterror_band;
71     BANDS{1,1} = [xband yband zband];
72     graph_velerror_band;
73     BANDS{2,1} = [xband yband zband];
74     graph_poserror_band;
75     BANDS{3,1} = [xband yband zband];
76 end
77
78 save(' ./SIMULAZIONI/BANDS.mat ', ' BANDS');
```


Bibliografia

- [1] Britting Kenneth R., *Inertial Navigation System Analysis*, 1971.
- [2] Fossen Thor I., *Guidance and Control of Oceans Vehicles*, 1999.
- [3] Rogers Robert M., *Applied Mathematics in Integrated Navigation System*. Second Edition.
- [4] Titterton D.H., *Strapdown Inertial Navigation Technology*. Second Edition
- [5] Zarchan P., *Tactical and Strategic Missile Guidance*. Second Edition.
- [6] IEEE, *Standard Specification Format Guide and Test Procedure, Accelerometer*, 1998
- [7] Arthur Gelb, Joseph F. Kasper Jr., Raymond A. Nash Jr., Charles F. Price, Arthur A. Sutherland Jr. *Applied Optimal Estimation*, Edited by Arthur Gelb, 2001