

EKF CON MODELLO DINAMICO

Lo scopo di questo progetto è quello di stimare posizione e velocità lineare del AUV ZENO attraverso un EKF, considerando il modello dinamico del sistema. Come prima cosa è stato scelto di usare un modello ridotto a 3 DOF (in quanto andiamo a considerare solamente posizione e velocità lineare) con vettore di stato contenente le variabili che si andranno successivamente a stimare, ovvero:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \eta \\ \underline{v} \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \rho \end{bmatrix}$$

Avremo bisogno anche delle equazioni di aggiornamento dello stato e le equazioni delle uscite, in generale non lineari.

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, r_k) \\ y_k = h_k(x_k, u_k, d_k) \end{cases}$$

f_k : funzione di transizione dello stato
 h_k : funzione misura sensori

Nel nostro caso, gli ingressi u_k considerati sono:

- Forze dovute ai propulsori (τ)
- Angoli φ, θ, ψ (Roll, Pitch, Yaw) forniti dall'AHRS

Mentre le forze esterne non controllabili sono state trascurate.

All'interno della f vengono considerate sia le equazioni cinematiche che quelle dinamiche

$$\dot{\underline{\eta}}_1 = \underline{J}_1(\underline{\eta}_2) \underline{\nu}_1$$

$$\dot{\underline{\nu}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(-C(\underline{\nu}) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - D(\underline{\nu}) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + g(\underline{\eta}_2) + \tau) + \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} \\ \delta w \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}_1(\underline{\eta}_2^m) = \begin{bmatrix} c\psi^m c\theta^m & -s\psi^m c\varphi^m + s\psi^m c\varphi^m s\theta^m & s\psi^m s\varphi^m + c\psi^m c\varphi^m s\theta^m \\ s\psi^m c\theta^m & c\psi^m c\varphi^m + s\psi^m s\varphi^m s\theta^m & -s\psi^m c\varphi^m + c\psi^m s\varphi^m s\theta^m \\ -s\theta^m & c\theta^m s\varphi^m & c\theta^m c\varphi^m \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \underline{\eta}_2^m = \begin{bmatrix} \varphi^m \\ \theta^m \\ \psi^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix}$$

Con $\delta\varphi, \delta\theta, \delta\psi, \delta u, \delta v, \delta w$ disturbi bianchi gaussiani a media nulla.

Per il modello dinamico, le matrici M, D, C sono state fornite da gruppo D e hanno la seguente struttura:

$$C_{RB}(\underline{\nu}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_A(\underline{\nu}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{RB} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad M_A = \begin{pmatrix} X_{\dot{u}} & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} \end{pmatrix}$$

$$D(\underline{\nu}) = - \begin{pmatrix} X_{|u|u} |u| + X_u & 0 \\ 0 & Y_v \end{pmatrix}$$

Per la terza equazione del modello dinamico, non essendo oggetto di studio del gruppo D e quindi non avendo informazioni a riguardo, si è scelto di considerare accelerazione lungo z come rumore bianco.

In più, il vettore $g(\eta_2)$ nell'equazione dinamica è stato trascurato in quanto, la forza risultante è data dalla differenza tra la forza di galleggiamento e quella di gravità e per come è costruito il veicolo, ovvero leggermente positivo, la forza di galleggiamento tende ad essere leggermente maggiore in modulo; quindi, la forza risultante è diretta lungo -z con modulo trascurabile e a maggior ragione lo sarà in terna body proiettandola sugli altri assi.

$$\vec{g}(\eta_z) = \left[\vec{f}_G(\eta_z) + \vec{f}_B(\eta_z) \right]$$

$$\bullet) \vec{f}_G(\eta_z) = J_1^{-1}(\eta_z) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad \text{con } w = \rho_v V_v \cdot g$$

$$\bullet) \vec{f}_B(\eta_z) = J_1^{-1}(\eta_z) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{bmatrix} \quad \text{con } B = \int_{H_{10}} V_v g$$

Le equazioni di uscita, relative a ogni sensore, invece risultano lineari e della forma:

$$\begin{cases} h_k(x_k, d_k)_{GPS} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \\ h_k(x_k, d_k)_{PROF} = z + \delta z \\ h_k(x_k, d_k)_{DVL} = \underline{v}_1 + \delta \underline{v}_1 \end{cases}$$

Dove le coordinate fornite dal GPS sono state riportate da coordinate geodetiche in terna NED, e i valori in uscita dal DVL, in terna sensore, sono stati trasformati in terna body.

$$\underline{v}_1^b = \underline{v}_1^s + \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,234 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fatto questo, abbiamo discretizzato il sistema con il metodo di Eulero in avanti:

$$\underline{\eta}_{k+1} = \underline{\eta}_k + \Delta t \left[\mathcal{J}_1(\underline{\eta}_k) \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ v \\ w \end{bmatrix} \right]$$

$$\underline{z}_{k+1} = \underline{z}_k + \Delta t \left[\bar{M}'(-D(\underline{y}) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} \right]$$

Con Δt passo di integrazione, cioè intervallo fra 2 predizioni successive.

Per applicare il filtro di Kalman Esteso si deve linearizzare il sistema, si ricavano le matrici F, D, H ed M rispettivamente calcolate come:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \bar{M}^{-1} \left(-D \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \frac{1}{m + X_{\dot{\mu}}} (X_{\mu|u} |u_r| + X_{\mu}) \mu + \frac{1}{m + X_{\dot{\mu}}} \tau_1 + \delta u \\ \dot{v} = \frac{1}{m + Y_{\dot{v}}} v + \frac{1}{m + Y_{\dot{v}}} \tau_2 + \delta v \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t (\mathcal{J}_{11} \mu_k + \mathcal{J}_{12} v_k + \mathcal{J}_{13} w_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta t (\mathcal{J}_{21} \mu_k + \mathcal{J}_{22} v_k + \mathcal{J}_{23} w_k) \\ z_{k+1} &= z_k + \Delta t (\mathcal{J}_{31} \mu_k + \mathcal{J}_{32} v_k + \mathcal{J}_{33} w_k) \\ \mu_{k+1} &= \mu_k + \Delta t \left(\frac{1}{m + X_{\dot{\mu}}} (X_{\mu|u} |u_r| + X_{\mu}) \mu_k + \frac{\tau_1}{m + X_{\dot{\mu}}} + \delta u \right) \\ v_{k+1} &= v_k + \Delta t \left(\frac{1}{m + Y_{\dot{v}}} v_k + \frac{1}{m + Y_{\dot{v}}} \cdot \tau_2 + \delta v \right) \\ w_{k+1} &= w_k + \Delta t \cdot \delta w \end{aligned}$$

Nello specifico le matrici F e D utilizzate saranno:

$$F_K = \left. \frac{\partial f}{\partial x_K} \right|_{x_K = \hat{x}_K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{14} = \Delta t J_{11} \quad a_{15} = \Delta t J_{12} \quad a_{16} = \Delta t J_{13}$$

$$a_{24} = \Delta t J_{21} \quad a_{25} = \Delta t J_{22} \quad a_{26} = \Delta t J_{23}$$

$$a_{34} = \Delta t J_{31} \quad a_{35} = \Delta t J_{32} \quad a_{36} = \Delta t J_{33}$$

$$a_{44} = 1 + \frac{\Delta t}{m + x_{\mu}} (2 x_{\mu} |\mu| + x_{\mu})$$

$$a_{55} = 1 + \Delta t \cdot \frac{\gamma_v}{m + \gamma_v}$$

$$D_K = \left. \frac{\partial f}{\partial x_K} \right|_{x = \hat{x}_{K|K-1}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = 0 + \Delta t \left(0 \cdot \mu + \frac{d}{ds\varphi} (-s\psi c\varphi + s\psi \cos\psi \sin\psi \sin\theta) v + \frac{d}{ds\varphi} (s\psi s\varphi + c\psi \cos\psi \sin\theta) w \right)$$

$$= \Delta t \left[(s\psi s\varphi + c\psi c\varphi \sin\theta) v + (s\psi c\varphi - s\psi c\varphi \sin\theta) w \right]$$

$$d_{12} = \Delta t \left[-c\psi \sin\theta \mu + s\psi s\varphi \cos\theta v + c\psi c\varphi \cos\theta w \right]$$

$$d_{13} = \Delta t \left[-s\psi \cos\theta \mu + (-c\psi c\varphi - s\psi s\varphi \sin\theta) v + (c\psi s\varphi - s\psi c\varphi \sin\theta) w \right]$$

$$d_{21} = \Delta t \left[(-s\psi c\varphi + c\psi s\varphi \sin\theta) v + (-c\psi c\varphi - s\psi s\varphi \sin\theta) w \right]$$

$$d_{22} = \Delta t \left[-s\theta s\psi \mu + c\theta s\psi s\varphi v + c\theta c\psi s\varphi w \right]$$

$$d_{23} = \Delta t \left[-s\psi \cos\theta \mu + (-s\psi c\varphi + s\psi c\varphi \sin\theta) v + (s\psi s\varphi + c\psi c\varphi \sin\theta) w \right]$$

$$d_{31} = \Delta t \left[c\psi \cos\theta v - \cos\theta s\psi w \right]$$

$$d_{32} = \Delta t \left[-\cos\theta \mu - s\theta s\psi v - s\theta c\psi w \right]$$

$$d_{33} = 0$$

Linearizzando H ed M otteniamo 2 matrici identità teoricamente di dimensioni 6x6, queste infatti varieranno nella loro dimensione in base alle misure dei sensori disponibili all'iterazione corrente.

Procediamo poi ad ottenere le equazioni dell'EKF discreto, utilizzando in predizione gli angoli forniti dal sensore AHRS e le forze fornite dai propulsori, mentre in correzione usiamo i dati forniti dal profondimetro e dal DVL. Se sono presenti:

- DVL e profondimetro: H una matrice 4x6, M una matrice 4x4
- DVL: H una matrice 3x6, M una matrice 3x3
- Profondimetro: H è un vettore riga 1x6, M è uno scalare

$$\begin{aligned}
 P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^T + D_k Q_k D_k^T \\
 e_k &= y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}, 0) \\
 S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + M_k R_k M_k^T \\
 L_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \quad \rightarrow \quad \text{stima corretta} \\
 \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k e_k \\
 P_{k|k} &= P_{k|k-1} - L_k S_k L_k^T
 \end{aligned}$$

Per l'inizializzazione, abbiamo posto il vettore di stato tutto a 0, in quanto ipotizziamo di partire sull'origine della terna NED a velocità nulla. Per l'inizializzazione della matrice di covarianza P abbiamo considerato una struttura diagonale in cui le prime 3 componenti sono l'incertezza dovuta al GPS (varianza di 9 m^2), le altre 3 invece sono riferite all'incertezza sulla velocità considerandola come varianza di $1 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Allo stesso modo la matrice di covarianza del disturbo di processo Q è stata considerata con struttura diagonale in cui le prime 3 componenti sono le incertezze sugli angoli roll, pitch e yaw con varianza di 0.001156 rad^2 (sarebbe una deviazione standard di 0.2°), mentre le altre 3 sono incertezza sull'accelerazione considerando una varianza di $0.1 \text{ m}^2/\text{s}^4$. La matrice di covarianza sul rumore di misura R invece varierà secondo i vari casi, come la matrice M definita sopra.

Il nostro filtro lavora a una frequenza di 10Hz, questo perché si è scelta la frequenza di lavoro più alta tra i sensori utilizzati, ossia l'AHRS. Ci si allinea alla frequenza di lavoro del sensore più veloce perché così non si rischia di realizzare una stima che si basa su dati ad istanti precedenti.

Nel caso in cui non si ricevano dati dai sensori usati in correzione oppure la distanza di Mahalanobis superi una certa soglia (nel nostro caso 5), si procede solamente con la predizione.

In uscita il filtro restituirà la stima della posizione riportata da NED a coordinate geodetiche e la velocità lineare in terna body.

Il tutto è stato implementato in un unico nodo ROS.