Arithmétique - Nombres premiers

Version initiale le 19 mai 2020. Dernière mise à jour le 19 mai 2020

Diviseur, multiple

Soient a et b deux nombres entiers positifs non nuls. On dira que :

- $\rightsquigarrow$ a est un **diviseur** de b
- $\rightsquigarrow$ ou encore que a **divise** de b
- $\rightsquigarrow$ ou que b est **divisible** par a
- $\rightsquigarrow$ ou encore que b est un **multiple** de a

s'il existe un nombre entier k tel que $b = k \times a$

Exemples :

$\rightsquigarrow$ 15 est un multiple de 3 (car $15 = 5 \times 3$)
$\rightsquigarrow$ 42 est divisible par 7

Critères de divisibilité

$\rightsquigarrow$ Un nombre est **divisible par 2** s'il se termine par 2, 4, 6, 8 ou 0.
$\rightsquigarrow$ Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
$\rightsquigarrow$ Un nombre est **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
$\rightsquigarrow$ Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
$\rightsquigarrow$ Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9. $\rightsquigarrow$ Un nombre est **divisible par 11** si la différence entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme de ses chiffres de rangs impairs est nulle ou égale à une multiple de 11.

Exemples :

$\rightsquigarrow$ 180 est divisible par 2, 3, 4, 5 et 9 $\rightsquigarrow$ 105 est divisible par 3 et 5

Nombres Premiers

Un nombre entier supérieur à 1 est un **nombre premier** s'il admet EXACTEMENT deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples :

- $\rightsquigarrow$ Liste de quelques nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ...
- $\rightsquigarrow$ 119 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 9 d'après les critères de divisibilité. Pour autant, il n'est pas premier car $7 \times 17 = 119$

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier n supérieur à 1 admet une unique **décomposition en** produit de **facteurs premiers** : $n = p_1^{a_1} \times ... \times p_k^{a_k}$

Exemples :

- $504 = 8 \times 63 = 8 \times 9 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7$
- Décomposons 3 626 en facteurs premiers :
  On cherche successivement si les nombres premiers divisent 3 626, en commençant par 2 autant de fois que c'est possible
  $3\,626 = 2 \times 1\,813 = 2 \times 7 \times 259 = 2 \times 7 \times 7 \times 37$ d'où $3\,626 = 2 \times 7^2 \times 37$

Fractions irréductibles

- Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.
- Toute **fraction** admet une **unique écriture** sous forme de **fraction irréductible**.

Exemples :

- La fraction $\dfrac{2}{3}$ est irréductible car 2 et 3 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.
- La fraction $\dfrac{322}{1\,078}$ n'est pas irréductible car 14 divise 322 et 1 078 :

$$\frac{322}{1\,078} = \frac{23 \times 14}{77 \times 14} = \frac{23}{77}$$