Chapitre

- Arithmétique -
Nombres premiers

Version initiale le 25 mai 2020. Dernière mise à jour le 25 mai 2020

Nombres Premiers

Un nombre entier supérieur à 1 est un **nombre premier** s'il admet EXACTEMENT deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples :

- Liste de quelques nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ...
- 119 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 9 d'après les critères de divisibilité. Pour autant, il n'est pas premier car $7 \times 17 = 119$

Remarque de primalité :

Dès lors qu'un nombre a un autre diviseur que 1 et lui-même, il n'est pas premier puisqu'il a alors au moins trois diviseurs.
Pour tester la primalité des petits nombres on peut commencer par tester leur divisibilité par les petits nombres premiers.

Critères de divisibilité

- Un nombre est **divisible par 2** s'il se termine par 2, 4, 6, 8 ou 0.
- Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est **divisible par 7** si la somme de son nombre de dizaines et de cinq fois son chiffre des unités l'est.
- Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- Un nombre est **divisible par 10** s'il se termine par 0.
- Un nombre est **divisible par 11** si la différence entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme de ses chiffres de rangs impairs est nulle ou égale à une multiple de 11.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier n supérieur à 1 admet une unique **décomposition en** produit de **facteurs premiers** : $n = p_1^{a_1} \times ... \times p_k^{a_k}$

Méthode 0: Décomposition en facteurs premiers

Étant donné un nombre entier, noté N pour fixer les idées, dont on cherche la décomposition en facteurs premiers :

- ⇝ On teste successivement la divisibilité de N par les nombres premiers en commençant par 2
- ⇝ Si N est divisible par 2, on teste à nouveau la divisibilité par 2 du quotient de N par 2
- ⇝ Tant que c'est possible on continue avec 2
- ⇝ Lorsque le quotient n'est plus divisible par 2, on teste avec 3
- ⇝ Ainsi de suite avec les nombres premiers
- ⇝ L'algorithme se termine au plus tard avec le nombre premier qui précède N.

Exemples :

⇝ **Décomposons 3 626 en facteurs premiers**

$3\,626 = 2 \times 1\,813$
$1\,813 = 7 \times 259$
$259 = 7 \times 37$
d'où $3\,626 = 2 \times 7^2 \times 37$

⇝ **Décomposition en facteur premiers de 504**

$504 = 2 \times 252$ car 504 est pair donc divisible par 2 !
$252 = 2 \times 126$ car 252 est pair !
$126 = 2 \times 63$ car 126 est pair !
$63 = 3 \times 21$ car 6+3=9 donc 63 est multiple de 3
$21 = 3 \times 7$
Il ne reste qu'à écrire la décomposition en facteurs premiers de 504
$504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$
Puis on utilise les notations puissances : $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

⇝ **Décomposons 4 680 en produit de facteurs premiers**

$4\,680 = 2 \times 2\,340$
$2\,340 = 2 \times 1\,170$
$1\,170 = 2 \times 585$
$585 = 3 \times 195$
$195 = 3 \times 65$
$65 = 5 \times 13$
d'où $4\,680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13$;