

- ARITHMÉTIQUE -

NOMBRES PREMIERS

Version initiale le 19 mai 2020. Dernière mise à jour le 21 mai 2020



Nombres Premiers

Un nombre entier supérieur à 1 est un **nombre premier** s'il admet EXACTEMENT deux diviseurs, 1 et lui-même.



Exemples :

- ↪ Liste de quelques nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ...
- ↪ 119 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7 d'après les critères de divisibilité. Pour autant, il n'est pas premier car $7 \times 17 = 119$



Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier n supérieur à 1 admet une unique **décomposition en produit de facteurs premiers** : $n = p_1^{a_1} \times \dots \times p_k^{a_k}$



Méthode 0: Décomposition en facteurs premiers

Étant donné un nombre entier, noté N pour fixer les idées, dont on cherche la décomposition en facteurs premiers :

- ↪ On teste successivement la divisibilité de N par les nombres premiers en commençant par 2
- ↪ Si N est divisible par 2, on teste à nouveau la divisibilité par 2 du quotient de N par 2
- ↪ Tant que c'est possible on continue avec 2
- ↪ Lorsque le quotient n'est plus divisible par 2, on teste avec 3
- ↪ Ainsi de suite avec les nombres premiers
- ↪ L'algorithme se termine au plus tard avec le nombre premier le plus proche de \sqrt{N}



Exemples :

- ↪ **Décomposons 3 626 en facteurs premiers**

$$3\,626 = 2 \times 1\,813$$

$$1\,813 = 7 \times 259$$

$$259 = 7 \times 37$$

$$\text{d'où } 3\,626 = 2 \times 7^2 \times 37$$

- ↪ **Décomposition en facteur premiers de 504**

$$504 = 2 \times 252 \text{ car } 504 \text{ est pair donc divisible par } 2!$$

$$252 = 2 \times 126 \text{ car } 252 \text{ est pair !}$$

$$126 = 2 \times 63 \text{ car } 126 \text{ est pair !}$$

$$63 = 3 \times 21 \text{ car } 6+3=9 \text{ donc } 63 \text{ est multiple de } 3$$

$$21 = 3 \times 7$$

Il ne reste qu'à écrire la décomposition en facteurs premiers de 504

$$504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$\text{Puis on utilise les notations puissances : } 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

~> **Décomposons 4 680 en produit de facteurs premiers**

$$4\,680 = 2 \times 2\,340$$

$$2\,340 = 2 \times 1\,170$$

$$1\,170 = 2 \times 585$$

$$585 = 3 \times 195$$

$$195 = 3 \times 65$$

$$65 = 5 \times 13$$

$$\text{d'où } 4\,680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13 ;$$