

БЕЗ ПАНИКИ!
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

ЮКИО САТО

МОСКВА
Издательский дом «Додэка-XXI»
2010

図解

メカトロニクス入門シリーズ

信号処理入門

改訂2版

雨宮好文 監修／佐藤幸男 著

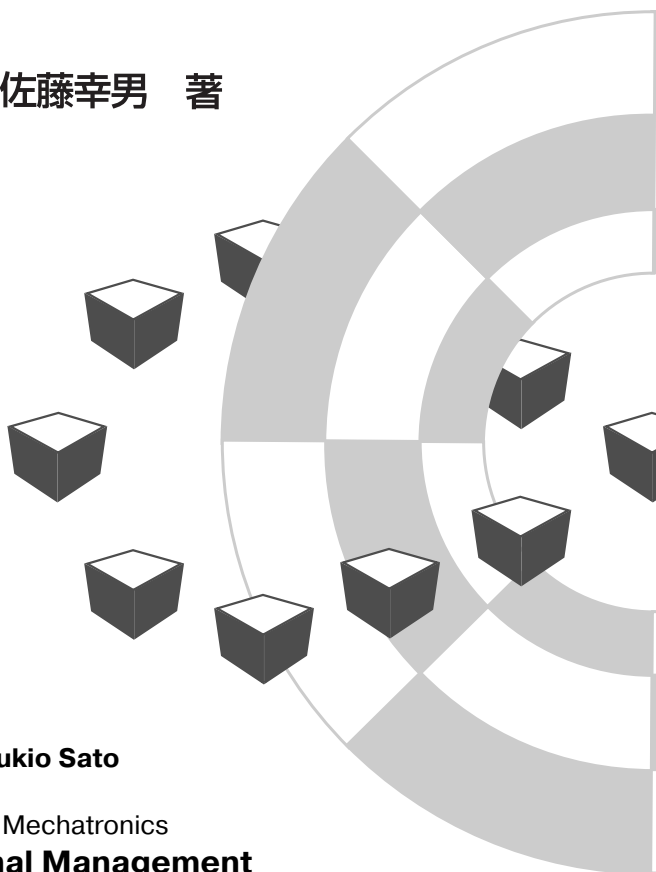
Yoshifumi AMEMIYA / Yukio Sato

Illustrated Introduction to Mechatronics

Introduction to Signal Management

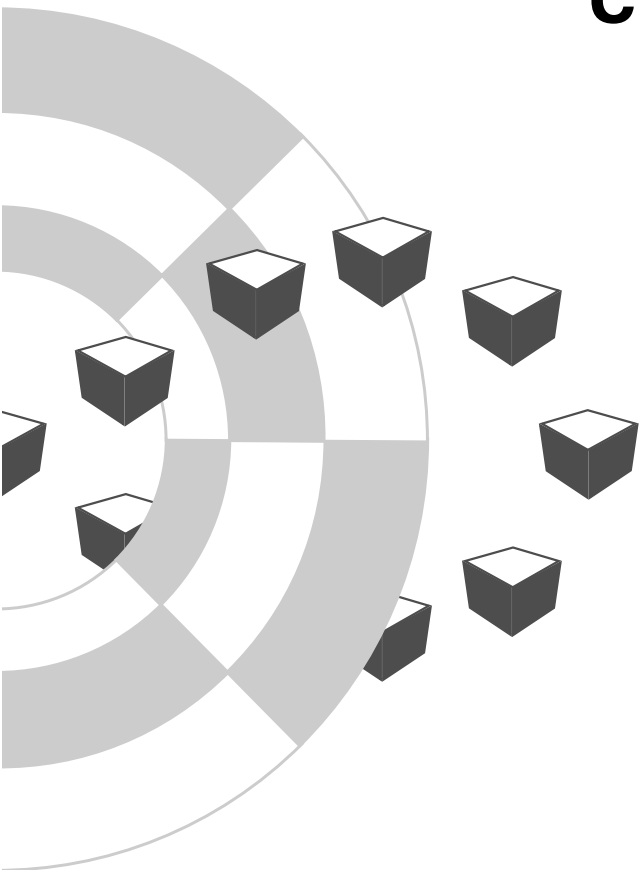
Revised 2nd Edition


Ohmsha



БЕЗ ПАНИКИ! ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

ЮКИО САТО



УДК 621.391.8
ББК 32.841
С21

Сато, Юкио.

С21 Без паники! Цифровая обработка сигналов. / Юкио Сато : пер. с яп. Селиной Т. Г. М. : Додэка-XXI, 2010. — 176 с. : ил. — Доп. тит. л. яп. — ISBN 978-5-94120-251-5.

Вы держите перед собой путеводитель в увлекательный мир цифровой обработки сигналов. В живой и наглядной форме здесь излагаются вопросы представления сигналов и способы их математической обработки. Несмотря на кажущуюся простоту, книга довольно обстоятельно знакомит нас с такими сложными понятиями как функции корреляции и ряды Фурье, дискретное и быстрое преобразование Фурье, а также с другими способами цифровой обработки сигналов.

Предназначена для широкого круга читателей, желающих освоить методы цифровой обработки сигналов. Будет полезна не только школьникам и студентам, но и их преподавателям.

УДК 621.391.8

Original Japanese edition published as Illustrated Introduction to Mechatronics.
Introduction to Signal Management (Revised 2nd Edition) by Yukio Sato.
Published by Ohmsha, Ltd., 3-1 Kanda Nishikicho, Chiyodaku, Tokyo, Japan.
Translation rights arranged with Ohmsha, Ltd.

Все права защищены. Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фототрафирование, ксерокопирование или иные средства копирования или сохранения информации, без письменного разрешения издательства.

ББК 32.841

ISBN 4-274-08674-7 (яп.)
ISBN 978-5-94120-251-5 (рус.)

© Yukio Sato
© Издательский дом «Додэка-XXI», 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора	8
Предисловие	9

1. ЧТО ТАКОЕ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

1.1. Когда необходима обработка сигналов	11
1.2. Какие бывают сигналы	12
1.2.1. Случайные сигналы	12
1.2.2. Виды детерминированных сигналов	15
1.3. Аналоговые и цифровые сигналы	18
1.4. Проблема выборки	21
<i>Обобщение главы</i>	28
<i>Практические задания</i>	28

2. ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

2.1. Сглаживание сигнала	29
2.2. Подавление шумов	33
<i>Обобщение главы</i>	36
<i>Практические задания</i>	36

3. НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

3.1. Что нужно для изучения методов обработки сигналов	37
3.2. Математическое представление сигнала	37
3.3. Скалярное произведение и расстояние для двумерных векторов ..	41
3.4. Ортонормированный базис	46
3.5. Переход от векторного пространства к пространству функций	49
3.6. Система ортонормированных функций	54
<i>Обобщение главы</i>	59
<i>Практические задания</i>	60

4. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

4.1. Измерение степени подобия функций	61
4.2. Функция взаимной корреляции	65

4.3. Функция автокорреляции	70
<i>Обобщение главы</i>	73
<i>Практические задания</i>	73

5. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ

5.1. Что такое разложение в ряд Фурье	75
5.2. Четная и нечетная функции	83
5.3. Когда период не равен 2π	85
5.4. Разложение в комплексный ряд Фурье	86
5.4.1. Математические операции с комплексными числами	86
5.4.2. Разложение в комплексный ряд Фурье	91
5.4.3. Пример разложения в комплексный ряд Фурье	97
5.5. Теорема Парсеваля	99
5.6. Практическое применение разложения в ряд Фурье	101
5.7. Наиболее важные свойства разложения в ряд Фурье	104
5.7.1. Погрешность приближения	104
5.7.2. Поведение в точках разрыва	107
5.7.3. Изменение величины сигнала	108
5.7.4. Сложение двух сигналов	109
5.7.5. Сдвиг сигнала во времени	110
<i>Обобщение главы</i>	111
<i>Практические задания</i>	112

6. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДПФ) И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (БПФ)

6.1. Анализ цифрового сигнала математическим аппаратом Фурье	113
6.2. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)	114
6.3. Свойства дискретного преобразования Фурье	119
6.3.1. Свойство периодичности спектра	119
6.3.2. Свойство симметричности спектра	119
6.4. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)	121
6.4.1. Анализ ДПФ	122
6.4.2. Алгоритм БПФ для ряда из 4 членов	125
6.4.3. Обобщение алгоритма БПФ	130
6.4.4. Перестановка разрядов и техника сортировки	134
<i>Обобщение главы</i>	138
<i>Практические задания</i>	138

7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

7.1. От разложения в ряд Фурье к интегральному преобразованию Фурье	139
--	-----

7.2. Свойства преобразования Фурье	142
7.2.1. Свойство линейности	142
7.2.2. Сдвиг сигнала во времени	143
7.2.3. Подобие	144
7.2.4. Теорема Парсеваля	145
7.3. Дельта-функция и белый шум	145
<i>Обобщение главы</i>	149
<i>Практические задания</i>	150
 8. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ	
8.1. Подход к анализу линейных систем	151
8.2. Связь между входным и выходным сигналами	154
8.3. Импульсный отклик	158
8.4. Представление системы в частотной области	159
<i>Обобщение главы</i>	164
<i>Практические задания</i>	164
 Ответы и решения	165
Предметный указатель	173

ОТ РЕДАКТОРА

Серия «Иллюстрированная Механотроника» начала издаваться в 1983 году.

Происходило это как раз в то время, когда направление «механотроника»¹ впервые получило общественное признание. Тогда уже всем специалистам из разных технических областей стало ясно — для того, чтобы не отстать от времени, необходимо изучать электронику более глубоко. Семинары, посвященные этой теме, были переполнены слушателями.

Для того чтобы обучение было продуктивным, особенно для тех, кто столкнулся с механотроникой впервые, авторы тщательно поработали над построением изложения и, судя по всему, со своей задачей справились. Доказательством тому служит тот факт, что и сейчас, по прошествии нескольких десятилетий, данная серия находит все новых читателей. К сегодняшнему времени с книгой ознакомились более 100 000 человек.

Учитывая пожелания читателей, мы приняли решение о выпуске дополненного издания книги, где, помимо небольших исправлений, в конце каждой главы теперь добавлены рубрики «Обобщение главы» и «Практические задания».

Много споров было связано с тем, до какой степени сложности в данной книге должна быть отражена механотроника как наука. В конце концов было принято решение — более сложный вариант уступить выходящему в свет пособию под названием «Советы по обработке сигналов»², а в данной серии сохранить курс изложения, ориентированный на начинающих.

Дополненное издание серии «Механотроника» включает 8 книг, с перечнем которых мы предлагаем ознакомиться читателю:

- Датчики.
- Микрокомпьютерные системы управления.
- Электромеханические приводные устройства.
- Система управления роботами.
- Цифровые системы управления.
- Цифровая обработка сигналов.
- САПР.
- Электронные цепи интерфейса.

Январь 1999 г.
Амэмия Ёсифуми

¹ Механотроника (от *англ.* mechatronics) — соединение оборудования с микрокомпьютерами (*прим. пер.*).

² В оригинале — «Advice course» (*прим. пер.*).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Когда у молодого специалиста возникает потребность разобраться в новой области, то прежде всего он знакомится с материалами для начинающих. Однако почти каждый сталкивается с тем, что книга, хотя и называется «...для начинающих», на самом деле оказывается довольно сложной для понимания. Или взять ситуацию с некоторыми комментирующими эту область статьями — вроде бы читаешь с легкостью, а в голове ничего не остается. Особенно это касается области, в которой, как и в этой книге, объектом исследования является невидимый глазу сигнал. Большинство статей, касающихся этого вопроса, понятно только искушенному в математике читателю. Но если проследить за развитием прогресса, можно заметить, что технические новшества появлялись и сменяли друг друга гораздо быстрее, чем развивалась теория. Учитывая все это, при подготовке данного издания мы опирались прежде всего на общеизвестные понятия, которые являются необходимой основой при изучении методов обработки сигналов.

Отдельные разделы этой книги на первый взгляд кажутся не связанными, однако, при более внимательном изучении становится ясно, что очень много основополагающих понятий имеют точки соприкосновения. Поэтому, чтобы усвоить базовый материал, сначала, может быть, и придется потрудиться, но как только вы справитесь с этим, все содержание в целом прояснится.

При подготовке этой книги мы стремились достаточно просто и логично объяснить базовые понятия так, чтобы концентрированно изложенный в нескольких главах необходимый минимум был бы доступен читателю.

Поскольку применение компьютеров стало повсеместным и их эффективность возросла, обработка цифровых сигналов с помощью компьютера заняла важное место в области обработки сигналов.

Мы не сомневаемся в том, что эта книга будет актуальна и в будущем и пригодится читателям, изучающим методы обработки цифровых сигналов.

Данная книга — это дополненный вариант первого издания, опубликованного в 1987 году. В отличие от предыдущего, каждая глава нового издания дополнена разделами «Обобщение главы» и «Практические задания». А в конце книги появился раздел «Ответы и решения», благодаря которому изучение методов обработки сигналов, по сравнению с первым изданием, стало более эффективным.

Автор приносит благодарность редактору Амэмия Ёсифуми за советы, которые были учтены при составлении этой книги. А также выражает особую признательность доктору наук технологического университета г. Тиба Санами Такахико и доктору наук технологического университета г. Нагоя Сиокава Сигэки за сотрудничество и помощь.

Январь 1999 г.

Юкио Сато



ЧТО ТАКОЕ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

1.1. КОГДА НЕОБХОДИМА ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Допустим, устройство, которое вы ежедневно используете, работает не-исправно — издает странные звуки. Если вы опытный специалист, то, возможно, по звуку и определите причину неисправности. Например, если звук низкий, гудящий, то, вероятно, расшатался подшипник или ослаблен болт. Если же высокий, режущий, то, может быть, не хватает масла или износилась деталь вращательного механизма. Точно так же, подобно опытному специалисту, компьютер может диагностировать повреждение устройства, если в звуковом сигнале заключена информация о состоянии этого устройства. Например, в настоящее время разрабатывается техника обработки сигналов для определения момента смены режущего инструмента токарного станка по сигналу издаваемого им звука. Или вот еще ряд задач, для решения которых нам просто необходимо владеть этой техникой. Допустим, получаемый звуковой сигнал неразличим из-за больших шумов. Как его выделить? Или изображение, пришедшее по факсимильной связи, нечеткое. Как решить эту проблему? Во всех подобных случаях, чтобы выделить нужный сигнал, по возможности устранив лишние шумы, нам пригодится знание техники обработки сигналов.

Сигнал — это физическая величина, которая содержит в себе определенную информацию. Такого рода сигналы, как звук, вибрация, температура или сила света, наблюдаемы и могут быть зарегистри-

стрированы и преобразованы соответствующим прибором в электрические. Но существуют еще и такие сигналы, обработка которых в настоящее время затруднительна (например сигналы запаха и вкуса). А обработка сигналов, связанных со сверхъестественными явлениями, невозможна.

Обработку сигналов можно сравнить с очисткой сточных вод, основная цель которой заключается в разделении элементов, содержащихся в объекте, на нужные и ненужные. Если заранее знать, какими свойствами обладает объект, от которого идет сигнал, и какие элементы он в себя включает, то извлечение необходимой информации и ее обработка не представляют трудности. Однако, если мы не знаем заранее свойств объекта, придется сначала исследовать соответствие между особенностями сигнала и физическими свойствами объекта. Одним словом, становится необходимым анализ сигнала или, иначе говоря, выяснение его происхождения. В этом случае не обойтись без знания теории обработки сигналов. В результате анализа сигнала могут выявиться особенности объекта, не замеченные ранее. Техника обработки сигналов пригодится и при синтезе сигналов. Часто встречающиеся в быту «говорящие устройства» используют технику голосового синтеза.

Кому может быть полезна эта книга? «Я бы очень хотел освоить технику обработки сигналов, — говорит читатель, — но не обладаю необходимой базовой подготовкой, а без нее любая книга на эту тему слишком сложна».

Вот именно таким читателям, считают авторы, может быть полезна эта книга.

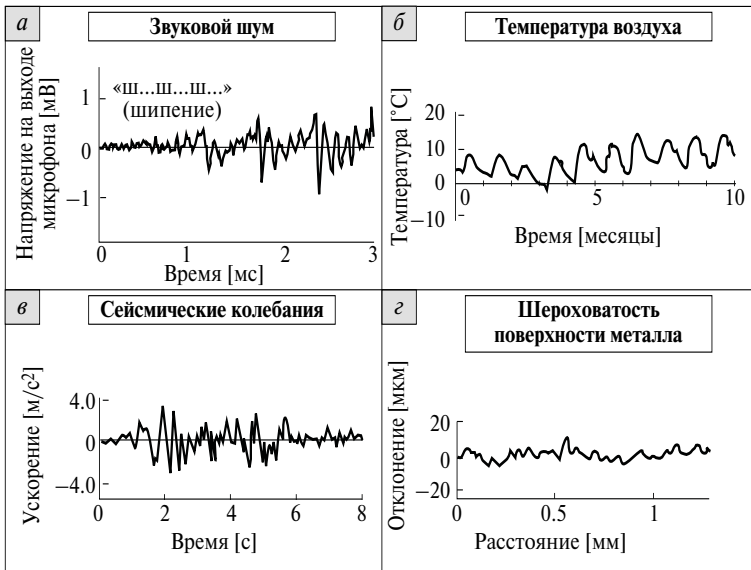
1.2. КАКИЕ БЫВАЮТ СИГНАЛЫ

1.2.1. Случайные сигналы

На Рис 1.1 мы попробовали представить разные виды сигналов. Здесь изображены сигналы, отображающие следующие физические состояния или процессы: *a* — звук, *b* — температура, *в* — сейсмические колебания, *г* — рельеф поверхности металла. У сигналов, подобных показанным на рисунках *a*, *b* и *в*, независимой переменной является время, а сигналы, подобные показанному на рисунке *г*, имеют в качестве переменной положение на поверхности материала. Кроме того, возможен разный масштаб по

оси абсцисс. В процессе обработки сигналов важно не упустить из виду, с какой физической величиной и с каким масштабам переменной мы имеем дело.

Сигналы, оказывается,
бывают совсем разные!



Сигналы это:

- Различные физические величины
- Различные единицы измерений
- Различные масштабы переменных



Рис. 1.1. Различные виды сигналов.

1. Что такое обработка сигналов

Рассмотренные выше сигналы имеют не более одной независимой переменной, будь то переменная времени или переменная положения.

Однако существуют сигналы, имеющие более одной независимой переменной, например *сигнал изображения*. На **Рис. 1.2, а** представлен сигнал телевизионного изображения. Если на поверхности экрана провести оси координат (x, y) , а яркость точки экрана выразить функцией $g(x, y)$, то эту функцию вполне можно считать одним из видов сигнала. И действительно, если сигнал изображения $g(x, y)$, представленный на **Рис. 1.2, а**, выразить объемно, мы получим **Рис. 1.2, б**. Сигнал с одной переменной называется *одномерным*. Сигнал, имеющий две переменные, подобно сигналу изображения, называется *двумерным*.

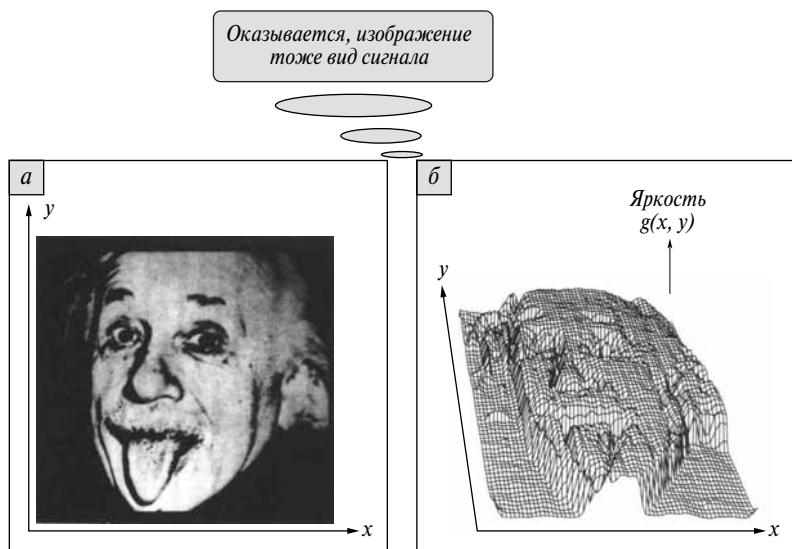


Рис. 1.2. Представление сигнала изображения.

Кстати, рассмотренные выше сигналы характеризуются тем, что даже если в определенный момент времени (или в определенном месте) мы знаем значение измеренной величины, то последующие ее изменения точно предсказать невозможно. Например, невоз-

можно точно знать температуру окружающей среды в будущем году даже с учетом прогноза (если мы имеем информацию только о температуре прошлого года). Подобные сигналы называют *случайными*.

В то же время существуют сигналы, величину которых можно предсказать в любой момент времени (в любой точке). Например, звук камертона. Сколько бы ни было колебаний камертона, возникает чистая звуковая волна одной частоты. Эту волну можно выразить тригонометрической функцией. Поэтому, измерив ее значения в нескольких точках, силу звука можно выразить как функцию времени. Подобные сигналы называются *детерминированными*.

1.2.2. Виды детерминированных сигналов

Несомненно, представителем детерминированного сигнала является синусоидальная волна, графически описываемая синусоидой. Синусоида является функцией времени t и записывается в виде:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \theta),$$

где величину сигнала определяют коэффициент A , называемый *амплитудой*, ω — *угловая частота*, θ — *начальная фаза*.

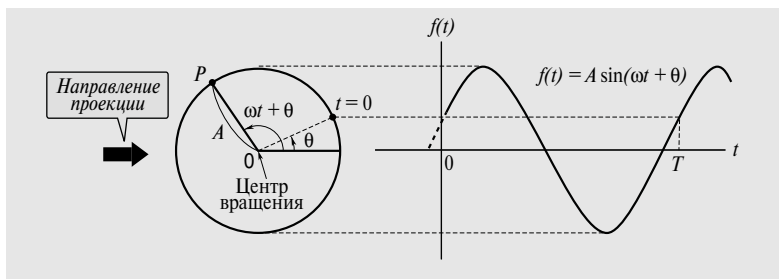
Можно заметить, что через время T , $2T$ или же $3T$ форма сигнала повторяется. Сигналы, повторяющие свою форму через определенный интервал времени, подобно синусоиде, называют *периодическими* (**Рис. 1.3**). Если записать выражение периодического сигнала относительного целого числа периодов n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) в общем виде, получим:

$$f(t + nT) = f(t).$$

Кстати говоря, функция синуса с периодом $T = 2\pi$ в то же время имеет период, равный 4π , 6π и т.д. Самый короткий период называется *основным периодом*. Кроме синусоиды, к часто встречающимся периодическим сигналам относятся *прямоугольный* сигнал, *пилообразный* сигнал, *треугольный* сигнал (**Рис. 1.4**).

Сигнал, концентрирующий энергию в коротком интервале времени, подобно единичному сигналу, изображенному на **Рис. 1.5, а**, называется *импульсным* сигналом. Сигнал, исчезающий в течение достаточно долгого промежутка времени при ограниченной энер-

ПАМЯТКА



В системе прямоугольных координат, изображенных на схеме, рассмотрим точку P , которая движется по окружности с радиусом A и центром вращения O в направлении против часовой стрелки с постоянной скоростью. Величина, выражающая скорость движения по окружности, называется угловой скоростью ω и определяется числом оборотов за одну секунду. Предположим, что точка P делает один оборот за одну секунду, тогда изменение угла вращения за это время равно 2π рад. Следовательно, угловая скорость ω выражается как

$$\omega = 2\pi \text{ рад/с.}$$

Если же за одну секунду точка P делает два оборота, $\omega = 4\pi$ рад/с. Вообще, если точка P за одну секунду делает число оборотов f_c , то угловая частота выражается как

$$\omega = 2\pi f_c \text{ рад/с.}$$

Это число оборотов f_c за одну секунду называется частотой вращения и измеряется в герцах. Время, необходимое для одного оборота, называется периодом. Например, при угловой частоте, равной 4π рад/с, время одного оборота точки P равно 0.5 секунды. Следовательно, период равен 0.5 секунды. При угловой частоте π рад/с величина периода будет равна двум секундам. Период T , частота вращения f_c и угловая частота ω взаимосвязаны следующим образом:

$$f_c = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Положение точки P , равномерно движущейся по окружности, можно записать как функцию $f(t)$, зависящую от времени t :

$$f(t) = A \sin(\omega t + \theta),$$

где A — амплитуда, θ — угол поворота при $t = 0$, называемый начальной фазой.

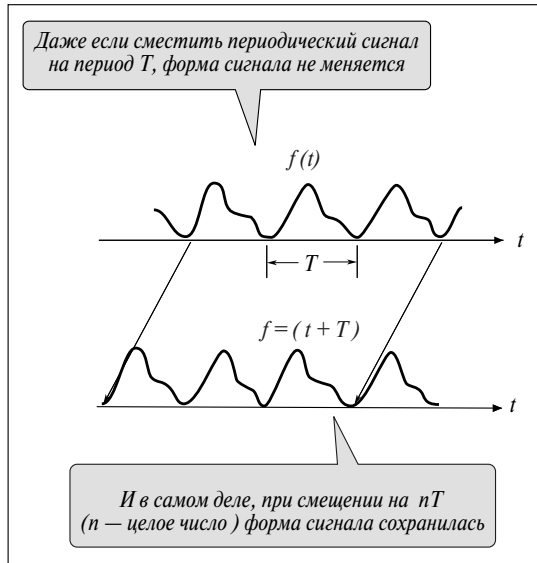


Рис. 1.3. Что такое периодический сигнал.

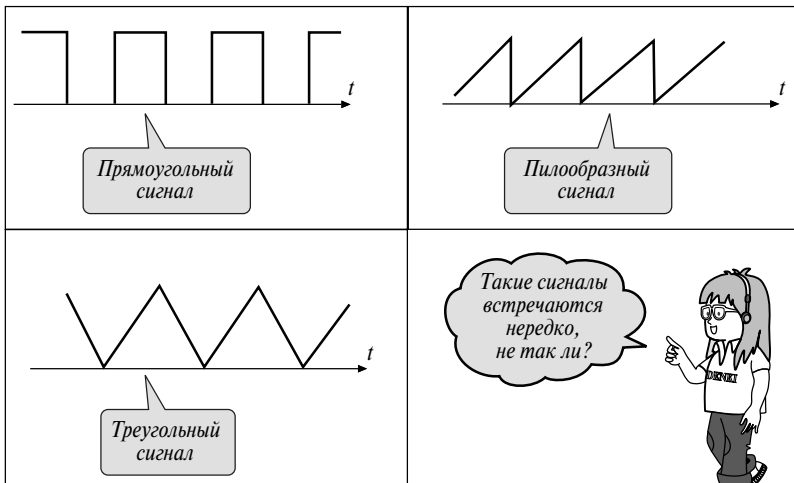


Рис. 1.4. Основные виды периодических сигналов.

1. Что такое обработка сигналов

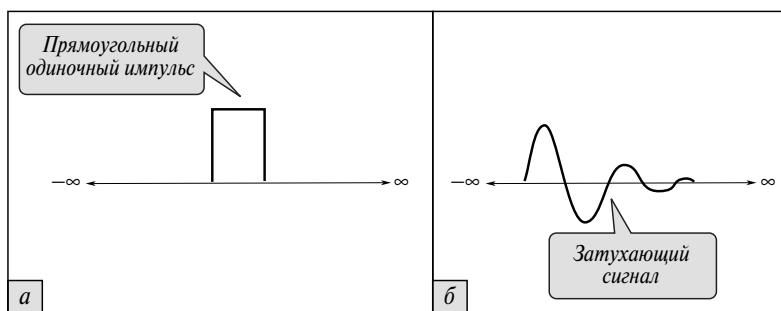


Рис. 1.5. Виды сигналов.

гии источника, называется **затухающим** (**Рис. 1.5, б**). Периодический сигнал сохраняет энергию бесконечно долго и поэтому, конечно, не является затухающим.

1.3. АНАЛОГОВЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ

Физические параметры объектов, которые мы исследуем при обработке сигналов, обычно непрерывно изменяются. Например, рассмотрим изменение температуры атмосферы во времени. Поскольку температура меняется непрерывно, теоретически возможно производить измерение через бесконечно малые промежутки времени. Однако, принимая в расчет объем памяти, необходимый для хранения данных измерения, и время на их обработку, невольно задумаешься, насколько подробные измерения нам необходимы. Значение температуры не может внезапно измениться в течение одной секунды или минуты. Следовательно, допустимы измерения через более длительные интервалы времени, что в конечном итоге сокращает объем данных. Чем меньше объем данных, тем меньше времени затрачивается на их обработку в компьютере при меньшем объеме памяти. То же самое можно сказать и о степени точности измерения. Пусть температура атмосферы в данный момент равна 25.27854°C . Нет смысла в проведении измерения с такой высокой точностью. Вполне достаточно определить степень точности до одной десятой градуса, т.е. 25.3°C . В настоящее время в метеорологическом центре данные о температуре атмосферы по всей

стране собираются каждый час и измерения производятся с точностью до одной десятой градуса. Этого вполне достаточно.

Сигнал, выражающий непрерывно изменяющуюся величину, называется *аналоговым* сигналом, а ступенчатое представление сигнала — *дискретизацией*. Дискретизация может производиться как по времени, так и по значению величины сигнала (**Рис. 1.6**). В первом случае ее часто называют операцией получения *выборки*, во втором — *квантованием*. Если сигнал, подвергнутый дискретизации по

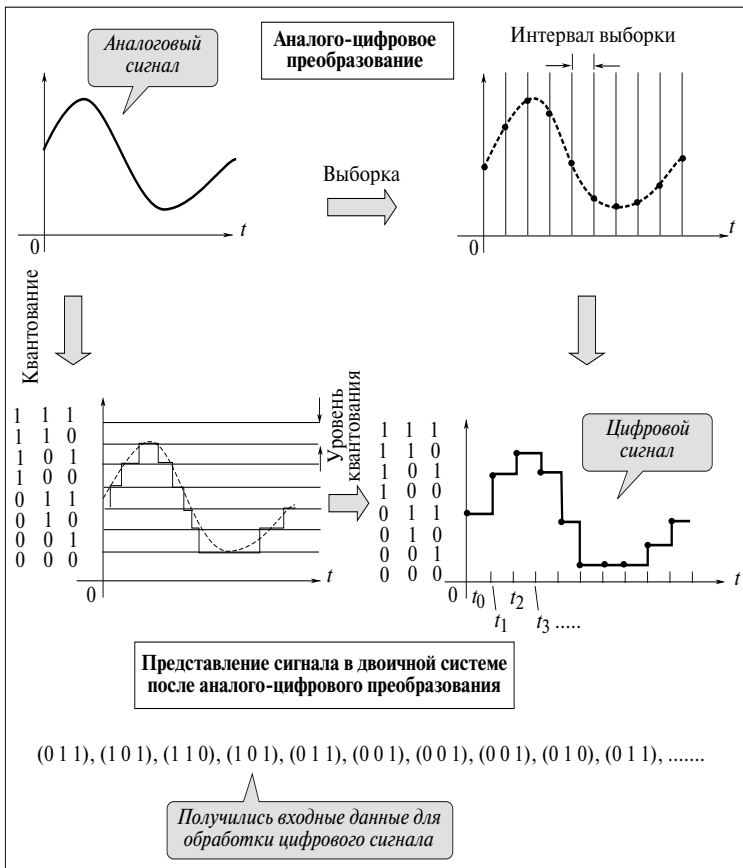


Рис. 1.6. Преобразование аналогового сигнала в цифровой.

ПАМЯТКА**Что такое двоичная система счисления**

Для выражения числового значения величин в компьютере используют двоичную систему счисления, потому что в электрических схемах проще всего отразить два противоположных состояния. Если мы говорим о напряжении, то оно или высокое, или низкое. Если речь идет о токе, то он либо есть, либо его нет. Например, обозначим состояние с низким напряжением как «0» и с высоким как «1», тогда все буквы и числовые значения можно будет выразить через эти состояния.

Понятно, что 0 и 1 в двоичной системе так же остаются «нулем» и «единицей», как и в десятичной. А как представить в этой системе «двойку»? Очень просто. Добавим еще один разряд и получим «10». Таким же образом 3 можно выразить как «11». Чтобы выразить 4, снова придется добавить разряд. Добавим его и получим «100». Продолжая в том же духе, в двоичной системе можно выразить сколь угодно большое число. При такой записи каждая цифра двоичного числа является разрядом. Одноразрядным числом можно выразить лишь 0 или 1, имея 2-разрядное число, можно выразить числа от 0 до 3, с помощью 3-разрядного — числа 0...7. Одним словом, n -разрядные числа принимают значения от 0 до $2^n - 1$.

Итак, чему равно число 110101_2 в десятичной системе счисления? Прежде чем ответить на этот вопрос, давайте задумаемся о том, как представлено число в десятичной системе. Возьмем, например, число 123_{10} . Единица самого высокого разряда означает, что сотня ($100 = 10^2$) одна, двойка следующего разряда означает, что десятков ($10 = 10^1$) два и последняя 3 означает, что единиц ($1 = 10^0$) всего 3. Иначе говоря, каждый разряд имеет свой вес: 100, 10 и 1. Следовательно,

$$123^{10} = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0.$$

Подобно этому, каждый разряд двоичного числа также имеет вес. И этот вес равен 2^{n-1} , где n — номер разряда. Следовательно, число в двоичной системе 110101_2 выражается в десятичной следующим образом:

$$\begin{aligned} 110101_2 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = \\ &= 1 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 53_{10}. \end{aligned}$$

Самый высокий разряд двоичного числа называется старшим, а самый низкий разряд — младшим.

Степени числа 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024... используются очень часто, поэтому их полезно запомнить.

времени и по значению, затем представляется в цифровом виде, то такое преобразование аналогового сигнала в цифровой называется *аналого-цифровым преобразованием*.

Аналоговый сигнал, полученный от датчика, посредством *аналого-цифрового преобразователя* (АЦП) преобразуется в числовые значения в двоичной системе счисления, т.е. предстает в виде нулей и единиц. Например, при записи на компакт-диск звуковой сигнал преобразуется и под воздействием лазерного луча записывается в виде цифрового сигнала. Частота выборки звукового сигнала равна 44.1 кГц, а число цифр в записываемом числе равно 16. Цифры на диске записываются в виде наличия или отсутствия углубления, называемого *питом*. Вы, наверное, знаете, что по сравнению с записью обычного аналогового сигнала на кассете или пластинке цифровая запись характеризуется высоким отношением сигнал-шум и широким динамическим диапазоном (отношение минимального сигнала к максимальному неискаженному сигналу) и обеспечивает высокое качество воспроизведения звука. Но чтобы его воспроизвести, цифровой сигнал необходимо снова преобразовать в аналоговый. Этот процесс называется *цифро-аналоговым преобразованием*.

Компьютеры обладают высокой скоростью вычисления и обработки информации. Поэтому в последнее время заметно возрастает их использование для целей обработки цифровых сигналов по сравнению с традиционным методом обработки аналоговых сигналов посредством электронной аппаратуры. Что касается аналого-цифрового преобразования, важно предусмотреть оптимальное количество уровней квантования, а также установить необходимую частоту выборки.

1.4. ПРОБЛЕМА ВЫБОРКИ

В процессе преобразования аналогового сигнала в цифровой очевидно, что чем шире интервал дискретизации выборки и грубее квантование, тем меньше требуется данных для того, чтобы представить сигнал. Однако если сигнал представлен слишком малым объемом данных, то возникает опасность потерять информацию, которую сигнал содержит. Одна из самых основных проблем, с которой мы с самого начала сталкиваемся при обработке сигналов, — это проблема выбора интервала дискретизации выборки. Давайте рассмотрим

эту проблему на простом примере обработки данных температуры атмосферы. На **Рис. 1.7, а** представлен график температуры атмосферы в Токио в течение одного года с интервалом измерения в один час. Общее количество данных — 24 (измерений в день) $\times 365$ (дней) = 8760 (измерений). Если мы хотим знать, каким образом меняется температура в течение дня, то используем данные, снимаемые каждый час. Однако что же делать, если нужно проследить изменение температуры день за днем.

Один из способов — измерение температуры каждый день в определенное время, но в этом случае возникает разница в результатах, зависящая от того, в какое время суток (днем или ночью) производятся измерения. Такой проблемы не возникает, если вычислять среднесуточную температуру. На **Рис. 1.7, б** представлен результат такой обработки данных — график ежедневных значений средней температуры в течение года. А на **Рис. 1.7, в** изображен график изменения среднемесячной температуры атмосферы. Таким образом, в

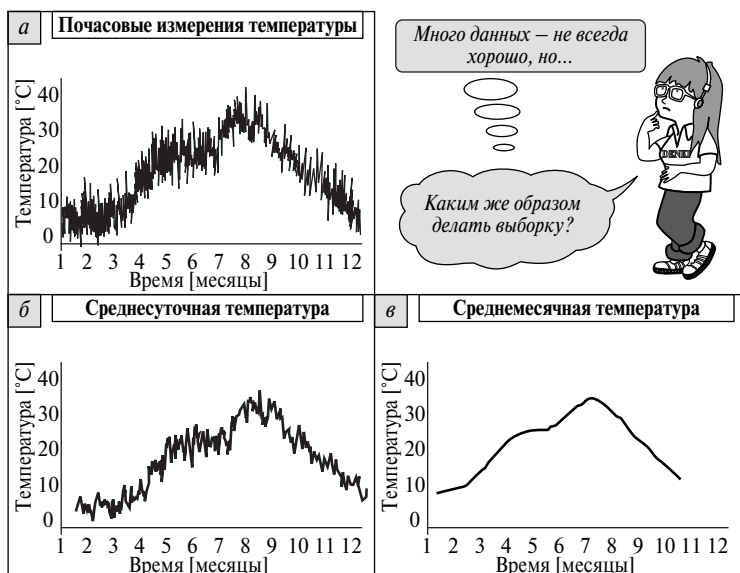


Рис. 1.7. Выборка изменений температуры атмосферы.

зависимости от временного периода меняется вид выборки. Одним словом, прежде чем производить выборку, нужно четко определить, какую информацию мы намерены получить от сигнала.

А что происходит в случае двумерного сигнала, например, в случае сигнала изображения? Оцифрованное изображение выражается множеством числовых точек, расположенных на пересечении линий вдоль осей абсцисс и ординат, подобно клеткам шахматной доски. Каждая в отдельности точка называется *элементом телевизионного изображения*. И чем этих точек больше, тем более четкое изображение можно получить, иначе говоря, повысить разрешающую способность. Число уровней квантования яркости называется *градацией*. Чем больше число градаций, тем лучше контрастность изображения. На **Рис. 1.8** показано, как меняется изображение в зависимости от числа градаций и элементов телевизионного изображения. Абсолютно ясно, что изображение в правом верхнем углу имеет наиболее высокое качество и по яркости, и по контрасту.

Кстати, число градаций изображения нижнего ряда равно двум. Иначе говоря, число состояний, выражающих яркость всего два: ярко или темно. Чтобы это описать, достаточно 1 бита информации. Такие изображения называются *двузначными*.

Теперь, когда мы имеем общее представление о проблеме выборки, рассмотрим эту проблему более подробно. А именно, разберемся, какой интервал дискретизации выборки сигнала нам нужен. Первым делом рассмотрим выборку синусоиды (**Рис. 1.9**). Если соединить выделенные черным цветом точки выборки на **Рис. 1.9, а**, то форма синусоиды четко просматривается, и видно, что интервал дискретизации достаточно мал. А что произойдет, если его расширить? На **Рис. 1.9, б** представлен случай, когда период сигнала и интервал дискретизации выборки совпадают. Видно, что значения выборки не отображают форму сигнала. Следовательно, выбранный интервал выборки слишком велик.

Попробуем его уменьшить до половины периода сигнала, как показано на **Рис. 1.9, в**. В этом случае есть вероятность, что преобразуются только нулевые значения сигнала, и полученная информация будет неполной. А если еще сузить интервал дискретизации выборки, как показано на **Рис. 1.9, г**, тогда будет более или менее возможно определить первоначальную форму синусоиды.

1. Что такое обработка сигналов

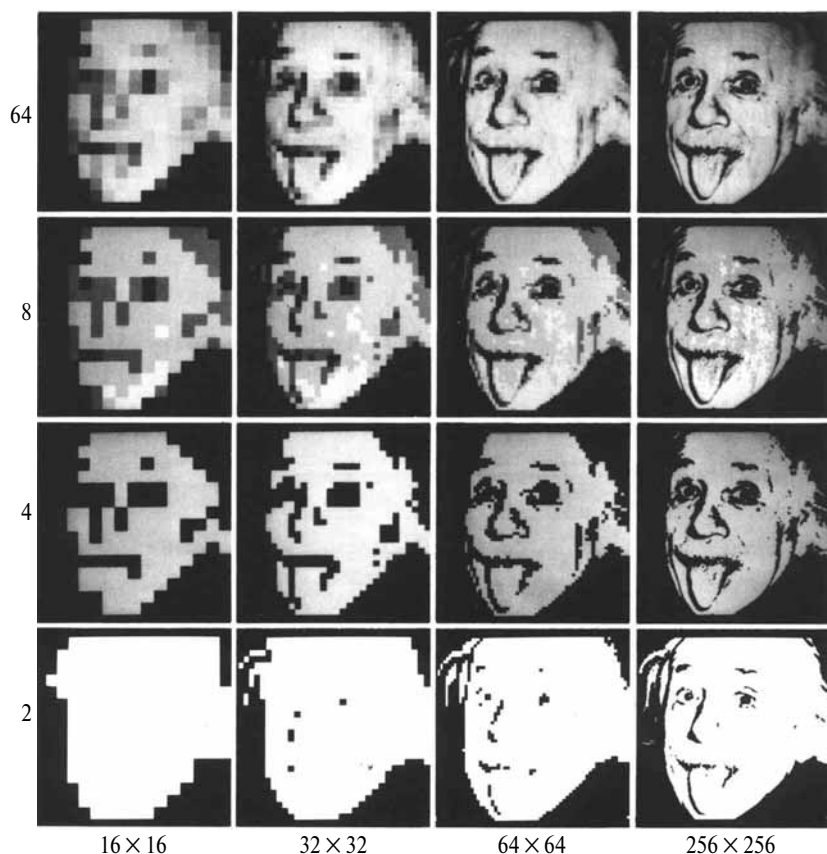
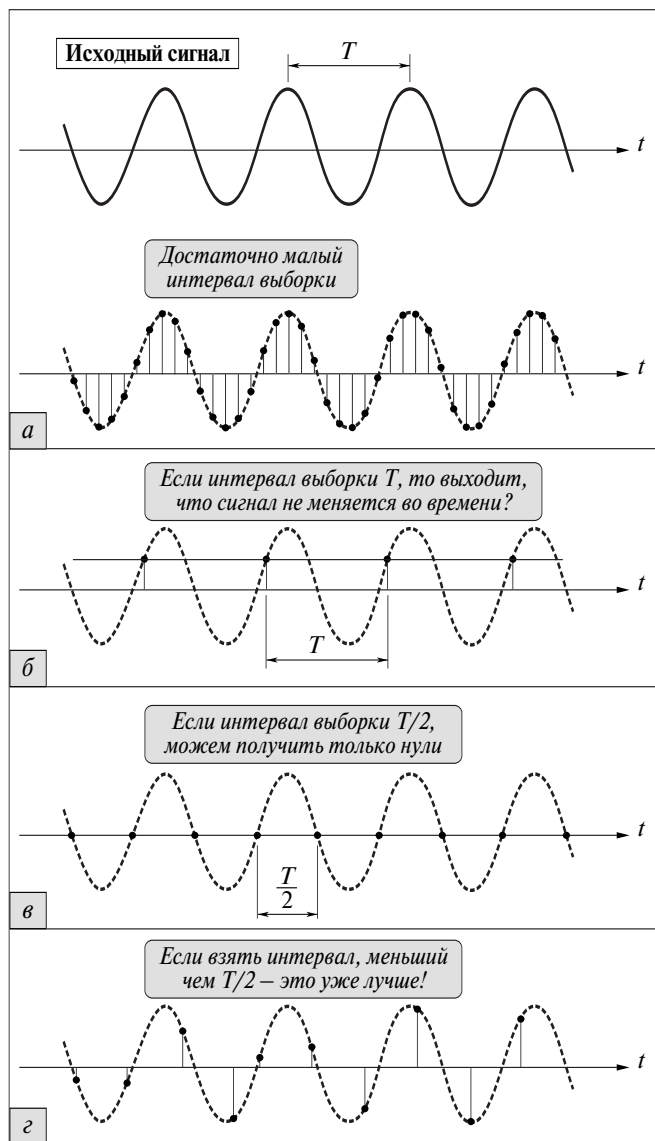


Рис. 1.8. Телевизионное изображение для различного числа градаций и элементов изображения (фотография Эйнштейна после аналого-цифрового преобразования).

Но возникает подозрение, что существуют какие-то другие синусоиды, проходящие через все точки выборки. Если это так, то возможно ли достоверно воспроизвести первоначальную синусоиду? Однако теоретически обосновано, что по ряду значений выборки можно достоверно воспроизвести только одну синусоиду (конечно, при условии, что ее период больше чем в два раза превышает интер-



Интервал
выборки
меньше $T/2$!



Рис. 1.9. Выборка синусоиды.

вал выборки). Исходя из вышеприведенного результата стало ясно, что интервал дискретизации выборки должен быть меньше половины периода. Если установить связь выборки с частотой, то получится, что по отношению к синусоиде с частотой f_c необходимо следование значений выборки с частотой, большей чем $2f_c$. Эта частота выборки $2f_c$ называется *частотой Найквиста*. В последующих главах будет подробно показано, что любой сигнал можно выразить суммой синусоид различной частоты.

Для сигнала с наивысшей частотой f_c необходима большая частота следования значений выборки, чем частота Найквиста $2f_c$.

(В отечественной литературе частота f_c определяется теоремой Котельникова, которая лежит в основе всей импульсной связи. Она показывает, при каких условиях передача непрерывной функции может быть сведена к передаче отдельных импульсов или кодовых комбинаций.

Теорема Котельникова (для функций с ограниченным спектром):

Функция с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы $\Delta t = 1/2F$, где F — ширина спектра функции.

Смысл теоремы Котельникова состоит в следующем: если требуется передать непрерывную функцию $f(t)$ с ограниченным спектром, то нет необходимости передавать все значения функции; достаточно передать отдельные мгновенные значения, отсчитанные через Δt . — *Прим. редактора перевода.*)

Кстати, с какой проблемой мы столкнемся, если будем использовать выборку сигнала с частотой более низкой, чем частота Найквиста?

Обратимся к **Рис. 1.10**, на котором ясно видно, что появляется составляющая сигнала с низкой частотой, не содержащаяся в рассматриваемом сигнале. Аналогичное явление возникает, если включить вентилятор на фоне люминесцентной лампы: при раскручивании вентилятора появляются полосатые узоры. Они медленно вращаются либо в одном направлении с лопастями вентилятора, либо в противоположном. Этот эффект связан с соотношением между скоростью вращения лопастей вентилятора и частотой мерцания света. Механизм этого явления, называемого *стробоскопированием*, проявляется и при возникновении сигнала-призрака в процессе выборки.

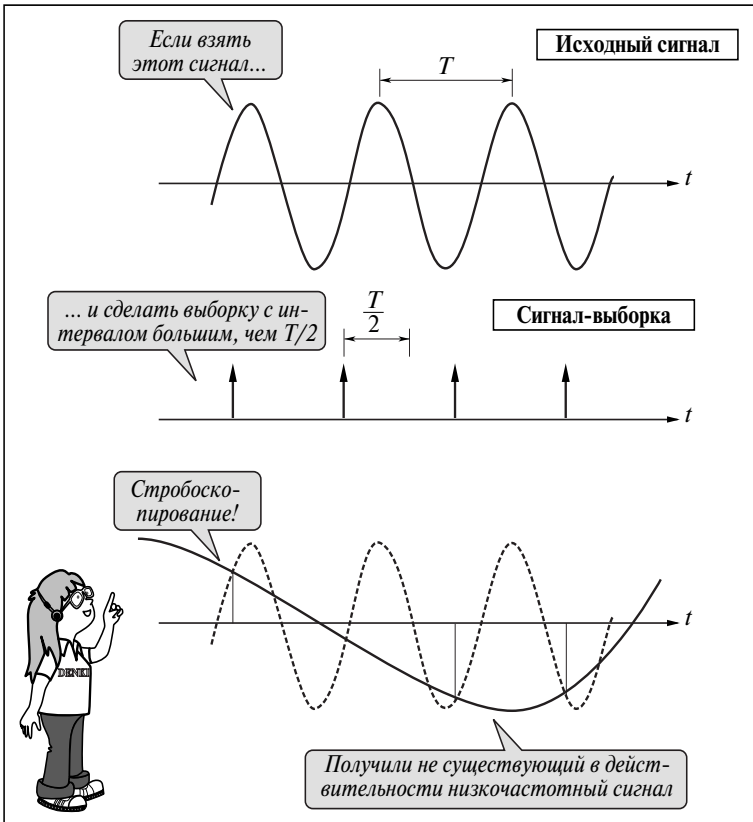


Рис. 1.10. Что такое стробоскопирование.

Когда возникает стробоскопирование, мы наблюдаем частоту, не являющуюся составляющей сигнала. После завершения процесса получения выборки исключить это явление невозможно, поэтому необходимо исключить из сигнала ненужные составляющие перед началом выборки. Для этого сигнал пропускают через низкочастотный фильтр, тем самым заранее исключая ненужные составляющие, и только после этого проводят выборку.

ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Сигнал — это физическая величина, содержащая информацию. Для анализа сигнала в первую очередь необходимо определить параметр, с помощью которого передается информация, ее единицу измерения и то, какую физическую величину отображает сигнал.
2. Если значение сигнала в какой-то момент времени можно точно предсказать, то сигнал называется детерминированным. Если же это невозможно, то сигнал называется случайным. Типичным примером детерминированного сигнала является синусоида. Ее параметрами являются угловая частота, амплитуда и фаза. Частота и период взаимосвязаны.
3. Периодическим сигналом называется сигнал, параметры которого не меняются при изменении времени на целое число периодов. Кроме синусоиды, существуют прямоугольный, пилообразный, треугольный и другие периодические сигналы. Одиночные сигналы бывают импульсные или затухающие.
4. Цифровой сигнал можно получить из аналогового методом дискретизации. Дискретизация по времени называется выборкой, а по значению величины сигнала — квантованием. Преобразование из аналогового сигнала в цифровой называется аналого-цифровым преобразованием.
5. В процессе оцифровки сигнала необходимо делать выборку с частотой большей, чем частота Найквиста. Частота Найквиста в два раза больше, чем самая высокочастотная составляющая сигнала. Это утверждение называют теоремой выборки. Если проводить выборку с частотой ниже, чем частота Найквиста, возникают паразитные низкочастотные составляющие, не входящие в исходный сигнал. Такое явление называется стробоскопированием. Преобразование цифрового сигнала в аналоговый называется цифро-аналоговым преобразованием.

Практические задания

- 1) Количество элементов черно-белого телевизионного изображения равно 512×512 , число градаций — 256. Какой объем памяти требуется для хранения этого изображения?
- 2) Звук с частотными составляющими до 5 кГц можно хорошо слышать. Что нужно сделать для оцифровки акустического сигнала, записанного с микрофона?
- 3) В компакт-диске и мини-диске звук записывают в виде цифровых сигналов. Однако, несмотря на то что мини-диск гораздо меньше компакт-диска, время записи одно и то же. Объясните, почему?

ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ



2.1. СГЛАЖИВАНИЕ СИГНАЛА

В этой главе мы подробно рассмотрим способы обработки сигналов на примере результатов обработки реальных данных.

Если мы хотим увидеть приблизительную динамику изменения сигнала, необходимо сделать его «гладким», удалив незначительный шум, входящий в сигнал, и устранив мелкие колебания сигнала. Этот вид обработки называют *сглаживанием сигнала*. Например, на рассмотренных ранее температурных графиках (**Рис. 1.7**) мы видим довольно плавное изменение среднемесячной температуры в течение года. Для этого случая среднемесячная температура определялась следующим образом. Сначала вычислялась средняя температура первой половины месяца, затем средняя температура второй половины месяца, а средняя между этими двумя величинами бралась за основу. Но поскольку вследствие такой операции мы рассматриваем за год всего лишь 12 точек, то полученный график принял форму ломаной линии. Если эту операцию провести относительно не только центральных точек (точек, соответствующих середине каждого месяца), но и относительно всех точек измерения, получим не ломаную, а гладкую кривую. Эта операция называется *скользящим усреднением*. Иначе говоря, берем некоторую область до и после рассматриваемой точки и, учитывая численные значения измерений, входящих в эту область, вычисляем среднее значение (**Рис. 2.1**).

2. Примеры обработки сигналов

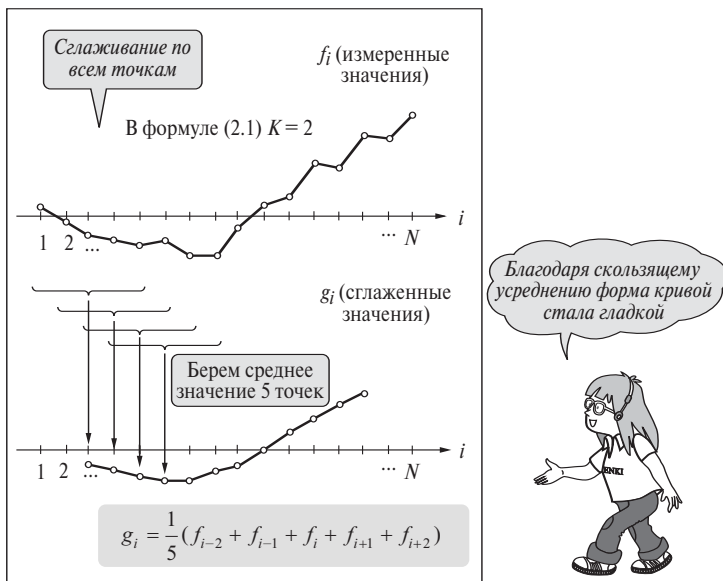


Рис. 2.1. Методика нахождения скользящего среднего.

Предположим, что дано N точек измерений цифрового сигнала $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$:

$$f_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Для нахождения скользящего среднего в окрестности рассматриваемой точки i берем среднее арифметическое от K предыдущих и последующих точек, включая точку i . Одним словом, новые значения g_i для каких-либо точек i , представленные как средние значения этих $2K + 1$ точек, включающих точки i , определяем как значения сглаживания:

$$g_i = \frac{1}{2K+1}(f_{i-K} + f_{i-K+1} + \dots + f_i + \dots + f_{i+K}).$$

С использованием знака суммы это же соотношение записывается в виде:

$$g_i = \frac{1}{2K+1} \sum_{j=-K}^K f_{i+j}. \quad (2.1)$$

Кстати, обратим внимание на то, что на первых и на последних точках i оси абсцисс невозможно вычислить значение сглаживания. Область, где это возможно сделать, определяется следующим образом:

$$i = 1 + K, 2 + K, \dots, N - K.$$

На **Рис. 2.2** представлен график средней температуры, атмосферы, измеряемой каждый день в течение одного года. Попробуем сделать обработку методом скользящего среднего. Из графиков видно, что если число точек K , которые мы учитываем, достаточно большое, то форма сигнала сглаживается. Если число K слишком мало, то эффект сглаживания слабый, но если K слишком велико, то форма сигнала становится невыразительной. Как видно из этого факта, взять скользящее среднее — это все равно что исключить из сигнала быстроколеблющуюся или, иначе говоря, высокочастотную его составляющую. Таким образом, область исключаемой частоты в зависимости от значения K меняется. Однако если мы возьмем область учитываемых точек только перед рассматриваемой точкой, а не до и после, то получим такой же эффект сглаживания.

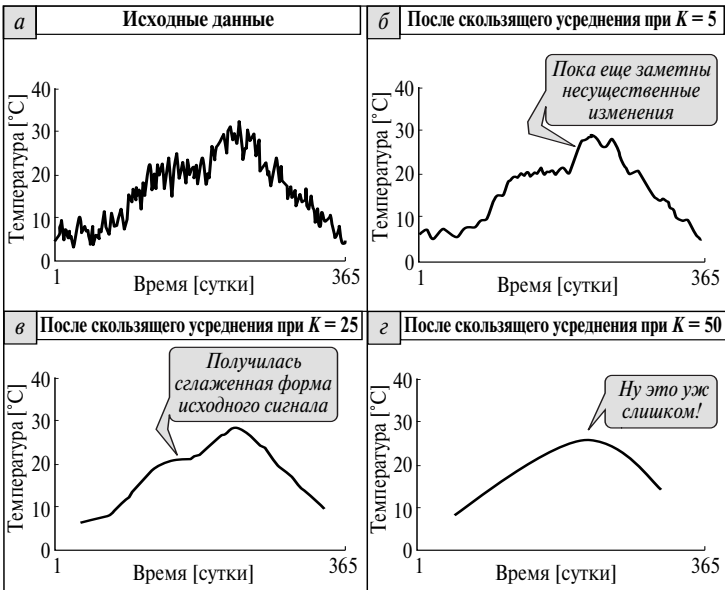


Рис. 2.2. Сглаживание графиков температуры атмосферы методом скользящего среднего.

2. Примеры обработки сигналов

Это определяется соотношением

$$g_i = \frac{1}{K+1} (f_{i-K} + f_{i-K+1} + \dots + f_i),$$

т.е.

$$g_i = \frac{1}{K+1} \sum_{j=-K}^0 f_{i+j} \quad (i = 1+K, 2+K, \dots, N). \quad (2.2)$$

Все точки из интервала $2K + 1$, используемые при вычислении скользящего среднего, мы рассматриваем с одинаковой степенью значимости. Однако во многих случаях необходимо учитывать, что, чем ближе точка к рассматриваемой точке i , тем выше ее значимость, и, соответственно, с отдалением эта значимость уменьшается. Когда мы производим сглаживание, нужно определить *вес* каждой точки в соответствии с ее значимостью. Это можно записать следующим выражением:

$$g_i = \sum_{j=-K}^K w_j f_{i+j} \quad (i = 1+K, 2+K, 3+K, \dots, N-K). \quad (2.3)$$

Чтобы не исказить величину усредняемой функции, примем следующее условие:

$$\sum_{j=-K}^K w_j = 1.$$

где w_j — функция, дающая вес точкам. В качестве весовой функции обычно используется *функция распределения Гаусса*, представленная на **Рис. 2.3**.

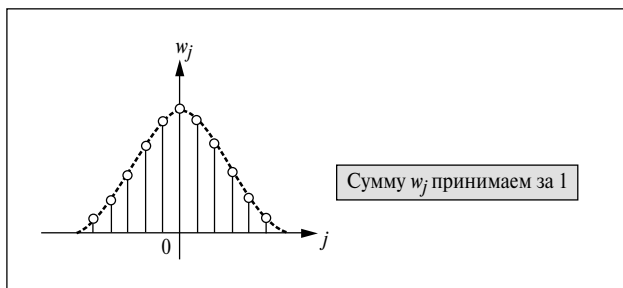


Рис. 2.3. Пример весовой функции (распределение Гаусса).

2.2. ПОДАВЛЕНИЕ ШУМОВ

Очень часто сигнал искажается шумами. Чтобы его восстановить, нужно каким-то образом уменьшить шумовую составляющую. Как это сделать? Очевидно, что начинать надо не с обработки сигналов. Сначала нужно определить причины возникновения шумов и постараться устранить их. Например, возникли шумы во время передачи электрического сигнала по длинному кабелю. В первую очередь необходимо проверить напряжение, осмотреть состояние кабеля и попытаться устранить причину возникновения шумов. Если же это сделать не удалось, может быть, придется заменить кабель на световод. Возможно, несмотря на все наши старания, шумы снова не удастся устранить, тогда придется применить способы обработки сигналов.

Если шум высокочастотный и величина шума незначительна, то, используя один из способов сглаживания, не так уж трудно выделить искомый сигнал, и наоборот, при большой шумовой составляющей и невысокой ее частоте способ сглаживания становится неэффективным. Тем не менее в случае периодического сигнала, даже если он искажен шумами, все-таки существует эффективный способ их подавления, называемый *синхронной фильтрацией*.

Этот способ заключается в суммировании выборок сигнала в одной и той же точке периода, т.е. с одной и той же фазой. Так как шумы имеют случайный характер, то в результате усреднения они подавляются, а сигнал, наоборот, выделяется.

Итак, обозначим рассматриваемый сигнал $f(t)$. Сигнал $f(t)$ содержит полезную периодическую составляющую сигнала $s(t)$ и шумовую составляющую $n(t)$:

$$f(t) = s(t) + n(t). \quad (2.4)$$

Сигнал в k -м периоде обозначим как $f_k(t)$. Шумовая составляющая сигнала в каждом периоде отличается, поэтому записывается как $n_k(t)$. Однако если брать один и тот же момент времени в периоде сигнала, то периодическая составляющая сигнала $s(t)$ всегда одна и та же. Следовательно, принятый сигнал $f_k(t)$ выражается как:

$$f_k(t) = s(t) + n_k(t). \quad (2.5)$$

Итак, многократно приняв сигнал $f_k(t)$, определим его среднее значение по периодам. Пусть N — число периодов, тогда:

2. Примеры обработки сигналов

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{s(t) + n_k(t)\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s(t) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_k(t).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Рассмотрим это на практическом примере. На **Рис. 2.4** видно, что с увеличением числа периодов N , в течение которых производится усреднение, шумовая составляющая уменьшается, а периодическая

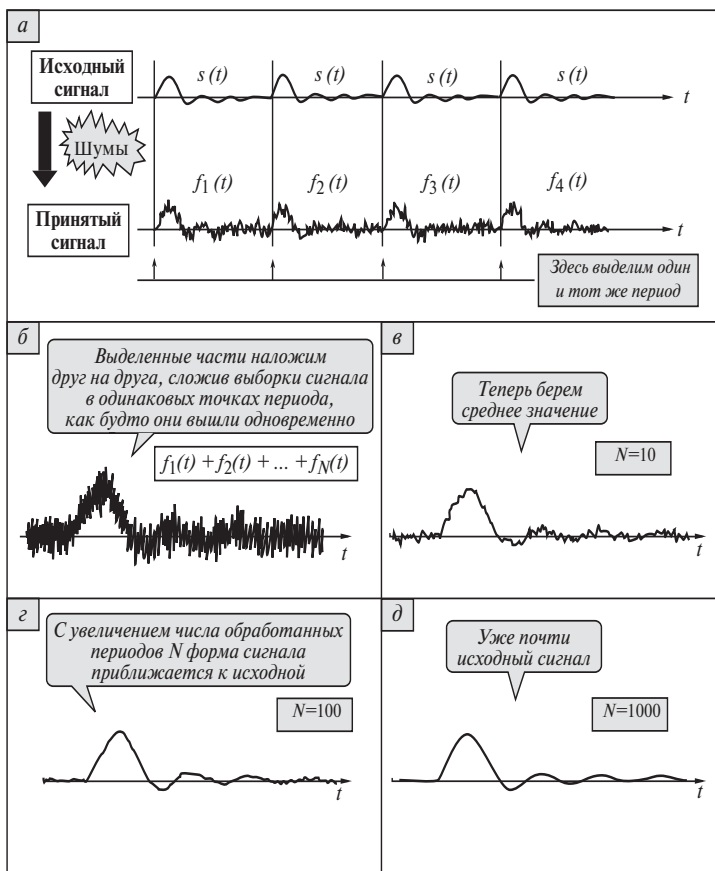


Рис. 2.4. Подавление шумов.

составляющая сигнала восстанавливается. Почему так происходит? Обратим внимание на правую часть выражения (2.6). Первое слагаемое, являясь периодической функцией, и после суммирования N раз остается функцией $s(t)$. А что же происходит со вторым слагаемым?

В этом месте давайте ненадолго отвлечемся и рассмотрим пример с игральными костями. Бросим несколько раз игральные кости и определим среднее значение от числа выпавших очков. Если число бросаний невелико, то среднее значение четко не выявляется, но с увеличением числа бросаний постепенно устанавливается вполне определенное число. Почему? Потому что вероятность выпадения каждой грани игральной кости одинакова. Следовательно, с ростом числа попыток частота появления каждой грани становится примерно одной и той же. Значит, среднее значение, которое мы можем получить, бросая игральную кость, приближается к

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

На **Рис. 2.5** в правой части представлен график функции плотности вероятности, которая отображает среднее значение шумов и вероятность появления каждого значения. Одним словом, вероятность появления значений, близких к нулю, высока, а для значений, удаленных от нуля, вероятность появления уменьшается. Это распределение вероятности хорошо известно как *нормальное распределение* (распределение Гаусса). В случае игральных костей вероятность появления той или иной грани одинакова, и поэтому, как вы, наверное, знаете, это распределение вероятности называется *равномерным распределением*. Среднее значение независимых случайных

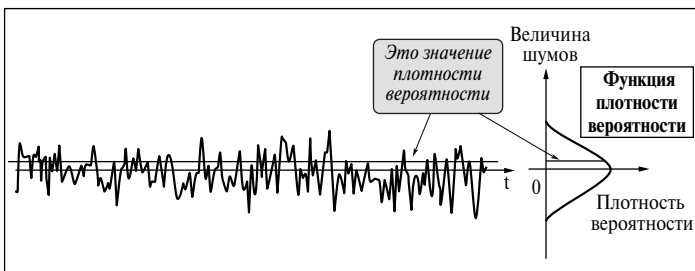


Рис. 2.5. Гауссовское свойство шумов.

значений с ростом их числа приближается к некоторому определенному числу. В случае шумов это среднее значение обычно равно нулю. Следовательно, сумма большого числа измерений шумовой составляющей приближается к нулю.

Из этого следует, что в ранее рассматриваемом выражении (2.6) второе слагаемое, являющееся шумовой составляющей, должно приближаться к нулю. Следовательно, даже в случае сильно «зашумленного» сигнала при суммировании с одной и той же фазой в результате усреднения форма сигнала выражается следующим соотношением:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s(t).$$

Шумовая составляющая уменьшается, проявляется полезная составляющая сигнала, и таким образом происходит подавление шумов.

(Изложенный выше способ увеличения отношения сигнал/помеха в отечественной теории и практике известен как одна из форм «метода накопления» (см. Харкевич А.А. Основы радиотехники. — М.: Связьиздат, 1962). — *Прим. редактора перевода.*)

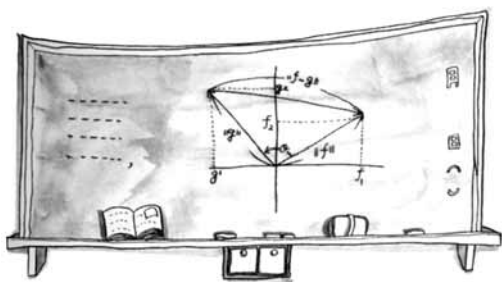
ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Способ скользящего среднего — это способ сглаживания, при котором уменьшаются шумы и высокочастотные колебания сигнала. При этом берется среднее значение измерений в области рассматриваемой точки. Обращается внимание на ширину области, в которой проводим усреднение. Если область слишком узкая, эффект сглаживания слабый, если слишком широкая — форма сигнала становится невыразительной.
2. При многократной передаче сигнала шумы можно подавить, суммируя сигнал в фазе и определяя его среднее значение. Этот способ называется синхронной фильтрацией.

Практические задания

- 1) Подумайте над способом сглаживания изображения посредством скользящего усреднения.
- 2) Буквы представлены в виде двузначного изображения. Подумайте над способом обработки для увеличения четкости контура букв.

НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ



3.1. ЧТО НУЖНО ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

В предыдущей главе с помощью наглядных примеров мы изложили несколько сравнительно простых способов обработки сигналов. Однако, для того чтобы более широко и глубоко изучить эти методы, нам понадобится помощь математики, без которой, как обычно, не обойтись. По своей природе сигнал отображает реальную физическую величину. Если представить его функцией или набором числовых значений, то возникает проблема обработки сигнала как функции или как набора числовых значений.

Неподготовленному читателю непросто воспринимать специальную математическую форму изложения. Именно поэтому в этой главе мы решили провести математическую гимнастику. Даже если поверхностно прочитать эту главу, то уже в некоторой степени станут понятны смысл и способ математических представлений. Стоит лишь ухватить суть математического подхода, и тогда сложные на первый взгляд формулы станут понятными, подобно фокусам, секреты которых фокусник раскрывает заранее.

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛА

В первой главе мы показали преобразование изменяющегося во времени аналогового сигнала $f(t)$ при соответствующем интервале дискре-

тизации и представлении выборок в цифровой форме. При малом интервале дискретизации можно достаточно точно воспроизвести первоначальный аналоговый сигнал по цифровому сигналу. Если временной интервал $[a, b]$ разделить на одинаковые отрезки, а сигнал f , уже подвергшийся дискретизации, перевести в цифровую форму и записать в виде ряда значений N точек

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N),$$

то \mathbf{f} можно представить N -мерным вектором (N -мерным вектором называется величина, представленная набором числовых значений N , расположенных в определенном порядке). Элемент из этого числового набора называется *компонентой вектора*.

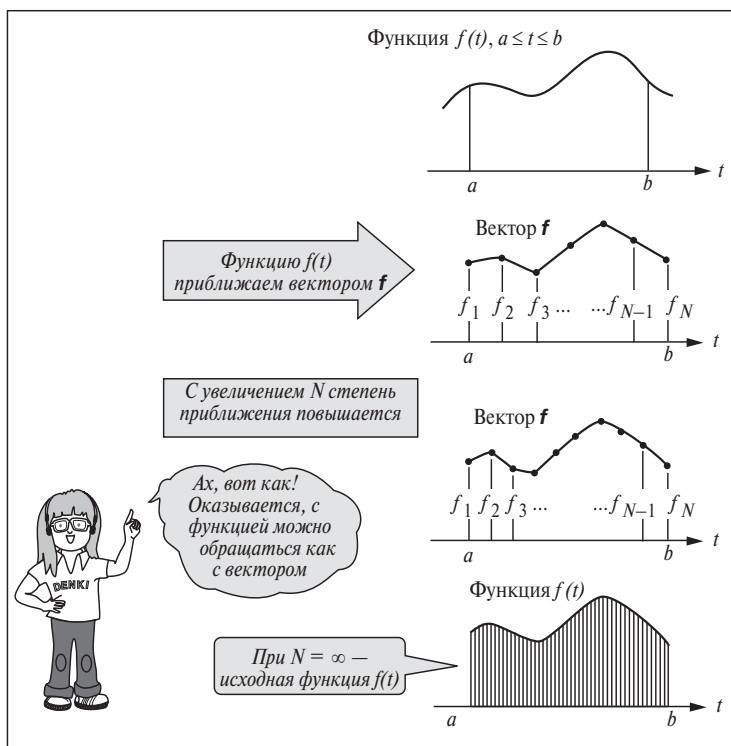


Рис. 3.1. Векторное представление функции.

Качество приближения функции $f(t)$ меняется в зависимости от числа N . Если N увеличивать, то степень приближения заметно улучшается. Если увеличивать N до бесконечно большого числа, то вся информация, содержащаяся в $f(t)$, будет содержаться в \mathbf{f} (Рис. 3.1). Это означает, что, в сущности, анализ вектора \mathbf{f} вместо функции $f(t)$ (если она не является «особой», т.е. не имеет точек разрыва) аналогичен анализу непрерывно изменяющегося во времени сигнала $f(t)$.

Двумерный вектор, расположенный в двумерном пространстве, или, иначе говоря, на плоскости, соответствует какой-либо одной точке на этой плоскости (Рис. 3.2).

Трёхмерный вектор соответствует одной точке в трёхмерном пространстве, а N -мерный вектор также соответствует одной точке, но

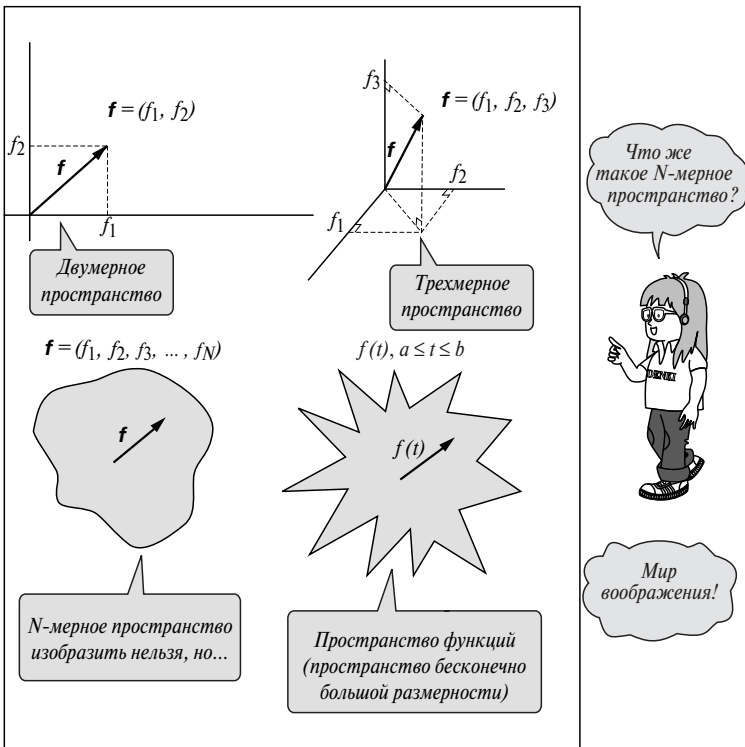


Рис. 3.2. Векторное пространство и пространство функций.

N -мерного пространства (к сожалению, изобразить это мы не можем). Если представить пространство бесконечно большой размерности N , то можно предположить, что непрерывная функция $f(t)$ соответствует одной точке этого пространства. Назовем это невидимое абстрактное пространство бесконечной размерности *пространством функций*.

Что касается вектора в двумерном пространстве или, иначе говоря, вектора на плоскости, то мы надеемся, что читатель знает, как выражать угол и величину вектора через расстояние и скалярное произведение. Если представить сигнал, который мы собираемся обработать, в форме вектора, то, используя понятие угла и величины вектора, может быть, удастся прояснить свойства сигнала.

При размерности векторного пространства $N > 2$ также можно определить расстояние между векторами и скалярное произведение. Более того, если рассуждать подобным образом, то же самое можно сделать и для пространства функций. Одним словом, давая определение расстоянию и скалярному произведению в пространстве функций, можно говорить о величине и угле между функциями. Вскоре мы будем использовать понятие взаимно перпендикулярных функций и представлять их в виде взаимно перпендикулярных векторов. В этом случае при внешней сложности формул станет понятно, что концепция, заключающаяся в использовании векторного расстояния и скалярного произведения для пространства функций, очень проста. Читатель может задать вопрос, какое отношение имеет подобная концепция к обработке сигналов? Дело в том, что при обработке сигналов мы будем оперировать такими понятиями, как функция корреляции и анализ Фурье, а они как раз основаны на использовании свойств расстояния и скалярного произведения при переходе от векторного пространства к пространству функции.

Мы коснулись сложной математической теории, и подробные выкладки могут вас испугать. Но нашей задачей прежде всего является изучение техники обработки сигналов, и нет необходимости в глубоких знаниях всей теории. Образно говоря, попробуем взобраться на вершину горы, не останавливаясь для того, чтобы полюбоваться красотой деревьев. На обратном пути, спускаясь с вершины, мы сможем охватить взглядом все великолепие открывающегося вида.

3.3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕ- ДЕНИЕ И РАССТОЯНИЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ВЕКТОРОВ

Сделав выборку некоторого сигнала $f(t)$, возьмем из нее два значения f_1 и f_2 . Таким же образом получим два значения для некоторого сигнала $g(t)$ (Рис. 3.3).

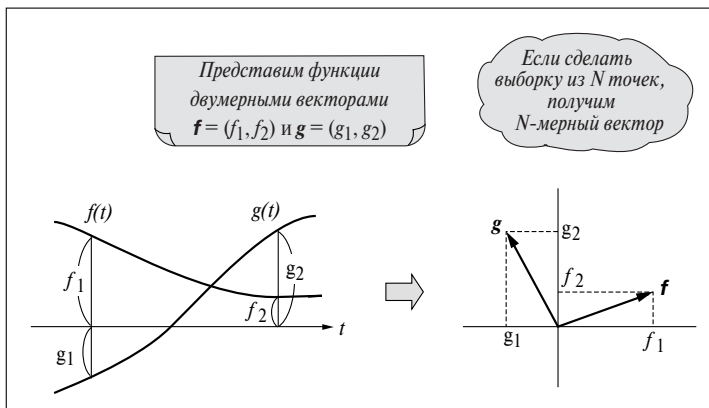


Рис. 3.3. Векторное выражение функции.

Что же нужно сделать для того, чтобы узнать степень взаимоотношения между двумя сигналами $f(t)$ и $g(t)$, исходя из их значений? Если сделать выборку, состоящую всего лишь из двух значений, то, естественно, степень приближения к первоначальному сигналу невысока. Как было изложено ранее, эта проблема разрешится, если увеличить число элементов выборки. Но пока рассмотрим случай выборки из двух точек.

Итак, определим векторы, содержащие по два элемента из выборки каждого сигнала, иначе говоря, двумерные векторы.

Обозначим их как \mathbf{f} и \mathbf{g} :

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2), \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2).$$

Если сигналы выразить через векторы таким образом, то исследование отношений между ними есть исследование отношений между векторами. В чем же заключается такое исследование? Во-первых, нужно выяснить, насколько удалены векторы \mathbf{f} и \mathbf{g} , т. е. измерить расстояние между векторами (Рис. 3.4). Пусть $d(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ —

расстояние между векторами \mathbf{f} и \mathbf{g} . Чем меньше значение d , тем ближе векторы \mathbf{f} и \mathbf{g} , а значит, и сильнее между ними взаимосвязь.

Величину вектора \mathbf{f} (абсолютное значение) обозначим как $\|\mathbf{f}\|$. Используя компоненты вектора \mathbf{f} , получим:

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}. \quad (3.1)$$

$\|\mathbf{f}\|$ называют также *нормой* вектора \mathbf{f} .

Итак, из рисунка видно, что *расстояние* между векторами \mathbf{f} и \mathbf{g} есть норма вектора $\mathbf{f} - \mathbf{g}$. Это можно записать, используя компоненты векторов, в следующем виде:

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| = \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2} \quad (3.2)$$

Расстояние — это один из параметров, измеряющий силу связи между векторами. Однако посмотрите на **Рис. 3.5**. На этом рисунке векторы \mathbf{g} и \mathbf{h} одинаково удалены от вектора \mathbf{f} . Но векторы \mathbf{g} и \mathbf{f} имеют одно направление, а вектор \mathbf{h} расположен под углом к вектору \mathbf{f} . Поэтому, увеличив вектор \mathbf{f} в несколько раз, можно получить вектор \mathbf{g} и невозможно получить вектор \mathbf{h} . Несмотря на равноудаленность

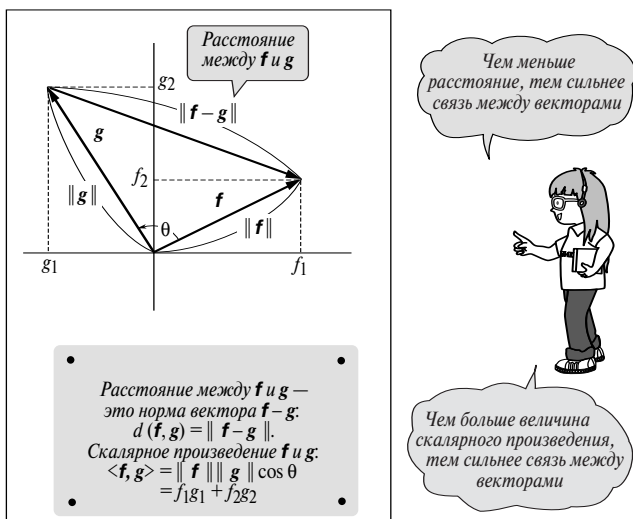


Рис. 3.4. Расстояние и скалярное произведение двумерных векторов.

g и h от вектора f , связь f и g гораздо сильнее. Видимо, было бы недостаточно выражать связь между векторами одним лишь расстоянием. Необходимо также учитывать угол между ними (Рис. 3.5).

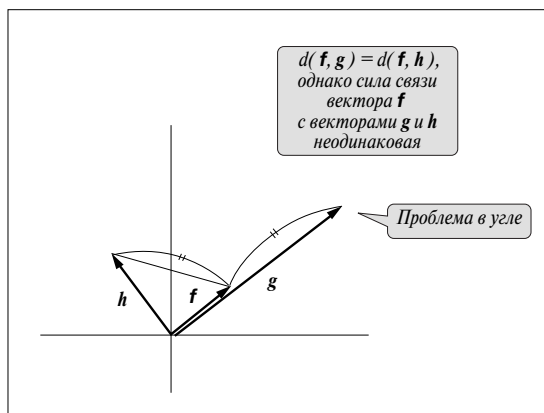


Рис. 3.5. Связь между векторами.

Для выражения связи между векторами используют *скалярное произведение*. Скалярное произведение между f и g обозначается как $\langle f, g \rangle$ и определяется как

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos \theta. \quad (3.3)$$

Следовательно,

$$\cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|}.$$

Обозначим эту величину

$$r = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|}, \quad (3.4)$$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$, следовательно,

$-1 \leq r \leq 1$. Величина r выражает силу связи между векторами f и g через угол между ними (Рис. 3.6). Если направление f и g совпадают (т. е. $\theta = 0$), то r принимает максимальное значение, равное 1. С увеличением угла θ значение r уменьшается. Если $r = 0$, т. е. $\langle f, g \rangle = 0$,

3. Необходимые математические представления

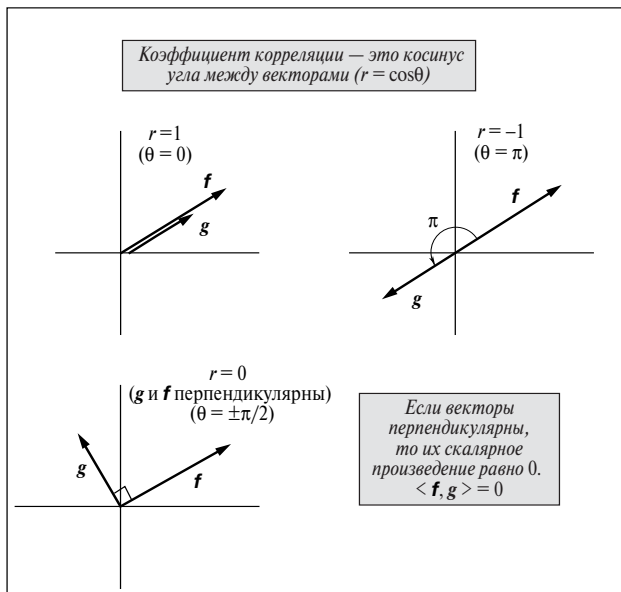


Рис. 3.6. Коэффициент корреляции.

векторы \mathbf{f} и \mathbf{g} взаимно перпендикулярны. Назовем величину r *коэффициентом корреляции*. Как видно из соотношения (3.4), r зависит от угла между векторами и не зависит от нормы векторов.

Как выразить скалярное произведение, используя компоненты вектора? Это можно сделать следующим образом:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2. \quad (3.5)$$

Чтобы вывести эту формулу, применим теорему косинусов для векторов (**Рис. 3.4**):

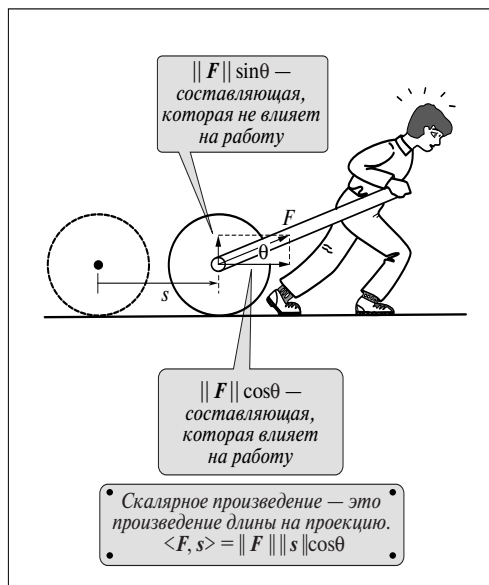
$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 &= \|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2 - 2\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \cos\theta = \\ &= \|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2 - 2\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= \|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2 - \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \\ &= (f_1^2 + f_2^2) + (g_1^2 + g_2^2) - \{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2\} = 2(f_1 g_1 + f_2 g_2). \end{aligned}$$

ПАМЯТКА

Скалярное произведение векторов



Подобно тому как расстояние определяется произведением скорости на время, многие величины определяются произведением двух различных сомножителей. Всегда ли достаточно просто перемножить две величины? Например, работа равна произведению силы F [Н], приложенной к телу, на величину перемещения s [м]:

$$W = Fs \text{ [Дж]}.$$

Однако если направление силы и направление перемещения тела не совпадают, данное определение работы нас не устраивает. Если направления перемещения и силы образуют угол θ , то эффективной составляющей силы, перемещающей тело, является $F \cos \theta$. Составляющая $F \sin \theta$ не оказывает никакого влияния на работу. Следовательно, определим работу следующим образом:

$$W = Fs \cos \theta.$$

Поскольку сила F и перемещение s — величины векторные, то уместно определить работу как скалярное произведение:

$$W = \langle F, s \rangle = \|F\| \|s\| \cos \theta.$$

Из этого примера понятно, что произведение векторов выражается как произведение их проекций. Таким образом определяют скалярное произведение.

Кстати, скалярное произведение вектора \mathbf{f} на самого себя равно:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = f_1^2 + f_2^2 = \|\mathbf{f}\|^2 \quad (3.6)$$

и выражает связь между скалярным произведением и нормой.

Подставим полученные результаты в выражение коэффициента корреляции (3.4) и представим r следующим образом:

$$r = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (3.7)$$

3.4. ОРТО- НОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Для представления одномерных величин достаточно одного параметра. Например, при измерении длины используют один стандарт величины (сантиметры, миллиметры). Если принять, что 1 см — единица измерения, то 5 см больше 1 см в 5 раз, следовательно, выражается как 5 единиц. Также и в векторном пространстве принято выбирать единицу измерения, которая выражает стандарт величины. Однако в двумерном пространстве одного параметра, измеряющего величину, недостаточно. Необходимо два параметра.

Пара взаимно перпендикулярных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ называется *ортгональным базисом*. Кроме того, если $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 1$, то эта пара называется *ортонормированным базисом*. Вектор с нормой, равной 1, называется *единичным вектором*. Иначе говоря, единичный вектор — это вектор, выражающий величину одной единицы измерения. Следовательно, ортонормированный базис представляет собой пару взаимно перпендикулярных единичных векторов, которые в совокупности с парой параметров дают величину вектора.

Выразим вектор \mathbf{f} через векторы ортонормированного базиса \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 и совокупность коэффициентов C_1 , C_2 (**Рис. 3.7**):

$$\mathbf{f} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2. \quad (3.8)$$

Коэффициенты (C_1, C_2) выражают величину составляющих вектора \mathbf{f} в направлении \mathbf{v}_1 и в направлении \mathbf{v}_2 . Иначе говоря, определяют величину вектора. Любой вектор на плоскости можно выразить через это соотношение. Векторы $C_1 \mathbf{v}_1$ и $C_2 \mathbf{v}_2$ называются *проекциями* вектора \mathbf{f} .

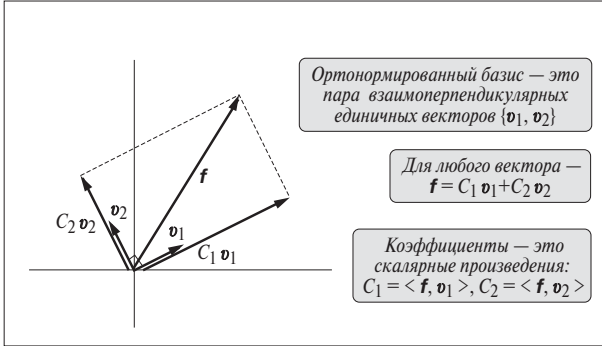


Рис. 3.7. Выражение вектора через ортонормированный базис.

Пусть дан вектор \mathbf{f} и заранее образована система базисных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Для того чтобы выразить вектор \mathbf{f} через базис $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ в соотношении (3.8), необходимо знать, как получить коэффициенты C_1 и C_2 . Забегая вперед, представим коэффициенты C_1 и C_2 как скалярные произведения вектора \mathbf{f} на каждый из векторов \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 :

$$C_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle, \quad C_2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2 \rangle \quad (3.9)$$

А теперь покажем, как выводится эта формула. Пусть

$$\mathbf{f} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2.$$

Найдем скалярное произведение левой и правой частей равенства и вектора \mathbf{v}_1

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle C_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle C_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \\ &= C_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + C_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Согласно свойствам базиса $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|^2 = 1 \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 0.$$

И так как правая часть равна C_1 , то справедливо равенство:

$$C_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Подобным образом можно получить выражение для C_2 :

$$C_2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2 \rangle.$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1:

Могут ли векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 образовать базис, если

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2} \right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Решение:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(-\frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = 1$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 1$$

Следовательно, векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 могут образовать базис.

Пример 2:

Разложить вектор

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

по базису $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, данному в примере 1.

Решение:

Вектор \mathbf{f} можно представить как:

$$\mathbf{f} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2$$

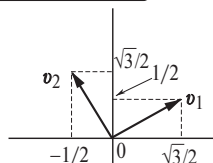
$$C_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = 2$$

$$C_2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

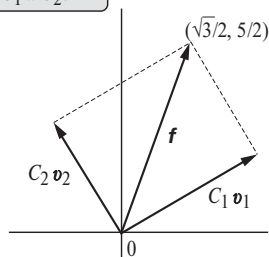
Следовательно,

$$\mathbf{f} = 2\mathbf{v}_1 + \sqrt{3}\mathbf{v}_2$$

Является ли $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ортонормированным базисом?



Каковы коэффициенты C_1 и C_2 ?



Значит, в векторе \mathbf{f} содержится 2 вектора \mathbf{v}_1 и $\sqrt{3}$ вектора \mathbf{v}_2



3.5. ПЕРЕХОД ОТ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА К ПРОСТРАНСТВУ ФУНКЦИЙ

Мы уже знаем, как выразить скалярное произведение и расстояние между векторами в двумерном пространстве. А как быть в случае пространства большего числа измерений. Рассмотрим, например, вектор трехмерного пространства:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3).$$

Известно, что его норму или расстояние от исходной точки до точки (f_1, f_2, f_3) можно выразить как:

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}. \quad (3.10)$$

Обобщая выражение (3.10), можно предположить, что норма вектора $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ N -мерного пространства определяется как:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_N^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^N f_k^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

А как же будет выглядеть норма вектора в случае пространства бесконечной размерности, иначе говоря, пространства функций. Норма функции $f(t)$ в этом случае является величиной функции. Каким же образом ее определить? Это становится понятным, если обратиться к формуле, которая часто используется применительно к физическим явлениям (см. памятку ниже).

Норма функции $f(t)$ ($a \leq t \leq b$) определяется соотношением:

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

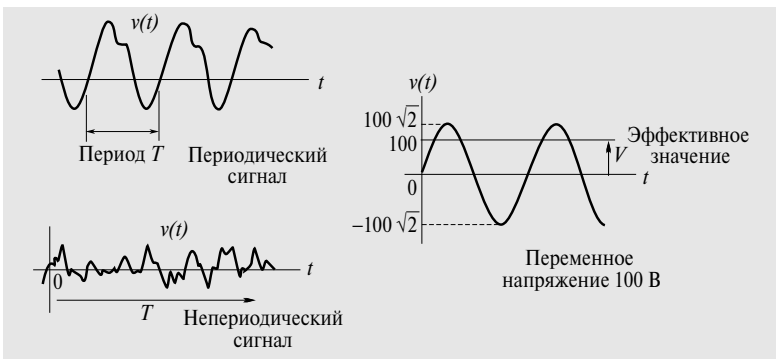
как обобщение N -векторной нормы. Это определение, в общем, нас устраивает. Но чем больше интервал в этой формуле, тем больше значение нормы. Поэтому удобнее пронормировать норму функции $f(t)$ относительно длины интервала:

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt} \quad (3.12)$$

По этой же причине в случае многовекторной нормы, чтобы избежать влияния размерности N , часто используется соотношение:

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k^2}. \quad (3.13)$$

ПАМЯТКА



Обозначим значение переменного напряжения в момент времени t как $V(t)$. Для выражения величины напряжения $V(t)$ обычно используют так называемое эффективное значение. Если сигнал напряжения периодический, с периодом T , то эффективное значение выражают в виде среднеквадратического мгновенного значения:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}.$$

Например, если мы используем источник энергии с напряжением в 100 В, то эта величина есть напряжение, выраженное эффективным значением. Мгновенное максимальное значение напряжения — 140 В. (Подумайте, почему. Подсказка: $V(t)$ выражается синусоидой и $140 = 102$.) Если сигнал напряжения непериодический, то мы не можем использовать это определение, но можем выразить эффективное напряжение в виде среднеквадратического значения напряжения за длительное время:

$$V = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}.$$

Реально мы не можем сделать время усреднения T бесконечно большим. Но при достаточно продолжительном времени усреднения напряжение V приближается к какой-либо определенной величине.

Если сопоставить формулы нормы функции и нормы вектора, понятно следующее соответствие:

вектор \rightarrow функция

сумма \rightarrow интеграл

Применяя это соответствие, грубо говоря, можно осуществить естественное обобщение из векторного пространства в пространство функций. Покажем это подробнее. Из соотношений, выражающих расстояние и норму в N -мерном пространстве:

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (f_k - g_k)^2} \quad (3.14)$$

определим расстояние между двумя функциями $f(t)$ и $g(t)$ на интервале $[a, b]$. Заменяв вектор функцией, а сумму — интегралом, получим

$$d(f(t), g(t)) = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \{f(t) - g(t)\}^2 dt}. \quad (3.15)$$

Это соотношение часто применяется для вычисления средне-квадратической погрешности.

Следующий шаг — определение скалярного произведения. Если мы имеем векторы \mathbf{f} и \mathbf{g} в двумерном пространстве и угол θ между ними, то скалярное произведение этих векторов определяется как:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \cos \theta = f_1 g_1 + f_2 g_2.$$

Скалярное произведение учитывает угол между векторами. То же самое относится к многомерному пространству. Если два вектора \mathbf{f} и \mathbf{g} в N -мерном пространстве расположены под углом θ друг к другу, то их скалярное произведение можно определить как:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \cos \theta. \quad (3.16)$$

Представляя это выражение через составляющие вектора, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_N g_N = \\ &= \sum_{k=1}^N f_k g_k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Кстати говоря, из этого соотношения можно вывести коэффициент корреляции в N -мерном пространстве.

Учитывая выражение для коэффициента корреляции в двумерном пространстве (3.7), получим:

$$r = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle}{\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|} = \frac{\sum_{k=1}^N f_k g_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^N f_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N g_k^2}}. \quad (3.18)$$

Итак, обобщив соотношение (3.17), уже проще вывести формулу для скалярного произведения функций. Используя соответствие вектор \rightarrow функция, сумма \rightarrow интеграл, определим скалярное произведение функций $f(t)$ и $g(t)$ на интервале $[a, b]$:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (3.19)$$

Скалярное произведение функции $f(t)$ на саму себя:

$$\begin{aligned} \langle f(t), f(t) \rangle &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt = \\ &= \|f(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Это означает, что $f(t)$ имеет те же свойства, какими обладает многомерный вектор в векторном пространстве. То, что мы смогли определить скалярное произведение функций, означает также и то, что мы приняли и учли такое понятие, как угол между функциями. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ в пространстве функций расположены под углом θ , то коэффициент корреляции можно определить так же, как и в случае векторов, используя норму и скалярное произведение:

$$r = \cos \theta = \frac{\langle f(t), g(t) \rangle}{\|f(t)\| \|g(t)\|} \quad (3.21)$$

Если записать подробно, то получим:

$$r = \frac{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt}{\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b g^2(t) dt}}. \quad (3.22)$$

Это соотношение имеет довольно сложный вид, но принцип тот же, что и в случае векторов. Как и прежде, коэффициент корреляции показывает степень «похожести» функций. Причем r принимает значения от -1 до 1 ($-1 \leq r \leq 1$). Чем больше значение r по абсолютной величине, тем выше корреляция между функциями. Иначе говоря, они более похожи.

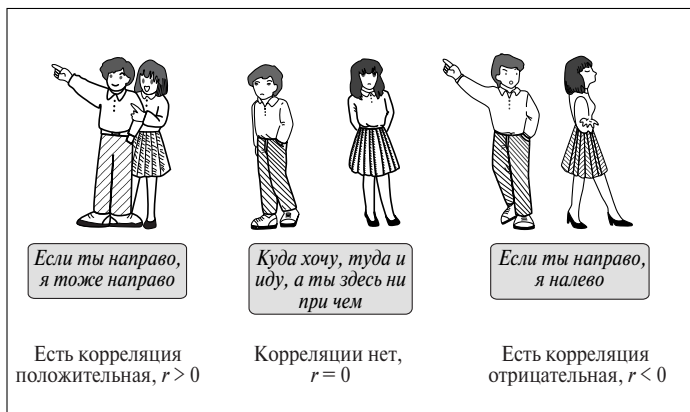


Рис. 3.8. Что такое корреляция.

Итак, стало понятно, что, используя скалярное произведение, можно определить угол между функциями. А если это так, то мы можем определить взаимную перпендикулярность функций так же, как и взаимную перпендикулярность векторов.

Если $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$, то $f(t)$ и $g(t)$ взаимно перпендикулярны

Например, две функции $f(t) = t$ и $g(t) = 1$ взаимно перпендикулярны на интервале значений t $[-1, 1]$. Это следует из того, что:

$$\langle t, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

3.6. СИСТЕМА ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Мы уже знаем как выразить вектор \mathbf{f} двумерного пространства через ортонормированный базис векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$:

$$\mathbf{f} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2.$$

Таким же образом через ортонормированный базис можно выразить вектор и в N -мерном пространстве (На **Рис. 3.9** показан ортонормированный вектор в трехмерном пространстве).

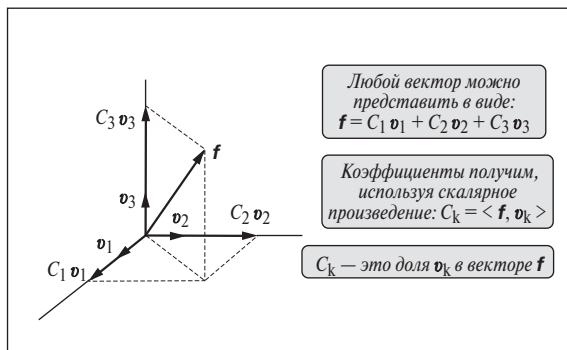


Рис. 3.9. Выражение вектора 3-мерного пространства через ортонормированный базис.

Ортонормированный базис — это множество взаимно перпендикулярных единичных векторов. Множество векторов $\{\mathbf{v}_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ в N -мерном пространстве, где

$$\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n \rangle = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ 1 & : m = n \end{cases}$$

(т. е. \mathbf{v}_m и \mathbf{v}_n взаимно перпендикулярны и являются единичными), называется *ортонормированным базисом* N -мерного пространства. Для их выражения используется символ *Кронекера* δ_{mn}

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ 1 & : m = n \end{cases}.$$

И в упрощенном виде записывается следующим образом:

$$\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n \rangle = \delta_{mn}.$$

Если все векторы взаимно перпендикулярны, то ни один из них нельзя выразить через другие векторы. Иначе говоря, они независимы.

Используя ортонормированный базис векторов, можно представить вектор в виде линейной комбинации базисных векторов. Иначе говоря, N -мерный вектор можно представить в виде:

$$\mathbf{f} = C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 + \dots + C_N \mathbf{v}_N. \quad (3.23)$$

В этой формуле, по аналогии с формулой (3.9), коэффициент C_k выражается как:

$$C_k = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_k \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (3.24)$$

Докажем это. Так же, как и в двумерном случае, распишем скалярное произведение функции и вектора \mathbf{v}_k :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_k \rangle &= \langle C_1 \mathbf{v}_1 + C_2 \mathbf{v}_2 + \dots + C_k \mathbf{v}_k + C_N \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_k \rangle = \\ &= C_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k \rangle + C_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k \rangle + \dots + C_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle + \dots + C_N \langle \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_k \rangle. \end{aligned}$$

Согласно свойствам системы базисных векторов

$$\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \|\mathbf{v}_k\|^2 = 1, \quad \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_k \rangle = 0 \quad (m \neq k).$$

В результате в правой части остается только C_k , т. е.

$$C_k = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_k \rangle.$$

Коэффициент C_k показывает величину составляющей вектора \mathbf{f} в направлении вектора \mathbf{v}_k и выражается в виде скалярного произведения \mathbf{f} и \mathbf{v}_k .

Возникает вопрос, нельзя ли ввести ортонормированную систему в пространство функций так же, как она вводится для векторного пространства? Иначе говоря, нельзя ли ввести множество взаимно перпендикулярных единичных функций? Если это возможно, то рассматриваемую функцию можно выразить в виде линейной комбинации таких функций. То есть ее можно разложить на составляющие — функции, свойства которых известны заранее.

Рассмотрим некоторое множество функций (семейство функций). Если число функций этого множества невелико, можно обозначить их, используя алфавит, как $\{f(t), g(t), h(t), \dots\}$. Для того чтобы выразить множество, включающее бесконечно большое число функций, можно обозначить их, используя нижний индекс:

$$\{\varphi_k(t), k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Будем считать, что любые две функции из этого семейства функций на интервале $[a, b]$ взаимно перпендикулярны. Иначе говоря, если скалярное произведение

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots, m \neq n),$$

то семейство этих функций называется *системой ортогональных функций*. Кроме того, если норма каждой из этих функций равна 1:

$$\langle \phi_m(t), \phi_m(t) \rangle = \|\phi_m(t)\|^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi_m^2(t) dt = 1,$$

то это семейство называется *ортонормированной системой функций*. Одним словом, если система является системой ортонормированных функций $\{\phi_k(t)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то, используя символ Кронекера (стр. 54), получим:

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \delta_{mn}. \quad (3.25)$$

С помощью ортонормированной системы функций функцию $f(t)$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 \phi_0(t) + C_1 \phi_1(t) + C_2 \phi_2(t) + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \phi_k(t). \end{aligned}$$

Ортонормированная система функций — это совокупность составляющих, определяющих функцию, с их весовыми коэффициентами.

(3.26)

Из этого соотношения понятно, что коэффициент C_k выражает долю составляющей $\phi_k(t)$ функции $f(t)$. Мы уже знаем, что для вывода выражения C_k нужно взять скалярное произведение $f(t)$ и $\phi_k(t)$. Из соотношения (3.26) получим:

$$\begin{aligned} \langle f(t), \phi_k(t) \rangle &= \\ &= C_0 \langle \phi_0(t), \phi_k(t) \rangle + C_1 \langle \phi_1(t), \phi_k(t) \rangle + \dots + C_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle + \dots = \\ &= C_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{\infty} C_m \langle \phi_m(t), \phi_k(t) \rangle. \end{aligned}$$

По определению системы ортонормированных функций, скалярное произведение всех комбинаций с $m \neq n$ равно 0, поэтому в итоге в правой части равенства остается лишь C_k . Следовательно,

$$\begin{aligned} C_k &= \langle f(t), \phi_k(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \phi_k(t) dt \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.27)$$

На конкретном примере рассмотрим, какая система функций является системой ортонормированных функций? Например, образует ли система функций

$$\{1, \sin t, \sin 2t, \dots\}$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему ортонормированных функций (**Рис. 3.10**)? Для того чтобы исследовать это, нужно провести следующие вычисления:

$$\langle 1, \sin nt \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt = -\frac{1}{2n\pi} [\cos nt]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

ШПАРГАЛКА

Формулы разложения произведения тригонометрических функций на сумму:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}, \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}, \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}. \end{aligned}$$



Следовательно, 1 и $\sin nt$ взаимно перпендикулярны.

Если $m \neq n$, то

$$\begin{aligned} \langle \sin mt, \sin nt \rangle &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)t - \cos(m-n)t \} dt = \\ &= -\frac{1}{4\pi(m+n)} [\sin(m+n)t]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4\pi(m-n)} [\sin(m-n)t]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

То есть $\sin mt$ и $\sin nt$ ($m \neq n$) также взаимно перпендикулярны.

3. Необходимые математические представления

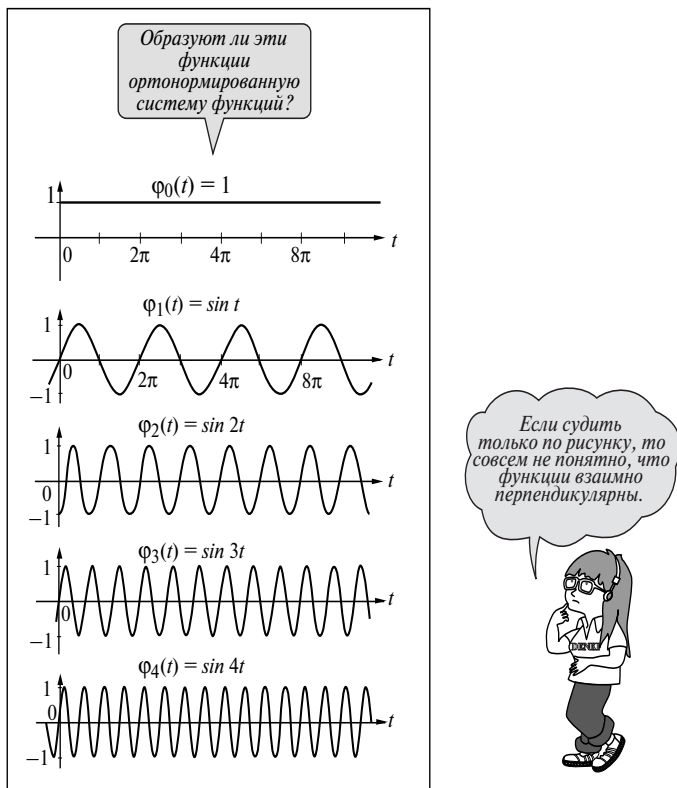


Рис. 3.10. Является ли система функций ортогональной?

Из вышеизложенных результатов ясно, что множество функций $\{1, \sin t, \sin 2t, \dots\}$ образуют систему ортогональных функций. Однако норма каждой функции

$$\begin{aligned} \|\sin nt\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2nt) \, dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} [t]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi \cdot 2n} [\sin 2nt]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

не равна 1, а значит, функции не являются ортонормированными.

ШПАРГАЛКА**Формулы половинного угла:**

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$



Если норма $\|f(t)\|$ функции $f(t)$ не равна 1, то создадим новую функцию $f^*(t)$:

$$f^*(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}.$$

Очевидно, что норма $f^*(t)$ равна 1. Подобная операция называется *нормировкой системы функций*. В нашем случае

$$\|f(t)\| = 1/\sqrt{2},$$

поэтому, представляя исходную систему функций в новом виде:

$$\{1, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin 2t, \dots\},$$

получим множество функций, образующих систему ортонормированных функций.

ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Если для непрерывного сигнала $f(t)$ произведена выборка из N значений, то этот сигнал можно представить в виде N -мерного вектора, который соответствует одной точке N -мерного пространства.
2. Величина сигнала выражается нормой вектора, а отличие двух сигналов — расстоянием между векторами. Скалярное произведение векторов — это произведение проекции одного вектора на длину другого. Коэффициент корреляции выражает угол между векторами, а также степень похожести сигналов. Чем больше по абсолютной величине коэффициент корреляции, тем более похожи сигналы. Если он равен 0, то векторы, отображающие сигналы, взаимно перпендикулярны.

3. Множество взаимно перпендикулярных векторов, норма которых равна 1, называется ортонормированным базисом. Вектор можно разложить по базису. Составляющие получают с помощью скалярного произведения.
4. Функцию можно представить как одну точку векторного пространства с бесконечно большой размерностью (пространства функций). Так же, как и в векторном пространстве, можно определить ее норму, расстояние, скалярное произведение и коэффициент корреляции. Ортонормированному базису в векторном пространстве соответствует система ортонормированных функций, по которой может быть разложена рассматриваемая функция. Составляющие определяются скалярным произведением.

Практические задания

- 1) Даны два трехмерных вектора: $\mathbf{f} = (4, -4, 7)$, $\mathbf{g} = (3, -2, 6)$. Требуется найти расстояние между ними, их скалярное произведение и коэффициент корреляции, а также составляющую вектора \mathbf{f} в направлении вектора \mathbf{g} .
- 2) Убедитесь в том, что периодические сигналы, изображенные на **Рис. 3.11**, на отрезке $[0, 1]$ взаимно перпендикулярны.

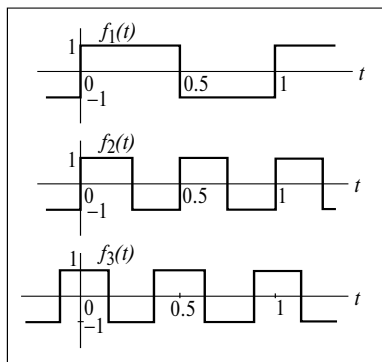


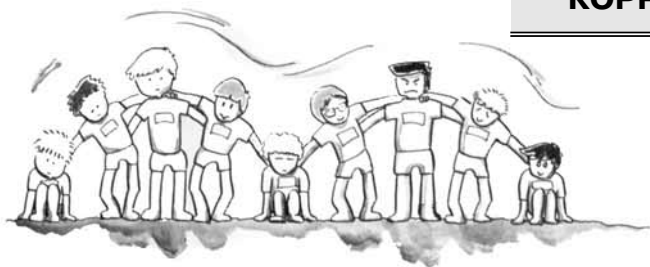
Рис. 3.11.

- 3) Докажите, что множество функций

$$\{1, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos 2t, \sqrt{2} \sin 2t, \dots\}$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$ образует систему ортонормированных функций.

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ



4.1. ИЗМЕРЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОДОБИЯ ФУНКЦИЙ

В предыдущей главе мы провели математическую подготовку и теперь, начиная с этой главы, можем смело перейти к применению полученных навыков. В первую очередь рассмотрим функцию корреляции.

Посмотрите на графики температуры атмосферы для разных областей земного шара (**Рис. 4.1**). В Дели, столице Индии, температура атмосферы в среднем довольно высокая, в Москве, столице России, — достаточно низкая. Буэнос-Айрес, столица Аргентины, расположен в Южном полушарии. Поэтому, когда в Северном полушарии — лето, в Аргентине — зима. Эти особенности также отражены на графиках температур атмосферы в этих городах. А что если попробовать вычислить коэффициент корреляции температур, представленных этими графиками для разных городов?

Изменение температуры атмосферы можно считать непрерывным сигналом. Для простоты представим его дискретным, выражающим среднюю температуру каждого месяца, и попробуем проанализировать этот сигнал. Представим температуру атмосферы некоторого города в виде функции f_i , где i обозначает номер месяца. Тогда температуру одного года можно представить в виде 12-мерного вектора $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{12})$. Таким же образом представим температуру некоторого другого города в виде вектора $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_{12})$.

4. Функция корреляции

В этом случае, согласно выражению (3.18) из главы 3, коэффициент корреляции r выражается как

$$r = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle}{\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{12} f_i g_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{12} f_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{12} g_i^2}} \quad (4.1)$$

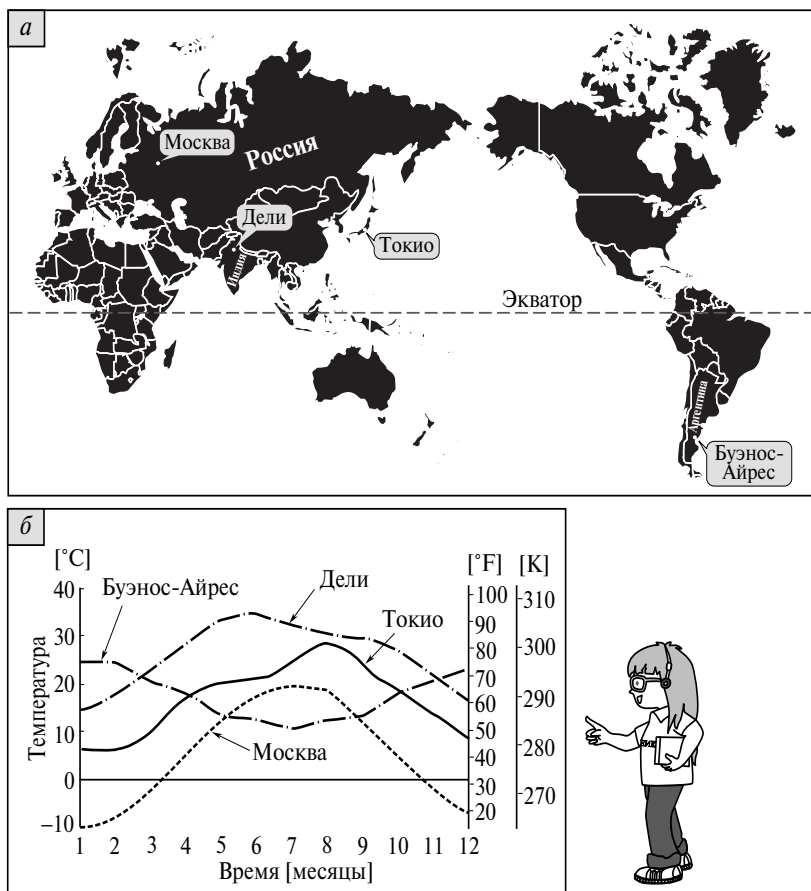


Рис. 4.1. Графики температуры атмосферы в разных городах мира.

Итак, если вычислить коэффициенты корреляции температур атмосферы для указанных городов, то результаты можно представить в виде **Табл. 4.1**. Пока мы имеем в виду первую колонку, где представлены коэффициенты корреляции, полученные в результате измерений температуры по шкале Цельсия. Чем больше значение коэффициента корреляции, тем выше сходство в особенностях температур. Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что значения температуры атмосферы наиболее близки в Токио и Дели (коэффициент корреляции 0.97). И наиболее далеки — в Москве и Буэнос-Айресе.

Табл. 4.1. Коэффициенты корреляции температуры атмосферы в разных областях земного шара

Города	Коэффициент корреляции		
	Измерения по шкале Цельсия	Измерения по шкале Фаренгейта	Измерения по шкале Кельвина (абсолютная температура)
Токио — Москва	0.73	0.97	1.00
Токио — Дели	0.97	0.99	1.00
Токио — Буэнос-Айрес	0.78	0.94	1.00
Москва — Дели	0.62	0.96	1.00
Москва — Буэнос-Айрес	0.16	0.85	1.00
Дели — Буэнос-Айрес	0.87	0.96	1.00

Если единица измерения температуры меняется, коэффициент корреляции тоже меняется!?

Кстати, помимо шкалы Цельсия, существуют и другие единицы измерений температуры атмосферы. В Америке, Англии в повседневной жизни для таких измерений используют шкалу Фаренгейта. При этом шкала градуирована таким образом, что температуре 0°F соответствует -17.8°C , а $+100^{\circ}\text{F}$ — $+37.8^{\circ}\text{C}$. Очевидно, что значения температуры по шкале Цельсия и по шкале Фаренгейта существенно отличаются. Если вычислить коэффициент корреляции, используя шкалу Фаренгейта, то, как видно из **Табл. 4.1** (вторая колонка), мы получим результат, совершенно отличный от полученного при использовании шкалы Цельсия. А если вычисления произвести для

4. Функция корреляции

абсолютной температуры, часто используемой в физике, то окажется, что все коэффициенты корреляции равны 1. Это означает, что если за точку отсчета взять температуру абсолютного нуля, то температура атмосферы в любой точке земного шара примерно одинакова.

Итак, с изменением температурной шкалы меняется и значение коэффициента корреляции. Что же нужно сделать для определения коэффициента корреляции, не зависящего от единицы измерения температуры? В этом случае нужно вычесть среднее значение температуры из компонент векторов, представляющих температуру. Обозначим среднее значение каждой из функций f и g как \bar{f} и \bar{g} :

$$\bar{f} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} f_i, \quad \bar{g} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} g_i.$$

Вычитая соответствующее среднее из каждого результата измерения, получим новые векторы для вычисления коэффициента корреляции:

$$\mathbf{f}' = (f_1 - \bar{f}, f_2 - \bar{f}, \dots, f_{12} - \bar{f}),$$

$$\mathbf{g}' = (g_1 - \bar{g}, g_2 - \bar{g}, \dots, g_{12} - \bar{g}).$$

Полученные при этом коэффициенты корреляции представлены в **Табл. 4.2**.

Табл. 4.2. Коэффициенты корреляции, вычисленные с учетом среднего значения функции

Города	Коэффициент корреляции		
	Измерения по шкале Цельсия	Измерения по шкале Фаренгейта	Измерения по шкале Кельвина (абсолютная температура)
Токио — Москва	0.95	0.95	0.95
Токио — Дели	0.87	0.87	0.87
Токио — Буэнос-Айрес	-0.95	-0.95	-0.95
Москва — Дели	0.95	0.95	0.95
Москва — Буэнос-Айрес	-0.99	-0.99	-0.99
Дели — Буэнос-Айрес	-0.95	-0.95	-0.95

Если вычесть среднее значение, коэффициент не меняется

Корреляция температуры Буэнос-Айреса с температурой других городов — отрицательная

Из таблицы видно, что, несмотря на различие в единицах измерения температуры, результаты вычислений коэффициентов корреляции одни и те же. А также видно, что коэффициент корреляции температуры Токио и Москвы, для которых графики температурного хода похожи, стал гораздо выше. В то же время коэффициент корреляции температуры Буэнос-Айреса относительно других городов является отрицательной величиной. Отметим это. Необходимо также обратить внимание на то, что при использовании метода вычитания среднего значения функции характер колебаний температуры атмосферы, который, например, для Москвы и Дели резко отличается, не просматривается. Следовательно, если нужно выделить особенности колебаний непосредственно температуры, то метод вычитания среднего значения не подходит. Это говорит о том, что при определении коэффициента корреляции всегда нужно тщательно обдумать цель анализа.

Ясно, что при необходимости вычисления коэффициента корреляции, связанного с изменением сигнала, среднее значение функции можно вычитать. Возникает вопрос: не будет ли единица измерения или величина сигнала влиять на коэффициент корреляции. Очевидно, что не будет, потому что коэффициент корреляции есть величина, зависящая от угла вектора, и никак не зависит от его модуля. Из соотношения (4.1) видно, что поскольку скалярное произведение делится на каждую из норм, то размер вектор-функции автоматически нормируется. Следовательно, можно вычислять коэффициенты корреляции различных сигналов вне зависимости от физических свойств сигналов и их величины.

4.2. ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

При вычислении коэффициентов корреляции температуры атмосферы разных частей света мы обнаружили, что коэффициент корреляции Буэнос-Айреса, который находится в южном полушарии, отрицательный. Однако посмотрим еще раз на графики температуры на **Рис. 4.1**. Очевидно, что ход температуры для Буэнос-Айреса имеет отличный характер. А теперь обратимся к **Рис. 4.2**, где изображен график температуры для Буэнос-Айреса в том случае, если сдвинуть его по оси времени на полгода.

4. Функция корреляции

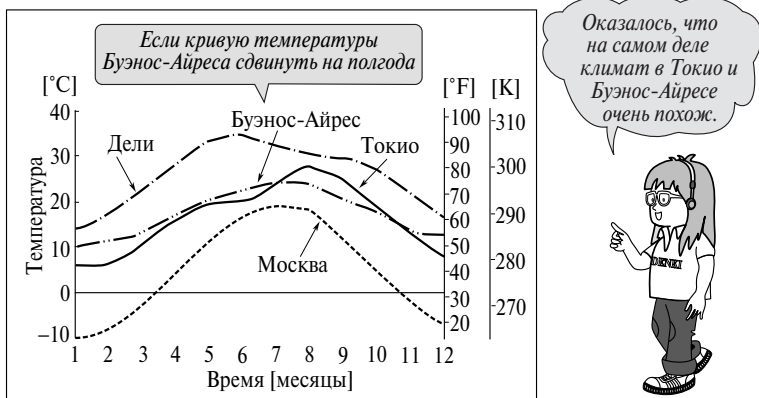


Рис. 4.2. Температурные зависимости при сдвинутой оси абсцисс.

И что мы видим? Оказывается, что ход температурной зависимости для Буэнос-Айреса и для Токио весьма похожи.

Для определения сходства или различия двух сигналов используют *функцию взаимной корреляции*.

Функция взаимной корреляции двух периодических сигналов $f(t)$ и $g(t)$ с периодом T записывается следующим образом:

$$R_{fg}(\tau) = \langle f(t), g(t+\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t+\tau) dt. \quad (4.2)$$

Это соотношение выражает величину связи между функциями при сдвиге их на время τ . Коэффициент корреляции вычисляется следующим образом:

$$R_{fg}(\tau) = \frac{\langle f(t), g(t+\tau) \rangle}{\|f(t)\| \|g(t)\|}. \quad (4.3)$$

Величина $R_{fg}(\tau)$ колеблется от -1 до 1 . Коэффициент взаимной корреляции можно вычислять с учетом среднего значения, подобно тому, как это делалось для функции корреляции. При этом среднее значение нужно вычесть заранее.

Итак, попробуем определить функцию взаимной корреляции температуры Токио и Буэнос-Айреса. Функция взаимной корреляции для цифровых сигналов f_i, g_i ($i = 1, 2, \dots, N$) определяется следующим образом:

$$R_{fg}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i g_{i+j}. \quad (4.4)$$

Если температуру считать периодической функцией с периодом 1 год, то при сдвиге температурной зависимости на время τ недостающие данные можно восполнить из другой части графика (**Рис. 4.3**).

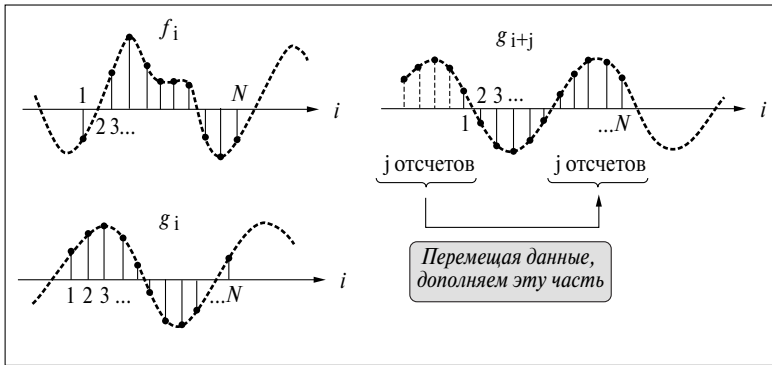


Рис. 4.3. Дополнение данных.

График взаимной корреляции между температурами Токио и Буэнос-Айреса представлен на **Рис. 4.4**. Пик функции приходится на 6-й месяц. Из этого видно, что поведение температуры для обоих городов похоже, но изменение температуры сдвинуто по оси времени на полгода.

Однако при обработке сигналов рассматриваются не только периодические сигналы. Если величина сигнала в зависимости от времени не является периодической функцией, давайте попробуем воспользоваться следующим соотношением для определения функции взаимной корреляции:

$$R_{fg}(\tau) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t+\tau) dt.$$

4. Функция корреляции

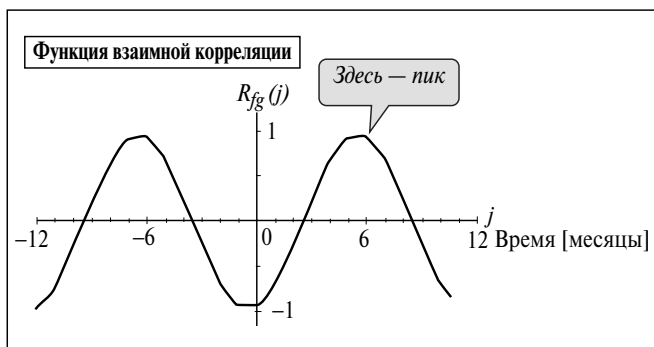


Рис. 4.4. Функция взаимной корреляции температуры Токио и Буэнос-Айреса.

Иначе говоря, берем скалярное произведение на интервале $[a, b]$. Если длина интервала слишком короткая, то существует опасность, что объём информации, который содержится в сигнале, слишком мал для вычисления коэффициента взаимной корреляции с требуемой точностью. Следовательно, рассматриваемый интервал должен быть достаточно большим. Теоретически — бесконечно большим:

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t + \tau) dt. \quad (4.5)$$

Однако, хотя это и верно теоретически, в реальности бесконечно большой интервал времени физически невозможен. Поэтому практически мы можем ограничиться тем интервалом времени, в течение которого коэффициент взаимной корреляции вычисляется с требуемой точностью.

С помощью функции взаимной корреляции можно измерить запаздывание во времени двух сигналов. Рассмотрим это на конкретном примере. Попробуем, например, измерить скорость течения водного потока. Для этого, как показано на **Рис. 4.5**, установим электроды в верхнем и нижнем течениях. Затем растворим в начале водного потока достаточное количество порошка или пены, после чего сопротивление воды увеличится. Это вызовет резкое изменение напряжения на каждом электроде. Хотя эти изменения являются слу-

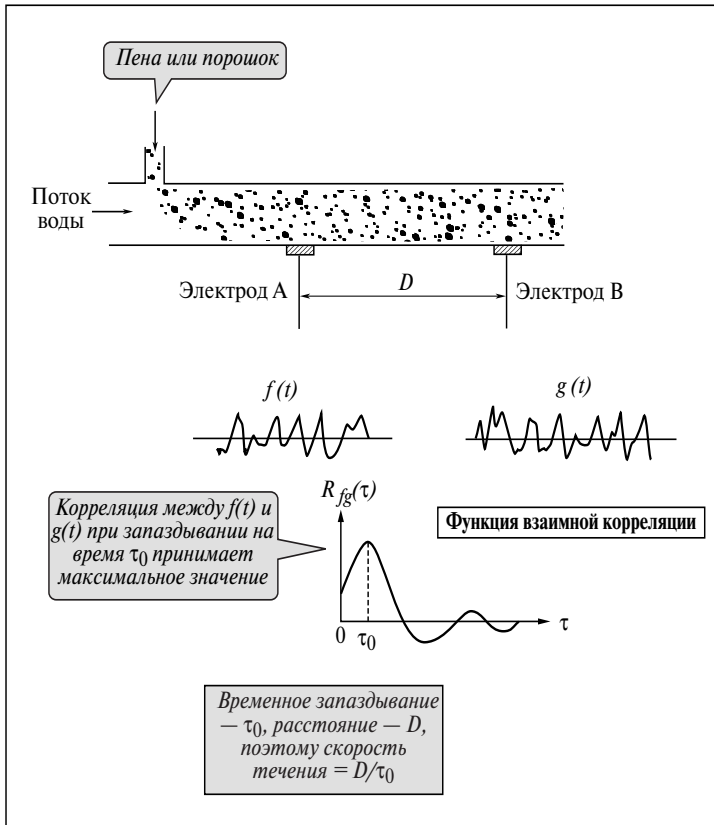


Рис. 4.5. Измерение скорости течения с помощью функции взаимной корреляции.

чайными сигналами, неправильно было бы считать, что они никак не связаны. На электроде В, установленном в нижнем течении, через некоторое время должен появиться сигнал, очень похожий на сигнал, наблюдаемый на электроде А, установленном в верхнем течении. Иначе говоря, имеется связь между двумя наблюдаемыми сигналами. Если вычислить функцию взаимной корреляции этих сигналов, то можно узнать величину временного запаздывания между этими сигналами. После чего легко определить скорость течения.

4.3. ФУНКЦИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ

Многие из физических явлений являются периодическими процессами. Что нужно сделать для того, чтобы узнать, является ли данный сигнал периодическим, и если да, то какова величина периода? Как мы уже знаем, если $f(t)$ — явно периодический сигнал с периодом T , то

$$f(t) = f(t + nT),$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Для точного определения случайного сигнала не существует подобного выражения. Допустим, значения функции $f(t)$ и значения функции, сдвинутой по оси времени на $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$, довольно сильно связаны друг с другом. Что это означает? Не означает ли это, что в функции $f(t)$ скрыты свойства, характерные для периодической функции с периодом T (Рис. 4.6)?

Другими словами, в зависимости от того, появятся ли пиковые

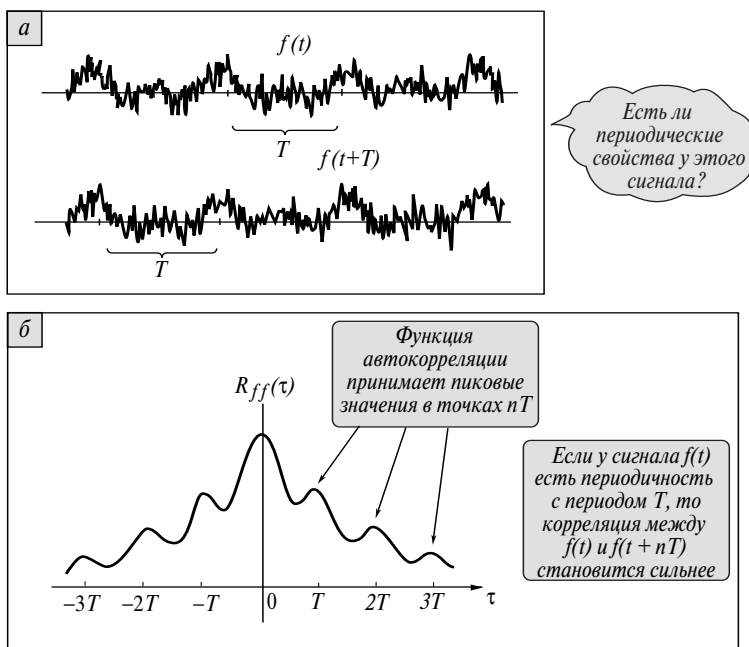


Рис. 4.6. Функция автокорреляции.

значения функции корреляции между функцией $f(t)$ и функцией $f(t + nT)$, сдвинутой по оси абсцисс, через интервалы, кратные целым числам, или нет, можно судить о наличии или отсутствии периодических свойств функции $f(t)$.

Для того чтобы вычислить функцию корреляции между функцией $f(t)$ и функцией $f(t + nT)$, сдвинутой по оси времени, достаточно воспользоваться методом вычисления функции взаимной корреляции, рассмотренным ранее. Но при этом необходимо учесть, что мы вычисляем функцию взаимной корреляции не между различными сигналами, а между одной и той же функцией. А значит, выражение (4.5) примет новый вид:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt. \quad (4.6)$$

Функция $R_{ff}(\tau)$, имеющая в качестве переменной временное запаздывание τ , называется *функцией автокорреляции*.

В качестве примера рассмотрим изменение температуры атмосферы. На **Рис. 4.7** представлен график температуры атмосферы в Токио с почасовыми измерениями. Имеют ли периодические свойства изменения температуры?

В году 8760 часов (24 часа \times 365 дней), поэтому температуру ат-

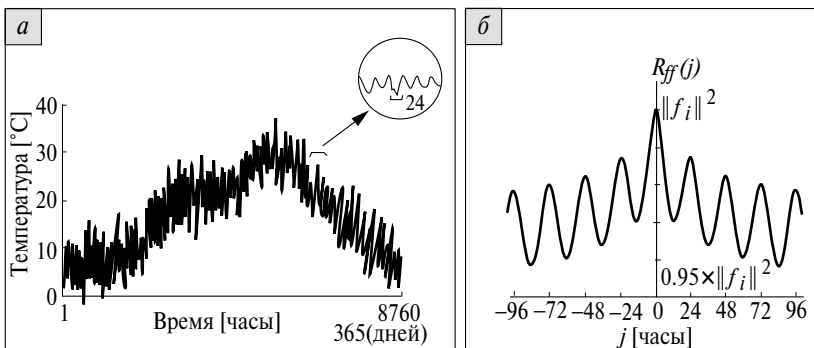


Рис. 4.7. Функция автокорреляции температуры атмосферы.

ПАМЯТКА

Представим главные свойства функции автокорреляции без доказательств.

1) Функция автокорреляции имеет осевую симметрию относительно $\tau = 0$. То есть

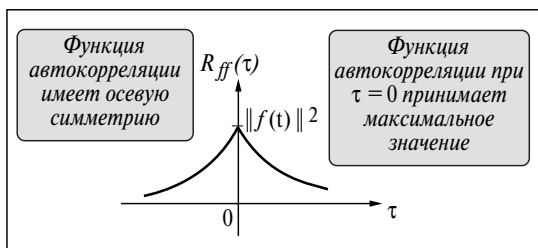
$$R_{ff}(-\tau) = R_{ff}(\tau).$$

(Функция взаимной корреляции обычно не является симметричной.)

2) Функция автокорреляции при $\tau = 0$ принимает максимальное значение, которое равно:

$$\begin{aligned} R_{ff}(0) &= \|f(t)\|^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

(Функция взаимной корреляции обычно не принимает максимального значения при $\tau = 0$.)



мосферы обозначим функцией f_i ; где $i = 1, 2, \dots, 8760$. Результат вычисления функции автокорреляции:

$$R_{ff}(j) = \frac{1}{8760} \sum_{i=1}^{8760} f_i f_{i+}.$$

представлен на **Рис. 4.7, б**. Правда, вычисления проведены с учетом дополнения данными, утерянными в результате сдвига по временной оси.

Из **Рис. 4.7, б** ясно, что последовательность $R_{ff}(j)$ через каждые 24 значения индекса принимает пиковые значения. Одним словом, сигнал обладает периодическими свойствами с периодом в 24 часа,

что, в общем-то, вполне естественно, потому что температура атмосферы в течение суток, в дневное и ночное время, резко отличается, но повторяется примерно через сутки. Это и отразилось в виде периодических свойств функции автокорреляции с периодом в 24 часа.

ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Функция взаимной корреляции периодических аналоговых сигналов $f(t)$ и $g(t)$ с периодом T определяется следующим образом:

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t + \tau) dt,$$

где τ — величина сдвига по оси времени.

Функция взаимной корреляции цифровых сигналов f_i и g_i ($i = 1, 2, \dots, N$) определяется следующим соотношением:

$$R_{fg}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i g_{i+j}.$$

С помощью функции взаимной корреляции можно определить силу связи между функциями, а также степень запаздывания.

2. Функция автокорреляции аналогового сигнала $f(t)$ вычисляется следующим образом:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt.$$

С помощью функции автокорреляции можно проанализировать сигнал на наличие в нем периодических свойств. Функция автокорреляции является симметричной и при $\tau = 0$ принимает максимальное значение, равное $\|f(t)\|^2$. Функция автокорреляции дискретного сигнала определяется таким образом:

$$R_{ff}(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i g_{i+j}.$$

Практические задания

- 1) Предложите способ вычисления скорости звука с помощью функции взаимной корреляции.
- 2) В таблице представлены значения среднемесячных температур для двух городов F и G (измерения проводились через месяц). Составьте таблицу

4. Функция корреляции

значений функции взаимной корреляции температур атмосферы для обоих городов и прокомментируйте ее. Функция взаимной корреляции определяется соотношением:

$$R_{fg}(j) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (f_i - \bar{f})(g_{i+j} - \bar{g}),$$

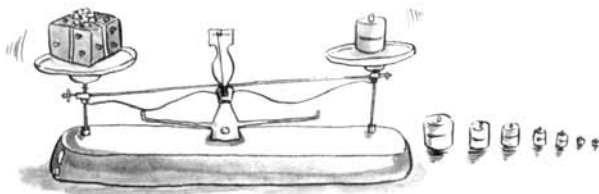
где \bar{f}, \bar{g} — среднеарифметические значения f_i и g_i .

Температура [°C]

i	1	2	3	4	5	6
Месяцы	1	3	5	7	9	11
Город F (f_i)	4	10	20	25	20	5
Город G (g_i)	20	18	15	10	17	22

- 3) Докажите, что функция автокорреляции имеет осевую симметрию относительно $\tau = 0$.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ



5.1. ЧТО ТАКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ

Французский математик Фурье (Ж. Б. Ж. Фурье, 1768—1830) провозгласил достаточно смелую для своего времени гипотезу. Согласно этой гипотезе не существует функции, которую нельзя было бы разложить в тригонометрический ряд. Однако, к сожалению, в то время такая идея не была воспринята всерьез. И это естественно. Сам Фурье не смог привести убедительных доказательств, а интуитивно поверить в гипотезу Фурье очень трудно. Особенно нелегко представить тот факт, что при сложении простых функций, подобных тригонометрическим, воспроизводятся функции, совершенно на них не похожие. Но если предположить, что гипотеза Фурье верна, то периодический сигнал любой формы можно разложить на синусоиды различных частот, или же, наоборот, посредством соответствующего сложения синусоид с разными частотами возможно синтезировать сигнал какой угодно формы. Следовательно, если эта теория верна, то ее роль в обработке сигналов может быть очень велика. В этой главе первым делом попытаемся проиллюстрировать правильность гипотезы Фурье.

Посмотрите на **Рис. 5.1**.

На **Рис. 5.1, а** представлена функция

$$f(t) = 2\sin t - \sin 2t,$$

которая является суммой тригонометрических функций, иными

5. Разложение в ряд Фурье

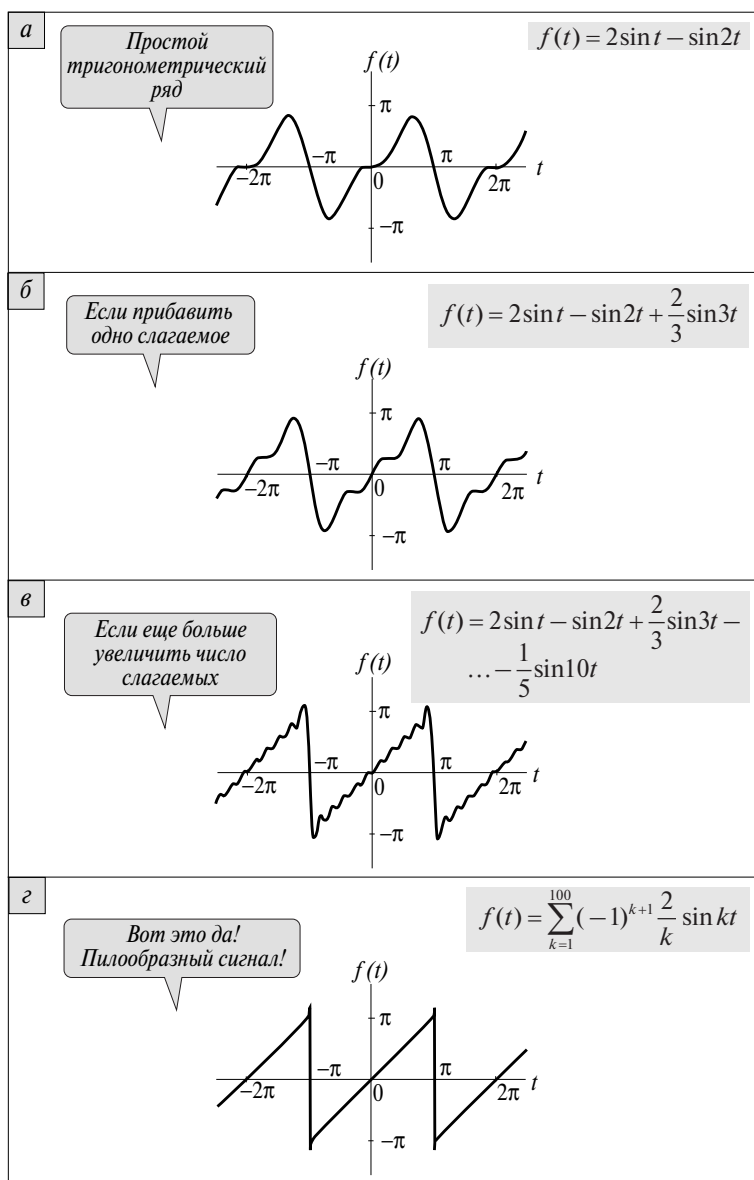


Рис. 5.1. Суммирование членов некоторого тригонометрического ряда.

словами, представлена в виде тригонометрического ряда из двух членов. Добавим одно слагаемое и создадим новый ряд из трех членов

$$f(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t,$$

который представлен на **Рис. 5.1, б**. Снова добавив несколько слагаемых, получим новый тригонометрический ряд из десяти членов **Рис. 5.1, в**:

$$f(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{2}{5}\sin 5t - \frac{1}{3}\sin 6t + \\ + \frac{2}{7}\sin 7t - \frac{1}{4}\sin 8t + \frac{2}{9}\sin 9t - \frac{1}{5}\sin 10t.$$

Коэффициенты этого тригонометрического ряда обозначим как b_k , где k — целые числа. Если внимательно посмотреть на последнее соотношение, то видно, что коэффициенты можно описать следующим выражением:

$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

Тогда функцию $f(t)$ можно представить следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=1}^M b_k \sin kt.$$

Коэффициенты b_k — это амплитуды синусоид с угловой частотой k . Иначе говоря, они задают величину частотных составляющих.

На **Рис. 5.1, в** рассмотрен случай, когда верхний индекс k равен 10, т. е. $M = 10$. Увеличив значение M до 100, получим функцию $f(t)$, график которой представлен на **Рис. 5.1, г**. Эта функция, будучи тригонометрическим рядом, по форме приближается к пилообразному сигналу. И, похоже, гипотеза Фурье совершенно верна по отношению к физическим сигналам, с которыми мы имеем дело. К тому же в этом примере форма сигнала не гладкая, а включает точки разрыва. И то, что функция воспроизводится даже в точках разрыва, выглядит многообещающим. Правда, беспокоит то, что остаются мелкие колебания вблизи точек разрыва.

В физическом мире действительно много явлений, которые можно представить как суммы колебаний различных частот. Типичным примером этих явлений является свет. Он представляет собой сумму электромагнитных волн с длиной волны от 8000 до 4000 ангстрем (от

красного цвета свечения до фиолетового). Вы, конечно, знаете, что если белый свет пропустить через призму, то появится спектр из семи чистых цветов. Это происходит потому, что коэффициент преломления стекла, из которого сделана призма, изменяется в зависимости от длины электромагнитной волны. Это как раз и является доказательством того, что белый свет — это сумма световых волн различной длины. Итак, пропустив свет через призму и получив его спектр, мы можем проанализировать свойства света, исследуя цветовые комбинации. Подобно этому, посредством разложения принятого сигнала на различные частотные составляющие, мы можем узнать, как возник первоначальный сигнал, по какому пути он следовал или, наконец, какому внешнему влиянию он подвергался. Одним словом, мы можем получить информацию для выяснения происхождения сигнала.

Подобный метод анализа называется *спектральным анализом* или *анализом Фурье*.

Собственно говоря, подтверждение правильности гипотезы Фурье мы уже наблюдали в 3-й главе («Необходимые математические представления»). В конце этой главы мы рассматривали следующую систему ортонормированных функций:

$$\{1, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos 2t, \sqrt{2} \cos 3t, \dots, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin 2t, \sqrt{2} \sin 3t, \dots\}.$$

Функцию $f(t)$ можно разложить по этой системе функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) = & \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{2} \cos t + \alpha_2 \sqrt{2} \cos 2t + \alpha_3 \sqrt{2} \cos 3t + \dots + \\ & + \beta_1 \sqrt{2} \sin t + \beta_2 \sqrt{2} \sin 2t + \beta_3 \sqrt{2} \sin 3t + \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты α_k , β_k , как было показано ранее, можно выразить через скалярные произведения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \langle f(t), 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ \alpha_k &= \langle f(t), \sqrt{2} \cos kt \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \\ \beta_k &= \langle f(t), \sqrt{2} \sin kt \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt. \end{aligned}$$

В общем виде функцию $f(t)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + a_3 \cos 3t + \dots + \\
 &\quad + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + b_3 \sin 3t + \dots = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$



Коэффициенты a_0 , a_k , b_k называют *коэффициентами Фурье*, а подобное представление функции называется *разложением в ряд Фурье*. Иногда такое представление называют *действительным разложением в ряд Фурье*, а коэффициенты — действительными коэффициентами Фурье. Термин «действительный» вводится для того, чтобы отличить представленное разложение от разложения в ряд Фурье в комплексной форме, о котором мы будем говорить позже. Как уже было сказано в 3-й главе, произвольную функцию можно разложить по системе ортогональных функций, даже если функции из этой системы не представляются в виде тригонометрического ряда. Обычно под разложением в ряд Фурье подразумевается разложение в тригонометрический ряд. Если коэффициенты Фурье выразить через α_0 , α_k , β_k , получим:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 2\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\
 a_k &= \sqrt{2} \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \\
 b_k &= \sqrt{2} \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.
 \end{aligned}$$

Поскольку при $k = 0$ $\cos kt = 1$, то константа $a_0/2$ выражает общий вид коэффициента a_k при $k = 0$.

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

В соотношении (5.1) колебание самого большого периода, представленное суммой $\cos t$ и $\sin t$, называют колебанием основной частоты или *первой гармоникой*. Колебание с периодом, равным половине

основного периода, называют *второй гармоникой*. Колебание с периодом, равным $1/3$ основного периода, называют *третьей гармоникой* и т.д. Как видно из соотношения (5.1) a_0 является постоянной величиной, выражающей среднее значение функции $f(t)$. Если функция $f(t)$ представляет собой электрический сигнал, то a_0 представляет его постоянную составляющую. Следовательно, все остальные коэффициенты Фурье выражают его переменные составляющие.

На **Рис. 5.2** представлен сигнал и его разложение в ряд Фурье: на постоянную составляющую и гармоники различных частот. Во временной области, где переменной величиной является время, сигнал выражается функцией $f(t)$, а в частотной области, где переменной величиной является частота, сигнал представляется коэффициентами Фурье (a_k, b_k) .

Первая гармоника является периодической функцией с периодом 2π . Прочие гармоники также имеют период, кратный 2π . Исходя из этого, при формировании сигнала из составляющих ряда Фурье мы, естественно, получим периодическую функцию с периодом 2π . А если это так, то разложение в ряд Фурье — это, собственно говоря, способ представления периодических функций.

Разложим в ряд Фурье сигнал часто встречающегося вида. Например, рассмотрим упомянутую ранее пилообразную кривую (**Рис. 5.3**). Сигнал такой формы на отрезке $-\pi \leq t \leq \pi$ выражается функцией $f(t) = t$, поэтому коэффициенты Фурье могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos kt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin kt}{k} + \frac{\cos kt}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t \cos kt}{k} + \frac{\sin kt}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{k} \cos k\pi = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Следовательно, функцию $f(t)$ можно представить следующим рядом:

$$f(t) = 2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right).$$

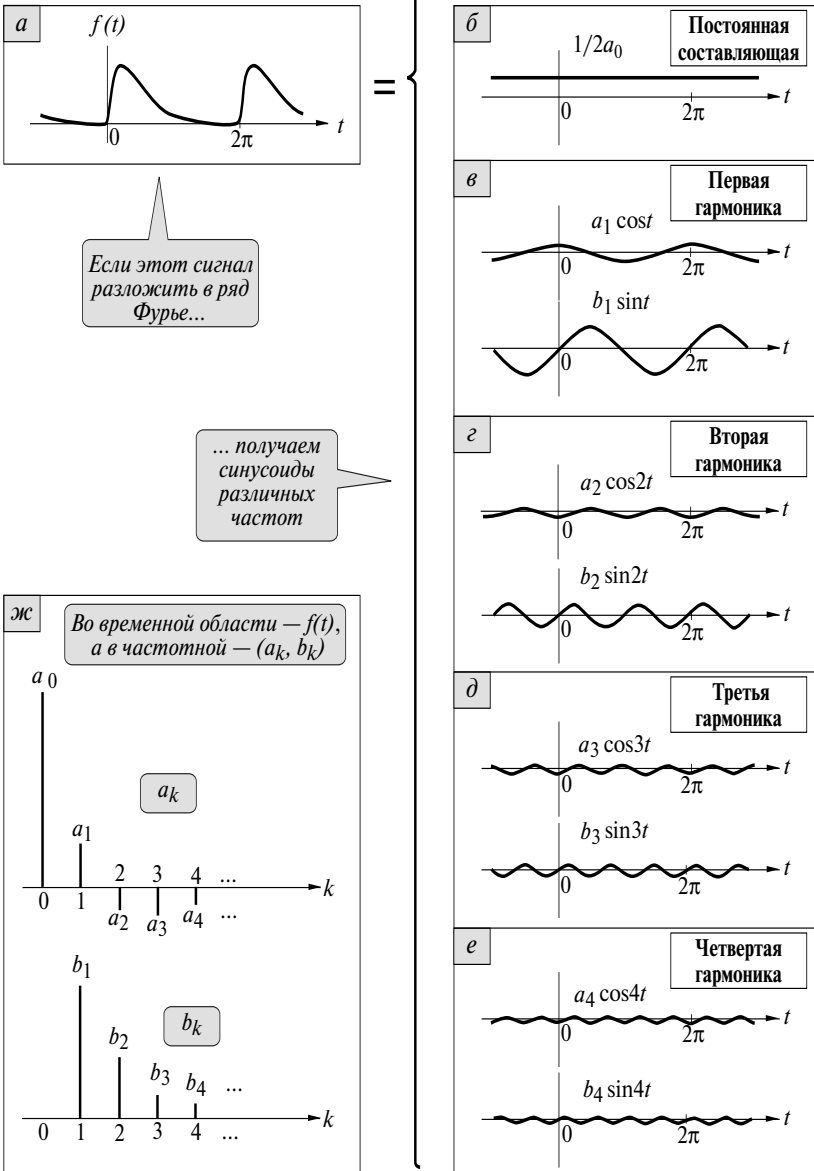


Рис. 5.2. Разложение сигнала.

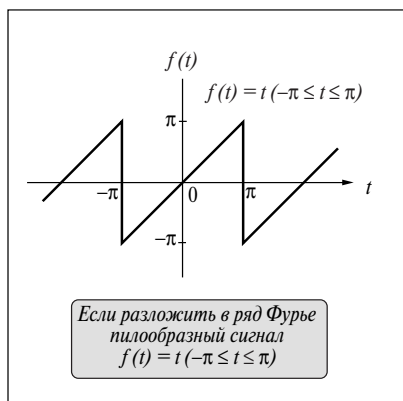


Рис. 5.3. Сигнал пилообразной формы.

В начале главы на Рис. 5.1 мы уже суммировали первые члены этого ряда и убедились, что по мере увеличения числа слагаемых сумма приближается к рассматриваемой пилообразной функции $f(t)$. Итак, полученная формула является разложением в ряд Фурье пилообразной периодической функции.

ШПАРГАЛКА

Формула интегрирования по частям

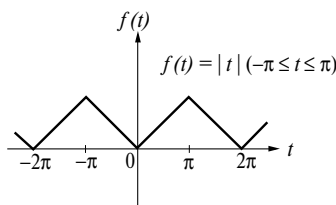
$$\int u'(t) v(t) dt = u(t) v(t) - \int u(t) v'(t) dt.$$

ПРИМЕР

Разложите в ряд Фурье функцию $f(t) = |t|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Решение:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \dots \right).$$



5.2. ЧЕТНАЯ И НЕЧЕТНАЯ ФУНКЦИИ

В примере, рассмотренном выше, при разложении в ряд Фурье пилообразной функции все слагаемые, содержащие косинусы, исчезли и остались только слагаемые, содержащие синусы. В то же время при разложении функции $f(t) = |t|$ в ряд Фурье все слагаемые, содержащие синусы, исчезли и остались лишь слагаемые, содержащие косинусы. Почему так происходит?

Обратите внимание на то, что функция $f(t) = |t|$ обладает следующим свойством:

$$f(t) = f(-t),$$

то есть она симметрична относительно оси ординат. Такая функция называется *четной*.

Пилообразная функция (**Рис. 5.3**) обладает другим свойством:

$$f(t) = -f(-t).$$

Эта функция симметрична относительно точки отсчета. Такая функция называется *нечетной*. **Рис. 5.4** поясняет разницу между четной и нечетной функциями.

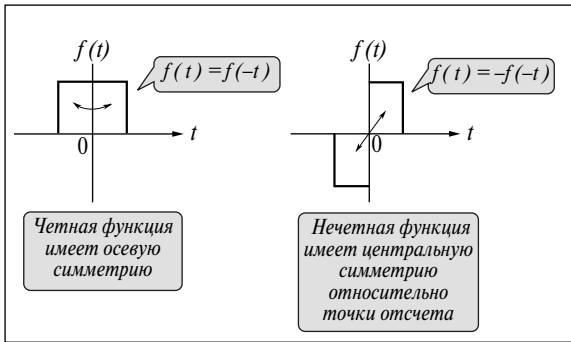


Рис. 5.4. Четные и нечетные функции.

Очевидно, что $\cos kt$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — четная функция, а $\sin kt$ ($k = 1, 2, \dots$) — нечетная (**Рис. 5.5**).

Возьмем определенный интеграл от произведения четной функции $f(t)$ и нечетной функции $g(t)$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(t) g(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) g(t) dt + \int_0^a f(t) g(t) dt = \\
 &= \int_{-a}^0 f(-t) \{-g(-t)\} dt + \int_0^a f(t) g(t) dt = \\
 &= -\int_0^a f(t) g(t) dt + \int_0^a f(t) g(t) dt = 0.
 \end{aligned}$$

Понятно, что если проинтегрировать произведение четной и нечетной функций на отрезке, симметричном относительно начала координат, то значение интеграла равно 0.

Следовательно, если сигнал $f(t)$ является четной функцией, то, поскольку $\sin kt$ — функция нечетная, получим:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Если же функция $f(t)$ — нечетная, то, учитывая то, что $\cos kt$ является четной функцией, получим тот же результат (**Рис. 5.5**):

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда можно сделать вывод, что

ряд Фурье четной функции содержит только косинусы, а ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы.

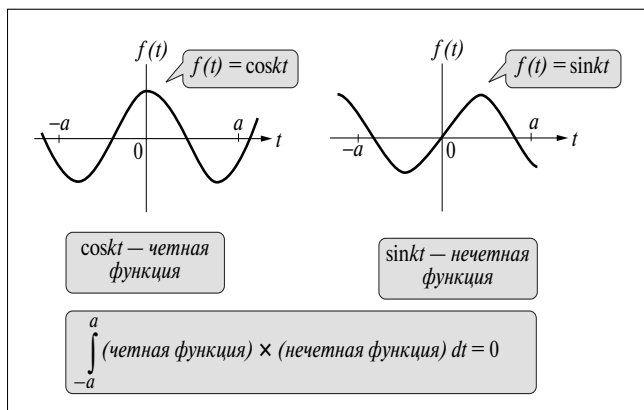


Рис. 5.5. Интегрирование произведения четной и нечетной функций.

5.3. КОГДА ПЕРИОД НЕ РАВЕН 2π

До этого момента мы рассматривали функцию переменной t на отрезке $[-\pi, \pi]$. В случае периодического сигнала с периодом 2π мы брали этот интервал за основной. В общем случае периодического сигнала с периодом T при разложении в ряд Фурье мы должны использовать интервал $[-T/2, T/2]$. Если интервал $[-\pi, \pi]$ расширить (или сократить) до интервала $[-T/2, T/2]$, то и период первой гармоники увеличится (или уменьшится) от 2π до T . Поскольку кратность этого преобразования равна $T/2\pi$, то составляющие первой гармоники примут вид:

$$\cos \frac{2\pi}{T}t \quad \sin \frac{2\pi}{T}t.$$

Для составляющих k -й гармоники можно записать:

$$\cos \frac{2\pi}{T}kt \quad \sin \frac{2\pi}{T}kt.$$

Следовательно, если функцию $f(t)$ разложить в ряд Фурье на интервале $[-T/2, T/2]$, получим:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos \left(\frac{2\pi}{T}kt \right) + b_k \sin \left(\frac{2\pi}{T}kt \right) \right\}. \quad (5.3)$$

Если обозначить угловую частоту через ω_0 , то, поскольку $\omega_0 = 2\pi/T$, выражение (5.3) можно записать и в таком виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos \omega_0 kt + b_k \sin \omega_0 kt \}. \quad (5.4)$$

В соотношении (5.2), определяющем коэффициенты Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt.$$

произведем замену переменной

$$t \rightarrow \omega_0 t,$$

а также — замену отрезка, на котором берется интеграл

$$[-\pi, \pi] \rightarrow [-T/2, T/2].$$

Этот прием
применяется,
когда период
не равен 2π

Оставив функцию $f(t)$ без изменения, получим

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 k t dt \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Аналогичным образом выводится следующее соотношение:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} f(t) \sin \omega_0 k t dt \quad (k=1, 2, \dots). \quad (5.5)$$

5.4. РАЗЛОЖЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ РЯД ФУРЬЕ

Сигналы, которые представляют физические величины и в дальнейшем подвергаются обработке, имеют значения из области действительных чисел (например, сигналы, регистрирующие напряжение, температуру, звуковое давление). Поэтому, если мы заве-

дем разговор о комплексных числах, то, на первый взгляд, это покажется странным. Однако, если использовать разложение в ряд Фурье в комплексной форме, о чем речь пойдет ниже, то формула значительно упростится, так как в ней не будет тригонометрического ряда. К тому же в случае обработки сигнала, представленного комплексными числами, мы сможем использовать его представление непосредственно, без изменений. Более того, если язык программирования позволяет использовать комплексные числа, то программу можно записать в очень простом виде. Поэтому весьма полезно освоить разложение ряда Фурье в комплексной форме.

5.4.1. Математические операции с комплексными числами

Комплексное число z выражается как

$$z = \alpha + j\beta,$$

где j — мнимая единица, определяемая как

$$j = \sqrt{-1}. \quad (5.6)$$

Наверное, читатель привык к обозначению мнимой единицы знаком i . Но дело в том, что этот знак используется для обозначения электрического тока.

Дальше будем применять следующие обозначения:

α — действительная часть комплексного числа z , β — его мнимая часть т. е.:

$$\alpha = \operatorname{Re}(z), \beta = \operatorname{Im}(z).$$

На **Рис. 5.6** показано изображение числа z на комплексной плоскости, где на оси абсцисс представлена его действительная часть, а на оси ординат — его мнимая часть. Величина $|z|$

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

называется *абсолютной величиной*, или *модулем* числа z , а

$$\angle z = \arctg \frac{\beta}{\alpha} \text{ — его аргумент.}$$

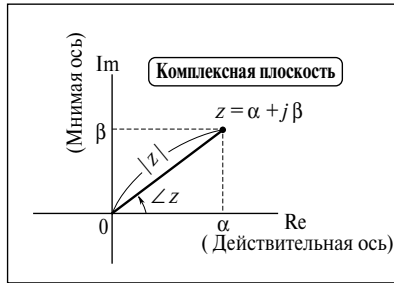


Рис. 5.6. Комплексное представление чисел на плоскости.

Комплексные числа $z = \alpha + j\beta$ и $\bar{z} = \alpha - j\beta$ называются *сопряженными комплексными* (**Рис. 5.7**).

Проверьте самостоятельно, что

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

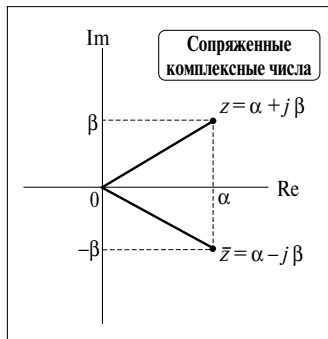


Рис. 5.7. Представление сопряженных комплексных чисел.

Очевидно, что

$$z + \bar{z} = 2\alpha = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2j\beta = 2j\operatorname{Im}(z)$$

$$z \cdot \bar{z} = (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2.$$

Спряженные
комплексные числа
расположены
симметрично
относительно
действительной оси

Кстати, обратите внимание на то, что значения z^2 и $|z|^2$ отличны. Например, если $z = j$, т.е. $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, то $z^2 = -1$, но $|z|^2 = 1$.

Пусть некоторая точка расположена на единичной окружности в комплексной плоскости так, что прямая, соединяющая ее с началом координат, образует с действительной осью угол θ , как показано на **Рис. 5.8**. Координаты этой точки можно выразить как

$$\cos\theta + j\sin\theta.$$

Известно, что

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (5.7)$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*, а e является основанием натурального логарифма и определяется следующим образом:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots$$

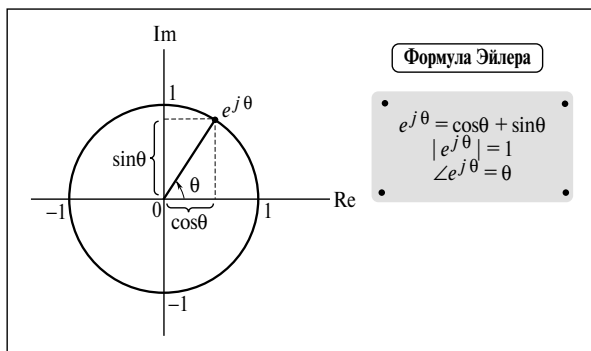


Рис. 5.8. Графическая иллюстрация формулы Эйлера.

На первый взгляд связь между e и тригонометрическими функциями в формуле Эйлера кажется странной. Однако, опуская подробности, разложим в ряд Тейлора каждую из функций $\cos\theta$ и $\sin\theta$:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

Аналогичным образом представим $e^{j\theta}$:

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + \frac{j\theta}{1!} + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + j \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= \cos \theta + j \sin \theta, \end{aligned}$$

что и доказывает верность формулы Эйлера.

По определению, абсолютная величина для $e^{j\theta}$

$$|e^{j\theta}| = 1,$$

а аргумент

$$\angle e^{j\theta} = \theta.$$

Из этого следует, что произвольное комплексное число z (**Рис. 5.9**) можно представить в виде:

$$z = |z|e^{j\angle z}$$

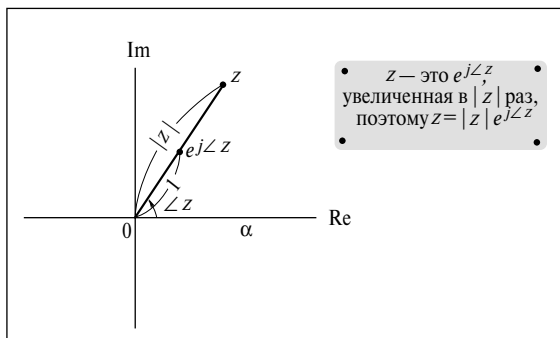


Рис. 5.9. Выражение произвольного комплексного числа через модуль и аргумент.

ПАМЯТКА

Исходя из формулы Эйлера, тригонометрические функции можно выразить следующим образом:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

Подумайте, почему?

Если использовать такой способ представления, то легко выразить произведение комплексных чисел (**Рис. 5. 10**):

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{j\angle z_1} \cdot |z_2| e^{j\angle z_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\angle z_1 + \angle z_2)}.$$

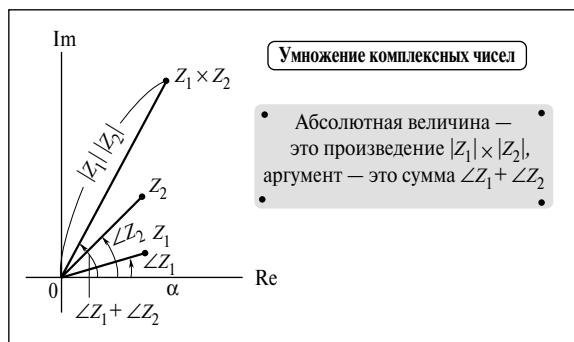


Рис. 5.10. Умножение двух комплексных чисел.

Аналогичным образом представим частное от деления двух комплексных чисел (**Рис. 5. 11**):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\angle z_1 - \angle z_2)}.$$

В отличие от операций с комплексными числами вычисление произведения или частного от деления тригонометрических рядов было бы очень обременительным.

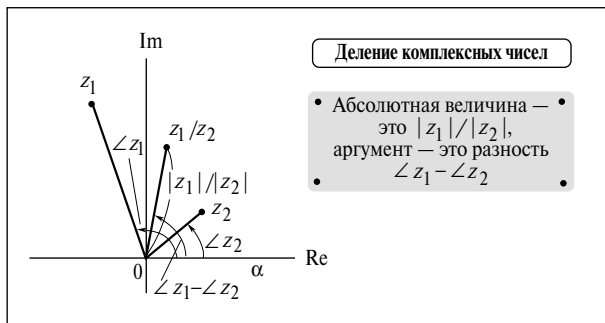


Рис. 5.11. Деление двух комплексных чисел.

5.4.2. Разложение в комплексный ряд Фурье

Итак, вернемся к теме разложения в ряд Фурье. С самого начала основным принципом разложения в ряд Фурье было разложение по системе функций, свойства которых были хорошо известны заранее. Исследуем следующую систему функций:

$$\{..., e^{-j2t}, e^{-jt}, 1, e^{jt}, e^{j2t}, ...\} = \{e^{jkt}, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}.$$

Заметим, что:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t,$$

причем e^{jt} отражает положение точки на единичной окружности в комплексной плоскости. Точка движется по окружности против часовой стрелки с угловой скоростью 1 рад/с. Подобно этому e^{jkt} отражает положение точки, движущейся с угловой скоростью k рад/с. Если мы возьмем показатель степени со знаком «—», то функция e^{-jkt} будет описывать точку, которая движется с той же скоростью, что и e^{jkt} , но в противоположном направлении (Рис. 5.12).

Кроме того, поскольку

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos(\theta) - j \sin(\theta) = \overline{e^{j\theta}},$$

то становится понятно, что e^{-jkt} и e^{jkt} являются сопряженными функциями.

Для того чтобы узнать, образует ли заданная система функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему ортогональных функций, необходимо вна-

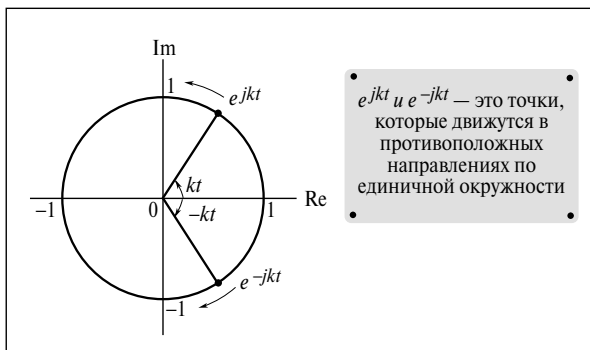


Рис. 5.12. Что такое e^{jkt} и e^{-jkt} .

чале произвольно выбрать две функции из этой системы и вычислить их скалярное произведение.

Кстати, скалярное произведение функций $f(t)$ и $g(t)$, значения которых есть комплексные числа, следует определить в таком виде:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)} dt.$$

Заметим, что вполне естественно брать одну из функций сопряженной. Если этого не сделать, то теряется связь между нормой и скалярным произведением. Норма функции через скалярное произведение выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle f(t), f(t) \rangle &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \cdot \overline{f(t)} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt = \\ &= \|f(t)\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, скалярное произведение двух произвольно выбранных функций из системы функций $\{e^{kt}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ выражается как

$$\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} \overline{e^{jnt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t} dt.$$

Итак,

$$\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t} dt.$$

ШПАРГАЛКА

Интеграл показательной функции

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \quad (a \neq 0).$$

а значит, при $m \neq n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2j(m-n)\pi} \left[e^{j(m-n)t} \right]_{-\pi}^{\pi} &= \frac{1}{(m-n)\pi} \frac{\{e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}\}}{2j} = \\ &= \frac{1}{(m-n)\pi} \sin(m-n)\pi = 0. \end{aligned}$$

Если считать мнимую единицу обычной константой, то интегрирование комплексного числа не представляет трудности.

Итак, в результате мы получим, что при $m \neq n$, $\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = 0$.

В случае, когда $m = n$, $e^0 = 1$,
поэтому

$$\langle e^{jnt}, e^{jnt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1.$$

То есть $\langle e^{jmt}, e^{jnt} \rangle = \delta_{mn}$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

где δ_{mn} — рассмотренный ранее символ Кронекера.

Следовательно, система функций $\{e^{jkt}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

на отрезке $[-\pi, \pi]$ образует ортонормированную систему функций.

А значит, произвольная функция $f(t)$ может быть представлена по этой системе следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}. \quad (5.8)$$

Это и есть разложение в комплексный ряд Фурье. Коэффициенты C_k называются *комплексными коэффициентами Фурье* и, подобно действительным коэффициентам Фурье, вычисляются как скалярное произведение $f(t)$ и e^{jkt} . То есть

$$C_k = \langle f(t), e^{jkt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt. \quad (5.9)$$

Короче говоря,
мы хотим доказать
ортонормированность
системы функций



5. Разложение в ряд Фурье

Если период функции не равен 2π , а, например, равен T , то получим следующее общее выражение для комплексных коэффициентов:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt} \\ C_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 kt} dt \quad (\omega_0 = 2\pi / T). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Обратите внимание на то, что коэффициенты C_k являются комплексными числами.

Какая связь между комплексным и действительным рядами Фурье? В комплексный ряд Фурье (5.10) подставим выражение комплексной экспоненты через синус и косинус по формуле Эйлера:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos \omega_0 kt - j \sin \omega_0 kt) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 kt dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 kt dt. \end{aligned}$$

Если полученный результат сопоставить с выражениями (5.5) и (5.6) (формулы для действительных коэффициентов Фурье), то становится понятно, что

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k=1, 2, \dots) \\ \frac{1}{2}a_0 & \\ \frac{1}{2}(a_k + jb_k) & (k=-1, -2, \dots) \end{cases}. \quad (5.11)$$

Из этого соотношения видно, что коэффициенты C_k являются сопряженными относительно соответствующих им коэффициентов C_{-k} .

$$C_{-k} = \overline{C_k}. \quad (5.12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |C_{-k}| &= |C_k| \\ \angle C_{-k} &= -\angle C_k. \end{aligned}$$

Множество абсолютных величин коэффициентов C_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$|C_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} \quad (5.13)$$

называют *спектром амплитуд*, а совокупность аргументов C_k

$$\angle C_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} \quad (5.14)$$

— *спектром фаз*. Множество величин $|C_k|^2$ называют *спектром мощности*. Спектр амплитуд показывает, как велика составляющая каждой гармоники внутри сигнала. При анализе сигнала обычно большее внимание уделяют спектру амплитуд или спектру мощности, чем спектру фаз. Кстати, заметим, что, поскольку коэффициенты C_k и C_{-k} взаимно сопряжены, их спектр мощности и спектр амплитуд имеют симметрию относительно $k = 0$. На **Рис. 5.13** изображен пример различных частей спектров представления некоторого сигнала.

Комплексные коэффициенты Фурье с учетом амплитуды и фазы можно записать в следующем виде

$$C_k = |C_k| e^{j\varphi k},$$

где

$$\varphi_k = \angle C_k.$$

А значит, используя спектр амплитуд и спектр фаз, функцию $f(t)$ можно выразить следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| e^{j(\omega_0 k t + \varphi_k)}. \quad (5.15)$$

Коэффициенты Фурье являются комплексными числами, но $f(t)$ является действительной функцией, а значит правая часть выражения (5.15) должна быть действительной. Так оно и есть на самом деле, потому что коэффициенты C_k и C_{-k} (выражение (5.12)) являются сопряженными. Если взяты целые положительные значения k , то функцию $f(t)$ можно записать в виде:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{j\omega_0 k t} + C_{-k} e^{-j\omega_0 k t}).$$

5. Разложение в ряд Фурье

Но, учитывая то, что C_k и C_{-k} являются сопряженными, получим

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{j\omega_0 k t} + \bar{C}_k e^{-j\omega_0 k t}) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \left\{ e^{j(\omega_0 k t + \phi_k)} + e^{-j(\omega_0 k t + \phi_k)} \right\} =$$

$$= C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cos(\omega_0 k t + \phi_k). \quad (5.16)$$

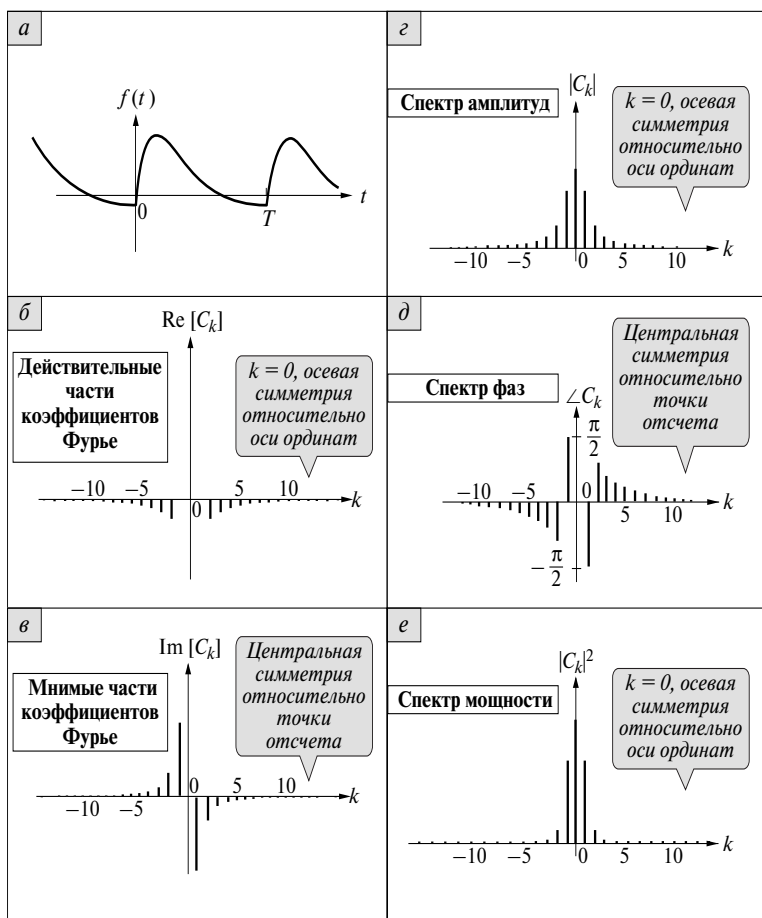


Рис. 5.13. Спектры и комплексные коэффициенты Фурье.

ПАМЯТКА

Если сигнал $f(t)$ является четной функцией, то мнимые составляющие всех комплексных коэффициентов Фурье равны 0, если же функция $f(t)$ — нечетная, то в 0 обращаются действительные части всех коэффициентов.

(Подсказка). Действительная часть функции комплексной экспоненты $e^{jkt} = \cos kt + j \sin kt$ есть четная функция, а мнимая часть — нечетная.

Поскольку коэффициент C_0 , выражающий постоянную составляющую, является действительным числом, правая часть равенства принимает действительные значения.

5.4.3. Пример разложения в комплексный ряд Фурье

В качестве примера попробуем разложить в ряд Фурье прямоугольный сигнал с периодом T , изображенный на **Рис. 5.14**. Коэффициенты Фурье выражаются следующим образом:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 kt} dt \quad (\omega_0 = 2\pi/T).$$

Но поскольку функция $f(t)$ при $-1 \leq t \leq 1$ равна 1, а в остальных случаях она равна 0, то при $k \neq 0$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\omega_0 k} \left[e^{-j\omega_0 kt} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\omega_0 k} (e^{-j\omega_0 k} - e^{j\omega_0 k}).$$

Исходя из формулы Эйлера

$$\sin \omega_0 k = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 k} - e^{-j\omega_0 k}),$$

а значит,

$$C_k = \frac{2}{T} \frac{1}{\omega_0 k} \sin \omega_0 k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

При $k = 0$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 1 \cdot dt = \frac{2}{T}.$$

5. Разложение в ряд Фурье

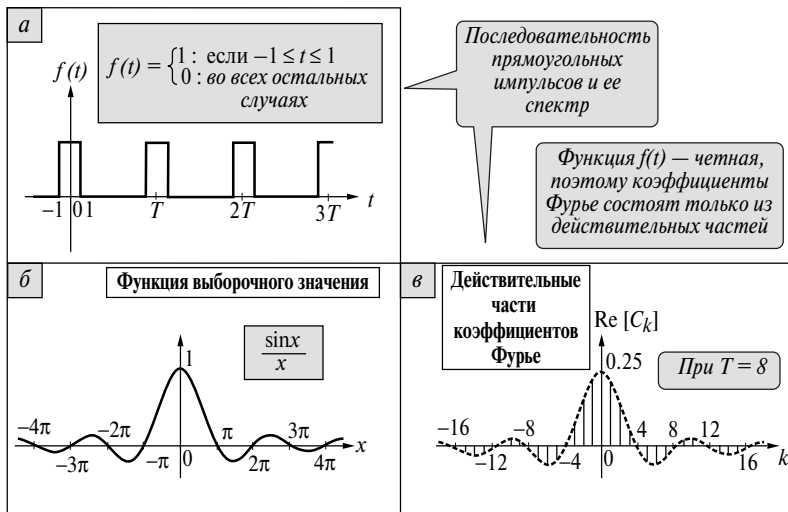


Рис. 5.14. Последовательность прямоугольных импульсов и ее спектр.

Понятно, что коэффициенты C_k являются действительными числами. Это также ясно и из того, что $f(t)$ — четная функция. Величина фазы при положительном значении C_k равна 0. Если C_k принимает отрицательные значения, то величина фазы равна $\pm\pi$.

Функцию

$$\frac{\sin x}{x}$$

можно представить графически, как показано на **Рис. 5.14, б**. Эта функция называется *функцией выборки* (единичного отсчета). Если считать, что $\varphi_0 k = x$, то

$$C_k = \frac{2}{T} \frac{\sin x}{x},$$

т. е. коэффициенты C_k принимают вид, подобный функции выборки.

Попробуем изобразить графически коэффициенты Фурье. Пусть значение k отложено по оси абсцисс, а $\text{Re}(C_k)$ — по оси ординат. На **Рис. 5.14, в** в качестве примера представлен спектр последовательности прямоугольных импульсов при $T = 8$.

5.5. ТЕОРЕМА ПАРСЕВАЛЯ

Мы уже знаем, что при разложении в комплексный ряд Фурье функцию $f(t)$ на отрезке $[-T/2, T/2]$ можно представить как:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}. \quad (5.17)$$

Возможно ли выразить норму функции $f(t)$ через коэффициенты Фурье C_k ?

Собственно говоря, как предположение можно утверждать, что

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2. \quad (5.18)$$

Это соотношение выражает теорему Парсеваля. Покажем, откуда берется это соотношение.

В первую очередь вычислим скалярное произведение каждой из частей соотношения (5.17) и функции $f(t)$. Тогда очевидно, что левая часть этого произведения имеет вид:

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \|f(t)\|^2$$

и выражает квадрат нормы функции $f(t)$, т. е. левую часть соотношения (5.18). А что представляет собой скалярное произведение правой части выражения (5.17) и функции $f(t)$? Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}, f(t) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{j\omega_0 lt} \right\rangle = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle C_k e^{j\omega_0 kt}, C_l e^{j\omega_0 lt} \rangle = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k \bar{C}_l \langle e^{j\omega_0 kt}, e^{j\omega_0 lt} \rangle, \end{aligned}$$

где согласно свойствам ортонормированного базиса

$$\langle e^{j\omega_0 kt}, e^{j\omega_0 lt} \rangle = \delta_{kl}$$

все члены с $k \neq l$ исчезают, и в результате имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_l} \langle e^{j\omega_0 k t}, e^{j\omega_0 l t} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

откуда следует выражение (5.18).

Отдельные части формулы оказались достаточно сложными, и читатель, наверное, растерялся. Но попробуем осмыслить полученный результат следующим образом. Нами уже определена норма функции $f(t)$ на отрезке $(-T/2 \leq t \leq T/2)$:

$$\|f(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

Например, будем считать, что функция $f(t)$ описывает величину электрического тока с сопротивлением 1 Ом. Тогда $\|f(t)\|^2$ есть мощность, потребляемая данным сопротивлением в единицу времени. Согласно соотношению Парсеваля мощность можно представить в виде суммы составляющих спектра мощности. Иначе говоря, $f(t)$ разлагается на составляющие, но вся мощность функции заключается в сумме мощностей гармоник и больше нигде не расходуется (Рис. 5.15).

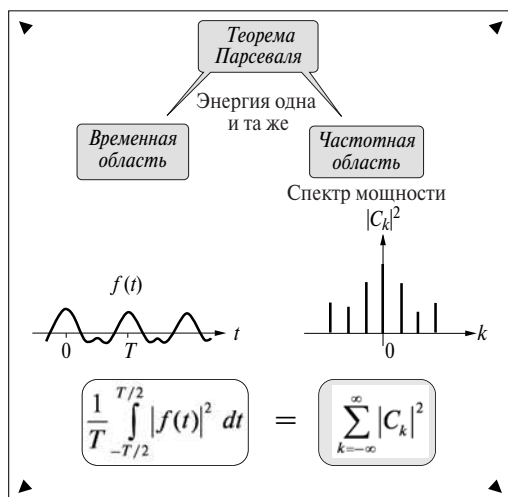


Рис. 5.15. Теорема Парсеваля.

5.6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ

Рассмотрим на конкретном примере возможности практического применения разложения в ряд Фурье. На **Рис. 5.16, а** представлен уже знакомый график температуры атмосферы. Этот график отображает среднесуточную температуру, измеряемую в течение одного года, количество данных — 365. Способ получения коэффициентов

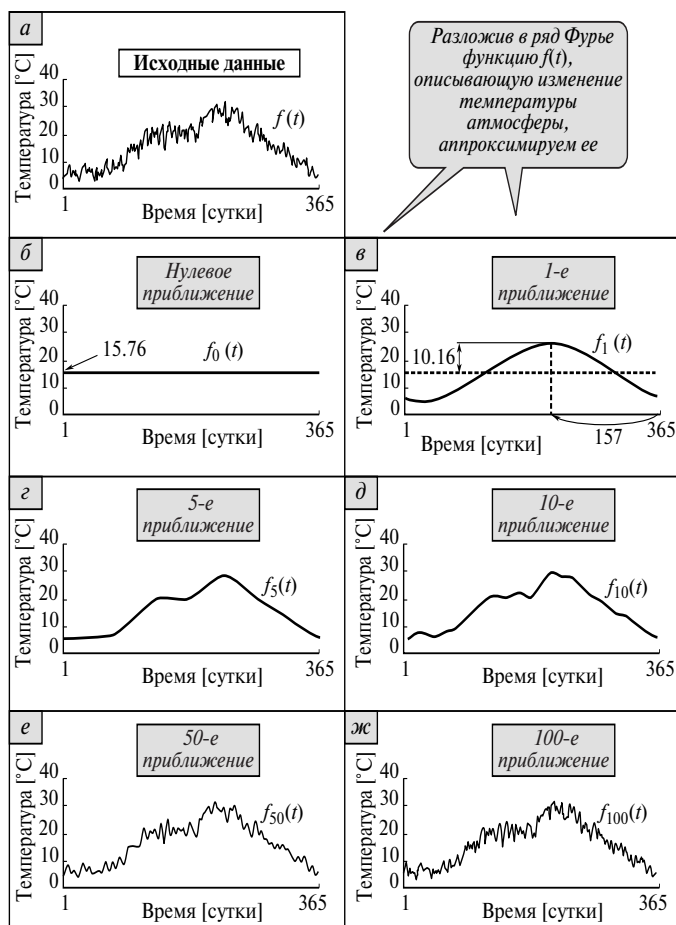


Рис. 5.16. Аппроксимация функции с помощью ряда Фурье.

тов Фурье для данного дискретного сигнала при использовании компьютера мы изложим в следующей главе. А сейчас представим в виде таблицы коэффициенты Фурье, полученные в результате вычислений (**Табл. 5.1**). В этой таблице записаны коэффициенты лишь до 10-й гармоники, но в действительности они вычисляются для всех гармоник. Итак, что мы получим, используя эти коэффициенты Фурье, если попробуем восстановить исходный сигнал? Обозначим функцию, приближающую функцию $f(t)$ с помощью n первых гармоник как $f_n(t)$.

Табл. 5.1. Коэффициенты Фурье

Степень k	Коэффициенты Фурье			
	$\text{Re}(C_k)$	$\text{Im}(C_k)$	$ C_k $	$\angle C_k$ [рад]
0	15.76	0	15.76	0
1	-4.59	2.18	5.08	2.70
2	-0.60	-0.26	0.65	-2.73
3	0.70	0.22	0.73	0.30
4	-0.54	-0.34	0.64	-2.58
5	0.03	-0.06	0.07	-1.12
6	-0.18	0.01	0.18	3.06
7	0.05	-0.12	0.13	-1.16
8	-0.18	0.01	0.18	3.10
9	0.11	-0.08	0.13	-0.65
10	-0.08	0.25	0.26	1.88

В первую очередь попробуем аппроксимировать этот сигнал постоянной составляющей, т.е. константой C_0 . В этом приближении функция $f(t)$ будет равна $f_0(t)$ и согласно выражению (5.10) примет вид:

$$f_0(t) = C_0 = 15.76.$$

На **Рис. 5.16, б** эта функция представлена графически в виде одной прямой линии, не зависящей от времени t . Кстати, обратим внимание на то, что C_0 обязательно является действительным числом и отражает постоянную составляющую сигнала, в нашем случае — среднюю температуру в течение года.

На следующем этапе прибавим первую гармонику к функции $f_0(t)$ и получим функцию $f_1(t)$ (первое приближение функции $f(t)$):

$$f_1(t) = C_{-1}e^{-j\omega_0 t} + C_0 + C_1e^{j\omega_0 t} \quad (1 \leq t \leq 365).$$

Так как период T равен 365 дням, вычислим ω_0 — угловую частоту основной гармоники:

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/365 = 0.0172 \quad (\text{рад/день}).$$

Ранее в выражении (5.16) мы уже представляли функцию $f(t)$ с помощью амплитуд коэффициентов Фурье $|C_k|$ и фаз гармоник φ_k :

$$f(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cos(\omega_0 k t + \varphi_k).$$

Поэтому функцию $f_1(t)$ можно выразить как

$$f_1(t) = C_0 + 2|C_1| \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Следовательно, подставив значения коэффициентов Фурье из **Табл. 5.1**, получим

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 15.76 + 2 \times 5.08 \cos(0.0172t + 2.70) = \\ &= 15.76 + 10.16 \cos\{0.0172 (t + 157)\}. \end{aligned}$$

График функции $f_1(t)$ представлен на **Рис. 5.16, в** в виде синусоиды, приблизительно отображающей общее изменение температуры в течение одного года.

В спектре амплитуд заключается информация о величине сигнала, а в спектре фаз — информация о положении волны на оси времени. Температура меняется в течение периода, равного одному году, поэтому естественно, что составляющая первой гармоники C_1 принимает большие значения. Обратим внимание на то, что форма основной гармоники явно отражает состояние летнего сезона в виде «горы» и зимнего — в виде «долины».

Итак, прибавим к первому приближению слагаемые с гармониками более высоких частот. В ряд Фурье рассматриваемой функции приближения

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{j\omega_0 k t} \quad (1 \leq t \leq 365)$$

подставим значения коэффициентов Фурье из **Табл. 5.1** и графически изобразим функцию, представленную числом гармоник n (**Рис. 5.16**). Из графиков становится понятно, что с увеличением числа гармоник прибавляются составляющие высоких частот, и форма сигнала постепенно приближается к исходной форме сигнала температуры. А приближение при $n = 100$ (**Рис. 5.16, ж**) практически неотличимо от исходной функции.

5.7. НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫЕ СВОЙСТВА РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ

В процессе изучения этой главы читатель, наверное, уже получил образное представление о разложении в ряд Фурье. Для более глубокого понимания материала коснемся нескольких наиболее важных свойств разложения в ряд Фурье.

5.7.1. Погрешность приближения

При приближении значений температуры рядом Фурье с увеличением n степень приближения становится выше. Однако что же такое степень приближения? Уменьшается ли на самом деле погрешность приближения с увеличением n ? Чтобы ответить на эти вопросы, попробуем разобраться в вопросах погрешности.

Как мы уже знаем из 3-й главы, пространство функций — это абстрактное пространство бесконечной размерности, и любая функция соответствует одной точке из этого пространства. Насколько отличны две функции, можно узнать, измерив расстояние между двумя точками, соответствующими каждой из этих функций. Можно считать, что погрешность приближения одной функции другой функцией и есть расстояние между двумя соответствующими им точками. Иначе говоря, расстояние между исходной функцией $f(t)$ и функцией приближения $f_n(t)$ выражается как

$$d(f_n(t), f(t)) = \|f(t) - f_n(t)\|$$

и является погрешностью приближения функции $f(t)$ функцией $f_n(t)$. Если считать, что с увеличением n степень приближения повышается, то в пространстве функций функции $f_n(t)$ и $f(t)$ приближаются и, значит, значение расстояния между ними уменьшается.

Итак, попробуем проверить, действительно ли это так. Расстояние — это величина, зависящая от степени приближения функций f_n , поэтому обозначим ее как ε_n и возведем в квадрат:

$$\varepsilon_n^2 = \|f(t) - f_n(t)\|^2.$$

Каждую из функций $f(t)$ и $f_n(t)$ можно выразить как

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t} \quad f_n(t) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{j\omega_0 k t}$$

а значит,

$$\varepsilon_n^2 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t} - \sum_{k=-n}^n C_k e^{j\omega_0 k t} \right\|^2 = \left\| \sum_{\substack{-\infty < k < -n \\ n < k < \infty}} C_k e^{j\omega_0 k t} \right\|^2.$$

С увеличением n
квадратичная погрешность
всегда уменьшается

Если применить теорему Парсеваля, то получим следующее выражение для ε_n^2 :

$$\varepsilon_n^2 = \sum_{\substack{-\infty < k < -n \\ n < k < \infty}} |C_k|^2.$$

Так как $|C_k|^2 \geq 0$, то правая часть выражения представляет собой сумму положительных величин. Тогда с увеличением значения n число слагаемых $|C_k|^2$ в последнем выражении уменьшается. Следовательно, с ростом n , значение ε_n^2 может только уменьшаться, но не расти. Если графически изобразить погрешность приближения разложением в ряд Фурье значений температуры, получим кривую с переменной n , где n — число гармоник (**Рис. 5.17**).

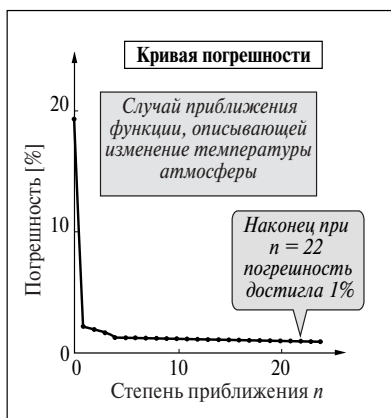


Рис. 5.17. Погрешность приближения для сложного сигнала.

Эта кривая — график относительной погрешности, которая определяется следующим образом:

$$\frac{\varepsilon_n^2}{\|f(t)\|^2},$$

где $\|f(t)\|^2$ — мощность сигнала. Значения относительной погрешности приведены в процентах.

Из представленного графика также ясно, что с увеличением n погрешность монотонно уменьшается.

Если форма исходного сигнала гладкая, то скорость уменьшения погрешности при увеличении количества гармоник высокая. Этот случай называют *хорошей сходимостью*. Если сходимость хорошая, то можно восстановить исходный сигнал посредством небольшого количества гармоник, а значит, сократить объем данных. Иначе говоря, сигнал, представленный несколькими сотнями или тысячами измерений, можно приблизить всего лишь десятками значений данных или даже несколькими значениями. Этот случай наглядно представлен на **Рис. 5.18**, где иллюстрируется разложение в ряд Фурье гладкого сигнала. Видно, что здесь погрешность уменьшается значительно быстрее, чем погрешность изменений температуры, приведенная на **Рис. 5.17**.

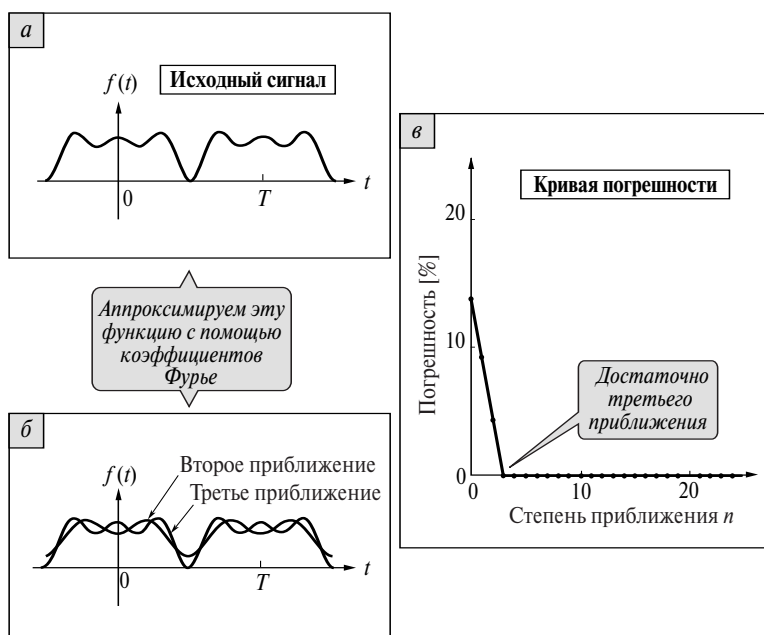


Рис. 5.18. Разложение в ряд Фурье гладкой функции.

Например, в случае изменений температуры, чтобы получить погрешность, равную 1%, потребовалось 22 гармоники. А в случае гладкого сигнала оказалось вполне достаточно всего лишь 3 гармоник.

5.7.2. Поведение в точках разрыва

Заявляя, что с увеличением числа гармоник ряда Фурье возможно получить функцию, сколь угодно близкую к исходной функции, мы должны обратить внимание на явление, отрицающее этот тезис. Речь пойдет о колебаниях вблизи точек разрыва.

На **Рис. 5.19** представлен результат приближения функции

$$f(t) = \operatorname{sign} t = \begin{cases} 1 & : t \geq 0 \\ -1 & : t < 0 \end{cases}.$$

Как видно из рисунка, с повышением числа гармоник ряда Фурье амплитуда колебаний вблизи точек разрыва не уменьшается, хотя период колебаний становится меньше. Это явление называется *явлением Гиббса*. Величина амплитуды колебаний ε_0 даже с повышением n не становится меньше некоторого значения. В случае приведенного примера $\varepsilon_0 = 0.089$.

Если в качестве параметра приближения функции взять ранее определенное расстояние между функциями (что является одним из видов квадратичной погрешности), то с увеличением n значение

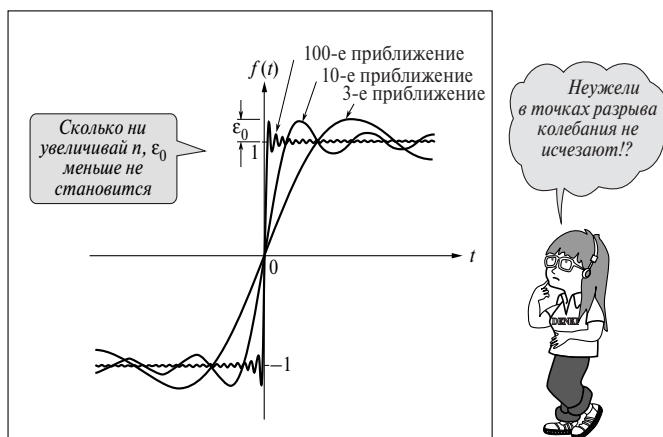


Рис. 5.19. Явление Гиббса.

этого расстояния сходится в 0, даже если функции содержат точки разрыва. Однако если в качестве параметра измерить самую большую разность между $f_n(t)$ и $f(t)$, то, к сожалению, она не обязательно сходится в 0. В этом заключается суть явления Гиббса.

5.7.3. Изменение величины сигнала

Если меняется величина сигнала, каким образом изменяются спектры? Как показано на **Рис. 5.20**, с уменьшением амплитуды сиг-

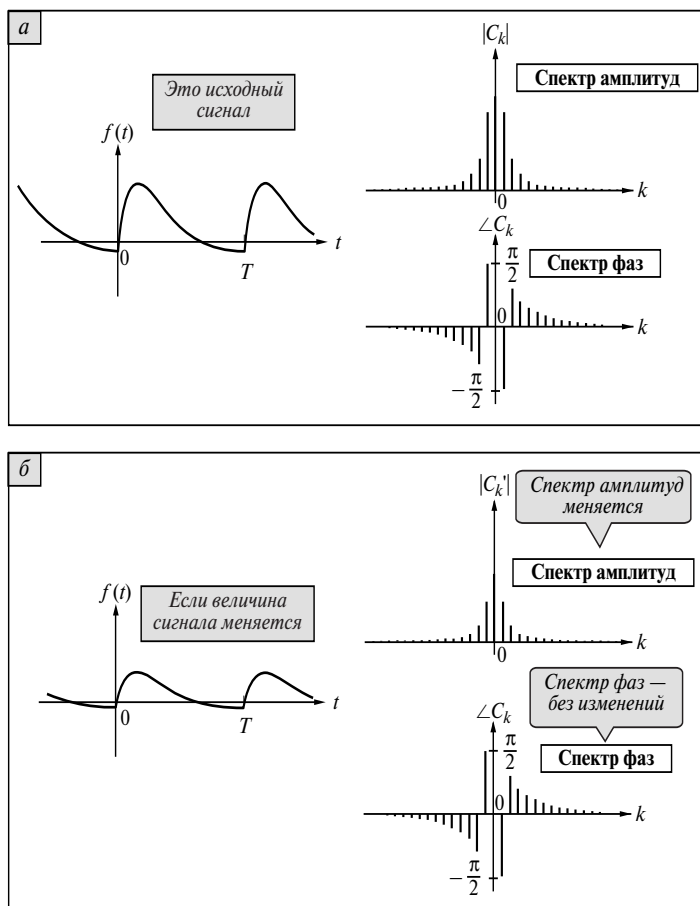


Рис. 5.20. Связь между величиной сигнала и спектра.

нала спектр амплитуд также уменьшается. Пусть a — некоторая действительная константа, а C_k — коэффициенты Фурье функции $f(t)$.

Тогда коэффициенты Фурье C_k' для сигнала большего, чем сигнал $f(t)$ в a раз, можно записать в следующем виде:

$$C_k' = aC_k. \quad (5.19)$$

Это равенство верно, потому что

$$\begin{aligned} C_k' &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} af(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = a \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = \\ &= aC_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Исходя из этих результатов мы можем утверждать, что, если изменить сигнал в a раз, то и коэффициенты Фурье изменятся в a раз.

Следовательно, спектр амплитуд меняется, а спектр фаз остается без изменений.

5.7.4. Сложение двух сигналов

Если сложить два различных сигнала, чему будет равен спектр суммы? Обозначим коэффициенты Фурье сигнала $f_1(t)$ как C_{1k} , а коэффициенты Фурье сигнала $f_2(t)$ — как C_{2k} . Коэффициенты Фурье суммы сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ обозначим как C_k' . Тогда

$$C_k' = C_{1k} + C_{2k}. \quad (5.20)$$

Иначе говоря, если сложить две функции, то и коэффициенты Фурье обеих функций суммируются. Это происходит потому, что

$$\begin{aligned} C_k' &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{f_1(t) + f_2(t)\} e^{-j\omega_0 kt} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-j\omega_0 kt} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = C_{1k} + C_{2k}. \end{aligned}$$

Полученное соотношение отражает линейность преобразования Фурье, что можно представить следующим образом:

$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \xrightarrow{\text{Разложение в ряд Фурье}} a_1 C_{1k} + a_2 C_{2k}$

То есть амплитуды гармоник одинаковых частот складываются с учетом коэффициентов линейной комбинации.

5.7.5. Сдвиг сигнала во времени

Если во время наблюдения за сигналом изменить начало отсчета времени, то что произойдет с коэффициентами Фурье? Изменение начала отсчета времени — это то же самое, что сдвиг сигнала во времени. Коэффициенты Фурье функции $f(t - \tau)$, полученной в результате сдвига функции $f(t)$ вправо на τ (Рис. 5.21), можно выразить как

$$C'_k = e^{-j\omega_0 k \tau} C_k. \quad (5.21)$$

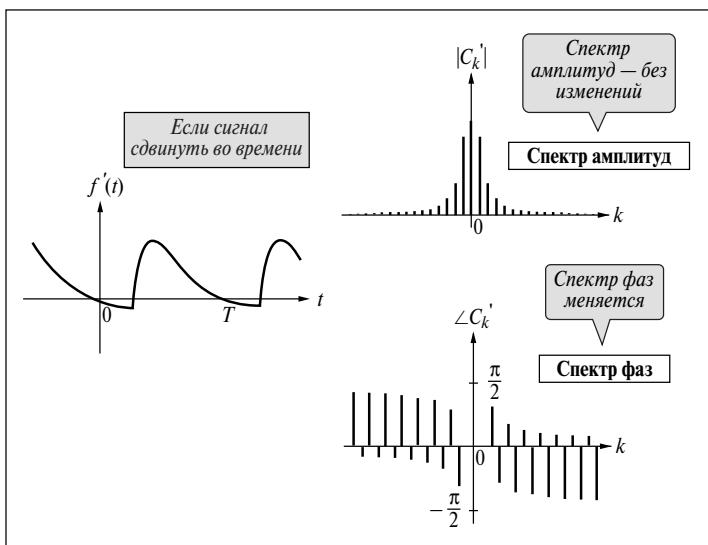


Рис. 5.21. Связь между сдвигом сигнала во времени и спектрами.

Это свойство представим следующим образом:

$$f(-\tau) \xrightarrow{\text{Разложение в ряд Фурье}} e^{-j\omega_0 k \tau} C_k.$$

То есть меняется только фаза, а амплитуда гармоники остается без изменений.

Приведем доказательство этого положения. Коэффициенты Фурье функции $f(t - \tau)$ имеют вид:

$$C'_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t - \tau) e^{-j\omega_0 k t} dt.$$

Сделаем подстановку $u = t - \tau$, тогда

$$dt = du \quad -\frac{T}{2} - \tau < u < \frac{T}{2} - \tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C'_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} f(u) e^{-j\omega_0 k(u+\tau)} du = e^{-j\omega_0 k \tau} \frac{1}{T} \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} f(u) e^{-j\omega_0 k u} du = \\ &= e^{-j\omega_0 k \tau} C_k. \end{aligned}$$

То есть мы получили выражение (5.21). Очевидно, что

$$|C'_k| = |e^{-j\omega_0 k \tau} C_k| = |C_k|.$$

Это еще раз подтверждает то, что при сдвиге сигнала во времени спектр фаз меняется, а спектр амплитуд остается без изменений.

ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Сигнал любой формы можно разложить на синусоидальные составляющие с различными частотами, кратными целому числу. Совокупность этих составляющих называется спектром, а сумма этих составляющих формирует значение функции во временной области.
2. Разложение в ряд Фурье — это разложение периодической функции на синусоидальные составляющие с различными частотами. Периодический сигнал $f(t)$ с периодом T и основной угловой частотой ω_0 ($\omega_0 = 2\pi/T$) при помощи коэффициентов Фурье можно представить в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_0 k t + b_k \sin \omega_0 k t),$$

где a_k и b_k — действительные коэффициенты Фурье функции $f(t)$, которые определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 k t dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 k t dt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Если функция $f(t)$ — четная, то $b_k = 0$, если нечетная, то $a_k = 0$.

3. В отличие от разложения в ряд Фурье с действительными коэффициентами при разложении в ряд Фурье с комплексными коэффициентами вычисления значительно упрощаются. Разложение в комплексный ряд Фурье периодической функции $f(t)$ с основной угловой частотой ω_0 ($\omega_0 = 2\pi/T$) имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t}.$$

Комплексные коэффициенты Фурье C_k функции $f(t)$ вычисляются следующим образом:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Если функция $f(t)$ — четная, то мнимая часть C_k равна 0, если нечетная, то действительная часть C_k равна 0.

4. Множество $|C_k|$ называют спектром амплитуд, множество $\angle C_k$ — спектром фаз, а множество $|C_k|^2$ называют спектром мощности. Спектр амплитуд показывает, какова доля составляющих частот в сигнале.
5. Разложение в ряд Фурье обладает свойством линейности. Если сигнал сдвигается во времени, то спектр амплитуд и спектр мощности не меняются.
6. Мощности сигнала во временной и частотной областях равны. Иначе говоря,

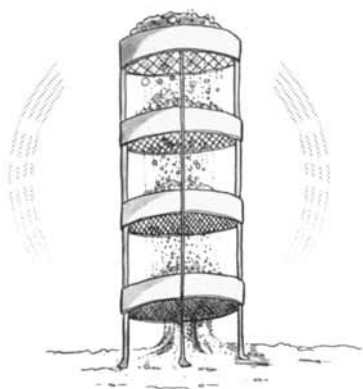
$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2.$$

Это соотношение выражает теорему Парсеваля.

7. Если увеличивать количество гармоник, то точность приближения функции рядом Фурье повышается.

Практические задания

- 1) Пусть $z_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ и $z_2 = \alpha_2 + j\beta_2$. Докажите, что
- $$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
- $$\angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2.$$
- 2) Разложите в ряд Фурье функцию $f(t) = |t|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и сравните результат с результатами из примера на стр. 82.
- 3) Разложите в комплексный ряд Фурье функцию $f(t) = |\cos t|$.



ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДПФ) И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (БПФ)

6.1. АНАЛИЗ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА МАТЕМАТИЧЕСКИМ АППАРАТОМ ФУРЬЕ

Если разложить сигнал в ряд Фурье и рассматривать его спектр, то можно выявить особенности сигнала, не замеченные ранее. Итак, каким же образом в действительности осуществляют разложение сигнала в ряд Фурье? Самый простой способ реализуется с помощью измерительного прибора, называемого анализатором спектра. Анализатор спектра состоит из множества фильтров. По мощности сигнала на выходе фильтра, пропускающего сигнал только определенной частоты, можно определить, какая доля этой частотной составляющей содержится в сигнале. Следовательно, если установить фильтры различных частот, то становится известным спектр всего сигнала в целом (**Рис. 6.1**).

В последнее время быстродействие компьютеров значительно возросло, и способы обработки сигналов с использованием компьютеров стали общепринятыми. Оцифрованный сигнал в виде последовательности цифровых значений вводят в компьютер и, проводя соответствующие вычисления, получают коэффициенты Фурье. Обработка цифровых сигналов с помощью компьютера по сравнению с методом получения спектров с помощью электронных устройств уступает в скорости, но выигрывает в степени точности.

Одним словом, если в компьютер введен сигнал, представленный в виде цифровых данных, то в зависимости от программы, с помощью

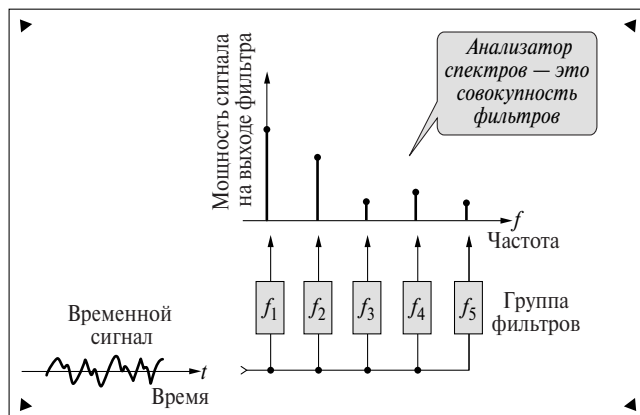


Рис. 6.1. Анализатор спектра.

которой он обрабатывается, можно произвести сглаживание сигнала, получить частотный спектр или автокорреляцию. То есть техника обработки цифровых сигналов дает возможность реализовывать различные виды обработки. К тому же в последнее время существует много разновидностей интегральных схем, которые реализуют алгоритмы обработки сигналов, и, в частности, благодаря им обработка сигналов цифровыми методами стала общепринятой. В этой главе, одной из важных тем которой является обработка цифровых сигналов, рассмотрим применение математического анализа преобразований Фурье к анализу цифрового сигнала.

6.2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ДПФ)

Формулы разложения в ряд Фурье периодической функции $f(t)$ с периодом 2π на основном отрезке $[0, 2\pi]$ были представлены в главе 5 соотношениями (5.8) и (5.9):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}, \quad (6.1)$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jkt} dt. \quad (6.2)$$

Будем считать, что ряд из N числовых значений сигнала, выбранных на рассматриваемом интервале, как показано на **Рис. 6.2**, имеет вид:

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\}$$

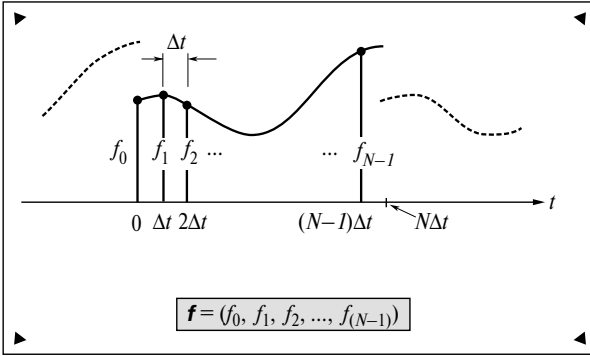


Рис. 6.2. N значений сигнала.

Обозначим интервал дискретизации выборки этого цифрового сигнала как Δt . Тогда основной период сигнала выражается как $N\Delta t$. Считая этот сигнал периодической функцией с периодом $N\Delta t$, разложим его в ряд Фурье.

Мы уже знаем, что комплексные коэффициенты Фурье C_k периодической функции $f(t)$ с периодом 2π можно получить как скалярное произведение $f(t)$ и e^{jkt} :

$$C_k = \langle f(t), e^{jkt} \rangle.$$

В данном случае необходимо определить коэффициенты Фурье N -мерного вектора

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}),$$

представленного рядом из N значений сигнала, приближающего функцию $f(t)$. Для того чтобы получить эти коэффициенты, нужно задать вектор, соответствующий системе ортонормированных функций e^{jkt} , а скалярное произведение этого вектора и вектора \mathbf{f} определит коэффициенты Фурье для дискретных значений. Иначе говоря, если соответствующий функции e^{jkt} N -мерный вектор,

6. Дискретное преобразование Фурье и быстрое преобразование Фурье

компоненты которого комплексные числа, обозначить как e_k , то коэффициенты Фурье для вектора f можно определить как скалярное произведение:

$$C_k = \langle f, e_k \rangle$$

Итак, каким же должен быть вектор e_k ?

Из определения функции комплексного переменного функция

$$e^{jkt} = \cos kt + j \sin kt$$

соответствует N -мерному вектору, компонентами которого являются выборки e^{jkt} с интервалом $2\pi/N$. То есть, обозначив

$$\Delta\omega = 2\pi/N,$$

имеем (Рис. 6.3):

$$e_k = (1, e^{jk\Delta\omega}, e^{j2k\Delta\omega}, \dots, e^{j(N-1)k\Delta\omega}).$$

Этот вектор выбран правильно еще и потому, что множество векторов, образованное из e_k , где $k = 1, 2, \dots, N-1$, в N -мерном векторном пространстве образует ортонормированный базис (см. памятку).

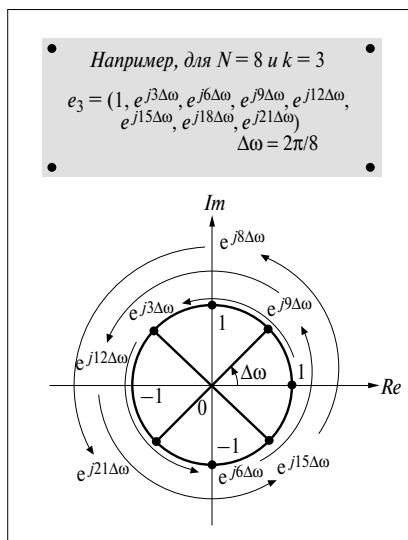


Рис. 6.3. Базисный N -мерный вектор.

ПАМЯТКА

Для того чтобы проверить, образует ли ряд векторов $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{N-1}\}$ ортонормированный базис, нужно вычислить скалярное произведение

$$\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)mi} e^{-j(2\pi/N)ni} = \delta_{mn}.$$

Теперь рассуждать станет легче. Вектор \mathbf{f} можно разложить по ортонормированному базису согласно формуле

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \mathbf{e}_k. \quad (6.3)$$

Далее, коэффициенты C_k можно определить через скалярное произведение \mathbf{f} и \mathbf{e}_k :

$$C_k = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_k \rangle, \quad (6.4)$$

То есть имеем:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)ki} \quad (k=0, 1, 2, \dots, N-1). \quad (6.5)$$

Это соотношение называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ) сигнала $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$. Соотношение, выражающее каждый компонент вектора \mathbf{f} из формулы (6.3):

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j(2\pi/N)ki} \quad (i=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.6)$$

называется *обратным дискретным преобразованием Фурье* (ОДПФ).

ПАМЯТКА

При использовании языка программирования, который не оперирует с комплексными числами, соотношения (6.5) и (6.6) придется выражать тригонометрическими функциями. На всякий случай приведем эти выражения. Если коэффициенты Фурье C_k дискретного преобразования Фурье представить как

$$C_k = A_k + jB_k,$$

где A_k — действительная часть, а B_k — мнимая часть, тогда

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cos \frac{2\pi}{N} ki$$

$$B_k = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sin \frac{2\pi}{N} ki \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{k=0}^{N-1} (A_k + jB_k) \left(\cos \frac{2\pi}{N} ki + j \sin \frac{2\pi}{N} ki \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \cos \frac{2\pi}{N} ki - B_k \sin \frac{2\pi}{N} ki \right) + j \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \sin \frac{2\pi}{N} ki + B_k \cos \frac{2\pi}{N} ki \right). \end{aligned}$$

Но значения f_i являются действительными числами, поэтому мнимая часть этого выражения обращается в 0, а обратное дискретное преобразование Фурье примет вид:

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \cos \frac{2\pi}{N} ki - B_k \sin \frac{2\pi}{N} ki \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1).$$

Итак, с определением этих соотношений стало понятно, как с помощью компьютера осуществляется цифровой анализ Фурье. Кстати, попробуем сопоставить соотношения дискретного преобразования Фурье и обратного дискретного преобразования Фурье. Если опустить такие моменты, как наличие или отсутствие коэффициента $1/N$, а также то, каким является показатель степени e — положительным или отрицательным, в остальном эти соотношения абсолютно одинаковы. Следовательно, для дискретного преобразования Фурье и обратного дискретного преобразования Фурье можно подготовить одну общую компьютерную программу. То есть входными данными для ДПФ будет ряд значений сигнала, а для ОДПФ — коэффициенты Фурье. В зависимости от того, с чем мы имеем дело, меняется знак показателя степени e , а результат вычислений делится на число данных N .

6.3. СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Принимая во внимание **Рис. 6.4**, исследуем следующие свойства дискретного преобразования Фурье.

6.3.1. Свойство периодичности спектра

Коэффициенты Фурье, полученные с помощью ДПФ, связаны следующим образом:

$$C_{k+N} = C_k. \quad (6.7)$$

Это означает, что

спектры — периодические, с периодом N

Докажем это. Согласно соотношению (6.5)

$$C_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(k+N)i} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)ki} e^{-j2\pi i}.$$

Но i являются целыми числами, а значит

$$e^{-j2\pi i} = 1.$$

Следовательно,

$$C_{k+N} = C_k.$$

Из этого свойства периодичности следует, что C_0, C_1, \dots, C_{N-1} являются основными коэффициентами Фурье, полученными из N значений данных. Все остальные коэффициенты являются их повторением.

6.3.2. Свойство симметричности спектра

Докажем следующее свойство коэффициентов Фурье:

$$C_{N-k} = C_{-k}. \quad (6.8)$$

Это соотношение указывает на следующий факт, имеющий место в дискретном преобразовании Фурье:

составляющие спектра с отрицательными k повторяются через N значений на интервале от $k - N/2$ до $k = N - 1$

6. Дискретное преобразование Фурье и быстрое преобразование Фурье

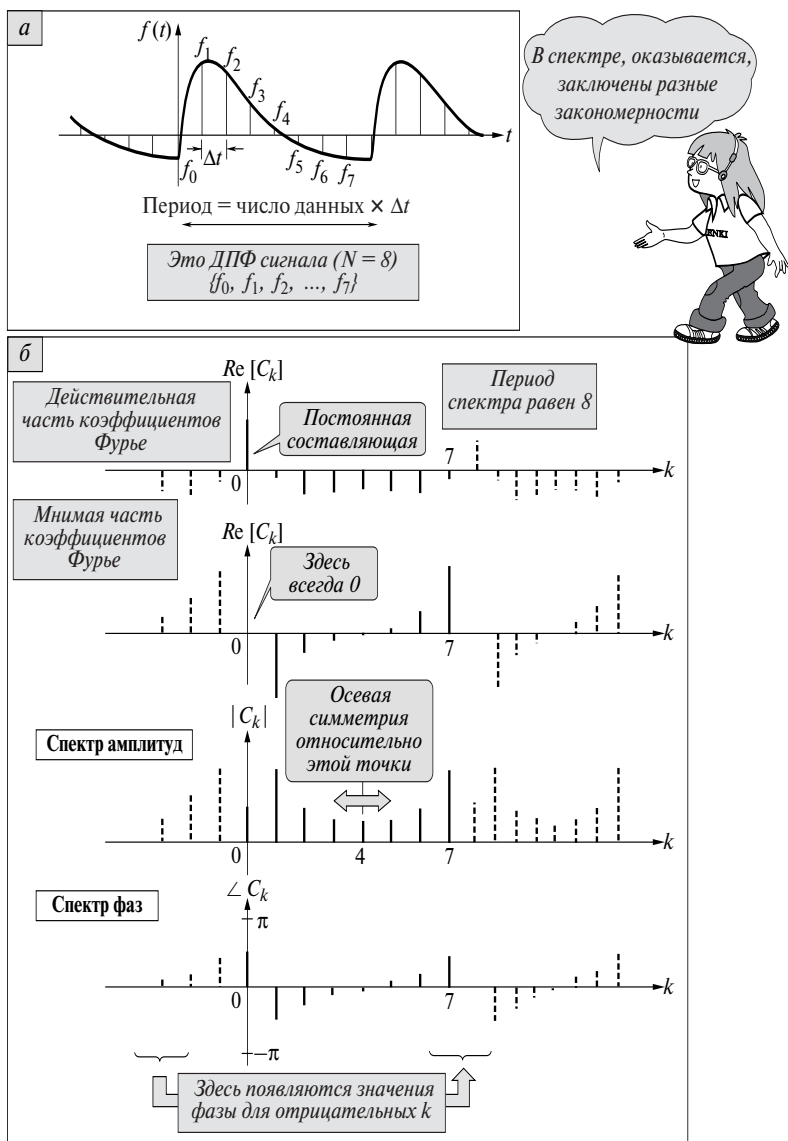


Рис. 6.4. Спектры ДПФ.

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} C_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(N-k)i} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(-k)i} e^{-j2\pi i} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)(-k)i} = C_{-k}. \end{aligned}$$

Кстати, когда все значения сигнала действительны, комплексные коэффициенты Фурье с противоположными k являются сопряженными комплексными:

$$C_{-k} = \bar{C}_k, \text{ следовательно, } |C_{-k}| = |C_k|.$$

То же самое можно записать как

$$\operatorname{Re}(C_{-k}) = \operatorname{Re}(C_k), \operatorname{Im}(C_{-k}) = -\operatorname{Im}(C_k).$$

Учитывая выражение (6.8), получим

$$C_{N-k} = \bar{C}_k. \quad (6.9)$$

Это соотношение означает, что спектр амплитуд имеет осевую симметрию. Иначе говоря, в дискретном преобразовании Фурье

спектр амплитуд имеет симметрию относительно $k = N/2$

6.4. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (БПФ)

Дискретное преобразование Фурье — это алгоритм, который необходимо знать, когда мы осуществляем анализ Фурье сигнала с помощью цифрового компьютера. Если не знать теорию ДПФ, то смысл спектров Фурье, полученных как результат вычислений, не понятен. Однако среди специалистов, действительно имеющих отношение к обработке сигналов, практически нет таких, которые проводят анализ Фурье с помощью алгоритма ДПФ. Причина этому одна — очень много времени затрачивается на вычисления, что не практично.

Если осуществить дискретное преобразование Фурье для сигнала с числом данных порядка тысячи, используя обычный персональный компьютер, то вычисление займет довольно много времени. Однако, если использовать быстрое преобразование Фурье

(БПФ), которое мы рассмотрим в этом параграфе, то результат будет получен значительно быстрее. К тому же, если использовать специализированный процессор, спектры сигнала появляются на дисплее в реальном времени. В БПФ обычно число данных ограничено и выражено степенью с основанием 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...). Но, несмотря на это ограничение, БПФ все равно используется благодаря практичности и высокой скорости вычислений.

Быстрое преобразование Фурье — это алгоритм вычисления, который успешно использует свойства периодичности тригонометрических функций для того, чтобы избежать ненужных вычислений в дискретном преобразовании Фурье. Это, несомненно, важный инструмент при обработке сигналов, но алгоритм вычисления достаточно сложен, и следует сказать, что суть БПФ скорее заключается не в самой обработке сигналов, а в методе вычисления числовых значений. И в случае БПФ, и в случае ДПФ результат вычислений один и тот же. (Строго говоря, в действительности в быстром преобразовании Фурье число операций меньше, поэтому степень точности вычислений выше.) Следовательно, зная ДПФ, не обязательно знать алгоритм вычислений БПФ. Поэтому, если читатель не испытывает к нему особого интереса, можно и не читать нижеизложенные рассуждения.

Итак, проанализируем, где же в дискретном преобразовании Фурье скрываются ненужные вычисления.

6.4.1. Анализ ДПФ

Пусть число данных равно N , тогда некоторое комплексное число w представим в виде:

$$w = e^{-j(2\pi/N)}.$$

В этом случае в дискретном преобразовании Фурье коэффициенты Фурье для ряда значений сигнала $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\}$ выражаются соотношением:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} w^{ki} f_i.$$

Для начала рассмотрим ряд сигнала из 8 значений, то есть случай, когда $N = 8$. Первым делом, коэффициенты Фурье C_k сигнала

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_7\}$$

запишем более подробно:

$$C_k = \frac{1}{8} (w^0 f_0 + w^k f_1 + w^{2k} f_2 + w^{3k} f_3 + w^{4k} f_4 + w^{5k} f_5 + w^{6k} f_6 + w^{7k} f_7).$$

Записывать каждый коэффициент в таком виде довольно хлопотно, поэтому избавимся от $1/8$ в записи коэффициентов. А значит, впредь под коэффициентом C_k будем подразумевать NC_k .

Теперь распишем все коэффициенты $\{C_0, C_1, C_2, \dots, C_7\}$. Степенной ряд w представим в виде матрицы. Проверьте внимательно, все ли правильно:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ w^0 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ w^0 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Будьте
внимательны к
показателю
степени w !

Итак, понятно, что произведение данной матрицы на вектор, представляющий собой ряд значений сигнала, является соотношением, определяющим коэффициенты Фурье. Для того чтобы вычислить коэффициенты Фурье этим способом, необходимо произвести $8 \times 8 = 64$ умножения и $7 \times 8 = 56$ сложений. Обобщая, можно сказать, что в вычислении ДПФ для N значений необходимо умножить N^2 раз и сложить $(N - 1)N$ раз. Если N невелико, как в приведенном примере, то объем вычислений тоже мал, но если N , например, равно 1000, то число операций достигает 1 000 000.

Кстати, в степенном ряду w скрыта некоторая закономерность. Посмотрите на **Рис. 6.5**, из которого ясно, что

$$\begin{aligned} w^8 &= w^0 \\ w^9 &= w^1 \\ w^{10} &= w^2 \\ w^{11} &= w^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

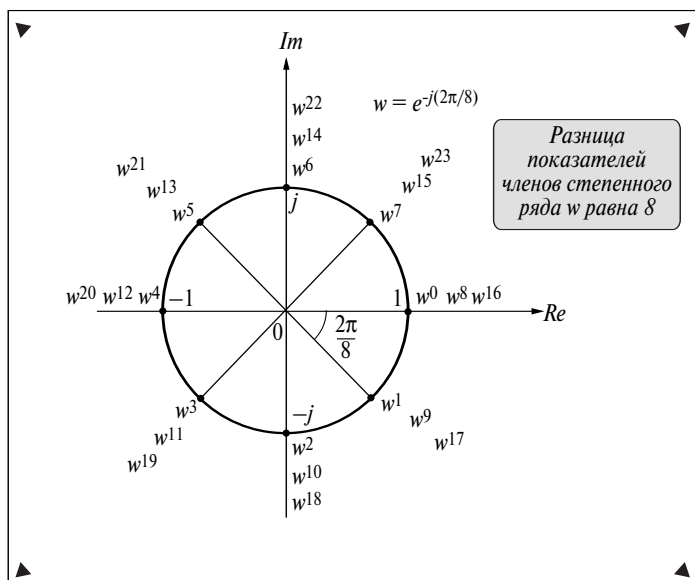


Рис. 6.5. Степенной ряд w .

То есть значения w , начиная с w^8 , равны соответствующему значению от w^0 до w^7 . Если остаток от показателя n , деленного на 8, записать как

$$n \bmod 8,$$

то значения w^n можно представить следующим образом:

$$w^n = w^{n \bmod 8}.$$

Иначе говоря,

$$8 \bmod 8 = 0$$

$$9 \bmod 8 = 1$$

$$10 \bmod 8 = 2$$

$$11 \bmod 8 = 3$$

...

Используя эту закономерность, исправьте самостоятельно матрицу (6.10). Итак, что у вас получилось? Результат представлен ниже:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^1 & w^6 & w^3 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Проблема заключается в том, как выразить закономерность показателей степеней w

Внимательно посмотрите на эту матрицу. Наверняка, вы обнаружите различные закономерности. Проблема заключается в том, как использовать эти закономерности, чтобы вычисление было эффективным.

Быстрое преобразование Фурье — это алгоритм эффективного вычисления с использованием закономерностей, скрытых внутри матрицы, выражающей дискретное преобразование Фурье. Таким образом, если правильно переставить элементы матрицы, то число операций умножения уменьшится. Однако по сравнению с вычитанием и сложением на умножение затрачивается гораздо больше времени, поэтому, если уменьшить число операций умножения, которые занимают почти весь объем вычислений, то в результате возможно сократить время, затраченное на весь процесс вычисления. Каким же образом возможно уменьшить число операций умножения в быстром преобразовании Фурье?

6.4.2. Алгоритм БПФ для ряда из 4 членов

Прежде всего рассмотрим случай, когда сигнал представлен рядом всего лишь из 4 членов. Обозначим его как

$$\{f_0, f_1, f_2, f_3\},$$

тогда дискретное преобразование Фурье этого сигнала можно выразить в виде произведения матрицы на вектор сигнала:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Если в соответствии с **Рис. 6.6** в матрицу подставить числовые значения степенного ряда w , то в результате получим

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

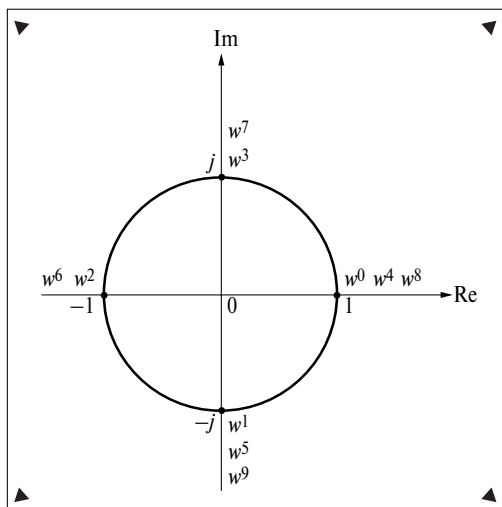


Рис. 6.6. Степенной ряд w для $N = 4$.

С этого момента мы будем часто осуществлять замену элементов этой матрицы, но если представлять матрицу обычным способом, то выражение, применяемое для вычислений, усложнится. Для того чтобы хоть немного упростить это выражение, позволим себе определить некоторый особенный способ представления произведения матрицы на вектор, который, кроме как в этой книге, вы нигде не встретите:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

(Существуют различные алгоритмы БПФ. Один из них, подобный вышеизложенному, можно найти в книге «Справочник по цифровой вычислительной технике. ЭВМ и системы»¹. — *Прим. редактора перевода.*)

Чуть позже появится другое произведение:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ aw^0 & aw^0 & aw^0 & aw^0 \\ bw^0 & bw^1 & bw^2 & bw^3 \\ cw^0 & cw^2 & cw^4 & cw^6 \\ dw^0 & dw^3 & dw^6 & dw^9 \end{bmatrix}$$

Такое представление произведения я никогда не встречал



Обратив внимание на особенность коэффициентов элементов матрицы, представим произведение в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix}$$

С учетом сделанных преобразований коэффициенты Фурье в подробном виде выглядят следующим образом:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw^0 f_0 + aw^0 f_1 + aw^0 f_2 + aw^0 f_3 \\ bw^0 f_0 + bw^1 f_1 + bw^2 f_2 + bw^3 f_3 \\ cw^0 f_0 + cw^2 f_1 + cw^4 f_2 + cw^6 f_3 \\ dw^0 f_0 + dw^3 f_1 + dw^6 f_2 + dw^9 f_3 \end{bmatrix}$$

¹ Справочник по цифровой вычислительной технике. ЭВМ и системы/Под ред. Малиновского Б.Н. — Киев: Техника, 1980. — С. 85—90.

Итак, вернемся к главному вопросу. Первым делом чуть изменим матрицу в выражении (6.14). Поменяв местами столбцы матрицы, разделим ее на две группы: на группу f_0, f_2 с четными индексами данных и на группу f_1, f_3 с нечетными индексами данных. Таким образом, получим

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^1 & w^3 \\ w^2 & w^6 \\ w^3 & w^9 \end{bmatrix}$$

Посмотрите на матрицу, являющуюся вторым слагаемым этого выражения. Если обратить внимание на то, что $w^{k+1} = w^k w^1$, это выражение можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 w^0 & w^0 w^0 \\ w^1 w^0 & w^1 w^2 \\ w^2 w^0 & w^2 w^4 \\ w^3 w^0 & w^3 w^6 \end{bmatrix} =$$

Если разделить
на две группы, то
получим две
одинаковые матрицы

$$= \begin{bmatrix} f_0 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 & w^1 \\ w^1 & w^2 \\ w^2 & w^3 \\ w^3 & w^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \\ w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Из Рис. 6.6 очевидно, что

$$w^4 = w^0 = 1, w^6 = w^2 = -1,$$

а также

$$w^2 = -w^0, w^3 = -w^1.$$

Подставим эти значения в выражение (6.15) и получим

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_2 \\ C_0 & C_1 \\ C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 & \\ w^1 & \\ -w^0 & \\ -w^1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Столбцы, выделенные серым цветом, одинаковы. Их элементы принимают значения 1 или -1 . Следовательно, вычисление в этих столбцах мы можем осуществить, выполняя только операции сложения и вычитания. А это значит, что если вычисления проводить таким образом, то их объем, несомненно, уменьшится.

Для того чтобы упростить процесс вычисления выражения (6.16), попробуем его схематизировать. Сначала разделим f_0, f_1, f_2, f_3 на группы с четными и нечетными индексами и в каждой группе выполним операции сложения и вычитания. Ход этого вычисления отражен на **Рис. 6.7**. Каждый компонент ряда данных $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ умножается на множители, встречающиеся на его пути. В точках соединения стрелок производится суммирование.

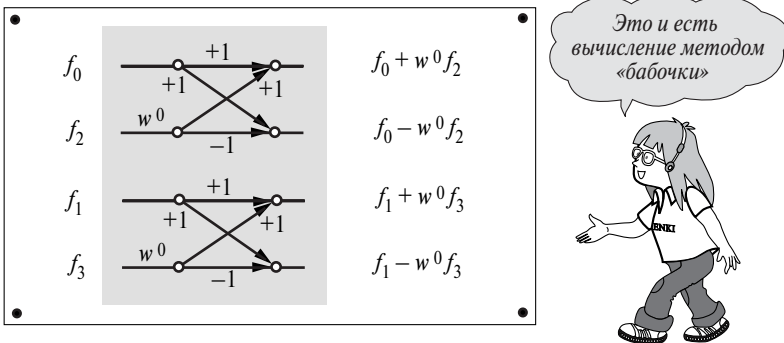


Рис. 6.7. Метод вычисления «бабочкой».

Впредь $+1$ записывать не будем.

Графическое изображение алгоритма похоже на бабочку с распахнутыми крыльями, поэтому этот метод вычисления называют «бабочкой». Обратим внимание на то, что одному вычислению «бабочкой» соответствует одна операция умножения. Кстати, кажется

странным, что каждое из значений f_2 и f_3 на **Рис. 6.7** умножено на w^0 ($w^0 = 1$). Такая форма записи специально приведена для того, чтобы в дальнейшем можно было описать метод вычисления «бабочкой» в общем виде.

Продолжим разговор об этом методе. На **Рис. 6.8** представлено его схематическое изображение. Вычисление «бабочкой» выполнено 4 раза. В дискретном преобразовании Фурье операцию умножения необходимо было бы выполнить $4 \times 4 = 16$ раз, а в нашем случае всего лишь 4 раза.

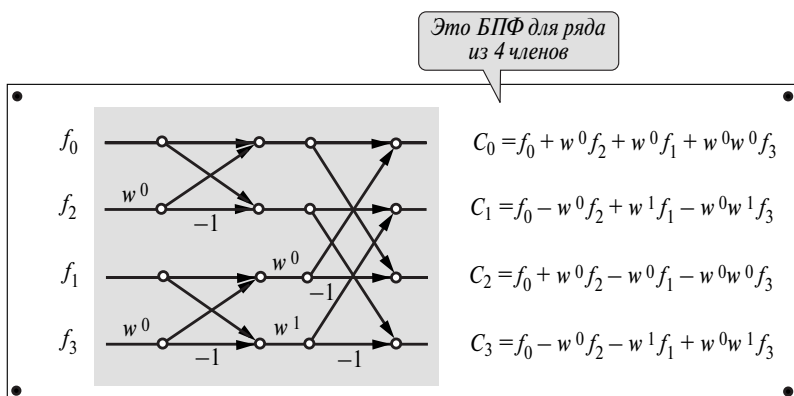


Рис. 6.8. БПФ для ряда из 4 членов.

6.4.3. Обобщение алгоритма БПФ

Каким образом можно обобщить способ быстрого преобразования Фурье для ряда из 4 членов, если данных гораздо больше? В случае БПФ для ряда из 4 членов главным пунктом было деление данных с четными и нечетными индексами. Может быть, стоит попробовать то же самое и для большего числа данных? Рассмотрим случай БПФ для ряда из 8 членов. В первую очередь ряд из 8 членов дискретного преобразования Фурье из основного выражения (6.11) разделим на две группы с четными и нечетными индексами:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} \\ w^0 & w^8 & w^{16} & w^{24} \\ w^0 & w^{10} & w^{20} & w^{30} \\ w^0 & w^{12} & w^{24} & w^{36} \\ w^0 & w^{14} & w^{28} & w^{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^1 & w^3 & w^5 & w^7 \\ w^2 & w^6 & w^{10} & w^{14} \\ w^3 & w^9 & w^{15} & w^{21} \\ w^4 & w^{12} & w^{20} & w^{28} \\ w^5 & w^{15} & w^{25} & w^{35} \\ w^6 & w^{18} & w^{30} & w^{42} \\ w^7 & w^{21} & w^{35} & w^{49} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Если обратить внимание на группу с нечетными индексами, то ее можно представить в новом виде:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} \\ w^0 & w^8 & w^{16} & w^{24} \\ w^0 & w^{10} & w^{20} & w^{30} \\ w^0 & w^{12} & w^{24} & w^{36} \\ w^0 & w^{14} & w^{28} & w^{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^1 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^2 & w^0 & w^4 & w^8 & w^{12} \\ w^3 & w^0 & w^6 & w^{12} & w^{18} \\ w^4 & w^0 & w^8 & w^{16} & w^{24} \\ w^5 & w^0 & w^{10} & w^{20} & w^{30} \\ w^6 & w^0 & w^{12} & w^{24} & w^{36} \\ w^7 & w^0 & w^{14} & w^{28} & w^{42} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Используя правило, что значения степенного ряда w равны тому или иному соответствующему значению от w^0 до w^7 , имеем:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^1 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^2 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^3 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^4 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^5 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^6 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^7 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Кстати, если вновь обратиться к **Рис. 6.5**, то становятся понятными следующие выражения:

$$\begin{aligned}w^0 &= 1 \quad w^2 = -j \quad w^4 = -1 \quad w^6 = j \\w^4 &= -w^0 \quad w^5 = -w^1 \quad w^6 = -w^2 \quad w^7 = -w^3.\end{aligned}$$

Подставим эти значения в выражение (6.19) и получим

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{bmatrix} \\& \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ -w^0 \\ -w^1 \\ -w^2 \\ -w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad (6.20)\end{aligned}$$

Итак, если внимательно посмотреть на это соотношение, то ясно, что выделенные серым цветом части абсолютно одинаковы. Кроме того, хочется обратить внимание на то, что эти части одинаковы с расстановкой значений w выражения (6.13), которое мы встречали в БПФ для ряда из 4 членов. Это означает, что если осуществить быстрое преобразование Фурье в каждой из групп сигналов с четными и нечетными индексами, то, используя его результаты, можно выразить БПФ для ряда из 8 членов. На **Рис. 6.9** графически изображен ход вычисления. Если на этом рисунке раскрыть БПФ для ряда из 4 членов, то получим целиком изображение процесса БПФ для ряда из 8 членов, что наглядно представляет метод вычисления «бабочкой» (**Рис. 6.10**).

Итак, прогнозируя развитие процесса, который мы проследили до этого момента, можно сделать следующий вывод. Если повторять метод вычисления «бабочкой» и соответствующую перестановку ряда значений сигнала, переходя из БПФ для ряда из 4 членов к БПФ для ряда из 8 членов, то в конце концов можно осуществить быстрое преобразование Фурье сигнала для ряда, состоящего из любого числа членов количеством, равном степени числа два.

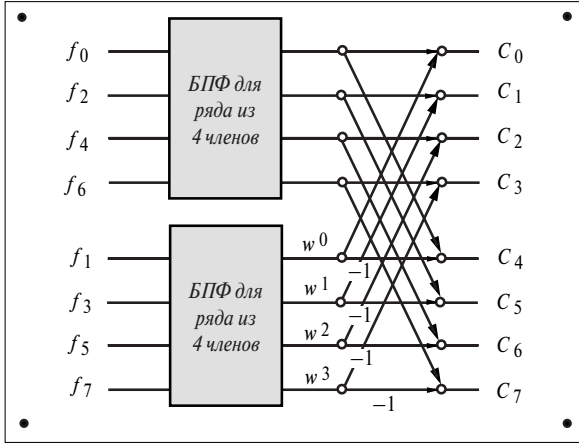
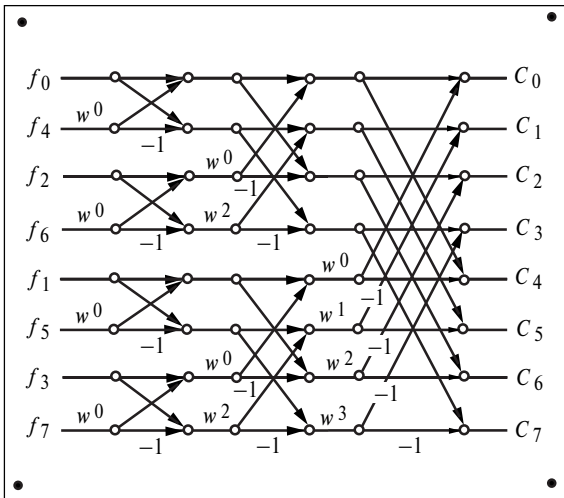


Рис. 6.9. БПФ для ряда из 8 членов с использованием БПФ для ряда из 4 членов.



Используя БПФ для ряда из 4 членов, переходим к БПФ для ряда из 8 членов, а затем — к БПФ для ряда из 16 членов ...



Рис. 6.10. Схема алгоритма БПФ для ряда из 8 членов.

Число вычислений методом «бабочкой» в БПФ для ряда из 8 членов, представленного на **Рис. 6.10**, равно 12, а значит, и операция умножения выполнена 12 раз. Это всего лишь $3/16$ от 64 операций умножения, которые выполняются в дискретном преобразовании Фурье. Попробуем это обобщить. Если число данных N является степенью 2, то есть $N = 2^P$, число операций умножения ДПФ равно N^2 , а в случае БПФ — $NP/2$. Если число данных не велико, то и разница в числе операций незначительна. Но если, например, число данных $2^{10} = 1024$, то по сравнению с числом операций умножения в дискретном преобразовании Фурье, которые выполняются 1050000 раз, в быстром преобразовании Фурье достаточно 5000 раз, что составляет примерно $1/200$ от объема вычислений дискретного преобразования Фурье. Если для вычислений в ДПФ необходима 1 минута, то в случае БПФ нужно всего лишь 0.3 секунды. Чем больше число данных, тем больше разница в скорости вычисления и преимущество БПФ проявляется ярче.

6.4.4. Перестановка разрядов и техника сортировки

Одним из главных пунктов в алгоритме быстрого преобразования Фурье является метод вычисления «бабочкой». Еще один важный момент заключается в последовательных разбиениях ряда значений сигнала на две группы и перестановке значений сигнала таким образом, чтобы в последующем прийти к методу вычислений «бабочкой». Способ перестановки значений сигнала называется техникой сортировки. Техника сортировки основана на перестановке разрядов. Теоретически мы не будем давать этому объяснения, но попробуем добиться от вас интуитивного понимания на примере, изложенном ниже.

Ряд значений сигнала расставили в порядке

f_0, f_2, f_1, f_3 (в случае БПФ для ряда из 4 членов) и в порядке

$f_0, f_4, f_2, f_6, f_1, f_5, f_3, f_7$ (в случае БПФ для ряда из 8 членов).

Если значения индексов по порядку представить в двоичной системе, то прослеживается любопытная связь.

< В случае БПФ для ряда из 4 членов >

Исходный сигнал		Сигнал после перестановки разрядов	
Десятичная система счисления	Двоичная система счисления	Десятичная система счисления	Двоичная система счисления
0	00	0	00
1	01	2	10
2	10	1	01
3	11	3	11

< В случае БПФ для ряда из 8 членов >

Исходный сигнал		Сигнал после перестановки разрядов	
Десятичная система счисления	Двоичная система счисления	Десятичная система счисления	Двоичная система счисления
0	000	0	000
1	001	4	100
2	010	2	010
3	011	6	110
4	100	1	001
5	101	5	101
6	110	3	011
7	111	7	111

И
что здесь
интересного?



Полученный ряд значений индексов в десятичной системе ничего нам не дает, но ряд значений индексов в двоичной системе следует очевидному правилу. Иначе говоря, значение индекса получается из исходного перестановкой старших и младших разрядов. Например, посмотрите на часть, выделенную серым цветом. Очевидно, что



То, что это верно и для всех других индексов, проверьте самостоятельно.

Это правило распространяется не только на ряды, число членов которых равно 4 или 8, но и на ряды, число членов которых намного больше, т.е. оно универсально. А теоретическое обоснование того, почему так происходит, пусть будет домашним заданием для читателей, проявляющих особый интерес.

ПАМЯТКА

[Компьютерная программа БПФ]

Приведем программу БПФ, написанную на языке BASIC

(Способ применения)

1. В случае ДПФ

< Входные данные >

N : число данных равно степени числа 2

$X(I)$: массив входных данных. Вводим здесь значения сигнала, которые должны быть преобразованы ($I = 1, 2, 3, \dots, N$).

$Y(I)$: массив выходных данных. Все значения обращаем в 0.

INV : значения приравниваем к 1.

< Выходные данные >

$X(I)$: действительные части коэффициентов Фурье. $X(I)$ — постоянная составляющая, n -я гармоника — $X(n + 1)$ (см. Рис. 6.4)

$Y(I)$: мнимые части коэффициентов Фурье. Принцип тот же, что и изложенный выше.

2. В случае ОДПФ

< Входные данные >

N : число данных равно степени числа 2

$X(I)$: массив входных данных. Вводим действительные части коэффициентов Фурье. Данные представляем в таком же виде, как и результат преобразования Фурье.

$Y(I)$: массив входных данных. Вводим мнимые части коэффициентов Фурье.

INV : значения приравниваем к -1 .

< Выходные данные >

$X(I)$: результат обратного преобразования Фурье.

$Y(I)$: почти все значения равны 0 или близки к 0. Вычислять их нет смысла.

100 *FFT

110 ' *****

120 ' Быстрое преобразование Фурье

130 '

140 ' N: Число данных

150 ' X: Массив данных. Возвращает действительную часть
160 ' коэффициентов ДПФ

170 ' Y: Возвращает мнимую часть коэффициентов ДПФ

180 '


```

190 ' INV: Флаг для ОБПФ
200 '      1: Прямое БПФ -1: Обратное БПФ
210 ' *****
220 ' Инверсия бита
230 J = 1
240 FOR I = 1 TO N-1
250   IF I >= J THEN 280
260     XA = X(I): X(I) = X(J): X(J) = XA
270     YA = Y(I): Y(I) = Y(J): Y(J) = YA
280     N2 = N/2
290     IF N2 >= J THEN 310
300       J = J-2: N2 = N2/2: GOTO 290
310   J = J+N2
320 NEXT I
330 '      Здесь начинается БПФ
340 M = 1: N2 = N
350 N2 = N2/2: IF N2 <> 1 THEN M = M+1: GOTO 350
360 FOR L = 1 TO M
370   LP = 2^L
380   LP2 = LP/2
390   DARG = -INV*3.14159/LP2
400   ARG = 0
410   FOR J = 1 TO LP2
420     C = COS(ARG): S = SIN(ARG):
430     ARG = ARG+DARG
440     IW = I+LP2
450     WR = X(IW)*C-Y(IW)*S:
460     WI = X(IW)*S+Y(IW)*C
470     X(IW) = X(I)-WR: Y(IW) = Y(I)-WI
480     X(I) = X(I)+WR: Y(I) = Y(I)+WI
490   NEXT J
500 NEXT L
510 IF INV = 1 THEN: FOR I = 1 TO N: X(I) = X(I)/N: Y(I) = Y(I)/N: NEXT I
520 RETURN

```



ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Дискретное преобразование Фурье сигнала, представленного рядом из N значений, определяется следующим образом:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-j(2\pi/N)ki} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1).$$

ОДПФ определяется как

$$f_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j(2\pi/N)ki} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N-1).$$

2. Спектры ДПФ являются периодическими с периодом N . Составляющие спектра с отрицательными k повторяются на интервале от $k = N/2$ до $k = N-1$. Спектр амплитуд и спектр мощности имеют симметрию относительно $k = N/2$.
3. Дискретное преобразование Фурье непрактично вследствие большого объема вычислений. Алгоритм БПФ по сравнению с ДПФ довольно эффективен и позволяет значительно уменьшить объем вычислений. Но число обрабатываемых данных должно быть степенью числа 2.

Практические задания

- 1) Дано: $f_i = \cos 3\pi/4$, $i = 0, 1, 2, \dots, 7$. Требуется произвести дискретное преобразования Фурье.
- 2) Было произведено быстрое преобразование Фурье для ряда из 512 значений (f_i , $i = 1, 2, \dots, 512$), подвергшихся выборке с частотой 1 кГц (см. программу из памятки на стр. 136).
 - а) Какова частота первой гармоники? Какова частота самой высокой гармоники сигнала, которую возможно проанализировать?
 - б) Укажите связь между $X(1)$, $Y(1)$ и основными коэффициентами Фурье C_k ; $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$. Чему равно K ?
- 3) Убедитесь в том, что если дискретное преобразование Фурье сигнала, представленного рядом значений $\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$, выражается соотношением (6.5), то для него верна теорема Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |f_i|^2.$$
- 4) Осуществите перестановку разрядов в случае, если количество данных равно 16.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ



7.1. ОТ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

Разлагая периодический сигнал на составляющие его синусоиды различных частот, мы освоили разложение в ряд Фурье как способ представления сигнала в виде суммы этих составляющих. Если сигнал является периодическим, то его возможно разложить в ряд Фурье. А каким же образом осуществляется разложение в ряд Фурье, если сигнал непериодический или представляет собой одиночный импульс (**Рис. 7.1**)? Разложение в ряд Фурье такого сигнала на ограниченном интервале теоретически является ошибочным. (Мы пока не рассматриваем практическую сторону дела.)

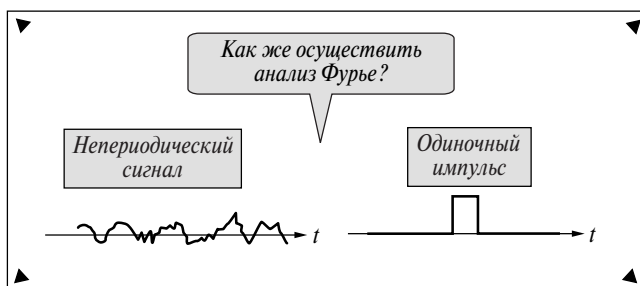


Рис. 7.1. Различные виды сигналов.

Развивая концепцию разложения в ряд Фурье, в этой главе давайте подумаем над теорией более общего анализа Фурье, включающей анализ непериодических и затухающих сигналов.

Итак, непериодический сигнал или одиночный импульс, несомненно, отличаются от периодических сигналов, но в определенном смысле можно сказать, что они являются одним из видов периодических сигналов. Рассматривать непериодический сигнал как периодический — это что-то из философии дзен-буддизма. Однако такой подход означает следующее: когда принято считать, что так называемый периодический сигнал — это сигнал, повторяющийся через период ограниченной величины, то непериодический сигнал можно считать периодическим сигналом с бесконечно большим периодом, хотя он и не повторяется. Если период считать бесконечно большим, то такой сигнал можно «взять в компаньоны» периодических сигналов независимо от того, обладает он свойством периодичности или нет. Думается, что этого объяснения недостаточно, поэтому приведем практический пример.

На **Рис. 7.2, б** показана огибающая спектра последовательности прямоугольных импульсов с периодом $T = 4$. Если форму этого сигнала оставить неизменной, а период увеличить, то что произойдет с огибающей спектра? Это показано на **Рис. 7.2, г**. Видно, что форма огибающей спектра не изменилась. Заметьте, что, для того чтобы можно было сравнивать формы спектров независимо от изменения основного периода сигнала, отсчет по оси абсцисс производится в единицах не k , а $2\pi k/T$.

Еще больше увеличим период (**Рис. 7.2, е**). И что мы видим? Плотность линий спектра увеличивается, а огибающая спектра остается неизменной. А значит, можно сказать, что если продолжать увеличивать период T , то при $T \rightarrow \infty$ рассматриваемая огибающая спектра и есть спектр одиночного прямоугольного импульса (**Рис. 7.2з**). Обратите внимание на то, что в этом случае плотность линий спектра становится бесконечно большой, то есть спектр, вначале представленный отдельными значениями амплитуд гармоник, становится сплошным.

Если сигнал, выраженный функцией $f(t)$ во временной области, в частотной области представить функцией $F(\omega)$, где ω — угловая частота, то связь между этими функциями $f(t)$ и $F(\omega)$ описывается следующими соотношениями:

7.1. От разложения в ряд Фурье к интегральному преобразованию Фурье

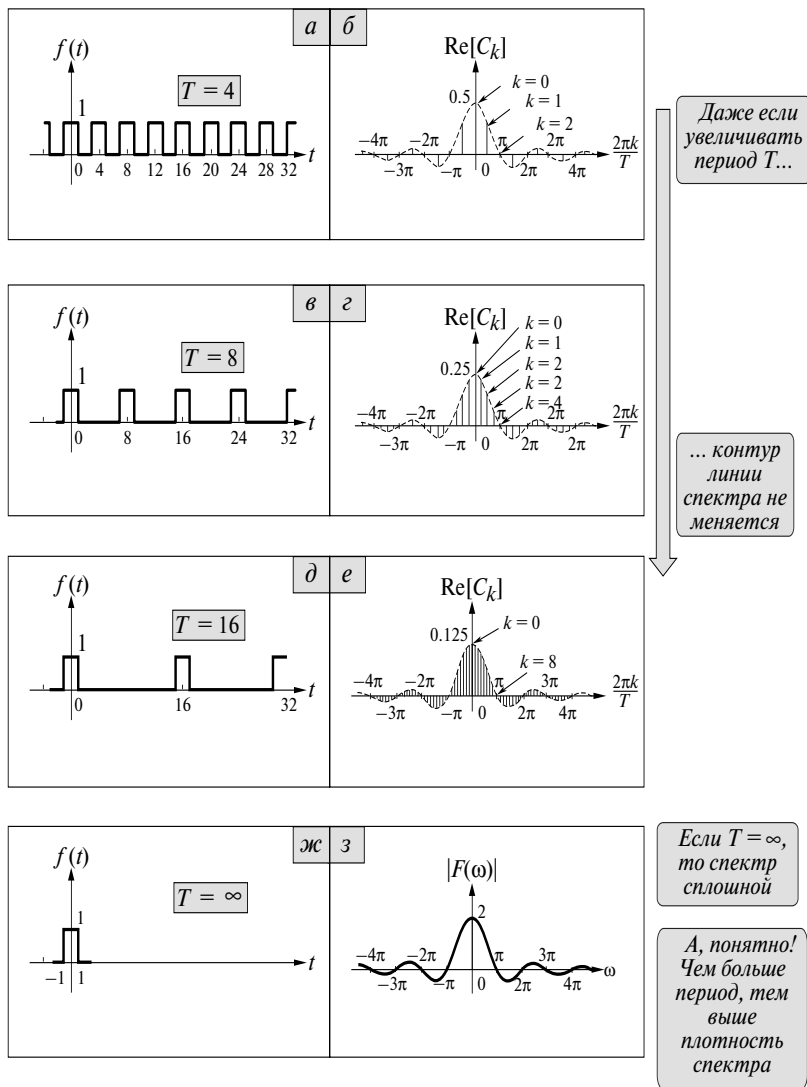


Рис. 7.2. Спектр последовательности прямоугольных импульсов.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.1)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.2)$$

Функция $F(\omega)$ соответствует комплексным коэффициентам разложения в ряд Фурье и является комплексной функцией. $F(\omega)$ называют *интегралом Фурье* функции $f(t)$, или преобразованием Фурье функции $f(t)$. Процесс получения функции $f(t)$ из $F(\omega)$ называют *обратным преобразованием Фурье*. При разложении в ряд Фурье мы получаем набор гармоник, а при преобразовании Фурье, где аргументом является угловая частота ω , получаем непрерывный спектр (спектр Фурье).

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье обозначают следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\{f(t)\} \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}. \end{aligned}$$

7.2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Исследуем свойства преобразования Фурье. Они подобны свойствам разложения в ряд Фурье.

7.2.1. Свойство линейности

Положим, что $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ — результат преобразования Фурье функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}, F_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}.$$

Если a_1 и a_2 — постоянные величины, то справедливо следующее соотношение:

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \quad (7.3)$$

То есть спектр сигнала, полученного при сложении сигналов $a_1 f_1(t)$, $a_2 f_2(t)$, ..., равен сумме спектров этих сигналов: $a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \dots$. Это следует из того, что

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega).
 \end{aligned}$$

7.2.2. Сдвиг сигнала во времени

Если $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, то при сдвиге сигнала $f(t)$ на величину τ преобразование Фурье функции $f(t - \tau)$ выражается следующим образом:

$$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} F(\omega) \quad (7.4)$$

Заметим, что при сдвиге сигнала

$$|e^{-j\omega\tau} F(\omega)| = |F(\omega)|.$$

То есть спектр амплитуд не меняется, меняется только спектр фаз (Рис. 7.3). И этот результат ожидаемый, поскольку сдвиг сигнала не должен отражаться на величине частотных составляющих, входящих в сигнал.

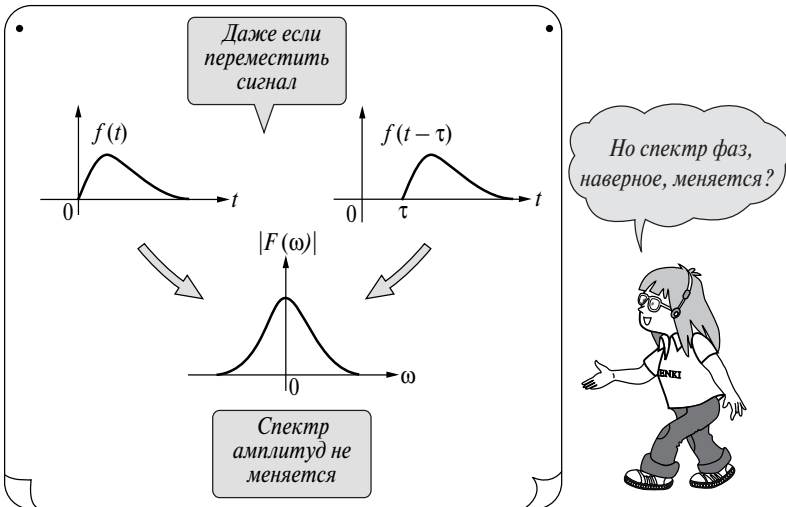


Рис. 7.3. Что происходит при сдвиге сигнала во времени.

Соотношение (7.4) выводится следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(u+\tau)} du = \\ &= e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du = e^{-j\omega\tau} F(\omega).\end{aligned}$$

7.2.3. Подобие

Попробуем получить преобразование Фурье в случае, когда форма сигнала та же, а ось времени сжата или растянута. Как показано на **Рис. 7.4**, в исходном сигнале $f(t)$ масштаб времени изменен таким образом, что аргумент t умножен на некоторый постоянный коэффициент a . Тогда спектр сигнала $f(at)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (7.5)$$

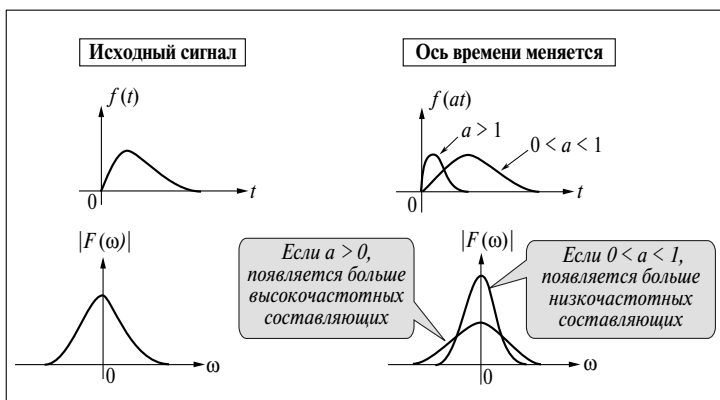


Рис. 7.4. Что получится, если ось времени растянута или сжата.

Если $|a| < 1$, то исходный сигнал $f(t)$ «растягивается» в a раз, поэтому частоты сигнала собираются в низкочастотной области и, следовательно, спектр сжимается по оси частот. В то же время по оси ординат он увеличивается в $1/|a|$ раз. Если $|a| > 1$, то частота сигнала повышается, а значит, спектр расширяется по оси абсцисс, а по оси ординат сжимается.

Соотношение (7.5) доказывается следующим образом. В первую очередь представим преобразование Фурье сигнала $f(at)$:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt.$$

Введем новую переменную $u = at$, тогда $dt = 1/adu$. Если $a > 0$, то

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(\omega/a)u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Если $a < 0$, то

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{-j(\omega/a)u} du = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

В результате объединения этих двух выражений получим соотношение (7.5).

7.2.4. Теорема Парсеваля

Теорема Парсеваля, возникшая при разложении в ряд Фурье, справедлива и для преобразования Фурье. Иначе говоря, энергия в частотной и временной областях одинакова, что выражается следующим соотношением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (7.6)$$

7.3. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И БЕЛЫЙ ШУМ

Дельта-функция — это математическая абстракция, введение которой очень удобно. Существуют разные определения дельта-функции, приведем самое простое из них.

Предположим, что прямоугольный импульс имеет ширину ϵ и высоту $1/\epsilon$ (Рис. 7.5), тогда его площадь равна 1. Но если $\epsilon \rightarrow 0$, тогда мы имеем дело с прямоугольным импульсом, высота которого стремится к бесконечности, а площадь остается неизменной. Этот импульс обозначим функцией $\delta(t)$. Очевидно, что:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & : t = 0 \\ 0 & : t \neq 0 \end{cases}.$$

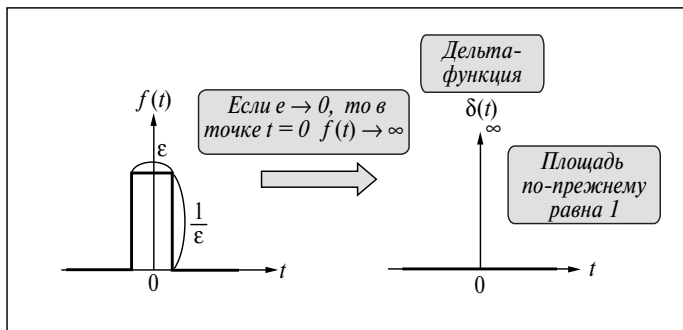


Рис. 7.5. Дельта-функция.

Так как площадь дельта-функции равна 1, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Импульс, принимающий бесконечно большое значение при $t = 0$ и имеющий площадь, равную 1, называется дельта-функцией. Физическое существование дельта-функции невозможно, но практически она заменяет короткий импульс высокой интенсивности.

На интервале $[-\infty, \infty]$ рассмотрим интеграл произведения непрерывной функции $f(t)$ и дельта-функции $\delta(t - t_0)$, полученной в результате сдвига по оси времени на величину t_0 функции $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt.$$

Значения дельта-функции при $t = t_0$ равны 0, поэтому произведение $\delta(t - t_0) f(t)$ при $t = t_0$ также равно 0. Следовательно, верно следующее соотношение (**Рис. 7.6**):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t_0) dt = \\ &= f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Из этого соотношения становится понятно, что величина интеграла такого вида равна значению функции $f(t)$ в точке t_0 . Иначе говоря, эта операция равнозначна проведению выборки сигнала в момент времени $t = t_0$.

Дельта-функция
сдвинута на
величину t_0

Функция $f(t)$

Значение $f(t)$ в
точке t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(t - t_0) \times f(t) \right) dt = f(t_0)$$

Рис. 7.6. Выражение выборки математической формулой.

Итак, в качестве функции $f(t)$ возьмем функцию $e^{-j\omega t}$ и подставим ее в выражение (7.7) при $t_0 = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt.$$

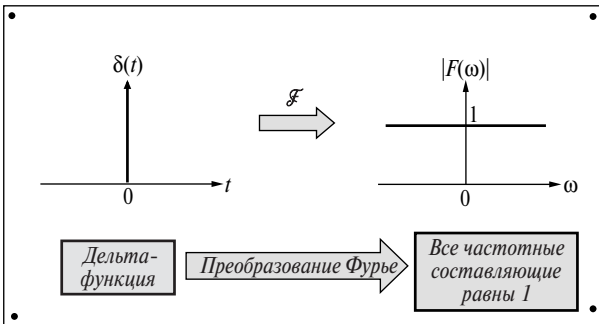


Рис. 7.7. Спектр дельта-функции.

И что мы имеем? Очевидно, что мы имеем формулу преобразования Фурье дельта-функции (**Рис. 7.7**). Исходя из соотношения (7.7) результат этого преобразования равен $f(0)$, т.е. $e^0 = 1$ и, следовательно,

$$\mathcal{F} \{ \delta(t) \} = 1$$

(7.8)

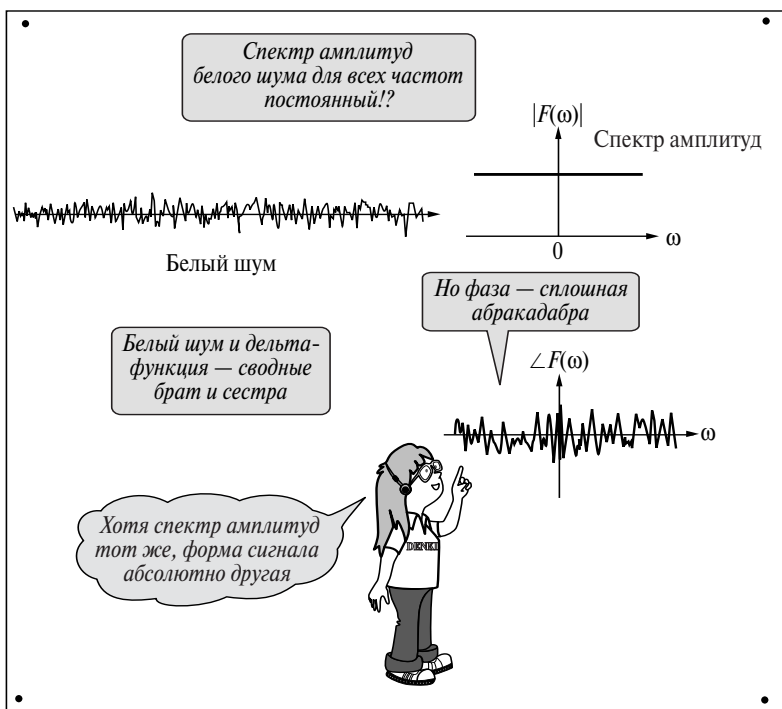


Рис. 7.8. Спектры белого шума.

Одним словом, из полученного результата ясно, что спектр амплитуд дельта-функции не зависит от угловой частоты ω и вклад всех частот равномерен (**Рис. 7.7**). Обратим внимание на то, что спектр фаз на всех частотах равен 0.

Если дельта-функцию сдвинуть на интервал t по оси времени, то согласно свойству сдвига сигнала

$$\mathcal{F}\{\delta(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau}.$$

Поэтому независимо от изменения спектра фаз спектр амплитуд во всей частотной области равен 1.

Кстати, сигнал, представленный на **Рис. 7.8**, подобно дельта-функции также имеет единый спектр амплитуд во всей частотной области, как это ни удивительно. (Более того, поскольку невозможно изобра-

зять форму сигнала, включающего бесконечные частоты, было бы правильным сказать, что сигнал, представленный на **Рис. 7.8**, — это сигнал, имеющий равномерный спектр в некоторой ограниченной частотной области.) В самом деле, спектр амплитуд этого сигнала, несомненно, постоянный, но спектр фаз — полная абракадабра.

(Спектральная плотность амплитуд и спектральная плотность фаз — понятия, применимые только к определенным (детерминированным) функциям времени. Эти понятия неприменимы к случайным процессам. Для случайного процесса существует только статистический спектр, физический смысл которого состоит в том, что он выражает плотность мощности. (1. Харкевич Ф.Ф. Основы радиотехники. — М.: Связьиздат, 1962; 2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Сов. Радио. Том 1.) — *Прим. редактора перевода.*)

Спектр фаз дельта-функции во всей частотной области равен нулю, но если нарушить это условие, то во временной области дельта-функция станет абсолютно другим сигналом. Этот сигнал по аналогии с белым светом, который образуется из комбинаций разных цветов с не связанными друг с другом фазами, называется *белым шумом*.

Дельта-функция и белый шум — это два похожих и в то же время различных сигнала. Оба они широко применяются в анализе сигналов.

ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Преобразование Фурье является методом анализа сигналов общего вида (непериодических сигналов, одиночного импульса) и определяется следующим образом:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Преобразование Фурье $F(\omega)$ соответствует коэффициентам C_k разложения в ряд Фурье периодического сигнала. Коэффициенты C_k в значениях $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ представляют спектральные составляющие, а $F(\omega)$ представляет собой огибающую этих составляющих.

2. Мощности сигнала во временной и частотной областях одинаковы. Иначе говоря, теорема Парсеваля справедлива и для преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

3. Дельта-функция и белый шум одинаково включают все частотные составляющие. Однако их фазы абсолютно отличаются. Иначе говоря, спектр амплитуды дельта-функции и белого шума одинаковый для всех частот, но спектр фазы дельта-функции равен 0, а спектр фазы белого шума — сплошная абракадабра.
4. Сделав выборку аналогового сигнала $f(t)$ в момент времени $t = t_0$, используя дельта-функцию, можно получить значение $f(t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Практические задания

- 1) Изобразите графически спектр функции $\cos \omega_0 t$. Каким образом можно представить преобразование Фурье функции $\cos\{\omega_0(t - \tau)\}$?
- 2) Пусть $F(\omega)$ — преобразование Фурье функции $f(t)$. Докажите, что преобразование Фурье производной функции $f'(t)$ равно $j\omega F(\omega)$.
- 3) Действительная функция $f(t)$ представлена суммой четной функции $f_1(t)$ и нечетной функции $f_2(t)$:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Выразите каждую из функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ через функцию $f(t)$. Кроме того, если $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ — соответствующие преобразования Фурье функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, установите связь между действительной и мнимой частью преобразования Фурье функции $f(t)$ с $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$.

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

8.1. ПОДХОД К АНАЛИЗУ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Когда мы приступаем к анализу физической системы, использующей технику обработки сигналов, мы часто сталкиваемся с ситуацией, которая представлена на **Рис. 8.1**. Сигнал $x(t)$ входит в некоторую систему, условно называемую «черным ящиком», преобразуется и выходит как сигнал $y(t)$. Цель нашего анализа заключается в том, чтобы выяснить характерные особенности этой системы. Именно этому и посвящена данная глава.

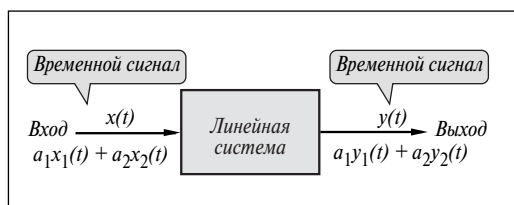


Рис. 8.1. Попробуем исследовать линейную систему.

Предположим, что система, которую мы рассматриваем, является линейной. Линейность системы означает, что входному сигналу

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$$

соответствует сигнал на выходе

$$a_1y_1(t) + a_2y_2(t).$$

То есть эта система следует *принципу наложения*. В качестве примера линейной системы можно рассматривать усилитель, когда с помощью поворота ручки громкости меняется уровень усиления, а с помощью поворота регулятора тембра изменяется окраска звука. Одна из проблем анализа линейной системы заключается в том, как выявить характерные особенности системы, если возможно измерить сигналы на входе и выходе. Чтобы решить эту задачу, необходимо знать, как связаны входной и выходной сигналы с параметрами системы.

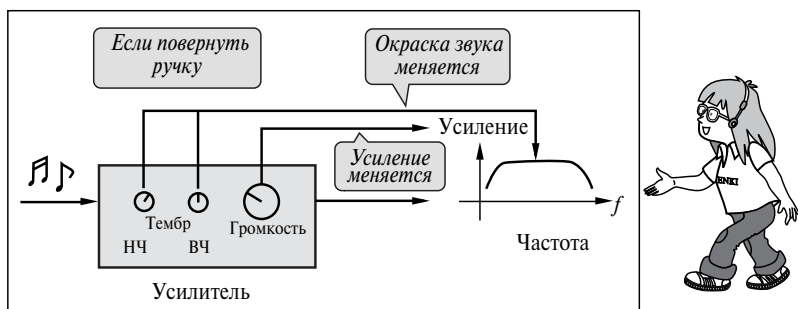
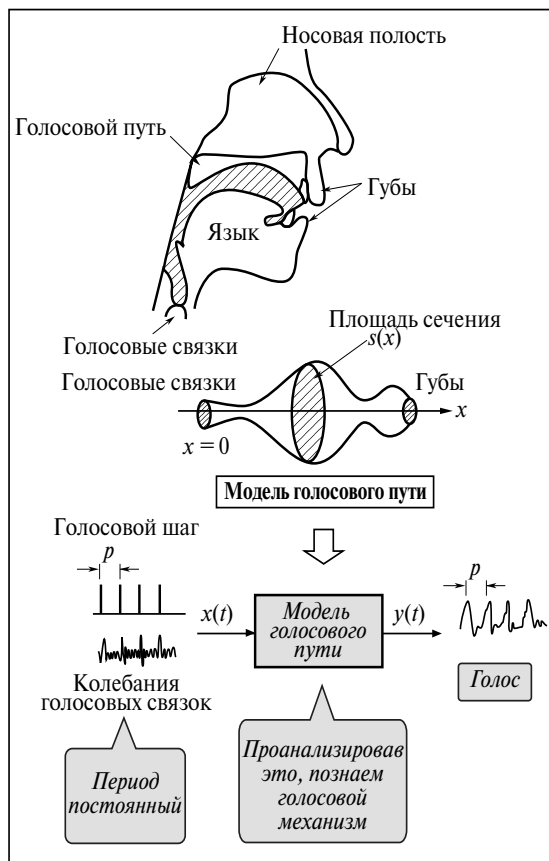


Рис. 8.2. Попробуем исследовать линейную систему.

Приведенный на **Рис. 8.2** пример с усилителем, возможно, слишком прост. В качестве более сложного примера рассмотрим проблему познания голосового механизма, суть которой состоит в том, чтобы «научить» компьютер моделировать человеческий голос. Голосовой сигнал возникает в результате определенных колебаний голосовых связок, которые являются его источником. Как же человеку удастся менять голос? Если можно так выразиться, устройство, меняющее голос, заключается в форме пути, который проходит голос от горла до губ.

Воздушная волна, имеющая определенный период колебаний, сложным образом отражается внутри голосового пути в зависимости от изменения его площади разреза и на выходе представляет собой голос (**Рис. 8.3**). Следовательно, если знать форму голосового пути и частоту колебаний голосовых связок, то в принципе можно понять природу формирования голоса. Это один из подходов к решению сложной проблемы познания голосового механизма. Однако и при



Строго нельзя сказать, что это линейная система, но приближенно принято так считать



Рис. 8.3. Модель возникновения голосового звука.

решении этой проблемы анализ начинается, собственно говоря, с представления системы в целом, как показано на **Рис. 8.1**. Если при анализе электрических сигналов, механических колебаний и разнообразных физических систем есть возможность представить систему в виде «черного ящика» (**Рис. 8.1**), то всегда можно решить задачу способом, изложенным в этой главе.

8.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВХОДНЫМ И ВЫХОДНЫМ СИГНАЛАМИ

Итак, каким образом можно выразить связь между входным и выходным сигналами линейной системы? Основным принципом химического анализа является детальное разложение исследуемого объекта до такого состояния, когда он становится понятным. По такому же принципу разобьем входной сигнал на части и рассмотрим отклик на каждую из полученных частей.

Как показано на **Рис. 8.4**, входной сигнал можно разложить на множество прямоугольных столбиков — элементарных импульсов.

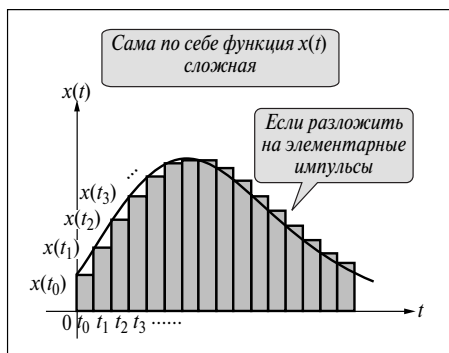


Рис. 8.4. Попробуем разбить сигнал на элементарные импульсы.

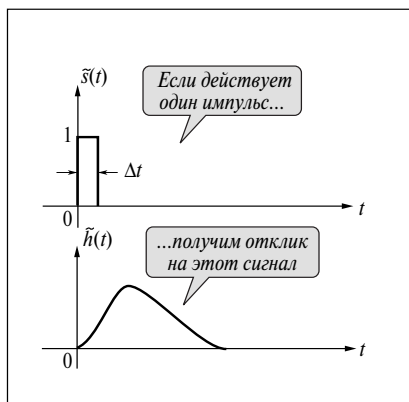


Рис. 8.5. Рассмотрим только один импульс.

Будем считать, что на вход системы подан прямоугольный импульс с высотой, равной 1, и шириной, равной Δt . Этот входной сигнал представим как

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t < \Delta t \\ 0 & : \Delta t \leq t \dots \end{cases}.$$

А отклик системы (**Рис. 8.5**) на этот сигнал обозначим:

$$\tilde{h}(t) \quad (t \geq 0).$$

В момент времени $t = t_0$ подадим на вход системы импульс высотой $x(t_0)$ и шириной Δt (**Рис. 8.6**). Поскольку входной сигнал увеличили в $x(t_0)$ раз, то, согласно свойствам линейной системы, отклик на этот сигнал также увеличится в $x(t_0)$ раз, то есть выходной сигнал можно представить как $x(t_0) \tilde{h}(t - t_0)$. Если в следующий момент времени $t = t_1$ подать прямоугольный импульс с высотой $x(t_1)$, то каким образом выразить выходной сигнал? Поскольку входной сигнал запаздывает только на время, равное t_1 , то его можно представить как

$$x(t_1) \tilde{s}(t - t_1).$$

Выходной сигнал также запаздывает на время t_1 и выражается:

$$x(t_1) \tilde{h}(t - t_1).$$

Рассуждая подобным образом, аналогичные выражения можно записать и для $t = t_2, t_3, \dots$ (**Рис. 8.6**). Представим их в виде таблицы:

t	Вход	Выход
t_0	$x(t_0) \tilde{s}(t - t_0)$	$x(t_0) \tilde{h}(t - t_0)$
t_1	$x(t_1) \tilde{s}(t - t_1)$	$x(t_1) \tilde{h}(t - t_1)$
t_2	$x(t_2) \tilde{s}(t - t_2)$	$x(t_2) \tilde{h}(t - t_2)$
t_3	$x(t_3) \tilde{s}(t - t_3)$	$x(t_3) \tilde{h}(t - t_3)$
\vdots	\vdots	\vdots

Видно, что входной сигнал приближенно можно представить как сумму элементарных импульсов:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) \tilde{s}(t - t_i) \quad (8.1)$$

на всем остальном интервале.

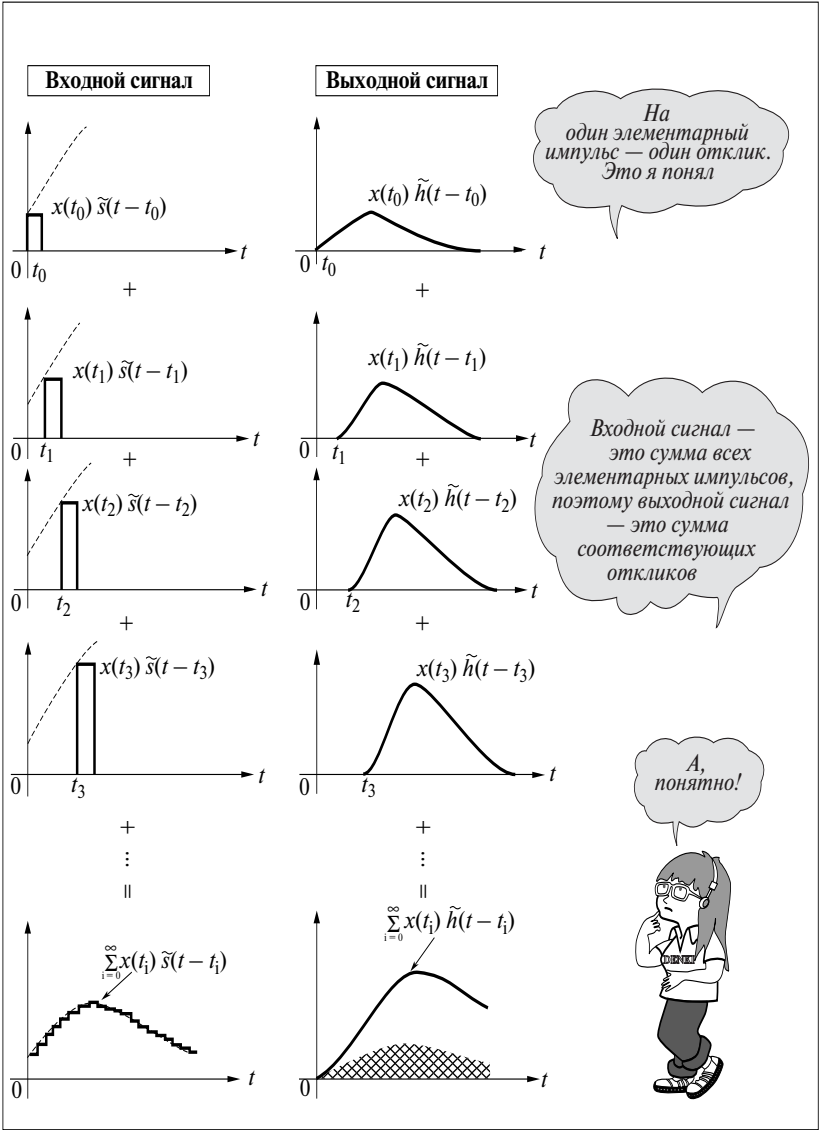


Рис. 8.6. Суммарный входной сигнал и суммарный выходной сигнал.

Итак, по определению системы в ней должен реализовываться принцип наложения. Следовательно, суммируя отклики на соответствующие входные элементарные прямоугольные импульсы, мы в конце концов получаем отклик на весь входной сигнал. То есть выходной сигнал приближенно можно выразить следующим образом:

$$y(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} x(t_i) \tilde{h}(t - t_i). \quad (8.2)$$

Итак, мы получили соотношение для выходного сигнала в случае, когда входной сигнал был представлен в виде совокупности прямоугольных столбиков. Отсюда соотношение для выходного сигнала в случае непрерывного входного сигнала можно получить, если сделать ширину столбиков бесконечно малой. Это соотношение можно представить в виде интеграла. Если сделать замену, используя в качестве переменной интеграла τ вместо t_i ,

$$x(t_i) \rightarrow x(\tau) \quad \tilde{h}(t - t_i) \rightarrow h(t - \tau),$$

то сигнал на выходе системы $y(t)$ при входном сигнале $x(t)$ можно представить как

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (8.3)$$

Это очень важное выражение, связывающее вход и выход линейной системы.

Такое соотношение, включающее интеграл, называется *сверткой*. Используя знак «*», свертку записывают в упрощенном виде:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (8.4)$$

Примем без доказательств, что если функции $x(t)$ и $h(t)$ поменять местами, то значение выхода $y(t)$ не меняется, то есть:

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (8.5)$$

Выражения для свертки (8.3) и функции взаимной корреляции (4.5) очень похожи, но имеют абсолютно разный смысл. Будьте внимательны.

8.3. ИМПУЛЬСНЫЙ ОТКЛИК

Теперь нам стало понятно, что связь между входным сигналом $x(t)$ и выходным сигналом $y(t)$ линейной системы можно представить в виде свертки, но мы так ничего и не сказали о функции $h(t)$. А в действительности именно функция $h(t)$ заключает в себе характеристику линейной системы, которую мы хотели бы проанализировать. Рассмотрим эту функцию.

Ранее при вычислении свертки мы использовали сигнал с высотой, равной 1, и шириной, равной Δt , откликом на который является функция $\tilde{h}(t)$. Кстати, поскольку $\tilde{s}(t)$ является прямоугольным импульсом с площадью Δt , $\tilde{s}(t)/\Delta t$ — это прямоугольный импульс с площадью, равной 1. Если $\Delta t \rightarrow 0$, то, очевидно, мы получим соотношение для дельта-функции (**Рис. 8.7**):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{s}(t)}{\Delta t} = \delta(t).$$

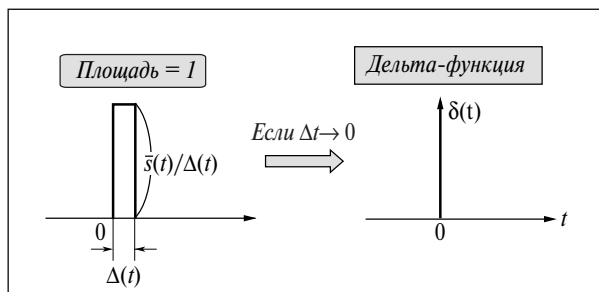


Рис. 8.7. Что такое дельта-функция.

Следовательно, исходя из того, что отклик системы на $\delta(t)$ — это отклик на функцию, мы можем записать, что

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{h}(t)}{\Delta t}.$$

Иначе говоря, когда мы подаем на вход системы единичный импульс, откликом является сама функция $h(t)$, характеризующая эту систему. Поэтому функцию $h(t)$ называют *импульсным откликом* (**Рис. 8.8**).

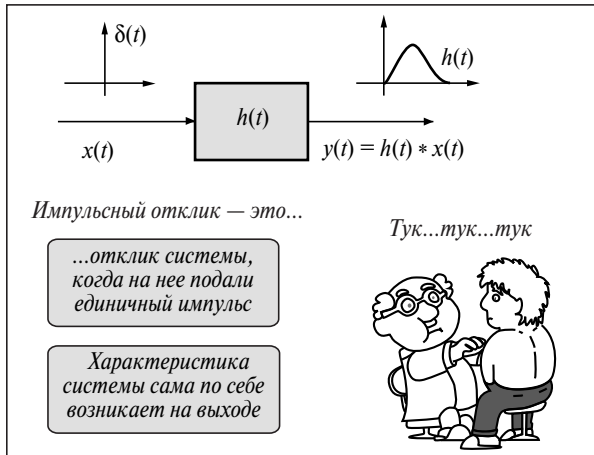


Рис. 8.8. Что такое импульсный отклик.

Способ анализа системы, который заключается в анализе отклика на поданный импульс, мы часто применяем в повседневной жизни. Например, стукнув по чайной пиале, проверяем — нет ли в ней трещины, или же, щелкнув по арбузу, по тембру звука судим о его спелости. Врач, постучав по груди больного, может установить диагноз в результате исследования импульса отклика груди.

8.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Свертка представляет собой отклик линейной системы во временной области. Каким же образом можно отразить связь между входом и выходом в частотной области? Преобразование Фурье входного сигнала $x(t)$ и выходного сигнала $y(t)$ соответственно обозначим как

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}.$$

Преобразование Фурье импульсного отклика запишем следующим образом:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}.$$

Функция $H(\omega)$ отражает частотную характеристику системы.

Итак, каким образом связаны функции $X(\omega)$, $Y(\omega)$ и $H(\omega)$? Предположим, что справедливо следующее соотношение:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (8.6)$$

Иначе говоря, связь между входом и выходом линейной системы, представленная сверткой во временной области, в частотной области можно представить в виде произведения (**Рис. 8.9**). Запомним это соотношение как одно из важных свойств преобразования Фурье.

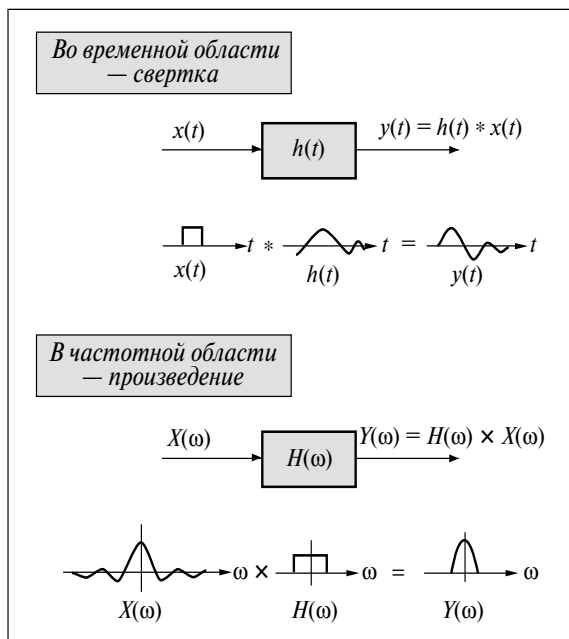


Рис. 8.9. Как описывается линейная система.

Итак, приведем доказательство выражения (8.6). В первую очередь в соотношении, определяющем свертку,

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

осуществим преобразование Фурье обеих частей равенства:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_0^\infty h(\tau) x(t-\tau) d\tau\right\} = \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty h(\tau) x(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt.
\end{aligned}$$

Поменяв местами интегралы и заменив пределы интегрирования τ на более общие — $[-\infty, +\infty]$, получим

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty h(\tau) \left[\int_{-\infty}^\infty x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^\infty h(\tau) \left[\int_{-\infty}^\infty x(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt\right] e^{-j\omega\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

В случае замены $t - \tau = u$, $dt = du$.

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^\infty h(\tau) \left[\int_{-\infty}^\infty x(u) e^{-j\omega u} du\right] e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Учитывая, что выражение в скобках есть $X(\omega)$, получим:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty h(\tau) X(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(\omega) \int_{-\infty}^\infty h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
&= X(\omega) \cdot H(\omega).
\end{aligned}$$

Как нам известно, функции $X(\omega)$ и $H(\omega)$ можно поменять местами, то есть

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega),$$

что и требовалось доказать. Следовательно, соотношение

$$\mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

выражает преобразование Фурье свертки.

Кстати, преобразование Фурье дельта-функции

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1,$$

поэтому при подаче на вход единичного импульса выражение преобразования Фурье отклика

$$Y(\omega) = H(\omega)$$

становится частотной характеристикой системы, что следует из свойств импульса отклика.

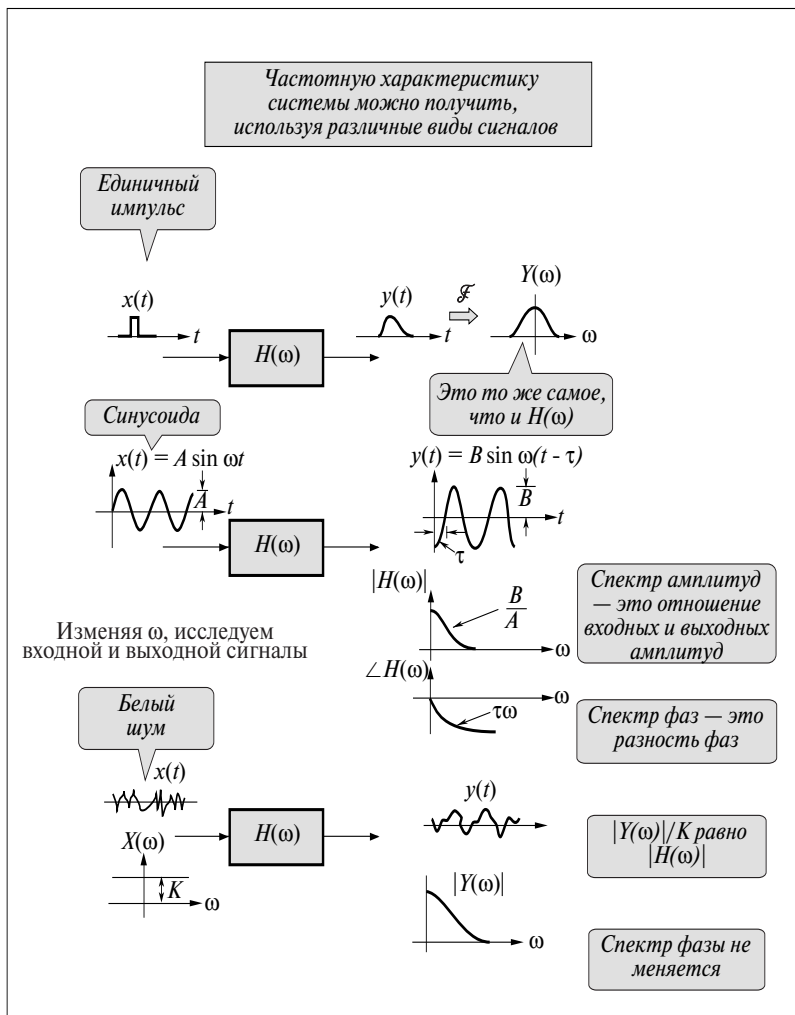


Рис. 8.10. Способы получения частотной характеристики (выбор способа зависит от объекта).

Для исследования свойств линейной системы в частотной области, иначе говоря, для измерения частотной характеристики системы, существует способ, осуществляющий преобразование Фурье импульсного отклика $h(t)$. Кроме того, существует способ, использующий в качестве входного сигнала синусоиду. То есть можно получить модуль частотной характеристики системы как отношение амплитуд входного и выходного сигналов при изменении частоты на входе. К тому же по разнице фаз входного и выходного сигналов можно узнать спектр фаз.

Кроме того, модуль частотной характеристики системы можно измерить, используя белый шум. Это делается следующим образом. Модуль частотной характеристики системы выражается как

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|}.$$

Но, как мы видели раньше, в белом шуме спектр амплитуд является равномерным на всех частотах, то есть является постоянной величиной, не зависящей от ω . Обозначим эту величину через K :

$$|X(\omega)| = K.$$

Следовательно, если возможно измерить спектр амплитуд $|Y(\omega)|$ выходного сигнала при подаче на вход белого шума, то из соотношения

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{K}$$

можно непосредственно получить модуль частотной характеристики системы (**Рис. 8.10**).



ОБОБЩЕНИЕ ГЛАВЫ

1. Линейной системой называется система, входной и выходной сигналы которой находятся в линейной зависимости. Если на вход системы подать единичный импульс, то на выходе получим импульс отклика.
2. Выходной сигнал $y(t)$ является сверткой входного сигнала $x(t)$ и импульса отклика $h(t)$ и описывается следующим выражением:

$$y(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

3. Связь между входом и выходом системы определяется сверткой во временной области и произведением в частотной. Иначе говоря, преобразования Фурье входного сигнала $X(\omega)$, выходного сигнала $Y(\omega)$ и импульсного отклика системы $H(\omega)$ связаны следующим соотношением:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega).$$

Практические задания

- 1) Функция следующего вида

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & : |t| \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$$

называется единичным прямоугольным импульсом. В линейной системе, представленной импульсом отклика $h(t)$, $h(t) = \rho(t)$, требуется определить:

- а) частотную характеристику $H(\omega)$;
 - б) выходной сигнал $y(t)$ и его преобразование Фурье при условии, что на вход системы подан единичный прямоугольный импульс.
- 2) Покажите, что преобразование Фурье произведения двух сигналов $f(t)$, $g(t)$ является сверткой каждого из преобразований Фурье этих сигналов.
 - 3) Задана система, состоящая из последовательного соединения двух линейных систем, представленных соответственно импульсами отклика $h_1(t)$ и $h_2(t)$. На вход этой системы подан сигнал $x(t)$. Требуется определить выходной сигнал $y(t)$ во временной и частотной областях.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1

1) Всего элементов телевизионного изображения $512 \times 512 = 262144$. Для хранения одного элемента изображения нужно 8 ($256 = 2^8$) бит, поэтому всего требуется $262144 \times 8 = 2097152$ бит. Кстати, 8 бит называют байтом, поэтому требуется объем памяти, равный 262144 (примерно 262 К) байта.

2) С помощью низкочастотного фильтра исключим из звукового сигнала составляющие с частотой выше 5 кГц и произведем выборку с частотой 10 кГц.

3) В мини-диске с помощью специальной техники обработки цифровых сигналов происходит сжатие информации. Благодаря этому при записи площади, составляющей $1/4$ от площади компакт-диска, время записи на мини-диск такое же, как и на компакт-диск, и равно 75 минут.

ГЛАВА 2

1) Возьмем квадратное окно с центром в рассматриваемом элементе телевизионного изображения. Вычислив среднее значение яркости элементов изображения, находящихся внутри окна, будем считать его значением рассматриваемого элемента телевизионного изображения. Проведем эту операцию относительно всех элементов изображения.

		A	B	C
		D	E	F
		G	H	I

В случае выбора окна, состоящего из 3×3 элементов с центром в рассматриваемом элементе изображения, значение скользящего усреднения центрального элемента определяется как

$$\frac{1}{9}(A + B + C + D + E + F + G + H + I).$$

2) На контуре букв происходит сильное изменение яркости. Иначе говоря, значение производной яркости велико. Чтобы увеличить четкость контура, нужно найти области с максимальным значением производной. В качестве способа вычисления производной возьмем, например, то же окно, что и в предыдущем примере, и вычислим разность яркости элементов справа и слева, а также сверху и снизу. В случае окна размером 3×3 значение производной, например, центрального элемента определяется следующим образом:

$$|C + F + I - (A + D + G)| + |A + B + C - (G + H + I)|.$$

ГЛАВА 3

1) Расстояние — $\sqrt{6}$, скалярное произведение — 62, коэффициент корреляции — 0.98, \mathbf{g}' — единичный вектор в направлении вектора \mathbf{g} . $\mathbf{g}' = \mathbf{g}/\|\mathbf{g}\| = (3/7, -2/7, 6/7)$, составляющая вектора \mathbf{f} в направлении вектора \mathbf{g} — $(\mathbf{f}, \mathbf{g}') = 8.86$.

2) Решите самостоятельно.

3) Норма каждой функции равна 1, а скалярные произведения всех комбинаций функций равны 0.

ГЛАВА 4

1) Например, звук исходит из репродуктора и фиксируется микрофонами в двух отличных по положению точках. Вычисляя функцию взаимной корреляции, определяем интервал, на котором она принимает максимальное значение. Теперь можем узнать временной интервал, в течение которого звуковой сигнал распространялся между микрофонами, и, следовательно, сможем определить скорость звука (см. **Рис. 4.5**).

2) График полученной функции взаимной корреляции представлен на **Рис. 2**. Видно, что при $j = 3$, то есть через 5 месяцев, корреляция достигает максимального значения. Исходя из этого ясно, что город F находится в северном полушарии, а город G — в южном.

3) Решение:

$$\begin{aligned} R_{ff}(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) f(t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{0-\tau}^{T-\tau} f(t) f(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, функция автокорреляции является четной функцией и имеет осевую симметрию относительно $\tau = 0$.

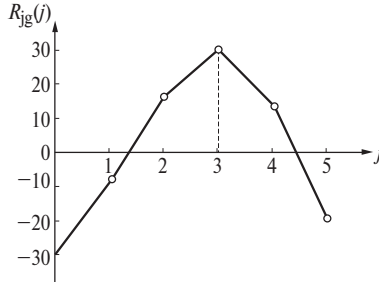


Рис. 2.

ГЛАВА 5

1) Исходя из того что

$$\begin{aligned}
 |z_1 \cdot z_2|^2 &= |(\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 + j\beta_2)|^2 = |\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)|^2 = \\
 &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)^2 = \\
 &= \alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\alpha_2^2 = \\
 &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,
 \end{aligned}$$

имеем $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Так как

$$\operatorname{tg}\{\angle(z_1 \cdot z_2)\} = \operatorname{tg}\left[\angle\{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\}\right] = \frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}$$

и

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\angle z_1 + \angle z_2) &= \frac{\operatorname{tg}\angle z_1 + \operatorname{tg}\angle z_2}{1 - \operatorname{tg}\angle z_1 \operatorname{tg}\angle z_2} = \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}}{1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \\
 &= \frac{\frac{\alpha_1\beta_1 + \beta_1\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2}}{\frac{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},
 \end{aligned}$$

следовательно, $\angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2$.

2) Поскольку функция $f(t) = |t|$ является четной функцией, мнимые части комплексных коэффициентов Фурье обращаются в 0 (см. памятку на стр. 97). Коэффициенты Фурье принимают вид:

$$C_0 = \frac{\pi}{2}, \quad C_k = -\frac{(-1)^{k+1} + 1}{\pi k^2},$$

что совпадает с результатами из примера на стр. 82.

3) Период функции $|\cos t|$ равен π , поэтому

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, e^{-j2kt} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} e^{-j2kt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{j(1-2k)t} + e^{-j(1+2k)t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{j(1-2k)t}}{j(1-2k)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\frac{e^{-j(1+2k)t}}{-j(1+2k)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2}{(4k^2 - 1)\pi}. \end{aligned}$$

Функция $f(t)$ является четной, а значит, мнимые части C_k равны 0. Следовательно,

$$|\cos t| = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} e^{j2kt}.$$

ГЛАВА 6

1) Пусть $\Delta\omega = 2\pi/8$, тогда, согласно выражению (6.5), ДПФ функции $f_i = \cos(3\pi/4)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 7$:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 \cos(3\Delta\omega_i) e^{-j\Delta\omega ki} = \frac{1}{8 \times 2} \sum_{i=0}^7 \left(e^{j3\Delta\omega i} + e^{-j3\Delta\omega i} \right) e^{-j\Delta\omega ki} = \\ &= \frac{1}{16} \sum_{i=0}^7 \left(e^{j(3-k)\Delta\omega i} + e^{-j(3-k)\Delta\omega i} \right) = \begin{cases} 1 & (k=3) \\ 0 & (k \neq 3) \end{cases}. \end{aligned}$$

2. а) Самая высокая гармоника сигнала, которую можно проанализировать, равна $1/2$ частоты выборки, то есть 500 Гц. С интервалом в 1 мс было выбрано 512 значений, поэтому период первой гармоники равен 0.512 с, а ее частота равна 1.95 Гц.

б) C_0, C_1, \dots, C_{511} — основные коэффициенты Фурье, а $C_{257}, C_{258}, \dots, C_{511}$ выражают составляющие спектра с отрицательными k . Следовательно,

$$C_k = \begin{cases} X(k+1) + jY(k+1) & (k=0, 1, \dots, K) \\ X(N+1+k) + jY(N+1+k) & (k=-1, -2, \dots, -(K-1)), \end{cases}$$

$$K = 256.$$

3) Осуществим скалярное произведение левой части соотношения (6.3) и \mathbf{f} :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |f_i|^2,$$

а также его правой части и \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} C_k \mathbf{e}_k, \sum_{i=0}^{N-1} C_i \mathbf{e}_i \right\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \langle C_k \mathbf{e}_k, C_l \mathbf{e}_l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} C_k \bar{C}_l \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} C_k \bar{C}_l \delta_{kl} = \sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, теорема Парсеваля верна и для дискретного преобразования Фурье.

4) Ответ:

Исходный сигнал		Сигнал после перестановки разрядов	
Десятичная система счисления	Двоичная система счисления	Двоичная система счисления	Десятичная система счисления
0	0000	0000	0
1	0001	1000	8
2	0010	0100	4
3	0011	1100	12
4	0100	0010	2
5	0101	1010	10
6	0110	0110	6
7	0111	1110	14
8	1000	0001	1
9	1001	1001	9
10	1010	0101	5
11	1011	1101	13
12	1100	0011	3
13	1101	1011	11
14	1110	0111	7
15	1111	1111	15

ГЛАВА 7

1) Функция $\cos \omega_0 t$ имеет спектр, отличный от 0, только при $\omega = \pm \omega_0$.

Поскольку функция является четной, преобразование Фурье выражается действительными числами и имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \{ 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \} = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].\end{aligned}$$

Графическое представление спектра амплитуд показано на **Рис. 3**. Спектр фаз при всех ω равен 0.

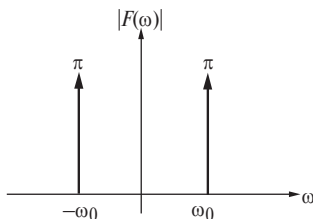


Рис. 3.

Исходя из соотношения (7.4),

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0(t + \tau)\} = e^{j\omega_0\tau} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Спектр амплитуд не меняется, спектр фаз равен $\omega\tau$ ($\omega = \pm\omega_0$).

2) Решение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем производную правой и левой части. Тогда получим:

$$\begin{aligned}\frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F(\omega) \frac{de^{j\omega t}}{dt} \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ j\omega F(\omega) \} e^{j\omega t} d\omega.\end{aligned}$$

Иначе говоря, $j\omega F(\omega)$ является преобразованием Фурье производной $df(t)/dt$. Преобразование Фурье производной есть произведение преобразования Фурье функции на $j\omega$, а преобразование Фурье интеграла есть частное от деления преобразования Фурье функции на $j\omega$.

3) По определению четной и нечетной функций

$$f(-t) = f_1(-t) + f_2(-t) = f_1(t) - f_2(t),$$

поэтому

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\{f(t) + f(-t)\}, \quad f_2(t) = \frac{1}{2}\{f(t) - f(-t)\}.$$

Преобразование Фурье четной функции выражается действительными числами, а преобразование Фурье нечетной функции — мнимыми (см. памятку на стр. 97). Следовательно,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_1(\omega) + F_2(\omega),$$

где $F_1(\omega) = \operatorname{Re}\{F(\omega)\}$ и $F_2(\omega) = j\operatorname{Im}\{F(\omega)\}$.

ГЛАВА 8

1) Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } H(\omega) &= \mathcal{F}\{p(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{\sin \omega}{2\pi\omega}. \end{aligned}$$

б) Графическое представление выходного сигнала $y(t)$ показано на **Рис. 4**:

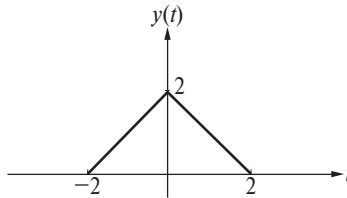


Рис. 4.

Положим, что $P(\omega)$ — преобразование Фурье импульса отклика $p(t)$, тогда преобразование Фурье выходного сигнала $y(t)$ выражается как

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot P(\omega) = P^2(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{2\pi\omega} \right)^2.$$

2) По определению преобразования Фурье

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a)e^{jat} da \right) g(t)e^{-j\omega t} dt.\end{aligned}$$

Поменяв местами интегралы, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{jat} e^{-j\omega t} dt \right\} da = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) G(\omega - a) da = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega),\end{aligned}$$

то есть произведение функций во временной области выражается сверткой преобразований Фурье этих функций в частотной области.

3) Решение:

Во временной области:

$$y(t) = h_1(t) * h_2(t) * x(t).$$

В частотной области:

$$Y(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot X(\omega).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

N -мерный вектор — 38

А

абсолютная величина — 87

алгоритм БПФ — 125

амплитуда — 15

аргумент — 87

АЦП (аналого-цифровой
преобразователь) — 21

Б

белый шум — 149

БПФ (быстрое преобразование Фурье) —
125

для ряда из 4 членов — 125

для ряда из 8 членов — 130

В

векторное пространство — 40

весовая функция — 32

виды сигналов — 12

временная область — 80

выборка — 19

Г

гармоника — 80

Гаусса распределение — 32

Гиббса явление — 107

градация — 23

Д

двоичная система счисления — 20

двузначное изображение — 23

дельта-функция — 145

дискретизация — 19

ДПФ (дискретное преобразование Фурье)
— 117, 136

для ряда из 8 членов — 134

Е

единичный вектор — 46

единичный импульс — 158

И

импульсный отклик — 158

интеграл показательной функции — 93

интервал выборки — 19, 23

К

квантование — 19

комплексные коэффициенты Фурье — 93

компонента вектора — 38

коэффициенты Фурье — 79

коэффициент корреляции — 44, 51

кривая погрешности — 105

Кroneckera символ — 54

Л

линейная система — 151

М

метод вычисления «бабочкой» — 129

множество векторов — 54

множество функций — 55

Н

Найквиста частота — 26
начальная фаза — 15
низкочастотный фильтр — 27
норма вектора — 42, 49
нормальное распределение — 35
нормировка системы функций — 59

О

обработка сигналов — 11
ОДПФ (обратное дискретное
 преобразование Фурье) — 117, 136
ортогональная система функций — 56
ортогональный базис — 46
ортонормированная система функций — 56
ортонормированный базис — 46, 54
основная частота (первая гармоника) — 79
основной период — 15
отклик — 155

П

Парсеваля теорема — 99, 145
перестановка разрядов — 134
первая гармоника — 79
период — 15
погрешность приближения — 104
подавление шумов — 33
подобие — 144
преобразование
 аналого-цифровое — 21
 цифро-аналоговое — 21
принцип наложения — 152
проекция — 46
произведение тригонометрических
 функций — 57
пространство функций — 40

Р

равномерное распределение — 35
разложение в комплексный ряд Фурье — 91
разряд — 20
расстояние — 42, 49

С

свертка — 157
свойство
 линейности — 142
 периодичности спектра — 119
 симметричности спектра — 119
сглаживание сигнала — 29
сдвиг сигнала — 143
сигнал
 аналоговый — 19
 двумерный — 14
 детерминированный — 15
 затухающий — 18
 изображения — 14
 импульсный — 15
 одномерный — 14
 периодический — 15
 пилообразный — 15
 прямоугольный — 15
 случайный — 15
 треугольный — 15
 цифровой — 21
символ Кронекера — 54
синусоида — 15
синхронная фильтрация — 33
скалярное произведение — 43, 47
скользящее усреднение — 29
сопряженные комплексные числа — 87
спектр
 амплитуд — 95, 163
 мощности — 95
 фаз — 95, 163
спектральный анализ — 78
стробоскопирование — 26
сходимость — 106

Т

теорема Парсеваля — 99, 145
техника сортировки — 134

У

угловая частота — 15

Ф

- фаза — 15
- формула интегрирования по частям — 82
- формула Эйлера — 88
- формулы половинного угла — 59
- функция
 - автокорреляции — 71
 - взаимной корреляции — 66
 - выборки — 98
 - нечетная — 83
 - плотности вероятности — 35
 - распределения Гаусса — 32
 - четная — 83
- Фурье
 - анализ — 78
 - быстрое преобразование (БПФ) — 125
 - дискретное преобразование (ДПФ) — 117, 136
 - интеграл — 142
 - коэффициенты — 79
 - обратное дискретное преобразование (ОДПФ) — 117, 136

- обратное преобразование — 142
- преобразование — 142
- разложение в ряд — 79, 80
- спектр — 143

Ч

- частота — 15
- Найквиста — 26
- частотная область — 80
- частотная характеристика системы — 161
- «черный ящик» — 151

Ш

- шум — 33

Э

- Эйлера формула — 88
- элемент телевизионного изображения — 23

Я

- явление Гиббса — 107

ЮКИО САТО

Без паники!

Цифровая обработка сигналов.

Главный редактор *В. М. Халикеев*

Научный редактор *И. А. Сенников*

Графика *А. Ю. Анненков, А. Н. Ключков*

Верстка *Е. М. Илюшина*

Корректоры *С. И. Шишкина, Л. Р. Попова*

Издательский дом «Додэка-XXI»

105318 Москва, а/я 70

Тел./факс: (495) 366-04-56, 365-26-95

E-mail: red@dodeca.ru

Подписано в печать 28.05.10. Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная.

Гарнитура «NewtonС». Печать офсетная.

Объем 11 п. л. Усл. печ. л. — 11. Тираж 2000. Код ОНМ01(3)

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии «Гран При», г. Рыбинск.