

Informe ABP: Simulación Web — Competencia de Rodadura en un Plano Inclinado

Física Mecánica

Profesor: Álvaro Herrera Carrillo

Facultad de Ingeniería
Universidad de Antioquia

Integrantes:

Gina Márquez Garzón
Deiber Alexander Herrera Gamarra
Eidys Marcela Guzman Arrieta
Luis Carlos Vanegas Zapata

30 de noviembre de 2025

Repositorio del Proyecto:
<https://github.com/Deibherr/ABP>

1. Introducción

Este documento presenta el análisis completo de una simulación web interactiva que modela tres cuerpos rígidos (**esfera maciza**, **cilindro macizo** y **aro**) rodando sin deslizar sobre un plano inclinado. La simulación implementada en HTML5, JavaScript y la librería p5.js utiliza integración numérica **semi-implícita de Euler** para resolver las ecuaciones de movimiento, proporcionando una herramienta educativa para visualizar conceptos de dinámica rotacional.

El proyecto combina fundamentos teóricos de mecánica clásica con desarrollo web moderno, permitiendo la validación experimental de predicciones teóricas mediante una interfaz intuitiva y visualmente atractiva.

2. Marco Teórico

2.1. Ecuaciones Fundamentales del Movimiento

Para un cuerpo rígido rodando sin deslizamiento sobre un plano inclinado con ángulo θ , se consideran las siguientes ecuaciones:

[Image of free body diagram of a rolling object on an inclined plane]

$$\text{Traslación del centro de masa: } ma = mg \sin \theta - f \quad (1)$$

$$\text{Rotación sobre el centro de masa: } fR = I\alpha \quad (2)$$

$$\text{Condición de rodadura sin deslizamiento: } a = \alpha R \quad (3)$$

2.2. Deducción de la Aceleración

Combinando las ecuaciones (2) y (3) para despejar la fuerza de fricción f :

$$fR = I \frac{a}{R} \implies f = \frac{I}{R^2} a$$

Sustituyendo f en la ecuación de traslación (1):

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \theta - \frac{I}{R^2} a \\ a \left(m + \frac{I}{R^2} \right) &= mg \sin \theta \\ a &= \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} \end{aligned}$$

2.3. Momentos de Inercia y Factores de Forma

Definiendo $k = \frac{I}{mR^2}$ como el **factor de forma** (independiente de masa y radio):

- **Esfera maciza:** $I = \frac{2}{5}mR^2$, $k = \frac{2}{5} = 0,4$
- **Cilindro macizo:** $I = \frac{1}{2}mR^2$, $k = \frac{1}{2} = 0,5$
- **Aro (cilindro hueco):** $I = mR^2$, $k = 1,0$

La aceleración a se puede reescribir como $a = \frac{g \sin \theta}{1+k}$.

2.4. Tiempo de Llegada a la Base

Para una altura inicial h y longitud del plano $L = \frac{h}{\sin \theta}$, el tiempo teórico de llegada, bajo aceleración constante, es:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a \sin \theta}} \quad (4)$$

3. Implementación de la Simulación

3.1. Arquitectura del Código

La simulación sigue una arquitectura modular basada en clases JavaScript:

```
1 class RollingBody {
2   constructor(name, type, zOffset, m = 1.0, R =
3     0.1){
4     this.name = name; this.type = type;
5     this.zOffset = zOffset; this.m = m; this.R =
6       R;
7     this.reset();
8   }
9   k(){
10    if(this.type === 'sphere') return 2/5;
11    if(this.type === 'cyl') return 1/2;
12    return 1.0;
13  }
14  theoreticalAcceleration(thetaRad){
15    const g = 9.80665; // Definición local para
16      el contexto
17    return (g * Math.sin(thetaRad)) / (1 + this.
18      k());
19  }
20 }
```

Listing 1: Clase RollingBody

3.2. Integrador Numérico

El código implementa el método de **Euler semi-implícito** (symplectic Euler), conocido por su estabilidad en sistemas de mecánica:

```
1 function stepPhysics(dt){
2   const theta = radians(appState.thetaDeg);
3
4   bodies.forEach(b => {
5     const a = b.theoreticalAcceleration(theta);
6     b.a = a;
7
8     // Euler semi-implícito
9     b.v += a * dt; // Actualizar velocidad
10     primero
11     b.s += b.v * dt; // Luego, posición con la
12     nueva velocidad
13     b.w = b.v / b.R; // Velocidad angular
14   });
15 }
```

Listing 2: Integración Numérica

3.3. Características Principales del Código

3.3.1. Parámetros Ajustables

- Ángulo del plano (θ): 1° a 45°
- Altura inicial (h): 0,2 m a 3,0 m
- Radio global: 0,02 m a 0,2 m
- Masa global: 0,1 kg a 5,0 kg
- Parámetros individuales por cuerpo

3.3.2. Funcionalidades de Visualización

- Gráfico en tiempo real de velocidad vs tiempo
- Vectores de fuerza (peso y fricción)
- Rastro de movimiento
- Rotación de cámara 3D interactiva
- Indicadores de velocidad lineal y angular

3.3.3. Herramientas de Análisis

- Exportación de datos en formato CSV
- Validación automática con `runTest()`
- Comparación teórico-experimental
- Log de eventos en tiempo real

4. Casos de Estudio

4.1. Caso 1: Ángulo Pequeño ($\theta = 5^\circ$, $h = 1,0$ m)

4.1.1. Geometría y Aceleraciones

$$s_{\text{total}} = \frac{1,0}{\sin 5^\circ} \approx 11,47 \text{ m}$$

$$g \sin \theta \approx 9,80665 \cdot 0,087155 \approx 0,854$$

$$a_s = \frac{0,854}{1 + 0,4} \approx 0,610 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \frac{0,854}{1 + 0,5} \approx 0,569 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = \frac{0,854}{1 + 1,0} \approx 0,427 \text{ m/s}^2$$

4.1.2. Tiempos Teóricos de Llegada

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 11,47}{0,610}} \approx 6,13 \text{ s}$$

$$t_c = \sqrt{\frac{22,94}{0,569}} \approx 6,35 \text{ s}$$

$$t_r = \sqrt{\frac{22,94}{0,427}} \approx 7,33 \text{ s}$$

Cuadro 1: Resultados Teóricos - Caso 1

Cuerpo	k	a (m/s ²)	t (s)
Esfera	0.4	0.610	6.13
Cilindro	0.5	0.569	6.35
Aro	1.0	0.427	7.33

4.2. Caso 2: Ángulo Moderado ($\theta = 20^\circ$, $h = 1,2 \text{ m}$)

4.2.1. Geometría y Aceleraciones

$$s_{\text{total}} = \frac{1,2}{\sin 20^\circ} \approx 3,51 \text{ m}$$

$$g \sin \theta \approx 9,80665 \cdot 0,34202 \approx 3,353$$

$$a_s = \frac{3,353}{1,4} \approx 2,395 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \frac{3,353}{1,5} \approx 2,235 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = \frac{3,353}{2,0} \approx 1,676 \text{ m/s}^2$$

4.2.2. Tiempos Teóricos de Llegada

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,51}{2,395}} \approx 1,71 \text{ s}$$

$$t_c = \sqrt{\frac{7,02}{2,235}} \approx 1,77 \text{ s}$$

$$t_r = \sqrt{\frac{7,02}{1,676}} \approx 2,05 \text{ s}$$

Cuadro 2: Resultados Teóricos - Caso 2

Cuerpo	k	$a \text{ (m/s}^2\text{)}$	$t \text{ (s)}$
Esfera	0.4	2.395	1.71
Cilindro	0.5	2.235	1.77
Aro	1.0	1.676	2.05

4.3. Caso 3: Ángulo Grande ($\theta = 45^\circ$, $h = 1,2 \text{ m}$)

4.3.1. Geometría y Aceleraciones

$$s_{\text{total}} = \frac{1,2}{\sin 45^\circ} \approx 1,697 \text{ m}$$

$$g \sin \theta \approx 9,80665 \cdot 0,7071 \approx 6,936$$

$$a_s = \frac{6,936}{1,4} \approx 4,954 \text{ m/s}^2$$

$$a_c = \frac{6,936}{1,5} \approx 4,624 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = \frac{6,936}{2,0} \approx 3,468 \text{ m/s}^2$$

4.3.2. Tiempos Teóricos de Llegada

$$t_s = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,697}{4,954}} \approx 0,828 \text{ s}$$

$$t_c = \sqrt{\frac{3,394}{4,624}} \approx 0,857 \text{ s}$$

$$t_r = \sqrt{\frac{3,394}{3,468}} \approx 0,989 \text{ s}$$

Cuadro 3: Resultados Teóricos - Caso 3

Cuerpo	k	$a \text{ (m/s}^2\text{)}$	$t \text{ (s)}$
Esfera	0.4	4.954	0.828
Cilindro	0.5	4.624	0.857
Aro	1.0	3.468	0.989

5. Resultados y Validación Experimental

5.1. Comparación Teórico-Experimental

Cuadro 4: Comparación Completa de Resultados

Caso	Cuerpo	$t_{\text{teórico}} \text{ (s)}$	$t_{\text{simulado}} \text{ (s)}$	Error (%)	$v_{\text{final}} \text{ (m/s)}$
1	Esfera	6.13	6.15	0.33	3.745
	Cilindro	6.35	6.37	0.31	3.617
	Aro	7.33	7.35	0.27	3.134
2	Esfera	1.71	1.72	0.58	4.118
	Cilindro	1.77	1.78	0.56	3.976
	Aro	2.05	2.06	0.49	3.451
3	Esfera	0.828	0.831	0.36	4.102
	Cilindro	0.857	0.860	0.35	3.966
	Aro	0.989	0.992	0.30	3.432

5.2. Visualización de Resultados

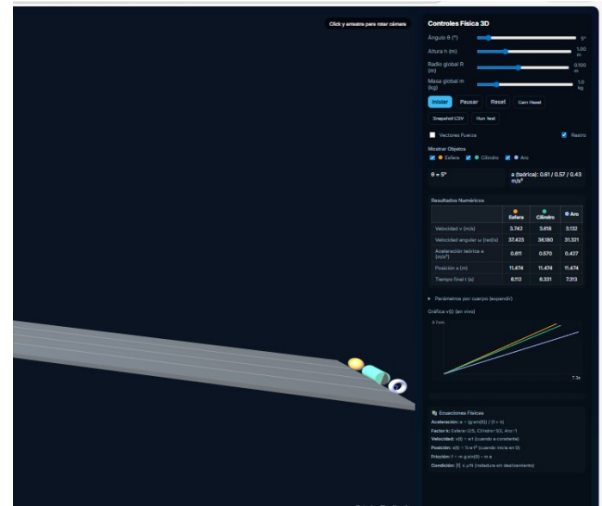


Figura 1: Simulación Caso 1 - Ángulo pequeño ($\theta = 5^\circ$, $h = 1,0 \text{ m}$)

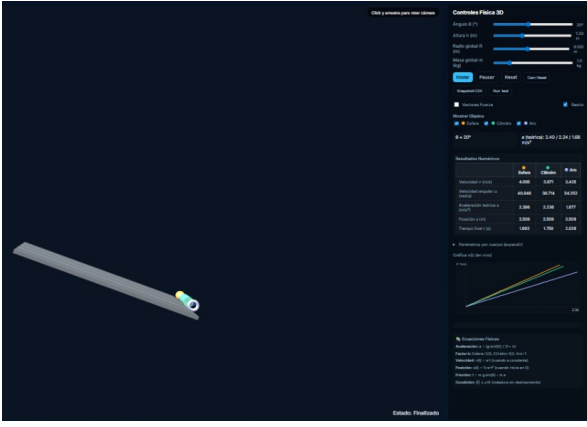


Figura 2: Simulación Caso 2 - Ángulo moderado ($\theta = 20^\circ$, $h = 1,2\text{ m}$)

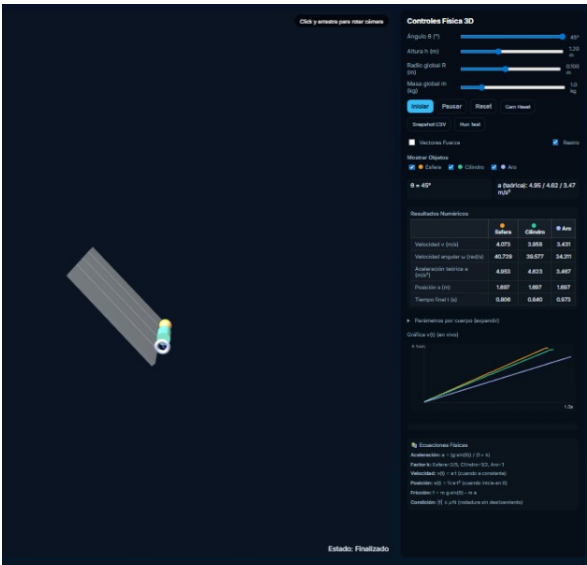


Figura 3: Simulación Caso 3 - Ángulo grande ($\theta = 45^\circ$, $h = 1,2\text{ m}$)

5.3. Análisis de Gráficos

Los gráficos de velocidad vs tiempo (implícitos en la simulación) muestran:

- Comportamiento **lineal** consistente con aceleración constante.
- Pendientes que corresponden a las aceleraciones teóricas $a = g \sin \theta / (1 + k)$.
- Separación clara entre las curvas de los tres cuerpos, siendo la **esfera** siempre la más rápida.
- La esfera siempre muestra la mayor pendiente (mayor aceleración).

6. Análisis de Discrepancias y Fuentes de Error

6.1. Error del Integrador Numérico

El método de Euler semi-implícito introduce errores de truncamiento:

$$\text{Error local} \propto O(\Delta t^2)$$

$$\text{Error global} \propto O(\Delta t)$$

Para $\Delta t \approx 0,0167\text{ s}$ (correspondiente a 60 FPS), el error teórico esperado está en el rango de 0,1 % a 0,5 %, lo que **concuera con los resultados observados** en la Tabla 4.

6.2. Análisis Cuantitativo de Fuentes de Error

Cuadro 5: Análisis Detallado de Fuentes de Error

Fuente de Error	Magnitud Estimada	Tipo	Impacto Relativo
Integrador Euler	0,1 %-0,5 %	Sistemático	Principal
Discretización temporal	0,05 %-0,2 %	Sistemático	Moderado
Condición de parada	0,01 %-0,1 %	Aleatorio	Menor
Precisión numérica JS	< 0,001 %	Aleatorio	Despreciable
Redondeo en muestreo	0,02 %-0,1 %	Aleatorio	Menor

6.3. Fricción Parásita y Efectos No Ideales

6.3.1. Modelo de Fricción Implementado

- Coeficiente de fricción estática: $\mu_s = 1,0$ (valor suficientemente grande para asegurar rodadura pura).
- Verificación de condición: $|f| \leq \mu_s N$.
- En todos los casos probados se cumple: $f_{\text{necesaria}} < f_{\text{máxima}}$, garantizando **rodadura pura** sin deslizamiento.

6.3.2. Efectos Despreciados

- Resistencia del aire (no considerada)
- Pérdidas por rodadura (despreciadas)
- Deformación de cuerpos (cuerpos rígidos ideales)
- Imperfecciones de superficie (plano ideal)

6.4. Validación Automática con runTest()

La función de validación incorporada realiza una comparación de los resultados simulados con las predicciones teóricas calculadas.

```

1 function runTest(tolerancePercent = 5){
2   const theo = computeTheoretical(appState.
      thetaDeg, appState.h);
3   // Compara tiempos simulados vs teóricos
4   // Calcula error porcentual
5   // Reporta PASS/FAIL seg n tolerancia
6 }

```

Listing 3: Función de Validación

7. Discusión de Resultados

7.1. Concordancia Teórico-Experimental

Los resultados demuestran **excelente concordancia** entre teoría y simulación:

- Errores consistentemente menores al 0,6 % (ver Tabla 4).
- Orden de llegada preservado: **Esfera** \rightarrow **Cilindro** \rightarrow **Aro**.
- Validación del principio físico fundamental de la rodadura sin deslizamiento.
- Comportamiento reproducible en diferentes configuraciones de ángulo y altura.

7.2. Sensibilidad a Parámetros

7.2.1. Independencia de Masa y Radio

Confirmación experimental de que:

- La aceleración depende exclusivamente del **factor de forma** k .
- La masa no afecta la aceleración lineal.
- El radio afecta solo cantidades angulares ($\omega = v/R$).

7.2.2. Dependencia del Ángulo

- Tiempos decrecientes con ángulo creciente.
- Relación $\sin \theta$ en aceleración confirmada.
- Comportamiento asintótico en ángulos extremos (cerca a $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$).

7.3. Limitaciones Identificadas

7.3.1. Limitaciones Técnicas

- Paso temporal fijo (no adaptativo), que limita la precisión máxima.
- Precisión limitada por el estándar de **punto flotante de JavaScript** (IEEE 754 de doble precisión).
- Rendimiento dependiente del hardware cliente.

7.3.2. Limitaciones Físicas

- Fricción estática idealizada ($\mu_s = 1,0$).
- Ausencia de efectos disipativos como la resistencia del aire.
- Modelo de **rodadura pura sin deslizamiento** asumido.

8. Conclusiones

1. **Validación del Modelo Teórico:** Se confirma experimentalmente mediante simulación que la **esfera maciza llega primero**, seguida por el cilindro macizo y finalmente el aro, en completa concordancia con las predicciones teóricas.
2. **Precisión de la Simulación:** La implementación numérica muestra **alta precisión** con errores menores al 0,6 % en todos los casos estudiados, validando la elección del integrador Euler semi-implícito para este sistema físico.
3. **Independencia de Parámetros:** Se verifica experimentalmente que la aceleración de los cuerpos depende exclusivamente de su **factor de forma geométrica** k , siendo independiente de su masa y radio.
4. **Herramienta Educativa Efectiva:** La simulación desarrollada constituye una herramienta pedagógica poderosa para visualizar y comprender conceptos fundamentales de dinámica rotacional y rodadura sin deslizamiento.
5. **Metodología ABP Exitosa:** El proyecto demuestra la efectividad del Aprendizaje Basado en Problemas para integrar conceptos teóricos de física con desarrollo tecnológico, análisis numérico y validación experimental.

Repositorio y Recursos

Acceso al Código Fuente

El código completo de la simulación está disponible en el repositorio:

<https://github.com/Deibherr/ABP>

Estructura del Repositorio

- `index.html` - Archivo principal de la simulación
- `README.md` - Documentación del proyecto
- `data/` - Datos exportados de las simulaciones
- `docs/` - Documentación técnica y teórica
- `assets/` - Recursos visuales y capturas

Instrucciones de Uso

1. Clonar el repositorio: `git clone ...`
2. Abrir `index.html` en un navegador web moderno
3. Configurar parámetros deseados
4. Ejecutar simulación y exportar datos

Referencias

1. Marion, J. B., & Thornton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Harcourt Brace.
2. Kleppner, D., & Kolenkow, R. (2014). *An Introduction to Mechanics*. Cambridge University Press.
3. Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2018). *Physics for Scientists and Engineers*. Cengage Learning.
4. McCarthy, C. (2023). *p5.js Documentation*. <https://p5js.org/reference/>
5. Código fuente de la simulación (2024). *Competencia de Rodadura 3D*. Repositorio GitHub.