UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

1859

PERIODO ACADÉMICO: OCTUBRE 2019 MARZO 2020
PRACTICA # 6
ASIGNATURA: SIMULACIÓN
RESULTADO DE APRENDIZAJE DE LA PRÁCTICA: Entiende los métodos de convolución, composición y transformación directa
TIEMPO PLANIFICADO: 3 HORAS
NUMERO DE ESTUDIANTES: Sexto ciclo (Paralelo A)

Nombre Deiby Calva **fecha:** 06/01/2020

1. **TEMA: Generación de variables aleatorias**

2. **OBJETIVOS:**

- Comprende los métodos de generación de variables aleatorias.
- Usa los conocimientos aprendidos en teoría para su posterior aplicación práctica.

3. **RECURSOS NECESARIOS:**

- Java, Netbeans, Excel
- Computador de Laboratorios

4. **INSTRUCCIONES:**

- Prohibido consumo de alimentos
- Prohibido equipo de diversión, celulares etc.
- Prohibido jugar
- Prohibido mover o intercambiar los equipos de los bancos de trabajo
- Prohibido sacar los equipos del laboratorio sin autorización.
- Ubicar los equipos y accesorios en el lugar dispuesto por el responsable del laboratorio, luego de terminar las prácticas.
- Uso adecuado de equipos

5. **ACTIVIDADES POR DESARROLLAR:**

a. Genere la variable aleatoria para la siguiente distribución usando el método de composición.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f(x_1) = \int_{-1}^{x} 1 + x\,dx = \int 1\,dx + \int x\,dx$$

$$= [1x]x + \left[\frac{x^2}{2}\right] + c$$

$$= x + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{(1)^{-1}}{2} = x + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2+2x+2-1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2} \quad = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{(-1)^2}{2}\right)$$

Igualamos con ri y despejamos x F(x)

$$ri = x - \frac{x^2}{2}$$
$$2ri = x - x^2$$
$$2ri = x(1-x)$$

$$2ri = x \qquad\qquad 2ri = 1 - x$$
$$\mathrm{x} = 2ri \qquad\qquad \mathrm{x} = 1 - 2ri$$

Con la segunda ecuación $f(x_2)$:

$$f(x_2) = \int_{-1}^{x} 1 - x\,dx = \int 1\,dx - \int x\,dx$$

$$= [1x]x - \left[\frac{x^2}{2}\right] + c$$

$$= x + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(1)^{-1}}{2} = x + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2x+2-x^2+1}{2} = \frac{-x^2+2x+3}{2} \quad = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(3 - \frac{(-3)^2}{2}\right)$$

Igualamos con ri y despejamos x

$$ri = x - \frac{x^2}{2}$$
$$2ri = x - x^2$$
$$2ri = x(1-x)$$

$$2ri = x \qquad\qquad 2ri = 1 - x$$
$$\text{x} = 2ri \qquad\qquad \text{x} = 1 - 2ri$$

b. Mediante una hoja de calculo, genere 50 variables aleatorias:
- Distribuidas de forma normal con media 50 y varianza 36
- Con distribución binomial y parámetros N = 5, p = 0.3, q = 0.7
- Con distribución Erlang con parámetro de forma 4 y media 20.

6. INVESTIGACIÓN COMPLEMENTARIA

Método del rechazo para la generación de variables aleatorias

La idea consiste en cubrir la densidad de la variable a simular con una curva de expresión analítica sencilla. Se genera un punto al azar bajo la nueva curva. Si el punto cae por debajo de la densidad original, se considerará válido y el valor simulado de la variable será la abscisa del punto.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f : I \to \mathbb{R}$. Supóngase que f(x)=Cg(x)h(x) con C una constante, $C \geq 1$, $0 < g(x) \leq 1$ y h(x) una función de densidad en I. Si $U \equiv U(0,1)$ e Y (con función de densidad h) son independientes, entonces

$$h(x|U \leq g(Y)) = f(x).$$

Demostración:

$$h(x|U \leq g(Y)) = \frac{P(U \leq g(Y)|Y = x)h(x)}{\int_I P(U \leq g(Y)|Y = x)h(x)dx} = \frac{P(U \leq g(x))h(x)}{\int_I P(U \leq g(x))h(x)dx} =$$

$$= \frac{g(x)h(x)}{\int_I g(x)h(x)dx} = \frac{\frac{f(x)}{C}}{\int_I \frac{f(x)}{C}dx} = f(x)$$

Algoritmo de *aceptación y rechazo*:
1.
Se genera $u \equiv U(0,1)$ y un valor y de la variable Y (de forma independiente). 2.
Si u>g(y), se va al paso 1.
3.
Si $u \leq g(y)$, entonces se hace x=y.
Ahora interesa conocer cuál es la probabilidad de que en una iteración concreta se rechace el valor generado:

$$P(\text{aceptar } y_i) = P(U \leq g(Y)) = \text{denominador de la demostración} = \frac{1}{C}.$$

Como el número de iteraciones del método hasta aceptar un valor sigue una distribución geométrica de parámetro $\frac{1}{C}$ (cuya esperanza es C), entonces si queremos optimizar el método habrá que intentaar que C sea próxima a uno y que h sea sencilla de generar.

$$g(x) = \frac{f(x)}{Ch(x)} \leq 1 \to f(x) \leq Ch(x)$$

Si hacemos $\Phi(x) = Ch(x)$, entonces buscamos que sea $\Phi(x) \geq f(x)$. Se tendrá

$$\int_I \Phi(x)dx = C\int_I h(x)dx = C \cdot 1 = C \quad \to \quad h(x) = \frac{\Phi(x)}{C}.$$

Como Φ coincide con *h* salvo la constante y h es una función de densidad en I, entonces también se tiene que cumplir que $\int_I \Phi(x)dx$ sea finita.

Caso particular: f acotada, definida en un intervalo [a,b] acotado

Sea $f \leq M$ en I=[a,b].

En este caso tomamos $\Phi = M$. Así

$$C = \int_a^b Mdx = M(b-a),$$

$$h(x) = \frac{\Phi(x)}{C} = \frac{M}{M(b-a)} = \frac{1}{b-a} \ en\ [a,b].$$

$$H(x) = \frac{x-a}{b-a};$$

$H^{-1}(u)$= *a* + (*b*-

a)*u*. Además,

$$g(x) = \frac{f(x)}{M}.$$

El algoritmo resultante es:
1.
Genérese u_1, $u_2 \equiv U(0,1)$ de forma independiente.
2.
Si $Mu_1 > f(a+(b-a)u_2)$, entonces se vuelve al paso 1. En caso contrario, se hace $x=a+(b-a)u_2$.

Ejemplo: $f(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2},\ -R \leq x \leq R.$

En este caso [a,b]=[-R,R], por lo que $M = \frac{2}{\pi R}$, pues f alcanza su máximo en x=0. Tratemos de simplificar el test de aceptación $Mu_1 \leq f(a+(b-a)u_2)$.

$$\frac{2}{\pi R}u_1 \leq \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - (-R + 2Ru_2)^2}$$

si y sólo si

$$u_1^2 \leq \frac{1}{R^2}R^2(1 - (-1 + 2u_2)^2)$$

si y sólo si

$$u_1^2 \leq (1 + 1 - 2u_2)(1 - 1 + 2u_2) = (2 - 2u_2)2u_2 = 4u_2(1 - u_2)$$

si y sólo si

$$\frac{u_2(1 - u_2)}{u_1^2} \geq \frac{1}{4}.$$

La probabilidad de aceptación es

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{M(b-a)} = \frac{\pi R}{2}\frac{1}{2R} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo: $X \equiv Be(\alpha, \beta)\ (\alpha, \beta \geq 1).f(x) = \frac{1}{Be(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ 0 < x < 1$. La función $h(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ es función de densidad en (0,1). Así

$$H(x) = x^{\alpha} \Rightarrow$$

$$H^{-1}(u) = u^{\frac{1}{\alpha}},\ 0 < u < 1.$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{M(b-a)} = \frac{\pi R}{2}\frac{1}{2R} = \frac{\pi}{4}.$$

Tomamos $g(x) = (1-x)^{\beta-1}$. De este modo se tiene que

$$c = \frac{1}{\alpha Be(\alpha, \beta)} \geq 1$$

y el criterio de aceptación es

$$u_1 \leq (1 - u_2^{\frac{1}{\alpha}})^{\beta-1},$$

tomándose

$$x = u_2^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ejemplo:

$X \equiv \Gamma(1, \alpha),\ 0 < \alpha < 1.$

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)},\ x \geq 0.$$

Para que se cumplan todas las condiciones que necesitamos, tomamos

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ x^{\alpha-1} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si \quad 0 < x \leq 1, \\ \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & si \quad x > 1. \end{cases}$$

Es inmediato que $0 \leq g \leq 1$. Veamos que Φ integra un valor finito:

$$C = \int_0^{+\infty} \Phi(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 x^{\alpha-1}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{e} \right) = \frac{\alpha + e}{\alpha e \Gamma(\alpha)}.$$

Ahora

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\alpha e}{\alpha+e} x^{\alpha-1} & si \quad 0 < x \leq 1, \\ \frac{\alpha e}{\alpha+e} e^{-x} & si \quad x > 1. \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} \frac{e}{e+\alpha} x^\alpha & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{\alpha}{\alpha+e} e^{1-x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como $H(1) = \frac{e}{e+\alpha}$, entonces

$$H^{-1}(u) = \begin{cases} \left(\frac{e+\alpha}{e} u\right)^{\frac{1}{\alpha}} & si \quad o < u \leq \frac{e}{e+\alpha}, \\ \ln\left(\frac{e\alpha}{(e+\alpha)(1-u)}\right) & si \quad \frac{e}{e+\alpha} \leq u < 1. \end{cases}$$

El algoritmo para simular la variable X es:
1.
Se genera u_1, u_2 según una distribución
U(0,1). 2.
Si $u_2 \leq g(H^{-1}(u_1))$, entonces se toma $x=H^{-1}(u_1)$. En caso contrario, se repite el paso 1. [1]

7. DISCUSIÓN

En nuestro primer ejercicio tenemos claramente el método de **composición**, quien entonces es la suma de dos o más variables aleatorias para obtener una nueva variable aleatoria con la distribución de probabilidad deseada. Se observa dos ecuaciones que debemos integrarlas para dar solución a cada uno de los problemas, al integrar se nos dará un resultado mismo que nos permitirá definir el valor para ri y rj, posterior, los expresaremos dentro de una tabla en donde rj dependerá de ri.

En nuestro literal b, observamos que aplicaremos la distribución normal, binomial y al de erlang, cada una de estas implica obtener valores aleatorios.

La distribución normal tiene la característica de que la variable puede tomar cualquier valor: (-∞, +∞) La distribución binomial en cambio, mide el número de éxitos en N pruebas independientes.

La distribución de erlang, Esta distribución mide el tiempo que transcurre entre un suceso y el m-ésimo siguiente (es una generalización de la exponencial).

Cada uno de los métodos contiene sus tablas que a continuación se explicarán en el archivo Excel que se encuentra en el documento adjunto.

8. CONCLUSIONES

Una vez desarrollado los ejercicios de la práctica, se puede concluir que el método de Composición es complejo donde se unen las distribuciones trapezoidales y triangular, lo cual lo hace más extenso en la obtención de expresiones para generar variables. Hay que saber obtener expresiones mediante el método de la transformada inversa ya que, si no, no se puede generar variables, también se fortaleció el conocimiento sobre los métodos de generación de variables pseudoaleatorias.

9. RECOMENDACIONES

Es importante recalcar que, para una mayor comprensión de cada uno de los métodos empleados en el presente proyecto, se necesita fortalecer la parte teórica con la parte práctica.
En lo más posible explicar con claridad cada uno de los temas puesto que no se tiene mayor información específica de cada método.

10. BIBLIOGRAFÍA:

- A. Hernandez, «INTRODUCCIÓN A LA SIMULACION(metodo de rechazo),» [En línea]. Available: http://www.facyt.uc.edu.ve/sites/default/files/Libro_EB_2010.pdf. [Último acceso: 03 01 2020].

- Peña Sánchez de Rivera, Daniel (2008). *Fundamentos de Estadística* (1ª edición). Alianza Editorial. p. 688. ISBN 9788420683805.

- Ropero Moriones, Eva (2009). *Manual de estadística empresarial* (1ª edición). Delta Publicaciones. p. 200. ISBN 9788492453214.

- Raul Coss, Libro base.