

# Matemática I

Módulo I  
Conjuntos Numéricos

Estudios Generales





UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA

# **Matemática I**

Módulo I

## **Conjuntos Numéricos**

**Estudios Generales**

175

1998 Matemática II / [elaborado por] Belkis Escobar... [et. al.] -- Caracas: UNA, 1998.  
3 v. : il. ; 29 cm.  
ISBN: 980-236-582-3; 980-236-581-5; 980-236-583-3

Estudios Generales.

v.1. Conjuntos numéricos / Belkis Escobar, Alejandra Lamedá, Mauricio Orellana Chacín / v.2. Funciones y representaciones gráficas / Mauricio Orellana Chacín, Luis Márquez Gordones / v.3. Sucesiones, nociones elementales de límites y continuidad de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  / Ramón Chacón, Sergio Vivas.

1.- Matemáticas -- Funciones. 2.- Conjuntos (Matemáticas). 3.- Educación a distancia -- Módulo de estudio. I. Universidad Nacional Abierta. II. Escobar Belkis. III. Lamedá, Alejandra. IV. Orellana Chacín, Mauricio. V. Márquez Gordones, Luis. VI. Chacón, Ramón. VII. Vivas, Sergio.

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio gráfico, audiovisual o computarizado, sin previa autorización escrita.

Universidad Nacional Abierta  
Apartado Postal N° 2096  
Caracas 1010 A, Carmelitas, Venezuela

Copyright © UNA 1998

ISBN 980-236-582-3 (V.1)  
ISBN 980-236-581-5 (V.2)  
ISBN 980-236-583-3 (V.3)

Décima Segunda Reimpresión, 2017

Registro de Publicaciones de la  
Universidad Nacional Abierta  
N° UNA – EG – 98 – 0462

## PRÓLOGO

MATEMÁTICA I es un curso que pertenece al ciclo de los Estudios Generales. Como ya probablemente sabes, dicho ciclo es la parte del Plan de Estudios mediante la cual la Universidad se propone reforzar y ampliar la cultura general de sus estudiantes así como iniciarlos en algo fundamental en esta época de grandes conmociones científicas, sociales, económicas y políticas: el conocimiento y la aplicación de instrumentos de análisis que permiten observar de manera sistemática la realidad circundante para comprenderla y realizar las transformaciones que requieran el bienestar y el progreso de la sociedad. En un nivel más avanzado, los Estudios Generales complementan sus propósitos buscando tanto el desarrollo de la capacidad de crítica, fundamentada en la racionalidad y la argumentación, como la liberación del potencial de creatividad de los estudiantes.

Para lograr sus fines, los Estudios Generales se organizan en tres ejes: eje simbólico, eje heurístico y eje crítico. El curso de MATEMÁTICA I conforma, junto con las asignaturas Matemática II, Lengua y Comunicación, Lógica e Inglés, el eje simbólico. Dicho eje pretende ayudarte a adquirir y utilizar los símbolos, principios y técnicas que se emplean en una comunicación efectiva y de buen nivel. Porque como futuro profesional, deberás interactuar con otras personas en la resolución de los problemas de tu comunidad y para ello será necesario que te comuniques, es decir, que te comprendan y que entiendas a los demás, con precisión y sin ambigüedades. Ello requiere que manejes apropiadamente los símbolos fundamentales de la Lengua, la Lógica y la Matemática.

Como ya habrás podido comprobar, el sistema de Educación a Distancia es bastante diferente del sistema presencial. Dado que la comunicación esencial con los estudiantes se realiza a través de los materiales instruccionales (impresos y audiovisuales), éstos deben diseñarse con gran esmero, a fin de lograr expresar lo que realmente se quiere comunicar. Por otro lado, el sistema es exigente para con los estudiantes puesto que les impone mucha autodisciplina y responsabilidad personal para organizarse, para trabajar con perseverancia y para aprender sin recibir clases. Exige en particular una considerable actividad de lectura la cual, a la larga, se convierte en una poderosa herramienta de trabajo profesional. Conociendo la magnitud del esfuerzo impuesto, la UNA te ofrece también el apoyo de sus asesores y orientadores ubicados en sus Centros Locales, para que puedas realizar consultas, aclarar dudas y sentirte más confiado en tu proceso de aprendizaje. Capacitarte para que «aprendas a aprender», de manera que puedas desenvolverte en el futuro con autonomía y libertad, es nuestra máxima aspiración.

La elaboración de los materiales instruccionales de un sistema de Educación a Distancia pasa por un largo proceso de perfeccionamiento progresivo. Primero, se produce una primera versión, sobre la base de los conocimientos disponibles en pedagogía, psicología de la instrucción y ciencias cognitivas. Luego se prueba con pequeños grupos de estudiantes, se incorporan las modificaciones pertinentes, y finalmente se emplea masivamente para la enseñanza de todos los estudiantes. El control de calidad prosigue, evaluándose el impacto del material sobre los usuarios: estudiantes y asesores.

Este es el caso del curso MATEMÁTICA I. Después de varios años de uso, de acumular experiencias, opiniones y datos estadísticos, el primer curso de Matemática I de la UNA (primera edición 1979) está siendo reemplazado por éste que tienes ahora en tus manos. Con esta nueva versión, totalmente diferente tanto en su contenido como en su diseño instruccional, su diagramación y sus materiales de apoyo, esperamos introducir a todos nuestros estudiantes, de una manera fácil y amena, en un campo del conocimiento, esencial para la formación de todo egresado universitario. Es nuestro sincero deseo que, gracias al empleo de los múltiples recursos ofrecidos, ejemplos, ejercicios, lecturas, actividades y medios audiovisuales, logres establecer la conexión existente entre el mundo formal, abstracto de los símbolos y la realidad concreta, empírica en la que vivimos.

Julio de 1996

Ramona Akl Bittar  
Vicerrectora Académica



## ÍNDICE GENERAL DEL MÓDULO Y UNIDADES

	Pág.
<b>Presentación del Curso de Matemática I (100)</b> .....	9
<b>Objetivo</b> .....	13
<b>Orientaciones Generales</b> .....	15
<b>MÓDULO I    Conjuntos numéricos</b> .....	23
<b>Unidad 1</b> Números naturales, enteros y racionales .....	35
<b>Unidad 2</b> Números reales .....	97
<b>Unidad 3</b> Orden en R. Desigualdades, ecuaciones e inecuaciones .....	123
<b>MÓDULO II    Funciones y representaciones gráficas</b> .....	19
<b>Unidad 4</b> Sistemas de coordenadas. Relaciones y funciones .....	23
<b>Unidad 5</b> Funciones elementales y sus características .....	87
<b>Unidad 6</b> Otras representaciones gráficas .....	167
<b>MODULO III    Sucesiones. Nociones elementales de límites y continuidad de funciones de R en R</b> .....	19
<b>Unidad 7</b> Sucesiones, aproximaciones y nociones elementales de límites de sucesiones .....	23
<b>Unidad 8</b> Nociones elementales de límites de funciones .....	65
<b>Unidad 9</b> Nociones elementales de continuidad de funciones .....	119
<b>MÓDULO IV    Pensamiento matemático y modelando con matemática (Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial, Matemática, educación Matemática)</b> .....	19
<b>Unidad 1</b> Pensamiento matemático .....	21
<b>Unidad 2</b> Modelando con matemática .....	59
<b>MODULO IV    Aplicaciones de las funciones a las ciencias administrativas (Administración y Contaduría)</b> .....	19
<b>Unidad 1</b> Aplicaciones de la función $y = ax + b$ .....	21
<b>Unidad 2</b> Aplicaciones de las funciones a trozos, cuadráticas, logarítmicas y exponenciales .....	77

	Pág.
<b>MÓDULO IV</b> Algunos tópicos de geometría, aritmética y álgebra, desarrollados en el preescolar y en la primera y segunda etapas de la educación básica (Educación, menciones Dificultades de Aprendizaje y Preescolar) .....	19
Unidad 1 Lecturas introductorias .....	23
Unidad 2 Reflexiones acerca de aspectos geométricos .....	35
Unidad 3 Descubriendo aspectos aritméticos y algebraicos .....	125



## PRESENTACIÓN DEL CURSO MATEMÁTICA I

El texto presente inicia una nueva fase dentro de los estudios de las asignaturas de matemática correspondientes al CICLO DE ESTUDIOS GENERALES de la UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA, el cual está conformado, en lo concerniente a matemática, por dos asignaturas: Matemática I y Matemática II. El texto que aquí presentamos se refiere a **MATEMÁTICA I (175, 176, 177)**.

El contenido inicial del curso de Matemática I y los textos precedentes, con los que se inauguraron los estudios de dicha asignatura en la Universidad Nacional Abierta, se remontan al año 1980, data en que la naciente universidad comenzaba a recibir su primer contingente de estudiantes en el Ciclo de Estudios Generales. Estos estudiantes se diversificaron hacia las distintas carreras ofrecidas por la Universidad y sus estudios se desarrollaron mediante la modalidad de EDUCACIÓN A DISTANCIA. Para la época era una modalidad de estudio innovadora en Venezuela, aunque otras instituciones universitarias ya tenían ciertos estudios "supervisados", sin carácter presencial. El inicio de la Universidad, totalmente centrada en la educación a distancia, marcó hito en la educación superior venezolana.

Es razonable pensar que, frente a un ensayo tan novedoso para ese entonces, parte de los diseños curriculares y del material instruccional con el que se contaba presentaba algunas carencias entre ellas las de tipo metodológico, puesto que el material instruccional tuvo que adaptarse a esa forma innovadora de enseñanza y el país no tenía la experiencia suficiente en ese campo educativo.

El primer texto del curso de Matemática I estuvo constituido por dos tomos conformados por nueve módulos de instrucción. Los primeros cambios de este texto se realizaron en el primer año de su implantación cuando se elaboró un folleto complementario donde se incorporaron un conjunto de problemas de apoyo al estudiante y las distintas fe de erratas de los módulos de instrucción. En 1981 se fusionaron en un único tomo los dos volúmenes existentes, incorporando los ejercicios del folleto complementario y eliminando el último módulo del texto, relacionado con estructuras algebraicas. Posteriormente, en el año 1985 se agregaron mas de 200 ejercicios, con el fin de reforzar y complementar los contenidos del curso y finalmente en 1986 se elaboró otra edición incluyendo las respuestas detalladas de las distintas autoevaluaciones, explicando el por qué de cada alternativa correcta de respuesta. En esta distintas ediciones no se modificaron los contenidos programáticos (salvo la exclusión del último módulo del primer texto) ni el diseño del texto, tanto en su diagramación como en el diseño de instrucción, el cual ha permanecido hasta el presente en sus ediciones sucesivas.

Pasados varios años de utilización de ese material instruccional, muchos miembros de la comunidad universitaria de la Universidad Nacional Abierta, entre ellos, personal académico del área de Matemática, autoridades universitarias, asesores de Matemática de los centros locales, personal docente de otras áreas académicas de la Universidad y estudiantes, consideraban necesario hacer una revisión de los contenidos de matemática impartidos en el ciclo de Estudios Generales e igualmente se hacían señalamientos en torno a aspectos metodológicos.

Fue así que, hacia mediados de 1993, las autoridades de la Universidad decidieron realizar una renovación de varios textos en respuesta a las inquietudes antes mencionadas y, en consecuencia, se decidió llevar adelante un proyecto para la elaboración de nuevos materiales instruccionales de **Matemática I y Matemática II**, entre los que se encuentran la producción de módulos, audiocassettes (con guía de actividades) y videocassettes de estas asignaturas.

Para emprender esta labor era imperativo detectar previamente un conjunto de necesidades vinculadas con los cambios que luego fueron propuestos, concernientes a las mencionadas asignaturas. En el estudio que se llevó a cabo, a través de encuestas, entrevistas grabadas y diversas discusiones, participaron los miembros del área de Matemática, asesores de matemática y estudiantes de varios centros locales, algunos miembros de otras áreas académicas de la Universidad y docentes de otras instituciones relacionados con las carreras de Preescolar y Dificultades de Aprendizaje.

Producto de la información recabada se concluyó que los materiales instruccionales de **Matemática I y Matemática II** presentaban diversas deficiencias; entre otras: presentación y desarrollo de los contenidos, aspectos metodológicos, utilización escasa de los videocassettes elaborados para dichas asignaturas. Por esto era necesario elaborar nuevos materiales instruccionales que se orientaran a superar las fallas encontradas, con un diseño distinto y, además, actualizar los contenidos pues los anteriores tenían más de diez años de vigencia.

Sobre la base de ciertos materiales instruccionales que he escrito en los últimos años, de trabajos acerca de la enseñanza de la matemática y de las diversas discusiones sostenidas con miembros del personal docente del área de Matemática y de otras instituciones, y de las tendencias en cuanto a la presentación y diagramación de libros, se generó un nuevo modelo para escribir los textos que, estimo, superan publicaciones escritas por mí anteriormente. Su seguimiento posterior, por docentes y estudiantes, será el encargado de decidir si nos encontramos en un camino adecuado y cuáles serán los correctivos para el mismo.

Considero que los nuevos libros para *enseñar matemática*, especialmente en los primeros dos años universitarios, deben tener ciertas características que rompan con el modelo tradicional, con un patrón muy generalizado, de escribir los libros de matemática, en donde se sigue una esquema de tipo "lineal" basado en la secuencia siguiente: Concepto (Definición)-Teorema o Proposición-Demostración-Ejemplo.

Con el objeto de innovar se plantea un diseño divergente y una diagramación que combine aspectos de lo tradicional con varios de los "procesos" que son esenciales para la comprensión de la matemática de parte de los estudiantes, entre los que destacan: observar, comparar, relacionar, clasificar, analizar, sintetizar y generalizar.

Estimo que el modelo para escribir los libros, lo que está plasmado en la lectura de los diferentes Módulos que integran este curso, se puede lograr incorporando los siguientes elementos:

- Cuadros resúmenes de repaso.
- El diseño de las páginas con un ángulo recto que permite escribir, en el margen derecho o izquierdo, notas para recordar tópicos conocidos por los estudiantes o llamar la atención sobre algún aspecto que se está estudiando, evitando su incorporación en lo que se está desarrollando a los fines de no distraer lo esencial y, en el margen inferior (pie de página), reseñas históricas, comentarios sobre el tema estudiado, referencias bibliográficas.
- Iconos colocados en el margen derecho o izquierdo.
- Resaltar lo esencial.
- Repetir, cuando sea necesario, contenidos ya desarrollados en temas anteriores con el fin de no distraer la atención de los estudiantes retrocediendo a unidades o páginas anteriores.
- Incorporación de desplegados.
- Mapas conceptuales.
- Resolver y proponer ejercicios que tengan una connotación histórica o del tipo "matemática recreativa".
- Graduación por habilidades y niveles de razonamiento de los ejercicios resueltos y propuestos. Estos se han clasificado en: ejemplos, ejercicios y problemas, siendo necesario evitar el recargo en los ejemplos de tipo rutinario que es una práctica corriente en la enseñanza de la matemática en las etapas anteriores a la educación universitaria, lo que entorpece y no permite a los estudiantes el desarrollo de las habilidades cognitivas correspondientes a los niveles de razonamientos superiores.
- Diagramación bifurcada cuando sea necesario, escribiendo en dos, tres o cuatro columnas, con el objeto de comparar y relacionar.

Además, se utiliza la tecnología actual de los procesadores de textos con el fin de lograr una diagramación "agradable" para la lectura del material escrito. Se ilustran, en la medida de lo posible, los conceptos, proposiciones y, en general, el contenido matemático con profusión de gráficos y diagramas y se hace uso intensivo de las calculadoras científicas.

El curso de **Matemática I** está compuesto de cuatro módulos de aprendizaje, tres de ellos son comunes y un cuarto diferenciado el cual está orientado a proporcionar recursos utilizados en situaciones relacionadas con los campos profesionales de las distintas carreras. Los tres módulos comunes son:

**Módulo I:** Conjuntos numéricos.

**Módulo II:** Funciones y representaciones gráficas.

**Módulo III:** Sucesiones. Nociones elementales de límites y continuidad de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Y los módulos diferenciados son:

**Módulo IV** Pensamiento matemático y modelando con matemática.  
(Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial, Matemática y Educación Matemática)

**Módulo IV** Aplicaciones de las funciones a las ciencias administrativas.  
(Administración y Contaduría)

**Módulo IV** Algunos tópicos de Geometría, Aritmética y Álgebra desarrollados en Preescolar y en la primera y segunda etapas de la Educación Básica.  
(Educación, menciones Dificultades de Aprendizaje y Preescolar).

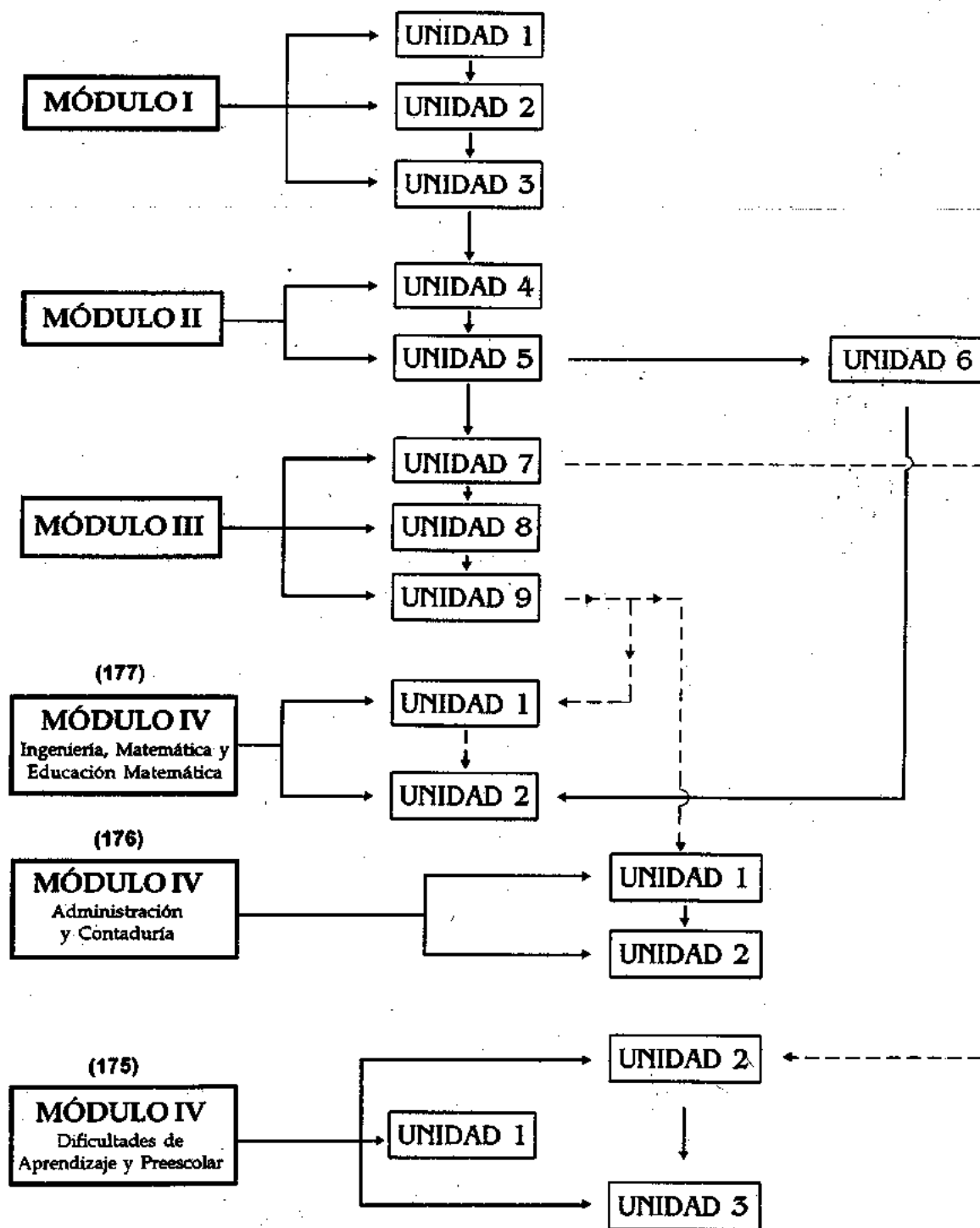
La mayor parte de los dos primeros módulos comunes, así como algunos aspectos de sucesiones en el tercer Módulo y parte del contenido del Módulo IV para Educación (Dificultades de Aprendizaje y Preescolar), se refieren a contenidos programáticos estudiados en las etapas previas a la educación superior y, en consecuencia, ello establece el enlace necesario entre esas etapas previas y la educación superior, lo cual se hace más imprescindible en una educación a distancia. Estimamos que el estudio de estos módulos debe ser más rápido que el Módulo III y los módulos diferenciados, lo que requiere de los estudiantes una mejor organización y distribución de su tiempo de estudio. En cada uno de los módulos encuentras las "Orientaciones Generales" y la "Presentación" que te indican cómo estudiarlo y te presentan una panorámica del contenido del mismo.

Aquí tratamos de dar una mayor fundamentación a aquellos contenidos que conoce el estudiante y resolver ciertos ejercicios y problemas de un nivel de razonamiento mayor que lo usualmente exigido en la educación secundaria.

En nombre del equipo que redactó las unidades de aprendizaje de los módulos de Matemática I, de los docentes que validaron las distintas unidades y de los que procesaron el texto en su versión final, a quienes agradecemos por todo el esfuerzo realizado durante más de un año de trabajo, nos complace recibir comentarios y sugerencias de parte de los estudiantes y docentes que utilicen estos módulos pues esto nos permitirá hacer algunos cambios en una edición futura.

**Mauricio Orellana Chacín**

# DEPENDENCIA DE LAS UNIDADES DE APRENDIZAJE Y MÓDULOS QUE INTEGRAN EL CURSO DE MATEMÁTICA I (175, 176, 177)



NOTA: Las flechas que no tienen trazo continuo indican que solamente se utilizan algunos conceptos y resultados de la Unidad situada al inicio de la flecha.

# OBJETIVO GENERAL DEL CURSO DE MATEMÁTICA I (175 - 176 - 177)

*Al concluir este curso, el estudiante estará en condiciones de aplicar los contenidos y técnicas desarrollados en el mismo, a los fines de resolver diversas situaciones en relación con los conjuntos numéricos, las funciones, los límites y la continuidad de funciones, tanto en ramas de la matemática como en otras disciplinas, previa organización coherente y sistemática de algunos contenidos estudiados en las etapas anteriores a la educación superior.*



## ORIENTACIONES GENERALES

Para facilitarte el logro de los objetivos previstos en este *Módulo* que forma parte del curso de **MATEMÁTICA I (175, 176, 177)**, nos permitimos indicarte algunas orientaciones que te ayudarán en el desarrollo de las actividades que el mismo prevé.

- ♣ En primer lugar, lee la **presentación o introducción del Módulo** y su **objetivo**, que te proporcionan una panorámica global de lo que se intenta lograr.

Cada **módulo** se divide en **Unidades de Aprendizaje** y cada Unidad comprende, a su vez, diversos temas o experiencias de aprendizaje.

- ♣ En segundo lugar, en el momento que inicies el estudio de cada *Unidad de Aprendizaje*, lee los **objetivos** y la **presentación o introducción** de la *Unidad* en cuestión, lo cual te suministra la información acerca de lo que se pretende alcanzar cuando finalices el estudio de dicha Unidad. También hacemos *presentaciones o introducciones* a distintos temas en que se divide la *unidad de aprendizaje*.

Las *Unidades de Aprendizaje* se dividen en temas que se numeran con dos dígitos. Por ejemplo: 3.5 indica el quinto tema de la unidad 3. También a la *presentación* se le asigna un par de dígitos.

Hay algunos temas que pueden dividirse en *subtemas* y en éstos la numeración tiene tres dígitos. Por ejemplo: 3.5.1 indica el *subtema* uno, *tema* cinco, unidad tres.

En el desarrollo del *módulo* encuentras lo siguiente:

1. *Objetivo del módulo.*
2. *Objetivos de las unidades de aprendizaje.*
3. *Presentación del módulo y de las distintas unidades de aprendizaje o de los temas.*
4. *Ejemplos, ejercicios, problemas y ejercicios propuestos, que te sirven para adquirir familiaridad con los conceptos y proposiciones que se dan.*

Los *ejemplos, ejercicios* y problemas resueltos están clasificados y, como esos nombres indican, corresponden a en tres categorías según sus dificultades y niveles de razonamiento:

**Ejemplos:** Son ejercicios para adquirir habilidades de cálculos simples y aplicaciones de fórmulas; son de tipo operatorio. Con estos ejemplos se aclaran las definiciones o se aplican directamente fórmulas o proposiciones y teoremas. Los *ejemplos* no deberían presentar dificultades de comprensión ni de resolución a ningún estudiante.

**Ejercicios:** Incluyen desde cálculos no inmediatos, pasando por la interpretación de un hecho, hasta demostraciones breves. En estos ejercicios se requiere realizar algún razonamiento que combine varios pasos, esto es, donde hay una integración de conocimientos. Para la resolución de estos *ejercicios* se precisa, frecuentemente, el haber desarrollado las habilidades de cálculo suministradas por los *ejemplos*.

**Problemas:** Corresponden al nivel de mayor exigencia matemática, pues hay más integración de conocimientos, con pasos y razonamientos más profundos. De éstos colocamos solamente unos pocos.

**Ejercicios propuestos:** La distinción de los tres niveles anteriores en los *ejercicios propuestos* se hace, respectivamente, sin colocar asteriscos, con un asterisco y con dos asteriscos, en el margen derecho o izquierdo de la página donde figura el enunciado del respectivo *ejercicio propuesto*. Las soluciones de los *ejercicios propuestos* se encuentran al finalizar el *módulo*. Se debe hacer el esfuerzo de resolver los *ejercicios propuestos* aun cuando no se alcance el punto final de la solución en algunos de ellos. En las dificultades encontradas al abordar los *ejercicios propuestos*, con el objeto de resolverlos, se halla una forma de aprendizaje muy importante. Las soluciones a esos *ejercicios propuestos* se presentarán en forma completa, parcial con sugerencias o la simple respuesta, dependiendo de las dificultades de cada uno de ellos, al finalizar el *módulo*.

Además de los *ejercicios propuestos*, y a medida que desarrollamos los contenidos programáticos, formulamos preguntas o se propone alguna *actividad*, con respuestas breves, que tienden a esclarecer algún aspecto puntual del tópico que se está explicando. Estas preguntas y actividades se manifiestan utilizando expresiones como las siguientes, escritas en letra cursiva: *¿Por qué?*, *Efectúa el cálculo*, u otras análogas. En caso de que tengas dudas o no sepas responderlas, debes consultar con el Asesor de Matemática del Centro Local donde estás inscrito.

Los niveles de razonamiento a que nos hemos referidos están expresados en términos de la taxonomía utilizada por la OPSU-CENAMEC (Oficina de Planificación del Sector Universitario-Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia; 1984).

5. En el *módulo* encuentras *autoevaluaciones* que te sirven para verificar el logro de los *objetivos*. Las soluciones figuran a continuación de las mismas.

6. Al finalizar el *módulo* hay:

*Resumen del módulo*, que destaca los aspectos más importantes desarrollados en el mismo.

*Notas históricas al finalizar la unidad (en caso de existir).*

*Glosario de términos*, donde se dan los conceptos y enunciados importantes que se presentaron en el *módulo*.

*Bibliografía para el estudiante*, con algunos comentarios, donde se puede obtener información adicional, estudiar ejercicios resueltos y resolver ejercicios propuestos, y estudiar otros enfoques sobre algunos temas.

*Índice analítico.*

7. El diseño de las páginas donde se desarrollan los contenidos programáticos comprende, además de estos contenidos, lo siguiente:

*Notas de pie de página* que complementan algún aspecto del tópico desarrollado dan alguna información de tipo histórico o alguna reseña bibliográfica.

*Notas al margen derecho o izquierdo* para llamar la atención sobre el tópico desarrollado o recordar alguna fórmula, proposición o concepto de los estudiados en *unidades de aprendizaje* anteriores o en estudios previos a la Educación Superior.

*Cuadros resúmenes de repaso* acerca de contenidos que se necesitan para el desarrollo de la *unidad* y que debe conocer el estudiante por sus estudios previos.



## Señales y Separadores

Utilizados al margen o en el texto de los Módulos, indicando lo siguiente:



Hace hincapié en la importancia del objetivo u objetivos del Módulo y Unidades, respectivamente.



Hay una definición, fórmula o enunciado importante al que es preciso prestar bastante atención puesto que será de gran utilidad en el desarrollo siguiente.



Señala que hay alguna *lectura*.



Esto indica que se hacen *preguntas importantes* que se responderán a continuación.



Se refiere a que hay *ejercicios propuestos*.



Se debe utilizar un *videocassette* como apoyo al tema desarrollado.



Se debe oír un *audiocassette* y trabajar con la *guía de actividades* como apoyo al tema desarrollado.



Se deben utilizar *calculadoras científicas*.



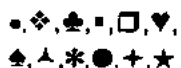
Indica *inicio de solución de ejemplo, ejercicio o problema*.



Indica *fin de enunciado de definición, de teorema o de proposición*.



Indica *fin de ejercicio resuelto (ejemplo, ejercicio, problema), de demostración de una proposición o fin de alguna observación o tópico desarrollado*.



Son *separadores* de ítems, de propiedades o de distintos enunciados.

## Símbolos

Algunos símbolos utilizados en los contenidos del curso son los siguientes:



Aproximadamente igual a.



Pertenece a (símbolo de pertenencia).



No pertenece a.



Es subconjunto de o está incluido o contenido en (símbolo de inclusión de conjuntos).



Unión o reunión de conjuntos.



Intersección de conjuntos.



Conjunto vacío.

- $\Rightarrow$  Implica (símbolo de la implicación).
- $\Leftrightarrow$  Si y sólo si o si y solamente si (símbolo de la doble implicación).
- $\angle$  Ángulo.
- $\perp$  Ángulo recto.
- $\parallel$  Es paralelo a (símbolo del paralelismo).
- $\perp$  Es perpendicular a.
- $\cap$  Arco de curva.
- $\infty$  Infinito.
- $\Delta$  (Delta) Símbolo de incremento.

### Notaciones

#### *y* Símbolos

Notaciones de la teoría de conjuntos y otros utilizados en los contenidos:

- $\{ : \}$  Notación de conjunto.
- $x = \pm 1$  Es un convenio de la notación  $x \in \{-1, 1\}$ .
- $a, b, c, \in A$  Es un convenio de  $a \in A, b \in A$  y  $c \in A$ .
- $\overline{AB}$  Longitud del segmento AB.
- $A-B$  Denota la diferencia del conjunto A con el conjunto B.
- $N, Z, Q, R$  Denotan, respectivamente, los conjuntos de los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números reales.
- $N^*$  Denota el conjunto  $N - \{0\}$  (conjunto de los números naturales no nulos).
- $R^+$  Denota el conjunto de los números reales positivos.
- $R^-$  Denota el conjunto de los números reales negativos.
- $\log$  Denota logaritmo decimal (en base 10).
- $\ln$  Denota logaritmo neperiano (en base e).
- $\lim_{n \rightarrow \infty}$  Denota límite de sucesiones.
- $\lim_{x \rightarrow x_0}$  Denota límite de funciones.
- Resp.** Indica *respectivamente*.

**UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA**  
**ÁREA DE MATEMÁTICA**

**MATEMÁTICA I (175.176.177)**  
**COORDINACIÓN GENERAL**  
Mauricio Orellana Chacín, UNA

**MÓDULO I**

*Conjuntos Numéricos*

**CONTENIDOS**

Unidades 1, 2 y 3  
Belkis Escobar, UNA  
Alejandra Lamedá, UNA  
Mauricio Orellana Chacín, UNA

**VALIDANTES**

Unidades 1, 2 y 3  
Walter Beyer, UNA  
Inés Carrera de Orellana, CENAMEC  
Mauricio Orellana Chacín, UNA

**DISEÑO INSTRUCCIONAL**

Mauricio Orellana Chacín, UNA

**REVISIÓN GENERAL**

**COORDINACIÓN**

Jesús Eduardo Ramírez, UNA

**COLABORADORES**

Alejandra Lamedá, UNA  
Alvaro Stephens, UNA

*División de Publicaciones, UNA*  
**DISEÑO GRÁFICO Y ARTES FINALES**  
Scarlet Cabrera F.  
Fanny Cordero H.



## ÍNDICE

	Pág.
<b>PRESENTACIÓN.....</b>	<b>25</b>
<b>TEST DE ENTRADA.....</b>	<b>27</b>
<b>UNIDAD 1</b>	
<b>NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES.....</b>	<b>35</b>
1.1 PRESENTACIÓN.....	37
CUADRO RESUMEN DE REPASO.....	37
1.2 NÚMEROS NATURALES.....	39
1.3 NÚMEROS ENTEROS.....	47
1.4 NÚMEROS RACIONALES.....	55
1.4.1 Introducción.....	55
1.4.2 Números racionales.....	57
1.5 USO DE LA CALCULADORA.....	63
1.6 OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES. ORDEN EN $\mathbb{Q}$ .....	72
1.6.1 Operaciones con los números racionales.....	73
• Propiedades de las operaciones con números racionales.....	74
1.6.2 Orden en $\mathbb{Q}$ .....	75
1.7 ECUACIONES CON SOLUCIONES RACIONALES.....	82
1.8 APLICACIONES.....	83
<b>NOTA HISTÓRICA ACERCA DEL ORIGEN Y SIGNIFICADO DE LAS PALABRAS</b> <b>ALGORITMO Y ÁLGEBRA.....</b>	<b>93</b>
<b>UNIDAD 2</b>	
<b>NÚMEROS REALES.....</b>	<b>97</b>
2.1 PRESENTACIÓN.....	99
CUADRO RESUMEN DE REPASO.....	100
2.2 EXPRESIONES DECIMALES PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS	
NUMEROS IRRACIONALES Y NÚMEROS REALES.....	101
2.2.1 Expresiones decimales periódicas y no periódicas.....	101
• Expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas.....	103
• Longitud de segmentos.....	105
2.2.2 Números irracionales y números reales.....	106
• Números irracionales.....	106
• Números reales.....	107
2.3 OPERACIONES CON LOS NÚMEROS REALES.....	110

	Pág.
2.4 APROXIMACIONES DECIMALES DE NÚMEROS REALES.....	112
NOTA HISTÓRICA ACERCA DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES:	
EL NÚMERO $\sqrt{2}$ , EL NÚMERO $\pi$ Y EL NÚMERO "e".....	119
<b>UNIDAD 3</b>	
<b>ORDEN EN R. DESIGUALDADES, ECUACIONES E INECUACIONES.....</b>	<b>123</b>
3.1 PRESENTACIÓN.....	125
3.2 ORDEN EN R. DESIGUALDADES.....	125
• Orden en R.....	125
• Propiedades del orden (" $<$ " y " $>$ ") en R.....	129
3.3 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL. DISTANCIA EN R.....	133
3.4 LOS INTERVALOS DE R.....	139
3.5 APLICACIONES.....	145
3.5.1 Errores que se cometen en las aproximaciones decimales de números reales.....	145
3.5.2 Inecuaciones de primer y segundo grado. Inecuaciones con valor absoluto.....	150
AUTOEVALUACIÓN I.....	161
RESUMEN.....	166
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.....	169
GLOSARIO DE TÉRMINOS.....	184
BIBLIOGRAFÍA.....	188
ÍNDICE ANALÍTICO.....	189

*Nunca es demasiado temprano para el conocimiento de las ciencias exactas, porque ellas nos enseñan el análisis en todo, pasando de lo conocido a lo desconocido, y por ese medio aprendemos, a pensar y a raciocinar con lógica.*

*Simón Bolívar en "Método que se debe seguir en la educación de mi sobrino Fernando Bolívar"*

# MÓDULO I

## *Conjuntos Numéricos*

### **Objetivo**



*El estudiante efectuará ejercicios y resolverá problemas aplicando los conceptos relacionados con los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales.*





## PRESENTACIÓN

Al iniciar el estudio del curso de **MATEMÁTICA I (175, 176, 177)** mediante este módulo, referente a los conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales, pretendemos revisar varios contenidos programáticos acerca de esos conjuntos, los cuales forman parte de los programas instruccionales de las etapas previas a la Educación Superior. En consecuencia, ello establece el enlace necesario entre esas etapas previas y la Educación Superior, lo que se hace imprescindible en una educación fundamentada en la metodología de **EDUCACIÓN A DISTANCIA**, donde el estudiante, si bien cuenta con la asesoría de los *Asesores de Matemática* de los Centros Locales de la Universidad Nacional Abierta, aborda el estudio como un hecho individual, avanzando a su propio ritmo, de acuerdo con su disponibilidad de tiempo y la comprensión de los temas estudiados.

No se pretende formular una teoría formal y abstracta en relación con los conjuntos numéricos, ni axiomáticamente ni mediante las denominadas clases de equivalencia. Sin embargo, queremos precisar ciertas nociones relacionadas con los distintos tipos de números que trabajaremos, efectuar cálculos prácticos y hacer algunas aplicaciones.

A los fines de realizar cálculos numéricos, se introduce el uso de las **CALCULADORAS CIENTÍFICAS**, lo cual nos permite efectuar los cálculos con números racionales y reales mediante los números decimales que los aproximan. Es conveniente que cada estudiante se provea de una tal calculadora, que le será útil en sus estudios posteriores y hasta en su ejercicio profesional.

Los contenidos que estudiaremos se refieren a aspectos de la aritmética (números naturales y enteros) y al inicio del denominado "CÁLCULO" (Cálculo infinitesimal) con los números decimales, que nos permiten aproximar los números racionales y los números reales. La base del CÁLCULO es el estudio de los números reales cuya fundamentación se logró, de diversas maneras, solamente en el siglo pasado. Una de las formas de estudiar los números reales es mediante sus aproximaciones con números decimales, y son estos números decimales los que aparecen como resultados de los cálculos numéricos en las pantallas de las calculadoras científicas.

Además de las operaciones que se definen en esos conjuntos de números, también estudiaremos las desigualdades y la solución de inecuaciones, incluyendo las inecuaciones donde interviene el valor absoluto.

Con frecuencia utilizaremos nociones que has estudiado anteriormente. Algunas las recordaremos, bien sea dentro del texto o con notas marginales o de pie de página. Otras serán utilizadas libremente sin recordatorios previos.

Iniciamos el módulo con un *test de entrada* en relación con ciertos contenidos estudiados en etapas previas a la Educación Superior. En algunos temas colocamos un *cuadro resumen de repaso* que nos permite revisar conceptos y enunciados de proposiciones, necesarios para la comprensión de varios aspectos desarrollados.

La primera unidad del módulo se refiere a los conjuntos de números naturales, enteros y racionales y, formando parte de estos últimos, los números decimales. En esta unidad introducimos algunas nociones y notaciones concernientes a la teoría de conjuntos, aquellas que necesitamos para el desarrollo de la unidad, las cuales se completarán en las unidades siguientes.

También introducimos el uso de las calculadoras científicas que se utilizarán en todos los módulos que siguen y, considerando que estas redondean y truncan números, explicaremos qué significa *redondear* y *truncar*, así como la denominada *notación científica* para expresar los números decimales.

La existencia de los números naturales se aceptará sin mayor discusión. En base a estos números se procederá a establecer los conjuntos de números enteros y de números racionales sobre bases intuitivas y geométricas, destacando las operaciones que se efectúan con esos números, sus propiedades y la importancia que éstas tienen. Igualmente estudiaremos las relaciones de orden en esos conjuntos.

La **segunda unidad** concierne a los números reales, los cuales se introducirán mediante aproximaciones decimales, sin que ello implique un tratamiento exhaustivo de dichos números. Es importante que el estudiante comprenda los cálculos aproximados con números reales, para los cuales haremos uso extensivo de las calculadoras.

Por último, la **tercera unidad** se refiere a la relación de orden en el conjunto de los números reales. Aquí estudiaremos los intervalos y las inecuaciones, incluyendo algunas inecuaciones sencillas donde interviene el valor absoluto. También estudiaremos brevemente lo relativo con los errores que se cometen en las aproximaciones decimales de los números reales.

## TEST DE ENTRADA

**TIEMPO ESTIMADO:** 2,5 horas

**INSTRUCCIONES:** En este test encuentras preguntas de los tipos "selección simple", "completar" y "desarrollo". Las preguntas propuestas conciernen a temas que has estudiado anteriormente, los cuales son requisito para el desarrollo de varios tópicos de este módulo. Intenta responder todas las preguntas, sin buscar las soluciones que se dan al finalizar los enunciados de las mismas.

### PARTE I:

En los siguientes enunciados, selecciona la alternativa correcta y da alguna explicación breve que justifique la respuesta, en aquellas donde sea posible hacerlo.

1. Las raíces de la ecuación  $2x^2+3x-2=0$ , son:  
a) Las fracciones  $1/2$  y  $-1/2$ .  
b) Los números enteros  $-2$  y  $1/2$ .  
c) Los números racionales  $-2$  y  $1/2$ .  
d) Los números enteros  $0$  y  $-2$ .
2. Los siguientes tres números  $1/3$ ,  $1,41$  y  $-1/2$  se ordenan en forma creciente como escribimos a continuación:  
a)  $1/3 < 1,41 < -1/2$ .  
b)  $-1/2 < 1,41 < 1/3$ .  
c)  $1/3 < -1/2 < 1,41$ .  
d)  $-1/2 < 1/3 < 1,41$ .
3. Si  $x$  es un número real *cualquiera*, se verifica que:  
a)  $\sqrt{x^2} = x$ .  
b)  $\sqrt{x^2} = |x|$ .  
c)  $\sqrt{x^3} = 3x$ .  
d)  $\sqrt{x^2} = -x$ .
4. El mínimo común denominador de las fracciones  $89/116$  y  $401/522$ , es:  
a) 1044.  
b) 522.  
c) 29.  
d) 116.
5. Dos números racionales  $b/a$  y  $c/d$  son iguales si y sólo si:  
a)  $ab = cd$ .  
b)  $bc = ad$ .  
c)  $bd = ac$ .  
d)  $dc = ba$ .

6. El número  $200 \times 10^3 + 18 \times 10^2$  es igual a:
- $2218 \times 10^3$ .
  - $2218 \times 10^2$ .
  - $2208 \times 10^2$ .
  - $22018 \times 10$ .
7. Si  $n$  es cualquier entero positivo múltiplo de 2, entonces se verifica que:
- $n^2$  es un número impar.
  - $n^2$  es múltiplo de 4.
  - $n^2$  es un entero negativo.
  - $n^2$  es igual a una potencia de 2.
8. Las soluciones reales de la ecuación  $3x^2 + (2x-1)^2 = -2$ , son:
- 3 y  $-2/3$ .
  - 0 y  $-2$ .
  - $1/2$  y 3.
  - No existen tales soluciones reales.

## PARTE II:

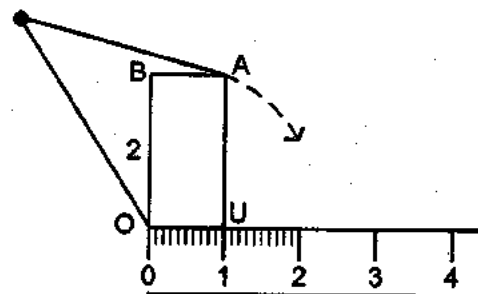
1. El cuadrado siguiente debes completarlo a fin de que se transforme en un cuadrado mágico de productos, esto es, que el producto de los números en cada una de las horizontales, en cada una de las verticales y en cada una de las dos diagonales, produzca el mismo resultado:

$10^{-2}$	$10^{-7}$	
	$10^{-5}$	
	$10^{-3}$	

2. Denotamos por  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $D$  y  $R$ , respectivamente, el conjunto de los números naturales, de los números enteros, de los números decimales, de los números racionales y de los números reales. Completa la siguiente tabla, colocando **si** o **no** en el cuadrado respectivo, según que los números dados en la columna de la izquierda pertenezcan o no pertenezcan a los conjuntos dados en la fila superior:

	N	Z	D	Q	R
-1					
1,27					
1/3					
$\sqrt{5}$					
0					
4/5					
$\pi$					
1/6					

3. Denotamos con la letra **A** el conjunto de los números enteros pares. Expresa, en palabras y en símbolos, al menos seis propiedades que satisfacen los elementos de ese conjunto. Justifica cada una de esas propiedades. \*
4. La siguiente figura muestra una parte de una regla graduada y un rectángulo dibujado encima del segmento OU, con las dimensiones allí indicadas:



Si con un compás, apoyado en los puntos O y A, haces un giro en el sentido indicado por la flecha (sentido horario), ¿entre cuáles dos divisiones de la regla graduada cae la punta A del compás, aproximadamente, después de efectuar el giro?

## SOLUCIÓN AL TEST DE ENTRADA

Las respuestas que damos a continuación se justificarán y, en algunas de ellas se hará más de un razonamiento que permita justificar la respuesta dada.

### PARTE I

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. La respuesta correcta es la (c). Los números  $-2$  y  $1/2$  se pueden obtener sin más que resolver la ecuación de segundo grado propuesta en el enunciado, mediante la muy conocida fórmula de la ecuación de segundo grado. Observa que  $1/2$  no es un número entero y por eso no es cierta la alternativa (b). La alternativa (d) se puede descartar, ya que  $0$  no es raíz de la ecuación como es fácil de comprobar al sustituir por ese valor en la ecuación. ■

2. La respuesta correcta es la (d). Esto puede comprobarse fácilmente escribiendo todos los números en la notación decimal, es decir, utilizando la coma decimal:  $1/3 = 0,33333\dots$ ;  $-1/2 = -0,50$ , verificándose que  $-0,50 < 0,333\dots < 1,41$ . Observa que fácilmente descartamos las alternativas (a) y (c) puesto que un número negativo no puede ser mayor que un número positivo. ■

3. La respuesta correcta es la (b). Debes prestar atención a este resultado  $\sqrt{x^2} = |x|$ , puesto que con frecuencia se comete el error de escribir (a), lo cual puedes comprobar que no es cierto con un ejemplo, como el siguiente:

$$\sqrt{(-3)^2} \neq -3 \quad (\text{elegimos } x = -3). \quad \blacksquare$$

4. La respuesta correcta es (a). Esto se obtiene sin más que hacer el cálculo utilizando la descomposición de  $116$  y  $522$  en producto de factores primos:  $116 = 2^2 \cdot 29$  y  $522 = 2 \cdot 3^2 \cdot 29$ , y sabiendo que el mínimo común denominador de las fracciones dadas es, por definición, el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores, es decir,  $\text{mcm}(116, 522) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 29$  (el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente). ■

5. La respuesta correcta es la (c), ya que esta es la definición de la igualdad de dos números racionales:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \quad \text{si y solamente si} \quad bd = ac. \quad \blacksquare$$

6. La respuesta correcta es la (b), lo cual se obtiene efectuando la suma como sigue:

$$\begin{aligned} 220 \times 10^3 + 18 \times 10^2 &= (220 \times 10 + 18) 10^2 && \text{Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.} \\ &= (2200 + 18) 10^2 && \text{Efectuando el producto.} \\ &= 2218 \times 10^2 && \text{Efectuando la suma. } \blacksquare \end{aligned}$$

7. La respuesta correcta es la (b), por lo siguiente: como  $n$  es un entero positivo múltiplo de  $2$ , es decir,  $n$  es un entero par, entonces  $n$  es de la forma  $n=2m$  donde  $m$  es entero positivo; por lo tanto,  $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$ , es decir  $n^2$  es múltiplo de  $4$ . Observa bien que la respuesta (c) se descarta inmediatamente ya que el cuadrado de cualquier número (natural, entero, racional o real) siempre es mayor o igual que cero y, en consecuencia, no puede ser negativo. ■

(d) es verdad únicamente cuando  $n=2^h$ .

8. La respuesta correcta es la (d): esa ecuación no tiene raíces reales. Esto se debe a lo que se comentó en la respuesta anterior: los números  $x^2$  y  $(2x-1)^2$  son mayores o iguales que cero y por lo tanto al multiplicar el primero de ellos por  $3$  y luego sumarlos, da un número mayor o igual que cero cualquiera que sea el número real  $x$ ; por lo tanto, esa suma no puede dar el número negativo  $-2$ . ■

## PARTE II:

- Como  $10^{-7} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} = 10^{-16}$ , entonces todos los productos que consideramos en ese cuadrado mágico deben dar dicho número  $10^{-16}$ . Comenzando por el cuadrado superior-derecho, y colocando en este  $10^{-6}$ , se completa fácilmente el cuadrado, resultando

$10^{-2}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$
$10^{-9}$	$10^{-5}$	$10^{-1}$
$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-8}$

- Observa que  $1/3 = 0,33333...$  y  $1/6 = 0,166666...$  son números racionales pero no son números decimales, ya que sus expresiones con la coma decimal tienen infinitas cifras (son cifras que se repiten periódicamente).  $\pi$  denota el "número  $\pi$ ", que se sabe es un número *no racional* y  $\pi = 3,141592...$  con infinitas cifras que *no se repiten periódicamente*. La tabla se completa de la siguiente forma:

	N	Z	D	Q	R
-1	no	si	si	si	si
1,27	no	no	si	si	si
1/3	no	no	no	si	si
$\sqrt{5}$	no	no	no	no	si
0	si	si	si	si	si
4/5	no	no	si	si	si
$\pi$	no	no	no	no	si
1/6	no	no	no	si	si

$$1/3 = 0,333...$$

$$4/5 = 0,8$$

$$2/6 = 0,1666... \blacksquare$$

- Sabemos que A es el conjunto cuyos elementos son los números  $\dots -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots$  donde los puntos suspensivos indican que ese conjunto tiene infinitos elementos. En la notación de conjunto mediante llaves, se tiene

$$A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

La expresión de cualquier elemento  $n$  perteneciente al conjunto A es  $n=2m$  donde  $m$  es un entero cualquiera ( $n$  es múltiplo entero de 2). Con esta forma de escribir los elementos de A, se deducen las siguientes propiedades:

## EN PALABRAS

## EN SÍMBOLOS (TAQUIGRAFÍA PARA ESCRIBIR MATEMÁTICA)

$\in$  símbolo de pertenencia

- El número cero pertenece a  $A$ . También así: el elemento neutro para la adición de enteros pertenece a  $A$ .

$$\bullet \quad 0 \in A.$$

$\Rightarrow$  símbolo de implicación. Sustituye a: Si..., entonces.

- Si  $n$  y  $p$  pertenecen a  $A$ , entonces  $n+p$  pertenece a  $A$ .  
También así: la suma de dos números pares es un número par.

$$\bullet \quad n \in A, p \in A \Rightarrow n+p \in A.$$

- Si  $n$  y  $p$  pertenecen a  $A$ , entonces  $np$  pertenece a  $A$ .  
*¿De cuál otra forma lo puedes enunciar?*

$$\bullet \quad n \in A, p \in A \Rightarrow n \cdot p \in A.$$

- Si  $n$  pertenece a  $A$ , entonces  $-n$  pertenece a  $A$ .  
*¿De cuál otra forma lo puedes enunciar?*

$$\bullet \quad n \in A \Rightarrow -n \in A.$$

- Si  $n$  y  $p$  pertenecen a  $A$ , entonces  $n-p$  pertenece a  $A$ .  
*Enúncialo de otra forma equivalente.*

$$\bullet \quad n \in A, p \in A \Rightarrow n-p \in A.$$

$\mathbb{Z}^+$  indica el conjunto de los enteros positivos.

- Si  $n$  pertenece a  $A$ , entonces  $n^2$  pertenece a  $A$ .  
*Enúncialo de otra forma equivalente.*

$$\bullet \quad n \in A \Rightarrow n^2 \in A.$$

- Si  $n$  pertenece a  $A$ , entonces  $n^p$  pertenece a  $A$  cualquiera que sea el entero positivo  $p$ .  
*Enúncialo de otra forma equivalente.*

$$\bullet \quad n \in A, p \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n^p \in A.$$

$\notin$  símbolo de no pertenencia.

- Si  $n$  no pertenece a  $A$ , entonces existe un entero  $k$  tal que  $n = 2k+1$ .  
Esto es lo mismo que decir que si  $n$  es un entero impar, entonces existe un entero  $k$  tal que  $n = 2k+1$ .

$$\bullet \quad n \notin A \Rightarrow \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n=2k+1.$$

La justificación de esas afirmaciones se hace expresando los enteros pares en la forma  $2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Por ejemplo, la segunda de ellas se demuestra como sigue:

**Demostración de la propiedad:**  $n \in A, p \in A \Rightarrow n+p \in A$ .

Como  $n \in A$  y  $p \in A$ , entonces existen números enteros  $m$  y  $k$  tales que  $n=2m$ ,  $p=2k$ . Por lo tanto,  $n+p = 2m+2k = 2(m+k) = 2h$  donde  $h = m+k \in \mathbb{Z}$  (*¿por qué?*) y en consecuencia  $n+p \in A$ .

*Demuestra las otras propiedades.* ■

4. Por el muy conocido *teorema de Pitágoras*, se verifica que

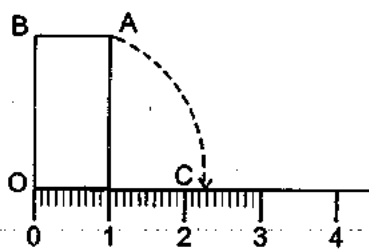
$$\overline{OA}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{UA}^2$$

$$\overline{OA}^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \text{ luego}$$



$$\overline{OA} = \sqrt{5} = 2,236...$$

y por lo tanto la punta del compás cae entre la 2ª y la 3ª división que hay después del punto C, como muestra el dibujo,



Con este test quisimos medir cuánto conoces, y puedes aplicar, de determinados temas que estudiaste en la Escuela Básica, especialmente en su tercera etapa. Gran parte de los contenidos que fueron necesarios para responder el test de entrada se estudiarán en el Módulo I, ampliando ciertos aspectos, considerando otros y precisando los conceptos, además de aplicarlos a diversas situaciones. Progresivamente introduciremos la simbología matemática que permite escribir de manera condensada diversas proposiciones y cálculos; es como una *taquígrafía especial para escribir matemática*.

En el cuadro resumen de repaso de la Unidad 1 revisarás algunos conceptos, como son los conceptos de: número primo, mínimo común múltiplo y máximo común divisor. ■



# UNIDAD 1

## *Números Naturales, Enteros y Racionales*

### Objetivos



- ☐ *Hacer cálculos directos con números racionales utilizando una calculadora.*
- ☐ *Efectuar ejercicios que involucren las operaciones definidas en los números naturales y enteros.*
- ☐ *Resolver problemas relacionados con los números racionales.*



*Dios creó los números naturales;  
el resto es obra del hombre.  
(L. Kronecker, matemático alemán,  
1823-1891.)*

## 1.1 PRESENTACIÓN

Esta unidad, la primera de la asignatura **MATEMÁTICA I (100)**, la dedicamos al estudio de los conjuntos de números naturales, enteros y racionales.

Aceptamos, sin mayor discusión, la existencia de los números naturales, de las operaciones de adición y multiplicación y de sus propiedades.

A partir del conjunto de los números naturales, denotado por **N**, se procederá a construir, sin definiciones formales, los conjuntos de números enteros y racionales sobre bases intuitivas y geométricas, motivando la necesidad de ampliar los conjuntos numéricos (números enteros que comprenden a los números naturales y números racionales que comprenden a los números enteros), destacando sus propiedades y la importancia que éstas tienen. Es usual denotar los conjuntos de los números enteros y de los números racionales, respectivamente, mediante las letras **Z** y **Q**.

Se introducirá la utilización de las calculadoras científicas de "bolsillo", que son muy ventajosas al hacer cálculos con expresiones decimales y en lograr bastante ahorro de tiempo al efectuar operaciones con diversos números, como tendremos oportunidad de constatarlo en el transcurso del desarrollo del texto.

En esta unidad tendrás ocasión de revisar diversos contenidos programáticos acerca de los conjuntos **N**, **Z** y **Q**, estudiados en la Escuela Básica. Precisarás varios conceptos, propiedades e interpretaciones geométricas, lo cual te sirve como enlace entre los estudios previos y el inicio de la etapa universitaria. Con frecuencia utilizaremos nociones que has estudiado en las etapas previas a la Educación Superior y en algunas ocasiones las recordaremos con las notas que se colocan en el margen derecho o izquierdo.

---

Antes de iniciar el estudio de esta unidad de aprendizaje es necesario revisar algunas nociones que has estudiado anteriormente, las cuales presentamos en un cuadro resumen, pues serán utilizadas frecuentemente en lo que sigue.

### CUADRO RESUMEN DE REPASO

#### ★ NÚMEROS PRIMOS

Si  $m$  y  $n$  son dos números enteros y  $n \neq 0$ , se dice que  $n$  **divide** a  $m$  si  $m$  se puede escribir en la forma  $m=kn$  para algún entero  $k$ . Si  $n$  divide a  $m$ , también se dice que  $n$  es un **factor** o un **divisor** de  $m$  y que  $m$  es un **múltiplo** de  $n$ . Por ejemplo:  $36=12 \cdot 3$ , luego 3 es un divisor de 36 y por lo tanto 36 es un múltiplo de 3.

Un **número primo**  $p$  es un número entero mayor o igual que 2 que solamente es divisible por 1 y por el mismo  $p$ . Es decir, si  $p=n \cdot m$ , con  $n$  y  $m$  enteros positivos, entonces  $n$  y  $m$  solamente pueden tomar los valores 1 y  $p$ .

*continúa...*

Se sabe que existen infinitos números primos, de los cuales damos a continuación una lista de los diez primeros:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

*Escribe los otros seis números primos que continúan en esa lista.*

También es conocido que todo número entero mayor que 1 se puede descomponer como un producto de números primos. *Por ejemplo:*

$$122 = 2 \cdot 61$$

$$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^2$$

$$81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

$$385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

y decimos, por ejemplo, que 5, 7 y 11 son los factores primos o los divisores primos de 385.

#### ★ MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Dados dos enteros no nulos  $n$  y  $m$ , su **máximo común divisor** es el mayor entero positivo que divide a ambos números y se denota mediante  $MCD(n,m)$ .

*Por ejemplo*,  $MCD(30,50) = 10$ . Observemos que 10 divide a 30 y a 50 y no hay ningún otro entero mayor que 10 que divida a 30 y a 50:

los divisores positivos de 30 son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30.

los divisores positivos de 50 son: 1, 2, 5, 10, 25 y 50,

y podemos observar que el mayor divisor común es diez.

Si escribimos los números 30 y 50 descompuestos en sus factores primos, se tiene:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

y  $MCD(30,50) = 2 \cdot 5 = 10$  (**producto de los factores primos comunes con su menor exponente**). ■

#### ★ MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Dados dos enteros no nulos  $n$  y  $m$ , su **mínimo común múltiplo** es el menor entero positivo que es múltiplo de ambos números y se denota mediante  $mcm(n,m)$ .

*Por ejemplo*,  $mcm(30,50) = 150$ . Observemos que 150 es múltiplo de 30 y de 50 y no hay ningún otro entero positivo menor que 150 que sea múltiplo de 30 y 50:

los múltiplos positivos de 30 son: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210,...

los múltiplos positivos de 50 son: 50, 100, 150, 200, 250, 300,...

y podemos observar que el menor de esos múltiplos comunes es 150.

Si escribimos los números 30 y 50 descompuestos en sus factores primos, tenemos

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

y  $mcm(30,50) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$  (**producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente**). ■

## 1.2 NÚMEROS NATURALES

La actividad de contar se remonta a los orígenes de los humanos y es tan natural como otras actividades mentales: pensar y hablar. Existen evidencias que nos sugieren de que los hombres primitivos poseían cierta idea del concepto de número [1]; por lo tanto, la génesis del contar, que hoy corresponde a la sucesión de los números naturales, es tan remota como el propio origen del hombre.

Para contar los árboles de un bosque, las piedras, los pasos que da una persona al caminar a partir de un determinado sitio,... tenemos que hacer uso de los **NÚMEROS NATURALES**. Inicialmente se contaba con los dedos de las manos y de los pies, con piedrecillas y de otras formas. Por ejemplo, los indios peruanos (los *incas*), utilizaban *cuerdecillas con nudos* denominadas *quipos peruanos*.

La palabra "*dígito*" proviene del latín *dígitus*, que significa *dedo* y la palabra "*cálculo*" también proviene del latín *calculus (calculi)*, palabra con la cual los antiguos romanos designaban a las *piedrecillas* que utilizaban para contar.

Los números naturales 0, 1, 2, 3, 4,... aparecen como un recurso para contar. Denotamos por  $N$  al conjunto formado por todos los números naturales y escribimos entre llaves sus elementos, es decir

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

indicando con los puntos suspensivos que ese conjunto no es finito (tiene infinitos elementos).

Para indicar que un número  $n$  pertenece al conjunto  $N$ , es decir que  $n$  es un número natural, lo hacemos con el símbolo  $\in$ , escribiendo  $n \in N$  y leyendo " $n$  pertenece a  $N$ ". Por lo tanto,

$$0 \in N, 1 \in N, 2 \in N, 3 \in N, \dots$$

Si un elemento  $z$  no pertenece al conjunto  $N$ , se denota con el símbolo  $\notin$ , escribiendo  $z \notin N$  y leyendo " $z$  no pertenece a  $N$ ". Por ejemplo,  $-4 \notin N$ .

Recordemos, en relación con el conjunto de los números naturales, lo siguiente:

- \* Al efectuar el conteo, establecemos implícitamente un *ordenamiento* entre los elementos de  $N$ , esto es, dados dos números naturales distintos  $n$  y  $m$ , se puede decir si " $n$  es menor que  $m$ " o " $n$  es mayor que  $m$ ", denotándolo, respectivamente, por  $n < m$  o  $n > m$ . Así, tenemos:

$$0 < 1, 1 < 2, 2 < 3, \dots, 4 < 5, \dots$$

$$1 > 0, 2 > 1, 3 > 2, \dots, 5 > 4, \dots$$

En consecuencia, se escriben en forma abreviada todas esas desigualdades juntas

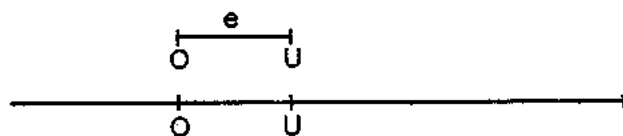
$$0 < 1 < 2 < 3 < \dots < n < \dots$$

- \* Se puede representar el conjunto  $N$  en una recta de la manera siguiente: se elige en la recta un punto de referencia indicado con la letra  $O$ , una unidad de medida que será la longitud del segmento " $e$ " de extremo izquierdo  $O$  y extremo derecho  $U$  y el sentido positivo hacia la derecha (en la figura se indica con una flecha),

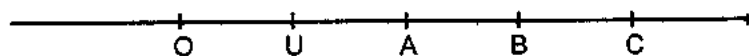
Las notaciones  $\{ \}$ ,  $\in$  y  $\notin$ , a los fines de indicar, respectivamente, los elementos de un conjunto, la pertenencia y la no pertenencia de un elemento a un conjunto, son notaciones generales.

[1] En la Historia de la Matemática, escrita por Carl Boyer, se alude al descubrimiento de un hueso en Checoslovaquia (país actualmente extendido en dos estados: República Checa y Eslovaquia) sobre el cual hay marcado una sucesión de 55 incisiones, colocadas en dos series de grupos de cinco. Ese hueso data, aproximadamente, de 30000 años.

$\overline{OU}$  indica longitud del segmento  $OU$ .

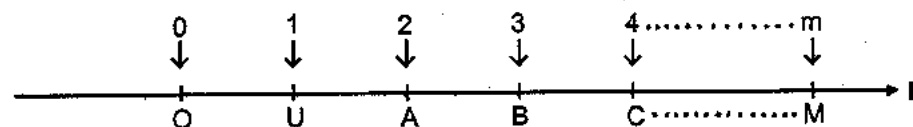


Luego, con un compás o una regla graduada, se toma la medida del segmento  $OU$  y se marcan sobre la recta y hacia la derecha distintos puntos  $A, B, C, \dots$  llevando de manera sucesiva la misma longitud  $\overline{OU}$ . A estos puntos  $A, B, C, \dots$  le hacemos corresponder, respectivamente, los números naturales  $2, 3, 4, \dots$



Al punto  $O$  le asociamos el número  $0$  (cero) y al punto  $U$  el número  $1$  (uno).  $O$  es el punto origen y  $U$  el punto unidad.

De esta forma obtenemos una representación gráfica de los números naturales,



\* En el conjunto  $N$  están definidas dos operaciones básicas: la **adición** y la **multiplicación**. Estas operaciones tienen algunas propiedades, las cuales mencionaremos a continuación:

Denotando con los símbolos  $+$  y  $\cdot$  las operaciones de adición y multiplicación, se verifican las siguientes propiedades cualesquiera que sean  $a, b, c \in N$ .

$a, b, c \in N$ , es una forma abreviada de escribir  $a \in N$ ,  $b \in N$  y  $c \in N$ .

$a \cdot b$  también se denota  $a \times b$  o  $ab$ .

ADICIÓN	MULTIPLICACIÓN
♣ $a + b \in N$	❖ $a \cdot b \in N$
<b>Conmutatividad</b>	
♣ $a + b = b + a$	❖ $a \cdot b = b \cdot a$
<b>Asociatividad</b>	
♣ $(a + b) + c = a + (b + c)$	❖ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
<b>Elemento neutro</b>	
♣ El número cero es tal que: $a + 0 = 0 + a = a$	❖ El número 1 es tal que: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
	<b>Distributividad de la multiplicación respecto de la adición:</b>
	❖ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



### ¿La adición es distributiva respecto de la multiplicación?

Esas son *propiedades básicas* de la adición y multiplicación de números naturales, puesto que a partir de ellas se pueden demostrar otras y establecer fórmulas, algunas de las cuales te son familiares.

Por ejemplo, he aquí varias propiedades que pueden demostrarse a partir de las anteriores:

- ▲ Si  $a, b \in \mathbf{N}$  y  $a \cdot b = 0$ , entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .
- ▲ Si  $a, b, c \in \mathbf{N}$ ,  $a \neq 0$  y  $a \cdot b = a \cdot c$ , entonces  $b = c$ .
- ▲ Si  $a, b, c \in \mathbf{N}$ , entonces  $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ .

Enuncia otras propiedades.

También podemos demostrar diversas fórmulas y hacer cálculos con números naturales aprovechando las propiedades antes mencionadas u otras. Por ejemplo, demostremos que

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2,$$

cualesquiera que sean  $m, n \in \mathbf{N}$ .

▲ Para demostrar este resultado hacemos lo siguiente

$  \begin{aligned}  (m+n)^2 &= (m+n)(m+n) \\  &= m(m+n) + n(m+n) \\  &= (m^2 + mn) + (nm + n^2) \\  &= (m^2 + mn) + (mn + n^2) \\  &= m^2 + 2mn + n^2  \end{aligned}  $	<p>por definición de "elevar al cuadrado"</p> <p>por la distributividad</p> <p>por la distributividad y "elevar al cuadrado"</p> <p>por la conmutatividad</p> <p>por la asociatividad</p>
---	---

luego,

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2.$$

Resuelve este mismo ejemplo utilizando, en el segundo paso anterior, la propiedad distributiva en la forma  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ , la cual debes demostrar previamente. ■

Esas propiedades o reglas de cálculo para la adición y multiplicación con números naturales, las aplicaremos constantemente sin necesidad de advertir cuáles de ellas estamos utilizando. Por ejemplo, la propiedad asociativa de la adición, nos permite escribir la suma  $a+b+c$  de tres números naturales sin necesidad de utilizar paréntesis. Lo mismo es válido para más de tres números e igualmente para la multiplicación de números naturales. A partir de las operaciones "+" y "·", se pueden introducir nuevos conceptos concernientes a los números naturales.

### Ejemplos 1.2.1

1. La relación de **orden** < (**menor que**) se puede precisar de la forma siguiente:  
Si  $a, b \in \mathbf{N}$ , se dice que "a es menor que b" ( $a < b$ ) si existe un número natural c tal que  $b = a + c$ .  
Así,  $5 < 9$  pues  $9 = 5 + 4$ . ■
2. Si  $a, n \in \mathbf{N}$ ,  $a > 1$  y  $n > 1$ , podemos definir la **potencia**  $a^n$  como sigue:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

$a = 5$ ,  $b = 9$ ,  
 $c = 4$ .

donde  $n$  indica  $n$  factores.

Esa definición es posible puesto que la multiplicación es asociativa y por lo tanto no importa como asociemos los factores en  $a^n$ . a, siempre obtenemos el mismo resultado. Si  $n = 0$ , se conviene que  $a^0 = 1$ . ■

- + En el conjunto de los números naturales podemos tomar uno o más elementos y formar con ellos nuevos conjuntos. Por ejemplo:

$N^*$  es el conjunto de los números naturales sin el número cero.

$P$  es el conjunto de los números naturales que son pares.

$J$  es el conjunto de los números naturales que son impares.

$P_1$  es el conjunto de los números primos.

Podemos expresar estos conjuntos, que tienen infinitos elementos, como sigue:

$$N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$J = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$P_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}.$$

Estos conjuntos están incluidos o son parte del conjunto  $N$ , entonces podemos decir que  $N^*$ ,  $P$ ,  $J$  y  $P_1$  son subconjuntos de  $N$ . Usamos el signo  $\subset$  para indicar "es subconjunto de" (o "está incluido en") y entonces escribimos.

$$N^* \subset N, P \subset N, J \subset N, P_1 \subset N;$$

y también  $\{3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \subset J$  (todo número primo  $p > 2$  es impar).

Observemos que al escribir  $P \subset N$  ( $P$  es un subconjunto de  $N$  o está contenido o incluido en  $N$ ), significa que

"todo elemento de  $P$  es un elemento de  $N$ ",  
o bien

"cualquiera que sea  $n \in P$ , se verifica que  $n \in N$ ",  
o bien

"para todo  $n \in P$ , se tiene  $n \in N$ ".

Todas esas expresiones dicen lo mismo (son equivalentes), y otras más que se pueden dar. ■

- + Los conjuntos finitos con muchos elementos y también algunos conjuntos infinitos se pueden escribir utilizando la notación de llaves y con el "etcétera" reemplazado por los puntos suspensivos..., siempre que esto no se preste a confusión. Por ejemplo, ya escribimos  $N$  y sus elementos con los puntos suspensivos  $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Si queremos escribir el conjunto de los números naturales menores o iguales que 2000, utilizamos lo siguiente  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 2000\}$ . Igualmente para conjuntos infinitos, como los de los ejemplos anteriores  $N^*$ ,  $P$  (pares),  $J$  (impares) y  $P_1$  (primos).

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos y  $A \subset B$ , también se dice que  $B$  contiene a  $A$ , y se denota  $B \supset A$ .

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales ( $A = B$ ) si y sólo si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

El uso de los puntos suspensivos no siempre es satisfactorio. Por esto se acostumbra utilizar otra notación  $\{ : \}$  donde los **elementos del conjunto se describen mediante propiedades**, colocando antes de los dos puntos la variable ( $n, a, x$ , entre otras) y después de los dos puntos las propiedades.

Por ejemplo,

$N^* = \{n: n \in N \text{ y } n > 0\}$  o también  $N^* = \{n \in N: n > 0\}$ , que se lee " $N^*$  es el conjunto de todas las  $n$  tales que  $n$  pertenece a  $N$  y  $n$  es mayor que cero", o con la otra notación se lee " $N^*$  es el conjunto de todas las  $n$  en  $N$  tales que  $n$  es mayor que cero".

Análogamente:

$P = \{n: n \in N \text{ y } n \text{ es par}\}$  o también  $P = \{n \in N: n \text{ es par}\}$ ,

$J = \{n: n \in N \text{ y } n \text{ es impar}\}$  o también  $J = \{n \in N: n \text{ es impar}\}$ ,

$P_1 = \{n: n \in N \text{ y } n \text{ es primo}\}$  o también  $P_1 = \{n \in N: n \text{ es primo}\}$ .

Observemos que un número par se caracteriza por ser divisible por 2 o lo que es lo mismo, es un múltiplo de 2. Luego, un número par  $n \in N$  es de la forma  $n=2h$  donde  $h \in N$ . Si hacemos variar  $h$  en el conjunto  $N$ , obtenemos todos los números pares:

$$0=2 \cdot 0, \quad 2=2 \cdot 1, \quad 4=2 \cdot 2, \quad 6=2 \cdot 3, \dots, \quad 30=2 \cdot 15, \dots$$

y por lo tanto, se puede denotar el conjunto  $P$  de los números naturales que son pares de esta otra forma

$$P = \{n \in N: n=2h, h \in N\},$$

que se lee " $P$  es el conjunto de todas las  $n$  en  $N$  tales que  $n$  es igual a  $2h$  donde  $h$  pertenece a  $N$ ".

Análogamente, se tiene el conjunto  $J$  de los números naturales que son impares, definido mediante

$$J = \{n \in N: n=2h+1, h \in N\}. \quad \text{¿Cómo se lee esta notación?} \blacksquare$$

Si  $A = \{a, b, c, d\}$  entonces no importa "el orden con que escribimos los elementos del conjunto  $A$ ", esto es:

$$A = \{b, d, a, c\} \\ = \{d, a, c, b\} \\ = \dots$$

¿Cómo se leen estas notaciones?

## Ejemplos 1.2.2

1. Resuelve las operaciones indicadas a continuación, aplicando las propiedades respectivas:

- $3(a + ba + c) + a(b + 2)$ .
- $(m + n + p)^2$ .

▲ a)  $3(a + ba + c) + a(b + 2) = (3a + 3ba + 3c) + (ab + a2)$  por la distributividad

$$= (3a + 2a) + (3ba + ba) + 3c \quad \text{por la conmutatividad y asociatividad}$$

$$= 5a + 4ba + 3c. \quad \blacksquare$$

Si  $n > h$ ,  
entonces  
 $n - h \in \mathbb{N}$ .

Recuerda que  
 $(a+b)(a-b) =$   
 $a^2 - b^2$ .

$$\begin{aligned} b) (m+n+p)^2 &= (m+n+p)(m+n+p) \text{ por definición de potencia} \\ &= ((m+n)+p)((m+n)+p) \text{ por la asociatividad.} \\ &= (m+n)(m+n) + p(m+n) + p(m+n) + p^2 \text{ por la distributividad, conmutatividad,} \\ &\quad \text{asociatividad y la potencia "al cua-} \\ &\quad \text{drado".} \\ &= (m+n)^2 + 2p(m+n) + p^2 \\ &= m^2 + 2mn + n^2 + 2pm + 2pn + p^2. \quad (*) \text{ por la distributividad y la fórmula antes} \\ &\quad \text{encontrada para } (m+n)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Prueba que el producto de tres números naturales consecutivos, sumado al número intermedio es siempre un cubo.

▲ Sean  $n-1, n$  y  $n+1$  los números naturales.

Se tiene

$$\begin{aligned} (n-1)n(n+1) + n &= n(n-1)(n+1) + n \\ &= n(n^2 - 1) + n \\ &= n^3 - n + n \\ &= n^3, \end{aligned}$$

luego

$$(n-1)n(n+1) = n^3. \blacksquare$$

3. Sean  $P$  el conjunto de los números pares y  $J$  el conjunto de los números impares. Prueba que:

a) Si  $a \in P$  y  $b \in J$ , entonces  $a+b \in J$ .

b) Si  $a \in P$  y  $b \in J$ , entonces  $a \cdot b \in P$ .

▲ a) Si  $a \in P$  y  $b \in J$ , entonces existen números  $k, h \in \mathbb{N}$ , tales que

$$\begin{aligned} a &= 2k \\ b &= 2h + 1, \end{aligned}$$

de aquí se deduce

$$a+b = 2(k+h) + 1 = 2m + 1,$$

donde  $m = k+h \in \mathbb{N}$ .

En consecuencia  $a+b$  es impar, es decir  $a+b \in J$ .

b) Como en la parte (a), se tiene

$$\begin{aligned} a &= 2k \\ b &= 2h + 1, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2k(2h+1) \\ &= 4kh + 2k \\ &= 2(2kh + k) = 2m, \end{aligned}$$

donde  $m = 2kh+k \in \mathbb{N}$ ,

por lo tanto  $a \cdot b$  es par. Luego,  $a \cdot b \in P$ .  $\blacksquare$

## Ejercicios 1.2

1. Determina tres números naturales, sabiendo que el doble de uno de ellos es igual a la suma de los otros dos y que la suma de los tres números es igual a su producto.

▲ Denotemos los tres números naturales por  $a, b, c$ .

Se tiene que:

$$\begin{aligned} 2b &= a + c \quad (1) \\ a + b + c &= a \cdot b \cdot c \quad (2) \end{aligned}$$

Debemos resolver ese sistema de ecuaciones (1) y (2).

Sumando  $b$  a ambos miembros de la igualdad (1), nos queda

$$\begin{aligned} 2b + b &= a + c + b \\ 3b &= a + b + c \quad (3) \end{aligned}$$

de (2) y (3) obtenemos que

$$3b = a + b + c = a \cdot b \cdot c.$$

y por lo tanto

$$3 = a \cdot c \quad \text{siempre que } b \neq 0.$$

Como 3 es primo y los factores  $a, c \in \mathbb{N}$ , entonces los valores de  $a$  y  $c$  son 1 y 3. Por lo tanto

$$a = 1, c = 3 \quad \text{o bien} \quad a = 3, c = 1.$$

Sustituyendo estos valores en (1), se tiene

$$2b = 1 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Por lo tanto los números son 1, 2 y 3.

Si  $b = 0$ , las ecuaciones (1) y (2), resultan ser  $a + c = 0$ , y la única solución de esta ecuación en  $\mathbb{N}$  es  $a = c = 0$ . En este caso, los tres números son iguales a cero (es una *solución trivial*).

### Observación:

En el enunciado del ejercicio se dice que "el doble de uno de ellos es igual a la suma de los otros dos".

Luego, en lugar de la ecuación (1) se pudo plantear cualquiera de las dos siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 2a &= b + c \quad (4) \\ 2c &= a + b \quad (5) \end{aligned}$$

Cualquiera de estas ecuaciones, junto con la (2), conduce a que los tres números son 1, 2 y 3. (Hacerlo). ■

2. Dos móviles describen órbitas circulares en el mismo sentido antihorario. El móvil del círculo de menor radio da una vuelta completa en 30 minutos y el otro en 70 minutos. Si en un determinado instante esos móviles ocupan, respectivamente, las posiciones A y B, ¿en cuántos minutos, a partir de ese instante, estarán de nuevo en la misma posición A y B?

- ▲ Al cabo de  $n$  vueltas, el móvil indicado por A ha tardado  $30n$  minutos. Al cabo de  $m$  vueltas, el móvil indicado por B ha tardado  $70m$  minutos. Se encontrarán de nuevo en la misma posición cuando algún múltiplo  $30n$  de 30 sea igual a un múltiplo  $70m$  de 70; luego, el menor múltiplo común es  $\text{mcm}(30,70) = 210$  (minutos). ■



## Ejercicios Propuestos 1.2

$\leq$  indica  
"menor o  
igual".

- Enumere (en orden "creciente") los siete primeros elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
  - $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es divisible por } 5\}$
  - $\{n \in \mathbb{N} : n + 2 \text{ es primo}\}$
  - $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 5\}$
  - $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 17\}$
  - $\{n : n + 3 = 8\}$

- Dados los siguientes conjuntos A, B, C y D

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar y } n < 100\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo y } n < 70\},$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 4h + 3, n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq h \leq 10\},$$

$$D = \{23, 35, 43\}.$$

Establece la relación "ser subconjunto de" entre dichos conjuntos.

- Dados los siguientes conjuntos, defínelos mediante una o más propiedades y escríbelos con la notación  $\{ : \}$  antes utilizada, donde suponemos que los puntos suspensivos indican los elementos que siguen con igual ley de formación:

$$A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\},$$

$$B = \{6, 11, 16, 21, \dots, 106\},$$

$$C = \{0, 3, 9, 27, 81, \dots\}.$$

- ¿Cómo debe ser el último dígito de un número natural  $n$  para que  $n$  sea par o para que  $n$  sea impar?
- Determina los elementos del conjunto A, sabiendo que tiene 10 elementos y que los puntos suspensivos indican los elementos que siguen con igual ley de formación:

$$A = \{1, 10, 101, 1010, 10101, \dots\}$$

- Si  $m, n, h \in \mathbb{N}$ , determina una fórmula para la potencia  $(m + n)^4$ , explicando las propiedades que aplicas al efectuar los productos, y hacer las sumas respectivas.
- Resuelve las operaciones indicadas a continuación con números naturales, explicando las propiedades que utilizas:
  - $3(a + ba + c) + a(b + 2)$
  - $(4 + 7)(9 + 8 + 6)$
  - $(m + n + p)^2$
  - $(m + n)^3$
- Sea J el conjunto de los números naturales impares. Expresa, en palabras y en símbolos, al menos cinco propiedades relacionadas con los elementos de J. Justifica cada una de esas propiedades.

9. ¿Cuántos números naturales menores que 100 tienen la suma de sus cifras igual a 7?
10. ¿Cuántos números de dos cifras significativas (dos dígitos no nulos), aumenta en 9 unidades cuando se invierte el orden de sus cifras.
11. Prueba que si  $p$  es un número primo entonces  $p^2 + p$  es par mayor que dos.
12. La suma de tres números impares consecutivos es 27. ¿Cuál es el menor de esos números?
13. El costo  $C$  de envío de un paquete postal de  $P$  kilogramos para cierta ciudad es de Bs. 100 por el primer kilogramo y de Bs. 30 por cada kilogramo adicional. ¿Cuál es la fórmula que da el costo?

\*

### 1.3 Números Enteros

Hemos estudiado los números naturales en los dos temas anteriores. Ahora pretendemos ampliar el conjunto  $N$  con otros elementos que llamaremos *números enteros negativos*, denominación que nos sugiere, por oposición, llamar a los elementos de  $N$  distintos de cero (los elementos de  $N^*$ ) como *números enteros positivos*. El nuevo conjunto que obtendremos lo denominaremos conjunto de los *números enteros*.

El "sentido opuesto" existe en muchas situaciones prácticas como las que presentaremos en los ejemplos siguientes, en los cuales se manifiesta de manera evidente que no son suficientes los números naturales para resolver las situaciones que nos encontraremos.

Bajar-subir,  
retroceder-  
avanzar,  
debe-haber,  
crecer-  
decrecer,...  
son  
ejemplos de  
"sentidos  
opuestos".

#### Ejemplos 1.3.1

1. La temperatura puede, a partir de un origen (cero), bajar de cero grados centígrados. Si la temperatura en una ciudad es de cinco grados bajo cero, entonces para que la temperatura en la ciudad sea de 15 grados, la temperatura no subirá 10 grados sino 20 grados.
2. Cuando se indica la altura a que se encuentra situada una ciudad, por ejemplo Caracas, expresamos 920 metros y agregamos "sobre el nivel del mar". También la altitud del pico Bolívar (en el estado Mérida) se expresa mediante 5007 metros "sobre el nivel del mar". En oposición, algunas aldeas a orillas del Mar Mediterráneo se encuentra a 396 metros "bajo el nivel del mar". En situación análoga citamos que la fosa de las Marianas tiene profundidad de 10916 metros; la Hoya de Puerto Rico 8648 metros, la Hoya de Java 7125 metros. Todas estas profundidades están "bajo el nivel del mar".
3. Si disponemos de Bs. 2.000 y necesitamos gastar Bs. 5.000, entonces adquiriríamos una deuda de Bs. 3.000. El número 3.000 por sí sólo no define la situación, debemos agregar que es una "deuda". En cambio, si únicamente gastamos Bs. 1.000 lo que tendríamos es Bs. 1.000 de haber.
4. Sustraer el número natural  $s$  al número natural  $m$  y lo expresamos  $m-s$ , es calcular el número natural  $d$  tal que  $s+d=m$ . En otras palabras, se trata de resolver en  $N$  la ecuación  $x+s=m$ , donde  $m$  y  $s$  son números naturales dados, la cual no tiene solución en  $N$  cuando  $s>m$ .



## ¿Cómo podemos representar numéricamente las situaciones de los cuatro ejemplos anteriores?

Los débitos o créditos de una cuenta, las temperaturas superiores o inferiores a cero grados centígrados, las alturas sobre o bajo el nivel del mar, la diferencia  $m-s$  de dos números naturales cualesquiera, nos dan la idea de referirnos a cantidades o magnitudes opuestas, es decir, magnitudes a las que podemos indicar como si estuvieran en lados opuestos a un punto de referencia dado.

Con los números naturales no podemos describir magnitudes opuestas y además tenemos la imposibilidad de resolver ecuaciones de la forma  $x+s=m$  con  $s>m$ , entonces nos vemos en la necesidad de ampliar el conjunto  $N$  de los números naturales. Este conjunto más amplio se denomina "*conjunto de los números enteros*".

El conjunto de los números enteros está formado por los números  $0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, -4, \dots$ . Si denotamos con  $Z$  el conjunto de los números enteros, entonces

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

indicando con los puntos suspensivos que el conjunto no es finito.

Los números  $-1, -2, -3, -4, \dots$  los llamaremos números enteros **negativos**, y los números  $1, 2, 3, \dots$  los llamaremos números enteros **positivos**. Estos últimos números también se pueden escribir precedidos del signo  $+$ , indicando su denominación (número entero positivo); es decir, podemos escribir  $+1, +2, +3, \dots$ . Es costumbre omitir el signo  $+$  de un número entero y escribir, por ejemplo,  $2$  en lugar de  $+2$ ; pero, en ningún caso podemos hacerlo con un número entero negativo.<sup>[1]</sup>

Con los números enteros podemos indicar cantidades que se encuentran por encima o por debajo de alguna referencia o bien a la izquierda o a la derecha de un punto origen de referencia; al punto origen le asociamos el número cero. Luego, podemos expresar en los ejemplos 1.3.1 lo siguiente:

En el ejemplo 1:  $-5^\circ$  indica la temperatura de cinco grados bajo cero y  $+15^\circ$  o bien  $15^\circ$  indica la temperatura de quince grados.

En el ejemplo 2:  $+920m, +5007m, -396m, -10916m, -8648m$  y  $-7125m$  indican, respectivamente, las distintas altitudes sobre el nivel del mar (las que tienen signo  $+$ ) y las profundidades (esto es, bajo el nivel del mar, las que tienen signo  $-$ ), en el orden que allí figuran.

En el ejemplo 3:  $-3000$  Bs. indica la situación de deuda (débito) y  $+1000$  Bs la de haber (crédito).

En relación con el ejemplo 4, daremos su solución más adelante. ■

En el conjunto de los números enteros  $Z$  podemos señalar algunos subconjuntos de interés, como son:

$$Z^- = \{-1, -2, -3, \dots\} \text{ (los enteros negativos)}$$

$$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ (los enteros positivos)}$$

$$Z^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ (los enteros sin el cero)}$$

Se usa la letra  $Z$  ya que es la inicial de la palabra alemana "Zahlen", la cual significa "números".

Si  $a \in Z^+$  (resp.  $a \in Z^-$ ), también se escribe  $a > 0$  (resp.  $a < 0$ ).

[1] La introducción de la simbología algebraica, como la conocemos en nuestros días, representa una historia de varios siglos. Fue solamente en 1489 cuando el matemático alemán Johann Widman, en su libro de Aritmética Comercial, introdujo los signos  $+$  y  $-$ . En ese libro esos símbolos se utilizaban para indicar "exceso y defecto en las medidas de almacén"; posteriormente se usaron como los símbolos habituales para la adición y la sustracción. Anteriormente se utilizaban la  $p$  (plus) y la  $m$  (minus) para la suma y la resta.



Podemos observar lo siguiente:

- † El conjunto  $\mathbb{Z}^*$  es el conjunto de los números enteros sin el cero.
- † El conjunto  $\mathbb{Z}^+$  es el que anteriormente denotamos por  $\mathbb{N}^*$ , es decir  $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^*$ .

La relación entre los conjuntos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  es la siguiente

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ (N es subconjunto de Z)}$$

*Escribe otros subconjuntos de  $\mathbb{Z}$  que consideres interesantes debido a la frecuencia con que los utilizas o que hayamos utilizado en las páginas anteriores.*

- † Los elementos de  $\mathbb{Z}^-$  (enteros negativos) los llamaremos **opuestos** a los elementos de  $\mathbb{Z}^+$  (enteros positivos) y viceversa. Por ejemplo, los números -7 y 7, -10 y 10, 25 y -25, son ejemplos de pares de elementos opuestos.

En general: si  $a$  es un número entero negativo ( $a \in \mathbb{Z}^-$ ), existe otro número  $b \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $a = -b$ .

$$a = -10, b = 10.$$

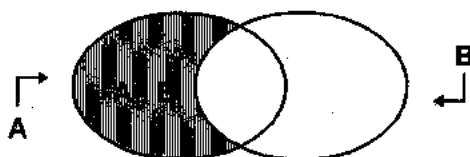
Observa que el conjunto  $\mathbb{N}$  no es más que el conjunto  $\mathbb{Z}$  al cual le "quitamos" los elementos del conjunto  $\mathbb{Z}^-$ . Esta palabra "quitar", tiene un significado matemático que se expresa mediante la **diferencia de dos conjuntos**:

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos, la **diferencia**  $A - B$  es el conjunto formado por los elementos de  $A$  que no están en  $B$ , es decir

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

$A - B$  también se denota  $A \setminus B$ , en algunos textos.

lo cual se ilustra en el diagrama siguiente



Con esa notación, se tiene:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\},$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z} - \{\dots, -3, -2, -1, 0\},$$

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

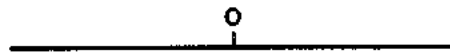
$$\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z} - \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

$$P = \mathbb{N} - J = \mathbb{N} - \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, \text{ donde } P \text{ (resp. } J) \text{ es el conjunto de los números naturales pares (resp. números naturales impares).}$$

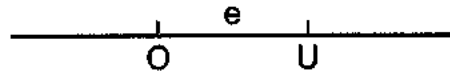
*Da otros ejemplos de diferencia de dos conjuntos utilizando números enteros. ■*

Análogamente así como los números naturales se representaron gráficamente en una recta, también podemos hacer una **representación gráfica de los números enteros**.

Para representar los enteros sobre una recta procedemos de la siguiente manera: se elige en una recta un punto de referencia indicado con la letra  $O$ , denominado **punto origen**,



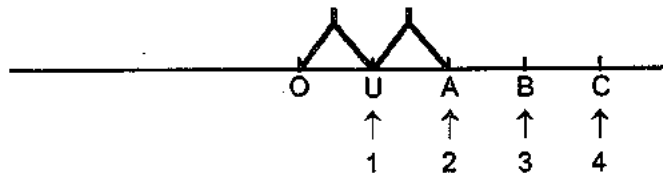
Una unidad de medida que será la longitud del segmento  $e$  de extremo izquierdo  $O$  y extremo derecho otro punto  $U$  de la recta, denominada **punto unidad**.



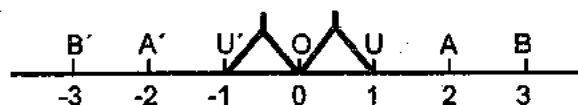
y el sentido positivo hacia la derecha del punto de referencia y el sentido negativo hacia la izquierda del punto de referencia.

Luego, con un compás o una regla graduada se toma la medida del segmento  $e$  y se marcan sucesivamente sobre la recta y hacia la derecha distintos puntos  $U, A, B, C, \dots$ , a los cuales les corresponden los números enteros positivos  $1, 2, 3, 4, \dots$  respectivamente.

Al punto  $O$  le asociamos el número  $0$  (cero).



Luego, con la misma medida que fue tomada con el compás o con la regla graduada, se marcan sucesivamente sobre la recta y hacia la izquierda del punto de referencia, distintos puntos  $U', A', B', C', \dots$ , a los cuales les corresponden los enteros negativos  $-1, -2, -3, \dots$  respectivamente,



observa que  $U'$  es el *simétrico* de  $U$  respecto de  $O$ . Análogamente  $A'$  en relación con  $A$ ,  $B'$  en relación con  $B, \dots$  ■

## Operaciones en $\mathbb{Z}$

En el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$  están definidas dos operaciones básicas:

**La adición y la multiplicación.** Estas operaciones satisfacen algunas propiedades, las cuales mencionaremos a continuación.

Cualesquiera que sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se verifican las siguientes propiedades:

ADICIÓN	MULTIPLICACIÓN
$a+b \in \mathbb{Z}$	$a.b \in \mathbb{Z}$
<i>Conmutatividad</i>	
$a+b = b+a$	$a.b = b.a$
<i>Asociatividad</i>	
$(a+b) + c = a + (b+c)$	$(a.b) c = a. (b.c)$
<i>Elemento neutro o identidad</i>	
El número cero es tal que $a+0 = 0+a = a$	El número 1 es tal que: $a.1 = 1.a = a$
<i>Distributividad de la multiplicación respecto de la adición</i>	
	$a. (b+c) = a.b + a.c$

Observemos que estas mismas propiedades son satisfechas por las operaciones de adición y multiplicación de números naturales.

Para los números enteros hay otra propiedad, denominada existencia de **elemento opuesto** para la operación de adición:

Cualquiera que sea  $a \in \mathbb{Z}$ , existe  $a' \in \mathbb{Z}$  tal que  $a' + a = a + a' = 0$ . El entero  $a'$  se denomina el **opuesto** de  $a$  y se denota  $-a$ , por lo tanto  $(-a) + a = a + (-a) = 0$ .



Observa que no se establece para la multiplicación una propiedad análoga a la de la existencia de los elementos opuestos en relación con la adición, puesto que **no es cierto que dado cualquier entero  $a$  exista otro entero  $b$  tal que  $a.b = 1$ .**

Solamente es cierto si  $a = 1$ ,  $a = -1$  ¿Por qué?

De manera análoga a lo que se dijo con los números naturales, esas son *propiedades básicas* de la adición y multiplicación de números enteros, puesto que a partir de ellas se pueden demostrar otras propiedades y establecer fórmulas, muchas de las cuales te son conocidas y las utilizaremos en lo que sigue. (*Escribe algunas de ellas, tal como hicimos con los números naturales*).

En  $\mathbb{Z}$  podemos definir una nueva operación, que es la **sustracción o diferencia**.

Llamamos diferencia o resta  $d$  de los números enteros  $m$  (minuendo) y  $s$  (sustraendo) y lo expresamos.

$$d = m-s, \text{ si y sólo si } s + d = m.$$



Como  $d=m-s=m+(-s)$  resulta que la diferencia en  $\mathbb{Z}$  es una suma algebraica es decir, la diferencia es la suma del minuendo y el opuesto del sustraendo.

De esto resulta que toda ecuación de la forma  $b+x=a$ , donde  $a, b$  son números enteros dados, tiene solución en  $\mathbb{Z}$ , la cual es  $x=a+(-b.)=a-b$ .

¿Diga cuáles propiedades, entre las satisfechas para la adición y multiplicación, se verifican o no se verifican para la sustracción de números enteros? ■

Veamos ahora algunas aplicaciones de las propiedades de la adición y multiplicación en el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ .

### Ejemplos 1.3.2

1. En cada una de las expresiones siguientes, se utilizan varias propiedades para afirmar la igualdad. Indique cuáles son estas propiedades y en qué parte se utilizan.

a)  $(z+y)(z-y)=z^2-y^2$

b)  $(z-y)^2=z^2-2zy+y^2$

▲ a)  $(z+y)(z-y) = z(z-y) + y(z-y)$  por la distributividad.  
 $= (z^2-zy) + (zy-y^2)$  por la distributividad..  
 $= (z^2-zy) + (yz-y^2)$  por la conmutatividad.  
 $= z^2 + (-zy+zy) -y^2$  por asociatividad.

luego,

$(z-y)(z-y)=z^2-y^2$  por la propiedad de los elementos opuestos.

b)  $(z-y)^2 = (z-y)(z-y)$  por definición de potencia  
 $= z(z-y) - y(z-y)$  por la distributividad,  
 $= (z^2-zy) + (-yz+y^2)$  por la distributividad,  
 $= (z^2-zy) + (-zy+y^2)$  por la conmutatividad,

luego,

$(z-y)^2 = z^2 - 2zy + y^2$  por la asociatividad y la reducción de términos semejantes. ■

2. Sean  $a, b$  y  $c$  enteros positivos. ¿Cuáles condiciones deben satisfacer  $a, b$  y  $c$  para que la siguiente igualdad se verifique?:

$$(10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc$$

- ▲ Aplicando las propiedades de la multiplicación y adición en ambos miembros de la igualdad, suponiendo que esta sea cierta, se tiene

$$100a^2 + 10ac + 10ab + bc = 100a^2 + 100a + bc$$

y la regla  
 $(-y)(-y)=y^2$

simplificando los términos semejantes nos queda

$$\begin{aligned} 10ac + 10ab &= 100a \\ 10a(c+b) &= 10a \cdot (10). \end{aligned}$$

Como  $a \neq 0$ , entonces, al simplificar por  $10a$  resulta

$$c+b = 10.$$

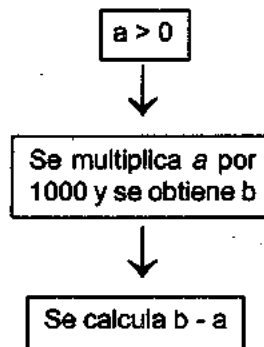
Luego, las condiciones que deben satisfacer  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , es que  $c+b = 10$  y  $a$  es cualquier entero positivo. ■

3. Supongamos que queremos calcular mentalmente el producto de un número entero  $a$  por 999. ¿Qué debemos hacer para efectuar el cálculo rápidamente?

▲ Trabajemos con  $a = 237$  para facilitar la explicación. Se tiene

$$\begin{aligned} 237.999 &= 237.(1000-1) = 237.1000 - 237.1 \\ &= 237000 - 237 = 236763. \end{aligned}$$

Observa que se escribió 999 como  $1000-1$  y luego utilizamos la propiedad distributiva y la del elemento neutro 1. El ejemplo nos indica los pasos siguientes en el ALGORITMO<sup>[\*]</sup> para multiplicar un entero  $a \neq 0$  por 999:



Por ejemplo,

$$503.999 = 503000 - 503 = 502497$$

$$1342.999 = 1342000 - 1342 = 1340658.$$

¿Cuál es el algoritmo si  $a < 0$ ? ■

### Ejercicios propuestos 1.3

1. Sean  $a$ ,  $b$  números enteros. Demuestra que la siguiente igualdad es cierta:

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab.$$

[\*] En relación con la palabra ALGORITMO, ver nota histórica al final de la unidad 1.



- \* 2. Las raíces  $x_1, x_2$  de la ecuación cuadrática  $x^2 + px + 12 = 0$  son tales que  $x_1 - x_2 = 1$ . Halla el coeficiente  $p$ .
3. Completa las siguientes expresiones a los fines de obtener igualdades válidas cualesquiera que sean los números enteros  $a, b$ .
- Reglas de los signos
- $$\begin{cases} (+a) \cdot (+b) = \\ (-a) \cdot (-b) = \\ (+a) \cdot (-b) = \\ (-a) \cdot (+b) = \end{cases}$$
4. Resuelve las siguientes ecuaciones en el conjunto  $\mathbb{Z}$ :
- a)  $2x - (-1-x) = 4 - 6(1-x)$ .  
 b)  $(3x-5) + 2 - 3(3x+1) = -2(5x-7)$ .
5. Calcula los valores de  $x$  para los cuales se verifica la siguiente igualdad:
- $$(4x-3)^2 - (16x^2-9) - (3-4x) = 75.$$
6. Hace 18 años Roberto era tres veces más viejo que su hijo, pero ahora Roberto es dos veces más viejo que su hijo. ¿Cuáles son las edades actuales?
7. ¿Cómo procederías para calcular mentalmente el producto de un número entero por 101? ¿Cuál es el algoritmo que se sigue?
- \* 8. Decide cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos (V) o falsos (F) y justifica tu respuesta:
- a) La adición de números enteros es distributiva respecto de la multiplicación.  
 b) Al multiplicar un entero negativo por sí mismo un número impar de veces, resulta un entero negativo.  
 c) Si  $a'$  es el opuesto de  $a$ , entonces  $a$  es el opuesto de  $a'$ .  
 d) Al elevar un entero positivo a una potencia de exponente un número par  $n > 0$ , resulta un entero positivo.  
 e) La multiplicación de números enteros es distributiva respecto de la sustracción.  
 f)  $A \cdot B = B \cdot A$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos cualesquiera.
9. Dados los conjuntos
- $$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 15\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar y } n < 21\}.$$
- Determina  $A \cdot B$ .
10. Tres números impares consecutivos suman 1011. ¿Cuáles son esos números?
11. Consideremos los conjuntos:
- $$A = \{2n+3 : n \in \mathbb{Z} \text{ y } -1 \leq n \leq 3\}$$
- $$B = \{3n-2 : n \in \mathbb{Z} \text{ y } -1 \leq n < 5\}.$$
- Determina  $B \cdot A$ .
12. Consideremos la ecuación de incógnita  $a$
- $$3 \cdot (2.a) \cdot 4 = (-2) \cdot 36.$$
- Resuelve esa ecuación explicando, en cada paso que haces, las propiedades de la multiplicación que estás utilizando.
13. Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $ab=1$ . ¿Cuánto valen  $a$  y  $b$ ?

## 1.4 NÚMEROS RACIONALES

### 1.4.1 Introducción

Hasta el momento nos hemos referido a los conjuntos de los números naturales ( $\mathbb{N}$ ) y de los números enteros ( $\mathbb{Z}$ ).

Muchas mediciones que se presentan en la práctica, por ejemplo, la estatura de una persona, la temperatura ambiente, el peso de un objeto, la velocidad de un móvil, no siempre pueden expresarse mediante números enteros.

Consideremos el siguiente ejemplo: se quiere repartir 4 kilos de arroz entre 7 personas por igual. Esto es equivalente, en términos matemáticos, a resolver la ecuación  $7x=4$ . ¿Por qué?

Al resolver la ecuación planteada notarás que no existe ningún número entero,  $x$ , tal que  $7x=4$ . Así que tenemos la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros a un conjunto que, además de contener a los enteros, contenga también a los números de la forma  $p/q$ , con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z}^*$ .

Observa que la razón de por qué no podemos resolver la ecuación  $7x=4$  en el conjunto  $\mathbb{Z}$ , se debe a que no siempre es posible *dividir* dos números enteros de tal manera que resulte otro número entero.

Recordemos algunas nociones concernientes a la **división de números enteros**:

Recordemos lo siguiente (ver cuadro resumen de repaso en 1.1):

Dados dos números enteros  $a$  y  $b$ , con  $b \neq 0$ , no siempre existe un entero  $c$  tal que  $b=ac$ .

En el caso de que exista dicho entero  $c$ , se dice que  $a$  es un *divisor* o un *factor* de  $b$  o  $a$  divide a  $b$ , o  $b$  es *múltiplo* de  $a$  o que la división de  $b$  entre  $a$  es **exacta**.

*Por ejemplo:*

- ♣ -10 es múltiplo de 5 puesto que  $-10=5 \cdot (-2)$ , es decir, 5 es un divisor de 10. También -2 es un divisor de -10.
- ♣ 33 es múltiplo de 11 puesto que  $33=11 \cdot 3$ , es decir 11 es un divisor de 33. También 3 es un divisor de 33.
- ♣ 17 no es múltiplo de 2, es decir 2 no es divisor de 17. ■

Aunque la división de dos enteros  $b$  entre  $a$ , denotada por  $b/a$ , no sea exacta, siempre es posible encontrar un *cociente* y un *resto*:

Dados dos números enteros  $b$  y  $a$ , con  $a > 0$ , entonces existen enteros  $q$  y  $r$ , tales que

$$b = q \cdot a + r, \text{ con } 0 \leq r < a.$$

$q$  es el **cociente** y  $r$  el **resto** de la división de  $b$  entre  $a$ .

Observa que si el resto es cero ( $r=0$ ), es decir  $b=qa$ , entonces  $b$  es múltiplo de  $a$ . Por lo tanto,  $b$  **no es múltiplo de  $a$**  cuando el resto  $r$  es positivo.

*Por ejemplo:*

- ♣ Si  $a=4$  y  $b=11$ , se tiene  $11=2 \cdot 4 + 3$ , es decir  $q=2$ ,  $r=3$ .

Otras notaciones son  $\frac{b}{a}$ ,  $b:a$ ,  $b \div a$ .



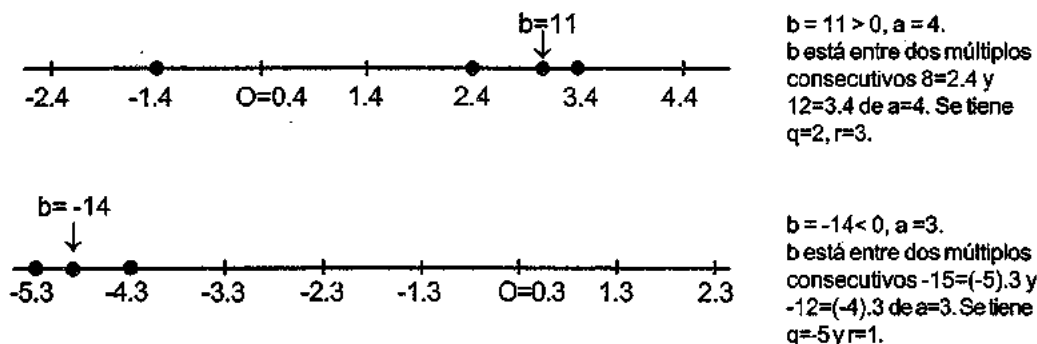
Resto o residuo.

- ♣ Si  $a=3$  y  $b=-14$ , se tiene  $-14=(-5).3+1$ , es decir  $q=-5$  y  $r=1$ .<sup>[\*]</sup>
- ♣ Si  $a=6$  y  $b=30$ , se tiene  $30=5.6$ , es decir  $q=5$  y  $r=0$  (30 es múltiplo de 6).

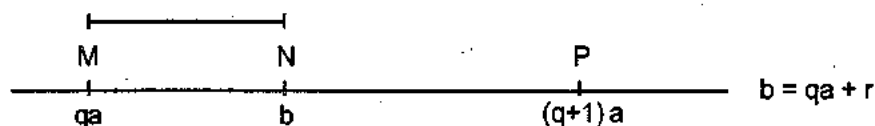
Cuando el resto  $r$  es distinto de 0 y por lo tanto  $r$  es positivo, entonces  $a$  no divide a  $b$  ( $b$  no es múltiplo de  $a$ ). Sin embargo, hacemos la división de  $b$  entre  $a$  como nos lo enseñaron en la Escuela Básica:

$\begin{array}{r} b \overline{) a} \\ r \quad q \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \overline{) 4} \\ 3 \quad 2 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ r \quad q \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \overline{) 4} \overline{) 5} \\ 14 \quad 62 \\ 4 \quad \uparrow \\ \uparrow \quad q \\ r \end{array}$
$b = q.a + r$	$11 = 2.4 + 3$	$314 = 62.5 + 4$
$\uparrow$ $0 \leq r < a$	$\uparrow$ $0 < 3 < 4$	$\uparrow$ $0 < 4 < 5$

Podemos interpretar geométricamente el cociente y el resto como lo ilustran las dos figuras siguientes:



Es decir, al dividir  $b$  entre  $a$  ( $a \neq 0$ ), suponiendo que  $b$  no es múltiplo de  $a$ , si denotamos por  $qa$  el primer múltiplo de  $a$  situado a la izquierda de  $b$  y si  $r$  es la longitud del segmento  $MN$  (ver dibujo), entonces  $q$  y  $r$  son, respectivamente, el cociente y el resto de la división de  $b$  entre  $a$ :



El conjunto de números que definiremos, a los fines de resolver los problemas reseñados en lo anterior, se denomina *conjunto de los números racionales*, y se denota por la letra  $\mathbb{Q}$ .

[\*] ATENCION: Observa que también podemos escribir  $-14=(-4).3+(-2) = 3.3+(-20) = \dots$  y de muchas otras formas siempre utilizando el mismo divisor  $a=3$  (ESCRÍBELO DE OTRAS DOS FORMAS). Sin embargo, esas descomposiciones del número  $-14$  no es a lo que nos referimos al hallar el cociente y el resto de la división de  $-14$  entre 3, puesto que el resto debe ser igual o mayor que cero y menor que el divisor 3. Cuando se impone esa condición sobre  $r$  ( $0 \leq r < a$ ), al dividir un entero  $b$  entre un entero  $a > 0$ , hay una *única* forma de escribir  $b=qa+r$ .



## 1.4.2 Números racionales

Definamos, entonces, a los números racionales.

### Definición 1.1

El conjunto de los números racionales es el conjunto de todos los números que pueden escribirse en la forma  $p/q$  con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z}^+$ .

En forma simbólica

$$\mathbb{Q} = \{p/q: p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z}^+\} \blacklozenge$$

Observa que, con la noción de número racional podemos expresar la división del entero  $b$  entre el entero positivo  $a$  mediante

$$b/a = q + r/a, \quad 0 \leq r < a,$$

donde  $q$  y  $r$  son, respectivamente, el cociente y el resto de la división de  $b$  entre  $a$ . ¿Cómo se obtiene esa expresión?

Además, como todo número entero  $p$  es de la forma  $p/1$  ya que  $p=p \cdot 1$ , esto nos dice que el conjunto de los números enteros está contenido en el de los números racionales, es decir

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Las diversas inclusiones que hemos estudiado entre los conjuntos de números, las escribimos juntas tal como hacemos con las desigualdades, así tenemos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

y otras inclusiones, como

$$\mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \text{ etc.}$$

Escribe otras inclusiones análogas.

### Expresión decimal de un número racional

La representación de un número racional de la forma  $p/q$  se llama *fracción racional*.<sup>[\*]</sup> Este número lo podemos representar de otra forma, la cual se obtiene al dividir el *numerador*  $p$ , entre el *denominador*  $q$ , como explicaremos en lo que sigue.

Cuando tenemos fracciones de la forma

$$3/10, \quad 5473/1000 = 5473/10^3, \quad -86/100 = -86/10^2$$

en todas ellas el denominador es una potencia de 10, es decir, un entero de la forma  $10^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Estas fracciones, con esta característica, se denominan **fracciones decimales**.

### Definición 1.2 (Números decimales)

Las fracciones de la forma  $p/10^n$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , cuyo denominador es una potencia de 10, se llaman **fracciones decimales** o **números decimales**.

Por lo tanto, un número racional  $b/a$  es un número decimal si puede escribirse como una fracción decimal  $p/10^n$ , es decir  $b/a = p/10^n$  para algún  $p \in \mathbb{Z}$  y algún  $n \in \mathbb{N}$ .  $\blacklozenge$

[\*] En la Escuela Básica también se denominan a los números racionales  $p/q$  simplemente con el nombre de *fracciones*. El nombre "racional" proviene de *razón* entre números enteros.

### Ejemplos 1.4.1

Los números racionales  $3/5$  y  $561/80$  son números decimales puesto que las fracciones decimales  $6/10$  y  $70125/10000$  son iguales, respectivamente a dichos números, es decir:

$$3/5 = 3.2 / 5.2 = 6/10 \quad \square$$

$$561/80 = 561.125 / 80.125 = 70125 / 10000 \\ = 70125 / 10^4. \quad \blacksquare$$

Estudiemos algunas nociones relacionados con los números decimales.

1. La razón de por qué la fracción decimal  $p/10^n$  también se denomina número decimal, es consecuencia de como se escribe utilizando la coma decimal (notación decimal), para lo cual damos varios ejemplos a continuación:

$$1 / 10^3 = \overbrace{0,001}^{\text{tres ceros}} \quad \text{cuatro ceros} \quad \text{parte decimal}$$

$$70125 / 10^4 = 70125 \cdot \overbrace{0,0001}^{\text{cuatro ceros}} = \overbrace{7,0125}^{\text{parte entera}}$$

y de una manera general se tiene

$$1 / 10^n = \underbrace{0,000\dots01}_{n \text{ ceros}} \quad p / 10^n = p \underbrace{0,000\dots01}_{n \text{ ceros}}$$

con  $n$  entero positivo.

Consideremos el número decimal positivo  $d = p \cdot \overbrace{0,000\dots01}^{n \text{ ceros}}$  ( $p \in \mathbb{Z}^*$ ). Una vez efectuado ese producto, es un número que se escribe con la coma decimal (es lo que se llama su notación decimal) en la forma

[\*] Al sustituir el número  $6/10$  por  $3/5$ , decimos que se ha simplificado la fracción  $6/10$  y esto consiste en dividir el numerador y el denominador de dicha fracción por el mismo número 2. En este caso, 2 es el máximo común divisor de 6 y 10 y en consecuencia se obtiene una fracción irreducible  $3/5$  (no se puede simplificar más; nótese que el máximo común divisor de 3 y 5 es 1). Recordemos que el máximo común divisor de dos enteros no nulos  $a$  y  $b$ , es el mayor entero positivo que divide a ambos números; se denota  $\text{MCD}(a,b)$  (ver cuadro resumen de repaso en 1.1). Calcula  $\text{MCD}(561,80)$  y  $\text{MCD}(70125, 10000)$  y analiza el caso de la fracción  $70125/10000$ .

$$d = \underbrace{a_1 a_2 \dots a_m}_{\substack{\text{La parte entera} \\ \text{con } m \text{ dígitos}}} , \underbrace{b_1 b_2 \dots b_n}_{\substack{\text{La parte decimal} \\ \text{con } n \text{ dígitos}^{[*]}}}$$

donde las  $m$  cifras  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , que constituyen la *parte entera*, y las  $n$  cifras  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , que constituyen la *parte decimal*, son números naturales comprendidos entre 0 y 9 ( $0 \leq a_i \leq 9, 0 \leq b_i \leq 9$ ).

Si denotamos la parte entera de  $d$  mediante  $E(d)$ , que es un número natural, se verifica que  $d$  está comprendido entre  $E(d)$  y  $E(d) + 1$ , con lo cual queremos decir que

$E(d)$  también se denota mediante  $[d]$ .

$$E(d) \leq d < E(d) + 1 \quad \text{¿Cuándo se verifica que } E(d) = d?$$

Se tiene  $d = E(d), b_1 b_2 \dots b_n$  en la notación decimal de  $d$ .

Por ejemplo:

$$\# \frac{678}{10^5} = 678.0,00001 = \underbrace{0,00678}_{\text{Parte decimal}}$$

Parte entera  
↓

verificándose que  $E(0,00678) = 0$  y  $0 < 0,00678 < 1$ .

$$\# \frac{1567809}{10^2} = 1567809.0,01 = \underbrace{15678,09}_{\text{Parte decimal}}$$

Parte entera

verificándose que

$$E(15678,09) = 15678$$

$$15678 < 15678,09 < 15679. \quad \blacksquare$$

Atención: Si  $d = p.\overbrace{0,000\dots 01}^{n \text{ ceros}}$  es *negativo* ( $p \in \mathbb{Z}^-$ ) y escribimos  $d$  en la notación decimal  $d = -a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_n$ , entonces la *parte entera*  $E(d)$  de  $d$  no es  $-a_1 a_2 \dots a_m$  sino  $-a_1 a_2 \dots a_m - 1$ . Esto es, para que la parte entera  $E(d)$  de cualquier número decimal  $d$  (positivo, negativo o nulo), satisfaga la propiedad siguiente

$$E(d) \leq d < E(d) + 1$$

$E(d)$  es el mayor entero que es menor o igual a  $d$ .

$$\begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \\ \hline E(d) = d \in \mathbb{Z} \quad d+1 \end{array}$$

$E(d) = d$  si y sólo si  $d$  es entero.

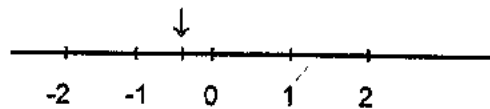
$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline E(d) \quad d \quad E(d) + 1 \end{array}$$

$E(d) < d$  cuando  $d$  no es entero.

[\*] Dígito (proveniente del latín "digitus" que significa dedo) es un número natural que se expresa mediante una sola cifra o guarismo, es decir, es un número natural  $n$  tal que  $0 \leq n \leq 9$ . Los dígitos son, por lo tanto, los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

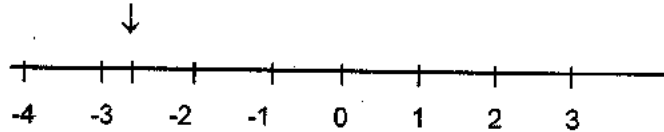
Por ejemplo:

$$\# -3 / 10^2 = -3 \cdot 0,01 = -0,03 \text{ y } E(-0,03) = 0 - 1 = -1$$



verificándose que  $-1 < -0,03 < 0$ .

$$\# -2797 / 10^3 = -2797 \cdot 0,001 = -2,797 \text{ y } E(-2,797) = -2 - 1 = -3$$



verificándose que  $-3 < -2,797 < -2$ . ■

**Observación:**

Cuando tenemos la fracción  $p/10^n$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , utilizamos la denominación *fracción decimal* y, si dicha fracción la escribimos en la forma  $p \cdot 0,000\dots 01 = a_0 a_1 \dots a_m, b_0 b_1 \dots b_n$ , es decir, en notación decimal, utilizamos la denominación de *número decimal*. Son dos nombres distintos para el mismo número racional, usados de conformidad con la notación empleada. ■

2. Si denotamos por  $D$  el conjunto de los números decimales, como todo número entero  $p$  se puede escribir en la forma  $p = p/1 = p/10^0$ , entonces  $p \in D$  y por lo tanto  $\mathbb{Z}$  es un subconjunto de  $D$ . En consecuencia, se verifica que

$$\mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \quad \blacksquare$$

3. Definimos las potencias de 10 con exponente entero negativo como sigue:

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,000\dots 01}_{n \text{ ceros}} \text{ donde } n \in \mathbb{Z}^+$$

Por ejemplo,

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,00001$$

Observemos que los siguientes números pertenecen a  $D$ :

$$29000 = 29 \cdot 10^3$$

$$7,0125 = 70125 \cdot 0,0001 = 70125 \cdot 10^{-4} = 70125/10^4$$

$$-37,89 = -3789 \cdot 0,01 = -3789 \cdot 10^{-2} = -3789/10^2,$$

y de manera general podemos decir que el conjunto  $D$  está formado por todos los números de la forma  $p \cdot 10^q$  donde  $p$  y  $q$  son números enteros cualesquiera, esto es

$$D = \{ p \cdot 10^q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \}.$$

¿Cómo se define, de manera general, la potencia  $a^p$  de un número entero  $a$  o con exponente  $p \in \mathbb{Z}$ ?

Cuando escribimos un número decimal como el producto  $p \cdot 10^q$  de un entero  $p$  por una potencia de diez de exponente entero  $q$ , esto lo podemos hacer de varias maneras y no de una única forma. Por ejemplo,

$$675,12 = 67512 \cdot 10^{-2} = 67,512 \cdot 10 = 6751,2 \cdot 10^{-1} = \dots \text{ (Escríbelo de otras formas). } \blacksquare$$

Para evitar esta ambigüedad en la forma de escribir un número decimal se hace uso de la denominada notación científica, que es muy útil en los cálculos con números muy grandes o muy pequeños y cuando se trabaja con calculadoras y computadoras. Es preciso indicar que los números con que trabaja una calculadora son números decimales, esto es, cualquier número que se introduzca en una calculadora, ésta lo expresa en la pantalla mediante un número decimal (aproximado o no).

### Definición 1.3 (notación científica).

Un número decimal positivo  $d$  se dice que está expresado en **notación científica** si se escribe como el producto de un número decimal  $k$  comprendido entre 1 y 10 por una potencia de 10 con exponente entero, es decir,  $d = k \cdot 10^q$  en donde  $k$  es un número decimal tal que  $1 \leq k < 10$  (o sea,  $k$  tiene un único dígito no nulo antes de la coma decimal) y  $q \in \mathbb{Z}$ . ♦

Por ejemplo:

- $d = 675,12$ , su notación científica es  $d = 6,7512 \times 10^2$ .
- $d = 0,00564$ , su notación científica es  $d = 5,64 \times 10^{-3}$ .
- $d = 23870$  se escribe en notación científica mediante  $d = 2,387 \times 10^4$ .
- $d = 153010000$  se escribe en notación científica mediante  $d = 1,5301 \times 10^8$ .
- Si  $d$  es negativo, entonces escribimos en notación científica  $-d = k \cdot 10^q$  y la notación científica de  $d$  es igual a  $-k \cdot 10^q$ . Por ejemplo, las notaciones científicas de los números  $-0,078$  y  $-2701$  son, respectivamente,  $-7,8 \times 10^{-2}$  y  $-2,701 \times 10^3$ . ■

Consideremos ahora el número racional  $a = \frac{1}{7}$ . Este no es un número decimal, puesto que no existe ninguna fracción decimal  $\frac{p}{10^m}$  tal que  $a = \frac{p}{10^m}$ , como demostraremos en lo que sigue:

Analógicamente, los números racionales  $1/3$ ,  $37/11$ ,  $891/1113$ , tampoco son números decimales, según demostraremos a continuación.

**¿Cómo podemos averiguar si un número racional es o no un número decimal?**

Ejemplo particular	Demostración General
Supongamos que tenemos el número racional $561/80$	Supongamos que tenemos el número racional dado por la fracción irreducible $p/q$ .
Como	Si existe una fracción decimal $a/10^n$ tal que $p/q = a/10^n$ , como $10^n = 2^n \cdot 5^n$ , entonces $p/q = a/2^n \cdot 5^n$ , de donde $2^n \cdot 5^n \cdot p = a \cdot q$ y por lo tanto $q$ divide a $2^n \cdot 5^n \cdot p$ y como $q$ no divide a $p$ , entonces $q$ divide a $2^n \cdot 5^n$ .
$561/80 = 70125/10000$ $= 70125/10^4$ y $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$ ,	$\text{continúa...}$

Esto es MCD  
( $p, q$ ) = 1  
MCD (561; 80) = 1

se tiene

$$2^4 \cdot 5^4 \cdot 561 = 70125 \cdot 80$$

Observe que 80 divide a  $2^4 \cdot 5^4 = 10000$  y tiene como factores primos a 2 y 5 y sólo a estos.

Recíprocamente, la fracción  $561/80$  tiene por denominador

$$80 = 2^4 \cdot 5^1.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} 561/80 &= 561/2^4 \cdot 5 \\ &= 561 \cdot 5^4 \cdot 2/2^4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5^4 \\ &= 561 \cdot 5^4 \cdot 2/2^6 \cdot 5^5 \\ &= 561 \cdot 5^4 \cdot 2/10^5 \\ &= 70125/10^4 \end{aligned}$$

$$\text{luego } \frac{561}{80} = \frac{70125}{10^4} \text{ es una fracción decimal. } \blacksquare$$

Así,  $q$  contiene como factores primos a 2 y 5 y solamente a éstos.

Recíprocamente, si tenemos una fracción  $p/q$  tal que su denominador es de la forma  $q = 2^n \cdot 5^m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} p/q &= p/2^n \cdot 5^m \\ &= p \cdot 2^m \cdot 5^n / 2^n \cdot 2^m \cdot 5^m \cdot 5^n \\ &= p \cdot 2^m \cdot 5^n / 2^{n+m} \cdot 5^{n+m} \\ &= p \cdot 2^m \cdot 5^n / 10^{n+m} \\ &= a/10^h, \end{aligned}$$

donde  $a = p \cdot 2^m \cdot 5^n \in \mathbb{Z}$  y  $h = n + m \in \mathbb{N}$ ,

luego  $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^h}$  es una fracción decimal.  $\blacksquare$

Esto nos lleva a la siguiente conclusión:

**Una fracción irreducible es un número decimal si y solamente si su denominador admite como únicos factores primos a 2 y 5.**

### Ejemplos 1.4.2

$$\begin{aligned} 1. \quad a) \quad 13/400 &= 13/2^4 \cdot 5^2 = 13 \cdot 5^2/2^4 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \\ &= 13 \cdot 25/2^4 \cdot 5^4 = 325/10^4 = 325/10000, \end{aligned}$$

lo que también escribimos en la forma  $0,0325 = 325 \cdot 10^{-4}$

$$b) \quad 551/1250 = 551/2 \cdot 5^4 = 4408/10^4 = 4408/10000, \text{ o también } 551/1250 = 0,4408 = 4408 \cdot 10^{-4}$$

$$c) \quad 71/25 = 71/5^2 = 284/10^2 = 284/100, \text{ o bien } 71/25 = 2,84 = 284 \cdot 10^{-2} \quad \blacksquare$$

2.  $\frac{1}{7}$  no es una fracción decimal (número decimal) pues su denominador 7 no es

divisible por 2 ni por 5. El mismo razonamiento para las fracciones  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{37}{11}$ ,  $\frac{891}{1223}$ .  $\blacksquare$

## Ejercicios propuestos 1.4



1. Escribe, en los casos donde es posible, los siguientes números como números decimales:

143/442, 18/550, 7/625, 111/160.

2. Clasifica los siguientes números en números decimales y números no decimales:

51/672, 11/250, 8/442, 107/500

3. Escribe los siguientes números utilizando la coma decimal.

a)  $1578 \cdot 10^{-3}$ ;

b)  $4179 \cdot 10^5$

c)  $0,023 \cdot 10^{-5}$ ;

d)  $a \cdot 10^{-5}$  donde  $a$  es un entero positivo con 6 dígitos.

4. Escribe los siguientes números en la forma:  $\frac{p}{10^n}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

a) 5,031;

b) 0,00357

c)  $0,021 \cdot 10^{-4}$ ;

d) 3,1415

5. Calcula la parte entera de los números siguientes:

a)  $\frac{15}{10^4}$

b)  $1789 \cdot 10^{-2}$

c)  $\frac{-6}{10^3}$

d)  $-1501 \cdot 0,01$

6. Escribe los siguientes números en la notación científica:

3,1415;

3,141516;

1,41;

1,4192;

0,00356;

0,00012;

40013;

3047200.

7. Demuestre las siguientes propiedades de la división de números enteros, sabiendo que  $n, m, h$  son enteros.

a) Si  $n$  divide a  $m$  y  $n$  divide a  $h$ , entonces  $n$  divide a  $m + h$ .

b) Si  $n$  divide a  $m$  y  $m$  divide a  $h$ , entonces  $n$  divide a  $h$ .

8. Si dividimos un entero  $b \neq 0$  entre 11, ¿Cuáles son los posibles restos que se pueden obtener en esa división?

\*

## 1.5 Uso de la calculadora

En el tema anterior definimos los conjuntos  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{Q}$ , respectivamente, de los números decimales y de los números racionales, verificándose que  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

Consideremos la fracción  $1/4$ , la cual es un número decimal puesto que su denominador solamente admite como factor el número 2. Observemos que

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{25}{10^2} = 0,25 \in \mathbb{D}.$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 20 & 0,25 \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 10 & 0,333 \dots \\ 10 & \\ 1 & \end{array}$$

$\bullet \frac{3678}{990} = 3,7151515... = 3,7\overline{15}$   
 parte entera      parte decimal no periódica.      período

$\bullet \frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$   
 período  
 parte entera



**Observación:** Antes indicamos que si tenemos un número decimal, por ejemplo 0,25, agregar ceros a la derecha no altera el número, es decir:  
 $0,25 = 0,250 = 0,2500 = 0,25000 = 0,250000 \dots$   
 lo cual significa con la notación antes dada que se podría escribir como 0,250, es decir con "período cero".

**En todo lo que sigue, siempre que hablemos de período en una expresión decimal periódica, sobreentendemos que dicho período es distinto de cero.**

En consecuencia, lo anterior nos permite escribir la siguiente conclusión:

**TODO NÚMERO RACIONAL ESTA DADO POR UNA EXPRESIÓN DECIMAL FINITA O INFINITA PERIÓDICA.**

En el caso de un *número decimal*, su expresión decimal es finita.

En el caso de un *número racional que no es un número decimal*, su expresión decimal tiene infinitas cifras no nulas que se repiten a partir de una cierta cifra, esto es, su expresión decimal es infinita periódica.

También se dice expresión decimal ilimitada o simplemente expresión decimal infinita periódica.

### Ejemplos 1.5.1

- Recordemos que dados dos enteros  $b$  y  $a$ , con  $a > 0$ , al dividir  $b$  entre  $a$ , se obtiene un cociente  $q$  y un resto  $r$ , que son números enteros tales que

$$b = q \cdot a + r, \text{ con la condición } 0 \leq r < a.$$

Por lo tanto, el número racional  $b/a$  se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}, \text{ con la condición } 0 \leq \frac{r}{a} < 1.$$

Si el resto  $r$  es nulo, entonces la división de  $b$  entre  $a$  es exacta y por lo tanto  $b/a$  es un entero igual a  $q$ . Si el resto  $r$  no es nulo, entonces  $b/a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ .

Supongamos que  $b$  es positivo y que  $r \neq 0$ , entonces  $q$  es la *parte entera* y  $r/a$  ( $0 < r/a < 1$ ) es la *parte decimal* (al expresarla en la notación decimal), respectivamente, de  $b/a$ .

*Por ejemplo:* si  $b = 3678$  y  $a = 990$ , se tiene  $b = 990 \cdot 3 + 708$ , por lo tanto

$$\frac{3678}{990} = 3 + \frac{708}{990} \quad \text{donde } q = 3 \text{ y } r = 708,$$

luego, al dividir 708 entre 990 obtenemos

$$\frac{708}{990} = 0,711515 \dots = 0,7\overline{115}$$

y por lo tanto  $\frac{3678}{990} = 3 + 0,7\overline{115} = 3,7\overline{115}$ , lo cual también se pudo obtener haciendo

directamente la división de 3678 entre 990. ■

## 2. Los números

$$1/2 = 0,5; \quad 3/5 = 0,6; \quad 45/6 = 15/2 = 7,5$$

$$89/32 = 2,78125; \quad 100/16 = 6,25$$

tienen un número finito de cifras decimales. Son números decimales.

Los números

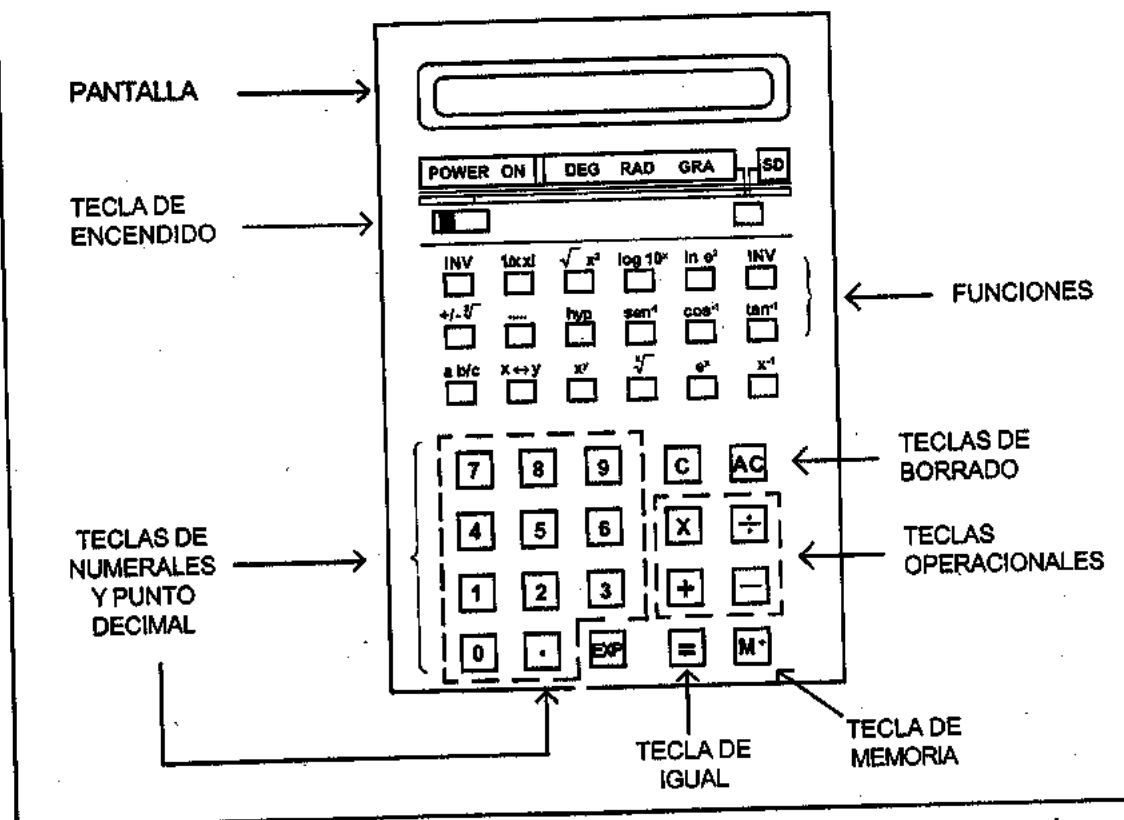
$$723/81 = 8,925925... = 8,\overline{925}$$

$$565/11 = 51,3636... = 51,\overline{36}$$

$$15/792 = 0,0189393... = 0,018\overline{93}$$

tienen un número infinito de cifras decimales. Son números racionales que no son números decimales y se escriben mediante una expresión decimal periódica. ■

Los ejemplos dados anteriormente se pueden obtener manualmente sin mayor dificultad ni pérdida de tiempo; pero, si queremos expresar, por ejemplo, el número racional  $546789/4325$  en su notación decimal, podemos hacer uso de una calculadora científica. Este instrumento de trabajo tiene, por lo general, las siguientes características: [1]



[1] Hay otras calculadoras científicas que varían en la disposición de las teclas de operaciones, funciones y cifras y en la forma de operar. En cada caso, debes consultar el manual de operaciones o con algún compañero de estudio o con el Asesor de Matemática del Centro Local respectivo. Algunas calculadoras están especializadas para determinadas profesiones; así, hay calculadoras para los profesionales del área financiera administrativa, otras para los ingenieros,...

Para expresar el número racional  $546789/4325$  en notación decimal, usando la calculadora, efectuamos los siguientes pasos:

- 1.- Pulsamos la tecla de encendido. Aparece en la pantalla el número cero con un punto.

0.

El punto, llamado punto decimal <sup>[1]</sup>, tiene el mismo significado que la coma (,), es decir, de separar la parte entera de la parte decimal en la notación decimal de un número racional.

- 2.- Pulsamos las teclas donde se indican los números 5, 4, 6, 7, 8 y 9 en forma consecutiva.

546789.

- 3.- Pulsamos la tecla de dividir  $\div$ . No hay cambios en la pantalla

546789.

El símbolo  $\div$  indica la operación de división en muchas calculadoras.

- 4.- Pulsamos las teclas de los números 4, 3, 2 y 5 en forma consecutiva. Aparece en pantalla.

4325.

- 5.- Pulsamos la tecla de igual  $=$  y obtenemos el resultado.

126.4252

Después de estar encendida  $\text{ON}$ , la secuencia de pulsación de las teclas fue

546789  $\div$  4325  $=$ .

En un principio debes familiarizarte con las siguientes teclas

$\text{ON}$   $+$   $\times$   $-$   $+$   $=$   $1/x$

[1] Debemos llamar la ATENCIÓN respecto de la notación con la COMA DECIMAL.

En diversos países, por ejemplo, en los Estados Unidos, en México, entre otros, se utiliza el punto decimal en lugar de la coma decimal y la coma para separar las cifras de mil en mil. Por ejemplo, lo que en Venezuela se escribe mediante 1.987,76 o sin el punto 1987,76, como es la costumbre que se va imponiendo, en otros países se escribe mediante 1,987.76 o simplemente 1987.76. Las calculadoras científicas, que son importadas de otras naciones, al igual que en algunas pantallas de las cajas registradoras y en el teclado de algunos cajeros automáticos de los bancos, se utiliza el punto como "punto decimal" y en consecuencia, un número como 17.98 se lee "diecisiete punto noventa y ocho", lo cual en Venezuela se escribe mediante 17,98.

Hay que efectuar muchos cálculos y aún no se observa la periodicidad, puesto que  $x = 126,4252023121316....$

¿Cuál es la secuencia de pulsación de las teclas?

La multiplicación se hace en forma análoga a la división, solamente que en el paso 3 pulsas la tecla de multiplicar  $\times$ .

y progresivamente aprender el manejo de las otras teclas que tiene la calculadora con la cual trabajas.

La calculadora con la que estamos trabajando sólo nos indica en pantalla números con 8 dígitos como máximo. [1]

Observemos que el resultado obtenido en la calculadora es un número decimal  $126,4252 \in \mathbb{D}$  con siete dígitos, mientras que el número racional  $x = 546789/4325$  no es un número decimal (¿por qué?), luego, su escritura en notación con la coma decimal es la de una expresión decimal infinita y periódica.

Otros ejemplos análogos son los siguientes:

- El número  $5/26$  no es un número decimal (¿por qué?) y por lo tanto su escritura en notación con la coma decimal es la de una expresión decimal infinita y periódica. Sin embargo, si calculamos  $5/26$  usando la calculadora, aparece en pantalla el número

0.1923076

que tiene 8 dígitos y es un número decimal.

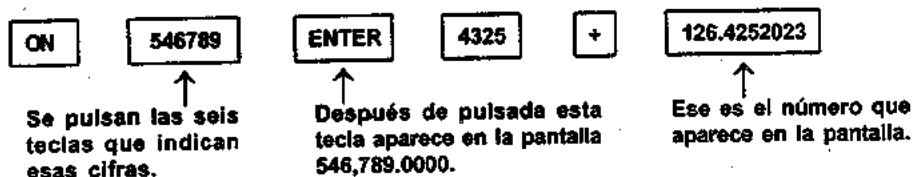
Si hacemos la operación de dividir 5 entre 26 manualmente

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 0} \quad | \quad 26 \\ 240 \quad 0,19230769230 \dots \\ 60 \\ 80 \\ 200 \\ 180 \\ 240 \\ 60 \\ 80 \\ 200 \\ 180 \\ \dots \end{array}$$

esto es  $5/26 = 0,1923076 \dots$

- Supongamos que queremos calcular el producto de los dos siguientes números decimales: 415,367 y 110,01. Si lo hacemos manualmente el resultado es el número decimal 45694,52367 y si lo hacemos utilizando la calculadora aparece en pantalla el número con 8 dígitos 45694.524. ■

[\*] Otras calculadoras trabajan con 12 dígitos y la secuencia de las teclas a pulsar es distinta. Por ejemplo, algunas tienen una tecla ENTER o también  $\downarrow$ . En éstas, lo frecuente es proceder como sigue al hacer la división de 546789 entre 4325.



¿Qué es entonces, lo que ocurre con la calculadora con la cual trabajamos y los resultados que tienen más de ocho dígitos?



La respuesta es: el resultado que aparece en la pantalla de la calculadora es un número aproximado.

Esto conlleva a cometer **errores de cálculo** que se originan al usar estas aproximaciones. Hay dos tipos de aproximaciones y de errores de cálculo; los de truncamiento y los de redondeo.

Cuando se redondea o se trunca un número  $x$  hasta la  $n$ -ésima cifra decimal, esto significa que el número  $x$  se sustituye por otro número que tiene exactamente  $n$  cifras después de la coma decimal las cuales coinciden con las de  $x$  excepto la última cifra.

Debido a la importancia que tienen esas aproximaciones y errores de cálculo puesto que, en definitiva, gran parte de la matemática utilizada por los ingenieros, los economistas y otros profesionales, se reduce en última instancia a obtener resultados numéricos, haremos una explicación sobre los mismos. Los números se redondean o se truncan por que tienen más cifras de las que se pueden manejar o almacenar de manera conveniente, o por comodidades prácticas de aproximación.

Comencemos por el **truncamiento** de números. En este proceso lo que se hace es eliminar las cifras que están demás. Esto lo aclaramos con los ejemplos siguientes.

Si comparamos el resultado dado por la calculadora y el que obtuvimos manualmente al calcular con el número  $5/26$ :

La calculadora  $\rightarrow$

0.1923076

Cálculo manualmente  $\rightarrow 0,19230769230... \approx 0,1923076$



Se trunca o corta a partir de esta cifra.

Observamos que hubo un **corte o truncamiento** del número. En este caso decimos que el **error** cometido es por "**truncamiento**" y que el número  $0,1923076923...$  se trunca a  $0,1923076$  con 7 cifras decimales<sup>[1]</sup>

Así, el número  $5/26$  es aproximadamente igual a  $0,1923076$  y esto lo podemos expresar simbólicamente con el **símbolo de aproximación**  $\approx$ :

$$5/26 \approx 0,1923076$$

Otro ejemplo de truncamiento es con el cálculo de la fracción  $546789/4325$ :

La calculadora  $\rightarrow$

126.4252

Cálculo manualmente  $\rightarrow 126,4252023.....$



Se trunca o corta a partir de esta cifra.

[1] Dado un número decimal  $D = E, b_1 b_2 \dots b_n$ , donde  $E$  es la parte entera y  $b_1 b_2 \dots b_n$  la parte decimal, se dice que el número decimal  $x$  es el "truncamiento" de  $D$  con  $h$  cifras después de la coma decimal, si  $x = E, b_1 b_2 \dots b_h$  ( $h < n$ ), es decir  $D$  y  $x$  tienen la misma parte entera  $E$  y las mismas primeras  $h$  cifras después de la coma decimal:

$$D = E, b_1 b_2 \dots b_h b_{h+1} \dots b_n$$

$$x = E, b_1 b_2 \dots b_h$$



Se trunca o corta a partir de esta cifra

Es frecuente usar el símbolo  $\approx$  para las aproximaciones. Por ejemplo, cuando escribimos  $1/3 = 0,3$  o  $1/3 \approx 0,33$ , en realidad estamos considerando un valor aproximado de  $1/3$ , ya que  $1/3 = 0,33333\ldots = 0,3$  es una expresión decimal con infinitas cifras periódicas.



y se escribe  $546789/4325 \approx 126,4252$  donde este último número es el truncamiento, con cuatro cifras después de la coma decimal, del número  $d = 126,4252023$ .

El símbolo  $\approx$  que significa "aproximadamente iguales", no aparece indicado en el teclado de las calculadoras. En este solamente figura el símbolo  $=$  (igual) que tiene una doble función: en algunos casos el de "igual", como en  $1/4 = 0,25$  y, en otros como el de "aproximado" en los ejemplos anteriores con  $5/26 = 0,1923076$  y  $546789/4325 = 126,4252$ . ■

Si truncamos ese mismo número con cinco cifras después de la coma decimal, se obtiene  $126,42520$  y en este caso ese cero a la derecha tiene una significación especial para el número  $d$ , la cual es el de ser una **cifra significativa** de  $126,4252023$ , puesto que ello nos está indicando un cierto grado de precisión en el cálculo de  $546789/4325$  hasta la quinta cifra después de la coma decimal: es una **cifra exacta** hasta ese grado de aproximación ( $d \approx 126,42520$ ).

Por esa razón, no conviene eliminar ese cero cuando el mismo tiene el sentido de **cifra significativa** del número que estamos aproximando. ¿Qué es esto de las cifras significativas?

#### Definición 1.4 (Cifras Significativas).

Sea  $d$  un número decimal escrito en notación científica  $d = k \times 10^q$ , donde  $k$  es un número decimal tal que  $1 \leq k < 10$  y  $q \in \mathbb{Z}$ . Las cifras del número  $k$  se denominan las cifras significativas de  $d$ . ♦

Una manera práctica de contar las cifras significativas de  $d \in \mathbb{D}$ , es contando las cifras que tiene desde la primera no nula (contando de izquierda a derecha) hasta la última cifra no nula.

Por ejemplo:

- Los números  $3,5679$ ;  $0,013087$ ;  $9,9007$ ;  $98705$ ; tienen cinco cifras significativas, ya que en notación científica esos números se escriben, respectivamente, como sigue:

$$3,5679; \quad 1,3087 \times 10^{-2}; \quad 9,9007; \quad 9,8705 \times 10^4.$$

También con la regla práctica enunciada anteriormente.

- $d = 126,4252023$  tiene diez cifras significativas, ya que  $d = 1,264252023 \times 10^2$ .
- $d = 2980000$  tiene tres cifras significativas, ya que  $d = 2,98 \times 10^6$ . ■

El otro tipo de aproximación y de error que se cometen al hacer aproximaciones de números, son los **de redondeo**.

Cuando en uno de los ejemplos anteriores calculamos el producto  $415,367 \cdot 110,01$ , mediante la calculadora obtuvimos  $45694.524$  y haciéndolo manualmente se obtuvo  $45694,52367$ , donde observamos que las tres últimas cifras decimales (367) se sustituyeron por una única cifra (4), esto es el número  $0,00367$  se sustituyó por  $0,004$ , puesto que

$$\text{La calculadora} \rightarrow \boxed{45694.524} = 45694,52 + 0,004$$

$$\text{Cálculo manualmente} \rightarrow 45694,52367 = 45694,52 + 0,00367$$

↑  
Se redondean estas tres últimas cifras.

En este caso hubo una aproximación del número por **redondeo** y se dice que el error cometido en esa aproximación es un error por redondeo.

Los números se redondean de tal forma de introducir el menor error en los cálculos. <sup>[1]</sup>

### ¿Cómo hacemos para "redondear" un número?

Hay que seguir ciertas reglas que permiten redondear los números:

Para redondear un número hasta  $n$  cifras significativas, se omiten todas las cifras que se encuentran después del  $n$ -ésimo orden. Para esto se siguen las siguientes reglas:

- 1) Si la última cifra que conservamos le sigue 0, 1, 2, 3 ó 4, entonces para el redondeo dejamos todas las cifras, incluyendo la última que conservamos. Tal redondeo se llama **redondeo por defecto**.
- 2) Si la última cifra que conservamos le sigue 9, 8, 7, 6 ó 5, entonces a la última cifra que conservamos se le añade una unidad. Tal redondeo se llama **redondeo por exceso**.

### Ejemplos 1.5.2

1. El redondeo del número 132,372 hasta cuatro cifras significativas da el número 132,4. La última cifra del número redondeado se aumenta en una unidad, puesto que la primera cifra que omitimos (el 7) es mayor que cinco. En este caso el redondeo es por exceso. Observa que  $132,372 \rightarrow 132,4$ . ■
2. El redondeo del número  $d = 182,5$  hasta tres cifras significativas es 183 ( $=1,83 \times 10^2$  con tres cifras significativas) puesto que la primera cifra eliminada es el 5 y por lo tanto la cifra anterior 2 se debe sustituir por 3. También en este caso el redondeo es por exceso ya que  $d < 183$ . ■
3. El redondeo del número  $d = 0,02373$  hasta tres cifras significativas es 0,0237 ( $=2,37 \times 10^{-2}$  con tres cifras significativas) puesto que la primera cifra eliminada es el 3 y por lo tanto la cifra anterior 7 no se altera. El redondeo es por defecto ya que  $0,0237 < d$ . Observa que ese redondeo coincide con el truncamiento 0,0237 con 4 cifras decimales. ■
4. Supongamos que en una calculadora que trabaja con ocho o con doce dígitos, queremos calcular el producto de 5310165 por 10098970. Como el resultado es un entero bastante grande que tiene más de doce dígitos, la calculadora lo expresa en notación científica y en la pantalla aparece lo siguiente

5.362719<sup>13</sup>

o bien

5.362719 13

dependiendo de la calculadora con la cual trabajamos. Esto lo que significa es el número decimal  $5,362719 \times 10^{13}$  escrito en la notación científica después de haber sido redondeado. ■

[1] Cuando se trabaja con muchos números en una calculadora o con un programa en una computadora que necesite realizar muchos cálculos, se van acumulando pequeños errores al aproximar los números y puede resultar en definitiva un error muy grande en los resultados. Es por esto que el proceso de redondeo no puede hacerse de manera totalmente arbitraria, sino con reglas precisas como las dadas. Hay otras reglas, dependiendo de la posición de las cifras, que no estudiaremos en este curso. Esas reglas sirven para "compensar" los pequeños errores al trabajar con los números aproximados y evitar que en el resultado final se cometa un error "muy grande".

## Ejercicios Propuestos 1.5

1. Trunca los siguientes números a 5 y 6 cifras:

1,3247089

0,02345679

32,0700107

2. Redondea los siguientes números hasta tres cifras significativas:

0,0037124

145,0742

286,6

32,1670

3. Redondea con  $n$  cifras significativas el número 0,35678076, para los valores  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

4. a) Si en la calculadora con que estamos trabajando, haces el siguiente producto  $573 \times 1000000$  y aparece en pantalla

5.73<sup>09</sup>

¿Qué significa esa notación en la calculadora?

- b) Repite la parte (a) con el producto

$1000000 \times 1000000 =$

1.<sup>12</sup>

- \* 5. Si efectúas los productos siguientes con la calculadora:

a)  $57410231 \times 1000000$

b)  $0,968 \times 0,0000001$

¿Qué aparecerá en la pantalla? Explica.

6. Completa en los cuadros con los números y símbolos de las teclas que pulsas a los fines de calcular  $21,3 \times 0,02$

Pantalla

	2			3		0			2		
--	---	--	--	---	--	---	--	--	---	--	--

## 1.6 OPERACIONES CON LOS NÚMEROS RACIONALES. ORDEN EN Q

En este tema, nuestro propósito es conocer las operaciones que se hacen con los números racionales y sus propiedades e igualmente cómo ordenar los números racionales, de manera análoga a lo realizado con los números naturales y los números enteros.

Comencemos con las operaciones que se pueden realizar con los números racionales. Estas operaciones son la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, a las que usualmente se les llama "operaciones racionales".



### 1.6.1 Operaciones con los números racionales

Hasta el momento sabemos que en el conjunto de los números naturales, se pueden realizar las operaciones de adición y multiplicación y con los números enteros podemos realizar, además de la adición y la multiplicación, la operación opuesta de la suma de números enteros, como es la sustracción de números enteros.

Definamos ahora estas operaciones con los números racionales

#### Definición 1.5 (operaciones en $\mathbb{Q}$ )

Sean  $a/b$  y  $c/d$  dos números racionales, definimos la suma  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  y el producto  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ , mediante

$$\text{Suma: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\text{Producto: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

También se define la resta  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$  y la división  $\frac{a/b}{c/d}$  ( $c \neq 0$ ), mediante

$$\text{Sustracción: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\text{División: } \frac{a/b}{c/d} = (a/b) \cdot (d/c) = \frac{ad}{bc} \quad \blacklozenge$$



Recordemos que, en la suma y resta de fracciones es aconsejable reducir las fracciones a que tengan un denominador común, preferiblemente el mínimo común denominador.

#### Ejemplos 1.6.1

Consideremos los números racionales

$$793/61 \text{ y } 42/913.$$

Realicemos las operaciones anteriores con esos dos números.

$$\text{Adición: } (793/61) + (42/913) = ((793 \times 913) + (61 \times 42)) / (61 \times 913) \\ \approx 13,046002$$

$$\approx 13,046 \text{ (truncamiento a 3 cifras decimales)}$$

que coincide con el redondeo por defecto con 5 cifras significativas)

$$\text{Multiplicación: } (793/61) \times (42/913) = (793 \times 42) / (61 \times 913) \approx 0,5980284$$

$$\approx 0,598 \text{ (truncamiento o redondeo por defecto con 3 cifras significativas.)}$$



**Sustracción:**  $(793/61) - (42/913) = (793 \times 913) - (61 \times 42) / (61 \times 913)$

$$\approx 12,953998$$

$\approx 12,954$  (redondeo por exceso con 5 cifras significativas).

**División:**  $(793/61) / (42/913) = (793/61) \times (913/42)$

$$= (793 \times 913) / (61 \times 42)$$

$$\approx 282,59524$$

$\approx 282,6$  (redondeo por exceso con 4 cifras significativas).

En las dos últimas operaciones te habrás dado cuenta que los resultados que se obtienen usando la calculadora son; respectivamente,

12.953998

y

282.59524



lo redondeamos por exceso a 12,954  
con cinco cifras significativas.



lo redondeamos por exceso a 282,6  
con cuatro cifras significativas.

los cuales hemos redondeado, respectivamente, con 5 y 4 cifras significativas. ■

#### Otro ejemplo

Redondear el número  $d = \frac{2,3 \times 10^6 - 3^4}{2,661 - 0,42^2}$  con siete cifras significativas.

Efectuando las operaciones con una calculadora que trabaja con 8 dígitos, resulta  $d \approx 925669,73$ , luego el redondeo de  $d$  con siete cifras significativas es  $d \approx 925669,7$  que es un redondeo por defecto ya que  $925669,7 < 925669,73$ . ■

### ● Propiedades de las operaciones con números racionales

Hemos señalado hasta ahora las propiedades de las operaciones con los números naturales y con los números enteros. Propiedades análogas a las dadas, y algunas otras, se cumplen para las operaciones con los números racionales, las cuales están resumidas en el cuadro siguiente.

Cualesquiera que sean los números racionales  
 $x = a/b$ ,  $y = c/d$ ,  $z = e/f$ , se cumplen las  
siguientes propiedades:

ADICIÓN	MULTIPLICACIÓN
• $x + y \in \mathbb{Q}$	♣ $x \cdot y \in \mathbb{Q}$
<b>Conmutatividad</b>	
• $x + y = y + x$	♣ $x \cdot y = y \cdot x$
<b>Asociatividad</b>	
• $x + (y + z) = (x + y) + z$	♣ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
<b>Elemento neutro</b>	
• El número 0 verifica que $x + 0 = 0 + x = x$	El número 1 verifica que ♣ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
<b>Elemento simétrico (opuesto en el caso de la adición e inverso en el caso de la multiplicación)</b>	
• El número racional $-x$ verifica que $x + (-x) = (-x) + x = 0$	♣ Si $x \neq 0$ , el número racional $1/x$ verifica que $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$
<b>Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición</b>	
	♣ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$\frac{1}{x}$  también se denota por  $x^{-1}$ .

Observa que esas propiedades, excepto la existencia del elemento inverso  $1/x \in \mathbb{Q}$  para cada número racional  $x \neq 0$ , son las mismas que satisfacen las operaciones de adición y multiplicación de los números enteros. Es decir, esa propiedad del elemento inverso para la multiplicación de números racionales es lo que diferencia los conjuntos  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$  en cuanto a la operación " $\cdot$ " y por lo tanto lo que permite resolver en el conjunto  $\mathbb{Q}$  las ecuaciones del tipo  $rx = s$  donde  $r$  y  $s$  son números racionales, con la condición  $r \neq 0$ , siendo  $x = \frac{s}{r} \in \mathbb{Q}$  la solución.

Como consecuencia de las propiedades antes indicadas, se pueden definir la **sustracción**  $x - y$  y la **división**  $x/y$  ( $y \neq 0$ ) de dos números racionales  $x, y$ , como se hizo anteriormente. (¿Por qué?).

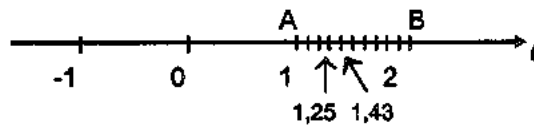
*¿Qué otras propiedades, tal como hicimos con los números naturales y los números enteros, puedes deducir a partir de las propiedades indicadas en el cuadro anterior? ■*

?

## 1.6.2 Orden en $\mathbb{Q}$

Otra propiedad importante del conjunto de los números racionales es la de ser un conjunto ordenado, al igual que los conjuntos de los números naturales y de los números enteros.

Ubiquemos en una recta  $\ell$ , los números  $10/7$  y  $5/4$



El número  $10/7$  es aproximadamente igual al número decimal  $1,43$  y  $5/4 = 1,25$  y, en este caso, se tiene que  $1 < 1,25 < 1,43 < 2$ , es decir ambos números están ubicados entre los enteros  $1$  y  $2$  y además  $1,25$  es menor que  $1,43$ . En forma aproximada hemos ubicado estos números en la recta  $\ell$ , dividiendo en  $10$  partes de igual longitud el segmento de recta  $AB$ .

Antes escribimos las desigualdades  $1 < 1,25 < 1,43 < 2$ , que son desigualdades con números racionales, puesto que  $1,25$  y  $1,43$  pertenecen a  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

También, cuando hicimos redondeo de números utilizamos desigualdades con números decimales e inclusive, en la definición 1.4 de qué es notación científica se escribió "número decimal positivo".

Hemos admitido esas desigualdades debido al conocimiento previo que tienen los lectores.

Sin embargo, para que esas desigualdades tengan un sentido preciso, debemos responder a la siguiente pregunta:



**¿De qué manera se ordenan los números racionales?,  
es decir, ¿Qué significa  $a/b < c/d$  si  $a/b$  y  $c/d$   
son números racionales?**

Ya sabemos como ordenar los números enteros, es decir, decidir entre dos números enteros distintos  $n$  y  $m$ , si  $n < m$  o bien  $m < n$ . Para definir lo análogo entre números racionales, utilizamos esa relación de orden entre los números enteros.



#### **Definición 1.6 (Números Racionales Positivos)**

*Dado un número racional no nulo  $a/b$ , se dice que  $a/b$  es mayor que cero o que es positivo si se verifica  $ab > 0$ , donde este último símbolo de "mayor que" es el referido al orden en los números enteros. Si  $a/b$  es positivo, lo denotamos mediante  $a/b > 0$ . ♦*

Por ejemplo:

- $\frac{4}{5}$  es positivo ya que  $4 \cdot 5 = 20 > 0$ . Se denota  $\frac{4}{5} > 0$ .
- $0,987$  es positivo ya que  $0,987 = \frac{987}{10^3}$  y  $987 \cdot 10^3 = 987000 > 0$ .
- Es fácil demostrar que el número racional no nulo  $a/b$  es positivo si y sólo si  $a$  y  $b$  son enteros positivos o bien  $a$  y  $b$  son enteros negativos. En particular, un número decimal  $p/10^n \neq 0$  es positivo si y sólo si  $p$  es un entero positivo, ya que  $10^n$  es un entero positivo cualquiera que sea  $n \in \mathbb{N}$ . (Observa el ejemplo anterior). ■

A partir de la definición anterior se pueden dar las otras definiciones acerca de cuando un número racional es negativo y comparar dos números racionales por la relación  $<$  (menor que) o por la relación  $>$  (mayor que). Se tienen las siguientes definiciones:

- + El número racional no nulo  $c/d$  se dice que es negativo si y sólo si su opuesto ( $-c/d$ ) es positivo. Si  $c/d$  es negativo, se denota  $c/d < 0$  que también se lee "c/d es menor que cero".

$$\text{Por lo tanto: } \frac{c}{d} < 0 \Leftrightarrow -\frac{c}{d} > 0 \blacklozenge$$

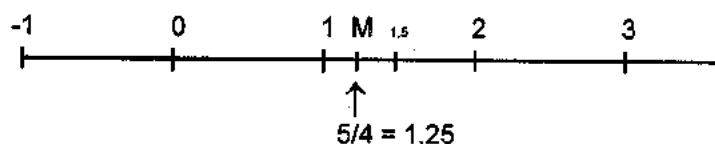
En consecuencia  $c/d < 0$  si y sólo si  $-(cd) > 0$  o equivalentemente  $cd < 0$ . Por lo tanto,  $c/d$  es negativo si y sólo si  $c$  y  $d$  son enteros de signo distinto (uno de ellos es positivo y el otro es negativo).

- + Dados dos números racionales distintos  $a/b$  y  $c/d$ , se dice que  $a/b$  es menor que  $c/d$  si y sólo si  $c/d - a/b$  es positivo. Si  $a/b$  es menor que  $c/d$ , se denota  $a/b < c/d$ . También se dice que  $c/d$  es mayor que  $a/b$  y se denota  $c/d > a/b$ .  $\blacklozenge$

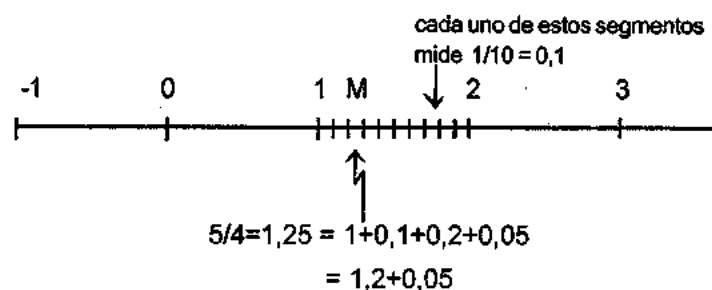
Ejemplos:

$$\frac{5}{9} < \frac{10}{7}, \quad \frac{2}{7} < \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{4} > \frac{9}{10}, \quad -\frac{2}{3} < -\frac{4}{11}, \quad 1,25 < 1,43$$

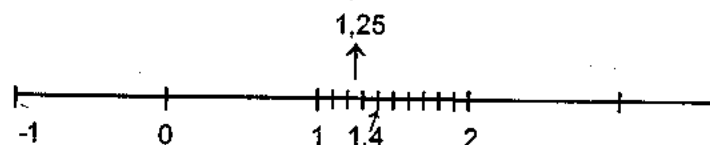
Es conocido que, también los números racionales se pueden representar mediante puntos de una recta. En la práctica, cuando representamos geoméricamente un número racional  $a/b$ , lo que hacemos es escribirlo en la notación decimal y representar este último o una aproximación del mismo. Usualmente para esto utilizamos una regla graduada o un compás:



Si queremos una representación más precisa, deberíamos dividir el segmento UA en diez segmentos de igual longitud a los fines de ubicar mejor el punto M



Análogamente, representamos los números  $10/7 = 1,42 \approx 1,4$  y  $\frac{4}{5} = 1,25$ , como hicimos anteriormente



## Ejemplos 1.6.2

Determina cuál de los dos siguientes números es el menor:  $x = 89/116$ ,  $y = 401/522$ .

▲ Si calculamos la diferencia  $401/522 - 89/116$ , esta resulta igual a  $58/60552$  y por lo tanto de la definición de  $<$ , obtenemos que  $89/116 < 401/522$ .

Otra forma de averiguar que  $x < y$  consiste en expresar los dos números mediante su mínimo común denominador:

$$\frac{89}{116} = \frac{801}{1044}, \quad \frac{401}{522} = \frac{802}{1044}$$

y como  $801 < 802$ , se tiene  $x < y$ . Es decir, hasta con comparar los numeradores.

Utilizando una calculadora que permite escribir  $x, y$  en notación decimal, es otra forma de saber cuál de esos dos números es el menor:

$$x = 89/116 = 0,7672413....., \quad y = 401/522 = 0,7681992.....$$

y se observa que tienen los primeros tres dígitos iguales pero el cuarto dígito 8 de  $y$  es mayor que el cuarto dígito 7 de  $x$ , de donde se deduce que  $y > x$  o bien  $x < y$ .

Con esas expresiones decimales de  $x, y$  se puede notar que son números bastantes "próximos", y esto podemos observarlo en la representación gráfica donde es "imposible distinguirlos". ■

La relación de orden " $<$ " en el conjunto  $\mathbb{Q}$ , y las otras relaciones que están emparentadas:  $>$  (mayor que),  $\leq$  (menor o igual que),  $\geq$  (mayor o igual que), satisfacen un conjunto de propiedades que son análogas a las del orden establecido con los números enteros, entre ellas mencionamos las siguientes, escritas con símbolos

$$\wedge \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

$$\wedge \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$$

$$\wedge \quad x < y \text{ e } y < z \Rightarrow x < z$$

$$\wedge \quad \dots\dots \text{Enuncia otras propiedades concernientes al orden, que conoces} \dots\dots$$

Pero, hay una propiedad de la relación de orden en  $\mathbb{Q}$  que no se satisface para los enteros: dados dos números enteros consecutivos, no existe ningún otro entero comprendido entre ambos. En cambio, entre dos números racionales cualesquiera siempre podemos determinar otro número racional.

Por ejemplo, consideremos los números  $10/7$  y  $5/4$ . ¿Existirá otro número racional entre esos dos?

Previamente a que demos la respuesta a esa pregunta, consideremos la definición siguiente:

### Definición 1.7 (Promedio media aritmética)

Dados dos números racionales  $r_1$  y  $r_2$ , su promedio

o media aritmética es el número racional  $\frac{r_1 + r_2}{2}$ . ♦

Geométricamente, ese promedio se interpreta mediante el punto medio del segmento cuyos extremos representan los números  $r_1$  y  $r_2$ .

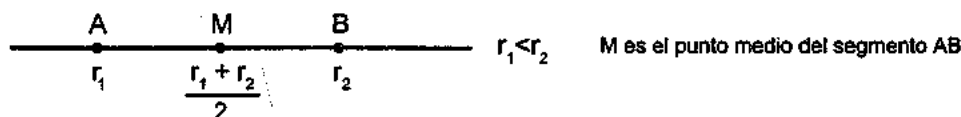
$$\begin{aligned} 116 &= 2^2 \cdot 29 \\ 522 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 29 \\ 1044 &= \\ &2^2 \cdot 3^2 \cdot 29 \end{aligned}$$



¿Cómo se  
leen esas  
propiedades?



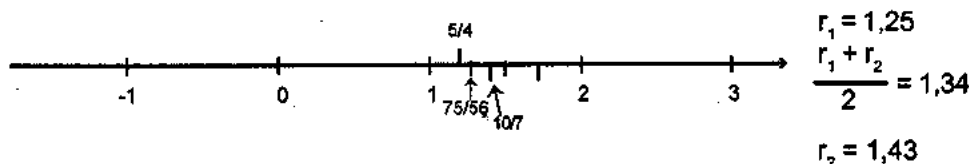
En lenguaje coloquial, se dice simplemente "la media" en lugar de la media aritmética.



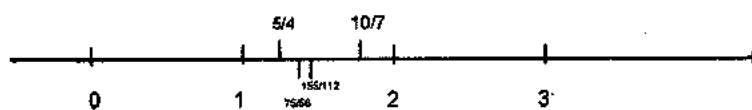
Volvamos a trabajar con los números  $r_1 = \frac{10}{7}$  y  $r_2 = \frac{5}{4}$ , y calculemos su promedio:

$$\begin{aligned}
 (r_1 + r_2) / 2 &= [(10/7 + 5/4)] / 2 \\
 &= [((10 \times 4) + (7 \times 5)) / 28] / 2 \\
 &= (75/28) / 2 \\
 &= 75 / (28 \times 2) \\
 &= 75/56 = \boxed{1.3392857} \\
 &\approx 1,34 \quad (\text{redondeo}).
 \end{aligned}$$

que es otro número racional ubicado en la recta  $\ell$  entre  $10/7$  y  $5/4$  ya que  $1,25 < 1,34 < 1,43$ :



Si hacemos nuevamente el proceso anterior con los números  $75/56$  y  $10/7$ , obtenemos el número  $155/112 \approx 1,384$  que es otro racional tal que  $75/56 < 155/112 < 10/7$



Observa que en todos esos cálculos, partiendo de dos números  $r_1, r_2$ , el promedio  $\frac{r_1 + r_2}{2}$  se encuentra "entre"  $r_1$  y  $r_2$ , es decir, si suponemos que  $r_1 < r_2$ , se tiene

$$r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2$$

Podemos generalizar lo expuesto anteriormente como sigue:

si  $a/b$  y  $c/d$  son dos números racionales diferentes, entonces entre  $a/b$  y  $c/d$  existe siempre otro número racional. Es decir, si suponemos

que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , entonces existe algún número racional  $\frac{r}{s}$  tal que

$$\frac{a}{b} < \frac{r}{s} < \frac{c}{d}.$$



Para visualizar mejor los puntos, tomamos el segmento unidad bastante grande.

Pero, si entre dos números racionales cualesquiera hay un tercer número racional, entonces entre el primero y el tercero debe haber un cuarto número racional, y así sucesivamente.

Por tanto, se concluye que:

**Entre dos números racionales distintos cualesquiera, hay infinitos números racionales.**



### Ejercicios Propuesto 1.6

1. Ordena, de mayor a menor, los siguientes números:

$$-\frac{5}{6}; \quad \frac{4}{5}; \quad 1,324; \quad 0,37.$$

2. Determina, de tres formas distintas (ver ejemplos 1.6.2), cuál de los dos siguientes números es el mayor:

$$x = \frac{95}{132}, \quad y = \frac{721}{1386}$$

- \* 3. Sean  $x, y, z$  números racionales. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos (V) y cuáles son falsos (F)? Justifica tu respuesta.

a)  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ .

b)  $x \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 0$ .

c)  $x > 0, y < 0 \Rightarrow x + y > 0$ .

d)  $x > 0, y \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{y} > 0$ .

e)  $x > 0, y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} > 0$ .

4. Determina dos números racionales comprendidos entre  $\frac{3}{2}$  y  $-1$ . Representalos gráficamente.

5. Sean  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ :

a) ¿Cuál es el promedio de  $r_1$  y  $r_2$  sabiendo que  $r_1 = r_2$ ?

b) Ordena de mayor a menor los números  $\frac{r_1 + r_2}{2}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , sabiendo que  $r_1 > r_2$ .

- \* 6. Sean  $r_1, r_2, \dots, r_n$ ,  $n$  números racionales. ¿Cómo se generaliza la definición 1.7 es decir, cómo se define el promedio o media aritmética de esos números? Calcula ese promedio

para los números  $\frac{1}{2}; 1,25; 3; \frac{2}{3}$ .



7. Si el promedio de seis números es 10 y si consideramos un séptimo número, el promedio de esos siete números es 5. ¿Cuál es ese séptimo número que consideramos? \*

8. Sean  $\frac{a}{b}, \frac{c}{b} \in \mathbb{Q}$  tales que  $b > 0$ . ¿Qué relación hay entre  $a$  y  $c$  para que se verifique  $\frac{c}{b} \geq \frac{a}{b}$ ?

9. El resultado de un examen de matemáticas presentado por 20 alumnos fue el siguiente:

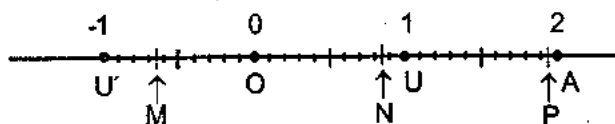
5 alumnos con nota de 7 puntos,  
4 alumnos con nota de 8 puntos,  
6 alumnos con nota de 10 puntos,  
3 alumnos con nota de 11 puntos,  
1 alumno con nota de 13 puntos,  
1 alumno con nota de 16 puntos.

¿Cuál es "la media" de las calificaciones obtenidas por esos alumnos en dicho examen?

10. Sea  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$  y  $ab > 0$ . Demuestra, utilizando propiedades conocidas de la relación \*

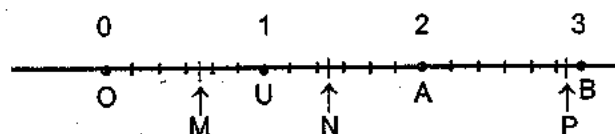
de orden en  $\mathbb{Q}$ , que se verifica la siguiente desigualdad:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

11. a) El gráfico siguiente es el de una recta donde realizamos la "graduación" indicada en el dibujo:



Indica, aproximadamente, a cuáles números decimales corresponden los puntos M, N y P.

- b) Repite el ejercicio anterior pero ahora con la recta "graduada" en la forma indicada en el siguiente gráfico: \*



12. Utilizando la calculadora verifica los siguientes resultados que están redondeados con cuatro cifras significativas: 

$$\# \frac{4 - 0,25}{10^3 - 2^2} \approx 0,003765$$

$$\# \frac{3,5 \times 10^8 - 3^3}{1,067 - 0,76^2} \approx 7,152 \times 10^8$$

## 1.7 ECUACIONES CON SOLUCIONES RACIONALES

En el ejemplo dado al comienzo del tema 1.4 se estableció la ecuación  $7x = 4$  la cual no tiene solución en el conjunto de los números enteros. Ahora, que ya conocemos al conjunto de los números racionales, podemos determinar el valor de la incógnita  $x$  tal que  $7x = 4$ .

La expresión  $7x = 4$  es una ecuación con solución racional, es decir, el valor que debe tomar la incógnita  $x$  es  $4/7$  para que se verifique la igualdad.

**Las soluciones de una ecuación dependen del conjunto de números que se considere.**

Por ejemplo, si pedimos que las soluciones sean números racionales, entonces la ecuación  $x^2 = 5$  no tiene solución en el conjunto de los números racionales ya que no existe ningún número racional que al elevarlo al cuadrado nos de 5.

En los cursos previos a los universitarios aprendistes a resolver ecuaciones. A continuación resolvemos dos ejemplos que te permitirán revisar como se hace esto, suprimiendo algunos cálculos que tu mismo debes hacer.

---

### Ejemplos 1.7

#### 1. Resolver la ecuación

$$\frac{5x}{x-1} = 5 + \frac{7}{x+4}, \quad x \neq 1, \quad x \neq -4$$

▲  $\frac{5x}{x-1} = 5 + \frac{7}{x+4}$  reducimos a un denominador común el 2º miembro.

$$\frac{5x}{x-1} = \frac{5(x+4) + 7}{x+4} \quad \text{efectuamos las operaciones en el 2º miembro.}$$

$$\frac{5x}{x-1} = \frac{5x+27}{x+4} \quad \text{multiplicamos ambos miembros por } (x-1)(x+4).$$

$$5x(x+4) = (5x+27)(x-1) \quad \text{Efectuamos las operaciones indicadas.}$$

$$5x^2 + 20x = 5x^2 + 22x - 27$$

$$20x = 22x - 27$$

$$2x = 27$$

$$x = 27/2$$

Luego, la ecuación dada es una ecuación con solución racional. ■

#### 2. Resuelve la ecuación

$$7,54(8,01 - 3x) + 16,4x = 461.$$



▲ Aplicando la propiedad distributiva se tiene

$$(7,54)(8,01) - (7,54)3x + 16,4x = 461$$

$$(7,54)(8,01) + (16,4 - 3(7,54))x = 461$$

$$(16,4 - 3(7,54))x = 461 - (7,54)(8,01)$$

$$-6,22x = 400,6$$

$$x \approx 400,6/6,22$$

$$x \approx 64,4051...$$

$$\approx 64,41 \text{ (redondeo por exceso) } \blacksquare$$

### Ejercicios Propuestos 1.7

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $(\frac{2}{3})t + 4 = 10 - (\frac{7}{5})t$

b)  $(15r - 2,3) / (\frac{3}{5} + 0,4r) = 9/2$

c)  $x/2 - 8/3 = x - 3,7$

d)  $35,4a - 20,7 = 6,1a + 184$

e)  $(5/(2u-1)) + (4/(3u-8)) = 1/(4u+16)$

2. ¿Para cuáles valores de  $a$  la ecuación:

$$ax - 1 = 2x + 1$$

tiene solución racional?

3. Sabiendo que  $(3x - 4)/(y + 15)$  es constante y además  $y = 3$  cuando  $x = 2$ . Entonces, si  $y = 12$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ? \*

4. Si  $3x + 4 = 999$ , ¿A qué es igual  $6x + 4$ ?

### 1.8 APLICACIONES

En la vida diaria, a menudo ocurren problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones u otras herramientas matemáticas.

Por ejemplo, una tienda está liquidando su mercancía y anuncia que todos los precios tienen 20% de rebaja. Si el precio de un artículo es 369,50 Bs., ¿cuál era su precio antes de la liquidación?

Debido a la gran variedad de problemas matemáticos y problemas aplicados, es difícil establecer reglas específicas para encontrar soluciones. Sin embargo, es posible desarrollar una estrategia general para resolver dichos problemas a continuación presentamos **una posibilidad** de tal estrategia.

### Pasos a seguir para resolver problemas de matemática o problemas aplicados.

- ★ Lea cuidadosamente el enunciado del problema.
- ★ Identifique la cantidad o cantidades desconocidas mediante una o más letras distintas; esto es, debes *seleccionar las incógnitas*. Hay problemas en los cuales las incógnitas no necesariamente son cantidades, por ejemplo, algunos problemas geométricos o problemas aplicados a otras áreas. En muchos problemas se necesita precisar las *unidades* (metro, segundo, grados centígrados, ...). Usualmente algunas letras se reservan para ciertas magnitudes o conceptos, por ejemplo:  $t$  para el tiempo;  $n, m, p, k$ , para números enteros;  $\alpha, \beta, \gamma$  para ángulos, ... Esto no es un imperativo, pero es la costumbre.
- ★ Si es posible, haga un *dibujo o representación gráfica*. (Este paso puede ir antes del paso anterior).
- ★ Haga una lista de los *datos conocidos* y de las *condiciones o restricciones* que deben satisfacer las incógnitas.
- ★ Establezca *expresiones matemáticas* que permitan *relacionar* las incógnitas con los datos, o entre las distintas incógnitas o entre las incógnitas y las restricciones al problema.
- ★ Resuelva las relaciones obtenidas en el paso anterior. Estas relaciones pueden ser *ecuaciones, inecuaciones* o de otro tipo.
- ★ Verifique las soluciones obtenidas en el paso anterior, es decir, se confrontan las soluciones obtenidas con las *condiciones* para ver si concuerdan. A veces se rechazan soluciones obtenidas en el paso anterior.
- ★ Interprete las soluciones halladas o haz algún *comentario* en forma de conclusión, en el caso de ser necesario.

Identifiquemos en el problema enunciado al comienzo de este tema 1.8, los pasos anteriormente indicados a los fines de resolverlo.

En el enunciado del problema dado al comienzo, observamos que la incógnita es el precio del artículo antes de la liquidación. Identifiquemos esta cantidad por medio de una letra, por ejemplo  $x$ , y tomando en cuenta que las cantidades se refieren a bolívares, para este caso.

Entonces tenemos:

No necesita dibujo

El  $a\%$  de  $x$  es  $\frac{a}{100}x$

❖  $x$  = precio del artículo antes de la liquidación.

Identificar cantidad desconocida.

❖  $369,50$  = precio actual de venta

20% de descuento de  $x = \frac{20}{100}x = 0,20x$ .

Datos conocidos y condiciones sobre la cantidad desconocida (incógnita).

❖ El precio actual de venta se determina como sigue:

precio anterior - descuento = precio actual de venta

Esto nos lleva a la ecuación

$$x - 0,20x = 369,50$$

- Resolviendo esa ecuación:

$$x(1 - 0,20) = 369,50$$

$$x = \frac{369,50}{1 - 0,20}$$

$$x = 461,8750 \quad x \approx 461,90 \text{ Bs.}$$

Por lo tanto, el precio anterior a la liquidación era de 465,90 Bs.

- Para verificar esta respuesta observamos que si el precio del artículo es de 461,90 Bs y se le hace un descuento del 20% de su costo, entonces se tiene:

$$461,90 - (0,20) 461,90 = 461,90 - 92,38 = 369,52$$

- Observa que hay una pequeña diferencia en el cálculo anterior pues resultó 369,52 y no 369,50 que era el costo original. ¿Por qué? ■

Relaciones entre  $x$  y los datos.

Resolviendo la ecuación encontrada.

Verificación de la solución.

Interpretar la solución encontrada.

### Ejercicios 1.8

1. Una persona que desea invertir 380550,50 Bs, piensa depositar una parte en una cuenta de ahorros que produce 24% de interés simple anual y el resto en un fondo de inversión que produce 32% de interés simple anual. ¿De qué cantidad debe disponer para cada inversión de manera de obtener una ganancia del 30% después de un año?

Lectura y comprensión del enunciado.

- ▲ ●  $x$  = cantidad invertida al 24%.  
 $380550,50 - x$  = cantidad invertida al 32%.

Identificar las incógnitas.

- Interés de  $x$  Bs al 24% =  $24 / 100 x = 0,24 x$  (en Bs)  
Interés de  $(380550,50 - x)$  al 32% =  $32 (380550,50 - x) / 100$   
 $0,32 (380550,50 - x)$  (en Bs).

Datos conocidos y condiciones sobre las incógnitas.

Ganancia que se desea al cabo de un año = 30% de 380550,50 =  $(30/100) \cdot 380550,50 = 0,30 \cdot 380550,50$  (en Bs).

- Como el interés total (ganancia que se desea al cabo de un año) es igual al interés combinado de las dos inversiones, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$0,24x + 0,32(380550,50 - x) = 0,30 \cdot 380550,50$$

Relaciones entre las incógnitas y los datos.



No es necesario dibujo



- Resolviendo esa ecuación:

$$0,24 - 0,32 x = 0,30 \cdot 380550,50 - 0,32 \cdot 380550,50$$

$$(0,24 - 0,32) x = (0,30 - 0,32) 380550,50$$

$$-0,08 x = -0,02 \cdot 380550,50$$

$$x = \frac{0,02}{0,08} \cdot 380550,50$$

Resolución de la ecuación encontrada.

$$x = 95137,625 \approx 95137,60 \text{ Bs.}$$

Luego, hay que depositar 95137,60 Bs. en la cuenta de ahorros y 285412,90 Bs. (= 380550,50 - 95137,60) en el fondo de inversiones.

- Verifiquemos el resultado.

Verificación de la solución.

Si se depositan 95137,60 bolívares en la cuenta de ahorros, el interés que se obtiene es  $(0,24)(95137,60) = 22833,024 \approx 22833,02$  bolívares.

Si se depositan 285412,90 bolívares en el fondo de inversiones, entonces el interés es de  $(0,32)(285412,90) = 91332,128 \approx 91332,13$  bolívares.

Por lo tanto, el interés total es igual a 114165,15 bolívares, que es el 30% de 380550,50.

- Las aproximaciones realizadas, como fueron

$$95137,625 \approx 95137,60$$

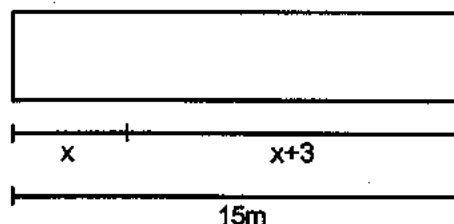
$$22833,024 \approx 22833,02$$

$$91332,128 \approx 91332,13$$

Comentario.

Se deben a que, al trabajar con pocos datos utilizamos en los bolívares solamente céntimos en lugar de milésimos. Las aproximaciones se compensaron (redondeos por defecto y por exceso) y por ello "cuadran" los datos. En cambio, en el problema resuelto anteriormente hay una "pequeña" discrepancia de 2 céntimos (menos de "un centavo") ya que  $369,52 - 369,50 = 0,02$ , lo cual se debe a la aproximación por exceso  $461,8750 \approx 461,90$ . ■

2. Una tabla rectangular de madera de 15 m de longitud se corta en dos trozos de tal manera que uno de ellos es 3 m más largo que el otro. ¿Cuál es la longitud de cada trozo?



Es conveniente hacer un dibujo.

- Designemos por  $x$  la longitud del trozo más corto (en metros), entonces el otro trozo mide:  $x + 3$  metros.

Identificar incógnitas, datos y condiciones sobre las incógnitas.

- La suma de las longitudes de los dos trozos es igual a la longitud de la tabla, es decir

$$x + x + 3 = 15.$$

Relacionar las incógnitas con los datos.

- Se resuelve esa ecuación y resulta:

$$x = 6.$$

Resolución de la ecuación encontrada.

Los trozos miden 6m y 9m.

- Verifica los resultados

Verificación de los resultados.

- Otra forma que se te puede ocurrir es planteando un sistema de ecuaciones en las incógnitas  $x$ ,  $y$ , donde  $x$  es la longitud del trozo más corto, y la longitud del trozo más largo, verificándose que:

$$x + y = 15$$

$$y - x = 3.$$

Comentario.

- Resuelve ese sistema. ■

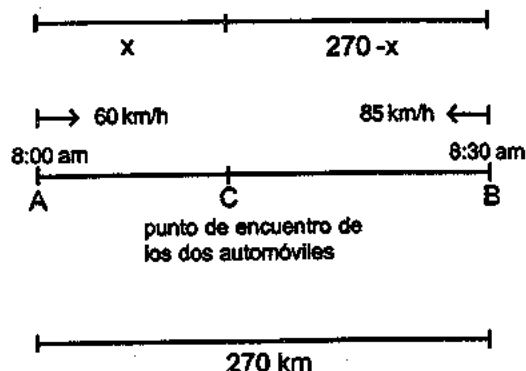
Los pasos a seguir con el objeto de resolver problemas en matemática son una guía que en ocasiones puede tener algunas variantes. Por ejemplo, podría ocurrir que agrupemos dos de esos pasos. Lo importante es que, cuando estés resolviendo un determinado problema percibas, implícita o explícitamente, las distintas fases que se ejecutan en su resolución. Con frecuencia se deben utilizar conceptos, fórmulas o proposiciones que no figuran explícitamente en el enunciado, sino que forman parte de nuestro conocimiento previo.

## Problemas 1.8

1. Dos ciudades, A y B, están conectadas por medio de una carretera de 270 kilómetros. Un automóvil sale de A a las 8:00 am. y viaja con una velocidad uniforme de 60 kilómetros por hora hacia la ciudad B. Treinta minutos más tarde, otro automóvil sale de la ciudad B y viaja hacia la ciudad A con una velocidad uniforme de 85 kilómetros por hora. ¿A qué hora se encuentran los dos automóviles? ¿Cuál es la distancia que ha recorrido cada uno de los automóviles hasta el momento en que se encuentran?

▲

●



Es conveniente hacer un dibujo o una representación gráfica.

- Sabemos que

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo de recorrido}}$$

Identificar cantidades desconocidas, datos y condiciones sobre las incógnitas.

de donde espacio recorrido = velocidad x tiempo de recorrido

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 en km                  en km/h                  en horas h

El espacio recorrido por el automóvil que partió de A, a los 30 minutos, esto es cuando son las 8:30 am, es:  $(60 \text{ km/h}) \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ km}$ .

Ahora, el espacio recorrido en el tiempo  $t$  medido en horas y contado después de las 8:30 am. es  $60t$  kilómetros, luego, el recorrido del automóvil que parte de A cuando son las 8:30 am +  $t$  horas es  $30 + 60t$  kilómetros.

Como el segundo automóvil comienza su viaje a las 8:30 am., la distancia que ha viajado en el tiempo  $t$  es de  $85t$  kilómetros.

- Queremos encontrar el tiempo  $t$  para el momento en el cual los dos automóviles se encuentran, esto es se hallan en el punto C. **Relacionar las incógnitas con los datos.** Por lo tanto, la suma de las distancias recorridas por los dos automóviles debe ser igual a la distancia entre las dos ciudades, o sea 270 km., luego, si  $x = 30 + 60t$ , entonces  $270 - x = 85t$ , o lo que es lo mismo que  $270 = 30 + 60t + 85t$ .

- Resolviendo esa ecuación obtenemos

$$t = 240/145 = 1,6551724 \dots$$

Resolución de la ecuación encontrada.

es decir,  $t \approx 1,6551724$  horas =  $1 \text{ h} + (0,6551724 \times 60) \text{ min.} = 1 \text{ h } 39,310344 \text{ min} = 1 \text{ h } 39 \text{ min } 18,620640 \text{ segundos}$ , lo cual, para fines prácticos aproximamos a  $t \approx 1 \text{ h } 39 \text{ min}$ , y por lo tanto los automóviles se encuentran a las 10:09 am.

La distancia recorrida, hasta esa hora, por el automóvil A es

$$x = 30 + 60t \approx 30 + 60 \times 1,65 = 129 \text{ (km)}$$

y la recorrida por el automóvil B es

$$270 - x = 141 \text{ km.}$$

- Verifica los resultados

Verificación de los resultados.

**Atención:**

si la distancia recorrida por el automóvil B cuando son las 10:09 am. la calculas mediante  $85 \times 1,65 = 140,24 \text{ (km)}$  obtienes una diferencia de 0,75 km = 750m con el cálculo anterior. Esta discrepancia se debe a la aproximación realizada  $t \approx 1 \text{ h } 39 \text{ min.}$ , sin considerar los 18,620640 segundos.

*Rehace los cálculos considerando  $t \approx 1 \text{ h } 39 \text{ min } 18 \text{ segundos}$ .*

*Haz también los cálculos considerando  $t \approx 1,66$  horas (redondeo), y observa las diferencias que encuentras.  $\alpha$*



$$\begin{aligned} 39 \text{ min} &= \\ \frac{39}{60} \text{ h} &\approx 0,65 \text{ h.} \end{aligned}$$



2. **No necesariamente hay una única vía para resolver un problema**, lo cual es frecuente en los problemas de tipo matemático. Debes entonces pensar que, tú mismo o alguno de tus compañeros o el Asesor de Matemática del Centro Local pueden dar soluciones distintas a las desarrolladas en este texto. Damos un ejemplo y en otras ocasiones haremos algo análogo.

Supongamos que nos soliciten calcular la suma de los primeros 100 números enteros positivos que son impares, esto es, calcular la suma

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 197 + 199.$$

En primer lugar pensemos por qué el último número escrito en esa suma es 199. Para responder esta pregunta, debemos escribir la expresión del  $n$ -ésimo número impar, lo cual sabemos es  $2n-1$ . Luego, si das a  $n$  los valores 1, 2, 3, 4, ..., 100, obtienes los números antes escritos.

En segundo lugar, calculemos la suma  $S$ . Para esto seguiremos tres procedimientos:

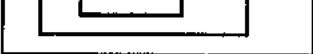
♥ **Utilizando fórmulas conocidas:**

Los términos de esa suma forman una progresión aritmética de razón 2, primer término 1 y último término 199. Por lo tanto, aplicando la fórmula conocida para la suma en una progresión aritmética, se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= n(a_1 + a_n) / 2 \\ &= 100(1 + 199) / 2 \\ &= 100 \cdot 100 = 100^2. \blacksquare \end{aligned}$$

♠ **Sin utilizar fórmulas sino agrupando términos:**

Agrupamos los términos equidistantes de los extremos (hay 100 sumandos en total):

$$1 + 3 + 5 + \dots + 195 + 197 + 199$$


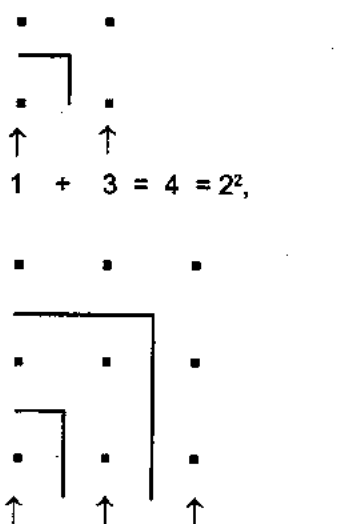
$$\begin{aligned} &= (1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) \\ &+ \dots + (\text{suma de los dos términos centrales que corresponden a los valores } n = 50 \text{ y } n = 51 \text{ en } 2n - 1) \\ &= (1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) \\ &+ \dots + (99 + 101). \end{aligned}$$

Cada una de las sumas encerradas en paréntesis da 200 y como hay 50 de esas sumas, resulta

$$S = 50 \cdot 200 = 10000 = 100^2. \blacksquare$$

♠ **Método gráfico:**

Observemos el siguiente gráfico donde vamos colocando progresivamente puntos, tantos como indican los números 1, 3, 5, 7, ...



$$1 + 3 = 4 = 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2.$$

En el siguiente obtienes

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

(Haz el dibujo).

Y en general, con ese tipo de representación gráfica resulta  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199 = 10000 = 100^2$ .

(Este método era conocido por los pitagóricos del s. VI a.C.).  $\blacksquare$

★ ★

También  $2n+1$  con  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

*Practica los tres procedimientos con la suma de los 20000 primeros números impares e induce cuál es el resultado general para la suma  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$  de los  $n$  primeros números impares. ■*

En los siguientes ejercicios que te proponemos, te recomendamos que al menos en los cuatro primeros indiques los pasos que realizas. A medida que te acostumbres a resolver problemas en matemática y que tengas plena conciencia de los pasos ejecutados en la estrategia seguida, puedes prescindir de explicarlos. Sin embargo, es conveniente que en algunas oportunidades en las próximas unidades y módulos que conforman este texto, lo hagas.



### Ejercicios propuestos 1.8.1

1. Las calificaciones de un estudiante de un curso de Álgebra II son 6, 7, 9 en una escala del cero al diez.  
¿Qué calificación en el siguiente examen aumentará el promedio del estudiante a 8?

2. La relación entre la temperatura  $F$  en la escala Fahrenheit (grados Fahrenheit) y la temperatura  $C$  en la escala Celsius (grados centígrados), está dada por:

$$C = \frac{5}{9} (F - 32).$$

- a) Encuentra la temperatura a la que se lee el mismo valor en ambas escalas.  
b) ¿Cuándo es el valor en grados centígrados el doble del valor que se lee en la escala Fahrenheit?

- \* 3. Un comerciante desea invertir 300000,00 bolívares en dos fondos de inversiones diferentes que producen ganancias anuales del 22,5% y 28%, respectivamente. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para obtener una ganancia de 74000,00 bolívares después de un año?

- \*\* 4. Un joven se encuentra a 224 metros de otro cuando ambos empiezan a caminar, uno en dirección del otro. Si caminan a una velocidad de 1,5 y 2 metros por segundo, respectivamente, ¿en cuánto tiempo se reúnen? ¿Qué distancia ha caminado cada uno?

- \*\* 5. Después de 100 juegos, un equipo de béisbol en las grandes ligas tiene un porcentaje de 0,650 de juegos ganados. Si este equipo gana sólo el 50% de sus juegos en el resto de la temporada, ¿cuándo tendrá un porcentaje de 0,600?

- \* 6. Un granjero desea cercar un terreno rectangular uno de cuyos lados es parte de la orilla de un río, y planea usar 550 metros de alambre excepto en la parte que está hacia el río. Encuentra el área del terreno si la longitud del lado paralelo a la orilla del río es:  
a) El doble de la longitud de uno de los lados adyacentes.  
b) La mitad de la longitud en un lado adyacente.

- \* 7. Se dispara horizontalmente un proyectil hacia un blanco y el sonido del impacto se escucha 3,5 segundos más tarde. Si la velocidad del proyectil es de 250 metros por segundo y la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente, 331 metros por segundo, ¿a qué distancia se encuentra el blanco?

- \* 8. Un ingeniero consultor cobra 5500 bolívares por hora y su ayudante recibe 2000 bolívares por hora. Por cierto trabajo, un cliente recibió una cuenta de 72.800 bolívares. Si el ayudante trabajó 5 horas menos que el ingeniero, ¿cuánto tiempo trabajó cada uno?

para que la solución resultante tenga 15% de sal?

10. Calcula la suma de fracciones  $\frac{3}{5} + \frac{7}{10}$  mediante tres procedimientos distintos.
11. Calcula la suma de los cien primeros números enteros positivos mediante dos procedimientos distintos.
- Cómo generalizas el resultado para la suma de los  $n$  primeros números enteros positivos.

A continuación te proponemos otros *ejercicios especiales* en el sentido de que ellos se refieren a la *matemática recreativa*, o se han propuesto en las **Olimpiadas Matemáticas Venezolanas**, o bien son problemas que fueron *resueltos hace muchos años, inclusive siglos*, algunos con técnicas distintas de las actualmente utilizadas. Algunos de esos problemas constituyeron un gran desafío intelectual en su tiempo, puesto que no se contaba con diversas notaciones, nociones y proposiciones matemáticas de las conocidas hoy día. Vale la pena mencionar que la simbología matemática actual:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $>$ ,  $<$ ,  $=$ , ..... tardó muchos siglos en ser utilizada para escribir la matemática. Esto se fue introduciendo lentamente y, ya hacia el siglo XVII estaba incorporada en la escritura matemática. Varias otras notaciones, como las empleadas con los conjuntos:  $\in$ ,  $\{ : \}$ ,  $\subset$ , ... son de los siglos IX y XX.

### Ejercicios propuestos 1.8.2

1. a) Utilizando únicamente las cifras **2 y 2**, ambas a la vez, y las operaciones  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  (operaciones racionales), escribe todos los números naturales que puedas.
- ¿Cuál es el mayor de estos números?

b) Repite la parte (a) con las cifras **3, 3 y 3** (todas deben ser utilizadas a la vez).

c) Utilizando únicamente *cuatro cuatros* **4, 4, 4 y 4**, **todos a la vez**, y con las operaciones racionales  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ , escribe todos los números naturales que puedas y que estén comprendidos entre 0 y 20.

**Nota:** este problema de los "cuatro cuatros" se encuentra en uno de los capítulos del popular libro "El hombre que calculaba", escrito en un lenguaje muy ameno por Malba Tahan.

2. Un ladrillo de los usados en la construcción, pesa 4 kg. ¿Cuánto pesará un ladrillito de juguete hecho del mismo material y cuyas dimensiones sean todas 4 veces menores?

**Nota:** este problema figura en "Un Desafío a la Juventud", "Problemas de las Olimpiadas Matemáticas Venezolanas", Fondo Editorial CENAMEC, 1983, escrito por Saulo Rada A.

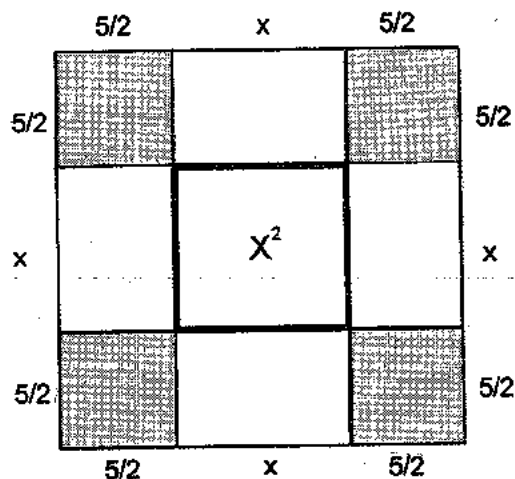
3. Diofanto de Alejandría fue un matemático griego muy importante que vivió en el siglo III d.C. Su obra principal es *Aritmética* escrita en trece volúmenes de los que solamente los seis primeros son los conocidos. Se sabe poco de su vida, sin embargo, se conoce que murió cuando contaba con 84 años. Esto se deduce de un *epigrama* (inscripción grabada sobre su tumba) que dice así:

Transeúnte, aquí yace Diofanto. Las cifras dirán la duración de su vida.

Su juventud ocupó la sexta parte; un doceavo de su vida pasó y su mejilla se subió con el primer bozo. Todavía pasó una séptima parte de su vida antes de casarse y, cinco años después el nacimiento de un hijo lo cubrió de felicidad. El destino quiso que la vida de este hijo fuese la mitad de la vida de su padre. Su padre, lleno de tristeza, sobrevivió durante cuatro años más. Dí, transeúnte, qué edad había alcanzado Diofanto cuando la muerte se lo llevó.

Calcula, a partir de ese epigrama, la edad de Diofanto al momento de su fallecimiento.

4. Uno de los matemáticos árabes más importantes durante la época de la expansión árabe, fue Al-Khuwarizmi<sup>[1]</sup>. En el "Álgebra" de Al-Khuwarizmi se resuelven varios tipos de ecuaciones mediante consideraciones geométricas. El método que utiliza para la solución geométrica de ciertas ecuaciones de segundo grado consiste en la igualación de áreas cuidadosamente seleccionadas para la interpretación geométrica de la ecuación. Por ejemplo una de esas ecuaciones, en la notación actual, es  $x^2 + 10x = 39$ , para lo cual considera una figura como la siguiente:



Un cuadrado en el centro de área  $x^2$  (lado  $x$ ) y cuatro cuadrados de lado

$$\frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ (los rayados en la figura).}$$

Sea  $A$  el área del cuadrado más grande, se tiene.

$$A = x^2 + 4 \left( \frac{5}{2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot x = \underbrace{(x^2 + 10x)}_{39} + 4 \left( \frac{5}{2} \right)^2 = 39 + 25 = 64$$

por otra parte,  $A = (x + 2 \cdot \frac{5}{2})^2 = (x + 5)^2$ , luego

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3.$$

Únicamente la raíz cuadrada positiva.

★

Generaliza ese procedimiento geométrico para resolver la ecuación  $x^2 + bx = c$ .

★

5. Otro relato que se encuentra en el antes citado libro "El hombre que calculaba", se refiere a la repartición de 35 camellos entre tres árabes: tres hermanos recibieron en herencia 35 camellos para que uno de ellos recibiera la mitad, el otro una tercera parte y el más joven una novena parte.

Si hacemos esas "cuentas", como las divisiones no son exactas, no se puede repartir la herencia. El hombre que calculaba, cuyo nombre es Beremís, arregló la repartición de la herencia de tal forma que todos quedaron contentos. Para esto, entregó su camello para hacer un total de 36 camellos, luego repartió la herencia y además le quedaron 2 camellos para él.

Da una explicación matemática a lo sucedido.

[1] Ver nota histórica al finalizar la Unidad 1.

NOTA: Al terminar esta unidad de aprendizaje debes manejar con soltura las operaciones



con la calculadora. En la próxima aprenderás otros.

## NOTA HISTÓRICA : EL ORIGEN Y SIGNIFICADO DE LAS PALABRAS ALGORITMO Y ÁLGEBRA

Uno de los matemáticos árabes más importantes fue sin duda **Al-Khuwarizmi** o **Al-Jwarizmi** según como se escriba. Nació en la ciudad de Jwarizm, actualmente la ciudad de Jiva en Uzbekistán (anterior estado de la URSS). No se conoce con precisión la fecha de su nacimiento ni de su fallecimiento, pero se sabe que vivió durante la primera mitad del siglo IX pues trabajó en la biblioteca del califa Al-Mamún, quien reinó desde el año 813 hasta el año 833. Al-Mamún era hijo del califa *Harún Al-Rachid* (766-809), el célebre califa del libro *Las Mil y una Noches*, que ha sido llevado a la pantalla en diversas películas.

Al-Khuwarizmi fue uno de los sabios más importantes del Islam; era astrónomo, geógrafo y matemático. Su obra matemática más importante se titula **Hasib al-jabar wa-al-muqabala** o **Hisab al-yabr wa'l-muqabala** de acuerdo con diversas formas de escribirla y cuya traducción al español no es fácil, pero significa lo siguiente "ciencia de la transposición y la reducción".

Del nombre Al-Khuwarizmi y de la palabra al-jabar, surgieron los términos ALGORITMO y ÁLGEBRA:

### AL - KHUWARIZMI



De aquí surgió la palabra ALGORITMO, pues la deformación del nombre de este matemático por intermedio de las diversas traducciones que se hacían, modificaron dicho nombre hasta que se convirtió en ALGORITMO.

### AL-JABAR



De aquí surgió la palabra ÁLGEBRA, como sinónimo de la ciencia de las ecuaciones. El vocablo al-jabar correspondería a la operación de pasar, en una ecuación, un término de un miembro al otro miembro de la ecuación.

Con el tiempo, la palabra "algoritmo" se relacionó con los "algoristas", quienes eran los matemáticos en Europa que habían adoptado el sistema de numeración indoarábiga por oposición a los "abacistas", partidarios del "ábaco".

El vocablo algoritmo se utilizó mucho tiempo como sinónimo de "procedimiento de cálculo". Actualmente tiene una acepción más amplia en el sentido siguiente:

Un ALGORITMO es una lista completa de instrucciones o pasos necesarios para realizar una tarea o un cálculo.

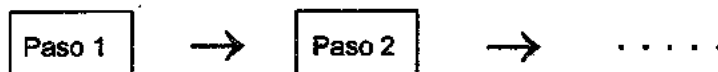
Los pasos en un algoritmo pueden consistir en descripciones precisas de cada detalle o en descripciones generales.

Por ejemplo:

- El procedimiento para hacer una salsa bechamel, puede ser descrito mediante el siguiente algoritmo:
- 1. Selecciona los siguientes ingredientes: harina de trigo, leche, mantequilla, sal y pimienta.
- 2. Diluye dos cucharadas de harina de trigo en un 1/4 de litro de leche.

3. Coloca a fuego lento la mezcla anterior.
  4. Agrega una cucharada de sopa llena con mantequilla y una pizca de sal y de pimienta.
  5. Deja hervir durante 3 minutos. ■
- El procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas, utilizando el denominado método de sustitución, puede ser descrito mediante el siguiente algoritmo:
1. Despeja en una de las ecuaciones del sistema, una de las incógnitas en términos de la otra.
  2. Sustituye la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación de primer grado con una incógnita.
  3. Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2.
  4. Reemplaza la solución obtenida en el paso 3 en la expresión encontrada en el paso 1 a los fines de obtener el valor de la otra incógnita.
  5. Escribe la solución del sistema. ■

Esas instrucciones pueden formularse en términos matemáticos en forma de diagrama secuencial, escribiendo encerrado dentro de rectángulos, horizontalmente o verticalmente, los distintos pasos dados por el algoritmo

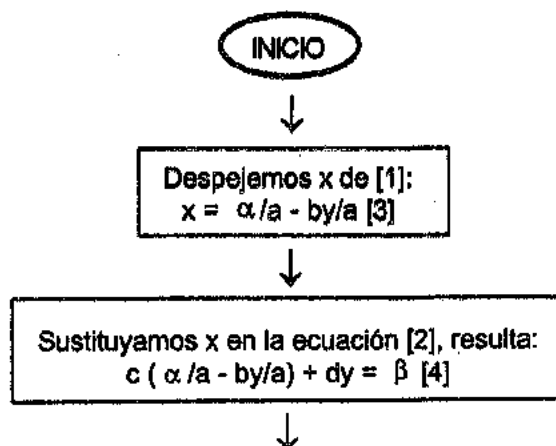


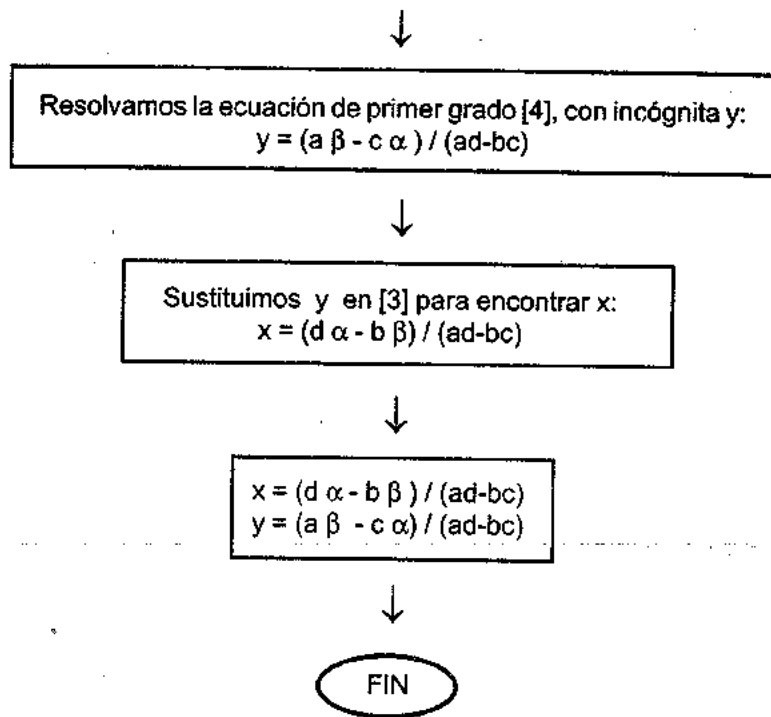
y ese diagrama se denomina **diagrama de flujo**.

Por ejemplo, en el caso del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & [1] \\ cx + dy = \beta & [2] \end{cases}$$

con las condiciones  $a \neq 0$  y  $ad - bc \neq 0$ , se tiene el siguiente diagrama de flujo para resolver ese sistema por el método de sustitución:





*Resuelve el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

*siguiendo los pasos dados en el diagrama de flujo anterior.*

*Expresa el algoritmo para hacer la salsa bechamel en un diagrama de flujo.*



**ANTES DE PASAR AL ESTUDIO DE LA UNIDAD  
Nº 2, TE INVITAMOS A VER UN VIDEOCASSETTE  
RELACIONADO CON LOS NÚMEROS  
RACIONALES**



# UNIDAD 2

## *Números Reales*

### **Objetivos**



- ☐ *Hacer cálculos directos con números reales utilizando una calculadora.*
- ☐ *Efectuar ejercicios que involucren las operaciones definidas en los números reales.*
- ☐ *Resolver problemas relacionados con los números reales.*



*Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos ni ahora ni nunca, en tanto que no las contemplemos en su crecer desde el principio.  
(En «Política» de Aristóteles. Uno de los máximos exponentes de la filosofía griega, siglo IV a.C.)*

## 2.1 PRESENTACIÓN

En esta unidad de aprendizaje introduciremos un nuevo conjunto, como es el conjunto de los **números irracionales**. Este conjunto en unión con el de los números racionales nos da el conjunto de los **números reales**. Expresaremos los números reales mediante *aproximaciones decimales*, tal como hicimos con los números racionales, e igualmente estudiaremos las operaciones con esos números y sus propiedades.

En particular, daremos alguna información acerca de algunos números irracionales que tienen gran importancia en la matemática, como son el número pi ( $\pi$ ) y el número e. También el número  $\sqrt{2}$  pues este se reviste de una connotación histórica.

Continuaremos con el uso de las calculadoras, y aquí los estudiantes deberán aprender a manejar con estas otras funciones, entre ellas la radicación  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , ..., la potenciación  $10^x$ ,  $y^x$ , con y, x números reales, siempre que esos cálculos conduzcan a números reales.

Hay diversas situaciones que inducen la necesidad de ampliar el conjunto de los números racionales, entre ellas citamos algunas:

- ★ La resolución de ecuaciones de segundo grado del tipo  $x^2 = 2$ ,  $x^2 = 3$ ,  $x^2 = 5$ , ... y en general  $x^2 = n$  donde  $n$  es un entero positivo que no es cuadrado de ningún otro entero. Estas ecuaciones no tienen solución en el conjunto  $\mathbb{Q}$ . Hay muchas otras ecuaciones de segundo grado que no tienen solución en  $\mathbb{Q}$ , por ejemplo, la ecuación
$$x^2 - x - 1 = 0$$
no tiene solución racional.
- ★ La determinación de longitudes de segmentos, no siempre se puede hacer con números racionales.
- ★ El cálculo de longitudes de curvas, como la longitud de una circunferencia, requiere de otros números distintos de los números racionales.
- ★ El cálculo de áreas y de volúmenes, entre ellos el área de un círculo y el volumen de una esfera, necesita utilizar números que no son racionales.
- ★ Expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas.

Los números irracionales son aquellos números como  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\pi$ , ..., que estudiaste al finalizar la tercera etapa de la Escuela Básica y que has utilizado frecuentemente en los cursos posteriores. Estos números son dados mediante expresiones decimales con infinitas cifras *no periódicas* y al trabajar con ellos utilizando una calculadora, este instrumento los *aproxima* mediante un número decimal. El conjunto de los números irracionales en reunión con el conjunto de los números racionales nos da el *conjunto de los números reales*.

Antes de iniciar el estudio de esta unidad de aprendizaje, es conveniente revisar unas nociones y notaciones relacionadas con los conjuntos, las cuales presentamos en el siguiente cuadro resumen.

## CUADRO RESUMEN DE REPASO

Mediante ciertas operaciones se pueden crear conjuntos a partir de otros conocidos. Anteriormente habíamos definido una de esas operaciones, la **diferencia  $A-B$**  de dos conjuntos  $A$  y  $B$ .

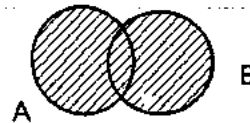
Ahora definiremos otras dos operaciones: la **reunión** y la **intersección**.

### ★ Unión o reunión de conjuntos

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se define la **reunión** o **unión** de  $A$  con  $B$ , denotada  $A \cup B$ , como sigue:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B \text{ o ambas}\}$$

$A \cup B$  se lee "A unión B" o "A reunión B". En el diagrama siguiente  $A \cup B$  está representado por la región rayada



Se puede efectuar la reunión de más de dos conjuntos sin importarnos el orden ni como se asocien, ya que esa operación de reunión de conjuntos es conmutativa y asociativa.

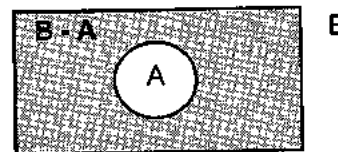
Por ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{1, 3, 5, 7\}, \text{ } A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}.$$

$$\mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}.$$

Observa que cualesquiera que sean los conjuntos  $A$  y  $B$  tales  $A \subset B$ , que se verifica que

$$A \cup (B-A) = B$$



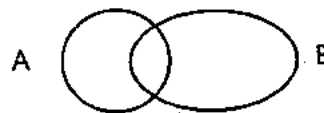
### ★ Intersección de conjuntos.

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se define la **intersección** de  $A$  con  $B$ , denotada  $A \cap B$ , mediante

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

es decir  $A \cap B$  es el conjunto formado por los elementos comunes de los conjuntos  $A$  y  $B$ .

$A \cap B$  se lee "A intersección B". En el diagrama siguiente está representado por la región sombreada



Se puede efectuar la intersección de dos o más conjuntos sin importarnos el orden en que los coloquemos o la manera como los asociemos, puesto que la intersección es conmutativa y asociativa.

Por ejemplo:

- ▼ Si A es el conjunto de los números naturales múltiplos de 2 y B es el conjunto de los números naturales múltiplos de 3, entonces  $A \cap B$  es el conjunto de los números naturales que son a la vez múltiplos de 2 y de 3, es decir, el conjunto de los números naturales múltiplos de 6:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$$

$$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$$

$$A \cap B = \{0, 6, 12, 18, \dots\}.$$

- ▼ Si  $A \subset B$  entonces  $A \cap B = A$ . Así tenemos:

$$N \cap Z = N, Z \cap Q = Z, D \cap Q = D.$$

- ▼ Si A y B no tienen elementos comunes, se dice que la intersección de A con B es el **conjunto vacío**. El conjunto vacío se denota con el símbolo  $\emptyset$  que proviene del alfabeto noruego y sirve para denotar el conjunto que no tiene elementos. Así tenemos:

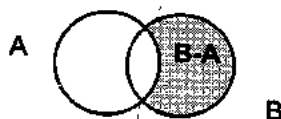
$$Z \cap Z^+ = \emptyset \text{ (Esto indica que ningún número entero es la vez negativo y positivo.)}$$

$\{x \in Q: x^2 = -1\}$  es el conjunto vacío, ya que el cuadrado de todo número racional es  $\geq 0$ , luego

$$\{x \in Q: x^2 = -1\} = \emptyset.$$

- ▼ Observa que cualesquiera que sean los conjuntos A y B se verifica:

$$A \cap (B - A) = \emptyset$$



Atención:  $\emptyset$ , no es la letra griega  $\phi$ .

## 2.2 EXPRESIONES DECIMALES PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS. NÚMEROS IRRACIONALES Y NÚMEROS REALES

Los números irracionales son aquellos que se escriben mediante una expresión decimal con infinitas cifras y no periódica, a diferencia de los números racionales que se escriben mediante una expresión decimal finita (números decimales) o infinita periódica (números racionales que no son números decimales). Parte de esto fue estudiado en el tema 1.4.

Comenzaremos revisando esto último.

### 2.2.1 Expresiones decimales periódicas y no periódicas

En el tema 1.4, al estudiar los números racionales, hicimos ver que hay dos clases de números racionales:

Recuerda que, cuando hablamos de período entendemos que este es no nulo.

Se puede demostrar el recíproco: toda expresión decimal finita o infinita periódica es igual a un número racional.

### NÚMEROS RACIONALES

(son los números de la forma  $p/q$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .)

**\* NÚMEROS DECIMALES:** Son los números de la forma  $p/10^n$ , donde  $p \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Estos números se escriben en notación decimal mediante una **expresión decimal finita**. El conjunto de los números decimales se denota por  $D$ .

**\* NÚMEROS RACIONALES QUE NO SON NÚMEROS DECIMALES, ESTO ES EL CONJUNTO Q-D:** Estos números se escriben en notación decimal mediante una **expresión decimal infinita periódica**.

**Todo número racional se escribe mediante una expresión decimal finita o infinita periódica y viceversa.**

Aún más, en ese tema 1.4, demostramos la siguiente proposición que nos permite averiguar cuando un número racional  $p/q$  es o no es número decimal:

**Una fracción irreducible  $p/q$  es un número decimal si y sólo si el denominador  $q$  admite como únicos factores primos a 2 y 5.**

*Ejemplos adicionales a los dados en el tema 1.4:*

$$+ \quad \frac{68}{55} = \frac{68}{5 \times 11} \notin D$$

Se tiene

pues es una fracción irreducible y el denominador 55 tiene el factor primo 11.

$$\frac{68}{55} = 1,236363636\ldots = 1,2\overline{36}$$

Parte entera.      Período.

Infinitas cifras decimales periódicas.      Parte decimal no periódica o anteperíodo

$$+ \quad \frac{7}{20} = 0,35 \in D$$

(fracción irreducible y los únicos factores primos del denominador son 2 y 5, ya que  $20 = 2^2 \cdot 5$ ).

+  $\frac{145}{7} \notin \mathbb{D}$  pues es una fracción irreducible y el denominador tiene el factor primo 7.

Se tiene

$$\frac{145}{7} = 20,71428571... = 20,\overline{714285}$$

es una expresión decimal infinita periódica, con período 714285. ■

### Ejercicio propuesto 2.2.1

Determina la expresión decimal de las siguientes fracciones, justificando en cada caso si son o no son números decimales:

$$1/6, \quad 2/7, \quad 4/5, \quad 45/6, \quad 145/6,$$

y señala el período en las que son expresiones decimales infinitas.

### ● Expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas

Consideremos la siguiente expresión decimal con infinitas cifras:

$$1,01001000100001...$$

Observemos que esta expresión decimal no es periódica ya que se va colocando un cero (0) adicional en cada bloque de ceros entre los unos sucesivos, evitando así que las cifras se repitan a partir de alguno de ellos.

He aquí otras expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas:

$$\begin{aligned} &0,123456789101112, \dots \\ &6,23223332223333, \dots \end{aligned}$$

*Explica por qué esas expresiones decimales no son periódicas y escribe otras seis cifras que siguen a las dadas.*

Estas expresiones decimales infinitas y *no periódicas*, según lo dicho en el primer recuadro anterior, no se pueden asociar con números racionales. En consecuencia, el conjunto de los números racionales no contiene a todas las expresiones decimales con infinitas cifras. **Esta situación sugiere la ampliación del conjunto  $\mathbb{Q}$ .** ■

Presentaremos a continuación **otras situaciones que sugerirán la necesidad de ampliar el conjunto de los números racionales.**

- Supongamos que se quiere determinar el siguiente conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 4\},$$



lo cual conduce a resolver la ecuación  $x^2 = 4$ . ¿Existe algún número racional cuyo cuadrado sea 4?  
Observemos lo siguiente:

$$(2)^2 = 4 \quad \text{y} \quad (-2)^2 = 4,$$

entonces podemos decir que 2 y -2 son soluciones de la ecuación  $x^2 = 4$ . Luego

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 4\} = \{2, -2\}.$$

Consideremos otra ecuación cuadrática, la ecuación  $x^2 = 6$ . [1]

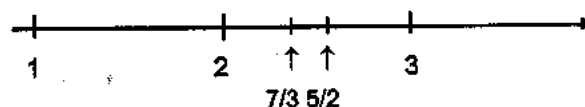
Esto es, ¿existe algún número racional cuyo cuadrado sea igual a 6?

Intentemos probando con algunos números. Comencemos con los números enteros:

$0^2 = 0 < 6$	$(-1)^2 = 1 < 6$
$1^2 = 1 < 6$	$(-2)^2 = 4 < 6$
$2^2 = 4 < 6$	$(-3)^2 = 9 > 6$
$3^2 = 9 > 6$	$(-4)^2 = 16 > 6$
$4^2 = 16 > 6$	
.....	.....

Luego la ecuación [1] no tiene solución entera. Como  $2^2 = 4$  con  $4 < 6$  y  $3^2 = 9$  con  $9 > 6$ , podemos ensayar con números racionales comprendidos entre 2 y 3, por

ejemplo  $\frac{7}{3}$  y  $\frac{5}{2}$ :  $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5,4\overline{4} \approx 5,44$  siendo  $5,44 < 6$ ,



$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6,25, \text{ siendo } 6,25 > 6.$$

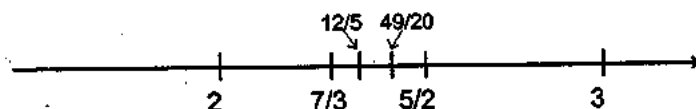
De aquí podemos deducir que  $\frac{7}{3}$  y  $\frac{5}{2}$  no son soluciones de la ecuación  $x^2 = 6$ .

Ensayemos con otros dos números comprendidos entre  $\frac{7}{3}$  y  $\frac{5}{2}$ , como son  $\frac{12}{5}$  y  $\frac{49}{20}$ .

Se tiene

$$(12/5)^2 = 144/25 = 5,76 \quad \text{y} \quad 5,76 < 6,$$

$$(49/20)^2 = 2401/400 = 6,0025 \quad \text{y} \quad 6,0025 > 6,$$





Observemos que hemos encontrado números racionales cuyos cuadrados se *aproximan* a 6.

Podríamos continuar *intentando* hallar números racionales que elevados al cuadrado den exactamente 6, lo cual no llegaríamos a encontrar. (Da ejemplos de dos números racionales  $a, b$ , tales que  $a^2 < 6$ ,  $b^2 > 6$  y además  $12/5 < a < b < 49/20$ ).

Otros ejemplos de ecuaciones cuadráticas sin solución en el conjunto  $\mathbb{Q}$  son:

$$x^2 = 3; x^2 = 5; x^2 = 8; x^2 = 10.$$

¿Cómo sabemos que esas ecuaciones no tienen solución en el conjunto  $\mathbb{Q}$ ?

Observa que los números 3, 5, 6, 8, 10, no son cuadrados de otros números enteros y por lo tanto, las ecuaciones mencionadas no tienen solución en el conjunto  $\mathbb{Z}$ .

Sin embargo, podría existir la posibilidad de que esas ecuaciones tengan soluciones racionales no enteras, es decir, en el conjunto  $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ .

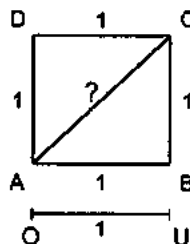
Se puede demostrar lo siguiente:

*Si  $a$  es un entero positivo que no es el cuadrado de algún número entero, entonces tampoco es el cuadrado de ningún número racional. Esto nos dice que en tal caso la ecuación  $x^2 = a$  no tiene solución en el conjunto  $\mathbb{Q}$ , o sea, no existen números racionales cuyos cuadrados resulten iguales al número  $a$ .*

Esto es otro motivo que sugiere la conveniencia de ampliar el conjunto de los números racionales. ■

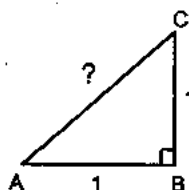
### ● Longitud de segmentos

Consideremos el segmento unidad  $\overline{OU}$ , esto es  $\overline{OU} = 1$ . Construyamos un cuadrado cuyos lados tengan longitud igual a 1:



¿Cuánto mide la diagonal  $\overline{AC}$ ?

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo



tenemos que  $\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ .

Por lo tanto, la longitud de la diagonal  $\overline{AC}$  no es un número racional, puesto que ya sabemos que *no hay* números racionales cuyo cuadrado sea 2.

Si, con un compás, se lleva esa longitud  $\overline{AC}$  sobre la regla graduada (digamos en centímetros).

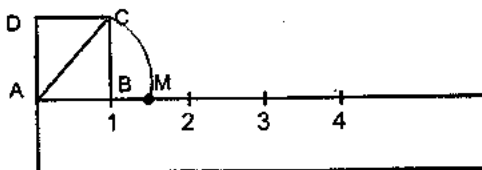


Ver ejercicios.

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

A lo situa-  
mos en el  
origen 0.



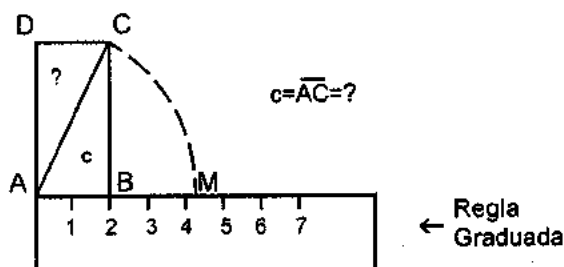
de tal forma que  $\overline{AC} = \overline{AM}$ , el punto  $M$  cae entre 1,4 cm y 1,5 cm.  
Observemos que

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = (1,5)^2.$$

$$\overline{AC} = \overline{AM}, \\ \overline{AM}^2 = 2.$$

Luego, el punto  $M$  no tiene asociado un número racional, por lo antes expresado.  
Por lo tanto, para medir las longitudes de los segmentos, como el segmento  $\overline{AC}$ , o el  $\overline{AM}$ , necesitaremos de otros números. ■

Otro ejemplo



$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 = 20, \text{ donde } c = \overline{AC} = \overline{AM}$$

$$\overline{AM}^2 = 20.$$

y ya sabemos que no existen números racionales cuyos cuadrados sean iguales a 20.  
¿Por qué?

Observa que:  $(4,4)^2 = 19,36 < 20 < 20,25 = (4,5)^2$  luego, el punto  $M$  está entre las divisiones 4,4 y 4,5 de esa regla graduada.

## 2.2.2 Números irracionales y números reales

### ● Números Irracionales

De los ejemplos expuestos anteriormente se ha llegado a la necesidad de introducir nuevos números que amplíen el conjunto de los números racionales. Estos nuevos números se llaman *números irracionales*.

?

#### ¿Cómo se definen los números irracionales?

El primer ejemplo que dimos con las expresiones decimales infinitas no periódicas:

1,01001000100001 ...  
0,123456789101112 ...  
6,23223332223333 ...

nos sirve de base para adoptar la definición siguiente:

El conjunto de los números irracionales se define como el conjunto de las expresiones decimales con infinitas cifras no periódicas. Dicho conjunto lo denotamos por  $I$ .



Además de los ejemplos con que iniciamos esta unidad, dados en 2.2.1, presentamos a continuación otros ejemplos.

- Los siguientes números dados por expresiones decimales con infinitas cifras son números irracionales:

$$0,112221112222 \dots$$

$$31,010203001002003000100020003 \dots$$

donde en cada uno de ellos las cifras después de la coma decimal siguen determinadas leyes de formación (*¿cuáles?*) que impiden la periodicidad de dichas cifras. ■

- Se puede demostrar (*no lo haremos*) que las soluciones de las siguientes ecuaciones

$$x^3 = 2, \quad x^3 = 3, \quad 2^x = 10$$

Son números irracionales.

Recuerda, de tus estudios previos, que esas ecuaciones tienen, respectivamente, las siguientes soluciones

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad x = \sqrt[3]{3}, \quad x = 1/\log 2. \quad \blacksquare$$

- El muy conocido número  $\pi$  ( $\pi$ ) es un número irracional, dado por  $\pi = 3,141592654 \dots$

Acerca de este número irracional y otros como  $\sqrt{2}$  y el número "e", ver *nota histórica* al final de la unidad 2. ■

## • Números Reales

Hasta ahora estudiamos los números naturales, enteros, decimales, racionales e irracionales. El por qué de este estudio se justificó sobre la base de ampliar, progresivamente, esos conjuntos de números debido a diversos problemas que no tenían solución en alguno de ellos y en consecuencia ello amerita crear nuevos números.

Ya sabemos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

y ahora tenemos otro conjunto de números, los irracionales  $I$ , tal que  $\mathbb{Q}$  no es un subconjunto de  $I$  ( $\mathbb{Q} \not\subset I$ ) puesto que:

Los elementos de  $\mathbb{Q}$  están dados por expresiones decimales finitas o infinitas periódicas.

Los elementos de  $I$  están dados por expresiones decimales infinitas no periódicas.

$\not\subset$  símbolo de "no está contenido en" o "no es subconjunto de".

Por lo tanto, si reunimos esos dos conjuntos,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$ , obtendremos otro conjunto que si contiene a  $\mathbb{Q}$ .

Este conjunto, así obtenido es el de los números reales.

Las ideas expuestas en todo lo que antecede nos permiten formular una primera noción acerca del número real. Por éste entenderemos a todo número racional o irracional, es decir

Al conjunto resultante de la unión del conjunto de los números racionales con el de los números irracionales, se conoce como el conjunto de los números reales y se denota por  $\mathbb{R}$ .

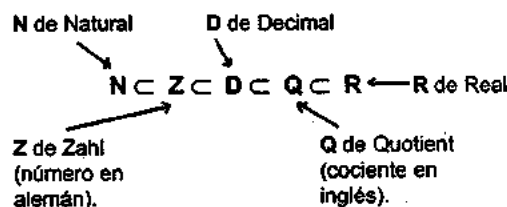
Luego, todo número  $x$  tal que  $x$  es racional ( $x \in \mathbb{Q}$ ) o bien que  $x$  sea irracional ( $x \in \mathbb{I}$ ), se denomina *número real*.

De esa definición de número real se deduce que:

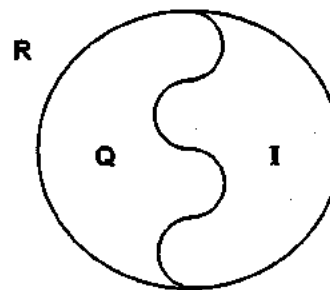
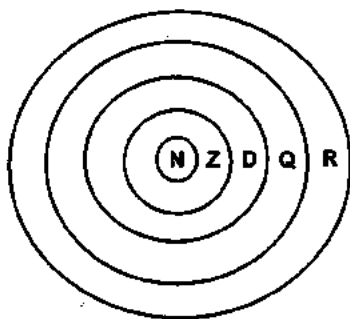
Un número real es cualquier número que se puede escribir mediante una expresión decimal periódica o no periódica.

De esta manera hemos ampliado el conjunto de los números racionales puesto que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Resumiendo las ampliaciones sucesivas de los conjuntos numéricos estudiados se obtienen las inclusiones siguientes:



y la inclusión  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ , las cuales representamos en los siguientes diagramas:



y por tanto se tiene

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

( $\mathbb{R}$  es la reunión de los conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$ )

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

(La intersección de los conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$  es el conjunto vacío, es decir, un número real no puede ser número racional y número irracional a la vez).

$$\mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{I}$$

(Los números racionales son los números reales que no son números irracionales)

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = ?$$

(..... ? .....)

## Ejemplos 2.2

1. Dados los siguientes números

$$1/3; \sqrt{17}; \sqrt{25}; 4,616161 \dots; \sqrt{13}$$

$$(\sqrt{11})^2; (-2/3)^2; 2,979977999777 \dots$$

donde los puntos suspensivos indican infinitas cifras que siguen una determinada ley (averíguala).

Clasifícalos según su pertenencia al más pequeño (por la relación de inclusión) de los siguientes conjuntos  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ .

$$\blacktriangle 1/3 \in \mathbb{Q}; 4,616161 \dots \in \mathbb{Q}; (12/3)^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{17} \in \mathbb{I}; \sqrt{13} \in \mathbb{I}; 2,979977999777 \dots \in \mathbb{I}$$

$$\sqrt{25} \in \mathbb{N}; (\sqrt{11})^2 \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

2. Escribe cinco elementos del conjunto

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5 \text{ y } x^2 \text{ se "aproxima" a } 5\}$$

donde la "aproximación" de  $x^2$  a 5 la entendemos en el sentido de que  $5 - x^2 < 1$ .

$\blacktriangle$  Podemos escribir los siguientes números

$x = 2,$	ya que $2^2 = 4 < 5$
$x = 2,2$	ya que $(2,2)^2 = 4,84 < 5$
$x = 2,23$	ya que $(2,23)^2 = 4,9729 < 5$
$x = 2,236$	ya que $(2,236)^2 = 4,999696 < 5$
$x = 2,23606$	ya que $(2,23606)^2 = 4,999964324 < 5$

Observa que

$$5 - 4 = 1$$

$$5 - 4,84 = 0,16 < 1, \dots \quad \blacksquare$$

3. Escribe los elementos de los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = -2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \approx 3 \text{ y } 1 \leq x \leq 2\}$$

$\blacktriangle A = \emptyset$  es decir A no tiene elementos ya que el cuadrado de todo número racional es  $\geq 0$ .

B tiene infinitos elementos, luego, no podemos hacer una "lista" de todos sus elementos.



He aquí algunos elementos de  $B$ : 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,8; 2.  
 Observa que cualquier número racional comprendido entre 1 y 2 pertenece a  $B$   
 (¿por qué?). ■



### Ejercicios propuestos 2.2.2

1. Escribe los elementos de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 100\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : 3x^2 = 27\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 5\}.$$

2. Escribe cinco elementos comprendidos entre 3 y 4 que pertenezcan al conjunto

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 10\}.$$

3. Completa las siguientes expresiones a los fines de tener una igualdad:

$$Z \cup D = \quad , \quad D \cap I =$$

$$Q \cap N = \quad , \quad R \cup Q =$$

$$D \cup (Q - D) = \quad , \quad I \cup (R - I) = .$$

## 2.3 OPERACIONES CON LOS NÚMEROS REALES

En el conjunto de los números reales se encuentran definidas dos operaciones básicas que son: *la adición y la multiplicación*.

Estas operaciones tienen propiedades análogas a las de la adición y multiplicación con números racionales, las cuales mencionaremos a continuación:

Cualesquiera que sean los números reales  $x, y, z$ , se verifican las siguientes propiedades:

ADICIÓN	MULTIPLICACIÓN
♥ $x + y \in \mathbb{R}$	♠ $x \cdot y \in \mathbb{R}$
♥ $x + y = y + x$	♠ $x \cdot y = y \cdot x$
♥ $x + (y + z) = (x + y) + z$	♠ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
continúa...	

Elemento neutro	
♥ El número real 0 verifica que $x + 0 = 0 + x = x$	▲ El número real 1 verifica que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
Elemento simétrico (opuesto en el caso de la adición e inverso en el caso de la multiplicación)	
♥ Dado x, existe un número real -x tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$	▲ Dado $x \neq 0$ , existe un número real $1/x$ tal que $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$
	<b>Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición</b> ▲ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

1/x también se denota por  $x^{-1}$ .

Observa que esas propiedades son las mismas que dimos anteriormente cuando estudiamos en 1.6.1 las operaciones de adición y multiplicación con los números racionales y, por lo tanto, desde el punto de vista de dichas operaciones no existe diferencia entre ambos conjuntos. En consecuencia, aquellas propiedades de la adición y la multiplicación que se demostraron anteriormente o que conoces de estudios previos son las mismas para números racionales y números reales.

Por ejemplo:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Y se pueden deducir muchas otras propiedades y fórmulas que son consecuencia de las propiedades del cuadro anterior.

Por ejemplo:

Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Si  $x + z = y + z$ , entonces  $x = y$  (propiedad de cancelación para la adición).

▲ Como  $z$  es un número real entonces  $-z$  también lo es (propiedad del elemento opuesto). Así que sumando  $-z$  a ambos miembros de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} (x + z) + (-z) &= (y + z) + (-z) \\ x + (z + (-z)) &= y + (z + (-z)) \quad (\text{por la propiedad asociativa}) \end{aligned}$$

Como  $z + (-z) = 0$ , (propiedad del elemento opuesto) se tendrá que

$$x + 0 = y + 0$$

de aquí que aplicando la propiedad del elemento neutro cero, resulta

$$x = y. \quad \blacksquare$$

También, a partir de la adición y la multiplicación puedes definir las operaciones de sustracción  $x - y$  y de división  $x/y$  ( $y \neq 0$ ) de dos números reales  $x, y$  (hacerlo) y las propiedades de estas operaciones son análogas a las que ya conoces con los números racionales (enuncia algunas).

**Atención.** Tanto  $I$  como  $Q$  son subconjuntos de  $R$  pero, a diferencia del conjunto  $Q$  en el cual la adición, sustracción, multiplicación y división de dos números racionales es otro racional, en el conjunto  $I$  de los números irracionales esto no ocurre. Por ejemplo:

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in Q$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in Q$$

$$\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \in Q$$



### Ejercicios propuestos 2.3



1. Decide cuáles de los siguientes tipos de números no pueden ser números racionales:
  - a) Los recíprocos de números irracionales.
  - b) La mitad de un número irracional.
  - c) Los productos de números irracionales por números irracionales.

2. Dados  $x$  un número irracional,  $\alpha$  un número racional, ¿a cuál conjunto pertenecen los números

$$x + \alpha, x - \alpha, \alpha x, x / \alpha?$$



3. Sean  $x, y, z \in R$ .

Demuestra, explicando cada paso dado, las siguientes propiedades:

- a)  $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
- b)  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  ó  $y = 0$

4. Representa los siguientes productos como sumas, y simplifica. Menciona las propiedades usadas en cada caso.

- a)  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- b)  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

5. En la siguiente expresión explica las propiedades que utiliza para demostrar la igualdad

$$a(x+2) + a(x+3) = a(2x+5)$$

válida cualesquiera que sean  $a, x \in R$ .

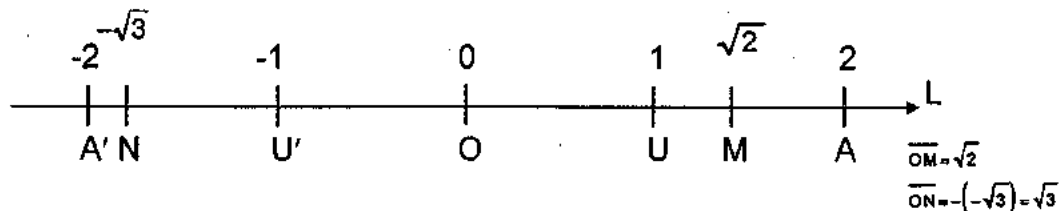
## 2.4 APROXIMACIONES DECIMALES DE NÚMEROS REALES

En este tema estudiaremos la forma de aproximar los números reales mediante números decimales, de manera semejante a lo que hicimos al aproximar expresiones decimales infinitas y periódicas. Utilizaremos con frecuencia la representación gráfica de los números reales, tema que será estudiado con más detalles en la próxima unidad al desarrollar lo concerniente con el orden de los números reales y en la Unidad 4 del Módulo II al estudiar los sistemas de coordenadas.



Partiendo del conocimiento previo que se tiene por los estudios precedentes, debemos recordar que los números reales se pueden representar mediante los puntos de una recta, de manera análoga a como hicimos para representar geoméricamente los números racionales.

Así, si  $L$  es una recta y  $x \neq 0$  es un número real, entonces le podemos asociar un punto  $M \in L$  a la derecha del punto origen  $O$  si  $x$  es positivo, y a la izquierda de  $O$  si  $x$  es negativo. De esta forma la longitud del segmento  $OM$  es igual a  $x$  o  $-x$ , dependiendo de si  $M$  se sitúa a la derecha o a la izquierda de  $O$ , y así las longitudes de los segmentos son números reales no negativos:



Pasemos ahora a estudiar la siguiente situación:

Se quiere cortar en tres partes de igual longitud un listón de un metro de largo. Para esto tomamos una regla graduada en centímetros y se deben hacer marcas en  $1/3$  m y  $2/3$  m.

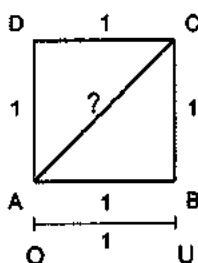
Ahora bien  $1/3 \text{ m} = 0,333 \dots \text{ m} = 0,3\overline{3} \text{ m} = 33,3\overline{3} \text{ cm}$ .

$2/3 \text{ m} = 0,666 \dots \text{ m} = 0,6\overline{6} \text{ m} = 66,6\overline{6} \text{ cm}$ .

Luego se hacen las marcas en 33 cm (aproximación por defecto de  $1/3$  m) y en 67 cm (aproximación por exceso de  $2/3$  m). ■

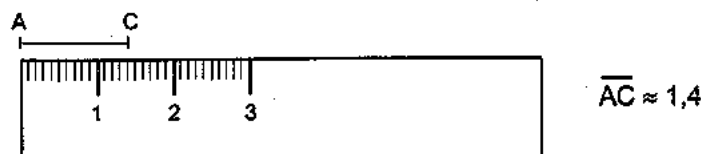
En ejemplos como el anterior y en muchos otros que presentamos en la Unidad 1, al estudiar los números racionales, surge de modo natural la idea de "aproximación" al tener que truncar la expresión decimal infinita periódica para tomar solamente algunas cifras.

Truncamiento que se presentará también al querer calcular la longitud de la diagonal  $AC$  del cuadrado de lado uno,



resultando  $\overline{AC}^2 = 2$ . Luego, la longitud  $\overline{AC} = \sqrt{2}$  no es un número racional.

Si medimos esa diagonal con una regla graduada donde la unidad  $\overline{OU}$  se ha dividido en 10 partes iguales



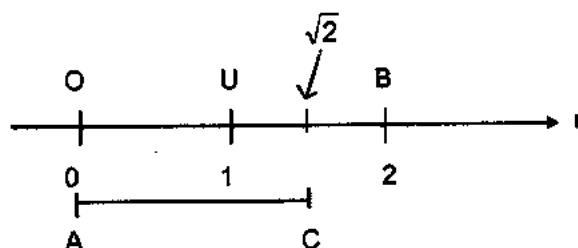
se obtiene para  $\overline{AC}$  el valor de 1,4 (unidades).

Ese valor 1,4 (unidades) es un valor "aproximado" de  $\overline{AC}$  ya que  $(1,4)^2 = 1,96$ , lo que no es exactamente igual a 2.

De lo antes expuesto concluimos que en la práctica se "aproximan" los números irracionales utilizando expresiones decimales finitas (números decimales) y aquellos números racionales cuya expresión decimal es periódica ya sabemos que también se aproximan mediante expresiones decimales finitas (números decimales).

Veamos ahora como calcular expresiones decimales aproximadas del número irracional  $\sqrt{2}$ . Para esto tengamos en consideración la interpretación geométrica anterior con la diagonal  $AC$ , sabiendo que  $\overline{AC} = \sqrt{2}$ . Como  $1^2 = 1 < 2$  y  $2^2 = 4 > 2$  entonces los números 1 y 2 "aproximan"  $\overline{AC}$ , es decir, a longitud  $\overline{AC}$  medida con una regla graduada es tal que  $1 < \overline{AC} < 2$  como observamos en la figura anterior. Decimos entonces que 1 (respectivamente 2), es una aproximación por defecto (resp. por exceso) de  $\sqrt{2}$ .

Luego, podemos decir que, en una recta  $r$ , con una unidad de medida que es la longitud del segmento  $OU$ ,  $\sqrt{2}$  está entre 1 y 2:



Al definir la relación de orden en  $\mathbb{R}$ , esto quiere decir

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

- ✦ Ahora dividamos el segmento  $UB$  en 10 segmentos, cada uno de longitud

$$\frac{\overline{UB}}{10} = \frac{1}{10}$$

y comprobamos que

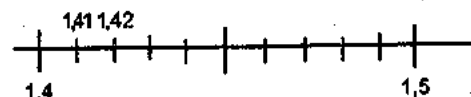
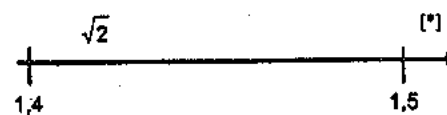
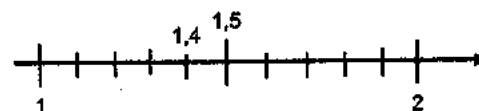
$$(1,4)^2 = 1,96 < 2$$

$$(1,5)^2 = 2,25 > 2$$

entonces

1,4 y 1,5 también son aproximaciones de  $\overline{AC} = \sqrt{2}$ .

- ✦ Tomemos el segmento de extremos 1,4 y 1,5 y lo dividimos en 10 partes iguales y verificamos que:



continúa...

[\*] El dibujo del segmento de extremos 1,4 y 1,5 está ampliado diez veces.

$$(1,41)^2 = 1,9881$$

$$(1,42)^2 = 2,0164$$

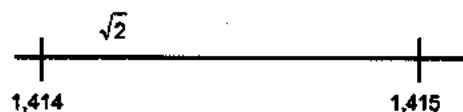
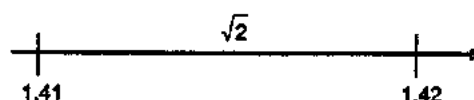
y por lo tanto

1,41 y 1,42 son aproximaciones de

$$AC = \sqrt{2}.$$

- ✦ Si repetimos el proceso con el segmento de extremos 1,41 y 1,42, obtenemos las aproximaciones

1,414 y 1,415.



El dibujo de este segmento está ampliado diez veces.

El dibujo de este segmento está ampliado diez veces.

Continuando este proceso, determinamos aproximaciones de  $\sqrt{2}$  que son números decimales y que pueden tener tantas cifras como queramos.

Los números decimales

1; 1,4; 1,41; 1,414; ...

son *aproximaciones decimales por defecto* de  $\sqrt{2}$ , pues sus cuadrados son números menores que 2.

Los números decimales

2; 1,5; 1,42; 1,415; ...

son *aproximaciones decimales por exceso* de  $\sqrt{2}$ , pues sus cuadrados son números mayores que 2.

El número irracional  $\sqrt{2}$  determina una expresión decimal con infinitas cifras no periódicas, esto es, no se pueden hallar todas las cifras decimales de este número. Lo que se hace al calcularlo es encontrar aproximaciones por defecto o por exceso.

Si buscamos el valor de  $\sqrt{2}$  usando la calculadora aparecerá en pantalla 1,4142136 (calculadora que trabaja con 8 dígitos), que es un valor aproximado de  $\sqrt{2}$ .

En otra calculadora que trabaja con 10 dígitos, se tiene  $\sqrt{2} \approx 1,414213562$  y por lo tanto el valor 1,4142136, que es un redondeo del anterior, es una aproximación por exceso de  $\sqrt{2}$  ( $(1,4142136)^2 = 2,000000106 > 2$ ).

Las aproximaciones consideradas dependen de la precisión requerida por el cálculo que vamos a realizar.



## Ejemplos 2.4

1. En una calculadora leemos  $\sqrt{8} = 2,8284271$ .

Este = significa ≈

[\*] La secuencia en algunas calculadoras para obtener  $\sqrt{a}$ ,  $a > 0$  es la siguiente: **ON** **8** **INV** **2.8284271**. La tecla **INV** se refiere a que junto con la tecla que indica  $x^2$  figura en otro color (frecuentemente azul o rojo) la  $\sqrt{x}$ , siendo INV indicativo de la función inversa. Consulta en el manual de operaciones de la calculadora el manejo de la tecla INV o su equivalente, dependiendo de la calculadora que utilices.

Escribe las aproximaciones de  $\sqrt{8}$  con una cifra decimal y con dos cifras decimales.

▲ Se tiene:

2,8 y 2,9 son aproximaciones con una cifra decimal de  $\sqrt{8}$ .

Observa que

$$(2,8)^2 = 7,84 < 8$$

$$(2,9)^2 = 8,41 > 8.$$

Cuando consideramos 2,8 y 2,9 como aproximaciones de  $\sqrt{8}$ , queremos señalar que son "las mejores aproximaciones" con una cifra decimal, la primera por defecto y la segunda por exceso. Nótese que 2,2 ; 2,3 ; 2,6 ; 2,7, etc. también son aproximaciones con una cifra decimal pero no son las "más próximas" a  $\sqrt{8}$ , como si lo son 2,8 y 2,9.

**Siempre trabajaremos con las "mejores" o "más próximas" aproximaciones del número dado.**

2,82 y 2,83 son las "mejores aproximaciones" de  $\sqrt{8}$  con dos cifras decimales. Observa que

$$(2,82)^2 = 7,9524 < 8$$

$$(2,83)^2 = 8,0089 > 8$$

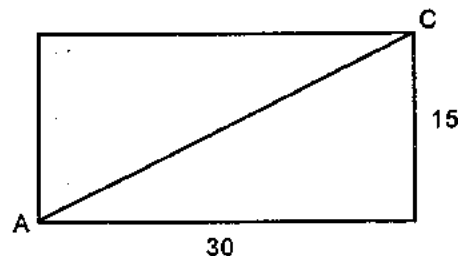
2,82 (resp. 2,83) es aproximación por defecto de  $\sqrt{8}$  (resp. por exceso). ■

2. Se tiene un terreno rectangular de lados 15 m y 30 m. Queremos cercar ese terreno y además tirar una cerca en una diagonal. ¿Cuál es la longitud total de la cerca?

▲ Por el teorema de Pitágoras se tiene  $\overline{AC}^2 = 15^2 + 30^2 = 1125$  y por lo tanto  $\overline{AC} = \sqrt{1125}$  m.

La longitud total  $\mathcal{L}$  de la cerca, en metros, es:

$$\mathcal{L} = 2 \times 15 + 2 \times 30 + \sqrt{1125} = 90 + \sqrt{1125},$$



y por lo tanto se debe sumar el número entero 90 con el número irracional  $\sqrt{1125}$ . Lo que se hace en la práctica es considerar una aproximación de  $\sqrt{1125}$  y sumar esa aproximación con 90.

Como  $\sqrt{1125} = 33,54101966\dots$ , a los fines prácticos podemos considerar  $\sqrt{1125} \approx 33,54$  m, es decir estamos midiendo la diagonal hasta los centímetros lo cual se aprecia en las cintas métricas con que se efectúan las mediciones. En consecuencia se tiene  $\mathcal{L} = 90 \text{ m} + 33,54 \text{ m} = 123,54 \text{ m}$  es la longitud total de la cerca.

**Conclusión:** A los fines prácticos de sumar dos números reales, una vez que se hacen todas las simplificaciones posibles, se suman aproximaciones decimales de los números y lo que resulta es una aproximación de la suma. ■

3. Queremos calcular el producto  $a = (3 \sqrt[3]{9})^{\frac{2}{3}}$ .

▲ Podemos calcular  $a$  mediante aproximaciones de  $\sqrt[3]{9}$  y  $\sqrt[3]{3}$ :

$$\sqrt[3]{9} = 2,08008382....., \sqrt[3]{3} = 1,44224957.....$$

Si consideramos aproximaciones al centésimo (con dos cifras decimales), se tiene:

$$a \approx (3 \times 2,08) \times 1,44 = 8,9856.$$

Observa ahora que en un caso como este es preferible primero aplicar las propiedades de la multiplicación para luego efectuar el cálculo:

$$a = 3 (\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{3}) = 3 \sqrt[3]{9 \times 3} = 3 \sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9.$$

**¿Cuáles propiedades utilizamos?**

dando un resultado exacto en comparación con  $a \approx 8,9856 \approx 8,99$  (redondeo). ■



#### Ejercicios propuestos 2.4

1. Dado el número real 1,0327162..., indica cuáles de los siguientes números son aproximaciones con números decimales, por defecto o por exceso, del número dado:

a) 1 ; 2 ; 1,03 ; 1,04 ; 1,0327362.

- b) Escribe las aproximaciones con cuatro cifras decimales de ese número (se sobreentiende que son "las mejores aproximaciones").

2. En una calculadora se lee

$$\sqrt{27} = 5,1961524 \text{ y } \sqrt{38} = 6,164414.$$

Escribe las aproximaciones, por defecto y por exceso, con 4 cifras decimales de  $\sqrt{27}$  y  $\sqrt{38}$ .

3. Calcula los valores aproximados (por defecto y por exceso) con cuatro cifras decimales de los siguientes números:

a)  $\sqrt{e}$  ; b)  $\sqrt{\pi}$  ; c)  $\sqrt[3]{21}$ .

4. Supongamos que se tiene una caja en forma de cubo cuyo volumen es  $200 \text{ cm}^3$ . ¿Cuánto mide la arista de esa caja?

5. Una pelota de forma esférica tiene un volumen igual a  $160/9 \text{ dm}^3$ . ¿Cuál es el diámetro de la pelota?

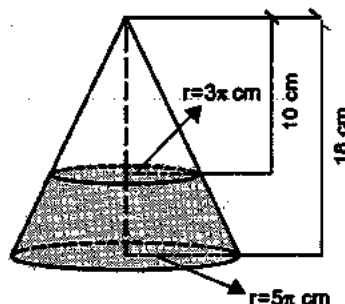
6. Sabemos que el área  $A$  de un círculo de radio  $r$  es  $A = \pi r^2$ . Si se tiene un círculo de área  $6 \text{ m}^2$  indica aproximadamente, ¿Cuál es el radio en metros y con tres cifras decimales?



7. Se sabe que el volumen de un cono de altura  $h$  y radio de la base  $r$ , es igual a  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ , es decir,

$$\text{Volumen}_{\text{cono}} = \frac{h}{3} \pi r^2.$$

Calcula el volumen del sólido sombreado.



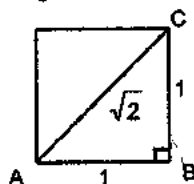
8. Efectúa los siguientes cálculos dando los resultados con tres cifras decimales después de la coma y en notación científica:
- a)  $\pi \left( \sqrt{2} - \frac{5}{\pi} \right)$ .      b)  $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ .
- c)  $\sqrt{7} + 2,0134567$ .      d)  $2,13 + 0,5 + \sqrt{2}$ .
9. Calcula el producto  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$  de dos formas distintas.
10. ¿Cuáles de los siguientes números decimales 2,21 y 2,23 son aproximaciones por defecto o por exceso del número irracional  $x$  tal que  $x^3 = 11$ ?

## NOTA HISTÓRICA ACERCA DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES: EL NÚMERO $\sqrt{2}$ , EL NÚMERO $\pi$ ( $\pi$ ) Y EL NÚMERO $e$

### EL NÚMERO $\sqrt{2}$

Los Pitagóricos de la Grecia antigua (s.VI a.C) querían obtener una expresión para medir la diagonal de un cuadrado tomando como unidad de medida la longitud de un lado, esto es, buscaban la razón entre la longitud de la diagonal y la longitud de un lado y esperaban calcularla como la razón entre dos números naturales. Esta idea de "razón" es la que conduce al uso del término racional en el sentido de "que tiene una razón".

Los Pitagóricos sabían que en un triángulo rectángulo se verifica lo siguiente (Teorema de Pitágoras): el cuadrado de la longitud del lado más largo (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados más cortos (catetos). Ahora bien, si cada lado de un cuadrado mide una unidad, entonces el cuadrado de la longitud de la diagonal es  $1^2+1^2=2$ . Por lo tanto, la longitud de la diagonal, en notación actual, es  $\sqrt{2}$ , tal como lo indica la siguiente figura:



Por consideraciones geométricas, conocidas por los Pitagóricos, tales como:

- La hipotenusa es mayor que cualquier cateto.
- La hipotenusa es menor que la suma de los dos catetos, deducían que la hipotenusa del triángulo ABC está comprendida entre los enteros 1 y 2 y, por lo tanto, no puede ser un entero pues entre 1 y 2 no hay otro entero. Entonces, la hipotenusa debe ser una fracción o razón entre dos enteros  $p/q$  y de aquí obtenían una contradicción <sup>[1]</sup>. Ante esta contradicción concluían que la hipotenusa era "inexpresable" pues no se podía expresar mediante números. Esto se debía a que los únicos números conocidos por los Pitagóricos eran los enteros y los fraccionarios positivos, es decir, los que actualmente denominamos números racionales positivos.

Este descubrimiento asombró mucho a los griegos: ¡habían longitudes sin un número aceptable con qué designarlas! Enunciaron el hecho diciendo: "la diagonal de un cuadrado y su lado son *incommensurables*".

Debido a esas dificultades de expresar longitudes de segmentos y algunas otras que se presentaron posteriormente, así como a una falta de notación adecuada en los problemas aritméticos y algebraicos, los griegos prestaron mayor atención a la geometría, campo fecundo en el que lograron progresos notables. El resultado fue que parte de la matemática dependiente de los cálculos aritméticos, el álgebra y la trigonometría, por ejemplo, quedaron desatendidos durante siglos. ■

---

[1] Es fácil demostrar que  $\sqrt{2}$  no puede ser un número fraccionario  $p/q$ . A continuación presentamos la demostración clásica de los Pitagóricos, en la notación actual: en primer lugar,  $p$  y  $q$  no pueden ser ambos pares pues en tal caso simplificamos por 2 hasta obtener una fracción irreducible; en segundo lugar, si  $p/q = \sqrt{2}$ , entonces  $p^2 = 2q^2$  y por lo tanto  $p^2$  es un entero par lo cual implica que  $p$  también es un entero par; si sustituimos  $p=2m$  en la igualdad anterior, resulta  $2m^2 = q^2$  y por lo tanto  $q^2$  es un entero par, de donde  $q$  también lo es. Esto contradice la suposición de que  $p$  y  $q$  no son simultáneamente números pares.

## EL NÚMERO PI ( $\pi$ )

El número pi desempeña un papel importante en la matemática y en otras ciencias. PI es la razón de la longitud de la circunferencia a la longitud de su diámetro. Esta razón se denota con la letra griega  $\pi$  debido a que dicha letra es la inicial de la palabra griega "περίμετρο" la cual significa "perímetro". El uso de esta notación se debe al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), a partir del año 1737, aunque esta notación se encontraba en una obra anterior de 1706 debida a William Jones.

La historia del número  $\pi$  podemos dividirla en tres etapas.

**La primera etapa**, desde la época más antigua, pasando por los griegos, hasta mitades del siglo XVII.

En esta etapa se tienen los primeros valores que corresponderían al número  $\pi$ . Ya en la civilización babilónica (2000-200 a.C.) se calculaba la longitud de una circunferencia multiplicando su diámetro por 3, lo que equivale a decir que  $\pi=3$ .

En uno de los documentos matemáticos más antiguos que existen, el *papiro egipcio Rhind* (escrito por el escriba Ahmes hacia el año 1650 a.C.) figura el siguiente problema: ¿Cuál es la cantidad de grano que puede contener un granero cilíndrico de diámetro 9 y altura 6? Para resolver este problema los egipcios utilizaban la fórmula  $A = (8d/9)^2$  para determinar el área A de un círculo de diámetro d. Esto proviene de tomar el área A como aproximada a la de un cuadrado de lado  $8d/9$ . De esa fórmula y de  $A = \pi R^2 = \pi (d/2)^2$ , podemos obtener

$$\pi = 256/81 = 3 + 13/81 = 3,1605$$

lo cual da para  $\pi$  una mejor aproximación con respecto al valor 3.

También en *La Biblia* (I Reyes, VIII,23; II Crónicas, IV,2) se dice que:

*"Salomón, decorando el Templo de Jerusalén, hizo también un vaso de bronce fundido que tenía diez codos de diámetro de un borde al otro borde, perfectamente redondo, y de cinco codos era su altura, en tanto que un cordón de treinta codos media la circunferencia en derredor".*

y de allí podemos deducir que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es igual a

$$\frac{30 \text{ codos}}{10 \text{ codos}} = 3,$$

de lo cual resulta el valor  $\pi=3$ .<sup>[\*]</sup>

El problema clave relacionado con el número  $\pi$ , en esta primera etapa, proviene de los griegos y es el problema de la cuadratura del círculo: "cómo construir un cuadrado, utilizando únicamente regla y compás, cuya área sea igual a la de un círculo dado".

Los métodos utilizados son de tipo geométrico, entre los cuales se destaca el cálculo aproximado de la longitud de una circunferencia y el área del círculo usando polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia. Es así que Arquímedes (287-212 a.C.) dio como cálculo aproximado de  $\pi$  el número  $3 + (1/7)$  ( $\approx 3,1428$ ).

El cálculo de  $\pi$  con una precisión cada vez mayor fue un pasatiempo matemático favorito durante muchos años. En toda esta etapa, y en diversas civilizaciones, se obtuvieron valores para el número  $\pi$ : los chinos, los árabes, los hindúes y los europeos.

[\*] El codo es una unidad de longitud muy utilizada por las civilizaciones de la antigüedad. Hay algunas diferencias cuando hacemos la comparación con nuestro sistema de unidades actual y las distintas civilizaciones. Por ejemplo, el codo en Judea equivaldría a 0,525m, en cambio en Babilonia sería 0,528m y en Grecia 0,4624m. El codo da la longitud "desde el codo hasta el extremo de los dedos".



La **segunda etapa** va desde la segunda mitad del siglo XVII hasta el segundo tercio del siglo XVIII. Esta etapa coincide con el nacimiento y el desarrollo del *cálculo infinitesimal*.

En este período se calcula  $\pi$  con mayor precisión, se le relaciona con otros números y conceptos importantes en matemática y, en general, se avanza mucho en el conocimiento *cuantitativo* de dicho número pero aún permanecen sin resolver problemas como el antes mencionado de la cuadratura del círculo y todavía se desconoce si  $\pi$  es o no es un número racional. Esto último es una razón de por qué se hacen tantos cálculos a los fines de obtener cada vez mejores aproximaciones decimales y con la esperanza de descubrir un período en esos decimales, para ver si  $\pi$  puede ser un número racional.

La **tercera etapa** se inicia hacia fines del siglo XVIII, con la demostración dada en 1761, por el matemático alemán J. Lambert, de que " **$\pi$  es irracional**". Posteriormente se prueban otros teoremas que permiten conocer la naturaleza de este número y se resuelve el problema de la cuadratura del círculo con el resultado "*la cuadratura del círculo es imposible hacerla utilizando únicamente regla y compás*".

Pero la historia de  $\pi$  no se detiene allí, uno de los matemáticos que calculó  $\pi$  con muchas cifras fue el inglés W. Shanks, quien obtuvo las primeras 707 cifras decimales exactas de  $\pi$ . Actualmente, con el advenimiento de las calculadoras electrónicas se ha logrado aproximar  $\pi$  con una expansión decimal de diez mil dígitos. He aquí los veinticinco primeros dígitos en la expresión decimal de este **fabuloso número**.

3,141592653589793238462643

del que estamos habituados a considerar solamente los cinco primeros dígitos y escribir  $\pi = 3,1416$  (redondeo), tal como lo utilizan los estudiantes desde los últimos grados de la Primaria hasta finalizar el Bachillerato, valor que los griegos tardaron dos siglos en establecer. ■

## EL NÚMERO $e$

La historia de este número es, relativamente, más reciente que las de los números  $\sqrt{2}$  y  $\pi$  puesto que a partir del siglo XVII es cuando ese número hace su irrupción en matemática. Su historia está ligada a la creación de los logaritmos, es decir, el número  $e$  y los logaritmos tienen el mismo árbol genealógico y se fueron desarrollando paralelamente. Por lo tanto, podemos hablar de los logaritmos para descubrir algo de la naturaleza del número  $e$ .

Previamente digamos qué es el número  $e = 2,71828182...$

Este número se puede definir a partir de la sucesión de números racionales

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

cuando  $n$  se hace tan grande como se quiera (se dice que  $n$  tiende a infinito, noción que se estudiará en el Módulo III). También se puede definir mediante

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (\text{"suma de infinitos términos", es decir cuando } n \text{ tiende a infinito});$$

donde recordamos que  $n!$  se lee "factorial de  $n$ " y significa el producto de los  $n$  primeros números naturales comenzando en 1, esto es,  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ .

El número  $e$  es un número irracional. Esto se demostró en el siglo XVIII y su demostración es más fácil que la correspondiente para demostrar que  $\pi$  es irracional. De esta última no hay demostración fácil.

En 1614, el matemático escocés John Napier <sup>[1]</sup> (1550-1617), quien nació en el castillo de Merchiston cerca de Edimburgo, publicó su obra "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" ("Una descripción de la admirable tabla de logaritmos", escrita en latín como era la costumbre, para esa época, de la mayoría de las obras que se escribían de matemáticas) y algunos años después, en 1619, posterior a su fallecimiento, se publicó otra obra suya sobre su sistema de logaritmos y su modo de empleo. Su libro de 1614 es el primer tratado acerca de los logaritmos.

Sus trabajos sobre los logaritmos fueron un intento para simplificar los cálculos numéricos que en su época eran largos y difíciles; por ejemplo, para confeccionar las tablas trigonométricas empleadas en la navegación y en la astronomía se requería hacer muchos cálculos. Napier buscó inventar un artificio para facilitar esos cálculos. El mismo Napier cuenta que trabajó durante veinte años antes de publicar su sistema de logaritmos. Los logaritmos permitieron efectuar más rápidamente los cálculos que se hacían en astronomía y en la navegación. Su obra de 1614 se refiere a los logaritmos de los senos de ángulos.

Los logaritmos que trabajó Napier no eran en la base  $e$ , más bien corresponde a la base  $1/e$ . Los logaritmos neperianos, esto es los logaritmos cuya base es el número  $e$ , los introdujo posteriormente John Speidell en un libro que publicó en Londres en 1619. La notación " $e$ " fue introducida por el matemático más importante de mediados del siglo XVIII, el suizo Leonhard Euler (1707-1783) quien utilizó esa letra en una carta que dirigió a otro matemático.

Los dos sistemas de logaritmos más utilizados son los logaritmos naturales (de base  $e$ ) y los logaritmos de base 10 que fueron creados por Henry Briggs (inglés, 1561-1630). Los logaritmos de base 10 fueron utilizados hasta fecha reciente para facilitar los cálculos numéricos y para ello se utilizaban tablas de tales logaritmos. En Venezuela se usó durante muchos años, en el bachillerato y la universidad, las denominadas tablas de Allen. Hoy en día, con el empleo de las calculadoras científicas ya no se utilizan esas tablas.

En cambio los logaritmos neperianos y la función exponencial  $f(x) = e^x$  son instrumentos muy útiles en muchas áreas de la matemática y de las ciencias aplicadas. En economía, en estadística, en la teoría de la probabilidad, en física, en la química y la biología, es frecuente encontrarse con el número  $e$  y los logaritmos de base  $e$ . Es así que, frecuentemente se habla del "*crecimiento exponencial*" en diversas disciplinas del conocimiento humano. ■

---

[1] El nombre Napier se afrancesó y se convirtió en Néper, del cual deriva "logaritmo neperiano" para designar a los logaritmos naturales o logaritmos de base el número  $e$ .

# UNIDAD 3

## *Orden en $\mathcal{R}$ . Desigualdades, Ecuaciones e Inecuaciones*

**Objetivo**



☐ *Resolver problemas que involucren la relación de orden en  $\mathcal{R}$ .*



*"En el momento de establecerse el contacto entre españoles y mayas, estos últimos tenían un calendario mucho más correcto".*

*(Eli de Goriari en "La Ciencia en la Historia de México".  
Filósofo, Lógico e Historiador de la ciencia (México, 1918-1991).)*

### 3.1. PRESENTACIÓN

En esta unidad de aprendizaje estudiaremos la **relación de orden en el conjunto de los números reales**, que extiende la ya estudiada relación de orden en  $\mathbb{Q}$ . Aún avanzaremos más en este camino, puesto que también aprenderemos a resolver algunas **inecuaciones** con una incógnita, incluyendo inecuaciones donde interviene el valor absoluto, para lo cual previamente se definirá el concepto e **valor absoluto de un número real**.

Las desigualdades e inecuaciones son muy útiles tanto en problemas prácticos como en el desarrollo de otras nociones matemáticas, por ejemplo, en la determinación de dominios de funciones, en el estudio del crecimiento y decrecimiento.

La interpretación geométrica de las soluciones de las inecuaciones con una incógnita se hace mediante segmentos y semirrectas de una recta orientada, y esto conduce a definir ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que son los **intervalos acotados o limitados y los intervalos no acotados o no limitados**. Con estos últimos introduciremos los **símbolos**  $-\infty$  y  $+\infty$  (o simplemente  $\infty$ ) que **no son números reales**, sino únicamente símbolos, que nos permiten denotar de una manera cómoda los intervalos no acotados y otras nociones que se introducirán en el Módulo III al estudiar los límites.

Continuaremos utilizando las calculadoras para las aproximaciones de los números reales pero, además, precisaremos la noción de **error** que se comete en esas aproximaciones. Observemos que en los temas anteriores utilizamos frecuentemente expresiones como las siguientes: "es próximo de", "es bastante pequeño", "es bastante grande", "el error cometido es pequeño o es grande", "la mejor aproximación", y todo esto lo hemos entendido de una manera intuitiva y con ayuda de las representaciones geométricas. Sin embargo, es imprescindible precisar esos vocablos ya que se prestan a ciertas confusiones dependiendo del tipo de problema que estamos resolviendo y hasta de interpretaciones subjetivas. Por ejemplo, si resolvemos un problema en relación con la distancia del Sol a la Tierra, un error de 2,5 metros nos parece "pequeño" puesto que esa distancia es "muy grande", de varios miles de kilómetros; pero, si estamos resolviendo un problema que trate del precio de una casa e  $240 \text{ m}^2$ , entonces un error de 2,5 m que se cometa al medir los linderos de la casa, es un «error grande» y repercute de manera apreciable en el precio de esa casa.

### 3.2 ORDEN EN $\mathbb{R}$ . DESIGUALDADES

#### ● Orden en $\mathbb{R}$

En las unidades 1 y 2 trabajamos con las relaciones " $<$ ", " $\leq$ ", " $>$ " y " $\geq$ " definidas en los conjuntos de números naturales, enteros y racionales, las cuales determinan el orden en los elementos de esos conjuntos.

Definida una de esas relaciones, por ejemplo la relación " $<$ ", entonces las otras tres se definen a partir de ésta como sigue:

$\wedge x \leq y$  si y sólo si  $x < y$  o  $x = y$ ,  
 $\wedge x > y$  si y sólo si  $y < x$ ,  
 $\wedge x \geq y$  si y sólo si  $y < x$  o  $x = y$ ,  
 o equivalentemente  
 $x \geq y$  si y sólo si  $x > y$  o  $x = y$ .

Esas definiciones implican lo siguiente: si  $x, y$  son números entonces uno sólo de los tres enunciados " $x=y$ ", " $x < y$ ", " $y < x$ " es verdadero y los otros dos son falsos. ■

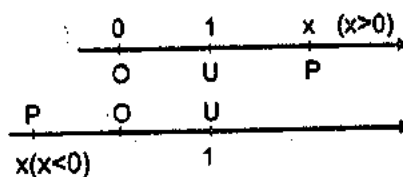
Recordemos que en el conjunto  $\mathbb{Q}$  se definió primero la noción de número racional positivo y a partir de este concepto definimos los restantes conceptos concernientes a la relación de orden. El camino seguido en el caso de los números racionales fue el siguiente:

- ☐ Sea  $a/b \in \mathbb{Q} - \{0\}$ . Se tiene: Número racional positivo o mayor que cero.  
 $a/b > 0 \Leftrightarrow ab > 0$ .
- ☐ Sea  $a/b \in \mathbb{Q} - \{0\}$ . Se tiene: Número racional negativo o menor que cero.  
 $a/b < 0 \Leftrightarrow -(a/b) > 0$   
 $\Leftrightarrow -ab > 0$   
 $\Leftrightarrow ab < 0$ .
- ☐ Sean  $a/b, c/d$  números racionales diferentes. Se tiene: Comparación de dos números racionales mediante la relación menor que.  
 $a/b < c/d \Leftrightarrow c/d - a/b > 0$ .

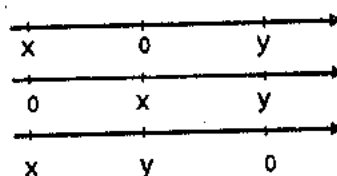
Observemos que esas relaciones tienen dos maneras de interpretarse:

#### Geométricamente

En una recta graduada y orientada, un número racional *positivo*  $x$  se representa mediante un punto  $P$  a la derecha del punto origen  $O$  y, si  $x$  es *negativo* entonces  $P$  queda a la izquierda de  $O$ :



Si  $x, y$  son números racionales distintos, entonces  $x < y$  si el punto que representa a  $x$  está a la izquierda del punto que representa a  $y$ .



#### Mediante la expresión decimal de un número racional.

Si escribimos el número racional  $x$  mediante una expresión decimal finita o infinita periódica:  $x = a, b_1 b_2 b_3 \dots$  donde los dígitos  $b_1, b_2, \dots$  son todos ceros a partir de uno de ellos ( $x \in \mathbb{D}$ ) o hay un período ( $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{D}$ ) entonces, se reconoce que  $x$  es *positivo* si el entero  $a$  es positivo o, en el caso de que  $a=0$  entonces hay algún primer dígito  $b_i$  no nulo.

Si tenemos otro número racional  $y = c, d_1 d_2 d_3 \dots$  ( $x \neq y$ ), positivo, entonces  $x < y$  si se verifica que  $a < c$ , o bien  $a = c$  y  $b_1 < d_1$ , o bien  $a = c$ ,  $b_1 = d_1$  y  $b_2 < d_2$ , y así sucesivamente. Es decir,  $x$  es menor que  $y$  si en la primera cifra en que difieren, la correspondiente a  $x$  es menor que la de  $y$ .

Por ejemplo:

$$3,0980954 \dots < 3,0981987 \dots$$

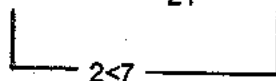
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{0 < 1}$$

## Ejemplo

$$3/7 < 10/21 \text{ ya que } 10/21 - 3/7 = 1/21 \text{ y } 1/21 > 0.$$

También lo podemos comprobar con las expresiones decimales de esos dos números:

$$\frac{3}{7} = 0,42857142...; \frac{10}{21} = 0,4761904...$$



Queremos definir relaciones análogas en el conjunto de los números reales, para lo cual estableceremos cuándo un número real es positivo y a partir de esto se pueden definir las otras relaciones.

La idea para definir cuando un número real no nulo  $x$  es positivo es análoga a la dada para los números racionales, en forma geométrica o mediante la expresión decimal de  $x$ .

Como no estamos desarrollando una teoría formal ni rigurosa de los números reales, la definición la damos en forma operativa mediante dos vías: utilizando la expresión decimal o en forma geométrica:

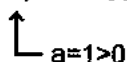
- Si escribimos la expresión decimal del número real no nulo  $x$ :

$$x = a, b_1 b_2 b_3 \dots$$

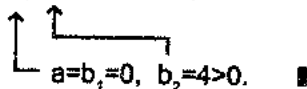
entonces  $x$  es positivo si el entero  $a$  es positivo o en el caso de ser nulo hay algún primer dígito  $b_i$  que es no nulo.

Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,4142135... > 0$$



$$\frac{1}{\sqrt{548}} = 0,0427178... > 0$$



Ahora te proponemos que de manera análoga a como hicimos con los números racionales, defines:

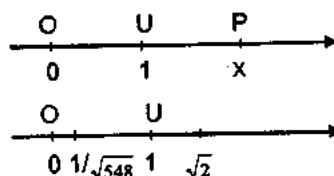
- ¿Qué es un número real negativo?
- Si  $x, y$  son números reales distintos, ¿cómo se define la desigualdad  $x < y$ ?
- Si  $x, y$  son números reales distintos, ¿cómo se define la desigualdad  $x > y$ ?
- ¿Cómo se definen las relaciones  $x \leq y, x \geq y$ ?
- Si  $x, y$  son números reales distintos, ¿cómo se reconoce que  $x < y$  al escribir las expresiones decimales de  $x, y$ ?

**NOTA: EL NÚMERO CERO NO ES NI POSITIVO NI NEGATIVO.**

Representa  
3/7 y 10/21  
en una recta.



- Si sabemos representar los números reales como puntos de una recta orientada y graduada, entonces el número real no nulo  $x$  es **positivo** si el punto  $P$  que lo representa está a la derecha del punto origen  $O$ .



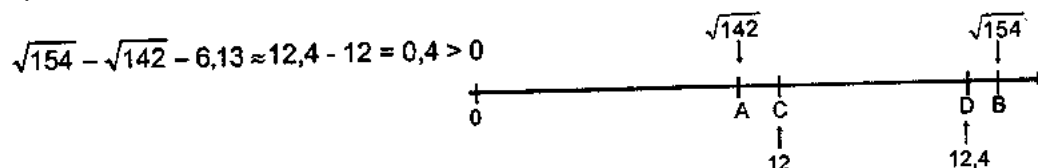
### Ejemplos 3.2.1

$$1. \sqrt{154} - \sqrt{142} = 12,409673... - 11,916375... > 0$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$   
 $12 > 11$

luego,  $\sqrt{154} > \sqrt{142}$ .

También podemos comprobar esa desigualdad utilizando la representación geométrica y aproximaciones decimales de esos números:



donde observamos que

$AB > CD$ , siendo

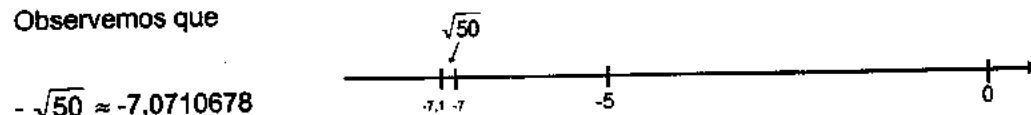
$$AB = OB - OA = \sqrt{154} - \sqrt{142}$$

$$CD = OD - OC = 12,4 - 12 = 0,4. \blacksquare$$

$$2. -\sqrt{50} < -5 \text{ puesto que}$$

$$-5 - (-\sqrt{50}) = -5 + \sqrt{50} = -5 + 7,0710678... = 2,0710678... > 0$$

Observemos que



$$\uparrow \quad -7 < -5 \text{ y por lo tanto } -\sqrt{50} < -5. \blacksquare$$

Algunas distancias en estos dibujos se han ampliado a los fines de observar mejor los puntos indicados.



### Ejercicios propuestos 3.2.1:

1. Dados los números  $x=0,4765000879000879000879...$ ,  $y=0,4765000879$ , ¿cuál es el mayor?
2. Compara, utilizando la relación " $>$ ", los siguientes números:

a)  $\sqrt{71}$ ,  $5/3$ ,  $354/122$  y  $7/\sqrt{8}$

b)  $3,29$  y  $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\pi$ .



3. Ordena en forma decreciente los números  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = 1/\sqrt{2}$ ,  $z = 0,45670987\dots$
4. Encuentra algún número irracional comprendido entre los números  $x=1,459$  e  $y=1,45900459$ .
5. ¿Por qué  $\pi$  es mayor que  $\sqrt{2}$  y  $-\sqrt{10}$  es mayor que  $-\sqrt{20}$ ?
6. Ordena de menor a mayor los siguientes números:  $\sqrt{3}$ ;  $-0,5$ ;  $\sqrt{5}/3$ ;  $3\sqrt{2}/4$  y  $2,038$ .

### ● Propiedades del orden (" $<$ " y " $>$ ") en $\mathbb{R}$

En las páginas anteriores formulamos varias preguntas, algunas de las cuales respondemos a continuación y, además, daremos otras propiedades de las relaciones " $<$ " y " $>$ " definidas en el conjunto de los números reales. Estas propiedades son análogas a las satisfechas con los números racionales (ver 1.6.2).

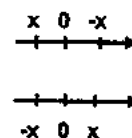
En primer lugar recordemos que a partir de la relación «menor que» (" $<$ ") se define la relación "mayor que" (" $>$ ") de la forma siguiente:

$x > y$  si y sólo si  $y < x$ ,  
y análogamente  
 $x \geq y$  si y sólo si  $y \leq x$ .

Se verifica lo siguiente:

(i)

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| ♥ $x < 0$ si y sólo si $-x > 0$    | ♥ $x > 0$ si y sólo si $-x < 0$    |
| ♥ $x < y$ si y sólo si $y - x > 0$ | ♥ $x > y$ si y sólo si $x - y > 0$ |



a lo cual se agregan las siguientes propiedades:

(ii)

- |   |
|---|
| <p>♣ Si <math>x, y</math> son números reales entonces uno sólo de los tres enunciados "<math>x=y</math>", "<math>x &lt; y</math>", "<math>y &lt; x</math>" es verdadero y los otros dos son falsos.<sup>[*]</sup></p> <p>♣ <i>Propiedad transitiva de la relación «menor que»:</i><br/>si <math>x &lt; y</math> e <math>y &lt; z</math> entonces <math>x &lt; z</math>.</p> <p>♣ Dados dos números reales distintos <math>x, y</math> entonces existen infinitos números reales comprendidos entre <math>x, y</math>.</p> |
|---|

Propiedad de tricotomía.

esta última propiedad la habíamos estudiado con los números racionales y ellos nos indujo a

[\*] Se conoce con el nombre de "propiedad de tricotomía", es decir, dados dos números reales cualesquiera  $x, y$ , solamente existen tres posibilidades al compararlos:  $x < y$ ,  $y < x$  o bien  $x = y$ . Si utilizamos la relación de "menor o igual que", entonces solamente hay dos posibilidades:  $x \leq y$  o bien  $y \leq x$ , por lo que esta propiedad se denomina "propiedad de dicotomía".

dar la definición de *promedio o media aritmética* (ver la definición 1.7) que igualmente es válida para el caso de los números reales:

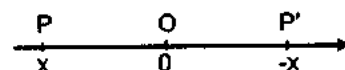
Dados dos números reales  $x, y$ , su *promedio o media aritmética* es el número real  $(x+y)/2$ , verificándose lo siguiente:

Ver ejercicios.  
¿Qué se verifica en el caso  $x > y$ ?

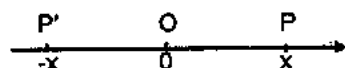
$$\text{si } x < y \text{ entonces } x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Luego, si  $x < y$  entonces  $z = (x+y)/2$  está comprendido entre  $x$  e  $y$ . Entre  $x$  y  $z$  tenemos su promedio  $(x+z)/2$  e igualmente entre  $z$  e  $y$  tenemos su promedio  $(z+y)/2$ , y así sucesivamente se concluye que entre  $x$  e  $y$  hay infinitos números reales.

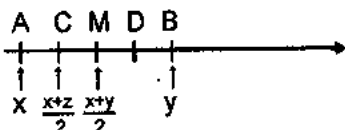
Esas propiedades pueden ilustrarse geoméricamente utilizando la representación de los números reales mediante los puntos de una recta. Ilustramos a continuación algunas de esas propiedades:



Si  $P$  (resp.  $P'$ ) es el punto que representa al número  $x$  (resp. al número  $-x$ ), entonces se verifica:



$P$  está a la izquierda del punto origen  $0$  si y sólo si  $P'$  está a la derecha de  $0$  y viceversa.



$M$  es el punto medio del segmento  $AB$ .  
 $C$  es el punto medio del segmento  $AM$ , siendo  $z = (x+y)/2$ .  
Si  $D$  es el punto medio del segmento  $MB$ , ¿cuál es el número real al que representa el punto  $D$ ?

Hay otras propiedades que se refieren a la compatibilidad de la relación de orden con las operaciones de adición y de multiplicación de números reales. Enunciamos estas propiedades utilizando la relación "mayor que":

(III)

- ♣ Si  $x > 0$  e  $y > 0$  entonces  $x+y > 0$ .  
En palabras: la suma de dos números positivos es un número positivo.
- ♣ Si  $x > 0$  e  $y > 0$  entonces  $xy > 0$ .  
En palabras: el producto de dos números positivos es un número positivo.

A partir de las propiedades dadas anteriormente se pueden deducir muchas otras. Algunas de éstas las demostraremos en los ejercicios y otras te las proponemos para que las demuestres.

### Ejercicios 3.2

1. Demostrar las siguientes propiedades de la relación de orden y las desigualdades con números reales:
  - a) Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , entonces  $ab < 0$ .

b) Si  $ab > 0$  entonces se verifica uno sólo de los dos siguientes enunciados:

i)  $a > 0$  y  $b > 0$ ;      ii)  $a < 0$  y  $b < 0$ .

c) Para todo número real  $c$  se verifica que:

$a < b$  si y sólo si  $a + c < b + c$ .

d) Para todo número real  $c > 0$  se verifica que:

$a < b$  si y sólo si  $ac < bc$ .

▲ a) Como  $b < 0$  entonces  $-b > 0$  (ver cuadro (I) anterior) y siendo  $a > 0$ , entonces  $a(-b) > 0$  (ver cuadro (III) anterior). Se tiene  $a(-b) > 0 \implies -(ab) > 0 \implies ab < 0$ .

$x < 0$  si y sólo si  $-x > 0$ .

**Nota:** En conclusión, podemos enunciar lo siguiente:

**El producto de dos números, uno de ellos positivo y el otro negativo es un número negativo. ■**

b) Como  $ab > 0$ , entonces  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  (pues de lo contrario sería  $ab = 0$ ). Como  $a \neq 0$ , entonces  $a > 0$  o bien  $a < 0$  (por la propiedad de tricotomía).

Si  $a > 0$ , entonces  $b > 0$ , ya que si fuese  $b < 0$ , se tiene  $ab < 0$  (por lo demostrado en la parte anterior) lo que es contrario a la hipótesis  $ab > 0$ .

El razonamiento es análogo si suponemos  $a < 0$ , entonces resulta  $b < 0$  (Hacerlo).

**Nota:** En conclusión, podemos enunciar lo siguiente:

**Si el producto de dos números es positivo, entonces los dos números son positivos o los dos números son negativos. ■**

c) Supongamos que  $a < b$  y por lo tanto  $b - a > 0$  (ver cuadro (I) anterior).

Se tiene:  $(b+c) - (a+c) = b - a > 0$ , lo que implica  $a + c < b + c$ .

Recíprocamente, supongamos que  $a + c < b + c$  y por lo tanto  $(b+c) - (a+c) > 0$ .

Como  $(b+c) - (a+c) = b - a$  entonces  $b - a > 0$ , lo que implica  $a < b$ .

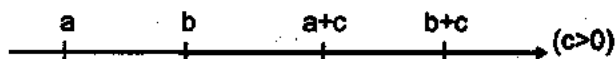
$x < y$  si y sólo si  $y - x > 0$ .

**Nota:** De manera análoga se tiene que, para todo número real  $c$  se verifica:  $a > b$  si y sólo si  $a + c > b + c$ . En conclusión, podemos enunciar lo siguiente:

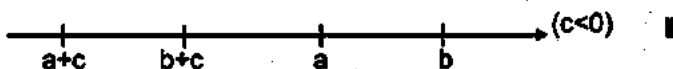
**Si se suma a ambos miembros de una desigualdad un mismo número, resulta otra desigualdad del mismo "sentido".**

Lo que se interpreta geométricamente como sigue:

Si  $c > 0$  entonces "trasladamos" hacia la derecha en  $c$  unidades los números  $a$  y  $b$ .



Si  $c < 0$  entonces "trasladamos" hacia la izquierda en  $c$  unidades los números  $a$  y  $b$ .



$$x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0.$$

¿Qué sucede si  $c < 0$ ? ver ejercicios propuestos.

d) Supongamos que  $a < b$  y por lo tanto  $b - a > 0$ . Como  $c > 0$ , entonces  $(b - a)c > 0$  (ver cuadro (III) anterior), y por lo tanto  $bc - ac > 0$ , lo que implica  $ac < bc$ .

Recíprocamente, supongamos que  $ac < bc$  y por lo tanto  $bc - ac > 0$ , es decir  $(b - a)c > 0$ . Por hipótesis se tiene  $c > 0$ , luego  $b - a > 0$  (por (i) de la parte (b) anterior) y, en consecuencia,  $a < b$ .

**Nota:** En conclusión, podemos enunciar lo siguiente:

1) Si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, resulta otra desigualdad del mismo "sentido".

$$(a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow ac < bc)$$

2) Si se dividen ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, resulta otra desigualdad del mismo "sentido".

$$(ac < bc \text{ y } c > 0 \Rightarrow a < b) \blacksquare$$

2. Demuestra que: si  $x < y$  entonces  $x < \frac{x+y}{2} < y$  (propiedad de la media aritmética de dos números  $x, y$ ).

▲ Se tiene:  $2y - (x+y) = y - x$ . Como  $x < y$ , entonces  $y - x > 0$ , luego  $2y - (x+y) > 0$  y por lo tanto  $x+y < 2y$ . Al dividir por el número positivo 2, se obtiene  $(x+y)/2 < y$ . Análogamente se demuestra la otra desigualdad  $x < (x+y)/2$ . ■

### Ejemplos 3.2.2

A continuación damos varios ejemplos donde aplicamos las propiedades de las desigualdades con números reales:

- $-5 > -\sqrt{50}x \Rightarrow -10 > -2\sqrt{50}x$  (se multiplicó por  $2 > 0$ ).
- $2a < 3 \Rightarrow 12a < 18$  (se multiplicó por  $6 > 0$ ).
- $5x+1 \leq 2b \Rightarrow -10x-2 \geq -4b$  (se multiplicó por  $-2 < 0$ ).
- $a+3 < 5+b$  y  $5+b < c+4 \Rightarrow a+3 < c+4$  (propiedad transitiva).
- $\sqrt{7} > \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{7}/2 > \sqrt{5}/2$  (se dividió por  $2 > 0$ ; puedes comprobar las desigualdades utilizando aproximaciones decimales de esos números).
- $-10 > -12 \Rightarrow (-10)(-5) < (-12)(-5)$  (efectivamente:  $50 < 60$ ; se multiplicó por  $-5 < 0$ ).
- $10x > 0$  y  $3ab+4 < 0 \Rightarrow 10x(3ab+4) < 0$  (por 1-a de ejercicios 3.2).
- $a+10k-3b \geq 3+4c+10k \Rightarrow a+3b \geq 3+4c$  (por 1-c de ejercicios 3.2).

### Ejercicios propuestos 3.2.2



- Completa, con el símbolo de desigualdad adecuado y en el espacio indicado por \_\_, a los fines de obtener un enunciado verdadero:
  - $10xy - x^2 \leq y + 3 \Rightarrow x^2 - 10xy$  \_\_  $-3 - y$ .
  - $4a + 5 > 3a \Rightarrow 3a + 7$  \_\_  $4a + 12$ .
  - $9 + 15x \geq 3x^2 - 21 \Rightarrow 3 + 5x$  \_\_  $x^2 - 7 \Rightarrow x^2$  \_\_  $10 + 5x$ .
- ¿Cómo se define el promedio o media aritmética de  $n$  números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ?  
 ¿Cuál es un valor aproximado de la media aritmética de los números  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  y  $\sqrt{5}$ ?
- Demuestra las siguientes propiedades y enuncia las conclusiones que obtienes:
  - Si  $a > 0$  entonces  $1/a > 0$ .
  - Si  $x > 0, y > 0$ , entonces  $x/y > 0$ .
  - Si  $ab < 0$  entonces se verifica uno sólo de los dos siguientes enunciados:
    - $a > 0$  y  $b < 0$ ;
    - $a < 0$  y  $b > 0$ .
  - Para todo número  $c < 0$  se verifica que:  
 $a > b$  si y sólo si  $ac < bc$ .
  - $a \leq b$  si y sólo si  $-a \geq -b$ .
  - Si  $x \neq 0$  entonces  $x^2 > 0$ .
  - Para todo número real  $x$  se verifica que  $x^2 + 1 > 0$ .
  - Cualesquiera que sean los números reales  $x, y$  se verifica que  $x^2 + y^2 \geq 0$ .
- Determina dos números reales comprendidos entre  $\sqrt{7}$  y  $\sqrt{8}$
- ¿Qué conclusión obtienes de:
  - $x \leq y$  e  $y \leq x$ ?
  - $a \leq z, c \leq a, z \leq c$ ?
  - $a > 0$  y  $b > a$ ?
  - $0 < a$  y  $b < a$ ?

Recuerda los ejercicios propuestos 1.6 (Nº 6).

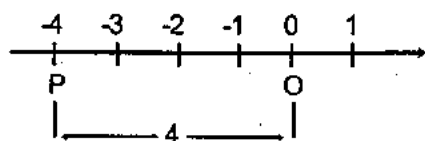


### 3.3 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL. DISTANCIA EN R.

Si tenemos un número real  $x \neq 0$ , ya sabemos que se verifica lo siguiente:

- si  $x$  es positivo entonces  $-x$  es negativo ( $x=3 > 0, -x=-3 < 0$ ),
- si  $x$  es negativo entonces  $-x$  es positivo ( $x=-5 < 0, -x=5 > 0$ ).

Observemos que, si el número negativo  $x$  se representa en una recta por el punto  $P$  entonces la longitud  $\overline{OP}$  del segmento  $\overline{OP}$  es igual a  $-x$  ( $-x > 0$ ) ya que las longitudes de segmentos no pueden ser negativas:



La longitud  $\overline{OP}$  es igual a 4 ( $4 = -(-4)$ ).



Esas consideraciones conducen a dar la siguiente definición:

El **valor absoluto** de un número real  $x$  es un número denotado por  $|x|$  y definido como sigue:

$$|0| = 0$$

$$|x| = x \quad \text{si } x > 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

lo que es equivalente a:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo:  $|6| = 6$ ;  $|-4| = -(-4) = 4$ ;  $|3,91| = 3,91$ ;  $|7x(-3,1)| = |-21,7| = 21,7$ .

Si queremos calcular  $|3\sqrt{31} - 5\sqrt{15}|$ , debemos conocer previamente si el número  $|3\sqrt{31} - 5\sqrt{15}|$  es positivo o negativo. Utilizando la expresión decimal de esos números, se tiene:

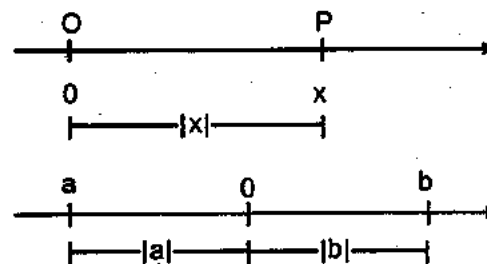
$$3\sqrt{31} - 5\sqrt{15} = \sqrt{3}(5,56776436...) - 5(3,87298334...) < 0, \text{ por lo tanto } -\{3\sqrt{31} - 5\sqrt{15}\} = -(3\sqrt{31} - 5\sqrt{15}) = 5\sqrt{15} - 3\sqrt{31} > 0.$$

También podemos averiguar el signo de ese número utilizando propiedades de la raíz cuadrada:

$$0 < 9 \times 31 < 25 \times 15 \Rightarrow \sqrt{9 \times 31} < \sqrt{25 \times 15} \Rightarrow 3\sqrt{31} < 5\sqrt{15} \Rightarrow (3\sqrt{31} - 5\sqrt{15}) < 0. \blacksquare$$

La *interpretación geométrica* del valor absoluto de un número  $x$  es la siguiente:

Si  $x$  se representa mediante el punto  $P$ , entonces  $|x|$  es igual a la *longitud  $\overline{OP}$*  del segmento  $OP$ , es decir, la *distancia entre el punto  $P$  y el origen  $O$* .



El valor absoluto satisface varias **propiedades** que son útiles cuando hacemos cálculos donde intervienen valores absolutos de números. Estas propiedades son las siguientes:

## PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

(x,y son números)

(IV)

★  $|x| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .

★  $|x| \geq 0$  para todo  $x$ .

★  $|-x| = |x|$ .

Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto.

★  $|xy| = |x| |y|$ .

El valor absoluto de un producto de dos números es igual al producto de sus valores absolutos.

★  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$   
con  $y \neq 0$ .

El valor absoluto del cociente de dos números es igual al cociente de sus valores absolutos.

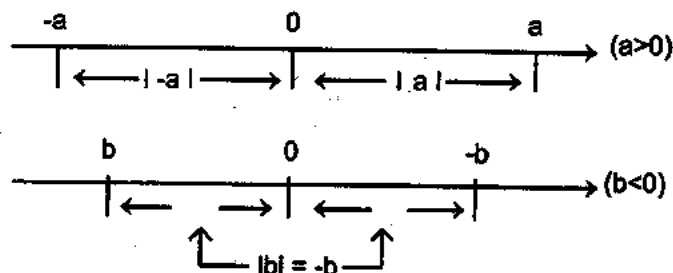
★  $|x+y| \leq |x| + |y|$ .

El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos.



Esta propiedad es la  
**DESIGUALDAD TRIANGULAR.**

Las primeras propiedades de ese cuadro se deducen fácilmente de la definición de valor absoluto. La tercera es fácilmente observable con la interpretación geométrica del valor absoluto como distancia al origen 0:



Las otras tres propiedades del cuadro anterior son algo más complicadas en sus demostraciones; por lo tanto, no las demostraremos. Sin embargo, deduciremos algunas consecuencias de las mismas.

### Ejercicio 3.3

Demuestra las siguientes propiedades:

a)  $|a-b| = |b-a|$ ;    b)  $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ ;    c)  $|x-y| \geq |x| - |y|$ .

▲ a) Si  $x = a-b$ , sabemos que  $|x| = |-x|$  (ver cuadro (IV)), y por lo tanto  $|a-b| = |-(a-b)| = |b-a|$ . ■

b)  $|x+y+z| = |(x+y)+z|$   
 $\leq |x+y| + |z|$   
 $\leq (|x| + |y|) + |z|$

Por la propiedad asociativa de la adición.

Por la desigualdad triangular  $|u+z| \leq |u| + |z|$  con  $u=x+y$ .

Por la desigualdad triangular.

y por lo tanto  $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$  (por la propiedad transitiva de la relación  $\leq$ ).

**Nota:** Esa propiedad se puede generalizar para  $n$  sumandos:

$|x_1+x_2+\dots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$  (el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos). ■

Justifica los pasos dados.

$$c) x = (x-y) + y \Rightarrow |x| = |(x-y) + y| \Rightarrow |x| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|, \text{ es decir}$$

$$|x-y| \geq |x| - |y|.$$

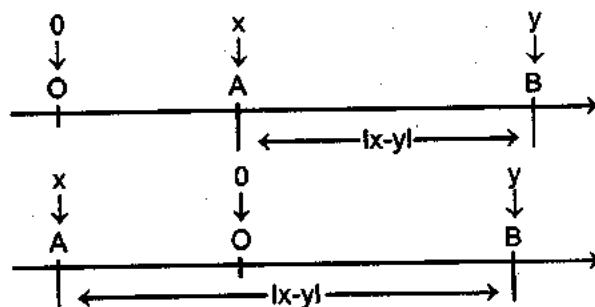
El valor absoluto de la diferencia de dos números es mayor o igual que la diferencia de los valores absolutos de esos dos números. ■

Como el valor absoluto  $|x|$  de un número  $x$  da la distancia de  $x$  a cero (del punto  $P$  al origen  $O$ ), esto lo podemos generalizar y definir la distancia entre dos números reales:

La distancia del número  $x$  al número  $y$ , denotada  $d(x,y)$ , es igual a  $|x-y|$ :  
 $d(x,y) = |x-y|.$

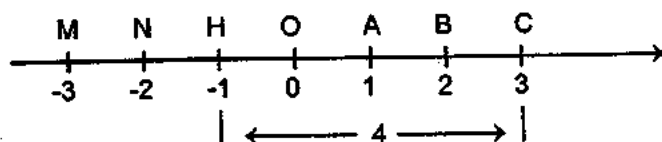
y por lo tanto  $d(x,0) = |x-0| = |x|.$

La interpretación geométrica de esa distancia es la siguiente: si  $x,y$  se representan mediante los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente, entonces  $d(x,y)$  es igual a la longitud  $\overline{AB}$  del segmento  $AB$ ; también decimos que es la distancia del punto  $A$  al punto  $B$ , denotada  $d(A,B)$ :



### Ejemplos 3.3

1. Con las notaciones de la figura siguiente

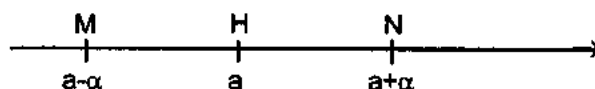


se tiene:

$$\overline{OM} = d(O,M) = d(0,-3) = |0 - (-3)| = 3; \overline{AC} = d(A,C) = |1 - 3| = 2; \overline{HC} = d(-1,3) = |-1 - 3| = 4. \blacksquare$$



2. En la figura siguiente ( $\alpha > 0$ ),



se tiene: H es el punto medio del segmento MN, ¿por qué?

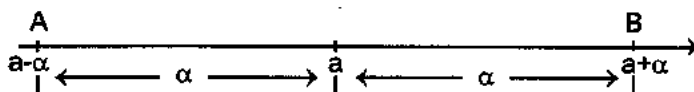
La longitud MN es igual a  $d(a - \alpha, a + \alpha) = |(a - \alpha) - (a + \alpha)| = |-2\alpha| = 2|\alpha| = 2\alpha$ . ■

3. Se verifica que  $d(x, y) = d(y, x)$ , puesto que  $|x - y| = |y - x|$  (ver ejercicio 3.3 (a)). Es decir, la distancia de  $x$  a  $y$  es la misma que la distancia de  $y$  a  $x$ , por lo tanto, hablamos simplemente de distancia entre los números  $x$  e  $y$  o bien entre los puntos que los representan en una recta. ■

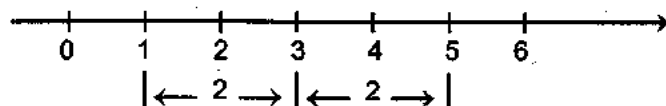
4. Si  $\alpha \geq 0$  y  $a$  es un número real dado, entonces para un número  $x$  los siguientes tres enunciados son equivalentes:

$$\blacksquare d(a, x) = \alpha \quad \blacksquare |x - a| = \alpha; \quad \blacksquare x = a - \alpha \text{ o } x = a + \alpha,$$

esto es, si la distancia entre  $x$  y  $a$  es  $\alpha$  entonces  $x$  es un extremo del segmento AB tal que los puntos A y B representan, respectivamente, a los números  $a - \alpha$ ,  $a + \alpha$ :



Por ejemplo, si  $d(3, x) = 2$ , es decir  $|x - 3| = 2$ , entonces  $x - 3 = 2$  o  $-(x - 3) = 2$  y por lo tanto  $x = 3 + 2 = 5$  o  $x = 3 - 2 = 1$ .



**Nota:**

Si damos  $\alpha \geq 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ , encontrar  $x$  tal que  $|x - a| = \alpha$  significa resolver esa ecuación con incógnita  $x$ . El resultado anterior nos da las soluciones de esa ecuación  $x = a - \alpha$ ,  $x = a + \alpha$ , es decir:

$$|x - a| = \alpha \Leftrightarrow x - a = \alpha \text{ o } x - a = -\alpha \Leftrightarrow x = a + \alpha \text{ o } x = a - \alpha.$$

Luego, si  $a = 0$ , entonces vale lo siguiente:

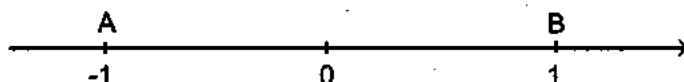
$$|x| = \alpha \text{ si y sólo si } x = \alpha \text{ o } x = -\alpha. \quad \blacksquare$$

5. ¿Cuáles son los números reales  $x$  que satisfacen la siguiente desigualdad  $|x| < 1$ ?

▲ Es evidente que si  $x = 0$ , entonces se satisface esa desigualdad puesto que  $|0| = 0 < 1$ . Supongamos  $x > 0$ , se tiene  $|x| = x$ , luego  $x < 1$ , es decir  $0 < x < 1$ .

Supongamos  $x < 0$  y por lo tanto  $|x| = -x$ , luego  $-x < 1$ , lo que implica  $x > -1$  (multiplicamos por  $-1 < 0$ ), luego  $-1 < x < 0$ .

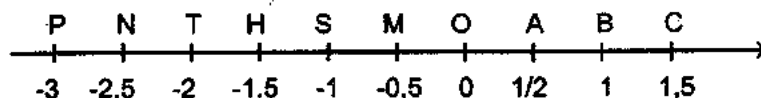
Los tres casos considerados se resumen en  $-1 < x < 1$ , es decir  $|x| < 1$  si y sólo si  $-1 < x < 1$ , lo cual se interpreta geométricamente así: los puntos P que representan los distintos números  $x$  son los puntos del segmento AB sin incluir los extremos A, B:





### Ejercicios propuestos 3.3

1. Con las notaciones de la figura siguiente,



- a) Calcula:  $\overline{TS}$ ;  $d(A,B)$ ;  $d(A,N)$ ;  $d(N,C)$ ;  $\overline{SC}$ .  
b) Determina  $x$  tal que  $|x+1| = 1/2$ .

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a)  $|x+7| = 0$ ; b)  $|x-6| = 2$ ; c)  $|3x-1| = 0$ ; d)  $|2x+2| = 1$ ;  
e)  $|\sqrt{5}x + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$ ; f)  $|x-3| = \sqrt{3} - 10$ .

- \* 3. Demuestra el siguiente enunciado: cualquiera que sea el número  $a$  se verifica  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

- \* 4. Sea  $r \geq 0$  un número dado. Demuestra lo siguiente:

- a)  $|x| < r$  si y sólo si  $-r < x < r$ .  
b)  $|x| \leq r$  si y sólo si  $-r \leq x \leq r$ .  
c)  $|x-a| < r$  si y sólo si  $a-r < x < a+r$ .  
d)  $|x-a| \leq r$  si y sólo si  $a-r \leq x \leq a+r$ .

Haz las interpretaciones gráficas de esos resultados utilizando una recta orientada.

5. a) Para cuáles valores de  $a$  se satisface la desigualdad  $|a| > 1$ .  
b) Demuestra la siguiente propiedad ( $b > 0$ ):  $|a| > b$  si y sólo si  $a > b$  o  $a < -b$ .

Haz la interpretación geométrica de esa propiedad.

6. a) A continuación dibujamos un segmento MN



De qué forma, utilizando desigualdades, puedes describir el segmento MN en los dos casos siguientes: i) incluyendo los extremos M y N (segmento cerrado); ii) excluyendo los extremos M y N (segmento abierto).

- \* b) Cómo describes el segmento cerrado MN utilizando una única desigualdad en valor absoluto.

- \* 7. Escribe las desigualdades  $2 < x < 7$  como una desigualdad en valor absoluto  $|x-a| < r$ , donde debes encontrar  $a$  y  $r$ .  
Interpreta geoméricamente la solución encontrada.

8. Escribe, utilizando desigualdades, los siguientes conjuntos de números reales:

- a) El conjunto de los números reales cuya distancia a 2 es menor que 3.  
b) El conjunto de los números reales cuya distancia a cero sea menor que la distancia a -3.  
c) El conjunto de los números reales cuya distancia a -1 es mayor o igual que 5.  
d) El conjunto de los números reales cuya distancia a  $b$  es menor que la distancia a -2.

9. Determina el conjunto de números reales  $x$  que satisface la siguiente desigualdad  $|x-1| < 2$ . \*

A continuación presentamos la solución a los fines de que justifiques cada paso:

$$|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3,$$

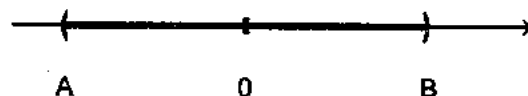
por lo tanto, se obtiene el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$ .

¿Qué representa geoméricamente el conjunto  $A$ ?

### 3.4 LOS INTERVALOS DE $\mathbb{R}$

Los intervalos finitos, o acotados, o limitados, de  $\mathbb{R}$  corresponden geoméricamente a los segmentos de una recta. Los intervalos pueden ser cerrados, abiertos o semiabiertos, tal como los segmentos de una recta que pueden incluir sus extremos, no incluirlos o incluir uno sólo de ellos. También se habla de intervalos infinitos, o no acotados (o no limitados) que corresponden a las semirrectas en una recta.

En diversos ejemplos dados anteriormente hemos encontrado varios de esos intervalos, aunque no les dimos esos nombres. Así, en el N° 5 de ejemplos 3.3, al encontrar los números  $x$  que satisfacen la desigualdad  $|x| < 1$ , obtuvimos como solución el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ , esto es el segmento abierto de recta  $AB$  (no incluye los extremos del segmento) dibujado a continuación



que se denota mediante  $(-1, 1)$  en la notación de intervalos y se denomina el intervalo abierto de extremos  $-1$  y  $1$ .

A continuación damos las definiciones precisas de tales intervalos.

Consideremos dos números reales  $a$  y  $b$  tales que  $a < b$ . Presentamos dos cuadros donde damos las definiciones de los distintos tipos de intervalos, sus notaciones e interpretaciones geométricas:

#### INTERVALOS FINITOS O LIMITADOS O ACOTADOS DE $\mathbb{R}$

DENOMINACIÓN	NOTACIÓN	INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA	DEFINICIÓN	EJEMPLO
Intervalo cerrado	$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	$[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$
Intervalo abierto	$(a, b)$		$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	$(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$
Intervalos semiabiertos	$(a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	$(0, 4] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 4\}$
	$[a, b)$		$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	$[-1, 0) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\}$

## Observaciones

1. Recordemos como se leen esos conjuntos, por ejemplos,  $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$  se lee de la siguiente forma: "(a,b) es el conjunto de los números reales x tales que  $a < x < b$ ".  
¿Cómo se leen las definiciones de los otros intervalos?
2. En cualquiera de los cuatro intervalos del cuadro anterior, el número real positivo  $b-a$  es la **longitud del intervalo** o **longitud del segmento que representa al intervalo**.
3. En cualquiera de los cuatro intervalos antes definidos, a y b se denominan los **extremos del intervalo**: a es el **extremo izquierdo** y b es el **extremo derecho**.
4.  $(a,b]$  se dice que es un intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.  $[a,b)$  se dice que es un intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.
5. Observa que también en la interpretación geométrica utilizamos los **corchetes [ y ]** o los **paréntesis ( y )** para indicar cuando los extremos de los segmentos, que representan los distintos intervalos, pertenecen o no pertenecen al segmento.
6. Debe tenerse cuidado con la notación y no confundir ciertos conjuntos. Por ejemplo, los conjuntos  $(0,4)$  y  $\{0,4\}$  son dos conjuntos distintos:  $(0,4)$  es un intervalo y tiene infinitos elementos, en cambio  $\{0,4\}$  es un conjunto finito que tiene sólo dos elementos.
7. Cuando alguno de los extremos del intervalo es un número decimal no entero entonces, para separar los dos extremos del intervalo se utiliza "**el punto y coma**" en lugar de la coma. Por ejemplo, si  $a=3,5$  y  $b=4,90$ , el intervalo abierto  $(a,b)$  se denota mediante  $(3,5 ; 4,90)$ . Análogamente se tiene:  $[-2,5 ; 0)$ ,  $[-3,5 ; -1,5]$ . ■





Previo a definir los **intervalos no acotados** o **no limitados** introducimos algunas **notaciones**, como son la de  $+\infty$  y la de  $-\infty$ . Estas notaciones se leen así:

$+\infty$  se lee "más infinito" (infinito positivo),  
 $-\infty$  se lee "menos infinito" (infinito negativo).

$+\infty$  y  $-\infty$  **no son números reales** sino símbolos que nos permiten expresar de manera cómoda ciertas notaciones y definiciones. Por ejemplo el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}: x > 6\}$  que es el conjunto de todos los números reales que son mayores que 6, se denota mediante  $(6, +\infty)$ . También es costumbre denotar  $+\infty$  simplemente por  $\infty$  que se lee "infinito".

Hechas esas consideraciones, definimos a continuación los intervalos no limitados o no acotados, donde a y b son números reales cualesquiera.

### INTERVALOS NO LIMITADOS O NO ACOTADOS (O INFINITOS) DE $\mathbb{R}$

DENOMINACIÓN	NOTACIÓN	INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA	DEFINICIÓN	EJEMPLO
Intervalo infinito cerrado por la izquierda	$[a, \infty)$		$\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$	$[-2, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\}$
Intervalo infinito abierto por la izquierda	$(a, \infty)$		$\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$	$(4, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > 4\}$
Intervalo infinito cerrado por la derecha	$(-\infty, b]$		$\{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$	$(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$
Intervalo infinito abierto por la derecha	$(-\infty, b)$		$\{x \in \mathbb{R}: x < b\}$	$(-\infty, -1) = \{x \in \mathbb{R}: x < -1\}$

¿Cómo se leen las definiciones de esos intervalos?

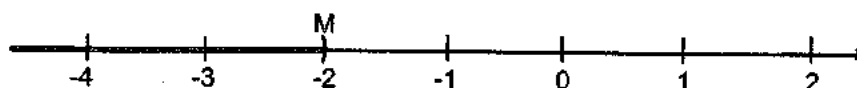
### Observaciones:

1. En cualquiera de los cuatro intervalos no limitados dados en el cuadro anterior,  $a$  y  $b$  son los **extremos** de esos intervalos:  $a$  es el **extremo izquierdo** y  $b$  el **extremo derecho**.
2. Observa que también en la interpretación geométrica utilizamos los **corchetes**  $[$  y  $]$  o los **paréntesis**  $($  y  $)$  para indicar cuando el extremo correspondiente pertenece o no pertenece a la **semirrecta que representa el intervalo**.
3. Se **conviene** en designar por  $(-\infty, +\infty)$  o simplemente  $(-\infty, \infty)$  el conjunto de todos los números reales, es decir

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty). \blacksquare$$

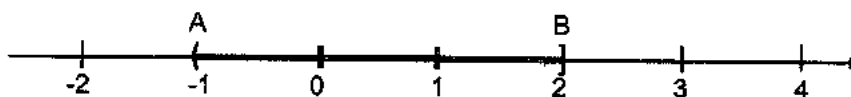
### Ejemplos 3.4

1. El conjunto de todos los números reales  $x$  tales que  $x < -2$  es el intervalo no acotado  $(-\infty, -2)$ , es decir el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ . Su representación gráfica es la semirrecta del siguiente dibujo, de origen el punto M (extremo derecho de ese intervalo):



Se trata de una semirrecta "abierta" en M puesto que el punto M no pertenece a dicha semirrecta.  $\blacksquare$

2. El segmento AB dibujado a continuación en rojo



está definido mediante el conjunto de los números reales  $x$  tales que  $-1 < x \leq 2$ , es decir, es el intervalo  $(-1, 2]$ . Observa que se trata de un intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha: el punto A no pertenece al segmento AB y el punto B sí pertenece a este segmento.  $\blacksquare$

3. Si  $a > 0$ , el intervalo  $[-a, a]$  es un **intervalo simétrico** respecto del origen, como se observa en el dibujo siguiente

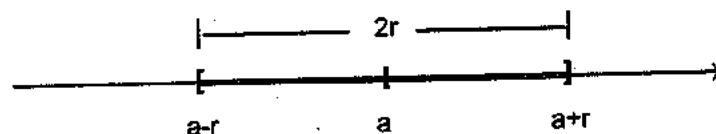


verificándose que

$$[-a, a] = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\}.$$

Da ejemplos de otros intervalos simétricos respecto del origen.

Más generalmente, si  $r > 0$  entonces el intervalo cerrado  $[a-r, a+r]$  es un **intervalo simétrico** respecto del punto  $a$ . Se dice que es un **intervalo centrado en  $a$**  de longitud  $2r$ .

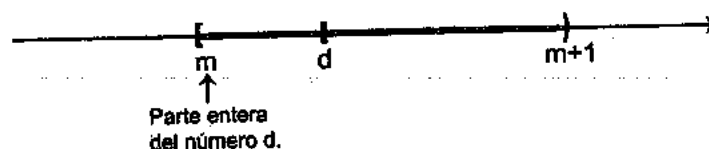


$a$  es el punto medio de ese intervalo

$$[a-r, a+r] = \{x \in \mathbb{R} : a-r \leq x \leq a+r\}.$$

Análogamente con el intervalo abierto  $(a-r, a+r)$  centrado en  $a$ . ■

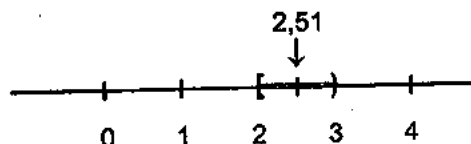
4. Si  $d = p/q$  es un número racional y  $E(d) = m$  es la parte entera de  $d$ , sabemos que se verifica  $E(d) \leq d < E(d)+1$ , es decir  $d \in [m, m+1)$ :



En esta figura suponemos que  $d \notin \mathbb{Z}$ . ¿Por qué?

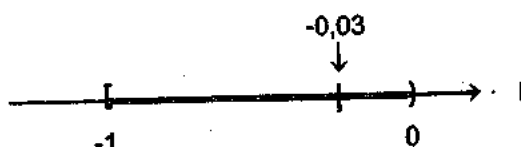
Por ejemplo:

■  $E(2,51) = 2$  y  $2,51 \in [2, 3)$



■  $E(3) = 3$  y  $3 \in [3, 4)$

■  $E(-0,03) = -1$  y  $-0,03 \in [-1, 0)$

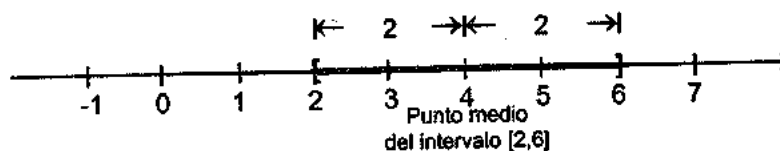


5. Los intervalos finitos  $[a, b]$  y  $(a, b)$  se pueden escribir en términos del valor absoluto y también utilizando la distancia entre puntos de  $\mathbb{R}$  (recuerda los N° 6 y 7 de los ejercicios propuestos 3.3). Por ejemplo, el intervalo cerrado  $[2, 6]$  es lo mismo que el siguiente conjunto:

$$[2, 6] = \{x \in \mathbb{R} : |x-4| \leq 2\}$$

o equivalentemente

$$[2, 6] = \{x \in \mathbb{R} : d(x, 4) \leq 2\}$$

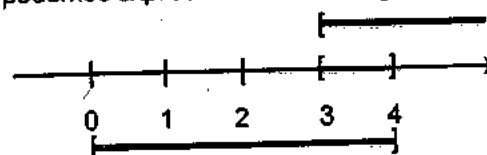


ya que:  $|x-4| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-4 \leq 2 \Leftrightarrow 4-2 \leq x \leq 4+2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [2, 6]$ .

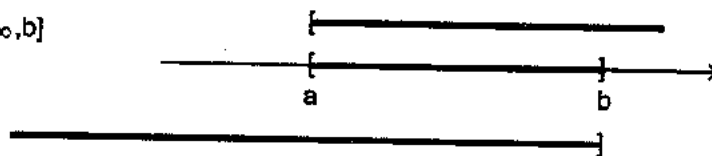
y utilizando la notación de distancia, ya que  $d(x, 4) = |x-4|$ . ■

6. Utilizando operaciones con conjuntos, tales como la reunión de conjuntos, la intersección de conjuntos y la diferencia de dos conjuntos, podemos expresar diversas desigualdades e intervalos. Por ejemplo:

■  $[0, 4] \cap [3, \infty) = [3, 4]$



$$\blacksquare [a,b] = [a,\infty) \cap (-\infty,b]$$



■ Recuerda que dado un número real positivo  $b$ , se tiene:  
 $|x| > b$  si y sólo si  $x > b$  o  $x < -b$  (ver N° 5 de ejercicios propuestos 3.3).

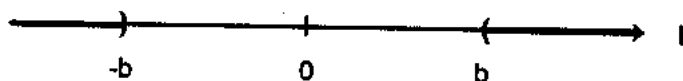
Ahora bien:

$$x > b \text{ implica } x \in (b, \infty)$$

$$x < -b \text{ implica } x \in (-\infty, -b)$$

y por lo tanto

$$|x| > b \text{ si y sólo si } x \in (b, \infty) \cup (-\infty, -b)$$



7. Los intervalos infinitos  $(0, +\infty)$  y  $(-\infty, 0)$  son, respectivamente, el conjunto de los números reales positivos (mayores que cero) y el conjunto de los números reales negativos (menores que cero). Estos intervalos infinitos se denotan de manera especial como sigue:

$$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

y se representan mediante las semirrectas abiertas de origen 0, tal como las dibujamos arriba.

Observa que  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$  y  $\mathbb{R}^- \cup \{0\} = (-\infty, 0]$ . ■

8. La relación que hay entre el número de *grados centígrados*  $C$  y el número de *grados Fahrenheit*

$$F \text{ está dada por la fórmula } C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Si la temperatura en Caracas durante el mes de diciembre, de un determinado año, varía desde  $12^\circ\text{C}$  hasta  $26^\circ\text{C}$ , deseamos conocer en qué intervalo varía esa temperatura expresada en grados Fahrenheit.

▲ Despejando  $F$  obtenemos  $F = \frac{9}{5}C + 32$ , lo que nos permite encontrar los siguientes valores de  $F$ :

$$C = 12 \Rightarrow F = \left(\frac{9}{5}\right) 12 + 32 = 53,6$$

$$C = 26 \Rightarrow F = \left(\frac{9}{5}\right) 26 + 32 = 78,8$$

Como  $12 \leq C \leq 26$ , resulta:

$$\frac{9}{5} 12 \leq \frac{9}{5} C \leq \frac{9}{5} 26 \text{ (multiplicando por } \frac{9}{5} \text{), luego}$$

$$\frac{9}{5} 12 + 32 \leq \frac{9}{5} C + 32 \leq \frac{9}{5} 26 + 32 \text{ (sumando 32)}$$

de donde  $53,6 \leq F \leq 78,8$ .

Por lo tanto, si  $x^\circ\text{C} \in [12, 26]$  entonces  $y^\circ\text{F} \in [53,6 ; 78,8]$ , es decir la temperatura varía desde  $53,6^\circ\text{F}$  hasta  $78,8^\circ\text{F}$ . ■



### Ejercicios propuestos 3.4

1. Expresa con las notaciones de los distintos intervalos los siguientes conjuntos e ilústralos geoméricamente:  
$$A = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}; \quad C = \{z \in \mathbb{R} : 3/2 < z\}.$$
2. Escribe los siguientes conjuntos como intervalos y haz la interpretación gráfica sobre una recta:  
a)  $(1,4) \cap (2,6)$ ; b)  $[-15; 2] \cap [1, \infty)$ ; c)  $[-3,2) \cup (-1, \infty)$ .
3. Se dan tres números reales  $a, b, c$  tales que  $a < b < c$ . Escribe, con las notaciones de los distintos intervalos, los siguientes conjuntos y represéntalos geoméricamente en una recta:  
a)  $[a,b] \cap [a,c]$ ; b)  $(a,b) \cup (b,c]$ ; c)  $(a,c] \cap [a,b)$ .  
d) ¿Qué son los conjuntos  $[a,b] \cap [b,c]$  y  $[a,b) \cap [b,c]$ ?
4. Dados los siguientes intervalos  $[-4,1]$ ,  $(-1,1]$  y  $[0,33; 1]$ , establece las relaciones de inclusión entre ellos.
5. Demuestra que:  
a) Si  $x \in [3,5]$  entonces  $3x+4 \in [13,19]$ .  
b) Si  $x-7 \in (-4,3]$  entonces  $x \in (3,10]$ .  
c) Si  $x \in [a-r, a+r]$  entonces  $x-a \in [-r,r]$ .
6. a) Escribe el intervalo  $[-2,8]$  utilizando una desigualdad con valor absoluto.  
b) Escribe los intervalos  $[a,b]$  y  $(a,b)$  utilizando desigualdades con valor absoluto.  
**Sugerencia:** N° 6 de ejemplos 3.4.
7. Determina los intervalos finitos  $[a,b]$ ,  $(a,b)$ ,  $[a,b)$  y  $(a,b]$  como intersección de dos semirrectas (intervalos infinitos).  
**Sugerencia:** N° 7 de ejemplos 3.4.
8. Escribe, en la notación de intervalo, el intervalo cerrado cuyo punto medio es  $1/3$  y tiene longitud 8. Representalo en una recta.
- \* 9. Determina si la siguiente proposición es verdadera o es falsa: «La intersección de dos intervalos infinitos no disjuntos es un intervalo finito». En el caso de que ese enunciado sea falso, debes dar un ejemplo para comprobar la falsedad del enunciado.  
**Atención:** Recuerda que no disjuntos significa que esa intersección es distinta del conjunto vacío.
10. Si la temperatura de un cuerpo que se calienta varía desde  $80^\circ\text{F}$  hasta  $150^\circ\text{F}$ , ¿en qué intervalo varía la temperatura de ese cuerpo cuando la expresamos en grados centígrados?
11. Si la temperatura de un paciente, en un determinado día, varía desde  $36^\circ\text{C}$  hasta  $39,5^\circ\text{C}$ , ¿cómo varía la temperatura de ese paciente cuando la expresamos en grados Fahrenheit?



### 3.5 APLICACIONES

En este último tema del Módulo I estudiaremos dos clases de aplicaciones, como son:

1. los **errores** que se cometen al hacer aproximaciones de un número, lo que nos permitirá aclarar el significado de diversas expresiones que hemos utilizado con frecuencia, entre otras: "es próximo de", "la mejor aproximación". También es preciso esclarecer el significado de otras frases utilizadas anteriormente, tales como: "es bastante grande", "es bastante pequeño" y ello tiene que ver con la "estimación" de un número en cuanto a su "tamaño" u "orden de magnitud".
2. Resolver **inecuaciones** de primer y segundo grado e inequaciones donde interviene el valor absoluto.  
La resolución de tales inequaciones es útil tanto para la matemática, por ejemplo, al determinar dominios de funciones, como en situaciones que se presentan en otras disciplinas y de lo cual daremos algunos ejemplos.

#### 3.5.1 Errores que se cometen en las aproximaciones decimales de números reales

Recordemos que todo número decimal  $d$  se puede escribir en **notación científica** (definición 1.3) mediante  $d=k \times 10^q$  en donde  $q \in \mathbb{Z}$  y  $k$  es un número decimal del intervalo  $[1,10)$ . Las cifras del número  $k$  se denominan las **cifras significativas** del número  $d$  (definición 1.4).

Ahora introducimos otra definición en relación con el número  $d=k \times 10^q$  escrito en notación científica:

La potencia  $10^q$  se denomina el **orden de magnitud** del número decimal  $d=k \times 10^q$  escrito en la notación científica.

Este orden de magnitud nos da el "**tamaño**" del número y nos permite **estimar** "cuánto grande" o "cuánto pequeño" es el número  $d$ .

#### Ejemplos 3.5.1

1. a) Consideremos el número decimal  $d=0,013087$  el cual escribimos en notación científica

$$d = 1,3087 \times 10^{-2}$$

↑  
d tiene cinco  
cifras  
significativas.

↑  
d es del orden de  $10^{-2}$ ,  
es decir, del orden de  
las centésimas.

- b) Sea  $d=98705$ . Se tiene, en notación científica,

$$d = 9,8705 \times 10^4$$

↑  
d tiene cinco  
cifras significativas.

↑  
d es del orden de  $10^4$ ,  
es decir, del orden de  
las decenas de miles



$10^6$  es un millón.

$10^{-7}$  es una diezmillonésima.

c)  $8970000 = 8,97 \times 10^6$ : es un número entero con tres cifras significativas y su orden de magnitud es  $10^6$ , es decir, el orden del millón.

$0,00000032 = 3,2 \times 10^{-7}$ : es un número decimal con dos cifras significativas y su orden de magnitud es  $10^{-7}$  es decir, del orden de las diezmillonésimas. ■

2. En física, ingeniería, economía, es muy útil la notación científica donde apreciamos el orden de magnitud, esto es el tamaño de diversos números, entre ellos ciertas constantes físicas. Por ejemplo:

a) La rapidez de la luz en el vacío es  $2,99 \times 10^8$  m/s, lo cual es un número entero del orden de las centenas de millón ya que  $10^8 = 10^2 \times 10^6$ .

Observemos que  $2,99 \times 10^8$  m/s =  $2,99 \times 10^5$  km/s = 299000 km/s y por ello se dice, usualmente, que la rapidez de la luz es, *aproximadamente*, 300000 kilómetros por segundo. ■

b) La carga elemental del electrón es  $1,60 \times 10^{-19}$  (coulombios) que es un "número muy pequeño" con dos cifras significativas y del orden de  $10^{-19}$ . ■

c) La masa de la Tierra es igual a, aproximadamente,

$$m = 5,976 \times 10^{21} \text{ toneladas}$$

y la masa M del Sol es igual a, aproximadamente,

$$M = 1990 \times 10^{24} \text{ toneladas.}$$

Por lo tanto,

$$\frac{M}{m} = \frac{1990 \times 10^{24}}{5,976 \times 10^{21}} \approx 332,99866 \times 10^3 = 3,3299866 \times 10^5$$

es decir, la masa del Sol es equivalente a, aproximadamente, la masa de 332999 veces la masa de la Tierra. ■

3. En informática se utilizan números "pequeños" y números "grandes". Así, la velocidad con que las computadoras realizan los cálculos con muchos números en solamente segundos o minutos, que requerirían hasta meses o años si se tuvieran que hacer manualmente, llevan a utilizar unidades de tiempo "muy pequeñas". Tareas sencillas como la suma de dos números pueden ser realizadas en fracciones de *microsegundos*, siendo un microsegundo igual a  $10^{-6}$  segundos (su orden de magnitud es la millonésima).

Para los fines de almacenar la información dentro de la memoria de una computadora se utilizan unidades especiales que se expresan como potencias del número 2 ya que cada elemento de información se codifica como una combinación de "ceros" y "unos", lo que se denomina un *bit* (contracción de *binary digit*, dígito binario) que es la "más pequeña unidad de información". A partir de los *bits* se forman los *bytes*, donde un byte es una cantidad sucesiva finita de 4, 6 u 8 bits, siendo el más utilizado el compuesto de 8 bits (*el octeto*).

Así, tenemos las siguientes unidades para medir la cantidad de información:

$$2^{10} = 1024 \text{ bytes se denomina 1K y } 1024\text{K es 1M.}$$

Por ejemplo, una pequeña computadora personal puede tener una capacidad de 256K bytes es decir,  $256 \times 1024 = 2^8 \times 2^{10} = 2^{18} = 262144$  caracteres o instrucciones pueden almacenarse en la memoria de la computadora.

Las memorias de las grandes computadoras se organizan en *palabras* en vez de bytes.

Usualmente una palabra suele ser de 32 bits. así, una computadora más grande puede tener una capacidad de 4M o más, es decir  $4\text{M} = 4 \times 1024\text{K} = 4194304$  palabras (del orden del millón:  $4194304 = 4,194304 \times 10^6$ ). ■

Ahora entraremos a definir los distintos tipos de errores que se consideran al hacer aproximaciones de números. Los errores son muy frecuentes, no sólo por aproximar números sino también al hacer experimentos y mediciones con instrumentos; aún cuando estos instrumentos sean bastantes precisos se pueden cometer "pequeños" errores al efectuar las mediciones, por ejemplo, con las balanzas. Así, los valores aproximados de los números pueden aparecer no solamente de la interrupción de la escritura del número mediante una expresión decimal finita (truncamiento y redondeo) sino también cuando se obtienen los resultados de ciertas mediciones debido a la imperfección del instrumento de medición o por la forma del objeto que estamos midiendo. En cualquier caso se comete un error de cálculo.

Por ejemplo, el número decimal 3,14 es un valor aproximado del número irracional  $\pi$ .

¿Cuál es el error cometido al tomar el número 3,14 como aproximación del número  $\pi$ ?

Para responder esta pregunta y las análogas a ella, formulamos la definición siguiente:

### Definición 1.8 (Error absoluto)

Dado un número  $a$  y un valor aproximado  $a^*$  de  $a$ , entonces el número  $|a - a^*|$  se denomina el **error absoluto** de la aproximación  $a^*$ . ♦

Como el error absoluto está definido mediante un valor absoluto, entonces dicho error es siempre un número positivo o nulo.

Si  $\alpha > 0$  es un número dado y se verifica que  $|a - a^*| \leq \alpha$ , se dice que  $a^*$  es una aproximación de  $a$  con un **error menor o igual que  $\alpha$**  o también se dice que el error cometido en esa aproximación es "**a lo más igual a  $\alpha$** ". De acuerdo con lo estudiado en el tema anterior, se tiene  $|a - a^*| = |a^* - a|$  y además

$$|a^* - a| \leq \alpha \Leftrightarrow a - \alpha \leq a^* \leq a + \alpha \Leftrightarrow a^* \in [a - \alpha, a + \alpha]$$

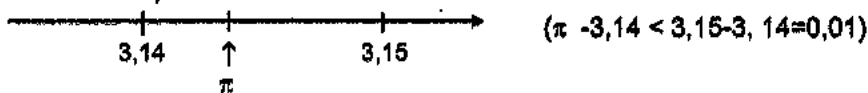
$a - \alpha \quad a \quad a + \alpha$   
 $a^*$  (un valor aproximado por exceso de  $a$ )

### Ejemplos 3.5.2

- Sea  $a = \pi$  (el número pi) y consideremos  $a^* = 3,14$  como aproximación del número  $\pi$ . Se tiene,

$$|\pi - 3,14| = |3,141592... - 3,14| < |3,15 - 3,14| = 0,01 = 10^{-2}$$

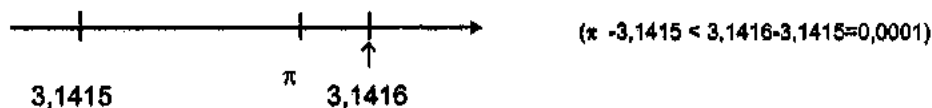
por lo tanto, 3,14 es un valor aproximado (por defecto) de  $\pi$  con un error absoluto menor que  $10^{-2}$  (una centésima):



Consideremos ahora el error absoluto si tomamos como valor aproximado de  $\pi$  el número 3,1415. Se tiene,

$$|\pi - 3,1415| = |3,141592... - 3,1415| < |3,1416 - 3,1415| = 0,0001 = 10^{-4}$$

por lo tanto, 3,1415 es un valor aproximado (por defecto) de  $\pi$  con un error absoluto a lo más de una diezmilésima:

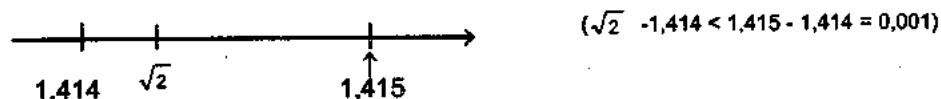


Nótese que al tomar más cifras decimales en los valores aproximados hemos cometido un error más pequeño. ■

2. Sea  $a = \sqrt{2} = 1,41421356\dots$ . Consideremos  $a^* = 1,414$  un valor aproximado de  $\sqrt{2}$ , obtenido por truncamiento que en este caso coincide con el redondeo (por defecto) ya que la primera cifra que se elimina es  $2 < 5$ . Se tiene,

$$|\sqrt{2} - 1,414| < |1,415 - 1,414| = 0,001 = 10^{-3}$$

por lo tanto, 1,414 es un valor aproximado (por defecto) de  $\sqrt{2}$  con un error absoluto a lo más de una milésima:

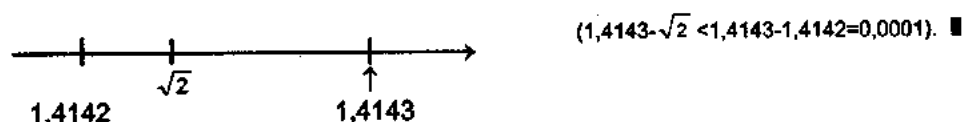


la-a\*!-la\*-al.

Si ahora tomamos 1,4143 como valor aproximado de  $\sqrt{2}$ , se tiene,

$$|\sqrt{2} - 1,4143| < |1,4142 - 1,4143| = 0,0001 = 10^{-4}$$

luego, 1,4143 es un valor aproximado (por exceso) de  $\sqrt{2}$  con un error absoluto menor que una diezmilésima:



3. De manera análoga puedes comprobar lo siguiente:

Como  $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ , entonces:

- 1,73205 es un valor aproximado de  $\sqrt{3}$  (por defecto) obtenido por *truncamiento* y con un error absoluto menor que  $10^{-5}$  (una diezmilésima).
- 1,73206 es un valor aproximado de  $\sqrt{3}$  (por exceso) obtenido por *redondeo* y con un error absoluto menor que  $10^{-5}$  (una diezmilésima).

Esas son "las mejores aproximaciones" con cinco cifras después de la coma decimal (a la diezmilésima) ya que en el intervalo  $[1,73205 ; 1,73206]$  no hay otra aproximación de  $\sqrt{3}$  que tenga cinco cifras después de la coma decimal. ■

4. Cuando los españoles llegaron a México se encontraron con una civilización avanzada como era la de los mayas. Los mayas disponían de cálculos astronómicos muy precisos; por ejemplo, el año astronómico maya tenía una duración de 365,24038462 días que comparada con la determinación actual, que es de 365,24219879, daba una aproximación por defecto con un error absoluto igual a  $0,00181417 = 1,81417 \times 10^{-3}$ , del orden de las milésimas.

En cambio, en España en la época del "descubrimiento de América" se usaba el calendario juliano y el año astronómico utilizado era una aproximación por exceso de 365,24219879 con un error absoluto de  $0,00780121 = 7,80121 \times 10^{-3}$ , lo que es un error mayor que el anterior. Luego, para ese entonces, los mayas disponían de un calendario más correcto.<sup>[\*]</sup> ■

[\*] Datos tomados de Eli de Gortari: "La Ciencia en la Historia de México", Editorial Grijalbo, S.A., México, 1980. El calendario gregoriano, por el que nos regimos actualmente, fue adoptado en España el año 1582.

En la práctica, el error absoluto no siempre es una buena indicación de la precisión del resultado. Por ejemplo, si el error absoluto en cierta medición es igual a 10 km, entonces al medir la distancia entre dos ciudades que distan casi 270 km, esa precisión no es satisfactoria; en cambio, si lo sería si medimos la distancia de la Luna a la Tierra ya que esta distancia es "muy grande" en comparación con los 10 km. Por lo tanto, para tener una estimación más precisa de una medición y del error cometido es bueno disponer de alguna relación que nos permita estimar el error en términos del número que da la longitud total en el caso de que se trate de distancias o longitudes. Para esto se introducen las dos siguientes definiciones:

### Definición 1.9 (Error relativo)

Sea  $a^*$  un valor aproximado del número  $a$ . El cociente entre el error absoluto y el número  $|a|$  denomina **error relativo**, esto es el número

$$\frac{|a - a^*|}{a} \quad \blacklozenge$$

Por ejemplo:

a) Si  $a = \pi = 3,14159\dots$  y  $a^* = 3,14$  se tiene que el error relativo es

$$\frac{|\pi - 3,14|}{|\pi|} = \frac{|3,14159265\dots - 3,14|}{3,14159265\dots} = \frac{0,00159265}{3,14159265} \approx 0,0005069$$

y por lo tanto, el error relativo es  $\approx 0,0005069$  y el error porcentual es  $100 \times 0,0005069 = 0,05069 \approx 0,051$  lo que se expresa diciendo que el porcentaje de error es del 0,051%. ■

b) El error relativo y el porcentual pueden ser más significativos que el error absoluto. Por ejemplo, si tomamos  $a^* = 2,9$  como aproximación de  $a = 2,896$ , se comete un error absoluto de  $|2,896 - 2,9| = 0,004$  que es bastante aceptable (el error porcentual es 0,14, ¿por qué?; en cambio, ese mismo error absoluto para un valor  $a = 0,05$  da un error relativo igual a  $0,004/0,05 = 0,08$  y por lo tanto un porcentaje de error del 8%, que es bastante.)\* ■

### Definición 1.1 (Error porcentual)

Sea  $a^*$  un valor aproximado del número  $a$ . El número

$$100 \frac{|a - a^*|}{|a|}$$

se denomina el **error porcentual**. Nótese que el error porcentual es igual al producto de 100 por el error relativo. ◆

### Ejercicios propuestos 3.5.1:

1. Determina el número de cifras significativas y el orden de magnitud de los números siguientes:

a) 0,00087; b) 35720; c) 3,1415; d) 371,4201;

e)  $\frac{13 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2} + 3}$  f)  $\frac{1,5 \times 10^6 - 2^{10}}{3,058 - 0,70^6}$

[\*] En algunos textos se adopta como definición del error relativo al número  $a - a^* / a^*$  o bien se utiliza este para fines prácticos cuando  $a$  y  $a^*$  son "suficientemente próximos" (el error absoluto es "suficientemente pequeño").

Repite los cálculos en este ejemplo y en el ejemplo anterior utilizando  $a^*$  en lugar de  $a$ .



2. Escribe en notación científica los siguientes números y determina su "tamaño" (orden de magnitud):
  - a) La distancia media al Sol de la órbita que describe nuestro planeta es 149,7 millones de kilómetros.
  - b) El presupuesto de Venezuela, aprobado por el Congreso de la República, para el año 1995 fue 2786469000000 Bs.
3. Averigua el valor de algunas constantes físicas fundamentales y escríbelas en notación científica.
4. a) Sea  $a=23/30$  y tomemos como valor aproximado de  $a$  el número  $a^*=0,76$ .  
 Calcula el error absoluto, el error relativo y el error porcentual.  
 ¿De qué orden de magnitud es el error absoluto?  
 Representa, aproximadamente, los números utilizados.  
 b) Repite la parte (a) con los números siguientes:  
 $a=1,2346567$  y  $a^*=1,234657$ .
5. Calcula un valor aproximado de  $a=25/36$  con un error absoluto a lo más de una diezmilésima.
6. Supongamos que tomamos como "valor exacto" de  $\pi$  al número  $a=3,1415$ , ¿cuál es el error porcentual cometido al aproximarlos por la fracción  $22/7$ ?
7. En 1862 el físico León Foucault (francés, 1819-1868) determinó experimentalmente la velocidad de la luz y obtuvo como resultado 298000 km/s. Si aceptamos que el valor exacto de esa velocidad es 299000 km/s, calcula el error absoluto cometido en la medición realizada por Foucault y el porcentaje de error.

### 3.5.2 Inecuaciones de primero y segundo grados. Inecuaciones con valor absoluto

Si consideramos desigualdades donde figuran valores variables (incógnitas) que necesitamos determinar, se tienen las **inecuaciones**. Previo a estudiar la forma de cómo resolveremos ciertas inecuaciones, daremos algunos ejemplos que conducen a plantear distintos tipos de inecuaciones.

#### Ejemplos 3.5.3

1. Supongamos que se quiere determinar los números reales  $x$  tales que  $\sqrt{x+2}$  sea un número real.  
 ▲ Sabemos que  $\sqrt{x+2}$  es un número real siempre que  $x+2$  sea positivo o nulo, es decir  $x+2 \geq 0$ . Por lo tanto, el enunciado nos conduce a determinar el conjunto de los números reales  $x$  tales que  $x+2 \geq 0$ , es decir el conjunto  $S=\{x \in \mathbb{R}: x+2 \geq 0\}$ .  
 Observemos que los números  $x=-1, x=0, x=2, \dots$  son soluciones del problema planteado, en cambio  $x=-3, x=-4, \dots$  no son soluciones ya que

$$x=-3 \Rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{-3+2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}, \dots$$

Entonces cabe la pregunta: ¿Qué procedimiento podemos seguir para determinar el conjunto S y no tener que ensayar con muchos números?

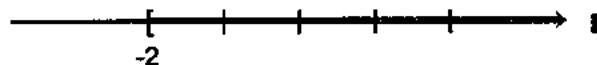
Es muy fácil determinar el conjunto S, es decir, resolver la inecuación  $x+2 \geq 0$  sin más que utilizar las propiedades de las desigualdades estudiadas en 3.4.1; en efecto:

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)+(-2) \geq 0+(-2) \quad (\text{sumamos a ambos miembros el número } -2)$$

$$\Rightarrow x+(2+(-2)) \geq -2 \quad (\text{por la propiedad asociativa de la adición y la propiedad del número } 0)$$

$$\Rightarrow x+0 \geq -2 \Rightarrow x \geq -2$$

luego  $S=\{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\} = [-2, \infty)$  es decir, el conjunto solución de la inecuación  $x+2 \geq 0$  es el intervalo infinito  $[-2, \infty)$ :



$0+a=a$  para todo  $a$ .

2. El dueño de un terreno rectangular quiere venderlo. A un comprador que le solicita las dimensiones del terreno le informa lo siguiente: el lado mayor es de 170 m y el área es un "poquito más" de 3 hectáreas. ¿Estará diciendo la verdad el dueño del terreno?

▲ Si denotamos por  $x$  (en metros) el lado menor del terreno rectangular y por  $A$  su área, se tiene  $A=170x \text{ m}^2$  y de los datos del enunciado resulta  $A \geq 3 \text{ Ha}$ , es decir  $A \geq 30000 \text{ m}^2$ , por lo tanto  $170x \geq 30000$ .

Nuevamente ha resultado una inecuación con incógnita  $x$ , y lo que buscamos es determinar el conjunto  $S=\{x \in \mathbb{R}: 170x \geq 30000\}$  que es el conjunto solución de la inecuación. Como en el ejemplo anterior, resolvemos la inecuación fácilmente:

$$170x \geq 30000 \Rightarrow x \geq \frac{30000}{170} \quad (\text{dividimos ambos miembros por el número positivo } 170)$$

es decir,  $x \geq 176,470588...$

En consecuencia, los datos aportados por el dueño del terreno *no son verdaderos* ya que siendo  $x$  el lado menor debería resultar  $x \leq 170$ . ■

3. Consideremos dos agencias de alquiler de automóviles que tienen ofertas distintas: una de las agencias, que denotaremos como agencia A ofrece lo siguiente:

3000 Bs. por día o fracción de día y además 1,90 Bs. por cada km de recorrido

y la otra agencia, denotada como agencia B, ofrece lo siguiente:

2600 Bs. por día o fracción de día y además 2,80 Bs. por cada km de recorrido.

¿A partir de cuántos kilómetros recorridos en el transcurso de un día y durante el tiempo que se utilice el automóvil alquilado, una agencia es más ventajosa que otra en el sentido de lo que se debe pagar?

▲ Designemos por  $x$  el número de kilómetros que se recorre durante el transcurso de un día. Por lo tanto, el precio que se debe pagar (en bolívares) es igual a:

$$\begin{aligned} 3000 + 1,90 x & \text{ a la agencia A} \\ 2600 + 2,80 x & \text{ a la agencia B.} \end{aligned}$$

Se pagará menos o lo mismo a la agencia A que a la agencia B si se verifica que

$$3000 + 1,90 x \leq 2600 + 2,80 x \quad [1]$$

1Ha= 10000 m<sup>2</sup>.

y al contrario, se pagará menos o lo mismo a la agencia B que a la agencia A si se verifica que

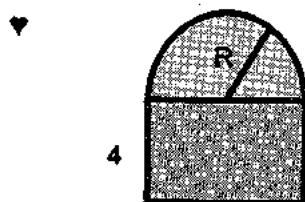
$$2600 + 2,80 x \leq 3000 + 1,90 x. \quad [2]$$

Posteriormente aprenderemos a resolver la inecuación [1], resultando  $x \geq 400/0,90 \approx 444,44$  km, es decir, en sentido práctico podemos decir que a partir de un recorrido de 444,5 km se paga menos a la agencia A que a la agencia B.

Si se hace un recorrido exactamente igual a  $400/0,90$  km, el pago a las dos agencias es el mismo de  $3000 + 1,90(400/0,90) = 2600 + 2,80(400/0,90) \approx 3844,45$  bolívares. ■

4. Supongamos que se tiene un semicírculo de radio  $R$  y un rectángulo uno de cuyos lados es el diámetro del semicírculo. Si el otro lado del rectángulo mide 4 unidades, ¿para qué valores del radio se verifica que el área del rectángulo es menor que el área del semicírculo?

▲ A los fines de retomar la práctica de la estrategia explicada en 1.8 cuando se resuelven problemas, vamos a resolver ese problema colocando los pasos seguidos.



Es conveniente hacer un dibujo

♥ La incógnita es  $R$

Identificar la incógnita

♥ Área del rectángulo

Área del semicírculo

El radio es positivo

Datos conocidos y condiciones sobre la incógnita

$$4 \times 2R = 8R$$

$$\pi R^2 / 2$$

$$R > 0$$

♥  $8R < \frac{\pi R^2}{2}$  [1] y  $R > 0$  [2]

Relaciones entre la incógnita y los datos

Ha resultado una inecuación en la incógnita  $R$  con la condición  $R > 0$ .

La solución del problema está dado por los números  $R > 16/\pi$ , es decir por el intervalo infinito  $(16/\pi, \infty)$ , lo que se deduce de [1] al dividir por  $R > 0$  y luego multiplicar por  $2/\pi$  ambos miembros de [1] (Hacerlo). ■

Resolución de las inecuaciones encontradas

Esos cuatro ejemplos nos condujeron a **Inecuaciones**, o sea, a desigualdades donde figuran variables (incógnitas). Unicamente nos limitaremos a resolver tres tipos de inecuaciones con una incógnita, como son:



♣ **INECUACIONES DE PRIMER GRADO:** Son las inecuaciones del tipo  $ax+b < 0$ ,  $ax+b > 0$ ,  $ax+b \leq 0$ ,  $ax+b \geq 0$ , con  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Estas inecuaciones también se conocen con el nombre de "inecuaciones lineales".

En los cuatro ejemplos anteriores encontramos tales inecuaciones.

♣ **INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:** Son las inecuaciones del tipo  $ax^2+bx+c < 0$ ,  $ax^2+bx+c \leq 0$  y las análogas con los signos de  $>$  y  $\geq$ , y donde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Estas inecuaciones también se conocen con el nombre de "inecuaciones cuadráticas".

Un ejemplo de tal inecuación se presenta al determinar los valores de  $x$  tales que  $\sqrt{x^2-1} - 1$  sea un número real. Para esto se debe resolver la inecuación  $x^2-1 \geq 0$ .

$\sqrt{a} \in \mathbb{R}$   
si  $a \geq 0$ .

♣ **INECUACIONES DONDE INTERVIENE EL VALOR ABSOLUTO:** Son las inecuaciones del tipo  $|ax+b| < c$ ,  $|ax+b| \leq c$  y las análogas con los signos de  $>$  y  $\geq$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

Algunos ejemplos de estas inecuaciones se dieron anteriormente aunque no les dimos ese nombre. Recordemos que en el N° 5 de ejemplos 3.3, se preguntó lo siguiente: ¿Cuáles son los números reales  $x$  que satisfacen la siguiente desigualdad  $|x| < 1$ ? y obtuvimos como respuesta:  $|x| < 1$  si y sólo si  $-1 < x < 1$ , es decir, el conjunto solución de la inecuación  $|x| < 1$  es el intervalo  $(-1, 1)$ .

También en el N° 9 de ejemplos propuestos 3.3 se resolvió la inecuación  $|x-1| < 2$ , obteniendo como solución los números  $x$  tales que  $-1 < x < 3$ , es decir el intervalo abierto  $(-1, 3)$ .

### Ejemplos 3.5.4 (Resolución de inecuaciones de primer grado)

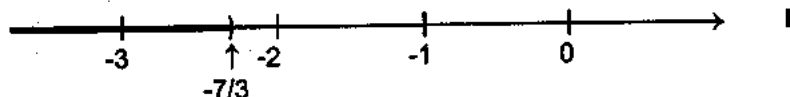
La resolución de las inecuaciones de primer grado se basa en las propiedades de las desigualdades dadas en 3.2. Demos cuatro ejemplos que nos permitan aprender el procedimiento que se sigue para resolverlas.

1. Resolver la inecuación  $-3x+4 > 11$ .

▲ Se procede así:

$$\begin{aligned} -3x+4 &> 11 \\ -3x &> 11-4 && \text{(Se suma -4 a ambos miembros.)} \\ -3x &> 7 \\ x &< -\frac{7}{3} && \text{(Se divide ambos miembros por -3 que es negativo} \\ &&& \text{y por lo tanto cambia el sentido de la desigualdad.)} \end{aligned}$$

Es decir, el conjunto solución de la inecuación propuesta es  $\{x \in \mathbb{R} : x < -7/3\}$  o lo que es lo mismo el intervalo infinito  $(-\infty, -7/3)$ :



2. Resolver la siguiente inecuación  $4x-3 \geq 2x+5$ .

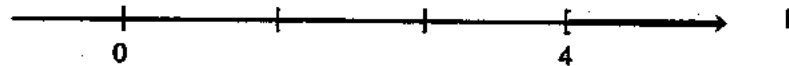
▲ Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} 4x-3 &\geq 2x+5 \\ 4x &\geq 2x+8 && \text{(Sumamos 3 a ambos miembros.)} \\ 4x-2x &\geq 8 && \text{(Sumamos -2x a ambos miembros.)} \\ 2x &\geq 8 \end{aligned}$$

$$x \geq 4$$

(Se divide ambos miembros entre 2 que es positivo y por lo tanto no se altera el sentido de la desigualdad.)

luego, el conjunto solución de la inecuación es  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$ , es decir el intervalo infinito  $[4, \infty)$ :



3. Resolver la inecuación  $3000 + 1,90x \leq 2600 + 2,80x$  planteada en el N° 3 de los ejemplos 3.5.3.

▲ Procedemos como sigue:

$$3000 + 1,90x \leq 2600 + 2,80x$$

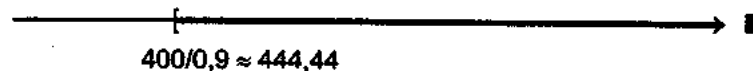
$$400 + 1,90x \leq 2,80x \quad (\text{Sumamos } -2600 \text{ a ambos miembros.})$$

$$400 \leq 2,80x - 1,90x \quad (\text{Sumamos } -1,90x \text{ a ambos miembros.})$$

$$400 \leq 0,9x$$

$$400/0,9 \leq x \quad (\text{Se divide ambos miembros por } 0,9 \text{ que es positivo y por lo tanto no cambia el sentido de la desigualdad.})$$

luego, la solución de la inecuación es el intervalo infinito  $[400/0,9; \infty)$ :



4. Resolver la inecuación  $-6 \leq 2x + 4 < 2$ .

[1]

▲ En realidad se trata de dos inecuaciones, esto es de un sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} -6 \leq 2x + 4 \\ 2x + 4 < 2 \end{cases} \quad [2]$$

para lo cual resolvemos cada una de ellas como aprendimos en los ejemplos anteriores:

Simultánea-  
mente así:

$$-6 \leq 2x + 4 < 2$$

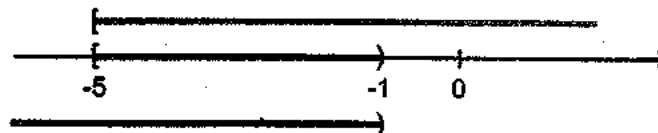
$$-10 \leq 2x < -2$$

$$-5 \leq x < -1.$$

$$\begin{aligned} -6 &\leq 2x + 4 \\ -10 &\leq 2x \\ -5 &\leq x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4 &< 2 \\ 2x &< -2 \\ x &< -1 \end{aligned}$$

y por lo tanto  $-5 \leq x < -1$ , es decir el conjunto solución de [1] o equivalentemente del sistema [2] es el intervalo semiabierto  $[-5, -1)$ :



donde observamos que  $[-5, -1) = [-5, \infty) \cap (-\infty, -1)$ . ■

### Ejercicios propuestos 3.5.2



1. Resuelve las siguientes inequaciones y expresa la solución en la notación de intervalos, dando las interpretaciones geométricas de los mismos:

a)  $3x - (1/2) \geq 5$ ;

b)  $(x/2) + 6 < x - (1/5)$ ;

c)  $-1 \leq (x-4)/3 < 7$ ;

d)  $(2-x)x \geq -1$ ;

e)  $-5 + 3x < 7x - 1 < -13$ .

2. A un ángulo agudo se le suma la mitad de su complemento y se le resta la mitad de su suplemento. ¿Cuál es la medida del ángulo resultante? \*
3. De acuerdo con la ley de Hooke <sup>[\*]</sup>, la fuerza F que se requiere para estirar un determinado resorte en x cm más de su longitud natural está dada por  $F=4,5x$ . Si  $10 \leq F \leq 18$ , entonces ¿cuál es el recorrido correspondiente de x?
4. ¿Para cuáles valores de x se verifica que  $\sqrt{-3x+6}$  es un número real?
5. Un señor compró un artículo y pagó con 20 billetes distribuidos entre billetes de Bs. 100 y billetes de Bs. 500. Si el precio del artículo está comprendido entre Bs. 8400,00 y Bs. 8800,00. ¿cuántos billetes de Bs. 100 y de Bs. 500 se utilizaron? \*\*
6. En una tienda donde se venden únicamente televisores de 13" y de 20", se vende cada TV de 13" en Bs. 42000,00 y cada uno de los TV de 20" en Bs. 70000,00. El dueño de la tienda tiene los siguientes gastos mensuales: Bs. 10000,00 por luz, Bs. 70000,00 en salarios y Bs. 100000,00 entre alquiler del local y otros gastos. Si cada TV de 13" le cuesta Bs. 26000,00 y cada uno de los TV de 20" le cuesta 40000,00 y si por cada TV de 20" que vende entonces vende 3 TV de 13", ¿cuál debe ser el número mínimo de TV de 13" y de TV de 20" que tiene que vender mensualmente para no perder dinero? \*\*

### Ejemplos 3.5.5 (Resolución de inequaciones donde interviene el valor absoluto)

La resolución de tales inequaciones se basa en la definición de valor absoluto y en sus propiedades dadas en 3.3 y muy especialmente en las dos siguientes propiedades anteriormente estudiadas ( $r>0$ ):

A.  $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r \Leftrightarrow x \in (a-r, a+r)$

B.  $|z| > r \Leftrightarrow z > r \text{ o } z < -r \Leftrightarrow z \in (r, \infty) \cup (-\infty, -r)$

y las análogas con los signos de  $\leq$  y  $\geq$ .

Daremos dos ejemplos que nos permitan aprender el procedimiento que se sigue para resolver tales inequaciones.

1. Resolver la siguiente inequación  $|3x-1| \leq 3$ .

[\*] Ley establecida por el físico inglés Robert Hooke (1635-1703), según la cual, dentro de ciertos límites (límites elásticos), los alargamientos son proporcionales a las fuerzas que los producen.

$$z = 3x - 1, \\ r = 3$$

▲ De acuerdo con la propiedad (B) anterior, se tiene:

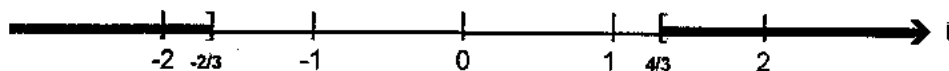
$|3x-1| \geq 3 \Leftrightarrow 3x-1 \geq 3 \text{ o } 3x-1 \leq -3$   
y por lo tanto resolvemos cada una de esas inecuaciones,

$$\begin{array}{l} 3x-1 \geq 3 \\ 3x \geq 4 \\ x \geq 4/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x-1 \leq -3 \\ 3x \leq -2 \\ x \leq -2/3 \end{array}$$

es decir  $x \geq 4/3$  o  $x \leq -2/3$ , por lo tanto el conjunto solución de la inecuación propuesta es la reunión de los intervalos infinitos  $[4/3, +\infty)$  y  $(-\infty, -2/3]$  es decir, el conjunto

$$(-\infty, -2/3] \cup [4/3, +\infty)$$

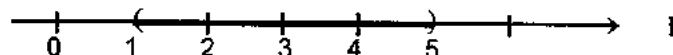


2. Resolver la inecuación  $|x-3| < 2$ .

▲ De acuerdo con la propiedad (A) anterior se tiene:

$$|x-3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow -2+3 < x < 2+3$$

es decir  $1 < x < 5$  y por lo tanto la solución es el intervalo abierto  $(1,5)$ :



### Ejercicios propuestos 3.5.3

1. Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa la solución utilizando la notación de intervalos:

- a)  $|x| \geq 2/7$ ;      b)  $|x| < 5$ ;      c)  $|x+3| \geq 5$ ;  
d)  $|3x+1| < 1$ ;      e)  $|2x+3| > 4$ .

2. Dados los conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x| \leq 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 2\}$ , determina la intersección  $A \cap B$ .

3. Determina los elementos de los siguientes conjuntos:

a)  $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 2\} \cap \mathbb{Z}$ ;      b)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| < \sqrt{2}\} \cap \mathbb{N}$ .

### Ejemplos 3.5.6 (Resolución de inecuaciones de segundo grado)

Consideremos el polinomio de grado dos

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \text{ donde } a \neq 0.$$

Las inecuaciones de segundo grado son del tipo  $P(x) < 0$ ,  $P(x) \leq 0$  y las correspondientes con los símbolos de " $>$ " y " $\geq$ ", esto es,  $P(x) > 0$  y  $P(x) \geq 0$ . Para resolver esas inecuaciones lo primero que debemos hacer es encontrar las raíces del polinomio  $P(x)$ , es decir, **resolver la ecuación de segundo grado**  $ax^2+bx+c=0$ , lo cual se hace mediante la muy conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y dependiendo de cómo es el número  $b^2-4ac$  se tienen tres casos:

- Si  $b^2-4ac > 0$ , entonces hay dos raíces reales distintas, las que denotamos por  $x_1$  y  $x_2$ .  
En este caso se factoriza el polinomio  $P(x)$  de la siguiente forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Si  $b^2-4ac = 0$ , entonces hay una única raíz real repetida, la que denotamos por  $x_1$ .  
En este caso se factoriza el polinomio  $P(x)$  de la siguiente forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

- Si  $b^2-4ac < 0$ , entonces hay dos raíces imaginarias (números complejos). **No trabajaremos con las inecuaciones en este caso.**

Supongamos que se quiere **resolver la inecuación**

$$ax^2 + bx + c > 0$$

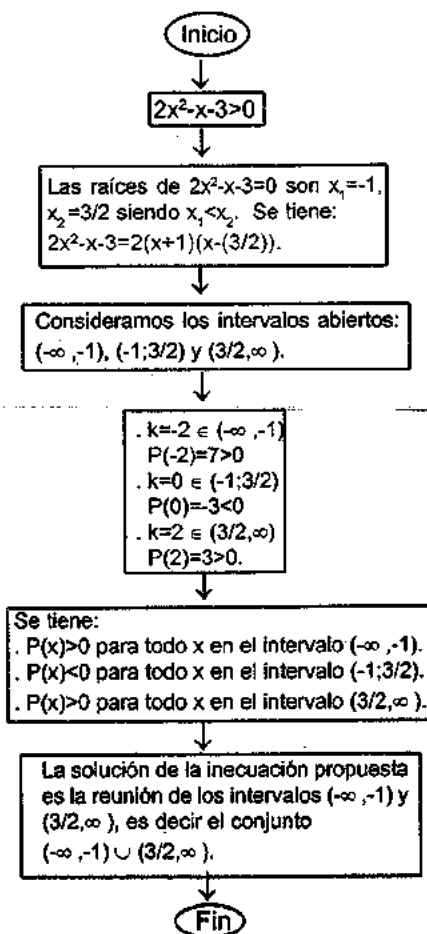
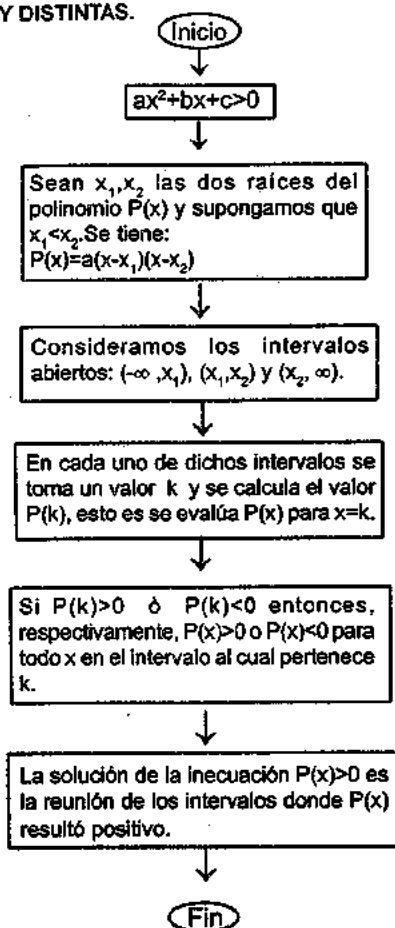
[1]

en alguno de los dos primeros casos, por ejemplo, cuando hay **dos raíces reales**  $x_1$  y  $x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ). Se procede de acuerdo con el siguiente algoritmo, el cual damos en un diagrama de flujo. No justificaremos los pasos del algoritmo para no incrementar la exposición y además por que este tema de inecuaciones cuadráticas ya lo estudiastes en el segundo año de la Educación Media y Diversificada.

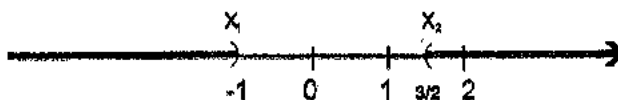
DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO PARA RESOLVER UNA INECUACIÓN DEL TIPO  $P(x)=ax^2+bx+c > 0$  CUANDO LAS DOS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO  $P(x)=0$  SON REALES Y DISTINTAS.

EJEMPLO: SEA  $P(x)=2x^2-x-3$ . RESOLVER LA INECUACIÓN  $2x^2-x-3 > 0$ .

Recuerda que si  $x_1, x_2$  son las raíces de  $P(x)=ax^2+bx+c$ , entonces  $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$



La representación gráfica de la solución de la inecuación  $2x^2-x-3>0$  es la reunión de las dos semirrectas abiertas dibujadas a continuación:



Todo el trabajo hecho para resolver la inecuación de este ejemplo se puede resumir en la siguiente tabla:

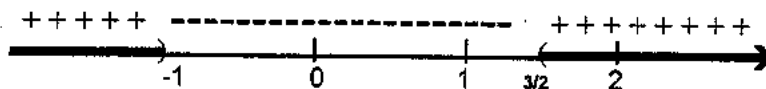
Intervalo	k	Valor de P(k)	Signo de P(x)
$(-\infty, -1)$	-2	7	+
$(-1; 3/2)$	0	-3	-
$(3/2; +\infty)$	2	3	+

De la tabla podemos observar que  $P(x) > 0$  en el intervalo  $(-\infty, -1)$  o en el intervalo  $(3/2, +\infty)$ . ■

**NOTA:** La inecuación  $2x^2 - x - 3 > 0$  también se puede resolver haciendo el estudio del signo del producto

$$2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

según sea  $x < -1$ ,  $-1 < x < 3/2$ ,  $x > 3/2$ .

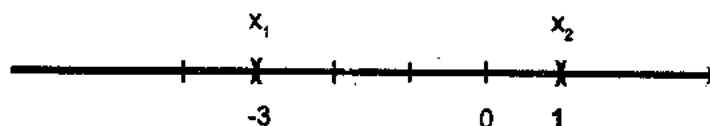


Damos otros dos ejemplos de solución de tales inecuaciones cuadráticas:

1. Resolver la inecuación  $x^2 + 2x - 3 < 0$ .

▲ Procedemos como en el ejemplo anterior:

- Primero resolvemos la ecuación de segundo grado  $x^2 + 2x - 3 = 0$  cuyas raíces son, en orden creciente,  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ .
- Consideramos los intervalos abiertos  $(-\infty, -3)$ ,  $(-3, 1)$  y  $(1, \infty)$ .



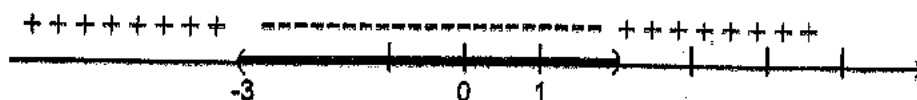
- En cada uno de esos intervalos tomamos un valor  $k$  y evaluamos el polinomio  $P(x) = x^2 + 2x - 3$  en ese valor  $k$ . Este trabajo lo resumimos en la siguiente tabla:

Intervalo	k	Valor de $P(k)$	Signo de $P(x)$
$(-\infty, -3)$	-4	5	+
$(-3, 1)$	0	-3	-
$(1, \infty)$	2	5	+

luego, la solución de la inecuación propuesta es el intervalo abierto  $(-3, 1)$ .

**NOTAS:**

- a) También se puede resolver la inecuación  $x^2 + 2x - 3 < 0$  haciendo el estudio del signo del producto  $(x+3)(x-1)$  según sea  $x < -3$ ,  $-3 < x < 1$ ,  $x > 1$ .



- b) Observemos que en los dos ejemplos dados, esto es, cuando el polinomio  $P(x)$  tiene sus dos raíces reales distintas entonces los signos van alternados en los tres intervalos que se forman. ■

2. Resolver la inecuación  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ .

▲ Procedemos como sigue:

■ Primero resolvemos la ecuación  $x^2 - 4x + 4 = 0$ , cuyas raíces son repetidas  $x_1 = x_2 = 2$ .

■ En este caso se tiene  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$  y por lo tanto la inecuación es  $(x-2)^2 \geq 0$ , cuya solución es el conjunto de todos los números reales, pues recordemos que el cuadrado de cualquier número real es positivo o nulo. Observemos que  $(x-2)^2 = 0$  para  $x = 2$  y  $(x-2)^2 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ . ■

---

### Ejercicios propuestos 3.5.4

1. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas:

a)  $x^2 - 4 > 0$ ;   b)  $x^2 + x \leq 0$ ;   c)  $x^2 + 2x + 1 > 0$ ;   d)  $x^2 + x - 2 \leq 0$ ;   e)  $10t^2 - 7t + 1 \geq 0$ .

2. ¿Para cuáles valores de  $x$  se verifica que  $\sqrt{x^2 - 1}$  es un número real?

3. Resuelve las inecuaciones:

a)  $c(z-3)^2 > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;   b)  $5(t+4)^2 \leq 0$ .



## AUTOEVALUACIÓN I

TIEMPO ESTIMADO: 3 horas ⌚

**INSTRUCCIONES:** En esta autoevaluación sobre las unidades de aprendizaje Nos. 1, 2 y 3 encuentras preguntas de dos tipos: "selección simple" y "desarrollo". Intenta responder todas las preguntas sin buscar las soluciones que se dan al finalizar los enunciados de las mismas. Debes utilizar *calculadora*.



### PARTE I

En los siguientes enunciados selecciona la alternativa correcta y en aquellos que sea necesario da alguna explicación breve que justifique tu respuesta.

1. La parte entera del número  $-876/71$  es igual a:  
a) -12.  
b) -13.  
c) 12.  
d) -11.
2. La notación científica y el orden de magnitud del número 0,00098701 es:  
a)  $9,8701 \times 10^{-3}$  del orden de las milésimas.  
b)  $9,87 \times 10^{-4}$  del orden de las diezmilésimas.  
c)  $9,8701 \times 10^{-4}$  del orden de las diezmilésimas.  
d)  $9,8701 \times 10^{-4}$  del orden de las milésimas.
3. Al efectuar el producto de dos números  $x$  y  $z$  en una calculadora aparece en pantalla lo siguiente

$1.12$
--------

entonces esos números pueden ser los siguientes:

- a)  $x = 1$ ,  $z = 12$ .
  - b)  $x = 1000000$ ,  $z = 1,12$ .
  - c)  $x = 1000000$ ,  $z = 1000000$ .
  - d)  $x = 10^1$ ,  $z = 10^{12}$ .
4. El redondeo del número  $\frac{3,4 \times 10^6 - 5^4}{3,981 - 0,62^2}$  con ocho cifras significativas es:  
a) 945163,48.  
b) 945163,487.  
c) 945163,58.  
d) 945163,49.

5. La solución de la inecuación  $| -4x+3 | < 1$  es:

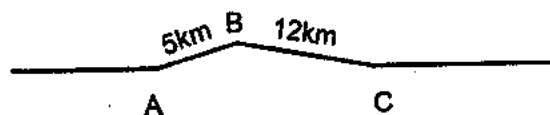
- a) El intervalo abierto  $(1/2;1)$
- b) El intervalo semiabierto  $[1/2;1)$
- c) El intervalo infinito  $(1/2, \infty)$
- d) El intervalo abierto  $(-1/2;1)$

6. Si tomamos  $x=1,4$  como aproximación del número  $x=1,414213$ , entonces el error porcentual que se comete en esa aproximación es aproximadamente igual a:

- a) 10%
- b) 1%
- c) 5%
- d) -2%

## PARTE II:

1. Sean  $m$ ,  $n$  y  $q$  números enteros positivos tales que  $m$  divide a  $n$  y también divide a  $q$ . Demuestra que  $m$  divide a  $un+qv$  cualesquiera que sean los números naturales  $u$  y  $v$ .
2. ¿Por cuál fracción debemos multiplicar  $5/7$  para obtener los  $3/4$  de  $11/9$ ?
- \* 3. Sea  $n$  un número entero tal que  $n^2$  es divisible entre 2. Demuestra que  $n$  es divisible entre 2.
4. Resolver la inecuación  $2x^2+x-1 \geq 0$ .
- \* 5. Un mayorista compra a un agricultor un lote de 48000 naranjas a Bs. 50 la docena. Después de vender todas las naranjas a los detallistas obtiene Bs. 240000. Calcular el porcentaje de ganancia obtenido en relación con la inversión que hizo el mayorista.  
**En este problema debe explicar los pasos que sigues de acuerdo con la estrategia que dimos para resolver problemas.**
- \*\* 6. Un ciclista recorre en 2 horas el trayecto ABCBA en ir desde A hasta C y regresar desde C hasta A (ida y vuelta).



Si a la vuelta, es decir, cuando recorre el trayecto CBA tarda 30 minutos más que a la ida (cuando recorre el trayecto ABC), calcula la velocidad del ciclista cuando va ascendiendo (esto es, suponemos que la velocidad de ascenso en AB es la misma que cuando sube en CB) y su velocidad cuando va descendiendo (esto es, suponemos que la velocidad de descenso en BA es la misma que cuando va bajando en BC).

## SOLUCIÓN A LA AUTOEVALUACIÓN

### PARTE I:

1. La respuesta correcta es la (b) ya que  $-876/71 = -12,3380$  y por lo tanto su parte entera es igual a  $-12-1=-13$ . ■
2. La respuesta correcta es la (c). ■
3. La respuesta correcta es la (c) puesto que, lo que aparece en la pantalla indica el número  $10^{12}=10^6 \times 10^6$ . ■
4. La respuesta correcta es la (d) ya que al efectuar las operaciones se obtiene el número 945163,4877 cuyo redondeo con ocho cifras significativas es 945163,49. ■
5. La respuesta correcta es la (a):  
$$|-4x+3| < 1 \Leftrightarrow -1 < -4x+3 < 1 \Leftrightarrow -4 < -4x < -2$$
$$\Leftrightarrow 1 > x > 1/2 \Leftrightarrow x \in (1/2; 1). \quad \blacksquare$$
6. La respuesta correcta es la (b):

$$100 \frac{|1,414213 - 1,4|}{|1,414213|} = 1,005011 \text{ es decir } \approx \text{ el } 1\%. \quad \blacksquare$$

### PARTE II:

1. Como  $m$  divide a  $n$ , entonces existe un entero  $h$  tal que  $n=mh$ .  
Como  $m$  divide a  $q$ , entonces existe un entero  $k$  tal que  $q=mk$ .  
Luego,  
 $un+vq = umh+vmk = m(uh+vk)$  y como  $uh+vk$  es entero, entonces esa igualdad indica que  $m$  divide a  $un+vq$ . ■
2. Los  $3/4$  de  $11/9$  es igual a  $(3/4)(11/9) = 33/36 = 11/12$ .  
De  $(5/7)x = 11/12$ , resulta  
 $x = (11/12) \div (5/7) = 77/60$ . ■
3. Todo número entero es par o es impar, es decir  $n$  se puede escribir en una de las dos formas siguientes:

$$n=2h \text{ con } h \in \mathbb{Z} \text{ o bien } n=2k+1 \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto  $n^2$  es de la forma

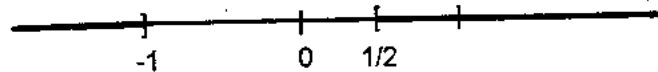
$$n^2=4h^2 \text{ o bien } n^2=4k^2+4k+1$$

y el enunciado del problema supone que  $n^2$  es un número divisible entre 2, es decir es un número par, luego  $n^2$  no puede ser de la forma  $4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$  pues este número es impar. En consecuencia,  $n^2$  es de la forma  $4h^2$  y por lo tanto  $n$  es igual  $2h$ , un número par. ■

4. Las raíces de la ecuación  $2x^2+x-1=0$  son, en orden creciente  $x_1=-1$ ,  $x_2=1/2$ .  
Con la tabla siguiente, donde  $P(x)=2x^2+x-1$

Intervalo	k	Valor de P(k)	Signo de P(x)
$(-\infty, -1)$	-2	5	+
$(-1, 1/2)$	0	-1	-
$(1/2, \infty)$	2	2	+

se deduce que la solución de la inecuación propuesta es la reunión de los intervalos infinitos  $(-\infty, -1]$ ,  $[1/2, \infty)$  (se incluyen los extremos ya que en la inecuación se trata de  $\geq$ ), es decir  $(-\infty, -1] \cup [1/2, \infty)$ :



5. En 48000 naranjas hay  $48000/12 = 4000$  docenas, luego la inversión del mayorista es igual a

$$4000 \cdot 50 = 200000 \text{ Bs.}$$

Como producto de la venta obtiene Bs. 240000, entonces su ganancia es

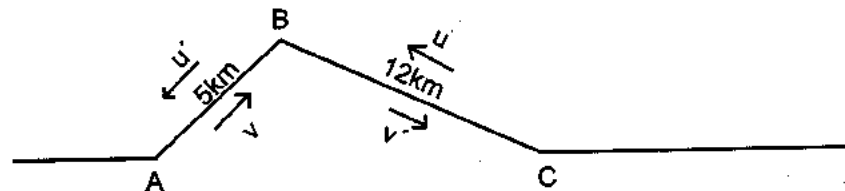
$$240000 - 200000 = 40000 \text{ (Bs.)}$$

y por lo tanto, el porcentaje de esta ganancia en relación con lo invertido se obtiene de la siguiente regla de tres

$$\begin{array}{rcl} 200000 & \text{---} & 100 \\ 40000 & \text{---} & ? \end{array}$$

resultando  $(40000 \times 100)/200000 = 20\%$ . ■

6.



Denotemos por  $v$  (respectivamente por  $u$ ) la velocidad de subida en el trayecto AB (respectivamente en el trayecto CB) y por  $u'$  (respectivamente por  $v'$ ) la velocidad de bajada en el trayecto BA (respectivamente en el trayecto BC). Recordemos que

$$\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo},$$

$$\text{luego} \quad \text{tiempo} = \text{espacio/velocidad}$$

y del enunciado del problema se tiene

$$\begin{cases} \frac{5}{v} + \frac{12}{v'} + \frac{12}{u} + \frac{5}{u'} = 2 \\ \frac{12}{u} + \frac{5}{u'} = \frac{5}{v} + \frac{12}{v'} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

ya que recorre el trayecto ABCBA en 2 horas.

ya que cuando recorre el trayecto CBA tarde 30 minutos más ( $1/2$  hora) que a la ida (ABC).

Como  $u'=v'$  (las velocidades de descenso son iguales) y  $u=v$  (las velocidades de subida son iguales), resulta el sistema de ecuaciones con incógnitas  $v, v'$ :

$$\begin{cases} \frac{5}{v} + \frac{12}{v'} + \frac{12}{v} + \frac{5}{v'} = 2 \\ \frac{12}{v} + \frac{5}{v'} = \frac{5}{v} + \frac{12}{v'} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

es decir

$$[1] \begin{cases} \frac{17}{v} + \frac{17}{v'} = 2 \\ \frac{7}{v} - \frac{7}{v'} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

y si hacemos  $x = 1/v$ ,  $y = 1/v'$ , obtenemos el sistema

$$[2] \begin{cases} x + y = 2/17 \\ x - y = 1/14 \end{cases}$$

cuya solución es  $x = 45/476$ ,  $y = 11/476$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} v &= 1/x = 476/45 \approx 10,58 \text{ (km/h)} \\ v' &= 1/y = 476/11 \approx 43,27 \text{ (km/h)}. \end{aligned}$$

**Nota:** se puede resolver directamente el sistema [1] sin necesidad de hacer el cambio  $x=1/v$ ,  $y=1/v'$ . ■

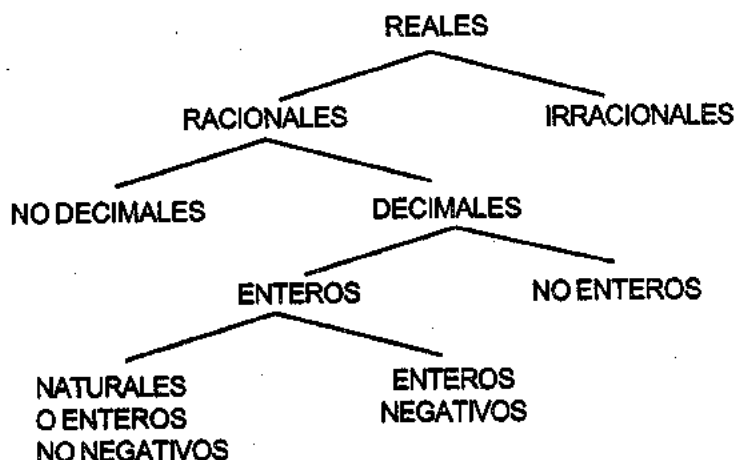
## RESUMEN

En este Módulo se han estudiado dos tipos de contenidos programáticos:

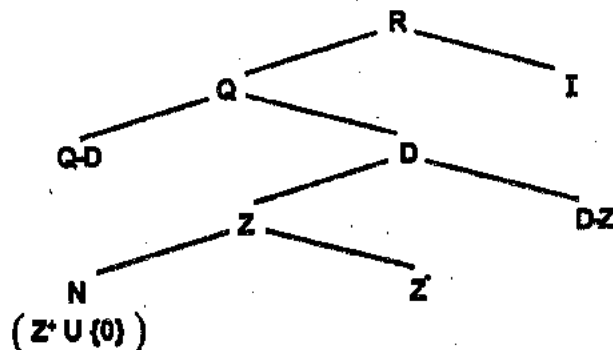
- 1) **Contenidos que forman parte de las etapas previas a la Educación Superior** tales como: la parte operativa con los números naturales, enteros, racionales y reales, adición (sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación con los números), las expresiones decimales de los números reales, las relaciones de "mayor que" y "menor que" que permiten ordenar los números, el valor absoluto de un número, los intervalos de  $\mathbb{R}$ , algunas inecuaciones sencillas y las interpretaciones geométricas en una recta graduada y orientada (recta numérica) de esos conceptos. Además se revisaron algunas nociones elementales relacionadas con los conjuntos: notación de un conjunto utilizando "llaves", elementos de un conjuntos, inclusión de conjuntos, reunión, interacción y diferencia de conjuntos introduciéndolas gradualmente a medida que las vamos necesitando.
- 2) **Contenidos nuevos** tales como: Utilización de las calculadoras científicas, los errores cometidos al efectuar aproximaciones con números decimales, redondeo y truncamiento de números decimales, notación científica, cifras significativas, parte entera de un número. Aunque es menester indicar que algunos de estos tópicos también se tratan, con poco énfasis, en etapas previas a la Educación Superior, por lo que en este Módulo los hemos precisado y estudiados con más detenimiento.

Aceptamos sin mayor discusión la existencia de los **números naturales** y procedimos a construir los conjuntos de **números enteros** y de **números racionales** sobre bases intuitivas y geométricas, destacando las operaciones que se efectúan con esos números, sus propiedades y la importancia que éstas tienen. Los **números reales** se introdujeron mediante aproximaciones decimales, sin hacer un tratamiento exhaustivo con esos números.

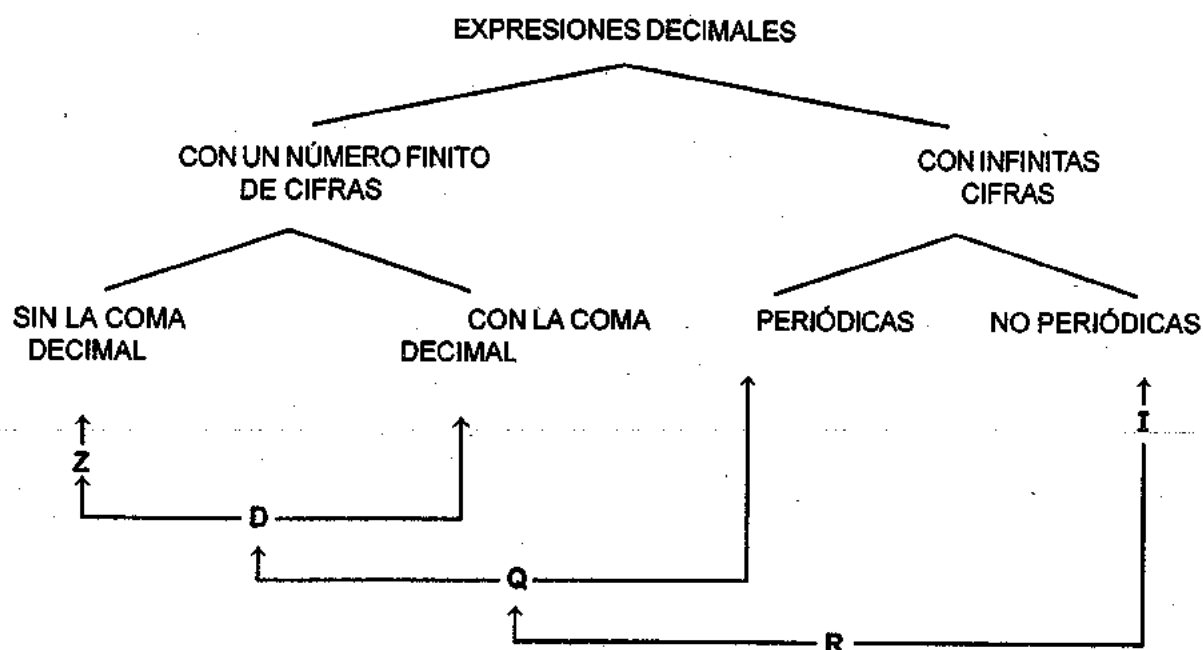
Mediante el siguiente *mapa de conceptos o mapa conceptual* (organización de conceptos en una forma jerarquizada) podemos observar los distintos conjuntos de números estudiados en el Módulo:



o utilizando las notaciones de esos conjuntos, tenemos



lo que también podemos escribir utilizando las definiciones de los distintos conjuntos numéricos mediante expresiones decimales con un número finito o infinito de cifras y que pueden ser periódicas o no periódicas:



Hemos procurado que, en diversas explicaciones dadas, como en algunos ejercicios propuestos, el lector aprenda a observar, reflexionar y matematizar en relación con "realidades" que encuentra en el mundo circundante. En tal sentido, se presentaron más "estrategias" para resolver "problemas", la cual se debe tener presente cuando se aborda la resolución de un determinado problema, bien sea del ámbito matemático o de aplicación a otra rama del conocimiento humano.

La manipulación con los distintos números es esencial para el desenvolvimiento de las diversas actividades humanas. La parte operativa con los mismos, auxiliado con las calculadoras, y la comprensión de las propiedades que se aplican, son parte integrante del acervo cultural de las personas que han realizado estudios de Educación Superior.

En conclusión; de lo antes expuesto, podemos señalar que la mayor parte de los contenidos programáticos de este Módulo se refieren a contenidos estudiados en etapas previas a la Educación Superior y, en consecuencia, con ello logramos establecer el enlace necesario entre esas etapas previas y la Educación Superior, lo cual se hace más imprescindible en una educación a distancia. Se trata de dar una mayor fundamentación a esos contenidos a los fines de salvar la distancia que separa la matemática intuitiva desarrollada en la Escuela Básica y en la Educación Media y Diversificada con los contenidos en matemáticas que se desarrollarán en algunos Módulos posteriores y en varias asignaturas de las distintas carreras ofrecidas por la Universidad Nacional Abierta. Para ello se proponen ejercicios y problemas que requieren un nivel de razonamiento superior a los simples ejemplos que son aplicaciones inmediatas de definiciones o proposiciones. Esto debe hacerse de una manera gradual a medida que los estudiantes avancen en sus estudios de las asignaturas de matemáticas.





## MÓDULO I

### SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

En lo que sigue damos las soluciones de **casi** todos los ejercicios propuestos. En algunos de ellos, que se resuelven con cálculos muy sencillos, únicamente daremos la respuesta. Hay algunos (pocos) ejercicios de los cuales no daremos las soluciones.

### UNIDAD 1

#### Ejercicios propuestos 1.2

1. a) 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30.  
b) 0, 1, 3, 5, 9, 11, 15.  
c) Ese conjunto no tiene elementos (es el conjunto vacío).  
d) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.  
e) 5 (únicamente este elemento).
2.  $B \subset A$ ;  $C \subset A$ ;  $D \subset A$  y  $D \subset C$ .
3.  $A = \{n \in \mathbb{N} : n=4h, h \in \mathbb{N}\}$  o también  $A = \{4h : h \in \mathbb{N}\}$   
 $B = \{n \in \mathbb{N} : n=6+5h, 0 \leq h \leq 20\}$  o también  
 $B = \{6+5h : h \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq h \leq 20\}$   
 $C = \{n \in \mathbb{N} : n=0, n=3^n \text{ y } h \in \mathbb{N}\} = \{3^h : h \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .
4.  $n$  es par si su último dígito es alguno de los siguientes números: 0, 2, 4, 6, 8.  
 $n$  es impar si su último dígito es alguno de los siguientes números: 1, 3, 5, 7, 9.
5. Los otros elementos de  $A$  son: 101010, 1010101, 10101010, 101010101, 1010101010.
6.  $(m+n)^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$ .  
Una manera de obtener esa fórmula es la siguiente:  
 $(m+n)^4 = (m+n)^2 (m+n)^2 = (m^2 + 2mn + n^2)(m^2 + 2mn + n^2)$  y luego efectuar los productos.  
También la podemos obtener como sigue:  
 $(m+n)^4 = (m+n)(m+n)^3 = (m+n)(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3)$  y luego efectuar los productos.
8. a)  $n \in J, m \in J \Rightarrow nm \in J$ .  
El producto de dos números impares es un número impar.  
Se demuestra así:  $n=2h+1$  y  $m=2p+1$  con  $h, p \in \mathbb{N}$ ; luego  
 $mn = 4hp + 2h + 2p + 1 = 2(2hp + h + p) + 1 = 2k + 1$  con  $k = 2hp + h + p \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto  $mn \in J$ .

b)  $n \in J \Rightarrow n^2 \in J$ .

El cuadrado de un número impar es un número impar.

Esto es consecuencia de (a) o se puede demostrar directamente.

c)  $n \in J$  y  $p \in \mathbb{N} \Rightarrow n^p \in J$ .

Cualquier potencia de exponente natural de un número impar, es un número impar.

Es consecuencia de aplicar sucesivamente (a).

d)  $n \notin J \Rightarrow$  existe  $h \in \mathbb{N}$  tal que  $n=2h$ .

e)  $n^2 \in J \Rightarrow n \in J$ .

Si el cuadrado de un número natural es impar, entonces ese número es impar.

Esto es el recíproco de (b).

f) Todo número impar  $n$  se escribe en la forma  $n=4p+1$  o bien  $n=4k+3$  con  $p, k \in \mathbb{N}$ .

En efecto:  $n=2h+1$ ; el número  $h$  puede ser par o impar, esto es,  $h=2p$  o  $h=2k+1$ . Por lo tanto  $n=2(2p)+1=4p+1$  o  $n=2(2k+1)+1=4k+3$ .

9. Ocho números: 7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70.
10. Si  $ab$  es el número con dos cifras significativas, se tiene  $ab + 9 = ba$ .  
Como  $ab = b + 10a$ ,  $ba = a + 10b$ , entonces  $b + 10a + 9 = a + 10b$ , de donde  $a = b - 1$ , es decir la cifra de las decenas es una unidad menor que la cifra de las unidades. Estos números son ( $a \neq 0, b \neq 0$ ): 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 y 89.
11.  $p^2 + p = p(p+1)$  y por lo tanto  $p^2 + p$  es un número par pues es igual al producto de dos números naturales consecutivos mayores que 1 ( $p > 1, p+1 > 2$ ) y por lo tanto alguno de ellos es par (puede ser  $p=2$  que es un número primo). Como  $p \geq 2$  y  $p+1 > 2$ , entonces  $p^2 + p > 2$ .
12. Si  $x$  es el menor de los tres números impares, se tiene que los otros números son  $x+2$  y  $x+4$ . Luego,  $x + (x+2) + (x+4) = 27$ , de donde  $x=7$ .
13.  $C = 100 + 30(P - 1)$ , ya que al costo del primer kilogramo que es Bs. 100, hay que agregarle Bs. 30 por cada uno de los  $P - 1$  kilogramos restantes. (También resulta de la fórmula que da el término general de una progresión aritmética de razón 30 y primer término 100).

### Ejercicios propuestos 1.3

1.  $(a+b)^2 - 4ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ .

2. Se sabe que  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = 12$  (lo que se obtiene de igualar los coeficientes en  $x^2 + px + 12 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$ ) y además  $x_1 - x_2 = 1$ .

Del sistema  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 12 \end{cases}$

resulta  $x_1(x_1 - 1) = 12$ ,  $x_1^2 - x_1 - 12 = 0$  y por lo tanto  $x_1 = 4$ ,  $x_1 = -3$ , luego  $x_2 = 3$ ,  $x_2 = -4$ , respectivamente. En consecuencia  $p = 7$  o  $p = -7$  ( $p = -(x_1 + x_2)$ ).

**Nota:** También se puede utilizar la igualdad del ejercicio anterior:  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2$  para obtener:  
 $p^2 - 48 = 1$ ,  $p^2 = 49$ , de donde  $p = 7$ ,  $p = -7$ .

4. a)  $x = 1$ ; b)  $x = 5$ .

5.  $x = -3$ .

6. Sea  $x$  la edad actual de Roberto e  $y$  la edad actual del hijo de Roberto. Se tiene:

$$\begin{cases} x - 18 = 3(y - 18) \\ x = 2y \end{cases}$$

es decir  $\begin{cases} x - 3y = -36 \\ x = 2y \end{cases}$

de donde  $y = 36$ ,  $x = 72$ .

7. Se multiplica el número dado  $a$  por 100 y se obtiene  $b$ , luego se calcula  $b + a$ .  
Ejemplo 237.100:

$$237000 + 237 = 237237.$$

8. a) F. Puesto que:

$$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$$

$$7 + (3 \cdot 5) \neq (7 + 3) \cdot (7 + 5).$$

b) V.

c) V.  $a' = -a \Rightarrow a = -a'$ .

d) V.

e) V.  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ .

f) F.  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{0, 1, 3, 4\}$ ,  $A \cdot B = \{2\}$ ,  $B \cdot A = \{0, 4\}$ .

9.  $A \cdot B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} = \{2h; h \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq h \leq 7\}$ .

10.  $x + (x + 2) + (x + 4) = 1011$  luego  $x = 335$ . Los números son 335, 337 y 399.

11.  $B - A = \{-5, -2, 4, 10\}$ .

13.  $a = b = -1$ ,  $a = b = 1$ .

### Ejercicios propuestos 1.4

1. ■ Como  $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$ ,  $143 = 11 \cdot 13$ , se tiene

$$\frac{143}{442} = \frac{11}{2 \cdot 17} \notin \mathbb{D}.$$

$$\frac{18}{550} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{9}{5^2 \cdot 11} \notin \mathbb{D}.$$

$$\frac{7}{625} = \frac{7}{5^4} \in \mathbb{D} \text{ y se tiene}$$

$$\frac{7}{625} = \frac{7 \cdot 2^4}{5^4 \cdot 2^4} = \frac{112}{10^4} \text{ o también}$$

$$\frac{7}{625} = 0,112 = 112 \cdot 10^{-4}.$$

$$\frac{111}{160} = \frac{111}{2^4 \cdot 10} \in \mathbb{D} \text{ y se tiene}$$

$$\frac{111}{160} = \frac{111}{2^5 \cdot 5} = \frac{111 \cdot 5^4}{2^5 \cdot 5^5} = \frac{69375}{10^5} = 69375 \cdot 10^{-5} = 0,69375.$$

2. ■  $\frac{51}{672} = \frac{17}{7 \cdot 2^5} \notin \mathbb{D}.$

$$\frac{11}{250} = \frac{11}{5^3 \cdot 2} \in \mathbb{D}.$$

$$\frac{8}{442} = \frac{4}{13 \cdot 17} \notin \mathbb{D}.$$

$$\frac{107}{500} = \frac{107}{5^3 \cdot 2^2} \in \mathbb{D}.$$

3. a) 1,578; b) 0,4179; c) 0,00000023;  
d) Si  $a = a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \in \mathbb{N}^*$  donde los dígitos  $a_j$  ( $j = 0, 1, \dots, 5$ ) son tales que  $a_0 \neq 0$ , se tiene  $a \cdot 10^{-6} = a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ .

**Nota:** En el sistema de numeración decimal se tiene  $a = a_5 + 10a_4 + 10^2a_3 + 10^3a_2 + 10^4a_1 + 10^5a_0$ .

4. a)  $5031/10^3$ ; b)  $357/10^3$ ; c)  $21/10^7$ ; d)  $31415/10$

5. a) 0; b) 17; c) -1; d) -16.

6. 3,1415; 3,141592; 1,41  
ya están en notación científica.  
 $14,192 = 1,4192 \times 10$   
 $0,00356 = 3,56 \times 10^{-3}$

$$0,00012 = 1,2 \times 10^{-4}$$

$$40013 = 4,0013 \times 10^4$$

$$3047200 = 3,047200 \times 10^6$$

7. a)  $m = np$ ,  $h = nr \Rightarrow m + h = n(p + r)$ , luego  $n$  divide a  $m + h$ .  
b)  $m = np$ ,  $h = mr \Rightarrow h = n(pr)$ , luego  $n$  divide a  $h$ .
8. Como  $b = 11q + r$  con  $0 \leq r < 11$ , los restos posibles  $r$  son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 10.

### Ejercicios propuestos 1.5

1. 1,32470 y 1,324708.
2. 0,00371; 145; 287; 32,2.
3. 0,4; 0,36; 0,357; 0,3568; 0,35678; 0,356781.
4. a) Es la notación científica del número  $5730000000 = 5,73 \times 10^9$ .  
b) Es la notación científica del número  $10^6 \times 10^6 = 1 \cdot 10^{12} (=10^{12})$ .
5. a)  $\boxed{5.7410231 \quad 14}$  o bien  $\boxed{5.7410231 \quad 14}$  según sea la calculadora con la que trabajas. Esto es el número  $5,7410231 \times 10^{14}$  (notación científica).  
b)  $\boxed{9.68 \quad -08}$
- Esto es el número  $9,68 \times 10^{-8}$  (notación científica).  
Observa que:  
 $0,968 \times 0,0000001 = 9,68 \times 10^{-1} \times 10^{-7} = 9,68 \times 10^{-8}$

**Nota:** En algunas calculadoras para pasar a la notación científica hay que pulsar la tecla **CN** u otra análoga.

### Ejercicios propuestos 1.6

1.  $1,324 > 0,8 > 0,37 > -\frac{5}{6}$
2.  $x > y$ .
3. a) V Como  $x \neq 0$ , entonces tenemos dos casos:  
 $x > 0$ ,  $x < 0$ .  
 $x > 0$  y  $x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ .  
 $x < 0$  y  $x < 0 \Rightarrow -x > 0$  y  $-x > 0 \Rightarrow (-x)(-x) > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ .  
b) V.  
c) F.  $x = 4$ ,  $y = -6$ ,  $x + y = -2$ .

- d) F.
- e) V.  $x > 0$ ,  $y > 0 \Rightarrow x > 0$ ,  $\frac{1}{y} > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} > 0$ .

4.  $r = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2} = \frac{1}{4}$  con  $-1 < \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ .

$$s = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{8}$$
 con  $\frac{1}{4} < \frac{7}{8} < \frac{3}{2}$  etcétera.

5. a)  $\frac{r_1 + r_2}{2} = r_1 = r_2$ .

b)  $r_1 > \frac{r_1 + r_2}{2} > r_2$ .

6. El promedio de  $r_1, r_2, \dots, r_n$  es el número  $\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}$ .

7.  $\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6}{6} = 10$ .

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7}{7} = 5$$

luego

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 = 35 \text{ y como } r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 60, \text{ resulta } 60 + r_7 = 35, \text{ luego } r_7 = -25.$$

8.  $c \geq a$ .

9.  $\frac{5 \times 7 + 4 \times 8 + 6 \times 10 + 3 \times 11 + 1 \times 13 + 1 \times 16}{20} = 9,45$ .

10. Sabemos que  $x^2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{Q}$ . Sea  $x = a - b$ . Se tiene  $(a - b)^2 \geq 0$ , luego  $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$   
 $a^2 + b^2 \geq 2ab$   
Al dividir por  $ab > 0$ , resulta

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

**Nota:** Partimos de  $(a - b)^2 \geq 0$ , ya que si hubiesemos

aceptado como verdadero que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ,

al efectuar esas operaciones (recorremos la demostración en sentido inverso) llegamos a  $(a - b)^2 \geq 0$ .

11. a) M: entre -0,7 y -0,6; en el dibujo es

$$\frac{-0,7 - 0,6}{2} = -0,65$$

N: 0,85; P: 1,95.

b) M: entre  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  y  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ;

en el dibujo es  $\frac{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}}{2} = \frac{7}{12} \approx 0,58$ .

N: entre  $1 + \frac{2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$  y  $1 + \frac{3}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ .

P: entre  $2 + \frac{5}{6}$  y  $2 + \frac{6}{6} = 3$ .

### Ejercicios propuestos 1.7

1. a)  $t = \frac{90}{31}$ ; b)  $r = \frac{25}{66}$ ; c)  $x = \frac{31}{15}$   
 d)  $a \approx 6,99$  e)  $u = \frac{-65}{50}$ .

2.  $x = \frac{2}{a-2}$  para todo  $a \in \mathbb{Q} - \{2\}$ .

3.  $x = 2$ ,  $y = 3$  da lo siguiente:  $\frac{6-4}{3+15} = \frac{1}{9}$

que es el valor de la constante.

Si  $y = 12$ , tenemos

$\frac{3x-4}{12+15} = \frac{1}{9}$ , de donde  $x = \frac{7}{3}$ .

4. 1994.

### Ejercicios propuestos 1.8.1

1. Sea  $x$  la calificación del examen que queremos averiguar.

Queremos determinar  $x$  de tal manera que el promedio de las notas sea 8, esto es

$8 = \frac{6+7+9+x}{4}$ , de donde obtenemos  $x=10$

2. a) Sea  $T$  la temperatura a la que se lee el mismo valor en ambas escalas. Queremos determinar  $T$  del tal manera que  $^{\circ}\text{C} = ^{\circ}\text{F} = T$ ,

luego  $T = \frac{5}{9} (T - 32)$

y resolviendo esa ecuación resulta

$T = -40$ , es decir  $-40^{\circ}\text{C} = -40^{\circ}\text{F}$ .

b) Sea  $T$  el valor que se lee en la escala Fahrenheit. Queremos determinar  $T$ , cuando en la escala Celsius

se lee  $2T$ , luego,  $2T = \frac{5}{9} (T - 32)$ .

Resolviendo esa ecuación con incógnita  $T$ ,

resulta  $T = -\frac{160}{13} \approx -12,31$ , esto es  $-12,31^{\circ}\text{F}$  y  $-24,62^{\circ}\text{C}$ .

3. Sea  $x$  la cantidad invertida en el fondo que produce 22,5% de ganancia anual. Luego,  $300000 - x$  es lo que invierte en el otro fondo, el que produce 28% de ganancia anual.

Se tiene:

22,5% de  $x = \frac{22,5}{100} x = 0,225 x$

28% de  $(300000 - x) = \frac{28}{100} (300000 - x) = 0,28 (300000 - x)$ .

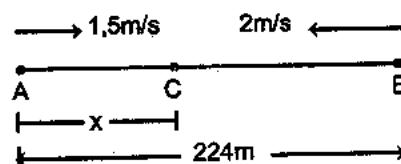
Como la ganancia total sobre los Bs. 300000 es igual a la ganancia combinada de las dos inversiones, se tiene  $0,225 x + 0,28 (300000 - x) = 74000$ .

Al resolver esa ecuación con incógnita  $x$ , obtenemos  $x \approx 181818,18$ .

Se debe invertir Bs. 181818,18 en el fondo que produce 22,5% de ganancia anual y Bs. 118181,82 en el fondo que produce 28% de ganancia anual.

**Nota:** Si calculamos 22,5% de 181818,18 + 28% de 118181,82, da 40907,5155 + 33090,9096 = 73998,4251  $\approx$  74000 el error cometido se debe a la aproximación realizada de  $x$ , donde la parte decimal de los bolívares se aproxima al centésimo.

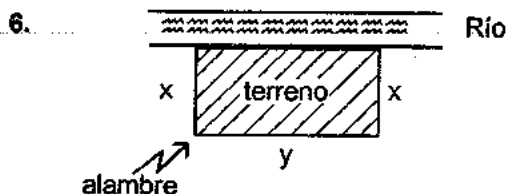
4.



El espacio  $x$  recorrido por el joven que parte de A, desde el momento en que ambos jóvenes empiezan a caminar hasta un instante  $t$  (segundos) es igual a  $x = (1,5)\text{m/s} (t)\text{s} = 1,5t\text{m}$  y lo recorrido por el joven que parte de B, durante el mismo tiempo  $t$ , es igual a  $(2)\text{m/s} (t)\text{s} = 2t\text{m}$ . En el momento cuando los dos jóvenes se encuentran (en el punto C), la distancia recorrida por B debe ser  $224 - x$  (para que la suma de las dos distancias  $x$  y  $224 - x$  sea 224), luego  $224 - x = 2t$ , de donde  $224 - 1,5t = 2t$ ,  $t = 64(\text{s})$  y por lo tanto  $x = 1,5t = 96(\text{m})$ .

Es decir, cuando A ha caminado 96 m y B ha caminado 128 m los dos jóvenes se encuentran.

5. Si  $x$  es el resto de juegos durante la temporada, entonces  $x + 100$  es el número total de juegos durante la temporada.  
 $0,500x = 50\%$  de  $x$  (50% de juegos ganados durante el resto de la temporada).  
 $0,650(100) = 65\%$  de juegos ganados en 100 partidas.  
 Se tiene  $0,650 \cdot 100 + 0,500x = 0,600(x + 100)$  y esta ecuación tiene como solución  $x = 50$ , estos, el equipo de béisbol tendrá un porcentaje de 0,600 (60%) si en el resto de la temporada gana 25 juegos (50% de 50).



Como se observa en el dibujo,  $x$  es la longitud del lado no paralelo al río e  $y$  la longitud del lado paralelo al río.

Se tiene:  $550 = 2x + y$ .

$A = xy$  (área del terreno).

a) Si  $y = 2x$ , resulta  $550 = 2x + 2x = 4x$ , luego

$x = 137,5$  (m) y por lo tanto

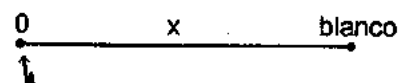
$A = (137,5)(2 \cdot 137,5) = 37812,5(m^2)$

es decir, se trata de un terreno de aproximadamente 3,78 Ha (1 Ha = 10000 m<sup>2</sup>; donde Ha es la abreviatura de hectárea).

b) Si  $y = \frac{x}{2}$ , resulta  $550 = 2x + \frac{x}{2}$ , luego  $x = 220$

(m) y por lo tanto  $A = 220 \cdot \frac{220}{2} = 24200(m^2)$  es

decir, 2,42 Ha.

7.   
 desde donde se lanza el proyectil.

Sea  $x$  la distancia, en metros, que hay desde donde se lanza el proyectil (horizontalmente) hasta el blanco.

El tiempo  $t = 3,5$  (s) es igual al tiempo  $t_p$  que tarda el proyectil en dar en el blanco más el tiempo  $t_s$  que tarda el sonido en viajar desde el blanco hasta el punto 0 (ver dibujo), luego

$$3,5 = t_p + t_s = \frac{x}{250} + \frac{x}{331} \approx 0,004x + 0,00302x = 0,00702x$$

y de aquí se obtiene

$$x = \frac{3,5}{0,00702} \approx 498,58 \text{ (m)}.$$

8. Sea  $t$  el número de horas que trabajó el ingeniero, por lo tanto su ayudante trabajó  $t - 5$  horas.

Se tiene:

$5500t$  es el costo por las  $t$  horas trabajadas por el ingeniero.

$2000(t - 5)$  es el costo por las  $t - 5$  horas trabajadas por el ayudante.

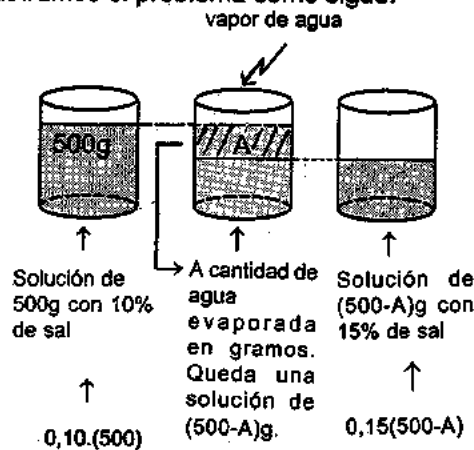
Como el costo total fue de Bs. 72800, resulta  $72800 = 5500t + 2000(t - 5)$

de donde obtenemos

$$t = 11,04 \text{ horas.}$$

El ingeniero trabajó 11,04 h y su ayudante 6,04 horas.

9. Ilustramos el problema como sigue:



Como no ha habido pérdida de sal sino únicamente de agua por evaporación, entonces

$$0,10 \cdot 500 = 0,15(500 - A)$$

y al resolver esta ecuación resulta:

$$A = \frac{25}{0,15} \approx 166,67(g)$$

esto es, se deben evaporar 166,67 gramos de agua para que la solución resultante tenga 15% de sal.

**OTRA MANERA DE RESOLVERLO:** Como inicialmente hay 10% de sal, entonces hay 90% de agua, es decir

$$90\% \text{ de } 500 = 0,9 \cdot 500 = 450(g).$$

Si al final la solución debe tener 15% de sal, entonces habrá 85% de agua, por lo tanto,

$$450 - A = 0,85(500 - A)$$

y de aquí resulta

$$A = \frac{25}{0,15} \approx 166,67(g).$$

$$10. \quad a) \frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 10 + 5 \cdot 7}{5 \cdot 10} = \frac{65}{50} = \frac{13}{10}.$$

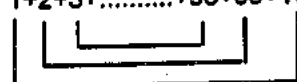
b) mcm (5,10) = 10, luego

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 3 + 7}{10} = \frac{13}{10}.$$

$$c) \frac{3}{5} + \frac{7}{6} = 0,6 + 0,7 = 1,3.$$

$$11. \quad S = 1+2+3+\dots+100.$$

a) Agrupando los términos equidistantes de los extremos:

$$1+2+3+\dots+98+99+100$$


resulta

$$S = (1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots + (50+51)$$

hay 50 de estos sumandos y cada uno de ellos es igual a 101. Luego,

$$S = 50 \cdot 101 = 5050.$$

b) Utilizando la fórmula conocida para sumar

una progresión aritmética,  $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

resulta

$$S = \frac{100(1+100)}{2} = 5050.$$

### Ejercicios propuestos 1.8.2

$$1. \quad a) 0 = 2 - 2; \quad 1 = 2/2; \quad 4 = 2 \cdot 2 = 2 + 2.$$

$$b) 0 = \frac{3-3}{3}; \quad 1 = \left(\frac{3}{3}\right)^3; \quad 2 = \frac{3+3}{3}; \quad 3 = \frac{3 \cdot 3}{3};$$

$$4 = 3 + \frac{3}{3}, \dots$$

Escribe otros números.

$$c) 44 - 44 = 0; \quad \frac{44}{44} = 1; \quad \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2;$$

$$4 - \left(\frac{4}{4}\right)^4 = 3; \quad 4 + \frac{4-4}{4} = 4; \dots$$

$$\frac{44-4}{4} = 10; \dots; 4+4+4+4 = 16; \dots$$

$$\left(4 + \frac{4}{4}\right) 4 = 20.$$

2. Sea  $x$  el peso en kilos del ladrillito de juguete. Como las dimensiones de este ladrillito son 4 veces menores que las del ladrillo de construcción, entonces el volumen del ladrillito será  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$  veces menor que el volumen del ladrillo.

Como el peso es directamente proporcional al volumen, establecemos la siguiente relación de proporcionalidad

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{4^3} (*)$$

$$\text{de donde } x = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625 \text{ (kg)}.$$

**Nota:** El volumen de un ladrillo de dimensiones  $a, b, c$  es  $V = abc$ . Si cada una de las dimensiones se divide por 4, el volumen del ladrillo así

$$\text{obtenido es } \frac{V}{4^3} = V'.$$

La relación (\*) se obtiene de

$$\frac{x}{4} = \frac{V/4^3}{V} = \frac{1}{4^3}$$

o bien por la regla de tres

$$\frac{V}{V'} = \frac{4}{x}$$

$$\text{de donde } x = \frac{4V'}{V} = \frac{4(V/4^3)}{V} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

3. Sea  $x$  la edad (número de años) que tenía Diofanto al momento de su fallecimiento. De los datos contenidos en el enunciado se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

cuya solución es  $x = 84$ .

4. La ecuación es  $x^2 + bx = c$  (\*)

$$\begin{array}{ccc} b/4 & x & b/4 \\ \hline b/4 & & b/4 \\ \hline x & x^2 & x \\ \hline b/4 & & b/4 \\ \hline b/4 & x & b/4 \end{array}$$

Sea  $A$  el área del cuadrado más grande. Se tiene

$$A = x^2 + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{b}{4}\right)x = x^2 + bx + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = c + \left(\frac{b^2}{4}\right) \quad (**)$$

↑  
igual a  $c$  por (\*)

De otra parte, calculando  $A$  mediante  $A = \ell^2$  donde

$$\ell = \frac{b}{4} + x + \frac{b}{4} = x + \frac{b}{2}, \text{ resulta } A = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

y al igualar con (\*\*):

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

de aquí se obtiene (en notación actual) considerando únicamente la raíz positiva:

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$$

es decir:

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$$

fórmula conocida para resolver la ecuación de segundo grado  $x^2 + bx - c = 0$  ya que

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

5. Observemos que

$\frac{35}{2}$ ,  $\frac{35}{3}$  y  $\frac{35}{9}$  no son números enteros y

$$S = \frac{35}{2} + \frac{35}{3} + \frac{35}{9} = 35 \cdot \frac{17}{18} \approx 33,06$$

de modo que se hace imposible hacer esa repartición conservando la integridad de los camellos.

Observemos que

$$35 - S = 35 - 35 \cdot \frac{17}{18} = 35 \cdot \frac{1}{18}$$

es decir, con esa forma de repartir los 35

camellos hubiese sobrado  $\frac{1}{18}$  de

$$35 \left( \frac{35}{18} \approx 1,94 \right) \text{ o sea "casi dos"} \\ \text{camellos". Al agregar un camello}$$

para hacer un total de 36 camellos, la suma  $S$

pasa a ser  $36 \cdot \frac{17}{18} = 34$  y por lo tanto van a quedar 2 camellos

$$\left( 36 \cdot \frac{17}{18} - 34 = 2 \right) \text{ que obtiene Beremís y}$$

además, cada heredero recibe más de lo que supuestamente le correspondía, ya que:

$$\frac{36}{2} = 18 > \frac{35}{2}$$

$$\frac{36}{3} = 12 > \frac{35}{3}$$

$$\frac{36}{9} = 4 > \frac{35}{9}$$

## UNIDAD 2

### Ejercicios propuestos 2.2.1

$$\frac{1}{6} = 0,1\bar{6} \notin D.$$

$$\frac{2}{7} = 0,285714 \notin D.$$

$$\frac{4}{5} = 0,8 \in D.$$

$$\frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7,5 \in D.$$

$$\frac{145}{6} = 24,1\bar{6} \notin D.$$

### Ejercicios propuestos 2.2.2

1.  $A = \{-10, 10\}$

$B = \{-3, 3\}$

$C = \emptyset$  (conjunto vacío).

2. 3,1 ya que  $(3,1)^2 = 9,61 < 10$

3,16 ya que  $(3,16)^2 = 9,9856 < 10$

3,162 ya que  $(3,162)^2 = 9,998244 < 10$

3,1622 ya que  $(3,1622)^2 = 9,99950884 < 10$

Análogamente 3,16227.

Otros elementos son:

3; 3,15; 3,161; etc...

3.  $Z \cup D = D$   
 $Q \cap N = N$   
 $D \cup (Q - D) = Q$   
 $D \cap I = \emptyset$   
 $R \cup Q = R$   
 $I \cup (R - I) = R$   
 lo cual se deduce de:  
 i) Las siguientes inclusiones:  
 $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R, I \subset R.$   
 ii) Las siguientes propiedades:  
 si  $A \subset B$ , entonces  
 $A \cap B = A, A \cup B = B.$

### Ejercicios propuestos 2.3

1. a) Sea  $x \in I$  ( $x$  es un número irracional),  
 $x \neq 0$ . Si  $\frac{1}{x}$  fuese un número racional,  
 entonces se puede escribir en la forma  $\frac{1}{x} = \frac{p}{q}$   
 con  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .  
 Luego,  $x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ , es decir,  $x$  es un número  
 racional lo que contradice que  $x$  es irracional.  
 En consecuencia; si  $x$  es irracional,  $x \neq 0$ ,  
 entonces  $\frac{1}{x}$  es irracional.  
 b) Sea  $x \in I$ .  
 Si  $\frac{x}{2}$  fuese un número racional, entonces se  
 puede escribir en la forma  $\frac{x}{2} = \frac{p}{q}$  con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  
 $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .  
 Luego,  
 $x = \frac{2p}{q} \in \mathbb{Q}$ , es decir,  $x$  es un número racional  
 lo que contradice que  $x \notin \mathbb{Q}$ .  
 En consecuencia: si  $x$  es irracional entonces  
 $\frac{x}{2}$  también es irracional.  
 c) El producto de dos números irracionales  
 puede ser un número racional o un número  
 irracional. Por ejemplo:  
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$   
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
3. a)  $x+z=y+z \Rightarrow (x+z)+(-z) = (y+z)+(-z) \Rightarrow$   
 $x+(z+(-z)) = y+(z+(-z)) \Rightarrow$   
 $x+0 = y+0 \Rightarrow x=y.$

En esas implicaciones utilizamos,  
 sucesivamente, las siguientes propiedades:

- sumamos a ambos miembros de la igualdad  $x+z = y+z$  el número  $-z$ .
- propiedad asociativa de la suma.
- propiedad del elemento opuesto  $-z$  de  $z$ .
- propiedad del elemento neutro (cero) para la adición.

b) Sea  $xy=0$ . Si  $x=0$  entonces la propiedad está  
 demostrada:

Si  $x \neq 0$ , entonces  $x$  tiene un inverso  $\frac{1}{x}$ .

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad  
 $xy=0$  por  $\frac{1}{x}$ :

$$\frac{1}{x} (xy) = \frac{1}{x} \cdot 0$$

$(\frac{1}{x} x) y = 0$  (por la propiedad asociativa de la  
 multiplicación, y por que el producto de  
 cualquier número por 0 da 0)

$$1 \cdot y = 0 \text{ ya que } \frac{1}{x} x = 1$$

$$y = 0 \text{ ya que } 1 \cdot y = y.$$

Así, hemos demostrado lo siguiente:  
 $xy=0, x \neq 0 \Rightarrow y=0.$

4. a)  $x^3 + y^3$   
 b)  $x^3 - y^3$

### Ejercicios propuestos 2.4

1. a) Los números 1 y 1,03 son aproximaciones  
 por defecto del número 1,0327162. Los  
 números 2; 1,04 y 1,0327362 son aproximaciones  
 por exceso del número 1,0327162.  
 Observa que:  
 $1 < 1,03 < 1,0327162 < 1,0327362 < 1,04 < 2.$   
 b) 1,0327 y 1,0328. Se verifica  
 $1,0327 < 1,0327162 < 1,0328.$
2. 5,1961 y 5,1962 para  $\sqrt{27}$ .  
 Observa que  
 $(5,1961)^2 = 26,99945521 < 27$   
 $(5,1962)^2 = 27,00049444 > 27.$
- 6,1644 y 6,1645 para  $\sqrt{38}$ .  
 Observa que  $(6,1644)^2 = 37,99982736 < 38.$   
 $(6,1645)^2 = 38,00106025 > 38.$
- Por lo tanto, i) 5,1961 y 6,1644 son aproximaciones  
 por defecto de  $\sqrt{27}$  y  $\sqrt{38}$ , respectivamente;



ii) 5,1962 y 6,1845 son aproximaciones por exceso de  $\sqrt{27}$  y  $\sqrt{38}$ , respectivamente.

3. Con calculadora se obtiene:

a)  $\sqrt{e} \approx 1,648721271$ .

b)  $\sqrt{\pi} \approx 1,772453851$ .

c)  $\sqrt[3]{21} \approx 2,75892418$ .

Luego:

• 1,6487 y 1,6488 para  $\sqrt{e}$ .

• 1,7724 y 1,7725 para  $\sqrt{\pi}$ .

• 2,7589 y 2,7590 para  $\sqrt[3]{21}$ .

4. Sea  $x$  la longitud de la arista (en cm). Se tiene  $V = x^3 = 200$ , luego

$$x = \sqrt[3]{200} \text{ cm} = 5,8480354... \text{ cm.}$$

Para los fines prácticos, podemos considerar  $x \approx 5,85 \text{ cm} = 58,5 \text{ mm}$ .

5. Sea  $R$  el radio de la esfera. Se tiene

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{160}{9}$$

luego

$$R^3 = \frac{40}{3\pi} \text{ y por lo tanto } R = \sqrt[3]{\frac{40}{3\pi}}$$

Si tomamos  $\pi \approx 3,1415$ , resulta

$$R = \sqrt[3]{\frac{40}{3,1415}} \approx \sqrt[3]{4,244425699} \approx 1,6191 \text{ (dm)}.$$

6.  $A = \pi r^2 = 6 \text{ (m}^2\text{)}, \text{ luego } r = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \approx 1,382 \text{ (m)}$

donde tomamos  $\pi \approx 3,141$ .

7. Sea  $V_1$  el volumen del cono cuya altura es de 18 cm. Se tiene

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi (5\pi)^2 \cdot 18 \text{ cm}^3 = 150\pi^3 \text{ cm}^3.$$

Sea  $V_2$  el volumen del cono cuya altura es de 10 cm. Se tiene

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi (3\pi)^2 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 30\pi^3 \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, el volumen  $V$  del sólido sombreado es igual a

$$V = V_1 - V_2 = 120 \pi^3 \text{ cm}^3.$$

Si lo queremos expresar con decimales,

tomando  $\pi \approx 3,1415$  resulta:

$$V \approx 3720,42 \text{ cm}^3.$$

8. a)  $-5,559 \times 10^{-1} (\pi \approx 3,141)$

b) 5,552

c) 4,659

d) 4,045

9. •  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 = 2 + 5 = 7$

•  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$$\approx (1,4142 + 2,2360) \cdot (1,4142 - 2,2360) =$$

$$= 3,6502 \cdot (-0,8218) = -2,99973436$$

observa que -3 el resultado exacto y

-2,99973436 es un resultado aproximado:

$$-3 \approx -2,99973436.$$

10.  $(2,21)^3 = 10,793861 < 11$

$$(2,23)^3 = 11,089567 > 11$$

luego: 2,21 es una aproximación por defecto

de  $\sqrt[3]{11}$  y 2,23 es una aproximación por exceso

de  $\sqrt[3]{11}$ .

### UNIDAD 3

#### Ejercicios propuestos 3.2.1

1.  $x > y$ .

2. a)  $\sqrt{71} > \frac{354}{122} > \frac{7}{\sqrt{8}} > \frac{5}{3}$ .

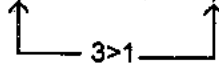
b)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})\pi < 3,29$ .

observa que  $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ , luego  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})\pi < 0$ .

3.  $x > y > z$ .

4. 1,459004581211221112221111...  
siguiendo las otras cifras con la misma ley de formación con el fin de que haya infinitas cifras decimales no periódicas.

5.  $\pi - \sqrt{2} = 3,141592659... - 1,41421356...$

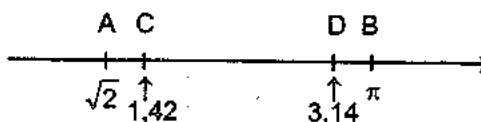


luego  $\pi > \sqrt{2}$ .

También resulta de lo siguiente

$$\pi - \sqrt{2} = 3,14159... - 1,41421... > 3,14 - 1,42 = 1,72 > 0$$

lo que se observa en el siguiente gráfico



siendo  $\overline{AB} = \pi - \sqrt{2}$   
 $\overline{CD} = 3,14 - 1,42$   
y  $\overline{AB} > \overline{CD}$ .

6.  $-0,5 < \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3\sqrt{2}}{4} < \sqrt{3} < 2,038$ .

### Ejercicios propuestos 3.2.2

1.  $a \geq b; b < c; c \geq y \leq$ .

2.  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{3} \approx \frac{1,414 + 1,732 + 2,236}{3} = 1,794$ .

3. a) Si suponemos  $\frac{1}{a} < 0$ , se tiene que  $a \cdot \frac{1}{a} < 0$

(ver N° 1-a de ejercicios 3.2) y como  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ,

se tendría  $1 < 0$  lo que es absurdo.

En consecuencia  $\frac{1}{a} > 0$ : "el inverso de un

número positivo es un número positivo".

Análogamente resulta que:

$a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$ .

b) Como  $y > 0$ , entonces  $\frac{1}{y} > 0$  (por lo

demostrado en la parte (a)) luego:

$x > 0, \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{y} > 0$ , es decir  $\frac{x}{y} > 0$ .

"El cociente de dos números positivos es un número positivo".

c) Es claro que  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , ya que si alguno esos números es 0, se tendría  $ab=0$  contrariamente a la hipótesis  $ab < 0$ .

Como  $a \neq 0$ , solamente hay dos posibilidades:

i)  $a > 0$  o ii)  $a < 0$ .

Trabajemos con (i), es decir  $a > 0$ , entonces tiene que ser  $b < 0$  ya que en caso contrario de ser  $b > 0$ , resultaría  $ab > 0$  lo que contradice la hipótesis  $ab < 0$ .

Así, hemos demostrado: (i)  $a > 0$  y  $b < 0$ .

Análogamente se razona con la posibilidad

(ii)  $a < 0$ , resultando  $b > 0$ .

"Si el producto de dos números es negativo, entonces uno de ellos es positivo y el otro es negativo".

d)  $a > b$  y  $c < 0 \Rightarrow a-b > 0$  y  $-c > 0 \xRightarrow{(1)} (a-b)(-c) > 0$   
 $\Rightarrow ac+bc > 0 \Rightarrow bc > -ac$ , o equivalentemente  $ac < bc$ .  
Recíprocamente; supongamos que  $ac < bc$  y  $c < 0$ , se tiene  $ac < bc$  y  $-c > 0 \xRightarrow{(2)} \frac{ac}{-c} < \frac{bc}{-c}$   
 $\Rightarrow -a < -b \Rightarrow -b - (-a) > 0 \Rightarrow -b + a = a - b > 0 \Rightarrow a > b$ .

Nota: Las implicaciones (1) y (2) son consecuencia del N° 1-(d) de ejercicios 3.2.

e) Es consecuencia de la parte (d) con  $c = -1$ .

f) Como  $x \neq 0$ , entonces hay dos posibilidades:  $x > 0$  o  $x < 0$ .

(i) Supongamos que  $x > 0$ . Se tiene:

$x > 0$  y  $x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ .

(ii) Supongamos que  $x < 0$ , entonces  $-x > 0$  luego  $(-x)(-x) > 0$ , es decir  $x^2 > 0$ .

g) Como  $x^2 \geq 0$  para todo  $x$ , se tiene:

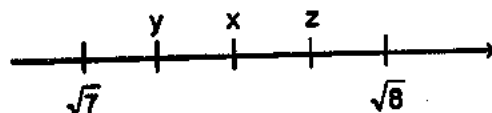
$x^2 \geq 0$  y  $1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$ .

h) Para todo  $x$ , y se verifica  $x^2 \geq 0$ ,  $y^2 \geq 0$ , luego  $x^2 + y^2 \geq 0$ .

4.  $x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{8}}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{7} + x}{2} = \frac{3\sqrt{7} + \sqrt{3}}{4}$

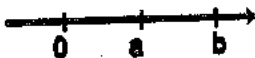
se tiene

$\sqrt{7} < \frac{3\sqrt{7} + \sqrt{8}}{4} < \frac{\sqrt{7} + \sqrt{8}}{4} < \sqrt{8}$

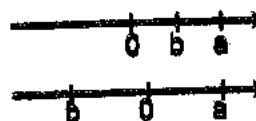


o también con  $z = \frac{x + \sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{8}}{4}$  y se tiene

$\sqrt{7} < \frac{3\sqrt{7} + \sqrt{8}}{4} < \frac{\sqrt{7} + \sqrt{8}}{2} < \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{8}}{4} < \sqrt{8}$ .

5. a)  $x=y$ ; b)  $z=c$ ; c)  $b > 0$  

d) Ninguna. Podría ser  $0 < b < a$  o también  $b \leq 0$ .



### Ejercicios propuestos 3.3

1. a)  $\overline{TS}=1$ ; d(A;B)=0,5; d(A;N)=3; d(N;C)=4;  
 $\overline{SC}=2,5$ .

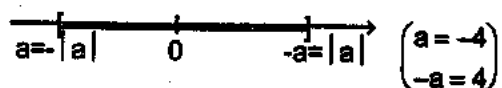
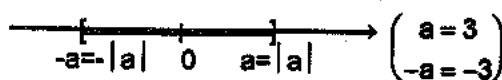
b)  $x+1=-(1/2)$  o  $x+1=1/2$ , luego  $x=-\frac{3}{2}$  o  $x=\frac{1}{2}$ ,  
que se representan por los puntos H y M,  
respectivamente.

2. a)  $x+7=0 \Rightarrow x=-7$ .  
b)  $x-6=-2$  o  $x-6=2 \Rightarrow x=4, x=8$ .  
c)  $x=\frac{1}{3}$ ; d)  $x=\frac{3}{2}, x=\frac{1}{2}$

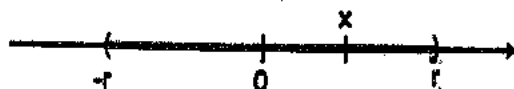
e)  $-\sqrt{5}x + \sqrt{3} = -(2 + \sqrt{3})$  o  $-\sqrt{5}x + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$   
 $\Rightarrow x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

f) Como  $\sqrt{3} - 10 < 0$  y sabemos que  $|a| \geq 0$  para  
todo número  $a$ , entonces la ecuación  $|x-3| =$   
 $\sqrt{3} - 10$  no tiene solución.

3. Si  $a \geq 0$ , se tiene  $|a| = a$  y  $-|a| = -a \leq 0$ ,  
siendo verdadero que  $-|a| \leq a \leq |a|$ , es decir  
 $-|a| \leq a \leq |a|$ .  
Si  $a \leq 0$ , se tiene  $|a| = -a \geq 0$  y  $-|a| = a \leq 0$ , siendo  
verdadero que  $a \leq a \leq -a$ , o sea,  $-|a| \leq a \leq |a|$ .



4. Como  $r > 0$ , se tiene  $-r < 0$ .  
a) Si  $x \geq 0$ , entonces  $|x| = x$  y como  $|x| < r$ , se tiene  $x < r$ .  
Evidentemente  $-r < x$ ; luego  $-r < x < r$ .



Si  $x < 0$ , se tiene  $|x| = -x$  y como  $|x| < r$ , entonces  
 $-x < r$ , de donde  $x > -r$  y evidentemente  $r > x$ , luego  
 $-r < x < r$ .



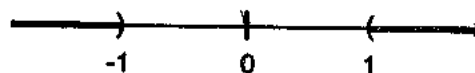
El recíproco:  $-r < x < r \Rightarrow |x| < r$   
se demuestra de forma análoga.

- b) Es consecuencia de la parte (a) y de  $x = r$  si  
y sólo si  $x = -r$  o  $x = r$ .  
c) Si hacemos  $z = x - a$ , se tiene  $|z| < r$  si y sólo  
si  $-r < z < r$  (por la parte (a)), luego  $-r < x - a < r$ .



d) Es consecuencia de la parte (c) y de  $|x-a| = r$   
si y sólo si  $x-a = -r$  o  $x-a = r$ .

5. a)  $a > 1$  o  $a < -1$ .

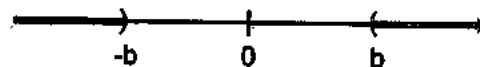


b) Supongamos  $|a| > b$ . Distinguiamos dos  
casos:  $a < 0$  ó  $a \geq 0$ .

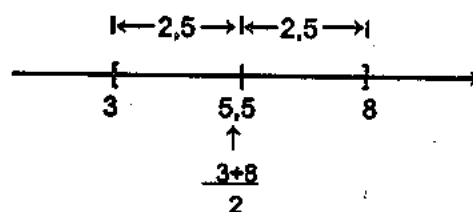
Si  $a \geq 0$ , se tiene  $|a| = a$ , luego  $a > b$ .

Si  $a < 0$  se tiene  $|a| = -a$ , luego  $-a > b$ , de donde  $a < -b$ .

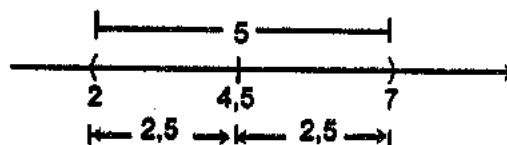
El recíproco se demuestra de manera análoga.



6. a) i)  $\{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 8\}$   
ii)  $\{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 8\}$   
b)  $\{x \in \mathbb{R} : |x-5.5| \leq 2.5\}$

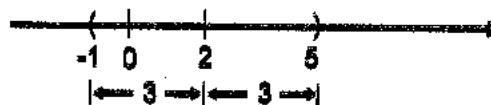


7.  $a = \frac{2+7}{2} = 4.5$   
 $r = 2.5$



$$2 < x < 7 \Leftrightarrow |x-4.5| < 2.5$$

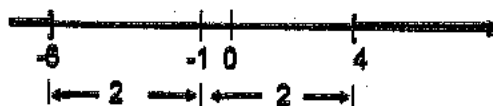
8. a)  $|x-2| < 3$  o bien  $-1 < x < 5$



es decir  $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 3\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} : |x| < |x+3|\}$

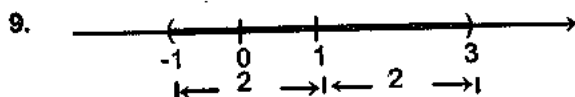
c)  $|x+1| \geq 5$  o bien  $x+1 \geq 5$  o  $x+1 \leq -5$ ,  
es decir  $x \geq 4$  o  $x \leq -6$



o sea  $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| \geq 5\}$

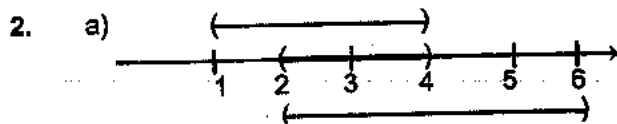
d)  $|x-b| < |x+2|$

$\{x \in \mathbb{R} : |x-b| < |x+2|\}$

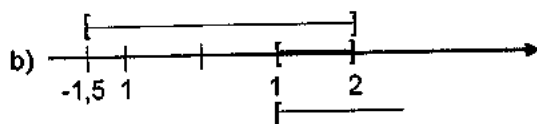


### Ejercicios propuestos 3.4

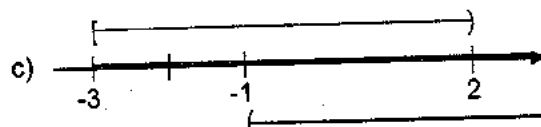
1.  $A=(-3,0]$ ;  $B=(-\infty,1)$ ;  $C=(-\frac{3}{2},+\infty)$ .



$(1,4) \cap (2,6) = (2,4)$ .



$[-1.5,2] \cap [1,\infty) = [1,2]$ .



$[-3,2] \cup (-1,\infty) = [-1,\infty)$ .

3. a)  $[a,b] \cap [a,c] = [a,b]$  ya que  $[a,b] \subset [a,c]$ .  
 b)  $(a,b) \cup (b,c) = (a,c)$   
 c)  $(a,c) \cap [a,b] = (a,b)$   
 d)  $[a,b] \cap [b,c] = \{b\}$   
 $[a,b] \cap [b,c] = \emptyset$

4.  $(-1,1] \subset [-4,1]$   
 $[0,33;1] \subset (-1,1]$

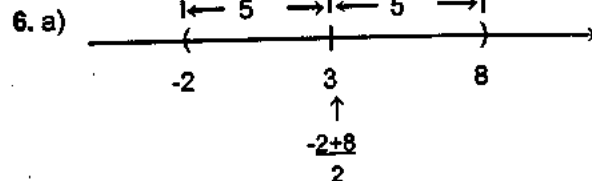
luego

$[0,33;1] \subset (-1,1] \subset [-4,1]$

5. a)  $3 \leq x \leq 5 \Rightarrow 9 \leq 3x \leq 15$   
 $\Rightarrow 9+4 \leq 3x+4 \leq 15+4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 13 \leq 3x+4 \leq 19 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3x+4 \in [13,19]$ .

b)  $-4 < x-7 \leq 3 \Rightarrow -4+7 < x \leq 3+7$   
 $\Rightarrow 3 < x \leq 10 \Rightarrow x \in (3,10]$

c)  $a-r \leq x \leq a+r \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (a-r)-a \leq x-a \leq (a+r)-a \Rightarrow$   
 $\Rightarrow -r \leq x-a \leq r \Rightarrow x-a \in [-r,r]$ .



$[-2,8] = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leq 5\}$

es decir

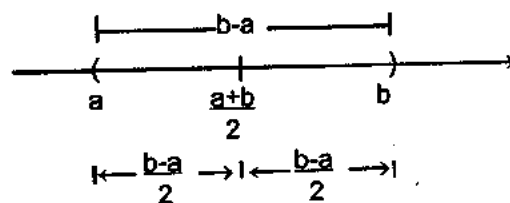
$x \in [-2,8] \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow$

$-2-3 \leq x-3 \leq 8-3 \Leftrightarrow -5 \leq x-3 \leq 5$

$\Leftrightarrow |x-3| \leq 5$ .

b)  $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}\}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}\}$



Podemos demostrarlo analíticamente así:

$|x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}$  si y sólo si

$-\frac{b-a}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2}$ .

Al sumar  $\frac{a+b}{2}$ , obtenemos

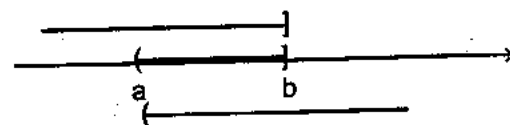
$-\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$

$a \leq x \leq b$  por lo tanto

$|x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a,b]$

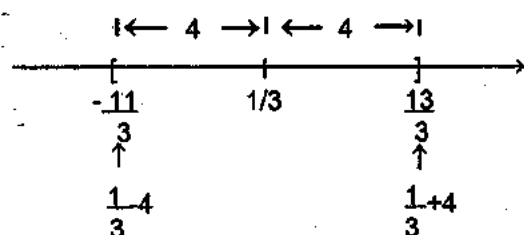
7. •  $[a,b] = [a,\infty) \cap (-\infty,b]$

•  $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty,b)$



•  $[a,b) = (-\infty,b) \cap [a,\infty)$ .

8.



Es el intervalo cerrado

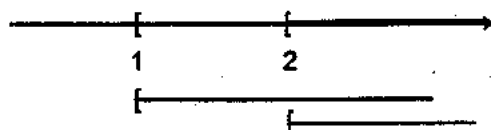
$$\left[-\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right] \text{ observemos que}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{-\frac{11}{3} + \frac{13}{3}}{2} \text{ y } \frac{13}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 8.$$

9.

Es falsa.

$$[1, \infty) \cap [2, \infty) = [2, \infty)$$

Nótese que  $[2, \infty) \subset [1, \infty)$ .

$$10. \quad ^\circ\text{F} \in [80, 150] \stackrel{(1)}{\Rightarrow} ^\circ\text{C} \in \left[\frac{80}{3}, \frac{590}{9}\right]$$

$$\text{Como } \frac{80}{3} \approx 26,67$$

$$\frac{590}{9} \approx 65,55$$

entonces, la temperatura varía desde 26,67 °C hasta 65,55°C (aproximadamente). (1) se deduce de lo siguiente:

$$C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

$$80 \leq F \leq 150 \Rightarrow 80 - 32 \leq F - 32 \leq 150 - 32$$

$$\Rightarrow 48 \leq F - 32 \leq 118 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{9} \cdot 48 \leq \frac{5}{9} (F - 32) \leq \frac{5}{9} \cdot 118$$

$$\frac{80}{3} \leq C \leq \frac{590}{9}$$

$$11. \quad F = \frac{9}{5} C + 32,$$

luego:

$$36 \leq C \leq 39,5 \Rightarrow$$

$$\frac{9}{5} \cdot 36 \leq \frac{9}{5} C \leq \frac{9}{5} \cdot 39,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} \cdot 36 + 32 \leq \frac{9}{5} C + 32 \leq \frac{9}{5} \cdot 39,5 + 32$$

$$\Rightarrow 96,8 \leq F \leq 103,1.$$

Es decir:

$$^\circ\text{C} \in [36; 39,5] \Rightarrow ^\circ\text{F} \in [96,8; 103,1]$$

y por lo tanto la temperatura de ese paciente, en la escala Fahrenheit, varía desde 96,8°F hasta 103,1°F.

## Ejercicios propuestos 3.5.1

- $8,7 \times 10^{-4}$  dos cifras significativas y del orden de las diezmilésimas.
  - $3,572 \times 10^4$
  - $3,1415$  cinco cifras significativas y del orden de las unidades ( $10^0$ )
  - $3,714201 \times 10^2$ .
  - $\approx 1,846798766$ .
  - $5,09794919 \times 10^5$ .

- $1,497 \times 10^8$  km; el orden es de las centenas de millón.
  - $2,786469 \times 10^{12}$  Bs.; el orden es del millón de millones, es decir del orden del billón.

**Nota:** En Venezuela 1 billón es igual a  $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$ , en cambio en algunos países, como en los Estados Unidos, 1 billón es igual a  $10^3 \times 10^6 = 10^9$  es decir igual a mil millones.

- $a = 0,7666... = 0,7\bar{6}$   
 $|a - a^*| = 0,00666... = 0,00\bar{6} < \frac{1}{100}$

$\frac{|a - a^*|}{|a|} \approx 0,00869565$  es decir aproximadamente el 0,87%.

- $3 \times 10^{-7}$ ;  $2,42982523 \times 10^{-7}$  aproximadamente  $2,43 \times 10^{-6}\%$ .

- $a^* = 0,6944$  ya que  $a = \frac{25}{36} = 0,69\bar{4}$  y  $|a - a^*| < 10^{-4}$

$$6. \quad 100 \frac{\left|3,1415 - \frac{22}{7}\right|}{|3,1415|} \approx 0,043\%.$$

- 1000 km y  $100 \cdot \frac{1000}{299000} \approx 0,33\%$ .

### Ejercicios propuestos 3.5.2

1. a)  $[\frac{11}{6}, \infty)$ ; b)  $(\frac{62}{5}, \infty) \Rightarrow$

c)  $-3 \leq x - 4 < 21$

$1 \leq x < 25$ , el intervalo semiabierto  $[1, 25)$

$$\frac{2-x}{x} \geq -1 \Rightarrow \frac{2-x}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2-x+x}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{x} \geq 0$$

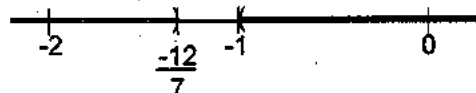
para ningún valor de  $x$  hay la igualdad  $\frac{2}{x} = 0$  y

$$\frac{2}{x} > 0 \text{ si } x \in (0, \infty), \text{ es decir } x \in \mathbb{R}^+$$

e)  $-5+3x < 7x-1 \Rightarrow -1 < x$  o sea  $x \in (-1, \infty)$ .

$7x-1 < -13 \Rightarrow x < -\frac{12}{7}$  o sea  $x \in (-\infty, -\frac{12}{7})$ .

Como  $(-\infty, -\frac{12}{7}) \cap (-1, \infty) = \emptyset$ , entonces no hay solución.



2. Sea  $x$  la medida (en grados) del ángulo y sea  $z$  la medida del ángulo resultante, se tiene:

$$z = x + \frac{1}{2}(90^\circ - x) - \frac{1}{2}(180^\circ - x) = x - 45^\circ$$

Como  $x < 90^\circ$ , entonces  $z - 45^\circ = x - 45^\circ - 45^\circ = x - 90^\circ < 0$  luego  $z < 45^\circ$ .

3.  $10 \leq F \leq 18$  y  $F = 4,5x$

$$\Rightarrow 10 \leq 4,5x \leq 18 \Rightarrow$$

$$\frac{100}{45} \leq x \leq 4.$$

4.  $-3x+6 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$ , es decir  $x \in (-\infty, 2]$

5. Sean  $x$  el número de billetes de Bs. 100 e  $y$  el número de billetes de Bs. 500. Se tiene  $x+y = 20$ .

Como el precio del artículo está comprendido entre Bs. 8400,00 y Bs. 8800,00, se tiene  $8400 \leq 100x+500y \leq 8800$ .

de donde (dividiendo por 100)

$$84 \leq x + 5y \leq 88.$$

De  $\square$  se deduce  $y = 20 - x$  luego

$$84 \leq x + 5(20 - x) \leq 88$$

$$84 \leq -4x + 100 \leq 88$$

$$-16 \leq -4x \leq -12$$

y al dividir por  $-4$  que es negativo, obtenemos

$$4 \geq x \geq 3$$

por lo tanto el número de billetes de Bs. 100 es 3 ó 4 ( $x$  tiene que ser entero).

El problema tiene dos soluciones:  $x=3, y=17$  y el artículo vale Bs. 8800,00

$x=4, y=16$  y el artículo vale Bs. 8400,00

6. Sea  $x$  el número de TV de 20" que se venden mensualmente, luego  $3x$  es el número de TV de 13" que se vende por mes, por lo tanto lo que recibe por esa venta es  $70000x + 42000(3x) = 196000x$   $\square$

Los gastos mensuales de la tienda son, de acuerdo con los datos del enunciado del problema,

$$10000 + 70000 + 100000 + 40000x + 26000$$

$$(3x) = 180000 + 118000x \text{  $\square$  }$$

Para que no se pierda dinero, la cantidad  $\square$  (el total de gastos) debe ser menor o igual que la cantidad  $\square$  (lo que recibe el dueño de la tienda), es decir  $180000 + 118000x \leq 196000x$

La solución de esta inecuación es:

$$x \geq \frac{180000}{78000}$$

$$x \geq 2,30769...$$

y por lo tanto, el número mínimo de TV de 20" que se deben vender mensualmente es 3 y de TV de 13" es 9.

### Ejercicios propuestos 3.5.3

1. a)  $(-\infty, -\frac{2}{7}] \cup [\frac{2}{7}, \infty)$

b)  $|x| = |x| < 5$ , luego  $x \in (-5, 5)$ .

c)  $x+3 \geq 5$  ó  $x+3 \leq -5$  la solución es  $[-\infty, -8] \cup [2, \infty)$

d)  $-1 < 3x+1 < 1 \Rightarrow x \in (-\frac{2}{3}, 0)$ .

La solución es  $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ .

2.  $A = [-2, 2]$ ;  $B = (-1, 3)$ ;  
 $A \cap B = (-1, 2]$ .

3. a)  $[1,3] \cap \mathbb{Z} = \{-1,0,1,2,3\}$ .  
 b)  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{N} = \{0,1\}$

#### Ejercicios propuestos 3.5.4

1. a)  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ .  
 b)  $[-1,0]$ .  
 c)  $\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ .  
 d)  $[-2,1]$ .  
 e)  $(-\infty, \frac{1}{5}] \cap [\frac{1}{2}, \infty)$ .
2.  $x^2 - 1 \geq 0$ , luego  
 $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
3. a) Si  $c=0$  no hay solución.  
 Si  $c>0$ , la solución es  $\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$   
 Si  $c<0$  no hay solución ya que  $(z-3)^2 > 0$  para todo  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z \neq 3$ .  
 b) Únicamente se satisface para  $t=-4$ .

## GLOSARIO

### ALGORITMO:

Es una lista completa de instrucciones o pasos necesarios para realizar una tarea o cálculo. Los pasos en un algoritmo pueden consistir en descripciones precisas de cada detalle o en descripciones generales.

### APROXIMACIÓN:

Cuando dos cantidades  $X$  y  $x$  (números) son aproximadamente iguales, lo que se escribe mediante  $X \approx x$ , una de ellas puede ser utilizada en lugar de la otra o como *aproximación* de la otra.

### ASOCIATIVA:

Las operaciones de adición y de multiplicación de números satisfacen la propiedad asociativa:

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

$$a(bc) = (ab)c$$

También satisfacen la propiedad asociativa las operaciones de intersección y de reunión de conjuntos:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

### CIFRAS SIGNIFICATIVAS:

Sea  $d$  un número decimal escrito en notación científica  $d=k \times 10^q$  donde  $k$  es un número decimal tal que  $1 \leq k < 10$  y  $q \in \mathbb{Z}$ . Las cifras del número  $k$  se denominan las cifras significativas de  $d$ .

Una manera práctica de contar las cifras significativas de  $d$  es contando las cifras que tiene desde la primera no nula (contando de izquierda a derecha) hasta la última cifra no nula.

### COCIENTE:

Dados dos números enteros  $b$  y  $a$ , con  $a > 0$ , entonces existen dos únicos números enteros  $q$  y  $r$  tales que  $b=aq+r$  con la condición  $0 \leq r < a$ .  $q$  se denomina el cociente de la división de  $b$  (dividendo) entre  $a$  (divisor) y  $r$  el resto de la división.

### CONJUNTO:

Un conjunto es una colección bien definida de objetos o elementos. Si un conjunto está definido mediante una propiedad  $P$  se denota mediante  $\{x: x \text{ satisface } P\}$ .

Los conjuntos finitos se denotan escribiendo sus elementos entre llaves  $\{\dots\}$ .

### CONJUNTO VACÍO:

Se representa con la letra  $\emptyset$  y es el conjunto que no tiene elementos.

### CONMUTATIVA:

Las operaciones de adición y de multiplicación de números satisfacen la propiedad conmutativa:

$$a+b = b+a$$

$$ab = ba$$

También satisfacen la propiedad conmutativa las operaciones de intersección y de unión de conjuntos:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

### CONTENIDO EN, CONTIENE A:

Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos, se dice que  $A$  está contenido en  $B$  si se verifica que todo elemento perteneciente a  $A$  pertenece a  $B$ ; se denota  $A \subset B$  y también se dice que  $A$  está incluido en  $B$ . Si  $A \subset B$  se dice que  $B$  contiene a  $A$  y se denota  $B \supset A$ .

### DIFERENCIA DE CONJUNTOS:

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , la diferencia de  $A$  con  $B$  es el conjunto denotado  $A-B$  y definido mediante  $A-B = \{x: x \in A \text{ y } x \notin B\}$ .

### DIGITOS (CIFRAS):

Son los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

### DESIGUALDAD TRIANGULAR:

Es la propiedad siguiente en relación con el valor absoluto  $|x+y| \leq |x|+|y|$ .



**DISJUNTO:**

Los conjuntos A y B son disjuntos si no tienen elementos comunes, es decir, si  $A \cap B = \emptyset$ .

**DISTANCIA ENTRE DOS NÚMEROS REALES x,y:**

Se denota  $d(x,y)$  y se define mediante  $d(x,y) = |x-y|$ . Nótese que  $d(x,y) = d(y,x) = |y-x|$ .

Si P y M son los puntos de una recta que representan, respectivamente, a los números x e y, entonces  $|y-x|$  es la distancia entre esos dos puntos, denotada  $d(P,M)$  y esto da la longitud PM del segmento PM.

**DISTRIBUTIVA:**

La operación de multiplicación es distributiva respecto de la adición de números:  $a(b+c) = ab + ac$ .

**DIVISOR Y DIVIDENDO:**

(ver cociente).

**ELEMENTO NEUTRO O IDENTIDAD:**

Para la operación de adición de números es el número cero.

( $a+0 = 0+a = a$ ) y para la operación de multiplicación de números es el número 1 ( $1 \times a = a \times 1 = a$ ).

**ERROR:**

Hay varios tipos de errores cuando tomamos un valor aproximado  $a^*$  de un número a. El error absoluto se define como  $|a-a^*|$ . El error relativo se define mediante  $|a-a^*|/|a|$  y el error porcentual es  $100 |a-a^*|/|a|$ . Los errores de redondeo y de truncamiento provienen cuando redondeamos o truncamos un número, respectivamente.

**FACTOR PRIMO:**

(Ver número primo).

**FRACCIÓN DECIMAL:**

(Ver número decimal).

**INTERSECCIÓN:**

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que consta de los elementos comunes a A y B, esto es,  $A \cap B = \{x: x \in A \text{ y } x \in B\}$ .

**INTERVALO:**

Hay distintos tipos de intervalos en  $\mathbb{R}$ . Los intervalos finitos (o acotados o limitados) son:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$  (intervalo cerrado)

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$  (intervalo abierto)

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$  y  $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$  (intervalos semiabiertos)

y los intervalos infinitos (o no acotados o no limitados) son:

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$ ;  $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$ ;

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$ ;  $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$ .

**MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD):**

El máximo común divisor de dos números enteros no nulos  $n$  y  $m$  es el mayor entero positivo que divide a ambos números. Se obtiene como el producto de los factores primos comunes, de ambos números, con su menor exponente.

**MEDIA ARITMÉTICA (PROMEDIO):**

La media aritmética de los  $n$  números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se define como el número  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ .

**MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm):**

El mínimo común múltiplo de dos números enteros no nulos  $n$  y  $m$  es el menor entero positivo que es múltiplo de ambos números. Se obtiene como el producto de los factores primos comunes o no comunes, de ambos números, con su mayor exponente.

**NOTACION CIENTIFICA:**

Un número decimal positivo  $d$  se dice que está expresado en notación científica si está escrito en la forma  $k \times 10^n$  donde  $k$  es un número decimal tal que  $1 \leq k < 10$  ( $k$  tiene un único dígito no nulo antes de la coma decimal) y  $n \in \mathbb{Z}$ .

**NUMERO DECIMAL (FRACCION DECIMAL):**

Un número decimal es un número racional de la forma  $p/10^n$  donde  $p \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . El conjunto de los números decimales se denota por  $D$ .

**NUMERO "e":**

Es un número irracional que es la base de los logaritmos neperianos o naturales. El valor de  $e$  hasta la sexta cifra después de la coma decimal es 2,718281.

**NÚMERO ENTERO:**

El conjunto de los números enteros se denota por  $\mathbb{Z}$  y está constituido por los números  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

**NÚMERO IMPAR:**

Es un número entero de la forma  $2n+1$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

**NÚMERO IRRACIONAL**

Es un número cuya expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas. El conjunto de los números irracionales lo hemos denotado por  $I$ .

**NÚMEROS NATURALES:**

El conjunto de los números naturales se denota por  $\mathbb{N}$  y está constituido por los números  $0, 1, 2, \dots$

**NÚMERO PAR:**

Es un número entero de la forma  $2n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

**NÚMERO PRIMO:**

Un número primo  $p$  es un número entero mayor o igual que 2 que solamente es divisible por 1 y por el mismo  $p$ . Si un número primo  $p$  divide a un número entero  $n$ , se dice que  $p$  es un factor primo de  $n$ .

**NÚMERO RACIONAL:**

Un número racional es un número de la forma  $p/q$  donde  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . El conjunto de los números racionales se denota por  $\mathbb{Q}$ .

**NÚMERO REAL:**

El conjunto de los números reales denotado por  $\mathbb{R}$  es la reunión de los conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $I$ . Es decir, un número real es un número racional o un número irracional.

**PARTE ENTERA:**

La parte entera de un número decimal positivo  $d$  es el mayor entero que es menor o igual que  $d$ ; se denota mediante  $E(d)$  o  $[d]$ . Si escribimos  $d = p/10^n$  en su notación decimal, esto es, utilizando la coma decimal, se tiene  $d = a_0 a_1 \dots a_m . b_1 \dots b_n$  y la parte entera es  $a_0 a_1 \dots a_m$ . En el caso de que  $d$  sea negativo, su parte entera es  $-a_0 a_1 \dots a_m - 1$ . La parte entera  $E(d)$  satisface las desigualdades  $E(d) \leq d < E(d) + 1$ , verificándose que  $d \in \mathbb{Z}$  si y sólo si  $E(d) = d$ .

**PERTENECE A:**

Si  $x$  es un elemento de un conjunto  $A$ , se dice que  $x$  pertenece a  $A$  y se denota  $x \in A$  ( $\in$  es el símbolo de pertenencia). Si  $x$  no pertenece al conjunto  $A$ , se denota mediante  $x \notin A$ .

**PI ( $\pi$ ):**

Es un número irracional obtenido como la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro. Un valor aproximado de  $\pi$  con seis cifras decimales es 3,141592.

**PORCENTAJE DE ERROR:**

Es el error relativo expresado como porcentaje (ver error).

**POTENCIA:**

Cuando se eleva un número  $x$  al exponente  $p$ , el resultado  $x^p$  es una potencia de  $x$ .

**PROMEDIO**

(Ver media aritmética).

**REDONDEO:**

En el proceso de redondeo de un número  $x$  se sustituye dicho número por otro número con un cierto número  $n$  de cifras prefijadas (cifras significativas de  $x$ ) para lo cual se omiten todas las cifras después del  $n$ -ésimo orden atendiendo a las dos reglas siguientes:

- Si a la última cifra que conservamos le sigue alguna de las cifras 0, 1, 2, 3 ó 4, entonces para el redondeo dejamos todas las cifras incluyendo la última que conservamos. Se trata de un **redondeo por defecto**.
- Si a la última cifra que conservamos le sigue 9, 8, 7, 6 ó 5, entonces a la última cifra que conservamos se le añade una unidad. Se trata de un **redondeo por exceso**.

**RESTO:**

(Ver cociente).

**SEGMENTO:**

Si  $A$  y  $B$  son dos puntos de una recta orientada ( $A$  a la "izquierda" de  $B$ ), entonces la parte de dicha recta que se halla entre  $A$  y  $B$ , incluyendo ambos puntos, es un segmento (segmento cerrado) y lo enunciamos diciendo el "segmento  $AB$ ". La longitud del segmento  $AB$  la hemos denotado mediante  $\overline{AB}$  (también se utiliza la notación  $|AB|$ ).

**SUBCONJUNTO:**

Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos tales que  $A \subset B$ , se dice que  $A$  es un subconjunto de  $B$ .

**TRICOTOMÍA (propiedad de):**

La propiedad de tricotomía referida a la relación de orden de los números reales se enuncia como sigue: si  $x, y$  son números reales entonces uno sólo de los tres enunciados " $x=y$ ", " $x < y$ ", " $y < x$ " es verdadero y los otros dos son falsos.

**TRUNCAMIENTO (truncar):**

En el truncamiento (al contrario que en el redondeo), las cifras que consideramos de más simplemente se eliminan: si  $d$  es un número decimal, se dice que el número decimal  $x$  es el truncamiento de  $d$  con  $h$  cifras después de la coma decimal si  $x$  y  $d$  tienen la misma parte entera y las mismas primeras  $h$  cifras después de la coma decimal.

**UNIÓN O REUNIÓN DE CONJUNTOS:**

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , la unión de  $A$  con  $B$ , denotada  $A \cup B$ , es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a  $A$  o a  $B$ , es decir,  $A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$ .

**VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL:**

El valor absoluto del número real  $x$ , denotado por  $|x|$ , se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y se verifican las siguientes propiedades cualesquiera que sean los números  $x, y$ :

- $|x| = 0$  si y sólo si  $x=0$ ;
- $|x| \geq 0$ ;
- $|-x| = x$ ;
- $|x/y| = |x|/|y|$  ( $y \neq 0$ );
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ .

## BIBLIOGRAFIA

En relación con la Bibliografía complementaria para estudiar otros puntos de vista y ejercicios resueltos, y también hacer ejercicios propuestos, concernientes a los contenidos desarrollados en este Módulo, cabe señalar que por ser estos contenidos, fundamentalmente, repaso de los estudiados en etapas previas a los estudios universitarios, algunos de los mejores textos que utilizastes en el noveno grado de la Escuela Básica y en la Educación Media y Diversificada puedes aprovecharlos para revisar ejemplos, hacer prácticas de cálculo con números, expresiones algebraicas y desigualdades, además de repasar algunos requisitos que se necesitan para la comprensión de este Módulo y de los siguientes.

En cuando a los libros de "CALCULO" o de "CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA", como frecuentemente se titulan en la Educación Superior, son libros que, en su mayoría, contienen únicamente un pequeño número de páginas introductorias en el primer capítulo, dedicados al conjunto de los números reales incluyendo la relación de orden, los intervalos y las inecuaciones y ejercicios donde se utilizan las calculadoras. A pesar de este escaso número de páginas que hay en los libros relacionadas con los tópicos desarrollados de este Módulo, es recomendable que adquieras uno o dos de ellos pues te serán útiles en los Módulos que siguen y a lo largo de tu carrera en las otras asignaturas de Matemática. Entre estos te sugerimos los siguientes:

1. LARSON, Roland & HOSTETLER, Robert, *Cálculo y Geometría Analítica*, McGraw-Hill, México, 1986 (2da. edición).
2. LEITHOLD, Louis, *El Cálculo con Geometría Analítica*, Harla, México, 1992 (6ta. edición).
3. ZILL, Dennis G., *Cálculo con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamerica, México, 1987.

## ÍNDICE ANALÍTICO

- Absoluto, valor**, 133, 135
- Adición**
  - de números enteros, 50
  - de números racionales, 73, 75
  - de números reales, 110
- Álgebra**, 92, 93
- Algoritmo**, 53, 93
- Al-Khuwarizmi**, 92, 93
- Aproximación**
  - de números reales, 112, 118
- Asociatividad**
  - de la adición en  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ , 51, 75, 110
  - de la multiplicación en  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ , 51, 75, 110
- Briggs, Henry**, 122
- Calculadora**, 63
- Cifras significativas**, 70, 145
- Cociente**, 55
- Coma decimal**, 58, 67
- Conjunto (s)**
  - diferencia de, 49
  - elemento de un, 43
  - inclusión de, 42
  - intersección de, 100
  - unión de, 100
  - vacío, 101
- Conmutatividad**
  - de la adición en  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ , 51, 75, 110
- Contenido en; contiene a**, 42, 49, 107
- Decimal (es)**
  - aproximación, 112, 118
  - coma, 58, 67
  - números, 57, 69, 166
  - punto, 69
- Dígitos**, 39, 59
- Diferencia**
  - de conjuntos, 49, 100
  - de números, 48, 51, 57, 111
- Desigualdad (es)**
  - entre números, 125
  - triangular, 135
- Distancia**
  - entre dos números reales, 136
  - entre puntos de una recta, 136
- Distributividad**
  - de la multiplicación respecto
  - de la adición en  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ , 51, 75, 111
- División**
  - de números enteros, 55
  - de números racionales, 57, 75
  - de números reales, 111
- Ecuaciones**, 82, 95
- Elemento (s)**
  - de un conjunto, 43
  - neutro (identidad), 40, 51, 75
  - inverso, 75
  - opuesto, 51, 75
  - simétrico, 50
- Error (es)**
  - absoluto, 147
  - porcentual, 149
  - por redondeo, 147, 69
  - por truncamiento, 147, 69
  - relativo, 149
- Euler, Leonhard**, 120
- Factores primos**, 37, 38
- Fracciones decimales**, 57, 62, 102
- Infinito**
  - negativo, 140
  - positivo, 140
- Inecuaciones**, 1, 150, 153
- Intersección (de conjunto)**, 100
- Intervalo (s)**
  - abierto, 139
  - acotado o limitado o finito, 139
  - cerrado, 139
  - infinito, 140
  - o no limitado, 140
  - o no acotado, 140
  - semiabierto, 139
  - simétrico, 141
- Irracional (número)**, 106
- Mayor que**, 41, 77, 76, 125, 129
- Máximo común divisor-MCD**, 38
- Media aritmética (promedio)**, 78, 80, 130, 132
- Menor que**, 41, 77, 125, 129
- Mínimo común múltiplo-mcm**, 38
- Multiplicación**
  - de números enteros, 51
  - de números naturales, 40
  - de números racionales, 75
  - de números reales, 110
- Napier (Néper), John**, 122
- Neutro (elemento)**, 111
- Número (s)**
  - decimales, 57, 101, 186
  - "e", 107, 121, 186,
  - enteros, 37, 47, 166, 186
  - impares, 42, 43
  - irracionales, 72, 106, 119, 166, 186

- naturales, 37, 39, 166
- negativos, 48, 127, 166
- pares, 42, 43, 166
- positivos, 48, 58, 127, 166
- primos, 37
- racionales, 37, 55, 57, 72, 73, 166
- reales, 37, 75, 99, 107, 110, 166
- valor absoluto de un, 133, 155
- Notación científica, 61
- Opuesto de un número, 48, 49, 51
- Orden de magnitud, 145
- Orden en  $\mathbb{Q}$ , 75
- Orden en  $\mathbb{R}$ , 125, 129
- Origen (punto origen), 40, 49
- Papiro Rhind, 120
- Parte entera de un número, 59
- Período, 64
- Pi ( $\pi$ ), 107, 120, 186
- Pitágoras (los Pitagóricos), 119
- Primo (número), 37, 42, 43
- Promedio (media aritmética), 78, 80, 130, 132
- Punto decimal, 58, 67
- Punto medio, 78
- Punto origen, 40, 49
- Punto unidad, 40, 50
- Racional (número), 55, 57, 73, 76
- Real (número), 107, 125
- Redondeo
  - por defecto, 71
  - por exceso, 71
- Resto, 55
- Segmento unidad, 105
- Solución
  - de una ecuación, 82
  - de una inecuación lineal, 150, 155
  - de una inecuación cuadrática, 159, 160
- Subconjunto, 42, 49, 107
- Tricotomía (propiedad de), 129, 131
- Truncar (truncamiento), 69, 147
- Unión (de conjuntos), 100
- Valor absoluto de un número real, 133, 135, 153, 155