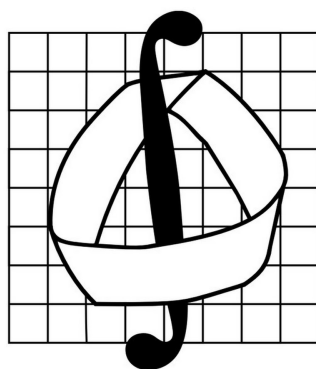


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.
ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ



Домашняя работа

Математические модели инерциальный навигации

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Преподаватель: д.ф.-м.н.,
Голован Андрей Андреевич

Москва, 2022

Содержание

1	Задача 1	3
2	Задача 2	5
3	Задача 3	5
4	Задача 4	5

1 Задача 1

Задание:

Вычислить кватернион ориентации (прямой и обратный) географического трехгранника Mx относительно трехгранника $O\eta$

Решение:

$O\eta$ и Mx связаны через следующие повороты

$$O\eta \xrightarrow[3]{\frac{\pi+\lambda}{2}} \xrightarrow[1]{\frac{\pi-\varphi}{2}} Mx^0 \xrightarrow[3]{\chi} Mx$$

Кватернион ориентации географического трехгранника Mx^0 относительно гринвичского трехгранника $O\eta$:

$$P^{x^0\eta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\frac{\pi+\lambda}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \\ \cos \frac{\frac{\pi+\lambda}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \\ \sin \frac{\frac{\pi+\lambda}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \\ \sin \frac{\frac{\pi+\lambda}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda+\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda-\varphi}{2} \\ \cos \frac{\lambda-\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda+\varphi}{2} \\ \cos \frac{\lambda+\varphi}{2} + \sin \frac{\lambda-\varphi}{2} \\ \cos \frac{\lambda-\varphi}{2} + \sin \frac{\lambda+\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Кватернион ориентации приборного трехгранника Mx относительно географического трехгранника Mx^0 :

$$P^{xx^0} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

Кватернион ориентации географического трехгранника с произвольной ориентацией в азимуте Mx относительно гринвичского трехгранника $O\eta$:

$$P^{x\eta} = P^{xx^0} \odot P^{x^0\eta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\frac{\pi+\lambda+\chi}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \\ \cos \frac{\frac{\pi+\lambda-\chi}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \\ \sin \frac{\frac{\pi+\lambda-\chi}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \\ \sin \frac{\frac{\pi+\lambda+\chi}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi-\varphi}{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} \\ \cos \frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} \\ \cos \frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} + \sin \frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} \\ \cos \frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} + \sin \frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Обратный кватернион ориентации $P^{\eta x}$:

$$P^{\eta x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} \\ -\cos \frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} + \sin \frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} \\ -\cos \frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} \\ -\cos \frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} - \sin \frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

2 Задача 2

3 Задача 3

4 Задача 4

Задание:

Ввести географические координаты – широту, долготу, высоту:

$$\lambda = 123^\circ : 24' : 29.2412'', \varphi = 89^\circ : 28' : 29.0441'', h = 1252.253000[m].$$

Для этих координат вычислить значение вектора удельной силы **тяжести** двумя способами – через формулу Гельмерта и модель ГЛОНАСС. Сравнить результаты в инерциальных осях $O\xi$

Решение:

Формула Гельмерта, для вычисления абсолютного значения удельной силы тяжести при $h \neq 0$:

$$g(\varphi, h) = 9.78030(1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi) - 0.00014 - 2\omega_0^2 h$$

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{a^3} = 1.543 \cdot 10^{-6} c^{-2} - \text{частота Шулера}$$

Переведем градусы в радианы:

$$\theta = \theta_1^\circ \theta_2' \theta_3'' = (\theta_1 + \frac{\theta_2}{60} + \frac{\theta_3}{3600}) \cdot \frac{\pi}{180}$$

получим

$$\lambda = 2.1538780622991234 \quad \varphi = 1.5616287138879488$$

После подстановки численных значений в формулу для $g(\varphi, h)$ получим $g = 9.828146316778362$

$$g_{x^0} = g_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.828146316778362 \end{pmatrix}$$

$$g_\eta = A_{\eta x^0} g_{x^0} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \cos \varphi \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \cos \lambda \cos \varphi \\ -g \sin \lambda \cos \varphi \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$g_\eta = \begin{pmatrix} 0.04960863578953103 \\ -0.07521224196332864 \\ -9.827733315771141 \end{pmatrix}$$

$$g_\xi = A_{\xi\eta} g_\eta = \begin{pmatrix} \cos(ut + \Lambda_0) & -\sin(ut + \Lambda_0) & 0 \\ \sin(ut + \Lambda_0) & \cos(ut + \Lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $\Lambda_0 = 0$, $t = 0$ получим

$$A_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_\xi = g_\eta = \begin{pmatrix} 0.04960863578953103 \\ -0.07521224196332864 \\ -9.827733315771141 \end{pmatrix}$$

Модель ГЛОНАСС

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (R_E + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ \eta_2 &= (R_E + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ \eta_3 &= (R_E + h) \sin \varphi - R_E e^2 \sin \varphi, \\ R_E &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.\end{aligned}$$

$$a = 6378136.0 \text{ м}$$

$$e^2 = 6.69436619 \cdot 10^{-3}$$

$$u = 7.2921157 \cdot 10^{-5} c^{-1}$$

$$\begin{aligned}g_{\eta_1}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5 \frac{\eta_3^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta_1, \\ g_{\eta_2}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5 \frac{\eta_3^2}{r^2} - 1 \right) \right] \eta_2, \\ g_{\eta_3}^0 &= -\frac{\mu}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} C_{20} \frac{a^2}{r^2} \left(5 \frac{\eta_3^2}{r^2} - 3 \right) \right] \eta_3, \\ r &= \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}.\end{aligned}$$

$$\mu = 398600.44 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2 - \text{константа гравитационного поля Земли.}$$

$C_{20} = -1082.6257 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент при второй зональной гармонике – отражает полярное сжатие Земли.

$a = 6378136$ м – большая полуось модельного эллипсоида Земли координатной системы

$$\begin{pmatrix} g_{\eta^1} \\ g_{\eta^2} \\ g_{\eta^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\eta^1}^0 + u^2 \eta_1 \\ g_{\eta^2}^0 + u^2 \eta_2 \\ g_{\eta^3}^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\eta^1} \\ g_{\eta^2} \\ g_{\eta^3} \end{pmatrix}, \text{ при } \Lambda_0 = 0, t = 0$$

Подставим значения в формулы:

$$R_E = 6399590.765559916 \text{ м}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32308.950214915913 \\ 48983.98318097282 \\ 6357734.636847259 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{\eta^1}^0 \\ g_{\eta^2}^0 \\ g_{\eta^3}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04977943465950662 \\ -0.07547119215881815 \\ -9.82779265362515 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{\eta^1} \\ g_{\eta^2} \\ g_{\eta^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04960763197381786 \\ -0.07521072006640274 \\ -9.82779265362515 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix}, \text{ при } \Lambda_0 = 0, t = 0$$

Различия полученных значений

$$\begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix} \text{ по ф. Гельмерта} - \begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix} \text{ по м. ГЛОНАСС} = \begin{pmatrix} 0.00000100 \\ -0.00000152 \\ 0.00005934 \end{pmatrix}$$