Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико - математический факультет

Кафедра прикладной механики и управления

Домашняя работа

Математические модели инерциальной навигации

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Преподаватель: д.ф.-м.н.,
Голован Андрей Андреевич

Москва, 2022

Содержание

1 Задача 1

Задание:

Вычислить кватернион ориентации (прямой и обратный) географического трехгранника Mx относительно трехгранника $O\eta$

Решение:

$O\eta$ и Mx связаны через следующие повороты

$$O\eta \quad \xrightarrow[3]{\frac{\pi}{2}+\lambda} \xrightarrow[1]{\frac{\pi}{2}-\varphi} \; Mx^0 \xrightarrow[3]{\chi} \; Mx$$

Кватернион ориентации географического трехгранника Mx^0 относительно гринвического трехгранника $O\eta$:

$$P^{x^0\eta} \; = \; \begin{pmatrix} \cos\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \\ \cos\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \\ \sin\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \\ \sin\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\lambda+\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda-\varphi}{2} \\ \cos\frac{\lambda-\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda+\varphi}{2} \\ \cos\frac{\lambda+\varphi}{2} + \sin\frac{\lambda-\varphi}{2} \\ \cos\frac{\lambda-\varphi}{2} + \sin\frac{\lambda+\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Кватернион ориентации приборного трехгранника Mx относительно географического трехгранника Mx^0:

$$P^{xx^0} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\chi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\chi}{2} \end{pmatrix}$$

Кватернион ориентации географического трехгранника с произвольной ориентацией в азимуте Mx относительно гринвического трехгранника $O\eta$:

$$P^{x\eta} = P^{xx^0} \odot P^{x^0\eta} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda+\chi}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \\ \cos\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda-\chi}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \\ \sin\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda-\chi}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \\ \sin\frac{\frac{\pi}{2}+\lambda+\chi}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} \\ \cos\frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} \\ \cos\frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} + \sin\frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} \\ \cos\frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} + \sin\frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Обратный кватернион ориентации $P^{\eta x}$:

$$P^{\eta x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} + \sin\frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\lambda-\chi+\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda-\chi-\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\lambda+\chi-\varphi}{2} - \sin\frac{\lambda+\chi+\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

2 Задача 2

Задание:

Вычислить с точностью до e^4 взаимосвязь географической и геоцентрической широты при $h \neq 0$

Решение:

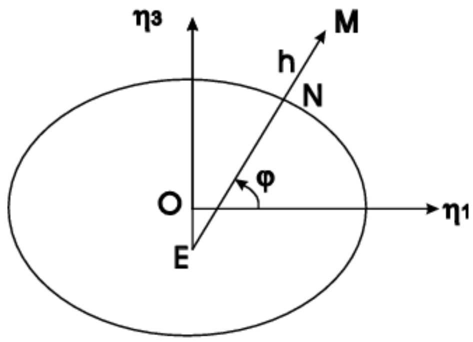

Рис. 1: Сечение эллипсоида плоскостью $O\eta_1\eta_3$ нулевого меридиана

При не нулевой высоте ($h = |NM| \neq 0$)

$$\left\{ \begin{array}{lcr} \eta_1 & = & R_E \cos\varphi, \\ \eta_3 & = & R_E\left(1-e^2\right)\sin\varphi, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} \eta_1 & = & (R_E + h)\cos\varphi, \\ \eta_3 & = & \left(R_E\left(1-e^2\right)+h\right)\sin\varphi. \end{array} \right.$$

Если ограничиться окрестностью поверхности эллипсоида такой, что $h/a \leq e^2$, $h < 43$км, $e^2 \simeq 6.69 \cdot 10^{-3} \ll 1$, то с точностью до соответствующих степеней e, получим

- для радусов кривизны R_E

$$R_E \;\approx\; a\left(1 + \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{3}{8}e^4\sin^4\varphi + \frac{15}{48}e^6\sin^6\varphi\right),$$

- для модуля радиус-вектора $r = |OM|$

$$r = a + h - \frac{ae^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{ae^4}{2}\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2\varphi\right) + O(0.1\text{м}).$$

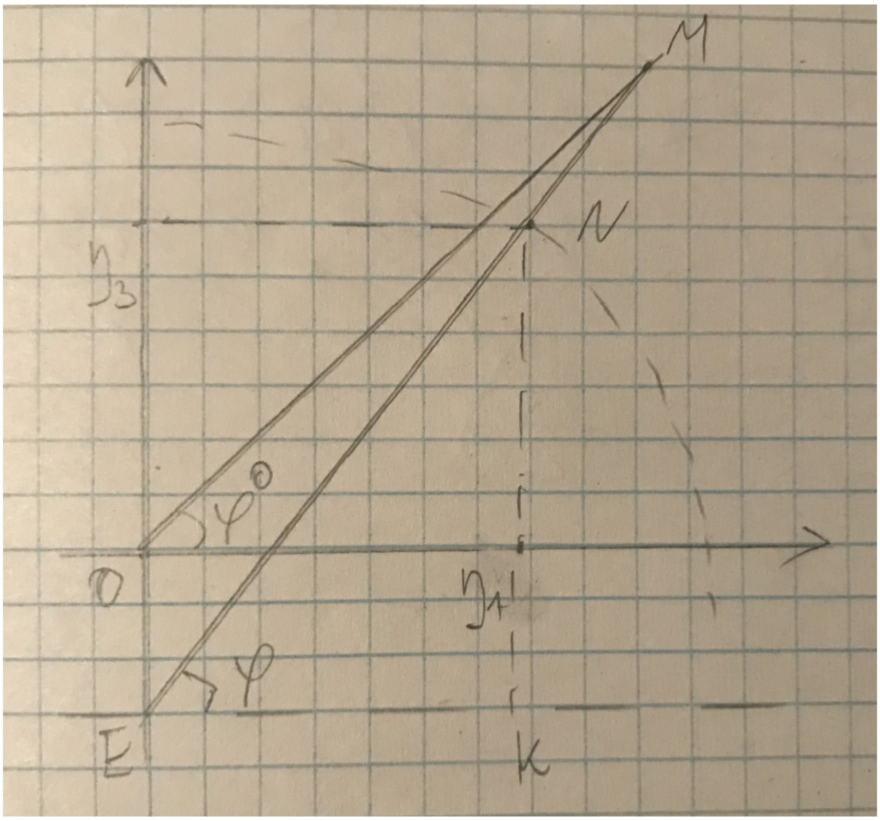

Рис. 2: Связь географической и геоцентрической широты

$$\frac{\sin(\varphi - \varphi^0)}{OE} = \frac{\cos\varphi}{OM}$$
$$OE = NK - \eta_3$$
$$NK = \sqrt{R_E^2 - \eta_1} = \sqrt{R_E^2 - R_E^2\cos^2\varphi} = R_E\sin\varphi$$
$$OE = R_E\sin\varphi - R_E(1-e^2)\sin\varphi = e^2R_E\sin\varphi$$
$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{e^2R_E\sin\varphi\cos\varphi}{r} = \frac{e^2\sin 2\varphi R_E}{2r}$$

$$\frac{R_E}{r} \approx \frac{a(1+\frac{e^2}{2}\sin^2\varphi)}{a(1+\frac{h}{a}-\frac{e^2\sin^2\varphi}{2})} = \frac{1}{1-(\frac{e^2\sin^2\varphi}{2}-\frac{h}{a})} + \frac{\frac{e^2\sin^2\varphi}{2}}{1-(\frac{e^2\sin^2\varphi}{2}-\frac{h}{a})} \approx$$
$$\approx 1 + (\frac{e^2\sin^2\varphi}{2} - \frac{h}{a}) + (\frac{e^2\sin^2\varphi}{2} - \frac{h}{a})^2 =$$
$$1 + \frac{e^2\sin^2\varphi}{2} - \frac{h}{a} + \frac{e^4\sin^4\varphi}{4} + (\frac{h}{a})^2 - \frac{h}{a}e^2\sin^2\varphi$$

Тогда для $\sin(\varphi - \varphi_0) \approx \varphi - \varphi_0$ получим:

$\varphi = \varphi_0 + \frac{e^2 R_E \sin 2\varphi}{2}(1 + \frac{e^2 \sin^2\varphi}{2} - \frac{h}{a} + \frac{e^4 \sin^4\varphi}{4} + (\frac{h}{a})^2 - \frac{h}{a} e^2 \sin^2\varphi)$
Ответ: $\varphi = \varphi_0 + \frac{e^2 R_E \sin 2\varphi}{2}(1 + \frac{e^2 \sin^2\varphi}{2} - \frac{h}{a} + \frac{e^4 \sin^4\varphi}{4} + (\frac{h}{a})^2 - \frac{h}{a} e^2 \sin^2\varphi)$

3 Задача 3

4 Задача 4

Задание:

Ввести географические координаты – широту, долготу, высоту:

$$\lambda = 123^{\circ} : 24^{'} : 29.2412^{''}, \varphi = 89^{\circ} : 28^{'} : 29.0441^{''}, h = 1252.253000[m].$$

Для этих координат вычислить значение вектора удельной силы **тяжести** двумя способами – через формулу Гельмерта и модель ГЛОНАСС. Сравнить результаты в инерциальных осях $O\xi$

Решение:

Формула Гельмерта, для вычисления абсолютного значения удельной силы тяжести при $h \neq 0$:

$$g(\varphi, h) = 9.78030(1 + 0.005302 \sin^2\varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi) - 0.00014 - 2\omega_0^2 h$$

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{a^3} = 1.543 \cdot 10^{-6} c^{-2} - \text{частота Шулера}$$

Переведем градусы в радианы:

$$\theta = \theta_1^{\circ} \theta_2^{'} \theta_3^{''} = (\theta_1 + \frac{\theta_2}{60} + \frac{\theta_3}{3600}) \cdot \frac{\pi}{180}$$

получим

$$\lambda = 2.1538780622991234 \quad \varphi = 1.5616287138879488$$

После подстановки численных значений в формулу для $g(\varphi, h)$ получим $g = 9.828146316778362$

$$g_{x^0} = g_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.828146316778362 \end{pmatrix}$$

$$g_\eta = A_{\eta x^0} g_{x^0} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\varphi & \cos\lambda\cos\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\varphi & \sin\lambda\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g\cos\lambda\cos\varphi \\ -g\sin\lambda\cos\varphi \\ -g\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$g_\eta = \begin{pmatrix} 0.04960863578953103 \\ -0.07521224196332864 \\ -9.827733315771141 \end{pmatrix}$$

$$g_\xi = A_{\xi\eta} g_\eta = \begin{pmatrix} \cos(ut+\Lambda_0) & -\sin(ut+\Lambda_0) & 0 \\ \sin(ut+\Lambda_0) & \cos(ut+\Lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $\Lambda_0 = 0$, $t = 0$ получим

$$A_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_\xi = g_\eta = \begin{pmatrix} 0.04960863578953103 \\ -0.07521224196332864 \\ -9.827733315771141 \end{pmatrix}$$

Модель ГЛОНАСС

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (R_E + h)\cos\varphi\cos\lambda, \\
\eta_2 &= (R_E + h)\cos\varphi\sin\lambda, \\
\eta_3 &= (R_E + h)\sin\varphi - R_E e^2 \sin\varphi, \\
R_E &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}.
\end{aligned}$$

$a = 6378136.0$ м
$e^2 = 6.69436619 \cdot 10^{-3}$
$u = 7.2921157 \cdot 10^{-5} c^{-1}$

$$\begin{aligned}
g^0_{\eta_1} &= -\frac{\mu}{r^3}\left[1 + \frac{3}{2}C_{20}\frac{a^2}{r^2}\left(5\frac{\eta_3^2}{r^2} - 1\right)\right]\eta_1, \\
g^0_{\eta_2} &= -\frac{\mu}{r^3}\left[1 + \frac{3}{2}C_{20}\frac{a^2}{r^2}\left(5\frac{\eta_3^2}{r^2} - 1\right)\right]\eta_2, \\
g^0_{\eta_3} &= -\frac{\mu}{r^3}\left[1 + \frac{3}{2}C_{20}\frac{a^2}{r^2}\left(5\frac{\eta_3^2}{r^2} - 3\right)\right]\eta_3, \\
r &= \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}.
\end{aligned}$$

$\mu = 398600.44 \cdot 10^9$м^3/сек^2 – константа гравитационного поля Земли.

$C_{20} = -1082.6257 \cdot 10^{-6}$ – коэффициент при второй зональной гармонике – отражает полярное сжатие Земли.

$a = 6378136$ м – большая полуось модельного эллипсоида Земли координатной системы

$$\begin{pmatrix} g_{\eta^1} \\ g_{\eta^2} \\ g_{\eta^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^0_{\eta^1} + u^2\eta_1 \\ g^0_{\eta^2} + u^2\eta_2 \\ g^0_{\eta^3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\eta^1} \\ g_{\eta^2} \\ g_{\eta^3} \end{pmatrix}, \text{при } \Lambda_0 = 0,\ t = 0$$

Подставим значения в формулы:

$R_E = 6399590.765559916$ м

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32308.950214915913 \\ 48983.98318097282 \\ 6357734.636847259 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g^0_{\eta^1} \\ g^0_{\eta^2} \\ g^0_{\eta^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04977943465950662 \\ -0.07547119215881815 \\ -9.82779265362515 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{\eta^1} \\ g_{\eta^2} \\ g_{\eta^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04960763197381786 \\ -0.07521072006640274 \\ -9.82779265362515 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix}, \text{при } \Lambda_0 = 0,\ t = 0$$

Различия полученных значений

$$\begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix} \text{по ф. Гельмерта} - \begin{pmatrix} g_{\xi^1} \\ g_{\xi^2} \\ g_{\xi^3} \end{pmatrix} \text{по м. ГЛОНАСС} = \begin{pmatrix} 0.00000100 \\ -0.00000152 \\ 0.00005934 \end{pmatrix}$$