Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико - математический факультет

Кафедра прикладной механики и управления

# Домашняя работа №2

Инерциальные навигационные системы

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Преподаватель: д.ф.-м.н.,
Голован Андрей Андреевич

Москва, 2022

# Содержание

# 1 Задача 1

**Задание:**

Введем «замороженный» относительно инерциального пространства трехгранник $M_0 x_0^0$, совпадающий с географическим трехгранником $Mx^0$ БИНС в начальный момент времени $t_0$. Выведите динамические уравнения движения в абсолютных переменных в осях этого трехгранника.

Предполагается, что в начальный момент времени известны географические координаты $\lambda_0, \varphi_0, h_0$, скорость относительно Земли ноль, известны начальные значения углов $\psi_0, \vartheta_0, \gamma_0$.

Требуется предъявить все расчетные формулы для определения текущих значений $\lambda(t), \varphi(t), h(t), V_E(t), V_N(t), V_{UP}(t), \psi(t), \vartheta(t), \gamma(t)$

**Решение:** В начальный момент времени трехгранник $M_0 x_0^0$ совпадает с географическим трехгранником $Mx^0$, тогда

$$\begin{cases} \lambda(t_0) = \lambda_0, \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, \\ h(t_0) = h_0. \end{cases} \tag{1}$$

$A_{x_0^0 \xi}(t) = A_{x_0 \eta}\left(t_0\right) A_{\eta \xi}\left(t_0\right),$

Матрица ориентации $A_{x^0 \eta}$ географического трехгранника относительно гринвичского

$$A_{x_0 \eta}\left(t_0\right) = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ -\cos\lambda_0 \sin\varphi_0 & -\sin\lambda_0 \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \\ \cos\lambda_0 \cos\varphi_0 & \sin\lambda_0 \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

матрица ориентации гринвичского трехгранника относительно инерциального

$$A_{\eta \xi}\left(t_0\right) = \begin{pmatrix} \cos ut_0 & \sin ut_0 & 0 \\ -\sin ut_0 & \cos ut_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

По формуле Эйлера найдем абсолютную скорость:

$$v_{x_0^0}\left(t_0\right) = v_{x^0}\left(t_0\right) = V_{x^0}\left(t_0\right) - \widehat{u}_{x^0}\left(t_0\right) x^0\left(t_0\right) = -\widehat{u}_{x^0}\left(t_0\right) x^0\left(t_0\right)$$

Угловая скорость вращения Земли записанная в $Ox^0$ в начальный момент времени: $u_{x^0}\left(t_0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ u\cos\varphi_0 \\ u\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$

Координаты точки $M$ в осях трехгранника $Ox^0$ в начальный момент времени $t_0$: $x^0\left(t_0\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -R_{E0}e^2\cos\varphi_0\sin\varphi_0 \\ R_{E0}\left(1-e^2\sin^2\varphi_0\right)+h_0 \end{array}\right)$

Уравнение Пуассона для матрицы $A_{z^0x^0_0}$ :

$$\dot{A}_{z^0x^0_0} = \widehat{\omega}_{z^0}A_{z^0x^0_0}, \quad A_{z^0x^0_0}\left(t_0\right) = A^T_{x^0z^0}\left(t_0\right)A_{x^0x^0_0}\left(t_0\right) = A^T_{x^0z^0}\left(t_0\right),$$

$$A_{x^0z^0}\left(t_0\right) = \left(\begin{array}{ccc} \cos\psi_0\cos\gamma_0+\sin\psi_0\sin\vartheta_0\sin\gamma_0 & \sin\psi_0\cos\vartheta_0 & \cos\psi_0\sin\gamma_0-\sin\psi_0\sin\vartheta_0\cos\gamma_0 \\ -\sin\psi_0\cos\gamma_0+\cos\psi_0\sin\vartheta_0\sin\gamma_0 & \cos\psi_0\cos\vartheta_0 & -\sin\psi_0\sin\gamma_0-\cos\psi_0\sin\vartheta_0\cos\gamma_0 \\ -\cos\vartheta_0\sin\gamma_0 & \sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0\cos\gamma_0 \end{array}\right)$$

Динамические уравнения в осях $M_0x^0_0$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}^0_0 = v_{x^0_0} \\ \dot{v}_{x^0_0} = f_{x^0_0} + g_{x^0_0} \end{array}\right.$$

где $f_{x^0_0} = A_{x^0_0z^0}f_{z^0}$ вектор внешней удельной силы, $g_{x^0_0} = A_{x^0_0x^0}g_{x^0}$ - вектор удельной силы тяготения.

Формула Гельмерта, с помощью которой вычисляется значение модуля вектора удельной силы тяжести в географических осях, а также вектор удельной силы тяжести

$$g(\varphi) = 9.78030\left(1+0.005302\sin^2\varphi-0.000007\sin^2 2\varphi\right)-0.00014-2\omega_0^2h$$

$$g_{x^0} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ u^2\left(R_E+h\right)\sin\varphi\cos\varphi \\ -g-u^2\left(R_E+h\right)\cos^2\varphi \end{array}\right)$$

Для интегрирования уравнения Пуассона используем следующий алгоритм:

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_{z^0} = \int_{t_j}^{t_{j+1}}\widehat{\omega}_{z^0}(\tau)d\tau \\ A_{z^0x^0_0}\left(t_{j+1}\right) = \left(E+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\widehat{\gamma}_{z^0}+\frac{1-\cos\gamma}{\gamma^2}\widehat{\gamma}^2_{z^0}\right)A_{z^0x^0_0}\left(t_j\right), \quad \gamma = \sqrt{\gamma^2_{z^0_1}+\gamma^2_{z^0_2}+\gamma^2_{z^0_3}} \end{array}\right.,$$

У полученной новой матрицы необходимо сохранить ортогонализацию.

Введем интегральную величину $\Delta V_f = \int_{t_j}^{t_{j+1}}A^T_{z_0x^0_0}\left(t_{j+1}\right)f_{z^0}(\tau)d\tau$

Получим следующий алгоритм интегрирования

$$\left\{\begin{array}{l} g_{x^0_0}\left(t_j\right) = A_{x^0_0\xi}A^T_{\eta\xi}\left(t_j\right)A^T_{x^0\eta}\left(t_j\right)g_{x^0}\left(t_j\right) \\ v_{x^0_0}\left(t_{j+1}\right) = v_{x^0_0}\left(t_j\right)+g_{x^0_0}\left(t_j\right)\Delta t+\Delta V_f \\ x^0_0\left(t_{j+1}\right) = x^0_0\left(t_j\right)+v_{x^0_0}\left(t_j\right)\Delta t+\frac{1}{2}g_{x^0_0}\left(t_j\right)\Delta t^2+\frac{1}{2}\Delta V_f\Delta t \end{array}\right.$$

Гринвичские коордианты найдем следующим образом:

$$\eta\left(t_{j+1}\right)=A_{\eta x_0^0}\left(t_j\right)\left(OM_0+x_0^0\left(t_{j+1}\right)\right)=A_{\eta\xi}\left(t_{j+1}\right)A_{x_0^0\xi}^T\left(OM_0+x_0^0\left(t_{j+1}\right)\right),$$

$OM_0=x^0\left(t_0\right)-$ вектор совпадает численно с координатами точки $M$ в системе координат $Ox^0$ в начальный момент времени.

Долгота находится как $\lambda\left(t_{j+1}\right)=\operatorname{atan}2\left(\eta_2\left(t_{j+1}\right),\eta_1\left(t_{j+1}\right)\right)$. Применив меод Ньютона для решения нелинейной системы уравнений найдем $\varphi\left(t_{j+1}\right), h\left(t_{j+1}\right)$

$$\begin{cases}\sqrt{\eta_1^2+\eta_1^2}-\left(R_E+h\right)\cos\varphi=0\\ \eta_3-\left[\left(1-e^2\right)R_E+h\right]=0\end{cases}$$

Теперь можно вычислить $A_{\eta x^0}\left(t_{j+1}\right)$ по новым географическим координатам. Географические скорости находятся по формулам:

$$\begin{pmatrix}V_E\left(t_{j+1}\right)\\ V_N\left(t_{j+1}\right)\\ V_{UP}\left(t_{j+1}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_E\left(t_{j+1}\right)-u\left(R_E\left(t_{j+1}\right)+h\left(t_{j+1}\right)\right)\cos\varphi\left(t_{j+1}\right)\\ v_N\left(t_{j+1}\right)\\ v_{UP}\left(t_{j+1}\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}v_E\left(t_{j+1}\right)\\ v_N\left(t_{j+1}\right)\\ v_{UP}\left(t_{j+1}\right)\end{pmatrix}=A_{x^0\eta}\left(t_{j+1}\right)A_{\eta\xi}\left(t_{j+1}\right)A_{x_0^0\xi}^T v_{x_0^0}\left(t_{j+1}\right)$$

Углы истинннного курса, крена и тангажа находим по формуле $A_{z^0\xi}\left(t_{j+1}\right)=A_{z^0x_0^0}\left(t_{j+1}\right)A_{x_0^0\xi}\left(t_{j+1}\right)$ :

$$\begin{aligned}&A_{z^0\xi}\left(t_{j+1}\right)=\left(a_{ij}\right),\quad \psi\left(t_{j+1}\right)=\operatorname{atan}2\left(a_{21},a_{22}\right),\\ &\gamma\left(t_{j+1}\right)=-\operatorname{atan}2\left(a_{13},a_{33}\right),\quad \vartheta\left(t_{j+1}\right)=\operatorname{atan}2\left(a_{23},\frac{a_{33}}{\cos\gamma\left(t_{j+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

# 2 Задача 2

**Задание:**

Пусть баровысотомер доставляет точную информацию о текущей высоте. Выведите уравнения ошибок демпфируемого вертикального канала. Подберите подходящие коэффициенты демпфирования.

**Решение:**

Модельные уравнения демпфируемого вертикального канала

$$\begin{aligned}
\dot{h}' &= V_3' - \underline{K_{v_1}\left(h' - h^b\right)},\\
\dot{V}_3' &= (\Omega_2' + 2u_2')V_1' - (\Omega_1' + 2u_1')V_2' - g' + f_3' - \underline{K_{v_2}\left(h' - h^b\right) - \Delta\widetilde{f}_3^0},\\
\Delta\dot{\widetilde{f}}_3^0 &= \underline{K_{v_3}\left(h' - h^b\right)}.
\end{aligned}$$

Пусть доступно измерение баровысотомера

$$h^b = h + \Delta h^b,$$

так как по условию задачи баровысотомер доставляет точные показания, то $h^b = h$

$f_3'$ – показания "вертикального" акселерометра;

$\Delta\widetilde{f}_3^0$ – оценка нуля "вертикального" акселерометра;

$K_{v_1}, K_{v_2}, K_{v_3}$ – постоянные коэффициенты алгоритма демпфирования.

$$f_3' = f_3 + \Delta f_3^0 + \Delta f_3^s,$$

где $f_3$ – истинное значение, $\Delta f_3^0$ – постоянное смещение нуля (($\Delta\dot{f}_3^0 = 0$) "вертикального" акселерометра, $\Delta f_3^s$ – шумовая составляющая погрешности измерения. Идеальные уравнения вертикального канала

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= V_3,\\
\dot{V}_3 &= (\Omega_2 + 2u_2)V_1 - (\Omega_1 + 2u_1)V_2 - g + f_3.
\end{aligned}$$

Введем

$$\Delta h = h' - h, \qquad \Delta V_3 = V_3' - V_3, \qquad \delta f_3^0 = \Delta f_3^0 - \Delta\widetilde{f}_3^0,$$

где $\delta f_3^0$ имеет смысл ошибки оценивания смещения нуля вертикального акселерометра.

Вычитаем из модельных уравнений идеальные уравнения, в линейном приближении получим (не учитываем вариацию поправки Этвеша)

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{h} &= \Delta V_3 - K_{v_1}\Delta h + K_{v_1}\Delta h^b, \\
\Delta\dot{V}_3 &= 2\omega_0^2\Delta h - K_{v_2}\Delta h + K_{v_2}\Delta h^b + \delta f_3^0 + \Delta f_3^s, \\
\delta\dot{f}_3^0 &= K_{v_3}\Delta h - K_{v_3}\Delta h^b.
\end{aligned}$$

Уравнения ошибок примут вид:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\dot{h} \\ \Delta\dot{V}_3 \\ \delta\dot{f}_3^0 \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -K_{v_1} & 1 & 0 \\ 2\omega_0^2 - K_{v_2} & 0 & 1 \\ K_{v_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta h \\ \Delta V_3 \\ \delta f_3^0 \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} K_{v_1}\Delta h^b \\ K_{v_2}\Delta h^b + \Delta f_3^s \\ -K_{v_3}\Delta h^b \end{pmatrix}}_{q}.$$

Характеристическое уравнение

$$|\lambda E - A| = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + K_{v_1} & -1 & 0 \\ -2\omega_0^2 + K_{v_2} & \lambda & -1 \\ -K_{v_3} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты характеристического уравнения зависят от свободных параметров $K_{v_1}$, $K_{v_2}$, $K_{v_3}$.

Раскроем определитель и получим $\lambda^3 + K_{v_1}\lambda^2 + \lambda(-2\omega_0^2 + K_{v_2}) - K_{v_3} = 0$ Подберем коэффициенты обратной связи таким образом, чтобы характеристическое уравнение имело кратные корни

$$(\lambda - \lambda_0)^3 = 0, \qquad \lambda_0 < 0.$$

$\lambda^3 - 3\lambda^2\lambda_0 + 3\lambda\lambda_0^2 - \lambda_0^3 = 0$
Приравняем коэффиценты при соответствующих степенях
$K_{v_1} = -3\lambda_0; -2\omega_0^2 + K_{v_2} = 3\lambda_0^2; K_{v_3} = \lambda_0^3$
$K_{v_1} = -3\lambda_0; K_{v_2} = 3\lambda_0^2 + 2\omega_0^2; K_{v_3} = \lambda_0^3$
Для примера возьмем запас устойчивости $\lambda_0 = -1$
$\omega_0^2 \simeq 1.543 \cdot 10^{-6}$ – квадрат частоты Шулера.
$K_{v_1} = 3; K_{v_2} = 3 + 2\omega_0^2 = 3.000003; K_{v_3} = -1$
**Ответ:** $K_{v_1} = 3; K_{v_2} = 3.000003; K_{v_3} = -1.$