Романов Андрей
Задание:

Оценивание координат цели по угловым измерениям

Наблюдатель r и цель y двигаются по траекториям в плоскости

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1 t + x_3, \\ y_2(t) &= x_2 t + x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1(t) &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3, \\ r_2(t) &= 0, \end{aligned}$$

Измеряется угол визирования:

$$\alpha'(t) = \alpha(t) + \delta\alpha(t), \qquad \alpha(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_2(t) - r_2(t)}{y_1(t) - r_1(t)}\right), \qquad \alpha(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \qquad (2)$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 известны. Решить задачу — найти (оценить) x_1, x_2, x_3, x_4 по $\alpha(t)$, $\quad t = 1, \ldots, N$.

Задача

- *Найти нижнюю границу Крамера - Рао*
- *Реализовать ММП*
- *Реализовать любой другой метод оценивания по выбору.*
- *Провести имитационное моделирование, методом Монте-Карло сравнить точность и смещение оценок*
- *Пусть* $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\sigma = 0.2$, $N = 5 - 20$.

Рис. 1: Задание

Решение:

Для измерений $y' = h(\Theta) + \delta y$

Матрица Крамера-Рао имеет вид $\Phi(\theta) = \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot R^{-1} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^T$

$$\alpha'(t) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3}{x_2 t + x_4}\right) + \delta\alpha$$

Пусть

$$B(t) = \frac{x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3}{x_2 t + x_4}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = -\frac{1}{1 + B(t)^2} \cdot \frac{t}{x_2 t + x_4}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = -\frac{1}{1 + B(t)^2} \cdot \frac{-t(x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3)}{(x_2 t + x_4)^2} = -\frac{1}{1 + B(t)^2} \cdot \frac{-tB(t)}{x_2 t + x_4}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_3} = -\frac{1}{1 + B(t)^2} \cdot \frac{1}{x_2 t + x_4}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_4} = -\frac{1}{1+B(t)^2} \cdot \frac{-(x_1 t + x3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3)}{(x_2 t + x_4)^2} = -\frac{1}{1+B(t)^2} \cdot \frac{-B(t)}{x_2 t + x_4}$$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{x_1} & \frac{\partial h_2}{x_1} & \dots & \frac{\partial h_N}{x_1} \\ \frac{\partial h_1}{x_2} & \frac{\partial h_2}{x_2} & \dots & \frac{\partial h_N}{x_2} \\ \frac{\partial h_1}{x_3} & \frac{\partial h_2}{x_3} & \dots & \frac{\partial h_N}{x_3} \\ \frac{\partial h_1}{x_4} & \frac{\partial h_2}{x_4} & \dots & \frac{\partial h_N}{x_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{x_1} & \frac{\partial h_1}{x_2} & \frac{\partial h_1}{x_3} & \frac{\partial h_1}{x_4} \\ \frac{\partial h_2}{x_2} & \frac{\partial h_2}{x_2} & \frac{\partial h_2}{x_3} & \frac{\partial h_2}{x_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_N}{x_1} & \frac{\partial h_N}{x_2} & \frac{\partial h_N}{x_3} & \frac{\partial h_N}{x_4} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sigma^2}$$

Для повышения точности сделаем шаг времени $t = T/10$ и $a_2 = -1$ тогда

$$N = 5; \sigma = 0.2 => D = 19056$$

$$N = 20; \sigma = 0.2 => D = 3.37$$

$$N = 100; \sigma = 0.2 => D = 0.48$$

$$N = 5; \sigma = 0.04 => D = 762$$

$$N = 20; \sigma = 0.04 => D = 0.13$$

$$N = 100; \sigma = 0.04 \Rightarrow D = 0.02$$

2) ММП

$$\alpha'(t) = \operatorname{arcctg}(\frac{x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3}{x_2 t + x_4}) + \delta\alpha$$

$$ctg(\alpha' + \delta\alpha) = \frac{x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3}{x_2 t + x_4}$$

$$\frac{x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3}{x_2 t + x_4} = ctg\alpha' - \frac{\delta\alpha}{\sin^2 \alpha'}$$

$$x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3 = ctg\alpha'(x_2 t + x_4) - \frac{\delta\alpha(x_2 t + x_4)}{\sin^2 \alpha'}$$

$$(x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3 - ctg\alpha'(x_2 t + x_4))\frac{\sin^2 \alpha'}{t} = -\delta\alpha(x_2 + \frac{x_4}{t})$$

$$J = \sum_{t=1}^{N} \|(x_1 t + x_3 - a_1 t^2 - a_2 t - a_3 - ctg\alpha'(x_2 t + x_4))\frac{\sin^2 \alpha'}{t}\|^2 \to \min$$

$$A \cdot x = b$$

$$mult = \frac{\sin^2 a'(t)}{t}$$

$$mult\cdot\begin{pmatrix} t_1 & -t_1\cdot\operatorname{ctg}\alpha'(t_1) & 1 & -ctg\alpha'(t_1) \\ t_2 & -t_2\cdot\operatorname{ctg}\alpha'(t_2) & 1 & -ctg\alpha'(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_N & -t_N\cdot\operatorname{ctg}\alpha'(t_N) & 1 & -ctg\alpha'(t_N) \end{pmatrix}\cdot x = mult\cdot\begin{pmatrix} a_1t_1^2+a_2t_1+a_3 \\ a_1t_2^2+a_2t_2+a_3 \\ \dots \\ a_1t_N^2+a_2t_N+a_3 \end{pmatrix}$$

Далее применим МНК

3) Используем также фильтр Калмана

Начальные условия

$$X_0 = (2,2,2,2)$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Постановка задачи

$$P_k^- = P_{k-1}^+$$

$$X_k^- = X_{k-1}^+$$

$$Z_k = h_kX_k + \delta\alpha$$

$$X_k^+ = X_k^- + P_k^-h_k^T(h_kP_k^-h_k^T + R)^{-1}(Z_k - h_kX_k^-)$$

$$P_k^+ = P_k^- - P_k^-h_k^T(h_kP_k^-h_k^T + R)^{-1}h_kP_k^-$$

$$h_k = mult\cdot\begin{pmatrix} t & -t\cdot ctg\alpha'(t) & 1 & -ctg\alpha'(t) \end{pmatrix}$$

$$Z_k = mult\cdot(a_1t^2 + a_2t + a_3)$$