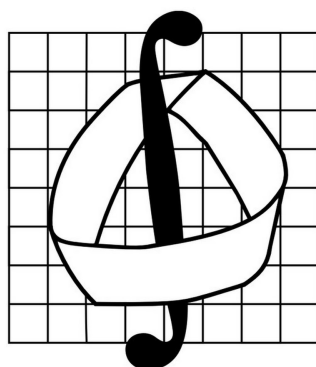


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ



Курсовая работа

Модель восстановления человеком исходной позы
после толчка

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Научный руководитель: к.ф.-м.н.,

Кручинин Павел Анатольевич

Москва, 2022

Содержание

1	Введение	4
2	Математическая модель и постановка задачи управления	5
3	Задача оптимального быстрогодействия при ограничении на величину скорости изменения момента	8

1 Введение

В ходе теста производят толкающее воздействие с помощью руки или груза, помещенного на подвижном отвесе. В результате внешнего воздействия тело наклоняется вперед и при не очень сильном толчке человек не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным.

В курсовой работе предполагается рассмотреть возможные оптимальные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на модели «перевернутого маятника», которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки времени возвращения конкретного человека в вертикальную позу, сравнивая его с полученным эталонным значением.

2 Математическая модель и постановка задачи управления

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 1).

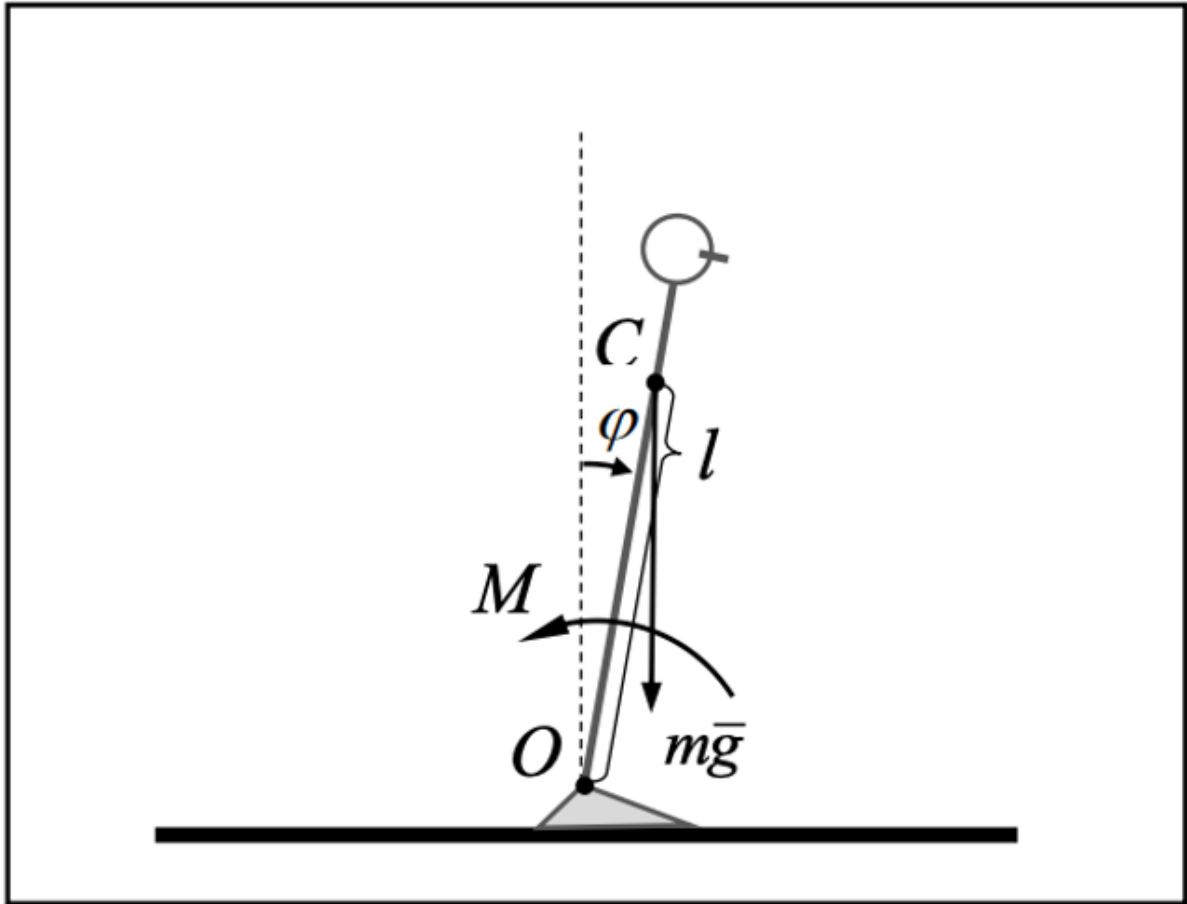


Рис. 1: Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы m , закрепленным шарнирно в точке O , которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке C , удаленной от точки O на расстояние l . Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку O , равен J . Отклонение стержня от вертикали описывается углом φ . Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Момент M , ко-

торый приложен в точке O к стержню, будем считать управлением.

Запишем уравнение моментов для малых значений угла φ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = mgl\varphi + M \quad (1)$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального положения:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \quad (2)$$

В конечное положение:

$$\varphi(t_k) = \varphi_k, \dot{\varphi}(t_k) = 0. \quad (3)$$

Перевод положения тела должен происходить за минимальное время t_k , с помощью изменений значения момента M в голеностопном суставе.

Будем принимать во внимание условия ограниченности величины момента в голеностопном суставе

$$M^- \leq M \leq M^+$$

и скорости его изменения

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+.$$

Будем считать, что за время толчка нервная система человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным, тогда:

$$M(0) = M(t_k) = -mgl\varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным:

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_f}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{mgl\varphi}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \sqrt{\frac{J}{mgl}}.$$

Управлением u будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных безразмерные уравнения движения примут следующий вид:

$$\theta'' = \theta + m; \quad m' = u$$

Здесь через m' обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Необходимо решение системы перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \quad \dot{\theta}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0 \quad (4)$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \dot{\theta}(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0 \quad (5)$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \text{ where}$$

$$u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_*t_*}, \quad u^+ = \frac{U^+}{mgl\varphi_*t_*}.$$

3 Задача оптимального быстрогодействия при ограничении на величину скорости изменения момента

Выпишем систему в форме Коши

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \quad (6)$$

Проверим управляемость системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det W \neq 0$, значит система полностью управляемая
 $|u| < U_{max}$

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

$\tau_f \rightarrow \min$

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\Psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 * \omega + \psi_2 * (\theta + m) + \psi_3 * u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

В данной задаче $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$, тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_\omega = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\psi_3. \end{cases} \quad (7)$$

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$, следовательно особого управления нет

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -U_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ -U_{min}, & \text{при } \psi_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решая систему (7), получим

$$\begin{aligned} \psi_2'' &= \psi_2 \\ \begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Решая систему (6), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = u_* \tau + C_0, \\ \theta(\tau) = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} - C_0 - u_* \tau, \\ \omega(\tau) = C_1 e^\tau - C_2 e^{-\tau} - u_*. \end{cases} \quad (9)$$

Этап 1. Начальные условия $u = u_*$

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

Из $m(0) = 0$ находим, что $C_0 = 0$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ \Omega_0 = C_1 - C_2 - u_*, \end{cases} \implies \begin{cases} C_0 = 0, \\ C_1 = \frac{1 + (\Omega_0 + u_*)}{2}, \\ C_2 = \frac{1 - (\Omega_0 + u_*)}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Из (10) получим

$$\begin{cases} m_1(\tau) = u_* \tau, \\ \theta_1(\tau) = \frac{1 + (\Omega_0 + u_*)}{2} e^\tau + \frac{1 - (\Omega_0 + u_*)}{2} e^{-\tau} - C_0 - u_* \tau, \\ \omega_1(\tau) = \frac{1 + (\Omega_0 + u_*)}{2} e^\tau - \frac{1 - (\Omega_0 + u_*)}{2} e^{-\tau} - u_*. \end{cases} \quad (11)$$

Этап 2. Начальные условия $u = -u_*$

$$\theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1); \quad \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1); \quad m(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$