

Восстановление человеком исходной позы после толчка Reversion of initial posture by a person after a push

Романов Андрей Владимирович

МГУ им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления
Научный руководитель: Кручинин П.А.

23 марта 2023 г.

Описание задачи



Рис.: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабиллоплатформе

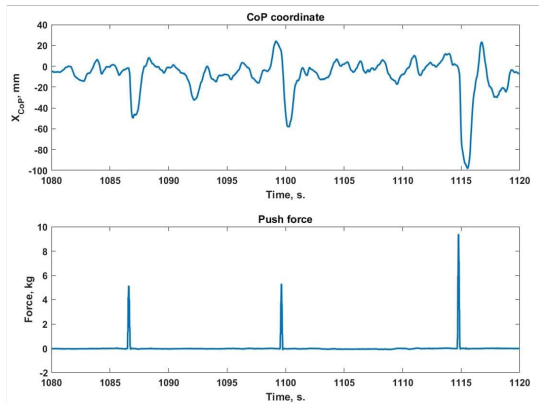


Рис.: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках (данные предоставлены сотрудниками ИМБП РАН)

Задача быстрогодействия

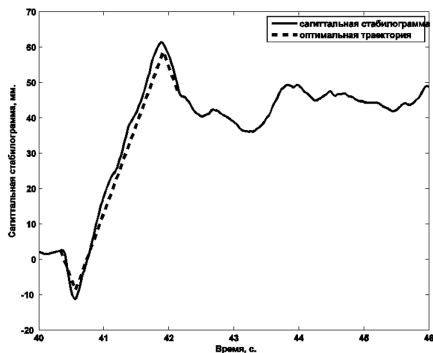
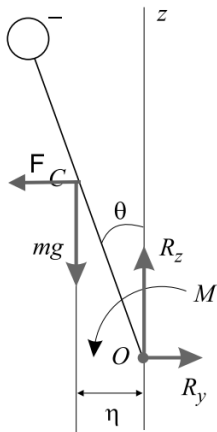


Рис.: Характерный вид сагиттальной стабиллограммы при наклоне при выполнении теста со ступенчатым воздействием

В работе рассматриваются возможные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на решении задачи оптимального быстрогодействия, которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В качестве математической модели используется модель «перевернутого маятника». Это решение предлагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

Математическая модель

Рассматривается задача возвращения в исходную позу после завершения толчка



$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$$\varphi(t) = \varphi_k, \dot{\varphi}(t_k) = 0$$

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k$$

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+$$

Решение задачи быстрогодействия

В прошлом году решалась задача быстрогодействия

Система разбивается на 3 этапа, с чередованием знака управления

Решение сводится к отысканию корней полинома для нахождения времени возвращения в вертикальную позицию.

θ — угол отклонения от вертикали

ω — угловая скорость тела

m — момент, возникающий в голеностопном суставе

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \quad (1) \quad u = \begin{cases} -u_{\max} \\ +u_{\max} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}, \quad \varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$$

$$\theta(0) = 1; \quad \theta'(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \theta'(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

Решение задачи быстродействия

Запишем функцию Понtryгина

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

$$\begin{cases} \psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2' = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3' = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \quad (2)$$

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$ следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понtryгина

$$u = \begin{cases} -u_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +u_{max}, & \text{при } \psi_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи быстродействия

Решая систему (2), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3 , получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u . Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (1) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Решение задачи быстрогодействия

Этап 1. $u = -u_*$ начальные условия

$$m(0) = 0; \theta(0) = 1; \omega(0) = \Omega_0;$$

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \frac{1}{2} e^{-\tau} \left(C_1 (e^{\tau} - 1)^2 + C_2 (e^{2\tau} + 1) + C_3 e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau} \tau u_* \right), \\ \Omega_0 = \frac{1}{2} e^{-\tau} \left(C_1 (e^{2\tau} - 1) + C_2 (e^{2\tau} - 1) + C_3 e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau} u_* \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau} - e^{-\tau}) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*. \end{cases}$$

Аналогично для 2 и 3 этапов

Решение задачи быстросействия

Условие сопряжения этих интервалов

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Замена переменных

$$x = e^{\tau_1}, \quad y = e^{\tau_2}, \quad z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

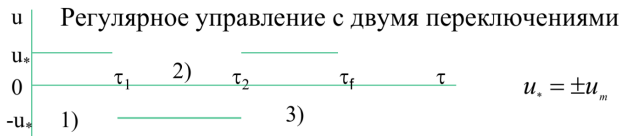


Рис.: Интервалы переключения управления

Решение задачи быстрогодействия

Требуется отобрать наименьший корень уравнений больший 1. При различных по знаку u_* .

$$\begin{cases} u_* z^2 + \Omega_0 - 1 - u_* = 0, \\ (-u_* \Omega_0 + u_*^2 - u_*) z^4 - 4u_*^2 z^3 + (2u_* \Omega_0 + 6u_*^2 - \Omega_0^2 + 1) z^2 - \\ - 4u_*^2 z + -u_* \Omega_0 + u_*^2 + u_* = 0 \\ y = zx, \\ \tau_f = \ln(z) \end{cases} \quad (3)$$

Определение начальных условий для задачи быстрогодействия

Для корректного решения задачи быстрогодействия необходимо определить начальные условия после толчка.

Для этого необходимо построить оценку $\tilde{\eta}$ траектории центра масс системы, зная траекторию центра давления, и взять значение $\tilde{\eta}_0$ и $\dot{\tilde{\eta}}_0$ в момент времени завершения толчка

Связь центра масс и центра давления

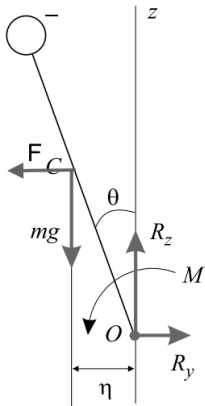


Рис.: Силы действующие на модель стержня, имитирующего тело человека

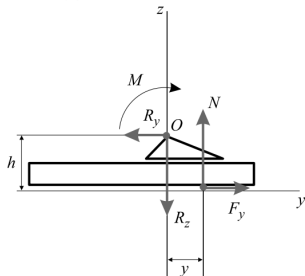


Рис.: Силы действующие на систему «стопы ног – платформа стабилоанализатора»

Связь центра масс и центра давления

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -R_y - F, \\ 0 = R_z - mg, \\ J\ddot{\theta} = mlg\theta - Fl_1 + M_x. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} M_x = Ny + F_y h, \\ F_y = R_y, \\ N \approx mg. \end{cases} \quad (5)$$

$$M_x = mgy - h(F + ml\ddot{\theta})$$

$$(J + mlh)\ddot{\theta} = mgl\theta + mgy - Fl_1 - Fh$$

$$\frac{(J + mlh)l\ddot{\theta}}{mgl} = l\theta + y - \frac{F}{mg}(l_1 + h); \quad \text{Замена: } \eta = -l\theta; \quad T^2 = \frac{J + mlh}{mgl};$$

$$T^2\ddot{\eta} = \eta - y + \frac{F}{mg}(l_1 + h) \quad (6)$$

Связь центра масс и центра давления

Соотношение (6) предлагается использовать для определения начальных условий движения сразу после толчка

Далее необходимо построить оценку $\tilde{\eta}$ движения центра масс различными способами, описанными в работах, выполненных под руководством П.А. Кручинина

Моделирование движения человека

Модель движения человека, где $M = -C\theta - P\dot{\theta}$ - момент в голеностопе

$$J\ddot{\theta} = mgl\theta + M - Fl_1$$

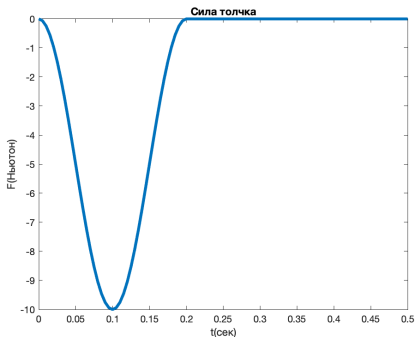


Рис.: Модель силы толчка

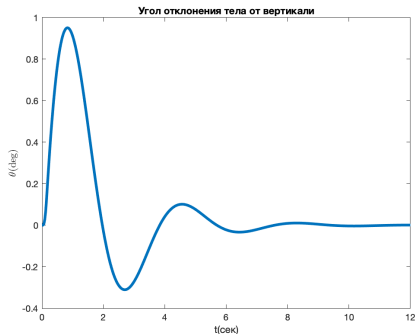


Рис.: Модель изменения угла отклонения

Алгоритм фильтрации (композиция двух фильтров)

Передаточная функция системы (6) имеет вид

$$G(s) = -\frac{1}{T^2 s^2 - 1}$$

Ее можно представить в виде композиции двух фильтров

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{Ts - 1}, G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Оценка координаты центра масс может быть найдена, путем последовательного применения двух фильтров

$$T\dot{x} + x = -y \text{ в прямом времени}$$

$$T\dot{\eta} - \eta = x \text{ в обратном времени}$$

Алгоритм фильтрации (преобразование Фурье)

$Y(\omega), N(\omega)$ – Фурье образы $y(t)$ и $\eta(t)$

$$N(\omega) = G(i\omega) \cdot Y(\omega)$$

Представим $y(t) = a(t - t_0) + b + \delta(t)$

$a = \frac{y(t_f) - y(t_0)}{t_f - t_0}$, $b = y(t_0)$, тогда оценка координаты центра масс может быть найдена из

$\eta(t) = a(t - t_0) + b + \chi(t)$, где $\chi(t)$ - Фурье праобраз $N(\omega)$

Моделирование движения человека

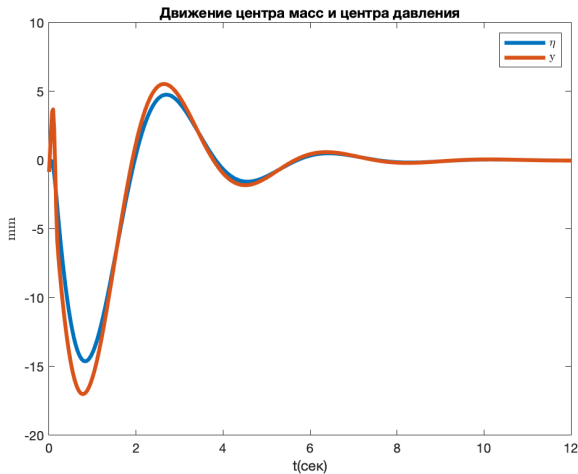


Рис.: Модель изменения саггитальной координаты центра масс и центра давления

Модельная оценка центра масс с использованием FFT

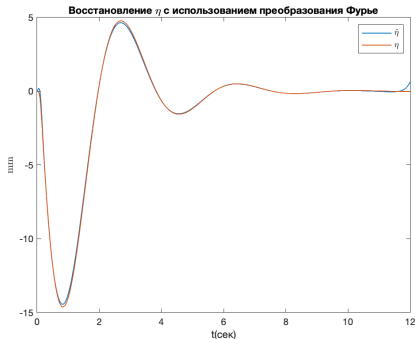


Рис.: Реальное и восстановленное значение η

$$\sigma = 0.1mm$$

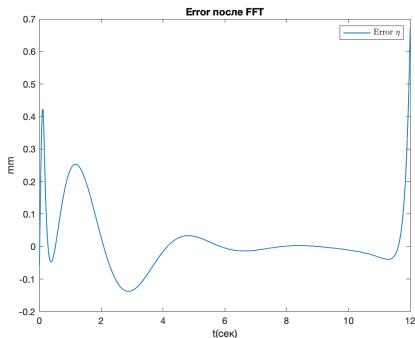


Рис.: Ошибка оценивания

Модельная оценка центра масс с использованием двойной фильтрации

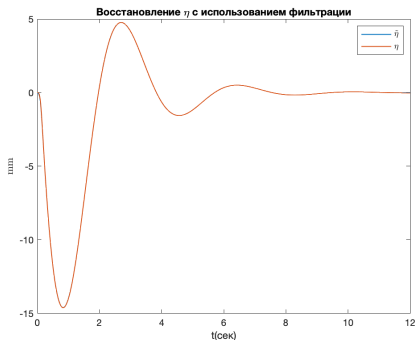


Рис.: Реальное и восстановленное значение η

$$\sigma = 0.008mm$$

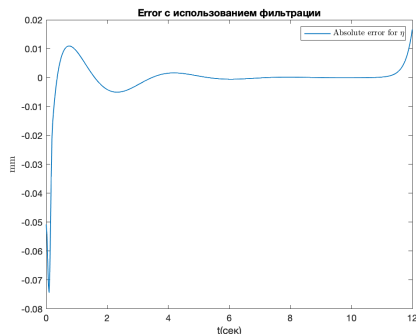







Рис.: Ошибка оценивания

Дальнейшие шаги

- 1 Применить алгоритм двойной фильтрации и фильтрации через FFT для реальных показаний со стабиланализатора
- 2 Получить оценку ц.м. и оценку скорости изменения ц.м. в момент времени завершения толчка
- 3 Определить характерную среднюю скорость изменения момента в голеностопе на участках возврата и подставить ее в управление $u_* = \frac{\dot{M}_{max}}{mgl\varphi_*t_*}$
- 4 Сравнить реальное время возвращения в вертикальную позу с полученными при решении задачи быстрогодействия
- 5 Построить траекторию центра масс при управлении, полученном при решении задачи быстрогодействия

Список основной используемой литературы

-  П.А. Кручинин Анализ результатов стабилметрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.
-  П.А. Кручинин Механические модели в стабилметрии // Российский журнал биомеханики. – 2014. – Т. 18, №2. – С. 184–193.
-  П.А. Кручинин, М.А. Подоприхин, И.Д. Бекеров Сравнительный анализ алгоритмов оценки движения центра масс по результатам стабилметрических измерений // Биофизика – 2021. – Т. 66, №5. – С. 997–1004.
-  Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.
-  Фалб Питер Л., Атанс Майкл Оптимальное управление, Машиностроение. 1968. 764 с.