Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико - математический факультет

Кафедра прикладной механики и управления

# Курсовая работа

## Модель восстановления человеком исходной позы после толчка

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Научный руководитель: к.ф.-м.н.,
Кручинин Павел Анатольевич

Москва, 2022

# Содержание

# 1 Введение

В литературе встречается решение задач оптимального быстродействия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Проба со ступенчатым воздействием является одной из стандартных проб при стабилометрических исследованиях [3, 4]. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, после толчка в спину, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью руки или груза, помещенного на подвижном отвесе [5]. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [6, 7]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.

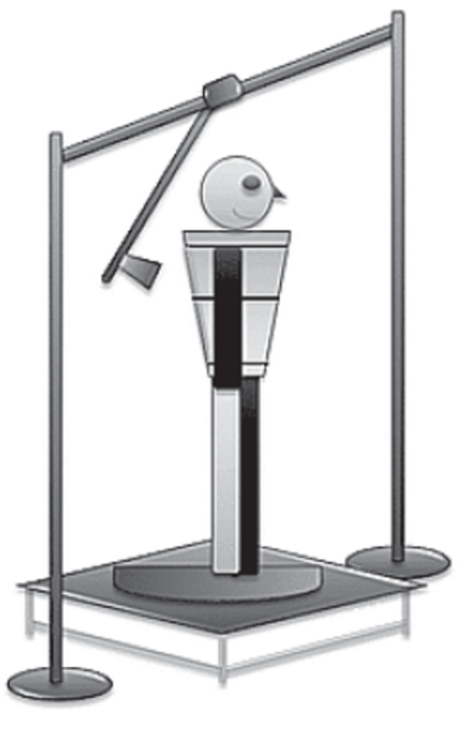

Рис. 1: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной коордианты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

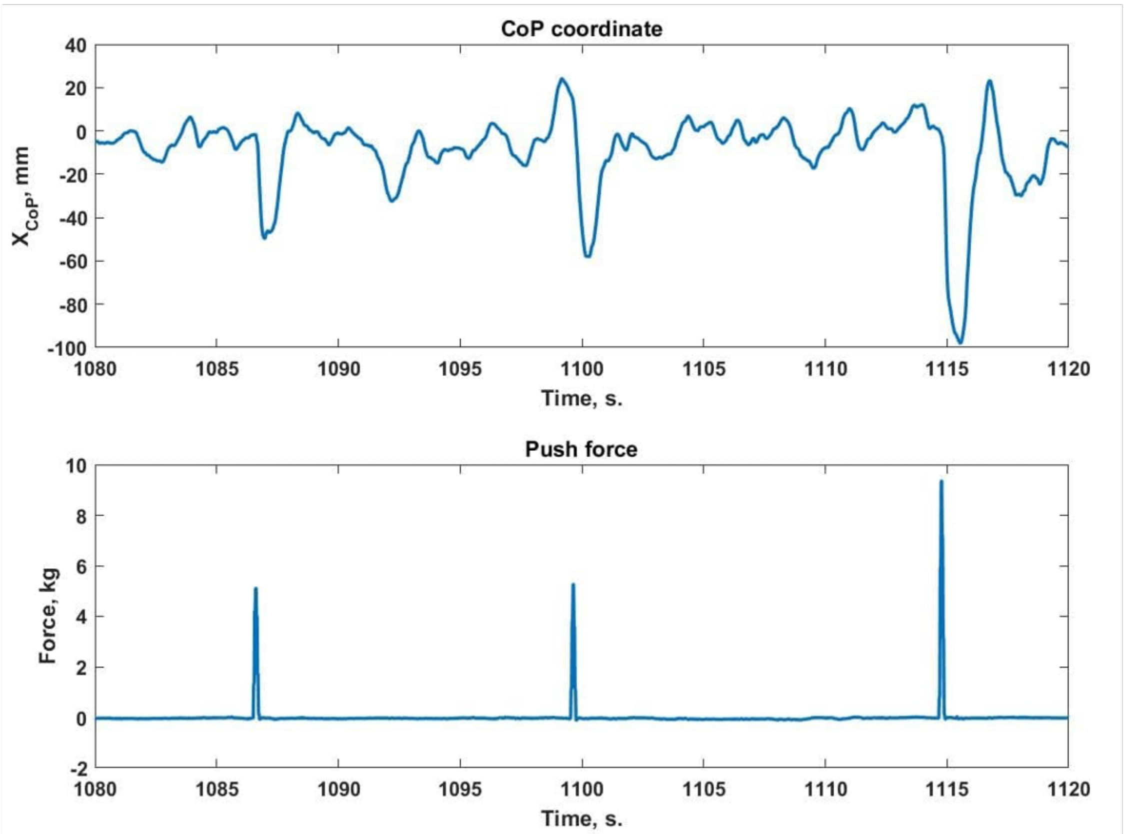


Рис. 2: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

В курсовой работе предполагается рассмотреть возможные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на решении задачи оптимального быстродействия, которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В качестве математической модели используется модель «перевернутого маятника»[6, 7, 8]. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

# 2 Математическая модель и постановка задачи управления

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 3).

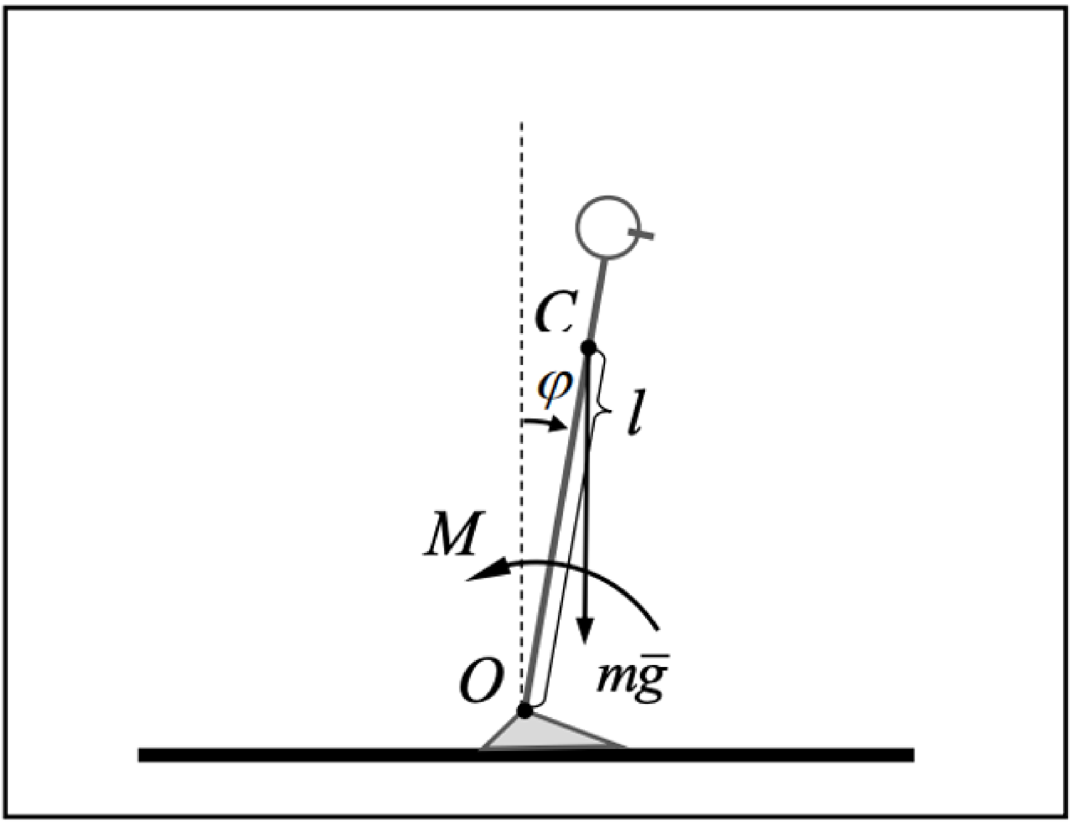


Рис. 3: Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы $m$, закрепленным шарнирно в точке $O$, которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке $C$, удаленной от точки $O$ на расстояние $l$. Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку $O$, равен $J$. Отклонение стержня от вертикали описывается углом $\varphi$. Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Скорость изменения момента $M$, который приложен в точке $O$ к стержню, будем считать управлением.

Уравнение моментов для малых значений угла $\varphi$ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального состояния

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

в конечное состояние

$$\varphi(t_k) = \varphi_k,\ \dot{\varphi}(t_k) = 0.$$

Перевод состояния тела должен происходить за минимальное время $t_k$, с помощью изменений значения $\dot{M}$ в голеностопном суставе.

Будем принимать во внимание условия ограниченности скорости изменения момента в голеностопном суставе

$$U^- \leqslant \dot{M} \leqslant\ U^+.$$

Будем считать, что за время толчка нервная система человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M\left(t_k\right) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*},\ \ m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*},\ t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением $u$ будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных обезразмеренные уравнения движения примут следующий вид

$$\theta^{''} = \theta + m; \; m^{'} = u \tag{1}$$

Здесь через $m^{'}$ обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau$. Необходимо решение системы (1) перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \; \theta^{'}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0; \; m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \; \theta^{'}(\tau_f) = 0; \; m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leqslant \; u \leqslant \; u^+, \text{ где}$$

$$u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_* t_*}, \quad u^+ = \frac{U^+}{mgl\varphi_* t_*}.$$

Далее будем считать, что $u^- = -u^+$

# 3 Задача оптимального быстродействия при ограничении на величину скорости изменения момента

Выпишем систему в форме Коши

$$\begin{cases} \theta^{'} = \omega, \\ \omega^{'} = \theta + m, \\ m^{'} = u. \end{cases} \tag{2}$$

$|u| \leqslant u_{max}$

$$\theta(0) = 1;\ \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \theta^{'}(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

$J = \tau_f \to \min$

Для решения задачи оптимального быстродействия будем использовать принцип максимума Понтрягина [9]:

Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$– оптимальный процесс, то существует нетривиальная пара $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ такая, что

- $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))\ \forall t \in T \subseteq [t_0, t_k^0]$;
- $\psi(t_k^0) + \lambda_0(\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y})^T \perp M$ в точке $y^0(t_k^0)$;
- $\mathcal{H} = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_k^0]$.

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\psi_i^{'} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ i = 1, \ldots, n$$

В данной задаче $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$, тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \psi_1^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \tag{3}$$

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$ следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -u_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +u_{max}, & \text{при } \psi_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Продифференцируем по безразмерному времени второе уравнение из (3) и подставим в него первое, получим

$$\psi_2'' = \psi_2$$

Решая систему (3), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов $C_1, C_2, C_3$, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений $u$.

Пусть $u^* = \text{const}$ управление на первом участке траектории до первого переключения $u^* = -u_{max}$.

Решая систему (2), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = \tau u + C_1, \\ \theta(\tau) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left( (C_1 + C_2 + C_3) e^{2\tau} - 2e^{\tau}(\tau u + C_1) + C_1 + C_2 - C_3 \right), \\ \omega(\tau) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left( (C_1 + C_2 + C_3) e^{2\tau} - 2e^{\tau} u - C_1 - C_2 + C_3 \right). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (2) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Этап 1. $u = -u_*$ начальные условия

$$m(0) = 0;\ \theta(0) = 1;\ \omega(0) = \Omega_0;$$

Из (4) получим

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(C_1\left(e^{\tau}-1\right)^2 + C_2\left(e^{2\tau}+1\right) + C_3e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau}\tau u_*\right), \\ \Omega_0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(C_1\left(e^{2\tau}-1\right) + C_2\left(e^{2\tau}-1\right) + C_3e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau}u_*\right). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -u_* + \Omega_0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в (4)

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau}-e^{-\tau}) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau}+e^{-\tau}) + u_*. \end{cases}$$

Этап 2. $u = u_*$ начальные условия

$$m(\tau_1) = m_1(\tau_1);\ \theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1);\ \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);$$

$$\begin{cases} m(\tau_1) = -\tau_1 u_*, \\ \theta(\tau_1) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}-1\right)\Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1} + 1\right)u_* + 1\right), \\ \omega(\tau_1) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}+1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau_1}-1\right)\left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1}-1\right)u_* - 1\right)\right). \end{cases}$$

Находим константы интегрирования

$$\begin{cases} -\tau_1 u_* = \tau_1 u_* + C_1, \\ \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}-1\right)\Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1}+1\right)u_* + 1\right) = \\ = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(C_1\left(e^{\tau_1}-1\right)^2 + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* + C_2 - C_3\right), \\ \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}+1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau_1}-1\right)\left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1}-1\right)u_* - 1\right)\right) = \\ = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(C_1\left(e^{2\tau_1}-1\right) + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1}u_* - C_2 + C_3\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2\tau_1 u_*, \\ C_2 = -e^{-\tau_1}\left(-e^{\tau_1} + e^{2\tau_1}u_* - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* - u_*\right), \\ C_3 = e^{-\tau_1}\left(e^{\tau_1}\Omega_0 - e^{\tau_1}u_* + e^{2\tau_1}u_* + u_*\right). \end{cases}$$

Подставим начальные условия для второго этапа в (4), получим

$$\begin{cases} m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1)\,u_*, \\ \theta_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1} - 1). \end{cases}$$

Этап 3. $u = -u_*$ конечные условия

$$m(\tau_f) = 0;\ \theta(\tau_f) = 0;\ \omega(\tau_f) = 0;$$

Подставим начальные условия в (4), получим

$$\begin{cases} 0 = C_1 - \tau_f u_*, \\ 0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_f}\left(C_1\left(e^{\tau_f}-1\right)^2 + C_2\left(e^{2\tau_f}+1\right) + C_3 e^{2\tau_f} - C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\tau_f\right), \\ 0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_f}\left(C_1\left(e^{2\tau_f}-1\right) + C_2\left(e^{2\tau_f}-1\right) + C_3 e^{2\tau_f} + C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = u_* \tau_f, \\ C_1 = \frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} \left( -2e^{\tau_f} \tau_f + e^{2\tau_f} - 1 \right), \\ C_2 = -\frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} \left( e^{2\tau_f} + 1 \right). \end{cases}$$

Тогда решение на этом этапе имеет вид

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* \left( \tau_f - \tau \right), \\ \theta_3(\tau) = \frac{1}{2} u_* \left( -e^{\tau - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau} - 2\tau_f + 2\tau \right), \\ \omega_3(\tau) = u_* - \frac{u_*}{2} (e^{\tau - \tau_f} + e^{-\tau + \tau_f}). \end{cases}$$

Теперь найдем решения, учитывая что

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \left( \tau_2 - 2\tau_1 \right) u_* = u_* \left( \tau_f - \tau_2 \right), \\ \frac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* (e^{\tau_2 - \tau_1} - e^{-\tau_2 + \tau_1} + 2\tau_1 - \tau_2) = \\ = \frac{1}{2} u_* \left( -e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau_2} - 2\tau_f + 2\tau_2 \right), \\ \frac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* (e^{\tau_2 - \tau_1} + e^{-\tau_2 + \tau_1} - 1) = \\ = u_* - \frac{u_*}{2} (e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{-\tau_2 + \tau_f}). \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на $u_*$, выражение для $\tau_f$ из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases}\tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1),\\ \dfrac{e^{\tau_2}+e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2}-e^{-\tau_2}) + u_*\left(e^{-\tau_1+\tau_2} - e^{\tau_1-\tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2-\tau_f} - e^{-\tau_2+\tau_f}}{2}\right) = 0,\\ \dfrac{e^{\tau_2}-e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2}+e^{-\tau_2}) + u_*\left(e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2-\tau_f} + e^{-\tau_2+\tau_f}}{2} - 2\right) = 0.\end{cases} \tag{5}$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1},\ y = e^{\tau_2},\ z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x},\\ \dfrac{1}{2}\left(u_*\left(\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x} - y + \dfrac{1}{y}\right) + \left(y - \dfrac{1}{y}\right)\Omega_0 + y + \dfrac{1}{y}\right) = 0,\\ \dfrac{u_*\left(\frac{y^2}{x^2} + x^2 + \frac{2y^2}{x} + 2x - y^2 - 4y - 1\right) + \left(y^2+1\right)\Omega_0 + y^2 - 1}{2y} = 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x},\\ (\Omega_0 - u_*)\left(xy - \dfrac{x}{y}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{2x^2}{y} + 2y\right) + \dfrac{x}{y} + xy = 0,\\ (\Omega_0 - u_*)\left(xy + \dfrac{x}{y}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^2}{y} + 2y - 4x\right) - \dfrac{x}{y} + xy = 0.\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} y = zx,\\ (\Omega_0 - u_*)\left(x^2z - \dfrac{x}{zx}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{zx} - \dfrac{zx}{x} - \dfrac{2x^2}{zx} + 2zx\right) + \dfrac{x}{zx} + x^2z = 0,\\ (\Omega_0 - u_*)\left(x^2z + \dfrac{x}{zx}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{zx} + \dfrac{zx}{x} + \dfrac{2x^2}{zx} + 2zx - 4x\right) - \dfrac{x}{zx} + x^2z = 0.\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} (\Omega_0 - u_*)\left(x^2z - \dfrac{1}{z}\right) + u_*\left(\dfrac{x^2}{z} - z - \dfrac{2x}{z} + 2zx\right) + \dfrac{1}{z} + x^2z = 0,\\ (\Omega_0 - u_*)\left(x^2z + \dfrac{1}{z}\right) + u_*\left(\dfrac{x^2}{z} + z + \dfrac{2x}{z} + 2zx - 4x\right) - \dfrac{1}{z} + x^2z = 0.\end{cases} \tag{8}$$

Сложим и вычтем уравнения системы

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_* \left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ 2(\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{z} + u_* \left(2z + \dfrac{4x}{z} - 4x\right) - \dfrac{2}{z} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_* \left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ 2(\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{z} + 2u_* z + 4x \left(\dfrac{u_*}{z} - u_*\right) - \dfrac{2}{z} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_* \left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ x = \left(\dfrac{1}{2z} - \dfrac{u_* z}{2} - (\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{2z}\right) \dfrac{z}{u_*(1-z)} \end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\left(u_* \left(z^2 - 1\right) + \Omega_0 - 1\right) \left(-u_* \left(z^4 + \Omega_0 \left(z^2 - 1\right)^2\right) + u_*^2 (z-1)^4 + u_* - \Omega_0^2 z^2 + z^2\right)}{2u_*^2 (z-1)^2} = 0$$

Привести систему (6) к полиномиальному виду, как это сделано в работах [6, 10], не удалось, поэтому дальнейший анализ задачи проведем с использованием численных методов решения систем уравнений.

# 4 Численные примеры реализации оптимального управления

Построим оптимальную траекторию, учитывая полученные соотношения для управления.

$m_T = 74$кг; $l = 0.88$м; $J = \frac{4ml^2}{3}$кг·м$^2$

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{4l}{3g}} = 0.346c$$

Значение $u^*_{max} = 1.65$ уже было подсчитано в работе [10]. Характерное значение для $\varphi_* = 0.087$ рад, для $\omega_0 = 0.069$ рад/с.

$\Omega_0 = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = 0.274$

Численно решим систему (6) используя пакет Wolfram Mathematica и функцию NSolve, которая ищет все корни системы полиномиальных уравенений. Также сделаем отбор корней из условия, что $x > 1, y > 1, z > 1$. Получим $\tau_1 = 2.12; \tau_2 = 4.88; \tau_f = 5.51$. Также найдем корни системы (6) при $\theta'(0) = 1.3\Omega_0$ и при $\theta'(0) = 0.7\Omega_0$.

При $\theta'(0) = \Omega_0$: $\tau_1 = 2.12; \tau_2 = 4.88; \tau_f = 5.51$;

При $\theta'(0) = 1.3\Omega_0$: $\tau_1 = 2.38, \tau_2 = 5.41, \tau_f = 6.06$;

При $\theta'(0) = 0.7\Omega_0$: $\tau_1 = 2.06, \tau_2 = 4.74, \tau_f = 5.37$.

Для полученных значений $\tau_1, \tau_2, \tau_f$ построим графики решений системы (2).

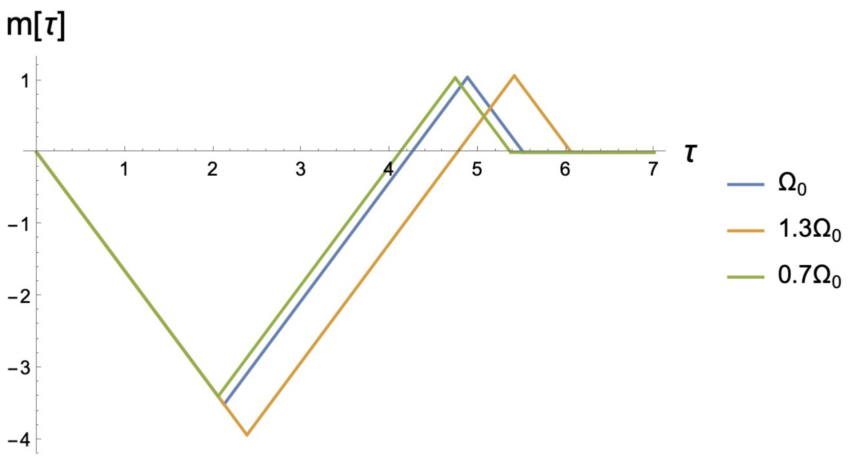


Рис. 4: Зависимость $m(\tau)$

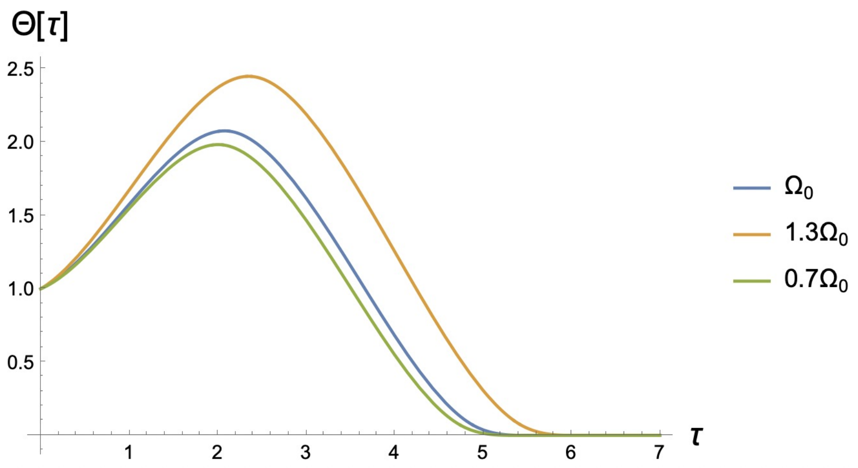


Рис. 5: Зависимость $\Theta(\tau)$

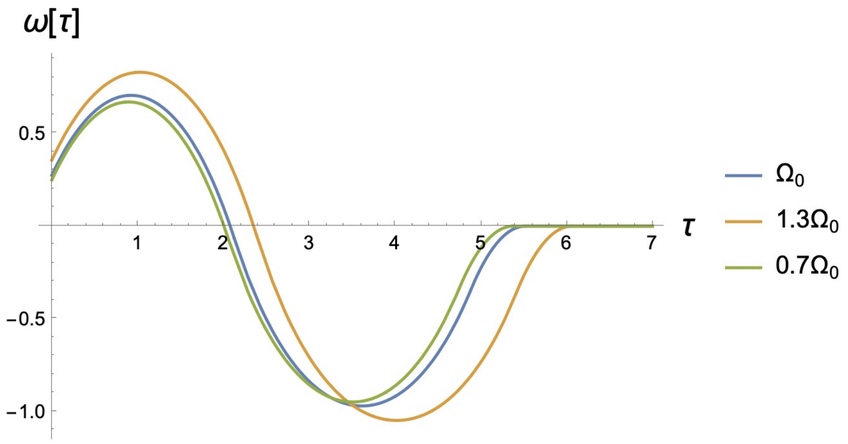


Рис. 6: Зависимость $\omega(\tau)$

# 5 Заключение

В курсовой работе были представлены оптимальные алгоритмы управления движением позой при ступенчатом воздействии, основанные на модели «перевернутого маятника» удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. В задаче ставилось ограничение на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое хорошо качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилометрических исследованиях.

- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка.

# Список используемой литературы


[1] Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S. An optimal control model for maximum height human jumping// Journal of Biomechanics.-1990, vol. 23 – pp.1185-1198.

[2] Happee R. Time optimality in the control of human movements// Biological cybernetics- 1992, vol. 66 – pp. 357-366.

[3] Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С. Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте// IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009» - М.: Экспоцентр, 2009.– С.121-123.

[4] Муртазина Е.П. Функциональные особенности выполнения стабилографических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // Известия ЮФУ. Технические науки.- 2009.-№9-С.123-127.

[5] Мельников А.А., Филёва В.В. Методика определения устойчивости вертикальной позы под влиянием внешнего толкающего воздействия // Физиология. 2015. С. 31–37.

[6] Кручинин П.А. Анализ результатов стабилометрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.

[7] П. А. Кручинин и Е. А. Касаткин, Изв. ЮФУ. Техн. науки 10 (159), 254 (2014).

[8] Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека - М.: Наука, 1965 - 256 с.

[9] Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.

[10] Касаткин Е.А., Кручинин П.А. Оптимальное управление позой человека при выполнении стабилометрической пробы со ступенчатым воздействием: Курсовая работа, Москва, 2014, 22 с.