

Модель восстановления человеком исходной позы после толчка

Романов Андрей Владимирович

МГУ им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления

31 мая 2022 г.

Описание задачи

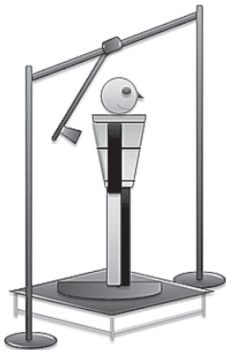


Рис.: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабиллоплатформе

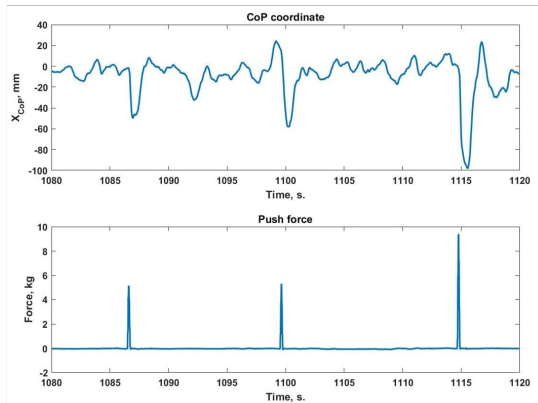


Рис.: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках (данные предоставлены сотрудниками ИМБП РАН)

Задача быстрогодействия

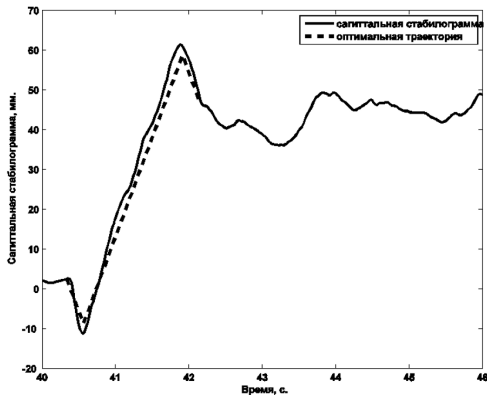
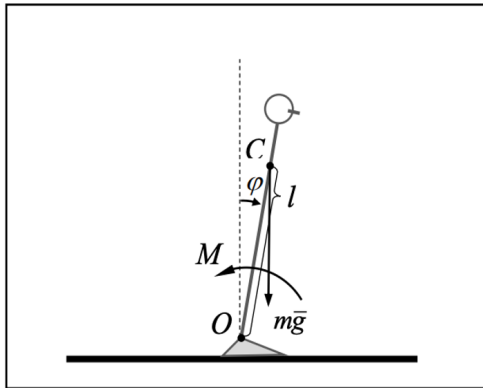


Рис.: Характерный вид сагиттальной стабиллограммы при выполнении теста со ступенчатым воздействием

В работе рассматривается задача быстрогодействия для установки перевернутого маятника в неустойчивое вертикальное положение равновесия.

Предполагается сравнение результатов стабиллометрических проб, при которых человек возвращается в исходную вертикальную позу после толчка, с решением этой оптимальной задачи для начальных условий, соответствующих моменту времени завершения толчка.

Математическая модель



$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= m_T x g l \varphi + M \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \\ \varphi(t) &= \varphi_k, \dot{\varphi}(t_k) = 0 \\ M(0) &= M(t_k) = -m_T g l \varphi_k \\ U^- &\leq \dot{M} \leq U^+ \end{aligned}$$

Рис.: Модель перевернутого маятника

Переход к безразмерным величинам

$$\theta'' = \theta + m; \quad m' = u$$

Необходимо решение системы перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \quad \dot{\theta}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

в положение

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi} \quad \theta(\tau_f) = 0; \quad \dot{\theta}(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \quad \text{где } u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_* t_*} = -u^+$$

Принцип максимума Понтрягина

Система в форме Коши

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \quad (1)$$

Функция Понтрягина

$$H = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2. \end{cases} \quad (2)$$

Анализ сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases} \quad (3)$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3 , получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u .

Решение системы на 1 этапе

Этап 1. $u = u_*$ начальные условия

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

Решение

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta(\tau_1) = \frac{1}{2} e^{-\tau} \left((e^{2\tau} - 1) \Omega_0 + e^{2\tau} + (2e^\tau \tau - e^{2\tau} + 1) u_* + 1 \right), \\ \omega(\tau_1) = \frac{1}{2} e^{-\tau} \left((e^{2\tau} + 1) \Omega_0 - (e^\tau - 1) (-e^\tau + (e^\tau - 1) u_* - 1) \right). \end{cases}$$

Решение системы на 2 этапе

Этап 2. $u = u_*$ начальные условия

$$\theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1); \quad \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1); \quad m(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$

Решение

$$\begin{cases} m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1) u_*, \\ \theta_2(\tau) = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^\tau + e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1} - 1). \end{cases}$$

Решение системы на 3 этапе

Этап 3. $u = -u_*$ конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \omega(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

Решение

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* (\tau_f - \tau), \\ \theta_3(\tau) = \frac{1}{2} u_* (-e^{\tau - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau} - 2\tau_f + 2\tau), \\ \omega_3(\tau) = u_* - \frac{u_*}{2} (e^{\tau - \tau_f} + e^{-\tau + \tau_f}). \end{cases}$$

Сопряжение уравнений

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \frac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{-\tau_1 + \tau_2} - e^{\tau_1 - \tau_2} + \frac{e^{\tau_2 - \tau_f} - e^{-\tau_2 + \tau_f}}{2} \right) = 0, \\ \frac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_1 + \tau_2} + \frac{e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{-\tau_2 + \tau_f}}{2} - 2 \right) = 0. \end{cases}$$

Замена переменных

$$x = e^{\tau_1}, \quad y = e^{\tau_2}, \quad z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \frac{y}{x}, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(xy - \frac{x}{y} \right) + u_* \left(\frac{x^3}{y} - \frac{y}{x} - \frac{2x^2}{y} + 2y \right) + \frac{x}{y} + xy = 0, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(xy + \frac{x}{y} \right) + u_* \left(\frac{x^3}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2x^2}{y} + 2y - 4x \right) - \frac{x}{y} + xy = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Численные примеры реализации оптимального управления

Построим оптимальную траекторию, учитывая полученные соотношения для управления.

$$m_T = 74\text{кг}; l = 0.88\text{м}; J = \frac{4ml^2}{3}\text{кг}\cdot\text{м}^2$$

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{4l}{3g}} = 0.346\text{с}$$

$$u_{\max}^* = 1.65$$

Характерное значение для $\varphi_* = 0.087$ рад, для $\omega_0 = 0.069$ рад/с.

$$\Omega_0 = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = 0.274$$

Найдем корни системы (5) при $\theta'(0) = \Omega_0$, $\theta''(0) = 1.3\Omega_0$ и при $\theta'(0) = 0.7\Omega_0$.

При $\theta'(0) = \Omega_0$: $\tau_1 = 2.12$; $\tau_2 = 4.88$; $\tau_f = 5.51$;

При $\theta'(0) = 1.3\Omega_0$: $\tau_1 = 2.38$, $\tau_2 = 5.41$, $\tau_f = 6.06$;

При $\theta'(0) = 0.7\Omega_0$: $\tau_1 = 2.06$, $\tau_2 = 4.74$, $\tau_f = 5.37$.

Зависимость $m[\tau]$

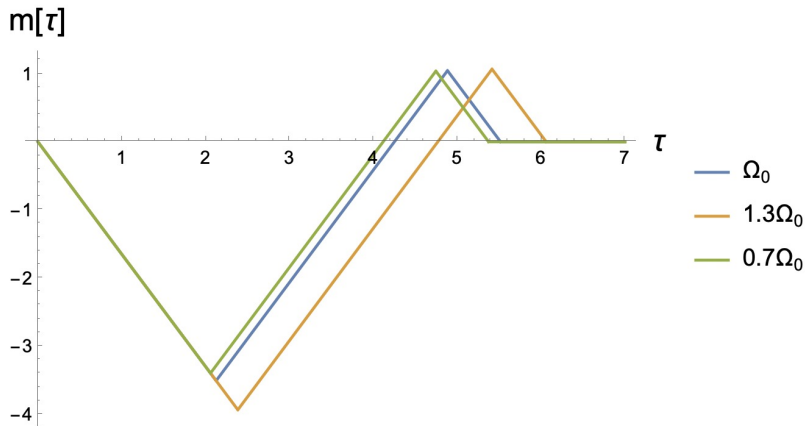


Рис.: Зависимость $m[\tau]$

Зависимость $\Theta[\tau]$

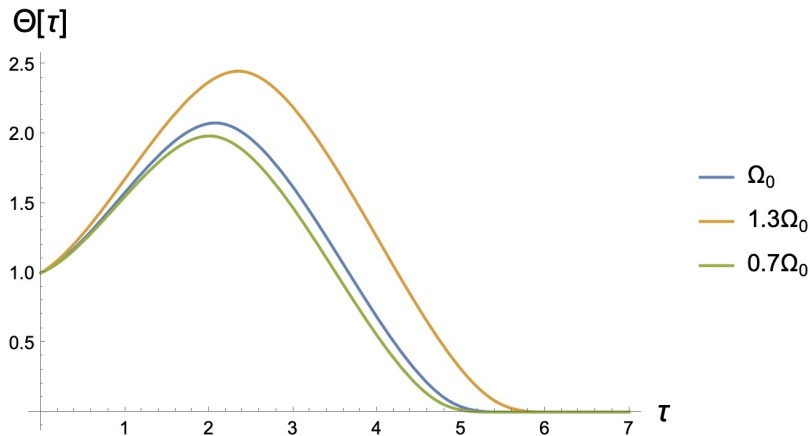


Рис.: Зависимость $\Theta[\tau]$

Зависимость $\omega[\tau]$

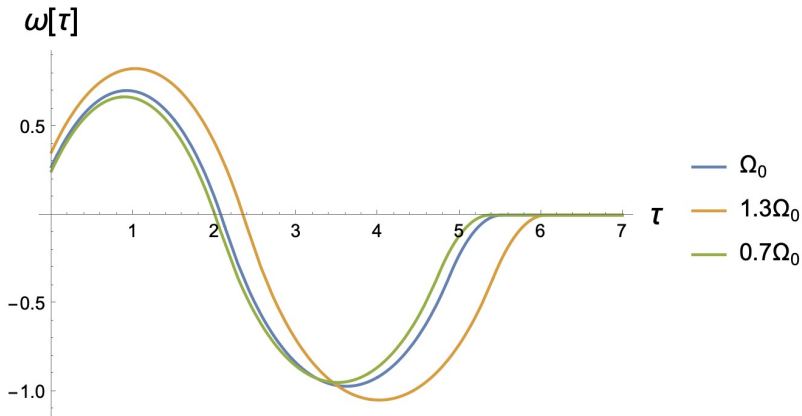





Рис.: Зависимость $\omega[\tau]$

Заключение

В курсовой работе были представлены оптимальные алгоритмы управления движением позой при ступенчатом воздействии, основанные на модели «перевернутого маятника» удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. В задаче ставилось ограничение на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

- Показано, что решение оптимальной задачи быстрогодействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое хорошо качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилметрических исследованиях.
- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка.

Используемая литература

-  Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление. Москва, Машиностроение, 1968, 764 с.
-  Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrellидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, Наука, 1983, 393 с.
-  Мостовской А.П. Численные методы и система Mathematica. Мурманск: 2009. - 249 с.