

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.
ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ



Курсовая работа

Модель восстановления человеком исходной позы после
толчка

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Научный руководитель: к.ф.-м.н.,
Кручинин Павел Анатольевич

Москва, 2022

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель и постановка задачи управления	4
3	Задача оптимального быстрогодействия при ограничении на величину скорости изменения момента	7

1 Введение

В ходе теста производят толкающее воздействие с помощью руки или груза, помещенного на подвижном отвесе. В результате внешнего воздействия тело наклоняется вперед и при не очень сильном толчке человек не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным.

В курсовой работе предполагается рассмотреть возможные оптимальные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на модели «перевернутого маятника», которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки времени возвращения конкретного человека в вертикальную позу, сравнивая его с полученным эталонным значением.

2 Математическая модель и постановка задачи управления

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 1).

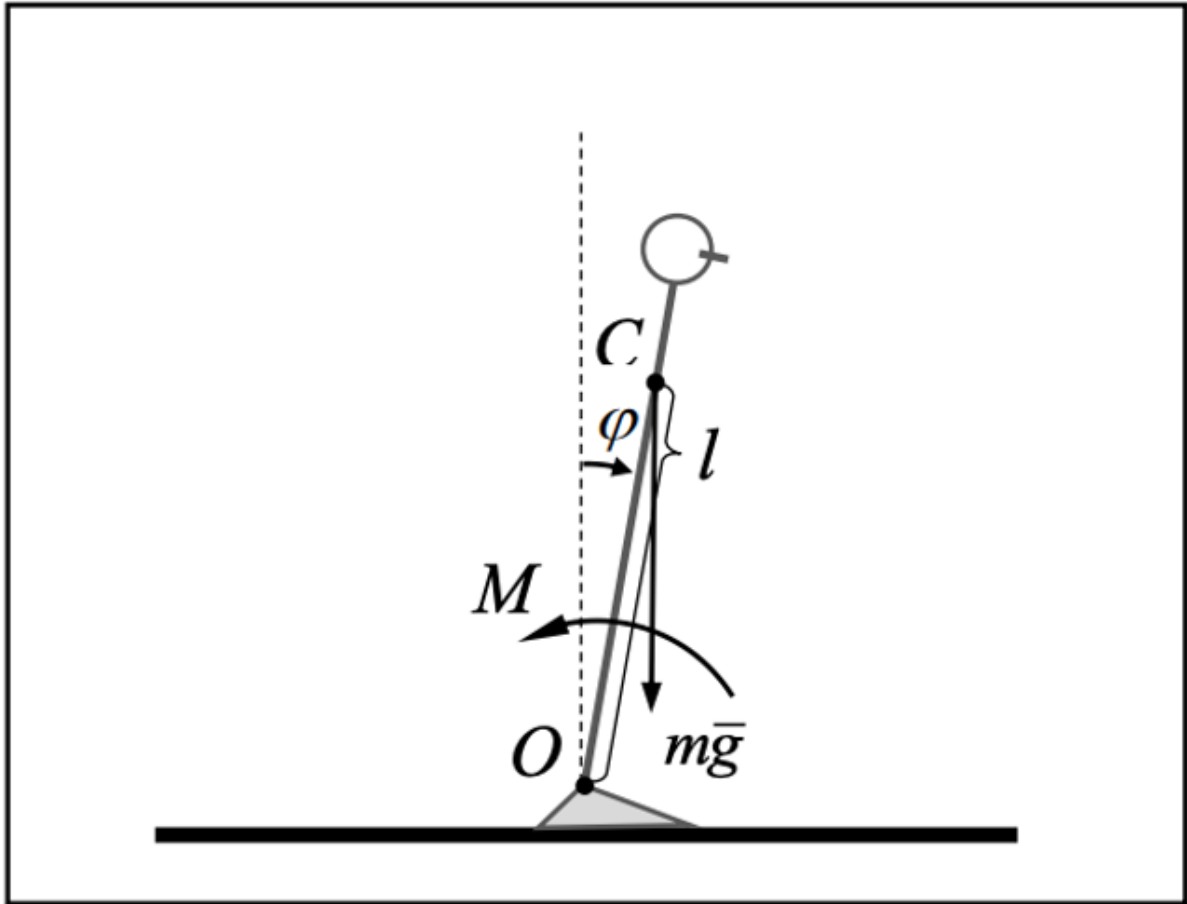


Рис. 1: Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы m , закрепленным шарнирно в точке O , которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке C , удаленной от точки O на расстояние l . Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку O , равен J . Отклонение стержня от вертикали описывается углом φ . Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Момент M , ко-

торый приложен в точке O к стержню, будем считать управлением.

Запишем уравнение моментов для малых значений угла φ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M \quad (1)$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального положения

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \quad (2)$$

в конечное положение

$$\varphi(t_k) = \varphi_k, \dot{\varphi}(t_k) = 0. \quad (3)$$

Перевод положения тела должен происходить за минимальное время t_k , с помощью изменений значения момента M в голеностопном суставе.

Будем принимать во внимание условия ограниченности скорости изменения момента в голеностопном суставе

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+.$$

Будем считать, что за время толчка нервная система человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением u будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных безразмерные уравнения движения примут следующий вид

$$\theta'' = \theta + m; \quad m' = u$$

Здесь через m' обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Необходимо решение системы перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \quad \dot{\theta}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0 \quad (4)$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \dot{\theta}(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0 \quad (5)$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \quad \text{где}$$

$$u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_*t_*}, \quad u^+ = \frac{U^+}{mgl\varphi_*t_*}.$$

Далее будем считать, что $u^- = -u^+$

3 Задача оптимального быстрогодействия при ограничении на величину скорости изменения момента

Выпишем систему в форме Коши

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \quad (6)$$

Проверим управляемость системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det W \neq 0$, значит система полностью управляемая
 $|u| < U_{max}$

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

$\tau_f \rightarrow \min$

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\Psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

В данной задаче $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$, тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2. \end{cases} \quad (7)$$

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$, следовательно особого управления нет

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -U_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +U_{max}, & \text{при } \psi_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решая систему (7), получим

$$\begin{aligned} \psi_2'' &= \psi_2 \\ \begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3 , получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u .

Пусть $u^* = const$ управление на первом участке траектории до первого переключения $u^* = U_{max}$ или $u^* = U_{min} = -U_{max}$

Решая систему (6), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = u_* \tau + C_0, \\ \theta(\tau) = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} - C_0 - u_* \tau, \\ \omega(\tau) = C_1 e^\tau - C_2 e^{-\tau} - u_*. \end{cases} \quad (9)$$

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (6) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Этап 1. $u = u_*$ начальные условия

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

Из (9) получим

$$\begin{cases} 0 = C_0, \\ 1 = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} - C_0, \\ \Omega_0 = C_1 e^\tau - C_2 e^{-\tau} - u_*. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} m_1(\tau) = u_*\tau, \\ \theta_1(\tau) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) + \frac{1}{2}(e^\tau + e^{-\tau}) - u_*\tau, \\ \omega_1(\tau) = \frac{1}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^\tau + e^{-\tau}) - u_*. \end{cases} \quad (11)$$

Этап 2. $u = -u_*$ начальные условия

$$\theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1); \quad \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1); \quad m(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$

$$\begin{cases} m(\tau_1) = u_*\tau_1, \\ \theta(\tau_1) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*\tau_1, \\ \omega(\tau_1) = \frac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*. \end{cases} \quad (12)$$

Подставим начальные условия для второго этапа в (9), получим

$$\begin{cases} m_2(\tau) = 2u_*\tau_1 - u\tau, \\ \theta_2(\tau) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(2\tau_1 - e^{\tau_1-\tau} + e^{-\tau_1+\tau} - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \frac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(1 - e^{\tau_1-\tau} - e^{-\tau_1+\tau}). \end{cases} \quad (13)$$

Этап 3. $u = u_*$ конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \omega(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

Подставим начальные условия в (9), получим

$$\begin{cases} 0 = u_*\tau_f + C_0, \\ 0 = C_1e_f^\tau + C_2e^{-\tau_f} - C_0 - u_*\tau_f, \\ 0 = C_1e_f^\tau - C_2e^{-\tau_f} - u_*. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} m_3(\tau) = -u_*\tau_f + u_*\tau, \\ \theta_3(\tau) = \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau} - e^{\tau_f-\tau}) - u_*(\tau - \tau_f), \\ \omega_3(\tau) = \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau} + e^{\tau_f-\tau}) - u_*. \end{cases} \quad (15)$$

Теперь найдем решения, учитывая что

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases} \quad (16)$$

Получим

$$\begin{cases} -u_*\tau_f + u_*\tau_2 = 2u_*\tau_1 - u_*\tau_2, \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} - e^{\tau_f-\tau_2}) - u_*(\tau_2 - \tau_f) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(2\tau_1 - e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2} - \tau_2), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} + e^{\tau_f-\tau_2}) - u_* = \frac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(1 - e^{\tau_1-\tau_2} - e^{-\tau_1+\tau_2}). \end{cases} \quad (17)$$

Сократим первое уравнение на u_* , выражение для τ_f из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} - e^{\tau_f-\tau_2}) + u_*(\tau_f + 2(\tau_1 - \tau_2)) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(-e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2}), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} + e^{\tau_f-\tau_2}) - 2u_* = \frac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(-e^{\tau_1-\tau_2} - e^{-\tau_1+\tau_2}). \end{cases} \quad (18)$$

Слагаемое $u_*(\tau_f + 2(\tau_1 - \tau_2))$ обнуляется

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} - e^{\tau_f-\tau_2}) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(-e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2}), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} + e^{\tau_f-\tau_2}) - 2u_* = \frac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(-e^{\tau_1-\tau_2} - e^{-\tau_1+\tau_2}). \end{cases} \quad (19)$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1}, \quad y = e^{\tau_2}, \quad z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \frac{y}{x}, \\ \frac{u_*}{2}\left(\frac{y}{z^2} - \frac{z^2}{y}\right) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - u_*\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right), \\ \frac{u_*}{2}\left(\frac{y}{z^2} + \frac{z^2}{y}\right) - 2u_* = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - u_*\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right). \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} y = zx, \\ \frac{u_*}{2}\left(\frac{zx}{z^2} - \frac{z^2}{zx}\right) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - u_*\left(\frac{zx}{x} - \frac{x}{zx}\right), \\ \frac{u_*}{2}\left(\frac{zx}{z^2} + \frac{z^2}{zx}\right) - 2u_* = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - u_*\left(\frac{zx}{x} + \frac{x}{zx}\right). \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} y = zx, \\ \frac{u_*}{2} \left(\frac{x}{z} - \frac{z}{x} \right) = \frac{u_* + \Omega_0}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) - u_* \left(z - \frac{1}{z} \right), \\ \frac{u_*}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) - 2u_* = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{u_* + \Omega_0}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) - u_* \left(z + \frac{1}{z} \right). \end{cases} \quad (22)$$

Сложим и вычтем 2 и 3 уравнения из (22), получим

$$\begin{cases} y = zx, \\ u_* \frac{z}{x} + 2u_* = \frac{1 - u_* - \Omega_0}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{u_* + \Omega_0 - 1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 \frac{u_*}{z}, \\ u_* \frac{x}{z} - 2u_* = \frac{u_* + \Omega_0 + 1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{u_* + \Omega_0 + 1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2u_* z. \end{cases} \quad (23)$$

Решая систему (23), получим

$$\begin{cases} z = \frac{-1 + 2u_*^2 + 2u_*\Omega_0 + \Omega_0^2 - \sqrt{32u_*^3 + 64u_*^4 + 4u_*^2\Omega_0^2 + 4u_*\Omega_0(\Omega_0^2 - 1) + (\Omega_0^2 - 1)^2}}{2u_*(1 + 5u_* + \Omega_0)}, \\ x = \frac{-5 - 8u_*(2 + 3u_*) + 10u_*\Omega_0 + 5\Omega_0^2 - 3\sqrt{1 + 32u_*^3(1 + 2u_*) - 4u_*\Omega_0 + 2(2u_*^2 - 1)\Omega_0^2 + 4u_*\Omega_0^3 + \Omega_0^4}}{4(1 + 2u_* + \Omega_0)(1 + 5u_* + \Omega_0)}. \end{cases} \quad (24)$$

или

$$\begin{cases} z = \frac{-1 + 2u_*^2 + 2u_*\Omega_0 + \Omega_0^2 + \sqrt{32u_*^3 + 64u_*^4 + 4u_*^2\Omega_0^2 + 4u_*\Omega_0(\Omega_0^2 - 1) + (\Omega_0^2 - 1)^2}}{2u_*(1 + 5u_* + \Omega_0)}, \\ x = \frac{-5 - 8u_*(2 + 3u_*) + 10u_*\Omega_0 + 5\Omega_0^2 + 3\sqrt{1 + 32u_*^3(1 + 2u_*) - 4u_*\Omega_0 + 2(2u_*^2 - 1)\Omega_0^2 + 4u_*\Omega_0^3 + \Omega_0^4}}{4(1 + 2u_* + \Omega_0)(1 + 5u_* + \Omega_0)}. \end{cases} \quad (25)$$

Так как мы ищем τ_f наименьшее, то нужно отобрать наименьшее положительное $z > 1$