Модель восстановления человеком исходной позы после толчка

Романов Андрей Владимирович

МГУ им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления

1 июня 2022 г.

Описание задачи

Рис.: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

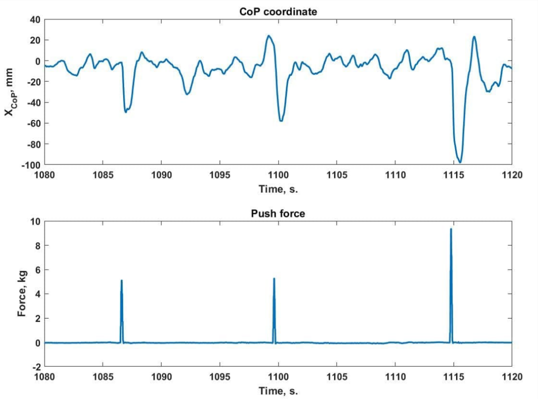

Рис.: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках (данные предоставлены сотрудниками ИМБП РАН)

Задача быстродействия

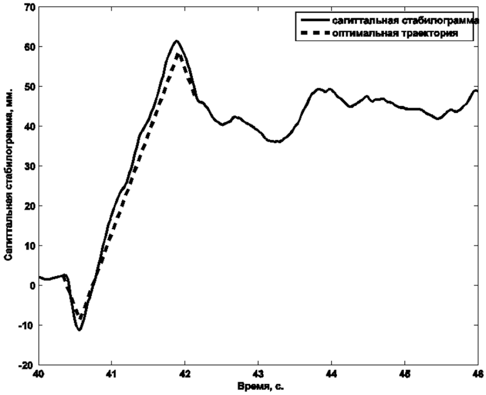

Рис.: Характерный вид сагиттальной стабилограммы при выполнении теста со ступенчатым воздействием

В работе рассматривается задача быстродействия для установки перевернутого маятника в неустойчивое вертикальное положение равновесия. Предполагается сравнение результатов стабилометрических проб, при которых человек возвращается в исходную вертикальную позу после толчка, с решением этой оптимальной задачи для начальных условий, соответствующих моменту времени завершения толчка.

Математическая модель

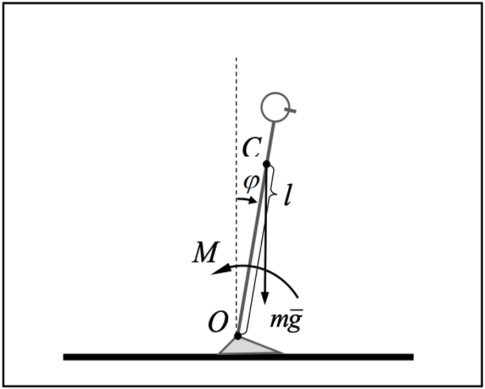

Рис.: Модель перевернутого маятника

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$$\varphi(t) = \varphi_k,\ \dot{\varphi}(t_k) = 0$$

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k$$

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+$$

Переход к безразмерным величинам

$$\theta^{''} = \theta + m; \;\; m^{'} = u$$

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \;\; m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi}$$

Необходимо решение системы перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \;\; \dot{\theta}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0; \;\; m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \;\; \dot{\theta}(\tau_f) = 0; \;\; m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \text{ где } u^- = \frac{U^-}{m_T g l \varphi_* t_*} = -u^+$$

Принцип максимума Понтрягина

Система в форме Коши

$$\begin{cases} \theta^{'} = \omega, \\ \omega^{'} = \theta + m, \\ m^{'} = u. \end{cases} \tag{1}$$

Функция Понтрягина

$$H = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2. \end{cases} \tag{2}$$

Анализ сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases} \tag{3}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u.

Решение системы на 1 этапе

Этап 1. $u = u_*$ начальные условия

$$\theta(0) = 1;\ \omega(0) = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

Решение

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*. \end{cases}$$

Решение системы на 2 этапе

Этап 2. $u = u_*$ начальные условия

$$\theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1);\ \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);\ m(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$

Решение

$$\begin{cases} m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1)\, u_*, \\ \theta_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1} - 1). \end{cases}$$

Решение системы на 3 этапе

Этап 3. $u = -u_*$ конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \omega(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

Решение

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* \left(\tau_f - \tau\right), \\ \theta_3(\tau) = \dfrac{1}{2} u_* \left(-e^{\tau - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau} - 2\tau_f + 2\tau\right), \\ \omega_3(\tau) = u_* - \dfrac{u_*}{2}(e^{\tau - \tau_f} + e^{-\tau + \tau_f}). \end{cases}$$

Сопряжение уравнений

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \dfrac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{-\tau_1 + \tau_2} - e^{\tau_1 - \tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2 - \tau_f} - e^{-\tau_2 + \tau_f}}{2} \right) = 0, \\ \dfrac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_1 + \tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{-\tau_2 + \tau_f}}{2} - 2 \right) = 0. \end{cases}$$

Замена переменных

$$x = e^{\tau_1},\ y = e^{\tau_2},\ z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x}, \\ (\Omega_0 - u_*)\left(xy - \dfrac{x}{y}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{2x^2}{y} + 2y\right) + \dfrac{x}{y} + xy = 0, \\ (\Omega_0 - u_*)\left(xy + \dfrac{x}{y}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^2}{y} + 2y - 4x\right) - \dfrac{x}{y} + xy = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Численные примеры реализации оптимального управления

Построим оптимальную траекторию, учитывая полученные соотношения для управления.
$m_T = 74$кг; $l = 0.88$м; $J = \frac{4ml^2}{3}$кг·м^2

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{4l}{3g}} = 0.346c$$

$u^*_{max} = 1.65$
Характерное значение для $\varphi_* = 0.087$ рад, для $\omega_0 = 0.069$ рад/с.
$\Omega_0 = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = 0.274$
Найдем корни системы (5) при $\theta^{'}(0) = \Omega_0$, $\theta^{'}(0) = 1.3\Omega_0$ и при $\theta^{'}(0) = 0.7\Omega_0$.
При $\theta^{'}(0) = \Omega_0$: $\tau_1 = 2.12; \tau_2 = 4.88; \tau_f = 5.51$;
При $\theta^{'}(0) = 1.3\Omega_0$: $\tau_1 = 2.38, \tau_2 = 5.41, \tau_f = 6.06$;
При $\theta^{'}(0) = 0.7\Omega_0$: $\tau_1 = 2.06, \tau_2 = 4.74, \tau_f = 5.37$.

Зависимость $m[\tau]$

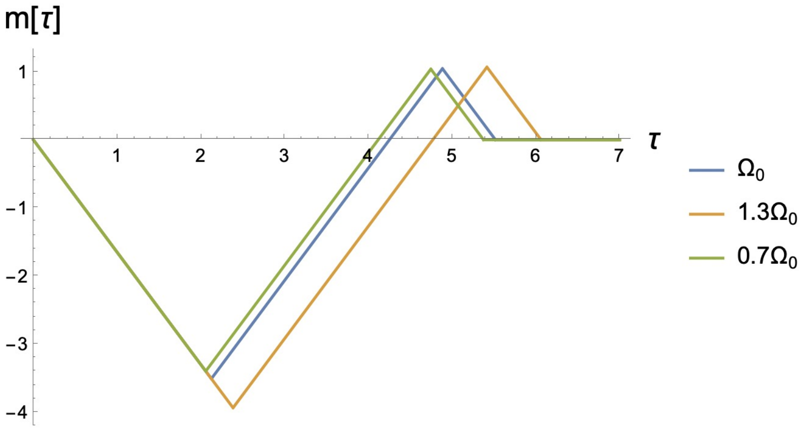

Рис.: Зависимость $m[\tau]$

Зависимость $\Theta[\tau]$

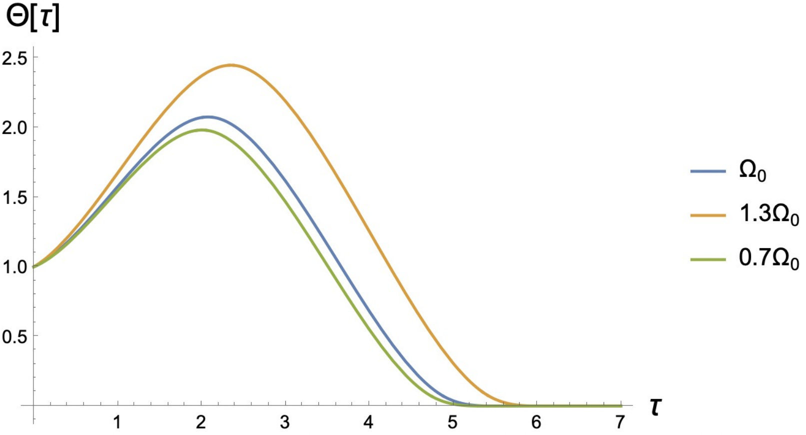

Рис.: Зависимость $\Theta[\tau]$

Зависимость $\omega[\tau]$

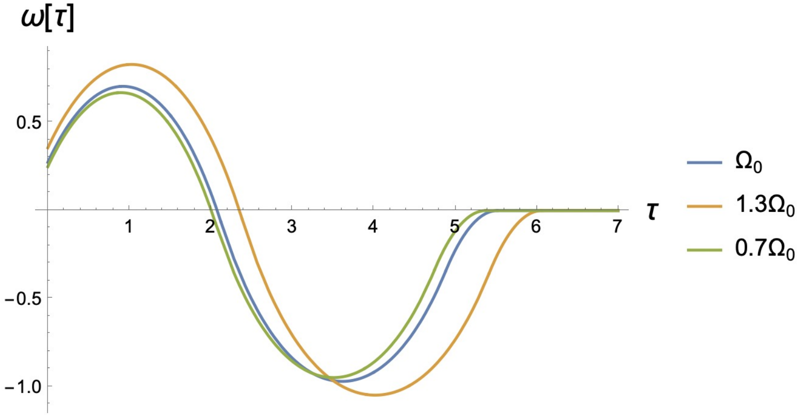

Рис.: Зависимость $\omega[\tau]$

Заключение

В курсовой работе были представлены оптимальные алгоритмы управления движением позой при ступенчатом воздействии, основанные на модели «перевернутого маятника» удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. В задаче ставилось ограничение на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое хорошо качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилометрических исследованиях.
- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка.