Модель восстановления человеком исходной позы после толчка

Романов Андрей Владимирович

МГУ им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления

30 марта 2022 г.

Описание задачи

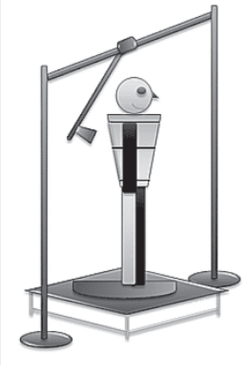

Рис.: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

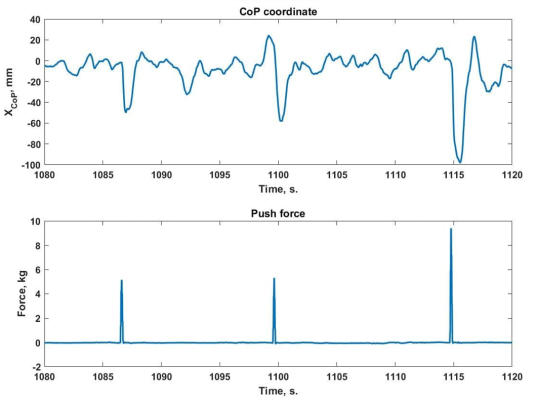

Рис.: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках (данные предоставлены сотрудниками ИМБП РАН)

Задача быстродействия

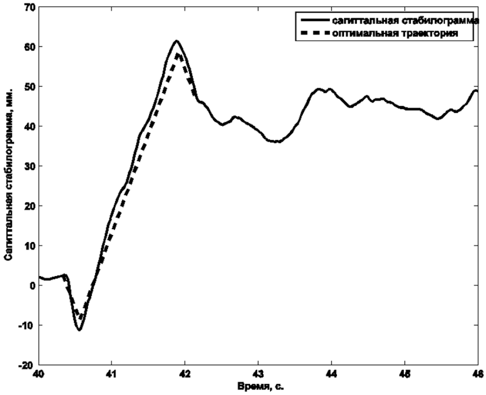

Рис.: Характерный вид сагиттальной стабилограммы при выполнении теста со ступенчатым воздействием

В работе рассматривается задача быстродействия для установки перевернутого маятника в неустойчивое вертикальное положение равновесия. Предполагается сравнение результатов стабилометрических проб, при которых человек возвращается в исходную вертикальную позу после толчка, с решением этой оптимальной задачи для начальных условий, соответствующих моменту времени завершения толчка.

Математическая модель

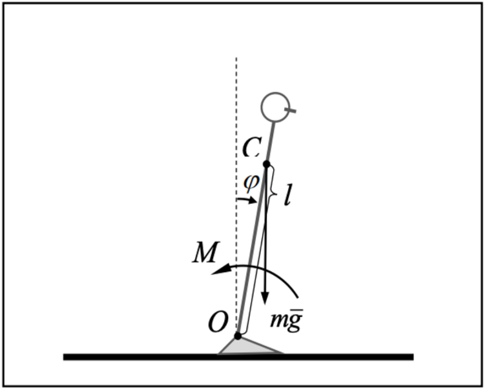

Рис.: Модель перевернутого маятника

$$J\ddot{\varphi} = mgl\varphi + M$$

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$$\varphi(t) = \varphi_k,\ \dot{\varphi}(t_k) = 0$$

$$M(0) = M(t_k) = -mgl\varphi_k$$

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+$$

Переход к безразмерным величинам

$$\theta'' = \theta + m; \;\; m' = u$$

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{mgl\varphi}$$

Необходимо решение системы перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \;\; \dot{\theta}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0; \;\; m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \;\; \dot{\theta}(\tau_f) = 0; \;\; m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq \; u \leq \; u^+, \text{ где } u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_* t_*} = -u^+$$

Принцип максимума Понтрягина

Система в форме Коши

$$\begin{cases} \theta^{'} = \omega, \\ \omega^{'} = \theta + m, \\ m^{'} = u. \end{cases} \tag{1}$$

Функция Понтрягина

$$H = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2. \end{cases} \tag{2}$$

Анализ сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases} \tag{3}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u.

Решение системы на 1 этапе

Этап 1. $u = u_*$ начальные условия

$$\theta(0) = 1;\ \omega(0) = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

Решение

$$\begin{cases} m_1(\tau) = u_*\tau, \\ \theta_1(\tau) = \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + \dfrac{1}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) - u_*\tau, \\ \omega_1(\tau) = \dfrac{1}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) - u_*. \end{cases} \tag{4}$$

Решение системы на 2 этапе

Этап 2. $u = -u_*$ начальные условия

$$\theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1);\ \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);\ m(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$

Решение

$$\begin{cases} m_2(\tau) = 2u_*\tau_1 - u\tau, \\ \theta_2(\tau) = \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \dfrac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(2\tau_1 - e^{\tau_1 - \tau} + e^{-\tau_1 + \tau} - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \dfrac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(1 - e^{\tau_1 - \tau} - e^{-\tau_1 + \tau}). \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы на 3 этапе

Этап 3. $u = u_*$ конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \omega(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

Решение

$$\begin{cases} m_3(\tau) = -u_*\tau_f + u_*\tau, \\ \theta_3(\tau) = \dfrac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau} - e^{\tau_f-\tau}) - u_*(\tau - \tau_f), \\ \omega_3(\tau) = \dfrac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau} + e^{\tau_f-\tau}) - u_*. \end{cases} \tag{6}$$

Сопряжение уравнений

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} - e^{\tau_f-\tau_2}) = \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(-e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2}), \\ \frac{u_*}{2}(e^{-\tau_f+\tau_2} + e^{\tau_f-\tau_2}) - 2u_* = \frac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \frac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(-e^{\tau_1-\tau_2} - e^{-\tau_1+\tau_2}) \end{cases} \quad (8$$

Замена переменных

$$x = e^{\tau_1},\ y = e^{\tau_2},\ z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{u_*}{2}\left(\dfrac{y}{z^2} - \dfrac{z^2}{y}\right) = \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - u_*\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right), \\ \dfrac{u_*}{2}\left(\dfrac{y}{z^2} + \dfrac{z^2}{y}\right) - 2u_* = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - u_*\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Заключение

Используемая литература

- Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление. Москва, Машиностроение, 1968, 764 с.
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, Наука, 1983, 393 с.
- Мостовской А.П. Численные методы и система Mathematica. Мурманск: 2009. - 249 с.