Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико - математический факультет

Кафедра прикладной механики и управления

Курсовая работа

Модель восстановления человеком исходной позы после толчка

Выполнил: студент группы М – 1
Романов Андрей Владимирович

Научный руководитель: к.ф.-м.н.,
Кручинин Павел Анатольевич

Москва, 2022

Содержание

1 Введение

Проба со ступенчатым воздействием является одной из стандартных проб при стабилометрических исследованиях. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью руки или груза, помещенного на подвижном отвесе. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [4]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.

Рис. 1: Схематическое изображние толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной координанты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

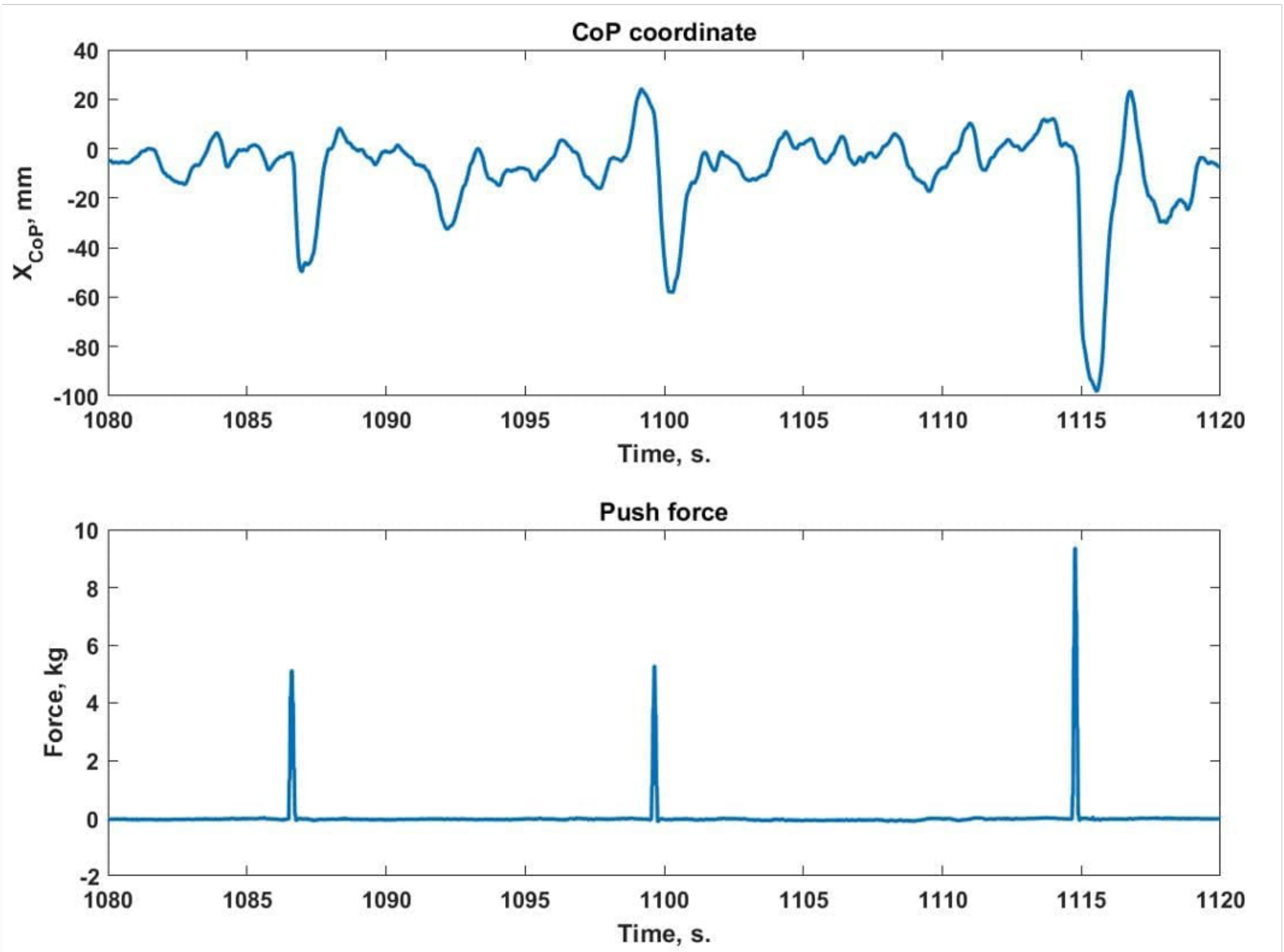

Рис. 2: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

В курсовой работе предполагается рассмотреть возможные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на решении задачи оптимального быстродействия, которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В качестве математической модели используется модель «перевернутого маятника». В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

2 Математическая модель и постановка задачи управления

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника [5] (см. рисунок 3).

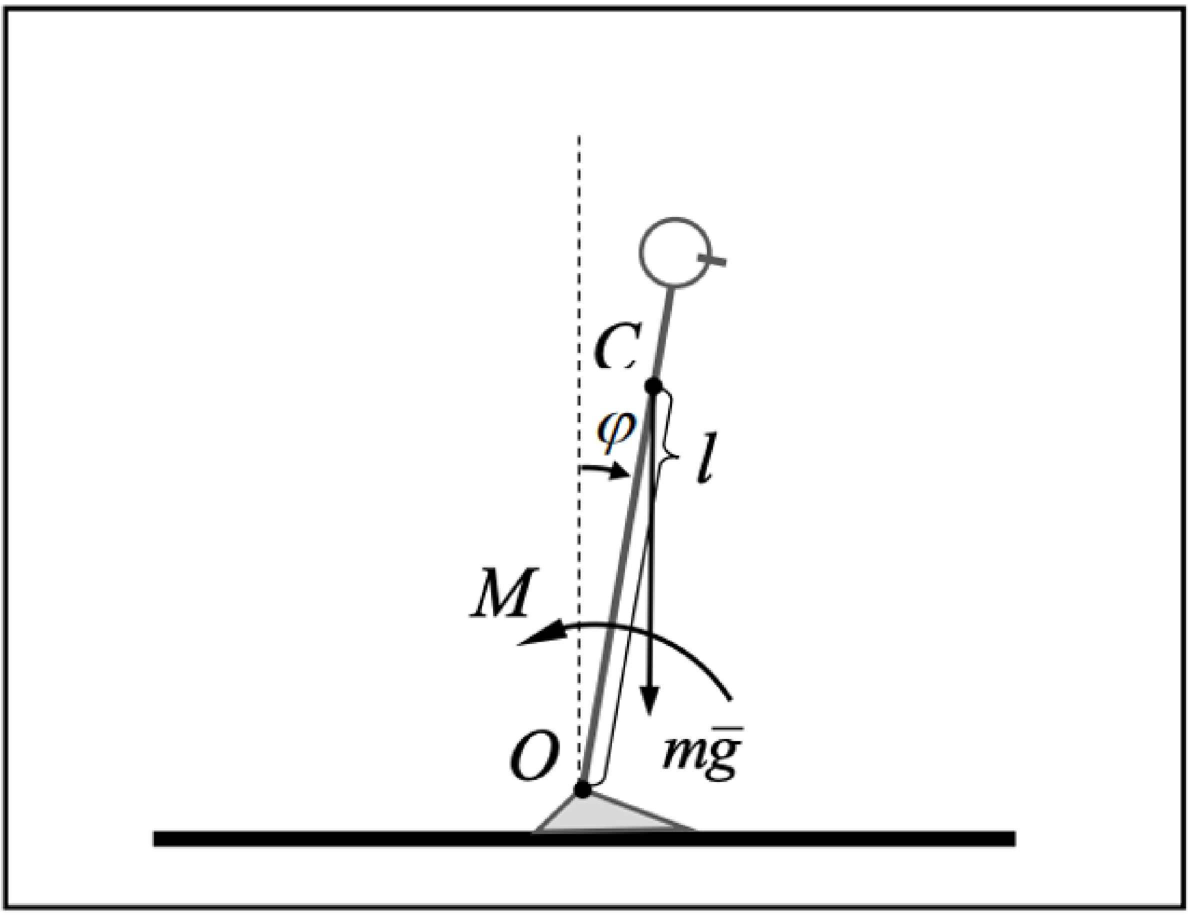

Рис. 3: Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы m, закрепленным шарнирно в точке O, которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке C, удаленной от точки O на расстояние l. Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку O, равен J. Отклонение стержня от вертикали описывается углом φ. Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Момент M, который приложен в точке O к стержню, будем считать управлением.

Запишем уравнение моментов для малых значений угла φ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального положения

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

в конечное положение

$$\varphi(t_k) = \varphi_k,\ \dot{\varphi}(t_k) = 0.$$

Перевод положения тела должен происходить за минимальное время t_k, с помощью изменений значения момента M в голеностопном суставе.

Будем принимать во внимание условия ограниченности скорости изменения момента в голеностопном суставе

$$U^- \leq \dot{M} \leq\ U^+.$$

Будем считать, что за время толчка нервная система человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M\left(t_k\right) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*},\ \ m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*},\ t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением u будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных обезразмеренные уравнения движения примут следующий вид

$$\theta'' = \theta + m;\ m' = u \tag{1}$$

Здесь через m' обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ. Необходимо решение системы (1) перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1;\ \dot{\theta}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \dot{\theta}(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq\ u \leq\ u^+,\ \text{где}$$

$$u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_* t_*},\quad u^+ = \frac{U^+}{mgl\varphi_* t_*}.$$

Далее будем считать, что $u^- = -u^+$

3 Задача оптимального быстродействия при ограничении на величину скорости изменения момента

Выпишем систему в форме Коши

$$\begin{cases} \theta^{'} = \omega, \\ \omega^{'} = \theta + m, \\ m^{'} = u. \end{cases} \tag{2}$$

Проверим управляемость системы (2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det W \neq 0$, значит система полностью управляемая

$|u| < U_{max}$

$$\theta(0) = 1;\ \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

$J = \tau_f \to min$

Для решения задачи оптимального быстродействия будем использовать принцип максимума Понтрягина [1]:

Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$– оптимальный процесс, то существует нетривиальная пара $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ такая, что

- $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))\ \forall t \in T \subset [t_0, t_k]$;
- $\psi(t_k) + \lambda_0(\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y})^T \perp M$ в точке $y^0(t_k)$;
- $H(t) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_k]$.

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\Psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\psi_i^{'} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ i = 1, \ldots, n$$

В данной задаче $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$, тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \psi_1^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \tag{3}$$

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$ следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -U_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +U_{max}, & \text{при } \psi_3 \geq 0 \end{cases}$$

Продифференцируем по безразмерному времени второе уравнение из (3) и подставим в него первое, получим

$$\psi''_2 = \psi_2$$

Решая систему (3), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u.

Пусть $u^* = const$ управление на первом участке траектории до первого переключения $u^* = U_{max}$ или $u^* = U_{min} = -U_{max}$

Решая систему (2), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = \tau u + C_1, \\ \theta(\tau) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left((C_1+C_2+C_3)e^{2\tau} - 2e^{\tau}(\tau u + C_1) + C_1 + C_2 - C_3\right), \\ \omega(\tau) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left((C_1+C_2+C_3)e^{2\tau} - 2e^{\tau}u - C_1 - C_2 + C_3\right). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (2) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Этап 1. $u = -u_*$ начальные условия

$$m(0) = 0;\; \theta(0) = 1;\; \omega(0) = \Omega_0;$$

Из (4) получим

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(C_1\left(e^{\tau}-1\right)^2 + C_2\left(e^{2\tau}+1\right) + C_3e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau}\tau u_*\right), \\ \Omega_0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(C_1\left(e^{2\tau}-1\right) + C_2\left(e^{2\tau}-1\right) + C_3e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau}u_*\right). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -u_* + \Omega_0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в (4)

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta(\tau_1) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(\left(e^{2\tau}-1\right)\Omega_0 + e^{2\tau} + \left(2e^{\tau}\tau - e^{2\tau} + 1\right)u_* + 1\right), \\ \omega(\tau_1) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(\left(e^{2\tau}+1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau}-1\right)\left(-e^{\tau} + \left(e^{\tau}-1\right)u_* - 1\right)\right). \end{cases}$$

Этап 2. $u = u_*$ начальные условия

$$m(\tau_1) = m_1(\tau_1);\; \theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1);\; \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);$$

$$
\begin{cases}
m(\tau_1) = -\tau_1 u_*, \\
\theta(\tau_1) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1} \left(\left(e^{2\tau_1} - 1 \right) \Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1} + 1 \right) u_* + 1 \right), \\
\omega(\tau_1) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1} \left(\left(e^{2\tau_1} + 1 \right) \Omega_0 - \left(e^{\tau_1} - 1 \right) \left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1} - 1 \right) u_* - 1 \right) \right).
\end{cases}
$$

Находим константы

$$
\begin{cases}
-\tau_1 u_* = \tau_1 u_* + C_1, \\
\dfrac{1}{2} e^{-\tau_1} \left(\left(e^{2\tau_1} - 1 \right) \Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1} + 1 \right) u_* + 1 \right) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1} \left(C_1 \left(e^{\tau_1} - 1 \right)^2 + C_2 e^{2 \cdots} \right. \\
\dfrac{1}{2} e^{-\tau_1} \left(\left(e^{2\tau_1} + 1 \right) \Omega_0 - \left(e^{\tau_1} - 1 \right) \left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1} - 1 \right) u_* - 1 \right) \right) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1} \left(C_1 \left(e^{2\tau_1} - 1 \right) + C_2 \cdots \right.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
C_1 = -2\tau_1 u_*, \\
C_2 = -e^{-\tau_1} \left(-e^{\tau_1} + e^{2\tau_1} u_* - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* - u_* \right), \\
C_3 = e^{-\tau_1} \left(e^{\tau_1}\Omega_0 - e^{\tau_1} u_* + e^{2\tau_1} u_* + u_* \right).
\end{cases}
$$

Подставим начальные условия для второго этапа в (4), получим

$$
\begin{cases}
m_2(\tau) = \left(\tau - 2\tau_1 \right) u_*, \\
\theta_2(\tau) = \dfrac{1}{2} \left(\left(e^{\tau} - e^{-\tau} \right) \Omega_0 + e^{-\tau} + e^{\tau} + \left(-2\tau + e^{-\tau} - e^{\tau} + 2e^{\tau-\tau_1} - 2e^{\tau_1-\tau} + 4\tau_1 \right) u_* \right), \\
\omega_2(\tau) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau-\tau_1} \left(e^{\tau_1} \left(e^{2\tau} + 1 \right) \Omega_0 + e^{\tau_1} \left(e^{2\tau} - 1 \right) - \left(-2e^{2\tau} + e^{\tau_1} - 2e^{2\tau_1} + 2e^{\tau+\tau_1} + e^{2 \cdots} \right. \right.
\end{cases}
$$

Этап 3. $u = u_*$ конечные условия

$$
m(\tau_f) = 0;\ \theta(\tau_f) = 0;\ \omega(\tau_f) = 0;
$$

Подставим начальные условия в (4), получим

$$
\begin{cases}
0 = C_1 - \tau_f u_*, \\
0 = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_f} \left(C_1 \left(e^{\tau_f} - 1 \right)^2 + C_2 \left(e^{2\tau_f} + 1 \right) + C_3 e^{2\tau_f} - C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\tau_f \right), \\
0 = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_f} \left(C_1 \left(e^{2\tau_f} - 1 \right) + C_2 \left(e^{2\tau_f} - 1 \right) + C_3 e^{2\tau_f} + C_3 + 2u_* e^{\tau_f} \right).
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} C_1 = u_* \tau_f, \\ C_1 = \dfrac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} \left(-2e^{\tau_f}\tau_f + e^{2\tau_f} - 1\right), \\ C_2 = -\dfrac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} \left(e^{2\tau_f} + 1\right). \end{cases}$$

Тогда решение на этом этапе имеет вид

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* \left(\tau_f - \tau\right), \\ \theta_3(\tau) = \dfrac{1}{2} u_* \left(-e^{\tau - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau} - 2\tau_f + 2\tau\right), \\ \omega_3(\tau) = -\dfrac{1}{2} u_* e^{-\tau_f - \tau} \left(e^{\tau} - e^{\tau_f}\right)^2. \end{cases}$$

Теперь найдем решения, учитывая что

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \left(\tau_2 - 2\tau_1\right) u_* = u_* \left(\tau_f - \tau_2\right), \\ \dfrac{1}{2}\left(\left(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}\right)\Omega_0 + e^{-\tau_2} + e^{\tau_2} + \left(4\tau_1 - 2e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_2} - e^{\tau_2} + 2e^{\tau_2 - \tau_1} - 2\tau_2\right) u_*\right) = \\ \qquad = \dfrac{1}{2} u_* \left(-e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau_2} - 2\tau_f + 2\tau \right. \\ \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1 - \tau_2}\left(e^{\tau_1}\left(e^{2\tau_2} + 1\right)\Omega_0 + e^{\tau_1}\left(e^{2\tau_2} - 1\right) - \left(e^{\tau_1} - 2e^{2\tau_1} - 2e^{2\tau_2} + 2e^{\tau_1 + \tau_2} + e^{\tau_1 + 2\tau_2}\right) u_* \right. \\ \qquad = -\dfrac{1}{2} u_* e^{-\tau_f - \tau_2} \left(e^{\tau_2} - e^{\tau} \right. \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на u_*, выражение для τ_f из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \dfrac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(-e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_1 + \tau_2}) = \\ \qquad = \dfrac{u_*}{2}(e^{-\tau_f + \tau_2} - e^{\tau_f - \tau_2}) + u_*(\tau_f + 2(\tau_1 - \tau_2)) \\ \dfrac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(-e^{\tau_1 - \tau_2} - e^{-\tau_1 + \tau_2}) = \\ \qquad = \dfrac{u_*}{2}(e^{-\tau_f + \tau_2} + e^{\tau_f - \tau_2}) - 2u_*. \end{cases}$$

Слагаемое $u_*(\tau_f + 2(\tau_1 - \tau_2))$ обнуляется

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \dfrac{1}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) - u_*(-e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_1 + \tau_2}) = \\ \qquad = \dfrac{u_*}{2}(e^{-\tau_f + \tau_2} - e^{\tau_f - \tau_2}), \\ \dfrac{1}{2}(e^{\tau_1} - e^{-\tau_1}) + \dfrac{u_* + \Omega_0}{2}(e^{\tau_1} + e^{-\tau_1}) + u_*(-e^{\tau_1 - \tau_2} - e^{-\tau_1 + \tau_2}) = \\ \qquad = \dfrac{u_*}{2}(e^{-\tau_f + \tau_2} + e^{\tau_f - \tau_2}) - 2u_*. \end{cases} \tag{5}$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1}, \ y = e^{\tau_2}, \ z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{1}{2}\left(u_*\left(\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x} - y + \dfrac{1}{y}\right) + \left(y - \dfrac{1}{y}\right)\Omega_0 + y + \dfrac{1}{y}\right) = 0, \\ \dfrac{u_*\left(\frac{y^2}{x^2} + x^2 + \frac{2y^2}{x} + 2x - y^2 - 4y - 1\right) + \left(y^2 + 1\right)\Omega_0 + y^2 - 1}{2y} = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему к виду

4 Численные примеры реализации оптимального управления

Построим оптимальную траекторию, учитывая полученные соотношения для управления.

$m_T = 74$кг; $l = 0.88$м; $J = \frac{4ml^2}{3}$кг·м^2

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{4l}{3g}} = 0.346c$$

$dt = 0.2$; $u^*_{max} = 1.65$ $\Omega_0 = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \frac{-t_* \cdot \varphi_*}{\varphi_* \cdot dt} = \frac{t_*}{dt} = -1.38$

Численно решим систему (5) используя пакет Methematica, получим $\tau_1 = 0.079; \tau_2 = 0.907; \tau_f = 1.654$.

Для полученных значений τ_1, τ_2, τ_f построим графики решений системы (2).

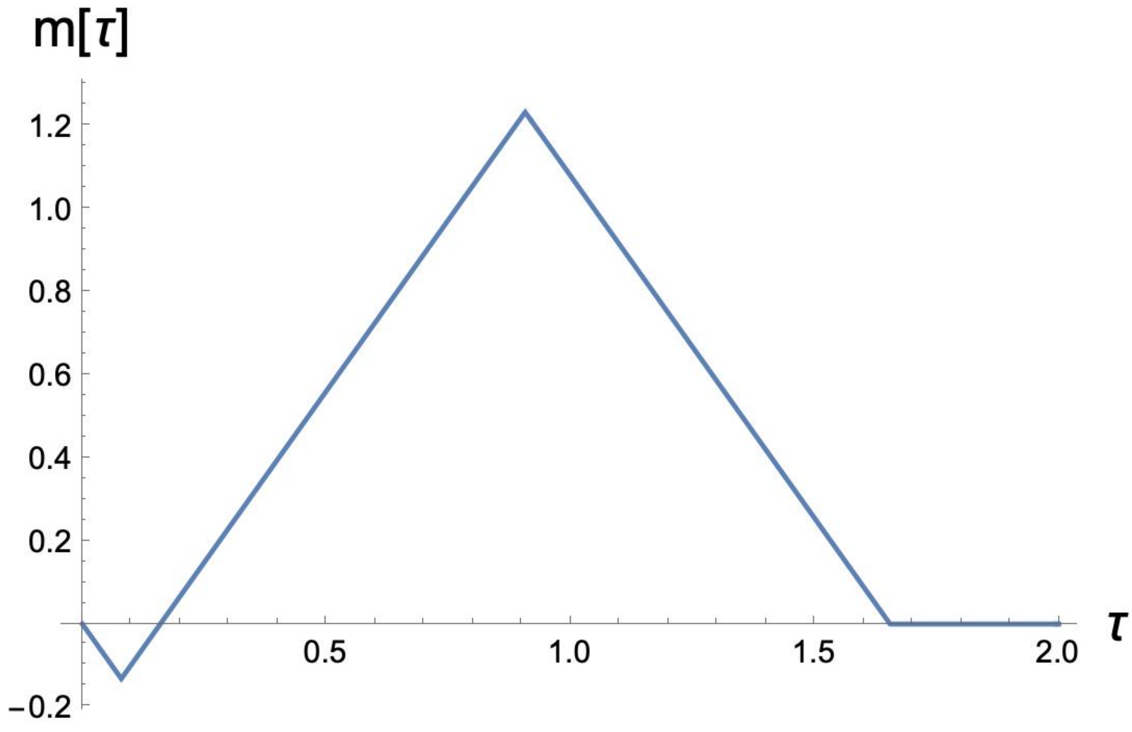

Рис. 4: Зависимость $m[\tau]$

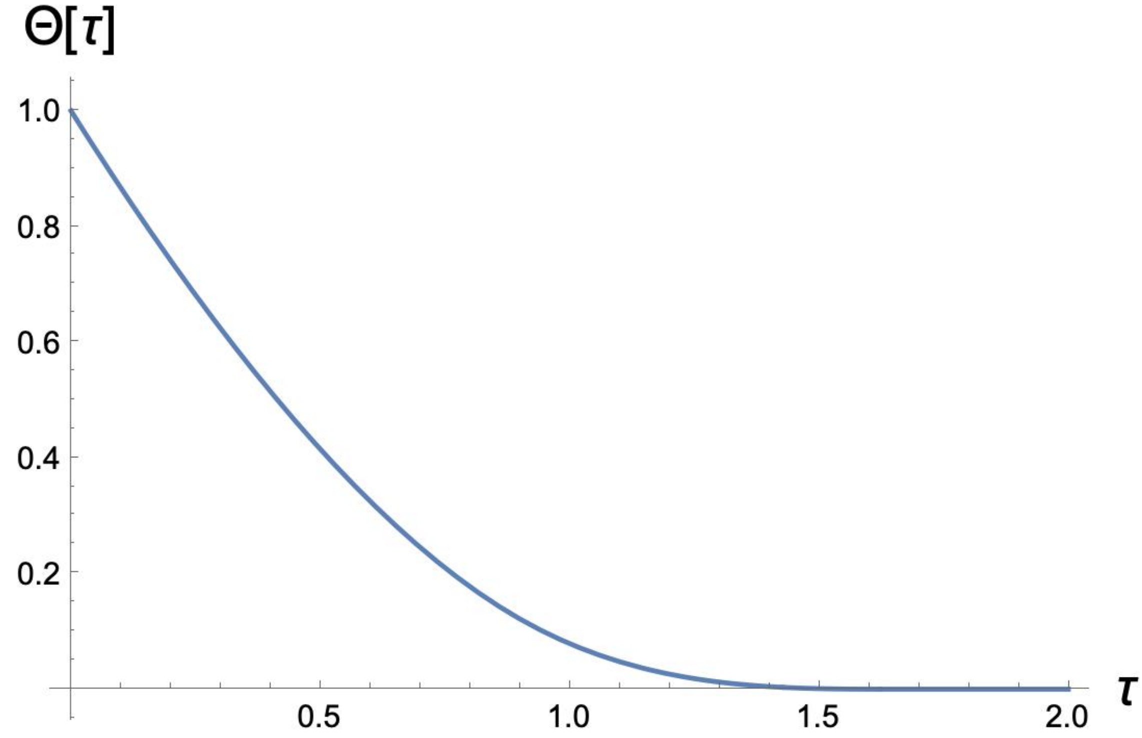

Рис. 5: Зависимость $\Theta[\tau]$

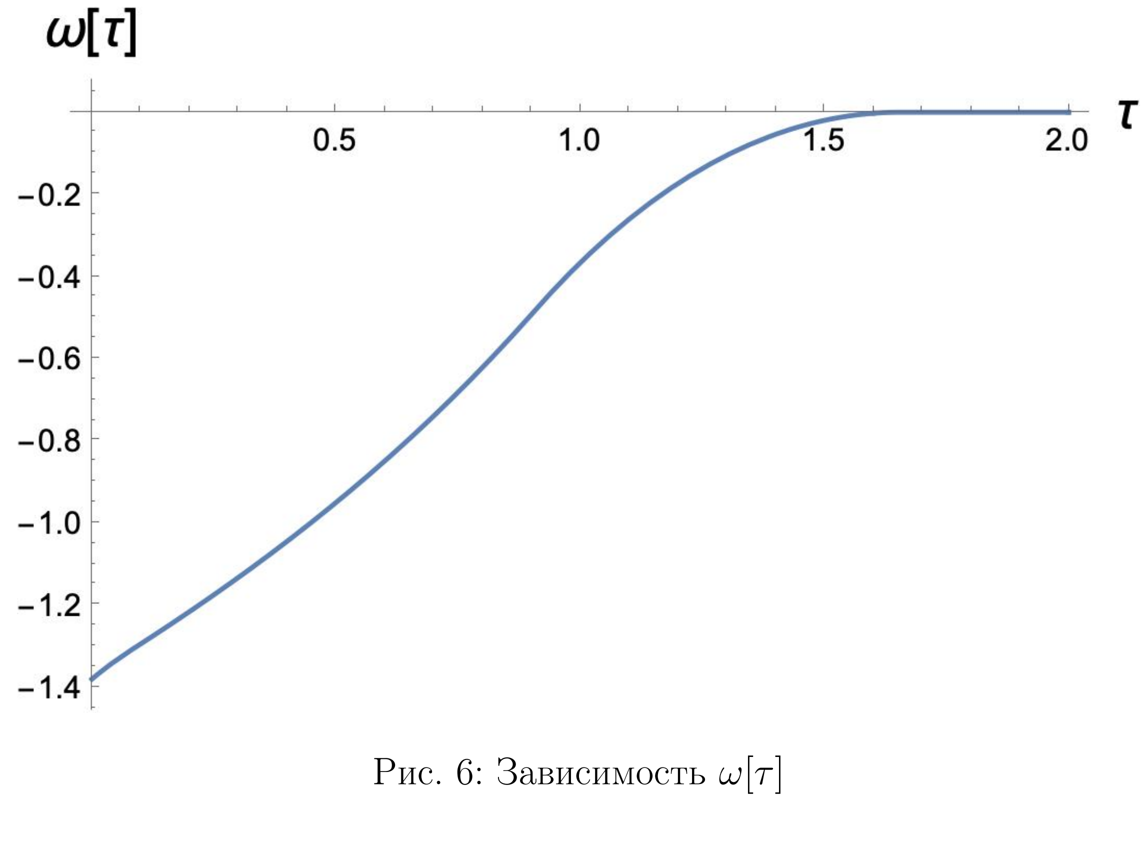

Рис. 6: Зависимость $\omega[\tau]$

5 Заключение

В данной работе была рассмотрена задача оптимального управления аналитиического решения не получилось, но есть численное.

Список используемой литературы

[1] Александров В.В. Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике, Издательство Московского университета, 2009, 234 с.

[2] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, Наука, 1983, 393 с.

[3] Кручинин П.А. Анализ результатов стабилометрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.

[4] П. А. Кручинин и Е. А. Касаткин, Изв. ЮФУ. Техн. науки 10 (159), 254 (2014).

[5] М. Атанс и П. Фалб, Оптимальное управление (Машиностроение, М., 1968).