

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.  
ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ



## Курсовая работа

Модель восстановления человеком исходной позы после  
толчка

Выполнил: студент группы М – 1  
Романов Андрей Владимирович

Научный руководитель: к.ф.-м.н.,  
Кручинин Павел Анатольевич

Москва, 2022

# Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель и постановка задачи управления	5
3	Задача оптимального быстродействия при ограничении на величину скорости изменения момента	8
4	Численные примеры реализации оптимального управления	13
5	Заключение	15
	Список используемой литературы	16

# 1 Введение

В литературе встречается решение задач оптимального быстродействия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Проба со ступенчатым воздействием является одной из стандартных проб при стабилметрических исследованиях [3, 4]. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, после толчка в спину, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью руки или груза, помещенного на подвижном отвесе. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [5, 6]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.



Рис. 1: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной координаты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

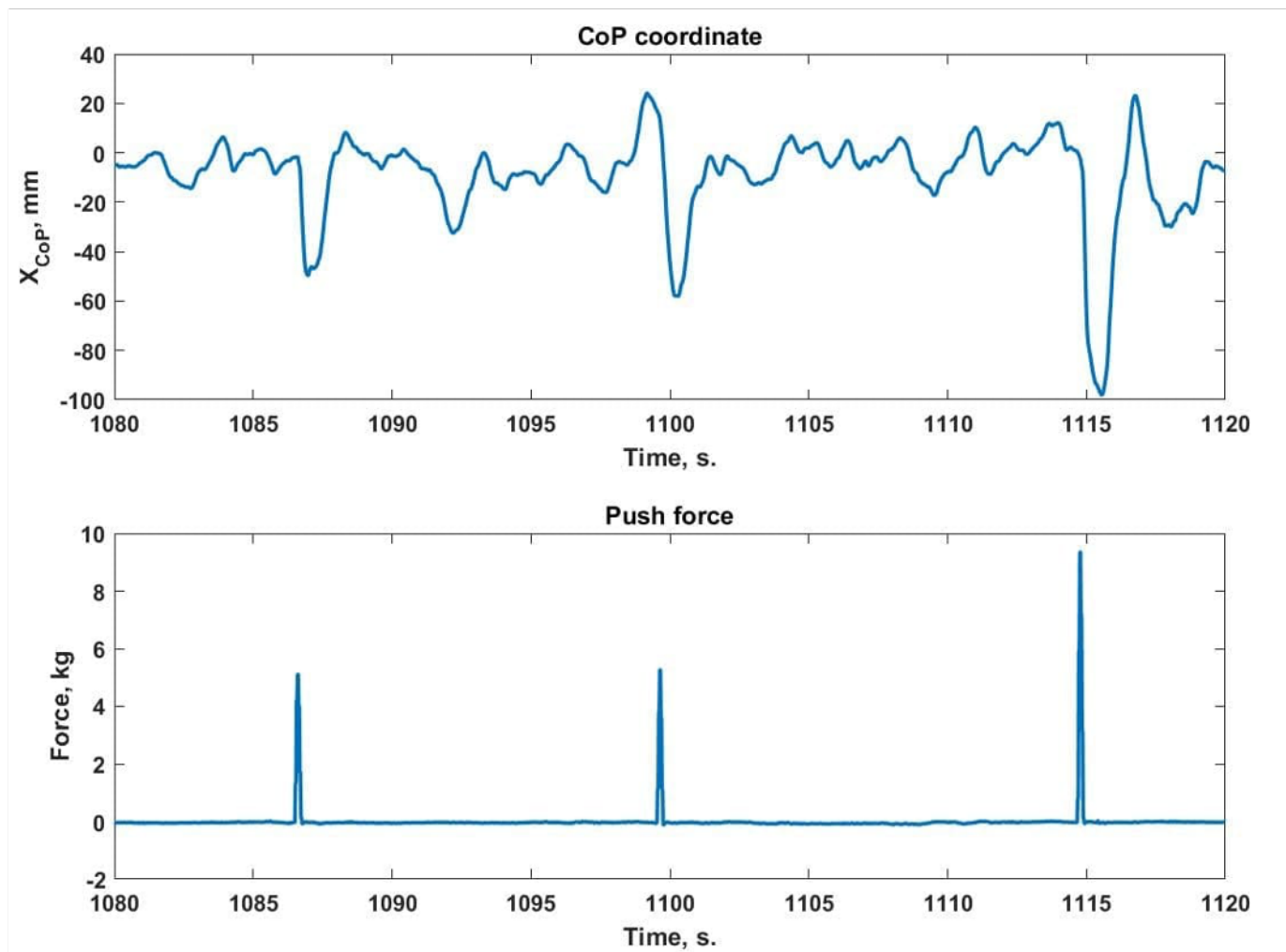


Рис. 2: Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

В курсовой работе предполагается рассмотреть возможные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на решении задачи оптимального быстрогодействия, которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В качестве математической модели используется модель «перевернутого маятника»[5, 6, 7]. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

## 2 Математическая модель и постановка задачи управления

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 3).

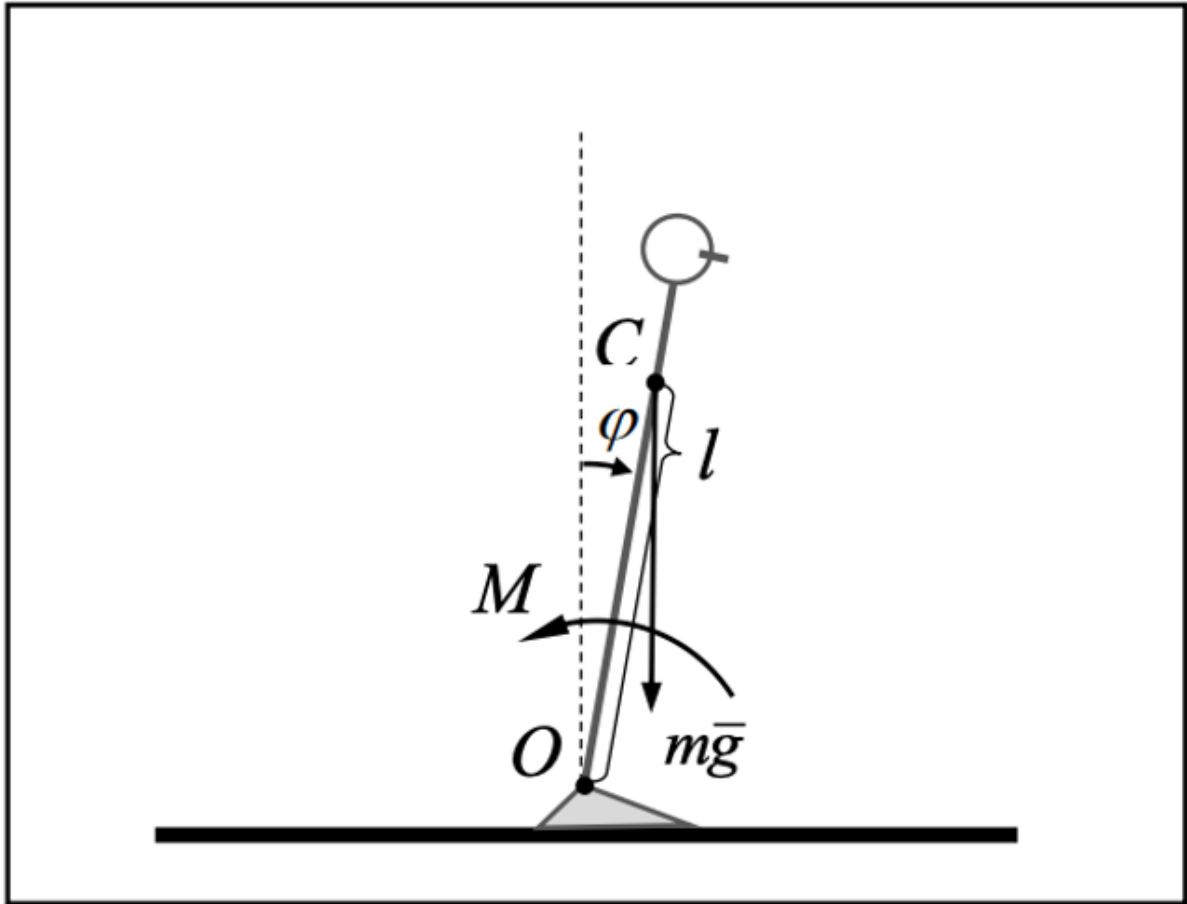


Рис. 3: Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы  $m$ , закрепленным шарнирно в точке  $O$ , которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке  $C$ , удаленной от точки  $O$  на расстояние  $l$ . Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку  $O$ , равен  $J$ . Отклонение стержня от вертикали описывается углом  $\varphi$ . Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Скорость изме-

нения момента  $M$ , который приложен в точке  $O$  к стержню, будем считать управлением.

Уравнение моментов для малых значений угла  $\varphi$  и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального состояния

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

в конечное состояние

$$\varphi(t_k) = \varphi_k, \dot{\varphi}(t_k) = 0.$$

Перевод состояния тела должен происходить за минимальное время  $t_k$ , с помощью изменений значения  $\dot{M}$  в голеностопном суставе.

Будем принимать во внимание условия ограниченности скорости изменения момента в голеностопном суставе

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+.$$

Будем считать, что за время толчка нервная система человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы  $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением  $u$  будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных безразмерные уравнения движения примут следующий вид

$$\theta'' = \theta + m; \quad m' = u \quad (1)$$

Здесь через  $m'$  обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ . Необходимо решение системы (1) перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \quad \theta'(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \theta'(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \quad \text{где}$$

$$u^- = \frac{U^-}{mgl\varphi_*t_*}, \quad u^+ = \frac{U^+}{mgl\varphi_*t_*}.$$

Далее будем считать, что  $u^- = -u^+$

### 3 Задача оптимального быстрогодействия при ограничении на величину скорости изменения момента

Выпишем систему в форме Коши

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \quad (2)$$

$$|u| < U_{max}$$

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \theta'(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

$$J = \tau_f \rightarrow \min$$

Для решения задачи оптимального быстрогодействия будем использовать принцип максимума Понтрягина [8]:

Если  $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$  — оптимальный процесс, то существует нетривиальная пара  $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$  такая, что

- $\max_{u(t) \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \quad \forall t \in T \subseteq [t_0, t_k^0];$
- $\psi(t_k^0) + \lambda_0 \left( \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y} \right)^T \perp M$  в точке  $y^0(t_k^0);$
- $\mathcal{H} = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$  при  $t \in [t_0, t_k^0].$

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\Psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

В данной задаче  $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$ , тогда сопряженная система примет



вид

$$\begin{cases} \psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2' = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3' = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \quad (3)$$

При  $\psi_3 \equiv 0$  следует, что  $\psi_2 \equiv 0$  и  $\psi_1 \equiv 0$  следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понtryгина

$$u = \begin{cases} -U_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +U_{max}, & \text{при } \psi_3 \geq 0 \end{cases}$$

Продифференцируем по безразмерному времени второе уравнение из (3) и подставим в него первое, получим

$$\psi''_2 = \psi_2$$

Решая систему (3), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения  $\psi_3(\tau) = 0$ , для различной комбинации коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$ , получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений  $u$ .

Пусть  $u^* = const$  управление на первом участке траектории до первого переключения  $u^* = U_{max}$  или  $u^* = U_{min} = -U_{max}$

Решая систему (2), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = \tau u + C_1, \\ \theta(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau} ((C_1 + C_2 + C_3) e^{2\tau} - 2e^\tau (\tau u + C_1) + C_1 + C_2 - C_3), \\ \omega(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau} ((C_1 + C_2 + C_3) e^{2\tau} - 2e^\tau u - C_1 - C_2 + C_3). \end{cases} \quad (4)$$

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени  $\tau =$

$\tau_1$ , а второе в момент времени  $\tau = \tau_2$ . Рассмотрим систему (2) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Этап 1.  $u = -u_*$  начальные условия

$$m(0) = 0; \theta(0) = 1; \omega(0) = \Omega_0;$$

Из (4) получим

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \frac{1}{2}e^{-\tau} \left( C_1 (e^\tau - 1)^2 + C_2 (e^{2\tau} + 1) + C_3 e^{2\tau} - C_3 + 2e^\tau \tau u_* \right), \\ \Omega_0 = \frac{1}{2}e^{-\tau} \left( C_1 (e^{2\tau} - 1) + C_2 (e^{2\tau} - 1) + C_3 e^{2\tau} + C_3 + 2e^\tau u_* \right). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -u_* + \Omega_0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в (4)

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta(\tau_1) = \frac{1}{2}e^{-\tau} \left( (e^{2\tau} - 1) \Omega_0 + e^{2\tau} + (2e^\tau \tau - e^{2\tau} + 1) u_* + 1 \right), \\ \omega(\tau_1) = \frac{1}{2}e^{-\tau} \left( (e^{2\tau} + 1) \Omega_0 - (e^\tau - 1) (-e^\tau + (e^\tau - 1) u_* - 1) \right). \end{cases}$$

Этап 2.  $u = u_*$  начальные условия

$$m(\tau_1) = m_1(\tau_1); \theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1); \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);$$

$$\begin{cases} m(\tau_1) = -\tau_1 u_*, \\ \theta(\tau_1) = \frac{1}{2}e^{-\tau_1} \left( (e^{2\tau_1} - 1) \Omega_0 + e^{2\tau_1} + (2e^{\tau_1} \tau_1 - e^{2\tau_1} + 1) u_* + 1 \right), \\ \omega(\tau_1) = \frac{1}{2}e^{-\tau_1} \left( (e^{2\tau_1} + 1) \Omega_0 - (e^{\tau_1} - 1) (-e^{\tau_1} + (e^{\tau_1} - 1) u_* - 1) \right). \end{cases}$$

Находим константы интегрирования

$$\begin{cases} -\tau_1 u_* = \tau_1 u_* + C_1, \\ \frac{1}{2} e^{-\tau_1} ((e^{2\tau_1} - 1) \Omega_0 + e^{2\tau_1} + (2e^{\tau_1} \tau_1 - e^{2\tau_1} + 1) u_* + 1) = \frac{1}{2} e^{-\tau_1} (C_1 (e^{\tau_1} - 1)^2 + C_2 e^{2\tau_1}), \\ \frac{1}{2} e^{-\tau_1} ((e^{2\tau_1} + 1) \Omega_0 - (e^{\tau_1} - 1) (-e^{\tau_1} + (e^{\tau_1} - 1) u_* - 1)) = \frac{1}{2} e^{-\tau_1} (C_1 (e^{2\tau_1} - 1) + C_2 e^{2\tau_1}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2\tau_1 u_*, \\ C_2 = -e^{-\tau_1} (-e^{\tau_1} + e^{2\tau_1} u_* - 2e^{\tau_1} \tau_1 u_* - u_*), \\ C_3 = e^{-\tau_1} (e^{\tau_1} \Omega_0 - e^{\tau_1} u_* + e^{2\tau_1} u_* + u_*). \end{cases}$$

Подставим начальные условия для второго этапа в (4), получим

$$\begin{cases} m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1) u_*, \\ \theta_2(\tau) = \frac{1}{2} ((e^\tau - e^{-\tau}) \Omega_0 + e^{-\tau} + e^\tau + (-2\tau + e^{-\tau} - e^\tau + 2e^{\tau-\tau_1} - 2e^{\tau_1-\tau} + 4\tau_1) u_*), \\ \omega_2(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau-\tau_1} (e^{\tau_1} (e^{2\tau} + 1) \Omega_0 + e^{\tau_1} (e^{2\tau} - 1) - (-2e^{2\tau} + e^{\tau_1} - 2e^{2\tau_1} + 2e^{\tau+\tau_1} + e^{2\tau_1})). \end{cases}$$

Этап 3.  $u = u_*$  конечные условия

$$m(\tau_f) = 0; \quad \theta(\tau_f) = 0; \quad \omega(\tau_f) = 0;$$

Подставим начальные условия в (4), получим

$$\begin{cases} 0 = C_1 - \tau_f u_*, \\ 0 = \frac{1}{2} e^{-\tau_f} (C_1 (e^{\tau_f} - 1)^2 + C_2 (e^{2\tau_f} + 1) + C_3 e^{2\tau_f} - C_3 + 2u_* e^{\tau_f} \tau_f), \\ 0 = \frac{1}{2} e^{-\tau_f} (C_1 (e^{2\tau_f} - 1) + C_2 (e^{2\tau_f} - 1) + C_3 e^{2\tau_f} + C_3 + 2u_* e^{\tau_f}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = u_* \tau_f, \\ C_2 = \frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} (-2e^{\tau_f} \tau_f + e^{2\tau_f} - 1), \\ C_3 = -\frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} (e^{2\tau_f} + 1). \end{cases}$$

Тогда решение на этом этапе имеет вид

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* (\tau_f - \tau), \\ \theta_3(\tau) = \frac{1}{2} u_* (-e^{\tau - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau} - 2\tau_f + 2\tau), \\ \omega_3(\tau) = -\frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f - \tau} (e^\tau - e^{\tau_f})^2. \end{cases}$$

Теперь найдем решения, учитывая что

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} (\tau_2 - 2\tau_1) u_* = u_* (\tau_f - \tau_2), \\ \frac{1}{2} ((e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) \Omega_0 + e^{-\tau_2} + e^{\tau_2} + (4\tau_1 - 2e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_2} - e^{\tau_2} + 2e^{\tau_2 - \tau_1} - 2\tau_2) u_*) = \\ = \frac{1}{2} u_* (-e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau_2} - 2\tau_f + 2\tau_2), \\ \frac{1}{2} e^{-\tau_1 - \tau_2} (e^{\tau_1} (e^{2\tau_2} + 1) \Omega_0 + e^{\tau_1} (e^{2\tau_2} - 1) - (e^{\tau_1} - 2e^{2\tau_1} - 2e^{2\tau_2} + 2e^{\tau_1 + \tau_2} + e^{\tau_1 + 2\tau_2}) u_*) = \\ = -\frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f - \tau_2} (e^{\tau_2} - e^{\tau_f})^2. \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на  $u_*$ , выражение для  $\tau_f$  из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \frac{u_* (e^{\tau_2 - \tau_f} - e^{\tau_f - \tau_2} - 2e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_2} - e^{\tau_2} + 2e^{\tau_2 - \tau_1}) + (e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) \Omega_0 + e^{-\tau_2} + e^{\tau_2}}{2} = 0, \\ \frac{e^{-\tau_2} (u_* (e^{2\tau_2 - \tau_f} + e^{\tau_f} + 2e^{\tau_1} - 4e^{\tau_2} - e^{2\tau_2} + 2e^{2\tau_2 - \tau_1} - 1) + (e^{2\tau_2} + 1) \Omega_0 + e^{2\tau_2} - 1)}{2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1}, \quad y = e^{\tau_2}, \quad z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \frac{y}{x}, \\ \frac{1}{2} \left( u_* \left( \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2} - \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} - y + \frac{1}{y} \right) + \left( y - \frac{1}{y} \right) \Omega_0 + y + \frac{1}{y} \right) = 0, \\ \frac{u_* \left( \frac{y^2}{x^2} + x^2 + \frac{2y^2}{x} + 2x - y^2 - 4y - 1 \right) + (y^2 + 1) \Omega_0 + y^2 - 1}{2y} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Привести систему (6) к полиномиальному виду, как это сделано в работах [5, 9], не удалось, поэтому дальнейший анализ задачи проведем с использованием численных методов решения уравнений.

## 4 Численные примеры реализации оптимального управления

Построим оптимальную траекторию, учитывая полученные соотношения для управления.

$$m_T = 74 \text{ кг}; \quad l = 0.88 \text{ м}; \quad J = \frac{4ml^2}{3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{4l}{3g}} = 0.346 \text{ с}$$

Значение  $u_{max}^* = 1.65$  уже было подсчитано в работе [9]. Характерное значение для  $\varphi_* = 0.087$  рад, для  $\omega_0 = 0.069$  рад/с.

$$\Omega_0 = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = 0.274$$

Численно решим систему (6) используя пакет Wolfram Mathematica и функцию NSolve, которая ищет все корни системы полиномиальных уравнений. Также сделаем отбор корней из условия, что  $x > 1, y > 1, z > 1$ . Получим  $\tau_1 = 2.12; \tau_2 = 4.88; \tau_f = 5.51$ . Также найдем корни системы (6) при  $\Omega_0 = 1.3\Omega_0$  и при  $\Omega_0 = 0.7\Omega_0$ .

При  $\Omega_0 = \Omega_0$ :  $\tau_1 = 2.12; \tau_2 = 4.88; \tau_f = 5.51$ ;

При  $\Omega_0 = 1.3\Omega_0$ :  $\tau_1 = -0.168, \tau_2 = 0.600, \tau_f = 1.537$ ;

При  $\Omega_0 = 0.7\Omega_0$ :  $\tau_1 = 0.165, \tau_2 = 1.025, \tau_f = 1.720$ .

Для полученных значений  $\tau_1, \tau_2, \tau_f$  построим графики решений системы (2).

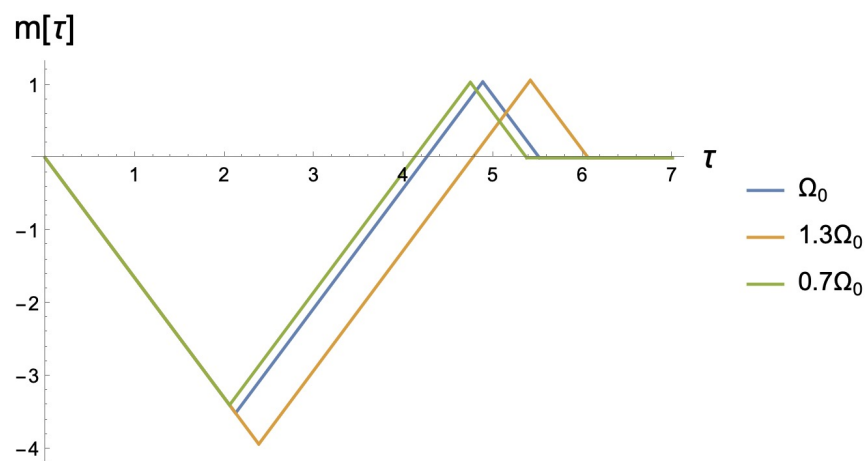


Рис. 4: Зависимость  $m[\tau]$

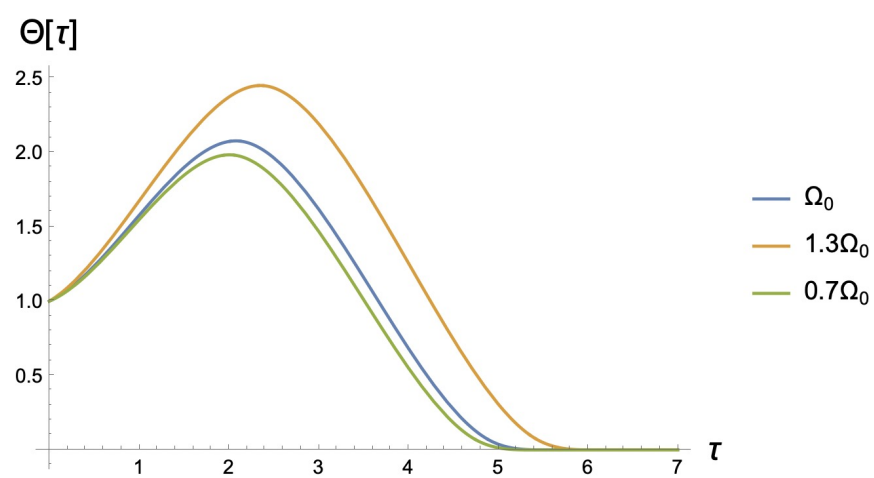


Рис. 5: Зависимость  $\Theta[\tau]$

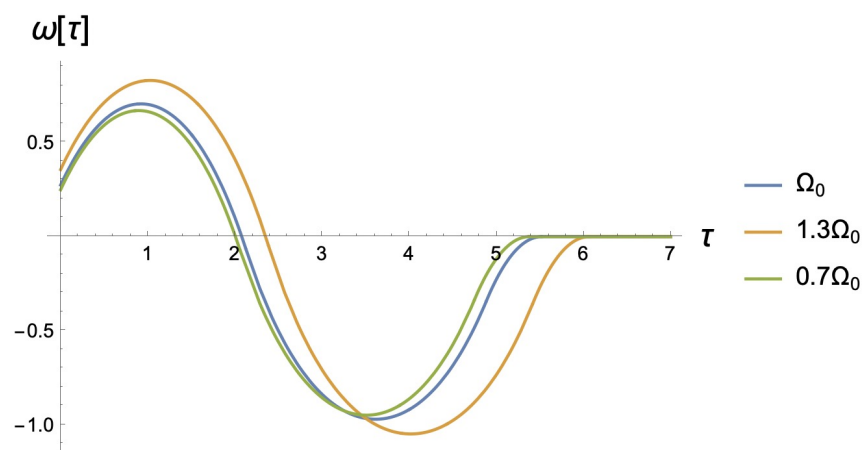


Рис. 6: Зависимость  $\omega[\tau]$

## 5 Заключение

В курсовой работе были представлены оптимальные алгоритмы управления движением позой при ступенчатом воздействии, основанные на модели «перевернутого маятника» удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. В задаче ставилось ограничение на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое хорошо качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилметрических исследованиях.
- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка.

## Список используемой литературы

- [1] Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S. An optimal control model for maximum height human jumping// Journal of Biomechanics.-1990, vol. 23 – pp.1185-1198.
- [2] Happee R. Time optimality in the control of human movements// Biological cybernetics- 1992, vol. 66 – pp. 357-366.
- [3] Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С. Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте// IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009» - М.: Экспоцентр, 2009.– С.121-123.
- [4] Муртазина Е.П. Функциональные особенности выполнения стабилотрафических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // Известия ЮФУ. Технические науки.- 2009.-№9-С.123-127.
- [5] Кручинин П.А. Анализ результатов стабилотметрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.
- [6] П. А. Кручинин и Е. А. Касаткин, Изв. ЮФУ. Техн. науки 10 (159), 254 (2014).
- [7] Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека - М.: Наука, 1965 - 256 с.
- [8] Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.
- [9] Касаткин Е.А., Кручинин П.А. Оптимальное управление позой человека при выполнении стабилотметрической пробы со ступенчатым воздействием: Курсовая работа, Москва, 2014, 22 с.