Todo list

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
МАГИСТРА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЧЕЛОВЕКОМ ИСХОДНОЙ ПОЗЫ ПОСЛЕ ТОЛЧКА

Выполнил: студент группы М - 2
Романов Андрей Владимирович

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент Кручинин Павел Анатольевич

____
(подпись научного руководителя)

Москва
2023

Оглавление

Введение

В литературе встречается решение задач оптимального быстродействия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Проба со ступенчатым воздействием является одной из стандартных проб при стабилометрических исследованиях [3, 4]. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, после толчка в спину, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью груза, помещенного на подвижном отвесе [5]. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [6, 7]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.

Рис. 1. Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной коордианты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

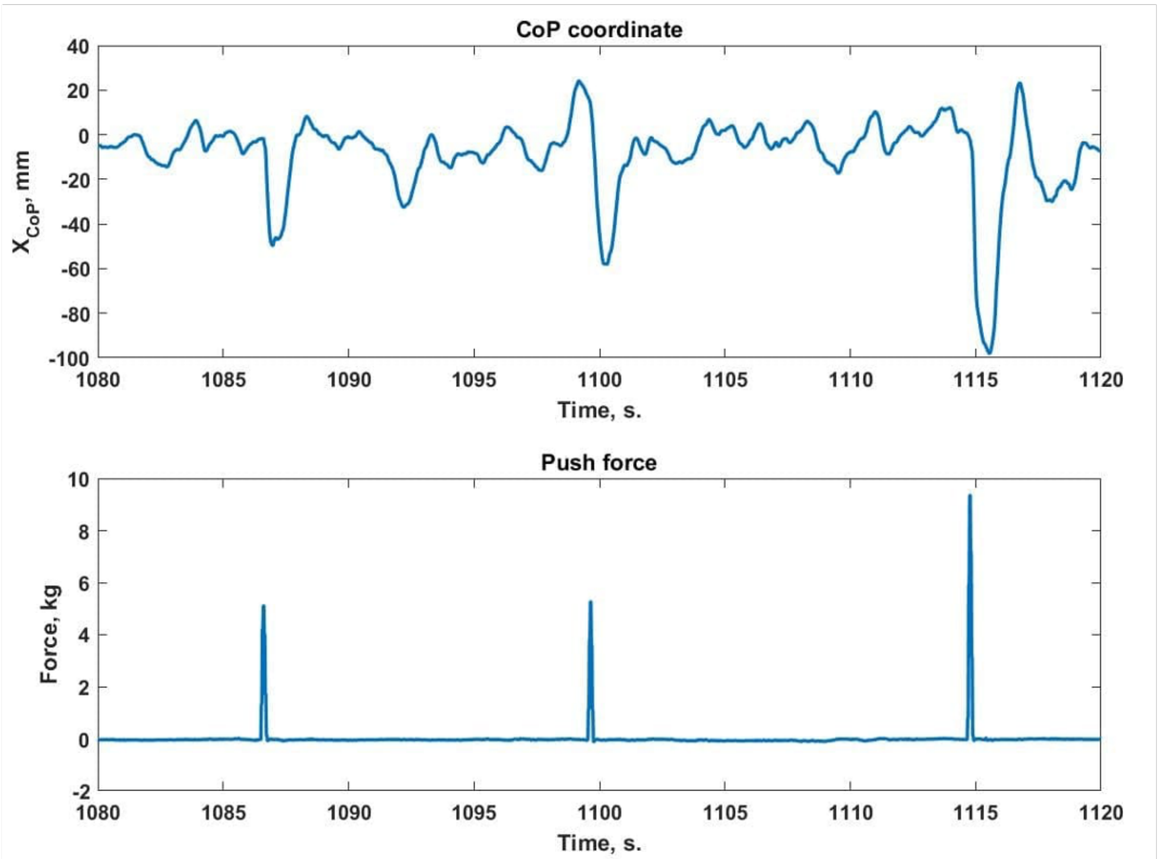

Рис. 2. Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

Картинку перерисовать с акутальными данными

В качестве математической модели используется традиционно модель «перевернутого маятника»[6, 7, 8].

Целью работы является разработка алгоритма управления изменением позы человека, основанного на решении задачи оптимального быстродействия, который можно было бы использовать для возвращения в исходную вертикальную позу. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

Акутальность работы объясняется тем, что похожие задачи уже решались, но именно эта с такими начальными условиям новая. Решение это задачи может быть применено как в медицине, для оценки оптимальности работы мышц человека, так и при разработке протезов, иммитирующих работу мышц.

Задачи работы:

- Описание математической модели
- Постановка задачи быстродействия, используя принцип максимума Понтрягина
- Поиск решения задачи быстродействия
- Определение начального состояния системы, в момент завершения толчка

- Решение задачи быстродействия с вычисленными начальными условиям
- Сравнение реального и оптимального времени возвращения в исходную позу
- Сравнение реальной и оптимальной траектории возварщения в исходную позу
- Интерпретация полученных результатов

Методы исследования:

- Движение человека в саггительной плоскости описывается моделью перевернутого маятника.
- Для описание движения используется система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффицентами 3 порядка.
- Начальные условия для задачи быстродействия определяются с данных эксперимента, в ходе которого на человека оказывают толкающее воздействие.
- Проводится графическое моделирование в математических пакетах Matlab и Wolfram Mathematica.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 61 страницу, включая 69 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 17 наименований.

Глава 1.

Математическая модель и решение задачи быстродействия

1.1. Математическая модель

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 1.1).

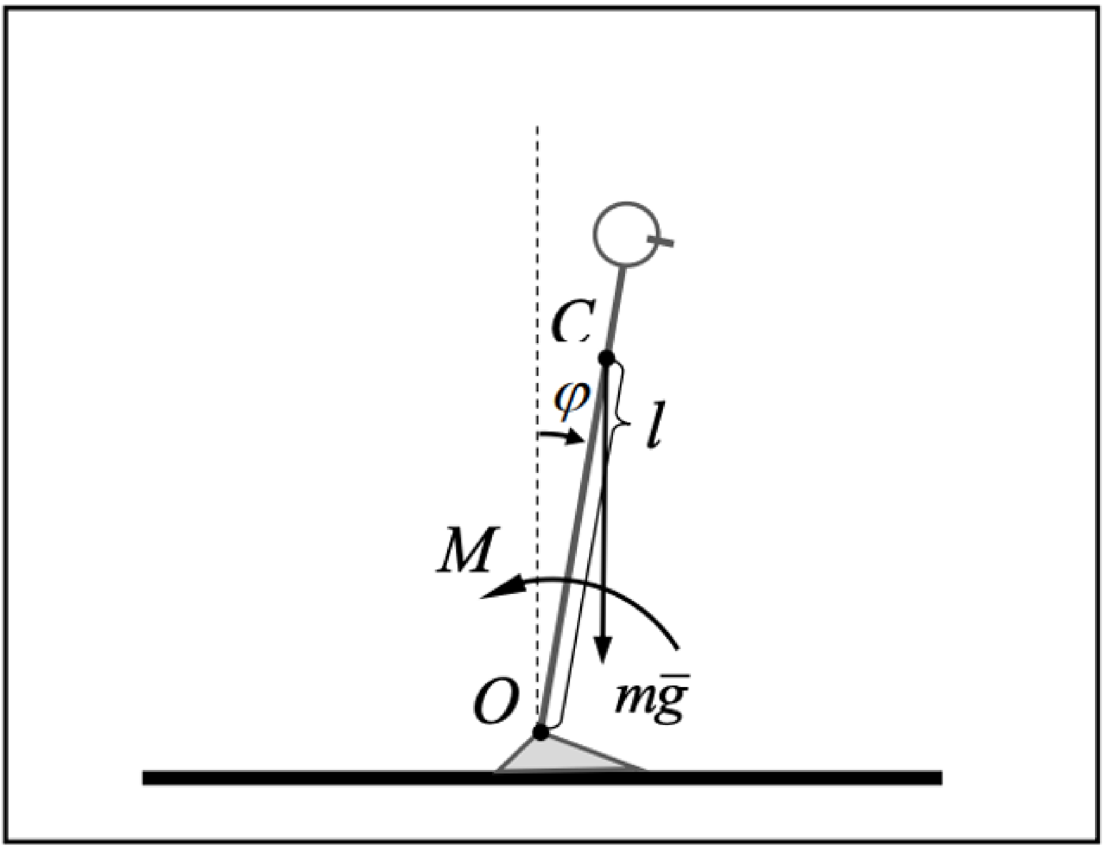

Рис. 1.1. Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы m_T, закрепленным шарнирно в точке O, которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке C, удаленной от точки O на расстояние l. Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку O, равен J. Отклонение стержня от вертикали описывается углом φ. Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Скорость изменения момента M, который приложен в точке O к стержню, будем считать управлением.

На тело воздействует два момента: первый от силы тяжести, второй момент возникает в голеностопе. Запишем уравнение моментов,относительно точки O на ось перпендикулярную плоскости рисунка 1.1

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \sin\varphi + M$$

Уравнение моментов для малых значений угла φ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального состояния

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

в конечное состояние

$$\varphi(t_k) = \varphi_k,\ \dot{\varphi}(t_k) = 0.$$

Перевод состояния тела должен происходить за минимальное время t_k, с помощью изменений значения $\dot{M}$ в голеностопном суставе.

Будем принимать во внимание условия

ограничена скорость а не момент

ограниченности скорости изменения момента в голеностопном суставе

$$U^- \leqslant \dot{M} \leqslant U^+.$$

Будем считать, что за время толчка нервная система человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*},\quad m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi_*}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*},\ t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением u будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных обезразмеренные

обезразмеривание подробнее описать

уравнения движения примут следующий вид

$$\theta'' = \theta + m;\ m' = u \tag{1.1}$$

Здесь через m' обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ. Необходимо решение системы (1.1) перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1;\ \theta'(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \theta'(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leqslant\ u \leqslant\ u^+,\ \text{где}$$

$$u^- = \frac{t_* U^-}{mgl\varphi_*},\quad u^+ = \frac{t_* U^+}{mgl\varphi_*}.$$

Далее будем считать, что $u^- = -u^+$

1.2. Постановка задачи быстродействия

Выпишем систему (1.1) в форме Коши

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ограничение на управление $|u| \leqslant u_{max}$

Начальные условия

$$\theta(0) = 1;\ \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

Конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \theta'(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

$J = \tau_f \to \min$

Для решения задачи оптимального быстродействия будем использовать принцип максимума Понтрягина [9]:

Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$– оптимальный процесс, то существует нетривиальная пара $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ такая, что

- $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))\ \forall t \in T \subseteq [t_0, t_k^0]$;
- $\psi(t_k^0) + \lambda_0(\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y})^T \perp M$ в точке $y^0(t_k^0)$;
- $\mathcal{H} = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_k^0]$.

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ i = 1, \ldots, n$$

В данной задаче $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$, тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \psi_1' = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2' = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3' = -\dfrac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

1.3. Анализ задачи быстродействия

собственные числа системы рассмотреть

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$ следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -u_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +u_{max}, & \text{при } \psi_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Продифференцируем по безразмерному времени второе уравнение из (1.3) и подставим в него первое, получим

$$\psi_2'' = \psi_2$$

Решая систему (1.3), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u.

Аналагичный вывод можно получить, применив теорему Фельдбаума о числе переключений оптимального управления[10]

1.4. Решение задачи быстродействия на отдельных этапах времени

Пусть $u^* = \text{const}$ управление на первом участке траектории до первого переключения $u^* = -u_{max}$.

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (1.2) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Решая систему (1.2), получим

нормальный вид системы привести

$$\begin{cases} m(\tau) = \tau u + C_1, \\ \theta(\tau) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left((C_1 + C_2 + C_3) e^{2\tau} - 2e^{\tau}(\tau u + C_1) + C_1 + C_2 - C_3 \right), \\ \omega(\tau) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left((C_1 + C_2 + C_3) e^{2\tau} - 2e^{\tau} u - C_1 - C_2 + C_3 \right). \end{cases} \tag{1.4}$$

1.4.1. Решение системы на первом этапе

Этап 1. $u = -u_*$ начальные условия

$$m(0) = 0; \; \theta(0) = 1; \; \omega(0) = \Omega_0;$$

Из (1.4) получим

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left(C_1 \left(e^{\tau} - 1 \right)^2 + C_2 \left(e^{2\tau} + 1 \right) + C_3 e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau} \tau u_* \right), \\ \Omega_0 = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left(C_1 \left(e^{2\tau} - 1 \right) + C_2 \left(e^{2\tau} - 1 \right) + C_3 e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau} u_* \right). \end{cases}$$

Тогда
$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -u_* + \Omega_0. \end{cases}$$
Подставим полученные константы в (1.4)
$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*. \end{cases}$$

1.4.2. Решение системы на втором этапе

Этап 2. $u = u_*$ начальные условия
$$m(\tau_1) = m_1(\tau_1);\ \theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1);\ \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);$$
$$\begin{cases} m(\tau_1) = -\tau_1 u_*, \\ \theta(\tau_1) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1} - 1\right)\Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1} + 1\right)u_* + 1\right), \\ \omega(\tau_1) = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1} + 1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau_1} - 1\right)\left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1} - 1\right)u_* - 1\right)\right). \end{cases}$$
Находим константы интегрирования
$$\begin{cases} -\tau_1 u_* = \tau_1 u_* + C_1, \\ \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1} - 1\right)\Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1} + 1\right)u_* + 1\right) = \\ = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1}\left(C_1\left(e^{\tau_1} - 1\right)^2 + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* + C_2 - C_3\right), \\ \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1} + 1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau_1} - 1\right)\left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1} - 1\right)u_* - 1\right)\right) = \\ = \dfrac{1}{2} e^{-\tau_1}\left(C_1\left(e^{2\tau_1} - 1\right) + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1} u_* - C_2 + C_3\right). \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1 = -2\tau_1 u_*, \\ C_2 = -e^{-\tau_1}\left(-e^{\tau_1} + e^{2\tau_1}u_* - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* - u_*\right), \\ C_3 = e^{-\tau_1}\left(e^{\tau_1}\Omega_0 - e^{\tau_1}u_* + e^{2\tau_1}u_* + u_*\right). \end{cases}$$
Подставим начальные условия для второго этапа в (1.4), получим
$$\begin{cases} m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1)\,u_*, \\ \theta_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1} - 1). \end{cases}$$

1.4.3. Решение системы на третьем этапе

Этап 3. $u = -u_*$ конечные условия

$$m(\tau_f) = 0;\ \theta(\tau_f) = 0;\ \omega(\tau_f) = 0;$$

Подставим начальные условия в (1.4), получим

$$\begin{cases} 0 = C_1 - \tau_f u_*, \\ 0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_f}\left(C_1\left(e^{\tau_f}-1\right)^2 + C_2\left(e^{2\tau_f}+1\right) + C_3 e^{2\tau_f} - C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\tau_f\right), \\ 0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_f}\left(C_1\left(e^{2\tau_f}-1\right) + C_2\left(e^{2\tau_f}-1\right) + C_3 e^{2\tau_f} + C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = u_*\tau_f, \\ C_1 = \dfrac{1}{2}u_* e^{-\tau_f}\left(-2e^{\tau_f}\tau_f + e^{2\tau_f} - 1\right), \\ C_2 = -\dfrac{1}{2}u_* e^{-\tau_f}\left(e^{2\tau_f}+1\right). \end{cases}$$

Тогда решение на этом этапе имеет вид

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_*\left(\tau_f - \tau\right), \\ \theta_3(\tau) = \dfrac{1}{2}u_*\left(-e^{\tau-\tau_f} + e^{\tau_f-\tau} - 2\tau_f + 2\tau\right), \\ \omega_3(\tau) = u_* - \dfrac{u_*}{2}(e^{\tau-\tau_f} + e^{-\tau+\tau_f}). \end{cases}$$

1.4.4. Сопряжение второго и третьего этапов

Так как момент, угол отклонения и угловая скорость представлют собой кусочнонепрерывные фукнции времени, то можно сопрячь систему на втором и третьем этапе в момент времени τ_2.

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \left(\tau_2 - 2\tau_1\right)u_* = u_*\left(\tau_f - \tau_2\right), \\ \dfrac{e^{\tau_2}+e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_*(e^{\tau_2-\tau_1} - e^{-\tau_2+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau_2) = \\ = \dfrac{1}{2}u_*\left(-e^{\tau_2-\tau_f} + e^{\tau_f-\tau_2} - 2\tau_f + 2\tau_2\right), \\ \dfrac{e^{\tau_2}-e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_*(e^{\tau_2-\tau_1} + e^{-\tau_2+\tau_1} - 1) = \\ = u_* - \dfrac{u_*}{2}(e^{\tau_2-\tau_f} + e^{-\tau_2+\tau_f}). \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на u_*, выражение для τ_f из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \dfrac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{-\tau_1+\tau_2} - e^{\tau_1-\tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2-\tau_f} - e^{-\tau_2+\tau_f}}{2} \right) = 0, \\ \dfrac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2-\tau_f} + e^{-\tau_2+\tau_f}}{2} - 2 \right) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1},\ y = e^{\tau_2},\ z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{1}{2} \left(u_* \left(\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x} - y + \dfrac{1}{y} \right) + \left(y - \dfrac{1}{y} \right) \Omega_0 + y + \dfrac{1}{y} \right) = 0, \\ \dfrac{u_* \left(\frac{y^2}{x^2} + x^2 + \frac{2y^2}{x} + 2x - y^2 - 4y - 1 \right) + (y^2+1)\,\Omega_0 + y^2 - 1}{2y} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{y}{x}, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(xy - \dfrac{x}{y} \right) + u_* \left(\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{2x^2}{y} + 2y \right) + \dfrac{x}{y} + xy = 0, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(xy + \dfrac{x}{y} \right) + u_* \left(\dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^2}{y} + 2y - 4x \right) - \dfrac{x}{y} + xy = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Полученную систему (1.6) можно решить численно, подставив вместо Ω_0 и u_* конкретные значения. Отбор корней проводим из условия, что $x > 1, y > 1, z > 1$. Но также стоит провести дальнейший анализ для поиска аналитического решения.

1.5. Поиск аналитического решения

$$\begin{cases} y = zx, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(x^2 z - \dfrac{x}{zx} \right) + u_* \left(\dfrac{x^3}{zx} - \dfrac{zx}{x} - \dfrac{2x^2}{zx} + 2zx \right) + \dfrac{x}{zx} + x^2 z = 0, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(x^2 z + \dfrac{x}{zx} \right) + u_* \left(\dfrac{x^3}{zx} + \dfrac{zx}{x} + \dfrac{2x^2}{zx} + 2zx - 4x \right) - \dfrac{x}{zx} + x^2 z = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} (\Omega_0 - u_*) \left(x^2 z - \dfrac{1}{z} \right) + u_* \left(\dfrac{x^2}{z} - z - \dfrac{2x}{z} + 2zx \right) + \dfrac{1}{z} + x^2 z = 0, \\ (\Omega_0 - u_*) \left(x^2 z + \dfrac{1}{z} \right) + u_* \left(\dfrac{x^2}{z} + z + \dfrac{2x}{z} + 2zx - 4x \right) - \dfrac{1}{z} + x^2 z = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Сложим и вычтем уравнения системы

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_*\left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ 2(\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{z} + u_*\left(2z + \dfrac{4x}{z} - 4x\right) - \dfrac{2}{z} = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_*\left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ 2(\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{z} + 2u_* z + 4x\left(\dfrac{u_*}{z} - u_*\right) - \dfrac{2}{z} = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_*\left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ x = \left(\dfrac{1}{2z} - \dfrac{u_* z}{2} - (\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{2z}\right)\dfrac{z}{u_*(1-z)} \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\frac{\left(u_*\left(z^2-1\right)+\Omega_0-1\right)\left(-u_*\left(z^4+\Omega_0\left(z^2-1\right)^2\right)+u_*^2(z-1)^4+u_*-\Omega_0^2 z^2+z^2\right)}{2u_*^2(z-1)^2} = 0$$

$$\left[\begin{aligned} &\left(u_*\left(z^2-1\right)+\Omega_0-1\right) = 0, \\ &-u_*\left(z^4+\Omega_0\left(z^2-1\right)^2\right)+u_*^2(z-1)^4+u_*-\Omega_0^2 z^2+z^2 = 0 \end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

$$\left[\begin{aligned} &u_* z^2 + \Omega_0 - 1 - u_* = 0, \\ &(-u_*\Omega_0 + u_*^2 - u_*)z^4 - 4u_*^2 z^3 + (2u_*\Omega_0 + 6u_*^2 - \Omega_0^2 + 1)z^2 - 4u_*^2 z + -u_*\Omega_0 + u_*^2 + u_* = 0 \end{aligned}\right. \tag{1.13}$$

Глава 2.

Определение начальных условий в момент завершения толчка

2.1. Постановка задачи

вводим фильтр, рисуем модель физическую, переходные фукнции и алгоритмы фильтрации

2.2. Применение алгоритмов фильтрации к модельным данным

модель со спиральной вовзвращающей силой, графики

применяем говорим, что методы очень точные

2.3. Анализ данных со стабилоанализатора и силомера

массу, оценка времени где толчки были, сила

берем крутой/пологий спуск

2.4. Применение алгоритмов фильтрации к экспериментальным данным

картинки с результатами применения фильтра

2.5. Оценка начальных условий в моменты завершения толчков

посчитанные данные для нескольких толчков

крутая картинка из матлаба

Глава 3.

Анализ полученных решений задачи быстродействия

3.1. Сравнение траекторий и времени возвращения для выборки толчков

корректировка траектории (offset/linear trend)

картинки с траекториями, много, берем u=3.2 3.6 наиболее подходящее

таблички, отношения времен real/opt

3.2. Гипотезы по корректировке задачи

момент успел измениться, не максимальное а какое-то другое управление

Заключение

Похоже немного на оптимальную траекторию, но много допущений, момент уже успел измениться, видимо мышцы не совсем так работают, нужны уточнения задачи, с различными постановками. Управление взять в каком-то интервале, а так в целом хорошо построил решение.

В дипломной работе были представлены оптимальные алгоритмы управления движением позой при ступенчатом воздействии, основанные на модели «перевернутого маятника» удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. В задаче ставилось ограничение на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое хорошо качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилометрических исследованиях.

- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка.

Литература

1. Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S. An optimal control model for maximum height human jumping// Journal of Biomechanics.-1990, vol. 23 – pp.1185-1198.
2. Happee R. Time optimality in the control of human movements// Biological cybernetics-1992, vol. 66 – pp. 357-366.
3. Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С. Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте// IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009» - М.: Экспоцентр, 2009.– С.121-123.
4. Муртазина Е.П. Функциональные особенности выполнения стабилографических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // Известия ЮФУ. Технические науки.- 2009.-№9-С.123-127.
5. Мельников А.А., Филёва В.В. Методика определения устойчивости вертикальной позы под влиянием внешнего толкающего воздействия // Физиология. 2015. С. 31–37.
6. Кручинин П.А. Анализ результатов стабилометрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.
7. П. А. Кручинин и Е. А. Касаткин, Изв. ЮФУ. Техн. науки 10 (159), 254 (2014).
8. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека - М.: Наука, 1965 - 256 с.
9. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.
10. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.
11. Касаткин Е.А., Кручинин П.А. Оптимальное управление позой человека при выполнении стабилометрической пробы со ступенчатым воздействием: Курсовая работа, Москва, 2014, 22 с.