

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
МАГИСТРА

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЧЕЛОВЕКОМ ИСХОДНОЙ ПОЗЫ
ПОСЛЕ ТОЛЧКА**
**REVERSION OF INITIAL POSTURE BY A PERSON AFTER
A PUSH**

Выполнил: студент группы М - 2
Романов Андрей Владимирович

(подпись студента)

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент Кручинин Павел Анатольевич

(подпись научного руководителя)

Москва 2023 год

Оглавление

Введение	4
1. Оптимальное уклонение цели от преследователя, использующего метод пропорционального наведения	7
1.1 Постановка задачи	7
1.2 Сведение к краевой задаче	8
1.3 Качественное исследование полученной системы	11
1.3.1 Нахождение положений равновесия	11
1.3.2 Линеаризация системы в окрестности положений равновесия	13
1.3.3 Исследование положений равновесия	14
1.3.4 Анализ фазовых портретов	18
1.4 Численное моделирование	20
1.4.1 Решение краевой задачи	20
1.4.2 Результаты вычислений	22
2. Оптимальное сближение объектов в случае гибридного закона пропорционального наведения	26
2.1 Постановка задачи	26
2.2 Применение принципа максимума	27
2.3 Наличие особого управления	29
2.4 Метод стрельбы численного решения краевой задачи принципа максимума .	31
2.5 Метод Ньютона	32
2.6 Алгоритм численного решения задачи	33
2.7 Результаты численного моделирования	37
2.8 Траектории сравнения	39
2.8.1 Метод погони	39
2.8.2 Метод пропорционального наведения для объекта E	40
2.8.3 Гибридный метод пропорционального наведения для цели	41
3. Оптимальное уклонение объектов в случае гибридного закона пропорционального наведения	43
3.1 Постановка задачи	43
3.2 Применение принципа максимума	44
3.3 Наличие особого управления	46
3.4 Результаты численного моделирования	48

3.5	Траектории сравнения	49
3.5.1	Метод погони	49
3.5.2	Метод пропорционального наведения для цели	50
3.5.3	Метод гибридного пропорционального наведения для цели	50
Заключение		51
Литература		56

Введение

В литературе встречается решение задач оптимального быстродействия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Проба со ступенчатым воздействием является одной из стандартных проб при стабилметрических исследованиях [3, 4]. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, после толчка в спину, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью груза, помещенного на подвижном отвесе [5]. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [6, 7]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.



Рис. 1. Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной координаты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

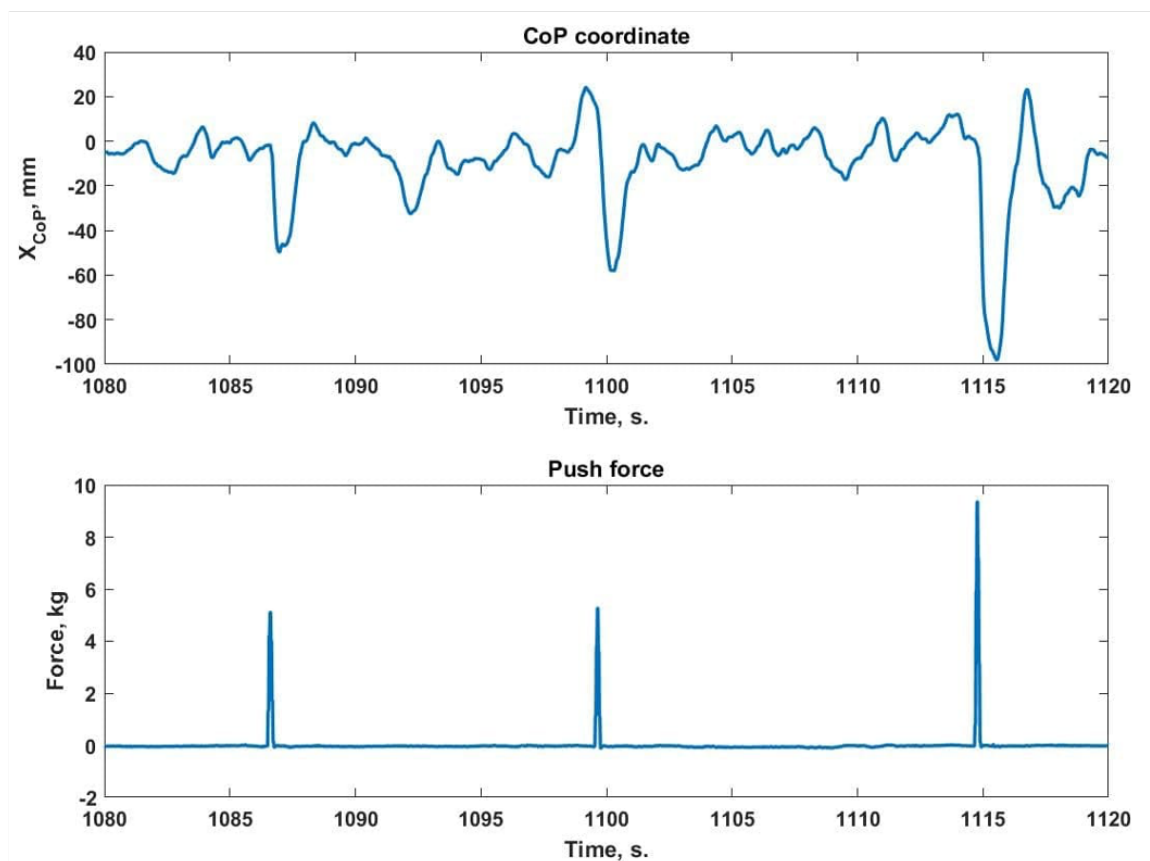


Рис. 2. Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

В курсовой работе предполагается рассмотреть возможные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на решении задачи оптимального быстрогодействия, которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В качестве математической модели используется модель «перевернутого маятника» [6, 7, 8]. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

Целью работы является разработка алгоритма управления изменением позы человека, основанного на решении задачи оптимального быстрогодействия, который можно было бы использовать для возвращения в исходную вертикальную позу

Задачи работы:

- Описание математической модели
- Постановка задачи быстрогодействия, используя принцип максимума Понтрягина
- Поиск решения задачи быстрогодействия
- Определение начального состояния системы, в момент завершения толчка
- Решение задачи быстрогодействия с вычисленными начальными условиями
- Сравнение реального и оптимального времени возвращения в исходную позу

- Сравнение реальной и оптимальной траектории возварщения в исходную позу
- Интерпретация полученных результатов

Методы исследования. Для решения оптимальных задач используется принцип максимума Понтрягина, качественное исследование полученных дифференциальных уравнений проводится с помощью метода фазовой плоскости. Краевые задачи, полученные из принципа максимума Понтрягина, решаются с помощью численных методов решения задач оптимального управления (метод стрельбы, метод дихотомии и Ньютона).

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 61 страницу, включая 69 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 17 наименований.

Глава 1.

Оптимальное уклонение цели от преследователя, использующего метод пропорционального наведения

1.1. Постановка задачи

Пусть в горизонтальной плоскости (рис. ??) движутся две материальные точки: преследователь P и цель E , θ – угол между линией PE и осью Ox , β – угол между линией PE и направлением вектора скорости преследователя v_P , α – угол между линией PE и направлением вектора скорости цели v_E .

Уравнения движения материальных точек в безразмерном виде

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{rc}, \\ \dot{\alpha} = \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{r} + u, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $b = v_P/v_E$, $c = -\frac{1}{k-1}$, $k > 1$ – коэффициент в $\dot{\beta} = k\dot{\theta}$ (метод пропорционального наведения), u – управление, $|u| < \infty$.

В работе рассматриваются случаи, когда $0 < b < 1$ и $b \geq 1$. Начальные условия имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (1.2)$$

Считая теперь, что $\alpha(0)$ свободно, можно провести редукцию системы (1.1). Вместо управления u выбирается α и рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{rc}, \end{cases} \quad (1.3)$$

Начальные условия в этом случае имеют вид:

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (1.4)$$

Время окончания процесса T фиксировано. Цель управления – максимизация конечного расстояния между объектами:

$$\mathcal{J} = -r(T) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in U} \quad (1.5)$$

1.2. Сведение к краевой задаче

Введем в рассмотрение функцию Понтрягина H [23], которая представляется в виде

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \boldsymbol{\psi}^\top \mathbf{f}, \quad (1.6)$$

где $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^\top$ – сопряженные переменные, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ – правые части дифференциальных уравнений, относящихся к задаче, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ – фазовые переменные.

В данной задаче $\boldsymbol{\psi} = (\psi_r, \psi_\beta)^\top$, $\mathbf{y} = (r, \beta)^\top$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^\top$, где

$$f_1 = \cos \alpha - b \cos \beta, \quad f_2 = \frac{1}{rc} (b \sin \beta - \sin \alpha).$$

Тогда функция Понтрягина (1.6) примет вид

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + \frac{\psi_\beta}{rc} (b \sin \beta - \sin \alpha), \quad (1.7)$$

и равна константе C на оптимальной траектории.

Сопряженная система

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.8)$$

После подстановки (1.7) в уравнения (1.8) получим:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\psi_\beta}{r^2 c} (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_\beta = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{rc} b \cos \beta. \end{cases} \quad (1.9)$$

Условия трансверсальности [25]:

$$\left\{ \delta \mathcal{J} - H \delta t + \sum_{i=1}^n \psi_i \delta x_i \right\}_{t=0}^{t=T} = 0,$$

где $\mathcal{J} = -r(T)$, $\psi_1 = \psi_r$, $\psi_2 = \psi_\beta$, $x_1 = r$, $x_2 = \beta$. Откуда получаем:

$$\psi_r(T) = 1, \quad \psi_\beta(T) = 0. \quad (1.10)$$

Необходимое условие максимума функции H по управлению α :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\psi_r \sin \alpha - \frac{\psi_\beta}{rc} \cos \alpha = 0 \iff \psi_r \sin \alpha \cdot rc = -\psi_\beta \cos \alpha. \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что функции ψ_r , ψ_β и α имеют один и тот же класс гладкости. Первоначально предполагалось, что α – кусочно-непрерывная функция. Поскольку сопряженные переменные удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.9), то они являются гладкими функциями, а значит и α также гладкая функция.

Таким образом, уравнения (1.3), (1.9), (1.11) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно r , β , ψ_r , ψ_β , поскольку управление α можно выразить из условия (1.11) через ψ_r , ψ_β .

Проанализируем условие оптимальности (1.11). При $t = T$ получим:

$$\psi_r(T) \sin \alpha(T) \cdot r(T)c = -\psi_\beta(T) \cos \alpha(T).$$

Поскольку $\psi_\beta(T) = 0$, то $\psi_r(T) \sin \alpha(T) \cdot r(T)c = 0$. Считая, что в конечный момент времени $r(T) \neq 0$, получим $\psi_r(T) \sin \alpha(T) = 0$, откуда $\psi_r(T) = 0$ или $\sin \alpha(T) = 0$.

$\psi_r(T) \neq 0$ в силу (1.10), тогда $\sin \alpha(T) = 0$, откуда $\cos \alpha(T) = \pm 1$. Чтобы определиться со знаком, найдем вторую производную функции Понтрягина

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = -\psi_r \cos \alpha + \frac{\psi_\beta}{rc} \sin \alpha.$$

При $t = T$

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \right|_{t=T} = -\psi_r(T) \cos \alpha(T) < 0 \iff \cos \alpha(T) > 0.$$

Поэтому $\cos \alpha(T) = 1$ и $\alpha(T) = 0$.

Получим уравнение для $\alpha(t)$. Для этого продифференцируем левую и правую часть условия оптимальности (1.11)

$$\dot{\psi}_r \operatorname{tg} \alpha + \psi_r \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{\psi_\beta \dot{r}}{r^2 c} - \frac{\dot{\psi}_\beta}{rc}. \quad (1.12)$$

Производные сопряженных функций можно выразить из (1.9), поэтому условие (1.12) можно рассматривать как уравнение относительно $\dot{\alpha}$. Из (1.12) выражаем $\dot{\alpha}$ и проводим

преобразования с учетом условия (1.11):

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{r}\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{1}{r^2c} \cos^2 \alpha - \frac{\dot{\psi}_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{1}{rc} \cos^2 \alpha - \frac{\dot{\psi}_r}{\psi_r} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1.13)$$

Отдельно преобразуем каждое слагаемое в (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{1}{r^2c} \cos^2 \alpha &= -\frac{rc}{r^2c} \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha \cdot \dot{r} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\dot{r}}{r} \cos^2 \alpha = \\ &= -\frac{\dot{r}}{r} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{r} \sin \alpha \cos \alpha (b \cos \beta - \cos \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\psi}_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{1}{rc} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\psi_r} \cdot \frac{1}{rc} \cos^2 \alpha \left(\psi_r b \sin \beta + \frac{\psi_\beta}{rc} b \cos \beta \right) = \\ &= \frac{1}{rc} b \sin \beta \cos^2 \alpha + \frac{\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{b}{r^2c^2} \cos^2 \alpha \cos \beta = \frac{1}{rc} b \sin \beta \cos^2 \alpha - \\ &\quad - \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{rc} \cos^2 \alpha \cos \beta = \frac{b}{rc} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\psi}_r}{\psi_r} \sin \alpha \cos \alpha &= -\frac{\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{1}{r^2c} \sin \alpha \cos \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha) = \\ &= -\frac{1}{r^2c} \frac{\psi_\beta}{\psi_r} \sin \alpha \cos \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha) = \frac{1}{r} \sin^2 \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha). \end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в (1.13):

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{r} \sin \alpha \cos \alpha (b \cos \beta - \cos \alpha) + \frac{b}{rc} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha) - \frac{1}{r} \sin^2 \alpha (\sin \alpha - b \sin \beta).$$

Окончательно после всех преобразований получаем уравнение на α :

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos (\alpha - \beta) - 1) + \frac{b}{rc} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha) \quad (1.14)$$

Объединяя уравнения (1.3) и (1.14), получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных $r(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(t)$:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{rc}, \\ \dot{\alpha} = \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos (\alpha - \beta) - 1) + \frac{b}{rc} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha). \end{cases} \quad (1.15)$$

Краевые условия

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(T) = 0. \quad (1.16)$$

Задача оптимального управления (1.3), (1.4), (1.5) сведена к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений (1.15), (1.16). Если решение задачи найдено, т.е. известны функции $r(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(t)$, то управление $u(t)$ можно найти из (1.1) с учетом (1.14)

$$u(t) = \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos(\alpha - \beta) - 1) + \frac{b}{rc} \cos \alpha \sin(\beta - \alpha) - \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{r}. \quad (1.17)$$

1.3. Качественное исследование полученной системы

1.3.1. Нахождение положений равновесия

Случай $b \neq 1$

Рассмотрим систему (1.15). Прежде чем переходить к численному решению задачи (1.15) – (1.16), проведем качественное исследование. Заметим, что второе и третье уравнения системы (1.15) содержат неизвестную функцию r в знаменателе, поэтому можно провести анализ этих двух уравнений относительно функций α , β .

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos(\alpha - \beta) - 1) + \frac{b}{rc} \cos \alpha \sin(\beta - \alpha), \\ \dot{\beta} = \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{rc}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Для начала найдем положения равновесия, т.е. когда $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = 0$.

$$\begin{cases} b \sin \beta - \sin \alpha = 0, \\ c \sin \alpha (b \cos(\alpha - \beta) - 1) + b \cos \alpha \sin(\beta - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Преобразуем второе уравнение (1.19) с учетом первого

$$\begin{aligned} bc \sin \beta (b \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha - 1) + b \cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) &= 0 \iff \\ \iff bc \sin \beta (b \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha - 1) + b \cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha - b \sin \beta \cos \beta) &= 0 \iff \\ \iff c \sin \beta (b \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha - 1) + \sin \beta \cos \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta) &= 0 \iff \\ \iff \sin \beta [c (b \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha - 1) + \cos \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta)] &= 0 \iff \\ \iff \begin{cases} \sin \beta = 0, \\ c (b \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha - 1) + \cos \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из первого уравнения $\sin \beta = 0$, тогда $\sin \alpha = 0$. Если считать r как параметр, то фазовым пространством системы (1.18) является тор. Поэтому рассмотрим развертку тора на плоскость и ограничимся квадратом $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. В этом квадрате следующие положения равновесия

$$(-\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (\pi, -\pi), (\pi, \pi), (-\pi, 0), (\pi, 0), (0, -\pi), (0, \pi), (0, 0). \quad (1.20)$$

Рассмотрим второе уравнение совокупности

$$\begin{aligned}
& c(b \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha - 1) + \cos \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta) = 0 \iff \\
& \iff c(b \cos \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha) + \cos \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta) = 0 \iff \\
& \iff c \cos \alpha (b \cos \beta - \cos \alpha) - \cos \alpha (b \cos \beta - \cos \alpha) = 0 \iff \\
& \iff \cos \alpha (b \cos \beta - \cos \alpha) (c - 1) = 0 \iff \begin{cases} \cos \alpha = 0, \\ b \cos \beta = \cos \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

Если $b \cos \beta = \cos \alpha$, то вместе с уравнением $b \sin \beta = \sin \alpha$ получим $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = b^2$, откуда $b = 1$. Если $\cos \alpha = 0$, то $\alpha = \pm \pi/2$. Тогда из первого уравнения (1.19) $\sin \beta = 1/b \sin \alpha$.

При $\alpha = -\pi/2$ получим $\sin \beta = -1/b$. Если $b \in (0, 1)$, то уравнение не имеет решений. Если $b > 1$, то $\beta = -\arcsin(1/b)$, $\beta = -\pi + \arcsin(1/b)$.

При $\alpha = \pi/2$ получим $\sin \beta = 1/b$. Если $b \in (0, 1)$, то уравнение не имеет решений. Если $b > 1$, то $\beta = \arcsin(1/b)$, $\beta = \pi - \arcsin(1/b)$. Таким образом, получим следующие положения равновесия системы (при $b > 1$):

$$\left(\frac{\pi}{2}, \arcsin \frac{1}{b}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin \frac{1}{b}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\arcsin \frac{1}{b}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\pi + \arcsin \frac{1}{b}\right). \quad (1.21)$$

При $b > 1$ имеем 13 положений равновесия (1.20), (1.21), при $b \in (0, 1)$ – 9 положений равновесия (1.20).

Случай $b = 1$

Отдельно рассмотрим случай, когда $b = 1$, т.е. скорости преследователя и цели одинаковые. Тогда система (1.19) примет вид

$$\begin{cases} \sin \beta - \sin \alpha = 0, \\ c \sin \alpha (\cos(\alpha - \beta) - 1) + \cos \alpha \sin(\beta - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Проводя аналогичные преобразования, описанные выше, приходим к системе

$$\begin{cases} \sin \beta - \sin \alpha = 0, \\ (c - 1)(\cos \beta - \cos \alpha) \sin \alpha \cos \alpha = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \beta = \sin \alpha, \\ \begin{cases} \cos \beta = \cos \alpha, \\ \sin \alpha = 0, \\ \cos \alpha = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.23)$$

1) Пусть $\cos \beta = \cos \alpha$.

$$\sin \alpha = \sin \beta \iff 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = 0 \iff \begin{cases} \beta - \alpha = 2\pi k, \\ \beta + \alpha = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поскольку $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$, то $\beta - \alpha = -2\pi, 0, 2\pi$, а $\beta + \alpha = -\pi, \pi$. Нетрудно убедиться,

что при $\beta - \alpha = -2\pi, 0, 2\pi$ уравнение $\cos \beta = \cos \alpha$ будет обращаться в тождество. При $\beta + \alpha = -\pi$ получим $\cos \alpha = 0$, откуда $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2} \implies \beta = -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$, при $\alpha = -\frac{\pi}{2} \implies \beta = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$. При $\beta + \alpha = \pi$ получим $\cos \alpha = 0$, откуда $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2} \implies \beta = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$, при $\alpha = -\frac{\pi}{2} \implies \beta = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$.

Получим следующие положения равновесия

$$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.24)$$

2) Пусть $\sin \alpha = 0 \implies \alpha = -\pi, 0, \pi \implies \sin \beta = 0 \implies \beta = -\pi, 0, \pi$. Получим следующие положения равновесия

$$(-\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (\pi, -\pi), (\pi, \pi), (-\pi, 0), (\pi, 0), (0, -\pi), (0, \pi), (0, 0). \quad (1.25)$$

3) Пусть $\cos \alpha = 0 \implies \alpha = \pm \frac{\pi}{2} \implies \sin \beta = \pm 1 \implies \beta = \pm \frac{\pi}{2}$. Получим следующие положения равновесия (с учетом (1.24))

$$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right). \quad (1.26)$$

В итоге при $b = 1$ имеем 13 положений равновесия (1.25), (1.26).

1.3.2. Линеаризация системы в окрестности положений равновесия

Система (1.14) представляет собой автономную систему дифференциальных уравнений. Проведем ее линеаризацию системы в окрестности положений равновесия (1.20) и (1.21). Систему (1.18) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.27)$$

где $\mathbf{x} = (\alpha, \beta)^\top$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (F(\alpha, \beta), G(\alpha, \beta))^\top$, F и G – правые части уравнений в системе (1.14).

С точностью до слагаемых второго порядка малости получим линейную систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}, \quad (1.28)$$

где \mathcal{A} – матрица Якоби [22] первых частных производных функций F и G , вычисленная в положении равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha} & \frac{\partial G}{\partial \beta} \end{pmatrix} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}. \quad (1.29)$$

Вычислим их отдельно

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \frac{1}{r} \cos \alpha (b \cos(\alpha - \beta) - 1) - \frac{1}{r} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - \frac{b}{rc} \cos(2\alpha - \beta), \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} &= \frac{b}{r} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \frac{b}{rc} \cos \alpha \cos(\beta - \alpha), \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{rc}, \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{b \cos \beta}{rc}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

При подстановке полученных положений равновесий (1.20) и (1.21) в (1.29) будем получать линейную систему дифференциальных уравнений (1.28). Их характер определяется путем нахождения корней характеристического уравнения

$$\det (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 0 \iff \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \lambda & \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha} & \frac{\partial G}{\partial \beta} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.31)$$

где \mathcal{I} – единичная матрица. Раскрывая определитель и подставляя (1.30), получим

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{\lambda}{r} & \left(\cos \alpha - b \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \frac{b}{c} \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) + \frac{b}{c} \cos \beta + \right. \\ & \left. + b \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) - \frac{b}{c} \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \right) + \frac{b \cos^2 \alpha \cos (\alpha - \beta)}{c^2 r^2} - \frac{b \cos \alpha \cos \beta}{c r^2} - \\ & - \frac{b^2 \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) \cos \beta}{c^2 r^2} + \frac{b^2 \cos \alpha \cos (\alpha - \beta) \cos \beta}{c r^2} + \frac{b \cos \alpha \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)}{c r^2} + \\ & + \frac{b^2 \cos \beta \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)}{c^2 r^2} - \frac{b^2 \cos \beta \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)}{c r^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.3.3. Исследование положений равновесия

Случай $b \neq 1$

Классификацию положений равновесия системы (1.14) проведем с использованием полученного характеристического уравнения (1.32) линеаризованной системы.

1) $(0, 0)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{r} (1 - b) + \frac{b}{c^2 r^2} (b - 1) (c - 1) = 0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения

$$D = \frac{1}{r^2} (1 - b)^2 - \frac{4b}{c^2 r^2} (b - 1) (c - 1) = \frac{1}{c^2 r^2} (b - 1) (b (c - 2)^2 - c^2)$$

Пусть $b \in (0, 1)$, тогда уравнение имеет действительные корни, когда $D > 0$, откуда получим $b(c - 2)^2 - c^2 < 0 \iff b < \frac{c^2}{(c - 2)^2}$. Корни уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r} (b - 1) \pm \frac{1}{2cr} \sqrt{(b - 1) (b (c - 2)^2 - c^2)}$$

Произведение корней $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{b}{c^2 r^2} (b - 1) (c - 1) > 0$, поскольку $b \in (0, 1)$, $c < 0$. Коэффициент при λ в уравнении (1.32) $\frac{1 - b}{r} > 0$, поэтому $(0, 0)$ – **устойчивый узел**.

Уравнение имеет комплексные корни, если $D < 0$, т.е. при $b > \frac{c^2}{(c - 2)^2}$. Корни уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r} (b - 1) \pm \frac{i}{2cr} \sqrt{(1 - b) (b (c - 2)^2 - c^2)}$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r}(b-1) < 0$, то $(0,0)$ – **устойчивый фокус**.

Пусть $b > 1$. Уравнение имеет действительные корни, когда $b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$, произведение корней $\lambda_1\lambda_2 = \frac{b}{c^2r^2}(b-1)(c-1) < 0$, поэтому $(0,0)$ – **седло**.

Уравнение имеет комплексные корни, если $D < 0$, т.е. при $b < \frac{c^2}{(c-2)^2}$. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r}(b-1) > 0$, то $(0,0)$ – **неустойчивый фокус**.

2) $(\pm\pi, \pm\pi)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{r}(b-1) + \frac{b}{c^2r^2}(b-1)(c-1) = 0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения

$$D = \frac{1}{r^2}(b-1)^2 - \frac{4b}{c^2r^2}(b-1)(c-1) = \frac{1}{c^2r^2}(b-1)(b(c-2)^2 - c^2)$$

Пусть $b \in (0,1)$, тогда по аналогии с $(0,0)$ уравнение имеет действительные корни при $b < \frac{c^2}{(c-2)^2}$. Корни уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r}(1-b) \pm \frac{1}{2cr}\sqrt{(b-1)(b(c-2)^2 - c^2)}$$

Произведение корней $\lambda_1\lambda_2 = \frac{b}{c^2r^2}(b-1)(c-1) > 0$. Коэффициент при λ в уравнении (1.32) $\frac{b-1}{r} < 0$, поэтому $(\pm\pi, \pm\pi)$ – **неустойчивый узел**.

Уравнение имеет комплексные корни, если $D < 0$, т.е. при $b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$. Корни уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r}(1-b) \pm \frac{i}{2cr}\sqrt{(1-b)(b(c-2)^2 - c^2)}$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r}(b-1) > 0$, то $(\pm\pi, \pm\pi)$ – **неустойчивый фокус**.

Пусть $b > 1$. Уравнение имеет действительные корни, когда $b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$, произведение корней $\lambda_1\lambda_2 = \frac{b}{c^2r^2}(b-1)(c-1) < 0$, поэтому $(\pm\pi, \pm\pi)$ – **седло**.

Уравнение имеет комплексные корни, если $D < 0$, т.е. при $b < \frac{c^2}{(c-2)^2}$. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r}(b-1) < 0$, то $(\pm\pi, \pm\pi)$ – **устойчивый фокус**.

Результаты исследования точек $(0, 0)$ и $(\pm\pi, \pm\pi)$ отразим на плоскости параметров k и b , где $c = -\frac{1}{k-1}$.

3) $(0, \pm\pi)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{r} (b+1) + \frac{b}{c^2 r^2} (b+1) (c-1) = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b+1}{2r} \pm \frac{1}{2cr} \sqrt{(b+1) (b(c-2)^2 + c^2)}.$$

При любых b корни действительные, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{b}{c^2 r^2} (b+1) (c-1) < 0$, т.е. корни разных знаков, поэтому $(0, \pm\pi)$ – **седло**.

4) $(\pm\pi, 0)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{r} (b+1) + \frac{b}{c^2 r^2} (b+1) (c-1) = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{b+1}{2r} \pm \frac{1}{2cr} \sqrt{(b+1) (b(c-2)^2 + c^2)}.$$

При любых b корни действительные, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{b}{c^2 r^2} (b+1) (c-1) < 0$, т.е. корни разных знаков, поэтому $(\pm\pi, 0)$ – **седло**.

5) $(\pm\pi/2, \pm \arcsin 1/b)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{cr} (c-2) \sqrt{b^2-1} - \frac{(b^2-1)(c-1)}{c^2 r^2} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{b^2-1}}{cr}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{b^2-1}}{cr} (c-1)$$

При $b > 1$ корни действительные, $\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{c^2 r^2} (b^2-1) (c-1) > 0$, т.е. корни одного знака.

Коэффициент при λ в уравнении (1.32) $\frac{1}{cr} (c-2) \sqrt{b^2-1} > 0$, поэтому $(\pm\pi/2, \pm \arcsin 1/b)$ – **устойчивый узел**.

6) $(\pm\pi/2, \pm(\pi - \arcsin 1/b))$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{cr} (c-2) \sqrt{b^2-1} - \frac{(b^2-1)(c-1)}{c^2 r^2} = 0.$$

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{b^2-1}}{cr}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{b^2-1}}{cr} (c-1)$$

При $b > 1$ корни действительные, $\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{c^2 r^2} (b^2-1) (c-1) > 0$, т.е. корни одного знака.

Коэффициент при λ в уравнении (1.32) $-\frac{1}{cr} (c-2) \sqrt{b^2-1} < 0$, поэтому $(\pm\pi/2, \pm \arcsin 1/b)$ – **неустойчивый узел**.

Случай $b = 1$

Проведем исследование положений равновесия уже с учетом полученных ранее характеристических уравнений.

1) $(0, 0)$, $(\pm\pi, \pm\pi)$, тогда уравнение (1.32) примет вид $\lambda^2 = 0$, т.е. $\lambda_{1,2} = 0$ – **вырожденный случай** (прямая $\alpha = \beta$ в плоскости (α, β)).

2) $(0, \pm\pi)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 + \frac{2\lambda}{r} + \frac{2(c-1)}{c^2r^2} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{r} \pm \frac{1}{cr} \sqrt{(c-1)^2 + 1}.$$

Корни действительные, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{2(c-1)}{c^2r^2} < 0$, поэтому $(0, \pm\pi)$ – **седло**.

3) $(\pm\pi, 0)$, тогда уравнение (1.32) примет вид

$$\lambda^2 - \frac{2\lambda}{r} + \frac{2(c-1)}{c^2r^2} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{cr} \sqrt{(c-1)^2 + 1}.$$

Корни действительные, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{2(c-1)}{c^2r^2} < 0$, поэтому $(\pm\pi, 0)$ – **седло**.

4) $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$, тогда уравнение (1.32) примет вид $\lambda^2 = 0$, т.е. $\lambda_{1,2} = 0$ – **вырожденный случай** (прямая $\alpha = \beta$ в плоскости (α, β)).

Классификацию всех особых точек системы (1.18) представим в таблице

Особая точка	Тип	Условия
$b \neq 1$		
$(0, 0)$	уст. узел	$0 < b < 1, b < \frac{c^2}{(c-2)^2}$
	уст. фокус	$0 < b < 1, b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$
	седло	$b > 1, b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$
$(\pm\pi, \pm\pi)$	неуст. узел	$0 < b < 1, b < \frac{c^2}{(c-2)^2}$
	неуст. фокус	$0 < b < 1, b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$
	седло	$b > 1, b > \frac{c^2}{(c-2)^2}$
$(0, \pm\pi), (\pm\pi, 0)$	седло	—
$(\pi/2, \arcsin(1/b)), (-\pi/2, -\arcsin(1/b))$	уст. узел	$b > 1$
$(\pi/2, \pi - \arcsin(1/b)), (-\pi/2, -\pi + \arcsin(1/b))$	неуст. узел	$b > 1$
$b = 1$		
$(0, 0), (\pm\pi, \pm\pi), (\pm\pi/2, \pm\pi/2)$	вырожд. случай	—
$(0, \pm\pi), (\pm\pi, 0)$	седло	—

Таблица 1.1. Классификация особых точек системы (1.18)

1.3.4. Анализ фазовых портретов

Изобразим в плоскости (α, β) фазовые портреты системы (1.18) для случаев $b \in (0, 1)$, $b = 1$ и $b > 1$ (коэффициент $k = 3$)

В плоскости (α, β) изобразим области, в которых $\dot{r} > 0$ и $\dot{r} < 0$. В силу системы (1.15) получим

$$\begin{aligned}\dot{r} > 0 &\iff \cos \alpha - b \cos \beta > 0, \\ \dot{r} < 0 &\iff \cos \alpha - b \cos \beta < 0.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Рассмотрим случай, когда $b \in (0, 1)$. Если провести в плоскости параметров (α, β) горизонтальную прямую $\beta = \beta_0$, то можно выделить несколько начальных значений α_0 , из которых можно попасть на конечное условие $\alpha(T) = 0$ (вертикальная ось). Таким образом, краевая задача (1.15), (1.16) может иметь неединственное решение, поэтому условию оптимальности будет удовлетворять несколько траекторий, из которых нужно выбрать оптимальную в смысле максимизации конечного расстояния.

При $b \geq 1$ можно провести аналогичные рассуждения. В верхней полуплоскости (при $\beta_0 > 0$) можно указать единственную область (см. рис. 6) начальных значений α_0 , из которой можно попасть на конечное условие $\alpha(T) = 0$. Также можно сделать и в нижней полуплоскости, т.е. краевая задача (1.15), (1.16) в таком случае имеет единственное решение, причем если $\beta_0 > 0$, то $\alpha_0 > 0$, а если $\beta_0 < 0$, то $\alpha_0 < 0$.

1.4. Численное моделирование

1.4.1. Решение краевой задачи

Опишем процедуру решения краевой задачи (1.15), (1.16). Пусть задано некоторое начальное условие $\alpha_0(0)$, тогда решая численно задачу Коши, мы будем находить $\alpha_0(T)$. Если взять другое начальное условие $\alpha_1(0)$, то решению задачи Коши находим $\alpha_1(T)$. Таким образом, начальное условие $\alpha(0)$ и конечное условие $\alpha(T)$ заданы некоторой неизвестной функциональной зависимостью $\alpha(T) = f(\alpha(0))$. Требуется отыскать такое $\alpha(0)$, чтобы $\alpha(T) = 0$, т.е. найти корень нелинейного уравнения $f(x) = 0$, где $x = \alpha(0)$.

Существует множество численных методов нахождения корня уравнения $f(x) = 0$, например, метод касательных, секущих, метод простой итераций. В нашем случае функция не имеет явного аналитического выражения. Поэтому самым подходящим методом будет являться метод деления отрезка пополам (дихотомии, бисекций).

Зададим набор значений $\alpha_i(0) \in [-\pi, \pi]$ с некоторым шагом δ . Далее, решая задачу Коши для системы (1.25) с начальными условиями (1.16), найдем значения $\alpha_i(T)$. Используя условие $f(\alpha_{i-1}(0)) \cdot f(\alpha_i(0)) = \alpha_{i-1}(T) \cdot \alpha_i(T) < 0$, выделим на $[-\pi, \pi]$ отрезки локализации корней (если их несколько). На полученных отрезках решаем уравнение методом дихотомии с заданной точностью ε .

Как только корень $\alpha(0)$ уравнения $f(\alpha(0)) = 0$ найден, можно определить законы движения материальных точек путем совместного интегрирования (1.15) и кинематической системы

$$\dot{x}_1 = b \cos(\theta + \beta), \quad \dot{y}_1 = b \sin(\theta + \beta), \quad \dot{x}_2 = \cos(\theta + \alpha), \quad \dot{y}_2 = \sin(\theta + \alpha), \quad (1.34)$$

где (x_1, y_1) – координаты преследователя, (x_2, y_2) – координаты цели. Также добавим к уравнениям (1.15) и (1.34) соотношение метода пропорционального наведения

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\beta}}{k} = \frac{1-k}{k} \cdot \frac{b \sin \beta - \sin \alpha}{r} \quad (1.35)$$

Начальные положения точек заданы

$$x_1(0) = x_{10}, \quad y_1(0) = y_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (1.36)$$

При этом

$$r(0) = r_0 = \sqrt{(x_{10} - y_{10})^2 + (x_{20} - y_{20})^2}.$$

Для удобства начальные положения материальных точек можно задать на прямой, которая составляет угол θ_0 с осью Ox , тогда по начальным координатам одной из точек, например (x_{10}, y_{10}) , легко определить начальные координаты другой точки

$$x_{20} = x_{10} + r_0 \cos \theta_0, \quad y_{20} = y_{10} + r_0 \sin \theta_0.$$

При численном моделировании точки располагаются в начальный момент времени на оси Ox : $x_{10} = y_{10} = 0$, $x_{20} = r_0$, $y_{20} = 0$.

1.4.2. Результаты вычислений

Случай $b \in (0, 1)$

Параметры расчета $b = 0.7, k = 3, T = 8, r_0 = 2$.

Случай $b = 1$

Параметры расчета $k = 3, T = 10, r_0 = 2$.

Случай $b > 1$

Параметры расчета $b = 2, k = 3, T = 4, r_0 = 8$.

Управление $u(t)$

Параметры расчета выбираются в соответствии со случаями $b \in (0, 1)$ и $b \geq 1$. Управление $u(t)$ задается по формуле (1.17). Приведем характерные зависимости управления

Случай $b \in (0, 1)$

Случай $b \geq 1$

Глава 2.

Оптимальное сближение объектов в случае гибридного закона пропорционального наведения

2.1. Постановка задачи

Пусть в горизонтальной плоскости (рис. ??) движутся две материальные точки: объект P и объект E , θ – угол между линией PE и осью Ox , β – угол между линией PE и направлением вектора скорости v_P , α – угол между линией PE и направлением вектора скорости v_E .

Уравнения движения материальных точек в безразмерном виде

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \end{cases} \quad (2.1)$$

где r – расстояние между объектами, $b = v_P/v_E$ – отношение скоростей участников. Управлениями в системе служат кусочно-непрерывная функция $w = 1 - k$, $w_1 \leq w \leq w_2 < 0$), $k > 1$ – коэффициент в законе пропорционального наведения ($\dot{\beta} = k\dot{\theta}$) и угол α .

Начальные условия имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (2.2)$$

Кинематические уравнения:

$$\dot{x}_1 = b \cos(\theta + \beta), \quad \dot{y}_1 = b \sin(\theta + \beta), \quad \dot{x}_2 = \cos(\theta + \alpha), \quad \dot{y}_2 = \sin(\theta + \alpha), \quad (2.3)$$

где (x_1, y_1) – координаты преследователя, (x_2, y_2) – координаты цели.

Начальные положения точек заданы

$$x_1(0) = x_{10}, \quad y_1(0) = y_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.4)$$

Цель управления – минимизация конечного расстояния между объектами при за-

данном времени процесса (задача встречи):

$$\mathcal{J} = r(T) \longrightarrow \min_{\alpha(\cdot), w(\cdot)} \quad (2.5)$$

2.2. Применение принципа максимума

Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [23]. Введем в рассмотрение функцию Понтрягина

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + w \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) = H_0 + H_1 w, \quad (2.6)$$

где коэффициент $H_1 = \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha)$.

Сопряженная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_\beta = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{r} w b \cos \beta, \end{cases} \quad (2.7)$$

Условия трансверсальности

$$\psi_\beta(T) = 0, \quad \psi_r(T) = -1. \quad (2.8)$$

Необходимое условие оптимальности по управлениям α, w :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \quad w = \begin{cases} w_1, & H_1 < 0, \\ w_2, & H_1 > 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\psi_r \sin \alpha - w \frac{\psi_\beta}{r} \cos \alpha = 0 \iff w \psi_\beta \cos \alpha = -\psi_r r \sin \alpha. \quad (2.10)$$

С учетом условия оптимальности (2.10) функция Понтрягина (2.6) примет вид

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) - \frac{\psi_r r \operatorname{tg} \alpha}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \quad (2.11)$$

или

$$\psi_r ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) = \operatorname{const}. \quad (2.12)$$

Продифференцируем условие (2.12) в силу систем (2.1) и (2.7), а также условия

оптимальности (2.10)

$$\begin{aligned}
& \dot{\psi}_r ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) + \psi_r \left(\left(-\sin \alpha \dot{\alpha} + b \sin \beta \dot{\beta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \dot{\alpha} (b \sin \beta - \sin \alpha) - \operatorname{tg} \alpha (b \cos \beta \dot{\beta} - \cos \alpha \dot{\alpha}) \right) = 0 \iff \\
& \iff \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha) ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) + \\
& \quad + \psi_r \dot{\beta} (b \sin \beta - \operatorname{tg} \alpha b \cos \beta) = \frac{\psi_r}{\cos^2 \alpha} \dot{\alpha} (b \sin \beta - \sin \alpha) \iff \\
& \iff -\frac{\psi_r}{r} \operatorname{tg} \alpha ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) + \\
& \quad + \frac{\psi_r}{r} w b (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha) = \frac{\psi_r \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем уравнение на α :

$$\dot{\alpha} = \frac{wb}{r} \cos^2 \alpha (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{r} \sin \alpha \cos \alpha ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)). \quad (2.13)$$

Преобразуем первое слагаемое (2.13)

$$\begin{aligned}
\cos^2 \alpha \left(\sin \beta - \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) &= \cos^2 \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \cos \alpha = \\
&= \cos^2 \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha (\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha) = \\
&= \cos \alpha \sin (\beta - \alpha).
\end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое (2.13)

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cos \alpha ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) &= \sin \alpha \cos^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \\
&- b \sin^2 \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \\
&- b \sin \beta \sin^2 \alpha = \sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - b \sin \alpha (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\
&= \sin \alpha (1 - b \cos (\alpha - \beta)).
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (2.13) преобразуется к виду

$$\dot{\alpha} = \frac{wb}{r} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha) + \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos (\alpha - \beta) - 1). \quad (2.14)$$

Проанализируем условие оптимальности (2.10). При $t = T$ с учетом условия трансверсальности (2.8):

$$w(T) \psi_\beta(T) \cos \alpha(T) = -\psi_r(T) r(T) \sin \alpha(T) \iff \psi_r(T) r(T) \sin \alpha(T) = 0.$$

Поскольку $r(T) \neq 0$, то либо $\psi_r(T) = 0$, либо $\sin \alpha(T) = 0$. $\psi_r(T) \neq 0$ в силу условий трансверсальности (2.8). Тогда $\sin \alpha(T) = 0$, откуда $\cos \alpha(T) = \pm 1$. Чтобы определиться

со знаком, найдем вторую производную функции Понтрягина

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = -\psi_r \cos \alpha + w \frac{\psi_\beta}{r} \sin \alpha.$$

При $t = T$ условие максимума функции H :

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \right|_{t=T} = -\psi_r(T) \cos \alpha(T) < 0 \iff \cos \alpha(T) < 0.$$

Отсюда $\cos \alpha(T) = -1$ и $\alpha(T) = \pi$.

2.3. Наличие особого управления

Рассмотрим случай особого управления, т.е. когда $H_1 \equiv 0$, $t \in [t_1, t_2] \subseteq [0, T]$:

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + w \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) = H_0 + H_1 w, \quad (2.15)$$

Тогда

$$H_1 \equiv 0 \iff \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) \equiv 0 \iff \begin{cases} \psi_\beta \equiv 0, \\ b \sin \beta - \sin \alpha \equiv 0. \end{cases}$$

При $\psi_\beta \equiv 0$ из условия оптимальности (2.10) получим, что $\psi_r r \sin \alpha \equiv 0$, откуда либо $\psi_r \equiv 0$, либо $\sin \alpha \equiv 0$. Если $\psi_r \equiv 0$, то обе сопряженные переменные ψ_β и ψ_r тождественно равны нулю, что противоречит принципу максимума. Тогда остается случай, когда $\sin \alpha \equiv 0$. Если $\sin \alpha \equiv 0$, то $\alpha \equiv \pi k = \text{const}$, т.е. $\dot{\alpha} = 0$ и в силу уравнения (2.14) получим

$$\dot{\alpha} = \frac{wb}{r} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha) = \frac{wb}{r} \cos \alpha (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) = \frac{wb}{r} \cos^2 \alpha \sin \beta = \frac{wb}{r} \sin \beta,$$

откуда $\sin \beta = 0$. Таким образом при $\psi_\beta \equiv 0$ получим $\sin \alpha \equiv 0$ и $\sin \beta \equiv 0$ – цель и преследователь движутся вдоль линии визирования.

Продифференцируем H_1 в силу систем (2.1), (2.7):

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= \frac{\dot{\psi}_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) - \frac{1}{r^2} \dot{r} \psi_\beta (b \sin \beta - \sin \alpha) + \frac{\psi_\beta}{r} (b \cos \beta \dot{\beta} - \cos \alpha \dot{\alpha}) = \\ &= -\frac{1}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) \left(\psi_r b \sin \beta + \frac{\psi_\beta}{r} w b \cos \beta \right) - \frac{1}{r^2} \psi_\beta (\cos \alpha - b \cos \beta) \times \\ &\quad \times (b \sin \beta - \sin \alpha) + \frac{\psi_\beta}{r} (b \cos \beta \dot{\beta} - \cos \alpha \dot{\alpha}) \equiv 0. \end{aligned}$$

С учетом $H_1 \equiv 0$:

$$\frac{\psi_\beta}{r} b \cos \beta \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) - \frac{\psi_\beta}{r} \cos \alpha \dot{\alpha} \equiv 0 \iff \frac{\psi_\beta}{r} \cos \alpha \dot{\alpha} \equiv 0 \iff \begin{cases} \psi_\beta \equiv 0, \\ \cos \alpha \equiv 0, \\ \dot{\alpha} \equiv 0. \end{cases}$$

Если $\cos \alpha \equiv 0$, то в силу условия оптимальности (2.10) и $\sin \alpha \equiv 0$ – противоречие. Тогда

останется случай, когда $\dot{\alpha} \equiv 0$. В итоге при $b \sin \beta - \sin \alpha \equiv 0$ получим $\dot{\alpha} = \dot{\beta} \equiv 0$, т.е. цель и преследователь образуют постоянные углы с линией визирования. Далее $\ddot{H}_1 \equiv 0$ и выражение для особого управления найти не удастся.

Рассмотрим более подробно получившиеся особые режимы движения игроков. В случае движения объектов вдоль линии визирования, т.е. при $\sin \alpha \equiv 0$ и $\sin \beta \equiv 0$ (для задачи встречи $\alpha(t) \equiv \pi$ и $\beta(t) \equiv 0$), первое уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\dot{r} = -1 - b \quad (2.16)$$

Данное уравнение легко проинтегрировать. С учетом (2.2):

$$r(t) = r_0 - (1 + b)t. \quad (2.17)$$

Как видно из (2.17), функция $r(t)$ является убывающей, т.е. с течением времени расстояние между объектами уменьшается. Определим момент встречи:

$$t_0 = \frac{r_0}{1 + b}.$$

В случае, когда объекты образуют постоянные углы с линией визирования, т.е. при $\dot{\alpha} \equiv 0$ и $\dot{\beta} \equiv 0$ помимо этого должно выполняться соотношение $b \sin \beta - \sin \alpha = 0$. Пусть $\beta(t) = \beta_0$, тогда $\sin \alpha(t) = b \sin \beta_0$. Данное уравнение имеет решение, если параметры b и β_0 удовлетворяют неравенству $|\sin \beta_0| \leq \frac{1}{b}$ (при $0 < b < 1$ уравнение не имеет решений при любом β_0 , иначе $|\sin \beta_0| > 1$).

При выполнении требуемых условий на разрешимость уравнения $\sin \alpha(t) = b \sin \beta_0$, получим $\alpha(t) = \arcsin(b \sin \beta_0)$, либо $\alpha(t) = \pi - \arcsin(b \sin \beta_0)$. С учетом этого первое уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos(\arcsin(b \sin \beta_0)) - b \cos \beta_0 = \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} - b \cos \beta_0, \\ \dot{r} = \cos(\pi - \arcsin(b \sin \beta_0)) - b \cos \beta_0 = -(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} + b \cos \beta_0). \end{cases} \quad (2.18)$$

Уравнения (2.18) также можно легко проинтегрировать. С учетом (2.2)

$$\begin{cases} r(t) = r_0 + t(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} - b \cos \beta_0), \\ r(t) = r_0 - t(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} + b \cos \beta_0). \end{cases} \quad (2.19)$$

Из второго уравнения (2.19) можно определить момент встречи объектов:

$$t_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} + b \cos \beta_0}.$$

2.4. Метод стрельбы численного решения краевой задачи принципа максимума

Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой [27]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.20)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^m$. Время T окончания процесса будем считать фиксированным. Целевой функционал имеет вид

$$J(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}. \quad (2.21)$$

Данную задачу можно свести к краевой задаче принципа максимума

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, & \boldsymbol{\psi}(T) = \boldsymbol{\psi}_T, \end{cases} \quad (2.22)$$

где $H = \boldsymbol{\psi}^\top \cdot \mathbf{f}$ – функция Понтрягина. Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, t)$ определяется из максимума функции H . Таким образом, задача

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, t), t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, t), \boldsymbol{\psi}, t), & \boldsymbol{\psi}(T) = \boldsymbol{\psi}_T. \end{cases} \quad (2.23)$$

представляет собой двухточечную краевую задачу для системы $2n$ дифференциальных уравнений относительно $2n$ неизвестных.

Для того, чтобы найти решение (2.23), требуется задать некоторым образом n начальных значений $\psi_i(t_0) = \xi_i$. Далее, решая задачу Коши с начальными условиями $x_i(t_0) = x_{0,i}$ и $\psi_i(t_0) = \xi_i$, находим решение $\mathbf{x}(t)$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$. При $t = T$ получим некоторые значения $\psi_i(T) = \tilde{\psi}_i$. В общем случае $\tilde{\psi}_i \neq \psi_{i,T}$. Поэтому введем следующие величины

$$X_i = \tilde{\psi}_i - \psi_{i,T}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

которые представляют собой невязки. Очевидно, что невязки есть функции от ξ_i , т.е. $X_i = X_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Для решения поставленной задачи требуется отыскать такие значения ξ_1, \dots, ξ_n , при которых имеет место система

$$X_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Таким образом, исходная оптимальная задача (2.20) – (2.21) была сведена к задаче отыскания решения нелинейной системы уравнений (2.25). Заметим, что функциональная

зависимость между X_i и ξ_1, \dots, ξ_n задана опосредственно, т.е. для нахождения X_i требуется решить численно задачу Коши для системы $2n$ дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, t), t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, t), \boldsymbol{\psi}, t), & \boldsymbol{\psi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}. \end{cases} \quad (2.26)$$

2.5. Метод Ньютона

Для отыскания решения системы нелинейных уравнений (2.25) воспользуемся методом Ньютона [26]. Пусть $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0 = (\xi_{10}, \dots, \xi_{n0})$ – некоторое начальное приближение. Далее, решая задачу Коши (2.26), получим величины

$$X_i^0 = X_i(\xi_{10}, \dots, \xi_{n0}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.27)$$

Положим $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\delta}_1$. Считаем компоненты δ_{1i} вектора $\boldsymbol{\delta}_1$ малыми величинами. Теперь решаем задачу Коши (2.25) с условием $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_1$, получим величины

$$X_i^1 = X_i(\xi_{10} + \delta_{11}, \dots, \xi_{n0} + \delta_{1n}).$$

Далее, в силу малости δ_{1i} , функции невязок можно разложить в ряд Тейлора с точностью до слагаемых второго порядка:

$$X^i(\xi_{10} + \delta_{11}, \dots, \xi_{n0} + \delta_{1n}) = X_i^0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \right)_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0} \delta_{1j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.28)$$

Выберем компоненты δ_{1i} так, чтобы левые части равенств (2.25) обратились в нуль. Получим систему n линейных уравнений относительно n величин δ_{1i} . Далее, введем матрицу

$$A(\boldsymbol{\xi}) = \left\| \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \right) \right\|, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Будем обозначать через $A_k = A(\boldsymbol{\xi}_k)$. Тогда относительно вектора $\boldsymbol{\delta}_1$ уравнение можно записать в виде

$$A_0 \boldsymbol{\delta}_1 = -\mathbf{X}_0,$$

или

$$\boldsymbol{\delta}_1 = -A_0^{-1} \mathbf{X}_0. \quad (2.29)$$

Далее, в качестве нового приближения принимаем вектор $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_0 - A_0^{-1} \mathbf{X}_0$ и повторяем процесс. Общая схема итерационного процесса имеет вид

$$\boldsymbol{\delta}_k = -A_{k-1}^{-1} \mathbf{X}_{k-1}, \quad \boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \boldsymbol{\delta}_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

На каждом шаге итераций требуется вычислять матрицу A , которая состоит из производных. Их также нужно находить численно. Это требует решения $(n+1)$ задачи Коши для системы $2n$ дифференциальных уравнений. Критерий окончания вычислений можно

принять следующий

$$\|\mathbf{X}_k\| < \varepsilon, \quad (2.31)$$

где ε – заданная точность вычислений.

Основной трудностью при решении задачи методом Ньютона является подбор начального приближения ξ_0 . Если начальное приближение ξ_0 выбрано достаточно близко к значению $\tilde{\xi}_0$ точного решения системы (2.25), то метод Ньютона будет очень быстро сходиться.

Для решения этой проблемы существуют многочисленные модификации метода Ньютона. Одна из таких модификации состоит в замене итерационного процесса (2.26) следующим

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \kappa_k A_k^{-1} \mathbf{X}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.32)$$

где $0 < \kappa_k < 1$ – некоторый скалярный параметр. Существует множество способов выбора κ_k , которые основываются на выполнении условия

$$\|\mathbf{X}_{k+1}\| < \|\mathbf{X}_k\|,$$

где в качестве нормы $\|\mathbf{X}\|$ принимают либо $\max_i |X^i|$, либо $(\sum_i X_i^2)^{1/2}$. Параметр κ_k можно выбирать на каждой итерации путем решения следующей одномерной задачи оптимизации

$$\kappa_k = \operatorname{argmin}_{\kappa} \|\mathbf{X} (\xi_{k-1} - \kappa A_{k-1}^{-1} \mathbf{X}_{k-1})\| \quad (2.33)$$

Приведем достаточно простую модификацию метода Ньютона без решения на каждой итерации задачи оптимизации.

Задаем вектор ξ_0 и вычисляем δ_1 по формуле $\delta_1 = -A_0^{-1} \mathbf{X}_0$. Далее, находим

$$\xi_1^* = \xi_0 + \delta_1, \quad \mathbf{X}_1^* = \mathbf{X} (\xi_0 + \delta_1).$$

Если окажется, что $\|\mathbf{X}_1^*\| \leq \|\mathbf{X}_0\|$, то принимаем $\xi_1 = \xi_0 + \delta_1$ и делаем следующий шаг, т.е. вычисляем $\delta_2 = -A_1^{-1} \mathbf{X}_1$. Если $\|\mathbf{X}_1^*\| > \|\mathbf{X}_0\|$, то вычисляем

$$\xi_1^* = \xi_0 + \frac{1}{2} \delta_1, \quad \mathbf{X}_1^* = \mathbf{X} \left(\xi_0 + \frac{1}{2} \delta_1 \right).$$

Если окажется, что $\|\mathbf{X}_1^*\| \leq \|\mathbf{X}_0\|$, то принимаем $\xi_1 = \xi_0 + \frac{1}{2} \delta_1$ и делаем следующий шаг. В противном случае еще раз уменьшаем величину δ_1 , т.е. берем $\xi_1^* = \xi_0 + \frac{1}{4} \delta_1$ и т.д.

Применение подобной процедуры расширяет возможности применения метода Ньютона на практике, однако в общем случае не дает гарантии сходимости метода для случая произвольного начального приближения ξ_0 .

2.6. Алгоритм численного решения задачи

Перейдем к численному решению задачи оптимального управления, которая с помощью принципа максимума Понтрягина была сведена к двухточечной краевой задаче для си-

СТЕМЫ

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_\beta = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{r} u b \cos \beta. \end{cases} \quad (2.34)$$

с краевыми условиями

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \psi_r(T) = -1, \quad \psi_\beta(T) = 0. \quad (2.35)$$

Управление w выбирается по следующему правилу

$$w = \begin{cases} w_1, & H_1 < 0, \\ w_2, & H_1 > 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где $H_1 = \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha)$, а управление $\alpha(t) = \pi - \arctg\left(\frac{\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{w}{r}\right)$, $\alpha(T) = \pi$.

Будем решать задачу (2.34) – (2.36) методом стрельбы. Для этого нужно определить неизвестные параметры $\psi_r(0)$ и $\psi_\beta(0)$, чтобы в момент окончания процесса удовлетворялись условия $\psi_r(T) = -1$, $\psi_\beta(T) = 0$. Однако, при интегрировании в «прямом» времени от $t = 0$ до $t = T$ требуется значение $w(0)$. Поскольку выбор управления w осуществляется по правилу (2.36), т.е. должно быть известным $H_1(0)$. Поскольку для его нахождения требуется начальное значение $\alpha(0)$, то встает вопрос о $w(0)$.

Для решения данной проблемы поступим следующим образом. Поскольку известны значения $\alpha(T)$, $\psi_r(T)$ и $\psi_\beta(T)$, то будем решать задачу (2.34) – (2.36) в «обратном» времени, т.е. от $t = T$ до $t = 0$. Для этого сделаем замену $\tau = T - t$, тогда при $t = T$ получим $\tau = 0$, а при $t = 0$ получим $\tau = T$. Теперь перепишем уравнения (2.34) в новом времени τ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = -\frac{dr}{d\tau} = \cos \alpha - b \cos \beta \implies r' = b \cos \beta - \cos \alpha, \\ \dot{\beta} &= \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) \implies \beta' = \frac{u}{r} (\sin \alpha - b \sin \beta), \\ \dot{\psi}_r &= \frac{d\psi_r}{dt} = -\frac{d\psi_r}{d\tau} = \frac{\psi_\beta}{r^2} u (b \sin \beta - \sin \alpha) \implies \psi'_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} u (\sin \alpha - b \sin \beta), \\ \dot{\psi}_\beta &= \frac{d\psi_\beta}{dt} = -\frac{d\psi_\beta}{d\tau} = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{r} u b \cos \beta \implies \psi'_\beta = \psi_r b \sin \beta + \frac{\psi_\beta}{r} u b \cos \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача (2.34) – (2.36) в «новом» времени примет вид

$$\begin{cases} r' = b \cos \beta - \cos \alpha, \\ \beta' = \frac{u}{r} (\sin \alpha - b \sin \beta), \\ \psi'_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} u (\sin \alpha - b \sin \beta), \\ \psi'_\beta = \psi_r b \sin \beta + \frac{\psi_\beta}{r} u b \cos \beta. \end{cases} \quad (2.37)$$

Краевые условия

$$\psi_r(0) = -1, \quad \psi_\beta(0) = 0, \quad r(T) = r_0, \quad \beta(T) = \beta_0. \quad (2.38)$$

Управление w выбирается по следующему правилу

$$w = \begin{cases} w_1, & H_1 < 0, \\ w_2, & H_1 > 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

где $H_1 = \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha)$, а управление $\alpha(t) = \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{w}{r} \right)$, $\alpha(0) = \pi$.

При интегрировании от $t = T$ до $t = 0$ нужно знать значение $w(T)$, которое, согласно (2.36), определяется по знаку $H_1(T)$. Однако, в силу (2.35), $H_1(T) = 0$. Для того, чтобы определить значение $w(T)$, исследуем знак \dot{H}_1 в окрестности $t = 0$. Вычислим производную в силу системы (2.34):

$$\begin{aligned}\dot{H}_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) \right) = \frac{\psi'_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) - \frac{1}{r^2} \psi_\beta r' (b \sin \beta - \sin \alpha) + \\ &+ \frac{\psi_\beta}{r} \frac{d}{dt} (b \sin \beta - \sin \alpha) = \frac{1}{r} \left(\psi_r b \sin \beta + \frac{\psi_\beta}{r} u b \cos \beta \right) (b \sin \beta - \sin \alpha) - \\ &- \frac{1}{r^2} \psi_\beta (b \cos \beta - \cos \alpha) (b \sin \beta - \sin \alpha) + \frac{\psi_\beta}{r} \frac{d}{dt} (b \sin \beta - \sin \alpha) .\end{aligned}$$

Откуда

$$\dot{H}_1(T) = \frac{1}{r(T)} b^2 \sin^2 \beta(T) > 0.$$

Таким образом, $H_1(T) = 0$ и $\dot{H}_1(T) > 0$, т.е. в малой окрестности $t = T$ функция $H_1(t)$ возрастает, значит подходит к значению $t = T$ снизу. Поэтому, можем считать, что при $T - \varepsilon < t < T$ функция $H_1(t) < 0$, значит управление $w(T)$ по правилу (2.35) выбираем равным u_1 .

Для решения задачи (2.37) – (2.39) методом стрельбы нужно определить такие $r(0)$ и $\beta(0)$, чтобы в момент окончания процесса были выполнены краевые условия $r(T) = r_0$ и $\beta(T) = \beta_0$, которые в «прямом» времени были начальными. С точки зрения выбора начального приближения, переход к новому времени обоснован, поскольку становится ясным, из каких соображений выбирать $r(0)$ и $\beta(0)$. Величина $r(0)$ имеет смысл расстояния между объектами в начальный момент времени и $r(0) > 0$, $\beta(0)$ – угол между вектором скорости преследователя и линией визирования, поэтому можно подбирать $\beta(0)$ в пределах от 0 до π .

2.7. Результаты численного моделирования

Параметры расчета: $b = 1.5$, $w_1 = -4$, $w_2 = -0.5$, $T = 4$

Параметры расчета: $b = 2$, $w_1 = -2$, $w_2 = -0.5$, $T = 5$

Параметры расчета: $b = 2$, $w_1 = -4$, $w_2 = -0.5$, $T = 5$

Параметры расчета: $b = 1$, $w_1 = -4$, $w_2 = -0.5$, $T = 5$

Параметры расчета: $b = 1$, $w_1 = -4$, $w_2 = -0.5$, $T = 10$

2.8. Траектории сравнения

Проведем анализ полученных оптимальных траекторий. Для этого построим траектории объектов в случае известной стратегии объекта E . В качестве таких стратегий можно рассмотреть метод погони [24] и пропорциональное наведение с постоянным коэффициентом $k_1 > 1$ (уравнение $\dot{\alpha} = k_1 \dot{\theta}$).

2.8.1. Метод погони

В случае метода погони для объекта E положим $\alpha(t) \equiv \pi$, тогда (2.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = -1 - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} b \sin \beta. \end{cases} \quad (2.40)$$

Начальные условия имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (2.41)$$

Для построения траекторий «сравнения» решим задачу Коши для систем (2.40), (2.3) с начальными условиями (2.41) и (2.4), которые совпадают в случае решения оптимальной задачи сближения. Далее, сравним значения $r(T)$.

Параметры расчета: $b = 1$, $w_1 = -4$, $w_2 = -0.5$, $T = 5$.

2.8.2. Метод пропорционального наведения для объекта E

Если объект E наводится также с помощью метода пропорционального наведения [24] с постоянным коэффициентом $k_1 > 1$, т.е. $\dot{\alpha} = k_1 \dot{\theta}$. Тогда, с учетом уравнения метода пропорционального наведения для преследователя $\dot{\beta} = k \dot{\theta}$ и уравнения (2.1), получим

$$\dot{\alpha} = k_1 \dot{\theta} = \frac{k_1}{k} \dot{\beta} = \frac{k_1}{1-w} \cdot \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha). \quad (2.42)$$

Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\alpha} = \frac{k_1}{1-w} \cdot \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha). \end{cases} \quad (2.43)$$

Начальные условия имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.44)$$

Для построения траекторий «сравнения» также, как и в случае метода погони, решим задачу Коши для систем (2.43), (2.3) с начальными условиями (2.44) и (2.4), которые совпадают в случае решения оптимальной задачи сближения. Далее, сравним значения $r(T)$.

Параметр k_1 в методе пропорционального наведения для объекта E будем выбирать как решение следующей задачи одномерной минимизации:

$$k_1 = \underset{\underline{k} \leq k_1 \leq \bar{k}}{\operatorname{argmin}} r(T) \quad (2.45)$$

Параметры расчета: $b = 2$, $w_1 = -4$, $w_2 = -0.5$, $T = 3$, $k_{\text{extr}} = 2.08$

2.8.3. Гибридный метод пропорционального наведения для цели

В данном случае объект E будет наводиться на преследователя с помощью гибридного закона пропорционального наведения $\dot{\alpha} = k_1(t)\dot{\theta}$, где коэффициент $k_1(t)$ определяется из решения задачи оптимального управления (2.1) – (2.5). Воспользуемся уравнением (2.14) для $\dot{\alpha}$ и уравнением метода пропорционального наведения $\dot{\beta} = (1 - w)\dot{\theta}$, тогда

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\beta}}{1 - w} = \frac{w}{r(1 - w)} (b \sin \beta - \sin \alpha). \quad (2.46)$$

Откуда выражение для коэффициента $k_1(t)$ примет вид

$$k_1(t) = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\theta}} = \frac{r(1 - w)}{w(b \sin \beta - \sin \alpha)} \left[\frac{wb}{r} \cos \alpha \sin(\beta - \alpha) + \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos(\alpha - \beta) - 1) \right] \quad (2.47)$$

Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\alpha} = \frac{k_1(t)}{1 - w} \cdot \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \end{cases} \quad (2.48)$$

где коэффициент $k_1(t)$ определяется формулой (2.47)

Начальные условия имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.49)$$

Подберем коэффициент $k_1(t)$ наведения у объекта E из класса кусочно-постоянных функций с одним переключением в виде

$$k_1(t) = \begin{cases} k_{\min}, & 0 \leq t \leq \tau^*, \\ k_{\max}, & \tau^* < t \leq T, \end{cases} \quad (2.50)$$

где τ^* – момент переключения. Опишем процедуру подбора закона наведения (2.50). Для этого решим оптимальную задачу (2.1) – (2.5) и найдем коэффициент $k_1(t)$. Далее, исходя из вида графика $k_1(t)$, задаем коэффициенты k_{\min} и k_{\max} и решаем задачу Коши (2.48) – (2.49) с заданным законом $k_1(t)$. Момент переключения τ^* определяется как решение одномерной задачи минимизации

$$\tau^* = \operatorname{argmin}_{0 \leq \tau \leq T} r(T) \quad (2.51)$$

Если $\tau^* = 0$ или $\tau^* = T$, то переключения коэффициента в законе (2.50) нет, т.е. $k_1(t) = k_{\min}$ или $k_1(t) = k_{\max}$ при $0 \leq t \leq T$.

Параметры расчета: $b = 1$, $w(t) = -6$, $T = 5$, $r_0 = 20$, $\beta_0 = \pi/4$.

Исходя из графика $k_1(t)$ выберем коэффициенты $k_{\min} = 2.5$ и $k_{\max} = 6$. Момент переключения $\tau^* = 3.67$.

Глава 3.

Оптимальное уклонение объектов в случае гибридного закона пропорционального наведения

3.1. Постановка задачи

Пусть в горизонтальной плоскости движутся две материальные точки: преследователь P и цель E , θ – угол между линией PE и осью Ox , β – угол между линией PE и направлением вектора скорости преследователя v_P , α – угол между линией PE и направлением вектора скорости цели v_E .

Уравнения движения материальных точек в безразмерном виде

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \end{cases} \quad (3.1)$$

где r – расстояние между объектами, $b = v_P/v_E$ – отношение скоростей участников. Управлениями в системе служат кусочно-непрерывная функция $w = 1 - k$, $w_1 \leq w \leq w_2 < 0$), $k > 1$ – коэффициент в законе пропорционального наведения ($\dot{\beta} = k\dot{\theta}$) и угол α .

Начальные условия имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (3.2)$$

Кинематические уравнения:

$$\dot{x}_1 = b \cos(\theta + \beta), \quad \dot{y}_1 = b \sin(\theta + \beta), \quad \dot{x}_2 = \cos(\theta + \alpha), \quad \dot{y}_2 = \sin(\theta + \alpha), \quad (3.3)$$

где (x_1, y_1) – координаты преследователя, (x_2, y_2) – координаты цели.

Начальные положения точек заданы

$$x_1(0) = x_{10}, \quad y_1(0) = y_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (3.4)$$

Цель управления – максимизация конечного расстояния между объектами при за-

данном времени процесса:

$$\mathcal{J} = -r(T) \longrightarrow \min_{\alpha(\cdot), w(\cdot)} \quad (3.5)$$

3.2. Применение принципа максимума

Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина. Введем в рассмотрение функцию Понтрягина

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + w \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) = H_0 + H_1 w, \quad (3.6)$$

где коэффициент $H_1 = \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha)$.

Сопряженная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_\beta = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{r} w b \cos \beta, \end{cases} \quad (3.7)$$

Условия трансверсальности

$$\psi_\beta(T) = 0, \quad \psi_r(T) = 1. \quad (3.8)$$

Необходимое условие оптимальности по управлениям α, w :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \quad w = \begin{cases} w_1, & H_1 < 0, \\ w_2, & H_1 > 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\psi_r \sin \alpha - w \frac{\psi_\beta}{r} \cos \alpha = 0 \iff w \psi_\beta \cos \alpha = -\psi_r r \sin \alpha. \quad (3.10)$$

С учетом условия оптимальности (3.10) функция Понтрягина (3.6) примет вид

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) - \frac{\psi_r r \operatorname{tg} \alpha}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \quad (3.11)$$

или

$$\psi_r ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) = \text{const}. \quad (3.12)$$

Продифференцируем условие (3.12) в силу систем (3.1) и (3.7), а также условия оптималь-

ности (3.10)

$$\begin{aligned}
& \dot{\psi}_r ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) + \psi_r \left(\left(-\sin \alpha \dot{\alpha} + b \sin \beta \dot{\beta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \dot{\alpha} (b \sin \beta - \sin \alpha) - \operatorname{tg} \alpha (b \cos \beta \dot{\beta} - \cos \alpha \dot{\alpha}) \right) = 0 \iff \\
& \iff \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha) ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) + \\
& \quad + \psi_r \dot{\beta} (b \sin \beta - \operatorname{tg} \alpha b \cos \beta) = \frac{\psi_r}{\cos^2 \alpha} \dot{\alpha} (b \sin \beta - \sin \alpha) \iff \\
& \iff -\frac{\psi_r}{r} \operatorname{tg} \alpha ((\cos \alpha - b \cos \beta) - \operatorname{tg} \alpha (b \sin \beta - \sin \alpha)) + \\
& \quad + \frac{\psi_r}{r} w b (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha) = \frac{\psi_r \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получим уравнение для $\dot{\alpha}$:

$$\dot{\alpha} = \frac{wb}{r} \cos \alpha \sin (\beta - \alpha) + \frac{1}{r} \sin \alpha (b \cos (\alpha - \beta) - 1). \quad (3.13)$$

Проанализируем условие оптимальности (3.10). При $t = T$ с учетом условия трансверсальности (3.8):

$$w(T) \psi_\beta(T) \cos \alpha(T) = -\psi_r(T) r(T) \sin \alpha(T) \iff \psi_r(T) r(T) \sin \alpha(T) = 0.$$

Поскольку $r(T) \neq 0$, то либо $\psi_r(T) = 0$, либо $\sin \alpha(T) = 0$. $\psi_r(T) \neq 0$ в силу условий трансверсальности (3.8). Тогда $\sin \alpha(T) = 0$, откуда $\cos \alpha(T) = \pm 1$. Чтобы определиться со знаком, найдем вторую производную функции Понтрягина

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} = -\psi_r \cos \alpha + w \frac{\psi_\beta}{r} \sin \alpha.$$

При $t = T$ условие максимума функции H :

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \right|_{t=T} = -\psi_r(T) \cos \alpha(T) < 0 \iff \cos \alpha(T) > 0.$$

Отсюда $\cos \alpha(T) = 1$ и $\alpha(T) = 0$.

3.3. Наличие особого управления

Анализ случая особого управления, т.е. когда $H_1 \equiv 0$, $t \in [t_1, t_2] \subseteq [0, T]$:

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + w \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha) = H_0 + H_1 w, \quad (3.14)$$

полностью совпадает с анализом, проведенным в главе 2. Приведем только основной результат. Поверхностями особого управления являются следующие:

- $\sin \alpha \equiv 0$ и $\sin \beta \equiv 0$ – цель и преследователь движутся вдоль линии визирования.
- $b \sin \beta - \sin \alpha \equiv 0$ и $\dot{\alpha} = \dot{\beta} \equiv 0$, – цель и преследователь образуют постоянные углы с линией визирования.

Выражение для особого управления, как и в случае задачи встречи, найти не удастся, система является неуправляемой.

Аналогичным образом проведем анализ траекторий объектов на особых режимах. В случае движения объектов вдоль линии визирования, т.е. при $\sin \alpha \equiv 0$ и $\sin \beta \equiv 0$ (для задачи уклонения $\alpha(t) \equiv 0$ и $\beta(t) \equiv 0$), первое уравнение (3.1) можно записать в виде ¹

$$\dot{r} = 1 - b \quad (3.15)$$

Интегрируя данное уравнение с учетом (3.2), получим

$$r(t) = r_0 + (1 - b)t. \quad (3.16)$$

В зависимости от коэффициента при переменной t в формуле (3.16), возможны следующие ситуации: в случае $0 < b < 1$ (быстродвижущаяся цель) расстояние между объектами увеличивается, в случае $b > 1$ – расстояние уменьшается. Момент времени t_0 , когда $r(t_0) = 0$ вычисляется как:

$$t_0 = \frac{r_0}{b - 1}.$$

В случае, когда объекты образуют постоянные углы с линией визирования, т.е. при $\dot{\alpha} \equiv 0$ и $\dot{\beta} \equiv 0$ помимо этого должно выполняться соотношение $b \sin \beta - \sin \alpha = 0$. Пусть $\beta(t) = \beta_0$, тогда $\sin \alpha(t) = b \sin \beta_0$. Данное уравнение имеет решение, если параметры b и β_0 удовлетворяют неравенству $|\sin \beta_0| \leq \frac{1}{b}$ (при $0 < b < 1$ уравнение не имеет решений при любом β_0 , иначе $|\sin \beta_0| > 1$).

При выполнении требуемых условий на разрешимость уравнения $\sin \alpha(t) = b \sin \beta_0$, получим $\alpha(t) = \arcsin(b \sin \beta_0)$, либо $\alpha(t) = \pi - \arcsin(b \sin \beta_0)$. С учетом этого первое уравнение (3.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos(\arcsin(b \sin \beta_0)) - b \cos \beta_0 = \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} - b \cos \beta_0, \\ \dot{r} = \cos(\pi - \arcsin(b \sin \beta_0)) - b \cos \beta_0 = -(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} + b \cos \beta_0). \end{cases} \quad (3.17)$$

¹Случай $\alpha(t) \equiv \pi$ и $\beta(t) \equiv \pi$ будет отличаться только направлением движения объектов.

Уравнения (3.17) также можно легко проинтегрировать. С учетом (3.2)

$$\begin{cases} r(t) = r_0 + t\left(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} - b \cos \beta_0\right), \\ r(t) = r_0 - t\left(\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} + b \cos \beta_0\right). \end{cases} \quad (3.18)$$

Из второго уравнения (3.18) можно определить момент встречи объектов:

$$t_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta_0} + b \cos \beta_0}.$$

3.4. Результаты численного моделирования

Перейдем к численному решению задачи оптимального управления, которая с помощью принципа максимума Понтрягина была сведена к двухточечной краевой задаче для системы

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_\beta = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{r} w b \cos \beta. \end{cases} \quad (3.19)$$

с краевыми условиями

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \psi_r(T) = 1, \quad \psi_\beta(T) = 0. \quad (3.20)$$

Управление w выбирается по следующему правилу

$$w = \begin{cases} w_1, & H_1 < 0, \\ w_2, & H_1 > 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

где $H_1 = \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha)$, а управление $\alpha(t) = -\arctg\left(\frac{\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{w}{r}\right)$, $\alpha(T) = 0$.

Решение краевой задачи (3.19) – (3.21) проводилось с помощью метода стрельбы. Алгоритм численного решения краевой задачи был подробно описан в главе 2. Приведем результаты численного моделирования

Параметры расчета: $b = 1.5$, $w_1 = -4$, $w_2 = -2$, $T = 6$

Параметры расчета: $b = 1$, $w_1 = -5$, $w_2 = -4$, $T = 3$

Параметры расчета: $b = 0.5$, $w_1 = -3$, $w_2 = -2$, $T = 12$

При данном наборе параметров было найдено переключение коэффициента $k(t) = 1 - w(t)$ у преследователя.

3.5. Траектории сравнения

3.5.1. Метод погони

Параметры расчета: $b = 1.5$, $w_1 = -4$, $w_2 = -2$, $T = 6$.

3.5.2. Метод пропорционального наведения для цели

Параметры расчета: $b = 1.5$, $w_1 = -4$, $w_2 = -2$, $T = 6$, $k_{\text{extr}} = 1.95$.

Коэффициент k_{extr} выбирается как $k_{\text{extr}} = \operatorname{argmax}_{\underline{k} \leq k_1 \leq \bar{k}} r(T)$.

3.5.3. Метод гибридного пропорционального наведения для цели

Параметры расчета: $b = 1.5$, $w_1 = -4$, $w_2 = -2$, $T = 6$.

Исходя из графика $k_1(t)$ выберем коэффициенты $k_{\min} = 1.5$ и $k_{\max} = 3$. Момент переключения находится как $\tau^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq \tau \leq T} r(T)$. Для данного набора параметров $\tau^* = 2.76$.

Заключение

Задача «преследования-уклонения», которая рассматривалась в данной работе, является одним из классических примеров в теории дифференциальных игр. Для решения подобного рода задач используется подход, который заключается в фиксировании стратегии одного из объектов и формировании задачи оптимального управления для поиска стратегии другого объекта. Стоит отметить, что основные результаты по такому роду задач были получены в линейной постановке, т.е. в предположении, что относительная траектория может быть линеаризована в окрестности линии визирования. Однако такое допущение можно использовать на временах, близких к окончанию процесса. При этом необходимо учитывать запаздывание в системе наведения преследователя. Если использовать изначально нелинейные уравнения движения игроков, то запаздыванием в системе можно пренебречь.

В качестве основной фиксированной стратегии рассматривался метод пропорционального наведения с постоянным коэффициентом. В случае линейной задачи с линейно-квадратичным критерием качества такая стратегия является оптимальной. Помимо этого, был рассмотрен метод пропорционального наведения с переменным коэффициентом $k(t)$, который может иметь многократные переключения. Для задач в линейной постановке были получены результаты в замкнутом виде (была поставлена и решена задача в форме гибридной дифференциальной игры). Если имеется полная информация о стратегиях наводящегося объекта и моментах переключения коэффициента наведения, то можно получить оптимальный закон, имеющий структуру релейного управления.

Для поиска стратегии одного из игроков в задачах «преследования-уклонения» можно ставить различные оптимальные задачи. В рамках данной работы рассматривается нелинейная модель движения игроков в горизонтальной плоскости, скорости которых постоянны по модулю. В зависимости от коэффициента b , который выражает отношение скоростей цели и преследователя, можно поставить следующие задачи: для случая $0 < b < 1$ целью управления является достижение заданного конечного расстояния $r_T > r_0$ за минимальное время (задача отрыва), для случая $b > 1$ – достижение $r_T < r_0$ за наибольшее время (задача уклонения).

Вместо задачи оптимального управления с функционалом $\mathcal{J} = T \rightarrow \min$ (задача быстродействия) можно рассмотреть задачу максимизации конечного расстояния $r(T)$ за фиксированное время T . Этому была посвящена глава 1 данной работы. Структура нелинейных уравнений движений игроков в случае, когда $\alpha(0)$ свободно, позволяет провести ее редукцию и вместо управления u рассматривать управление $\alpha(t)$. Задача оптимального управления в таком случае формулируется следующим образом: найти такое кусочно – непрерывное управление $\alpha(t)$, при котором функционал $r(T)$ достигает максимума на

траекториях системы при фиксированном времени процесса T . С использованием принципа максимума Понтрягина исходная оптимальная задача сводится к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка относительно $r(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(t)$ с краевыми условиями $r(0) = r_0$, $\beta(0) = \beta_0$ и $\alpha(T) = 0$. Уравнение для управления $\alpha(t)$ было получено путем дифференцирования по времени условия максимума функции Понтрягина и использования исходных и сопряженных уравнений.

Для решения краевой задачи принципа максимума необходимо определить такое значение $\alpha(0)$, при котором в момент окончания процесса выполнено условие $\alpha(T)$. Для полученной нелинейной системы уравнений проводится качественный анализ методом фазовой плоскости: были найдены положения равновесия (стационарные решения $\beta(t) = \text{const}$, $\alpha(t) = \text{const}$), исследован тип каждого из положений равновесия, а также построены фазовые портреты в плоскости (α, β) .

Качественный анализ нелинейной системы позволяет исследовать характерные свойства оптимальных траекторий, а также определить множество начальных приближений для $\alpha(0)$. Помимо этого, для случая $0 < b < 1$ качественный анализ траекторий позволил выявить случай неединственности решения краевой задачи, т.е. существование нескольких траекторий, удовлетворяющих необходимому условию оптимальности. Из нескольких полученных траекторий выбирается та, для которой $r(T)$ максимально. Однако, для некоторого набора параметров был выявлен так называемый «дефект» метода пропорционального наведения, при котором преследователь «отворачивается» от цели. Такое решение, несмотря на то, что на нем достигается максимум $r(T)$, не годится для задач сопровождения, когда цель должна оставаться длительное время в поле зрения преследователя. Для случаев $b \geq 1$ краевая задача имеет единственное решение.

Помимо задач оптимального уклонения цели можно поставить задачу оптимальной встречи, целью управления в которой является минимизация конечного расстояния $r(T)$ в момент окончания процесса T . Для случая постоянного коэффициента пропорционального наведения задача была подробно рассмотрена в [21]. Управлением в системе является также угол $\alpha(t)$. С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления была сведена к краевой задаче для нелинейной системы дифференциальных уравнений. Был проведен качественный анализ полученной системы методом фазовой плоскости для выявления характерных особенностей оптимальных траекторий.

Глава 2 посвящена задаче оптимальной встречи в случае, когда один из игроков может реализовывать метод пропорционального наведения с переменным коэффициентом наведения $k(t)$. Рассматривается уже редуцированная нелинейная система уравнений движения игроков

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \end{cases}$$

где r – расстояние между объектами, $b = v_P/v_E$ – отношение скоростей участников.

Управлениями в системе служат кусочно-непрерывная функция $w(t) = 1 - k(t)$, $w_1 \leq w \leq w_2 < 0$), $k > 1$ – коэффициент в законе пропорционального наведения ($\dot{\beta} = k\dot{\theta}$) и угол α .

Цель управления – минимизация конечного расстояния между объектами при за-

данном времени процесса:

$$\mathcal{J} = r(T) \longrightarrow \min_{\alpha(\cdot), w(\cdot)}.$$

Решение данной оптимальной задачи также проводилось с помощью принципа максимума Понтрягина. Была получена краевая задача для системы нелинейных уравнений четвертого порядка, где помимо фазовых переменных присутствуют и сопряженные переменные:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = \frac{w}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_r = \frac{\psi_\beta}{r^2} w (b \sin \beta - \sin \alpha), \\ \dot{\psi}_\beta = -\psi_r b \sin \beta - \frac{\psi_\beta}{r} u b \cos \beta. \end{cases}$$

Краевые условия

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \psi_r(T) = -1, \quad \psi_\beta(T) = 0.$$

Управление $w(t)$ выбирается по следующему правилу

$$w = \begin{cases} w_1, & H_1 < 0, \\ w_2, & H_1 > 0, \end{cases}$$

где $H_1 = \frac{\psi_\beta}{r} (b \sin \beta - \sin \alpha)$, а управление $\alpha(t) = \pi - \arctg\left(\frac{\psi_\beta}{\psi_r} \cdot \frac{w}{r}\right)$, $\alpha(T) = \pi$.

Решение полученной краевой задачи вызывает некоторые трудности. Управление $w(t)$ выбирается в зависимости от знака функции H_1 , которая зависит от сопряженных переменных. Помимо этого, для интегрирования дифференциальных уравнений требуются начальные значения $\psi_r(0)$ и $\psi_\beta(0)$, которые подбираются таким образом, чтобы в момент окончания процесса $\psi_r(T) = -1$ и $\psi_\beta(T) = 0$. Отсюда возникает проблема выбора начальных приближений для $\psi_r(0)$ и $\psi_\beta(0)$, поскольку они не имеют физического смысла.

Для решения поставленной задачи был предложен следующий подход: решать исходную краевую задачу в «обратном» времени, т.е. сделать замену $\tau = T - t$, тогда краевые значения $\psi_r(T) = -1$ и $\psi_\beta(T) = 0$ станут начальными при $\tau = 0$. Для решения такой краевой задачи требуется определить такие $r(0)$ и $\beta(0)$, чтобы в момент окончания процесса были выполнены условия $r(T) = r_0$ и $\beta(T) = \beta_0$, которые в «прямом» времени были начальными. Такой подход позволяет сузить множество начальных приближений для решения краевой задачи методом стрельбы, поскольку неизвестные параметры стрельбы $r(0)$ и $\beta(0)$ имеют понятный физический смысл – начальное расстояние между объектами ($r(0) > 0$) и угол между вектором скорости преследователя и линией визирования (поэтому можно подбирать $\beta(0)$, например, в пределах от 0 до π).

Также для задачи оптимальной встречи был проведен анализ наличия особого управления по $w(t)$ (функция Понтрягина H является линейной по w). Из соотношений $H_1 \equiv 0$ и $\dot{H}_1 \equiv 0$ была найдена поверхность особого управления: $\sin \alpha \equiv 0$, $\sin \beta \equiv 0$ – движение объектов вдоль линии визирования навстречу друг другу ($\beta \equiv 0$, $\alpha \equiv \pi$), а также $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, $b \sin \beta - \sin \alpha \equiv 0$ – движение объектов, при котором они образуют постоянные

углы с линией визирования. Стоит отметить, что выражение для особого управления явно найти не удастся, на особом режиме управление $w(t)$ выбирается любым из $[w_1, w_2]$ (система неуправляема).

Численное моделирование, проведенное в системе **Wolfram Mathematica**, позволило выявить следующие качественные результаты:

- 1) При численном моделировании не было выявлено случаев переключения коэффициента пропорционального наведения у объекта P , выдвинута гипотеза о том, что функция переключения $H_1(t)$ удовлетворяет условиям: $H_1(t) < 0$, $\dot{H}_1(t) > 0$ при $0 \leq t \leq T$.
- 2) Найдены закон пропорционального наведения для объекта E с постоянным коэффициентом k_1 (при котором полученные траектории близки к экстремальным), а также гибридный закон с переменным коэффициентом $k_1(t)$ в виде двуступенчатого приближения к экстремальному

$$k_1(t) = \begin{cases} k_{\min}, & 0 \leq t \leq \tau^*, \\ k_{\max}, & \tau^* < t \leq T. \end{cases}$$

- 3) При некотором наборе параметров был выявлен случай «асимптотического» особого режима, т.е. на временах, близких к моменту окончания процесса наблюдается движение объектов навстречу друг другу вдоль линии визирования.

В главе 3 рассматривается задача оптимального уклонения в случае реализации преследователем гибридного закона пропорционального наведения с переменным коэффициентом $k(t)$. Нелинейная модель движения игроков полностью совпадает с той, которая была рассмотрена в **главе 2**. Целью управления является максимизация конечного расстояния между объектами при заданном времени процесса:

$$\mathcal{J} = -r(T) \longrightarrow \min_{\alpha(\cdot), w(\cdot)}$$

Решение полученной оптимальной задачи проводилось также с помощью принципа максимума Понтрягина. Полученная краевая задача решалась численно с использованием подхода, описанного в главе 2. Анализ наличия особого управления полностью совпадает с результатами, полученными в задаче оптимальной встречи.

Приведем полученные качественные результаты, полученные из численного моделирования:

- 1) При численном моделировании был найден случай переключения коэффициента пропорционального наведения у преследователя при $0 < b < 1$. Случай переключения управления $w(t)$ соответствует «дефекту» метода пропорционального наведения, при котором преследователь «отворачивается» от цели.
- 2) Найдены закон пропорционального наведения для цели с постоянным коэффициентом k_1 (при котором полученные траектории близки к экстремальным), а также

гибридный закон с переменным коэффициентом $k_1(t)$ в виде двуступенчатого приближения к экстремальному

$$k_1(t) = \begin{cases} k_{\min}, & 0 \leq t \leq \tau^*, \\ k_{\max}, & \tau^* < t \leq T. \end{cases}$$

Результаты, связанные с нахождением закона пропорционального наведения для цели при постоянном коэффициенте $k_1(t)$, а также построением двуступенчатого гибридного пропорционального наведения, имеют большую практическую значимость, поскольку для реальных прикладных задач, метод пропорционального наведения достаточно просто реализуется, в отличие от построения стратегии наведения из решения задачи оптимального управления.

В заключении хочу выразить огромную благодарность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту Черкасову Олегу Юрьевичу за возможность погрузиться в очень интересную научно-исследовательскую работу, за постановку задач, постоянное внимание к работе и готовность в любой момент обсуждать полученные результаты.

Литература

1. Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S. An optimal control model for maximum height human jumping// Journal of Biomechanics.-1990, vol. 23 – pp.1185-1198.
2. Happee R. Time optimality in the control of human movements// Biological cybernetics-1992, vol. 66 – pp. 357-366.
3. Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С. Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте// IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009» - М.: Экспоцентр, 2009.– С.121-123.
4. Муртазина Е.П. Функциональные особенности выполнения стабیلോഗрафических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // Известия ЮФУ. Технические науки.- 2009.-№9-С.123-127.
5. Мельников А.А., Филёва В.В. Методика определения устойчивости вертикальной позы под влиянием внешнего толкающего воздействия // Физиология. 2015. С. 31–37.
6. Кручинин П.А. Анализ результатов стабилметрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.
7. П. А. Кручинин и Е. А. Касаткин, Изв. ЮФУ. Техн. науки 10 (159), 254 (2014).
8. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека - М.: Наука, 1965 - 256 с.
9. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.
10. Касаткин Е.А., Кручинин П.А. Оптимальное управление позой человека при выполнении стабилметрической пробы со ступенчатым воздействием: Курсовая работа, Москва, 2014, 22 с.
11. Pachter M., Yavin Y. Simple-Motion Pursuit-Evasion Differential Games, Part 1: Stroboscopic Strategies in Collision-Course Guidance and Proportional Navigation. Journal of Optimization Theory and Applications, 1986, vol. 51 (1), pp. 129–159.
12. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. - 479 с.

13. *Ben-Asher J.Z., Cliff E.M.* Optimal evasion against a proportionally guided pursuer. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1989, vol. 12 (4), pp. 598–600.
14. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления // М.: Мир. — 1972. — 544 с.
15. *Turetsky V., Shima T.* Hybrid Evasion Strategy against a Missile with Guidance Law of Variable Structure. *Proceedings of the American Control Conference, (ACC)* July 6–8, 2016, pp. 3132–3137.
16. *Turetsky V., Shima T.* Target Evasion from a Missile Performing Multiple Switches in Guidance Law. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39 (10), pp. 2364–2373.
17. *Guelman M., Shinar J.* Optimal Guidance Law in the Plane. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1984, vol. 7 (4), pp. 471–476.
18. *Glizer V.Y., Shinar J.* Optimal Planar Interception with Fixed End Conditions: Closed-Form Solution. *Journal of optimization theory and applications: Vol. 88, №. 3*, pp. 503–539, March 1997.
19. *Черкасов О.Ю., Якушев А.Г.* Оптимальное уклонение от преследователя, наводящегося методом пропорциональной навигации // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* — 1998. — № 1. — С. 38–42.
20. *Черкасов О.Ю., Якушев А.Г.* Об оптимальном отрыве от преследователя, наводящегося методом пропорциональной навигации // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* — 2001. — № 5. — С. 59–63.
21. *Макиева Э.И., Черкасов О.Ю.* Об одной нелинейной задаче оптимальной встречи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 4.
22. *Филлипов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007 – 240 с.
23. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 393 с.
24. *Ким Д.П.* Методы поиска и преследования подвижных объектов. М.: Наука, 1989. — 336 с.
25. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. — 360 с.
26. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. — 487 с.
27. *Муссеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. — 424 с.