Восстановление человеком исходной позы после толчка
Reversion of initial posture by a person after a push

Романов Андрей Владимирович

МГУ им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления
Научный руководитель: к.ф.-м.н. Кручинин П.А.

15 мая 2023 г.

Описание задачи

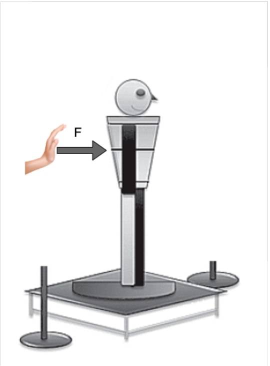

Рис.: Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

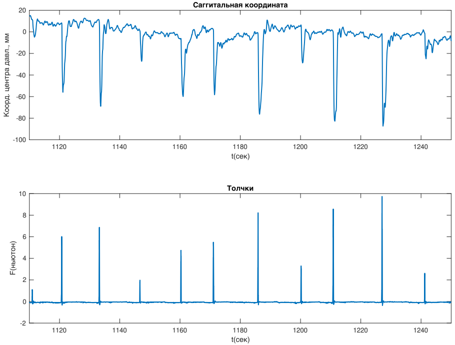

Рис.: Координаты центра давления при различных по силе толчках (данные предоставлены сотрудниками ИМБП РАН)

Задача быстродействия

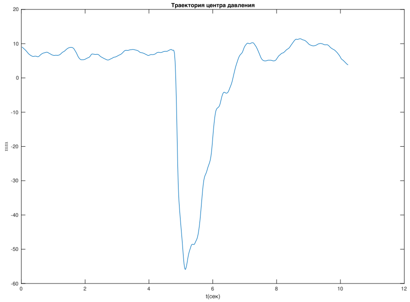

Рис.: Характерный вид сагиттальной стабилограммы при выполнении теста с толчком в спину

В работе рассматриваются возможные алгоритмы управления изменением позы человека, основанные на решении задачи оптимального быстродействия, которые можно было бы использовать для возвращения человека в исходную вертикальную позу. В качестве математической модели используется модель «перевернутого маятника». Это решение предлагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

Список литературы с похожими исследованиями

- П.А. Кручинин Анализ результатов стабилометрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.
- П.А. Кручинин, М.А. Подоприхин, И.Д. Бекеров Сравнительный анализ алгоритмов оценки движения центра масс по результатам стабилометрических измерений // Биофизика – 2021. – Т. 66, №5. – С. 997–1004.
- А.А. Мельников, В.В. Филева, М.В. Малахов Эффективность восстановления вертикальной позы после толчка у спортсменов разных специализаций // Физиоилогия человека. – 2017. – Т. 43, №4. – С. 78–85.
- А.А. Мельников, В.В. Филева Методика определения устойчивости вертикальной позы под влиянием внешнего толкающего воздействия // Вестник северного (арктического) федерального университета. – 2015. №1. – С. 31–37.
- Д. Г. Саенко, А. А. Артамонов, И. Б. Козловская Характеристики позных коррекционных ответов до и после длительных космических полетов // Физиология человека. – 2011. – Т. 37, №5. – С. 91–99.

Математическая модель

Рассматривается задача возвращения в исходную позу после завершения толчка

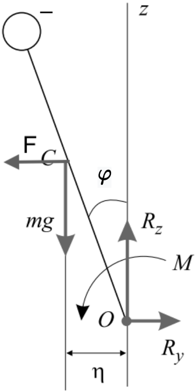

Рис.: Модель тела человека

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$$\varphi(t) = \varphi_k, \ \dot{\varphi}(t_k) = 0$$

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k$$

$$U^- \leqslant \dot{M} \leqslant U^+$$

$$\cancel{M^- \leqslant M \leqslant M^+}.$$

Обезразмеривание

θ – угол отклонения от вертикали
ω – угловая скорость тела
m – момент, возникающий в голеностопном суставе

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \qquad (1) \qquad\qquad u = \begin{cases} -u_{max} \\ +u_{max} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \ t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}, \ \varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$$

$$\theta(0) = 1; \ \theta'(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0; \ m(0) = 0$$

$$\theta(\tau_f) = 0; \ \theta'(\tau_f) = 0; \ m(\tau_f) = 0$$

Решение задачи быстродействия

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

$$\begin{cases} \psi_1^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \quad (2)$$

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$ следовательно особого управления нет.
Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -u_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +u_{max}, & \text{при } \psi_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$|u^{-}| = |\frac{t_* U^{-}}{m_T g l \varphi_*}| = |u^{+}| = |\frac{t_* U^{+}}{m_T g l \varphi_*}| = |u_*| = u_{max}$$

Решение задачи быстродействия

Решая систему (2), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u. Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (1) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Решение задачи быстродействия

Этап 1. $u = -u_*$ начальные условия

$$m(0) = 0;\ \theta(0) = 1;\ \omega(0) = \Omega_0;$$

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left(C_1 \left(e^{\tau} - 1\right)^2 + C_2 \left(e^{2\tau} + 1\right) + C_3 e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau} \tau u_* \right), \\ \Omega_0 = \dfrac{1}{2} e^{-\tau} \left(C_1 \left(e^{2\tau} - 1\right) + C_2 \left(e^{2\tau} - 1\right) + C_3 e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau} u_* \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2} \left(e^{\tau} - e^{-\tau}\right) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2} \left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right) + u_*. \end{cases}$$

Аналогично для 2 и 3 этапов

Решение задачи быстродействия

Условие сопряжения этих интервалов

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Замена переменных

$$x = e^{\tau_1}, \; y = e^{\tau_2}, \; z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

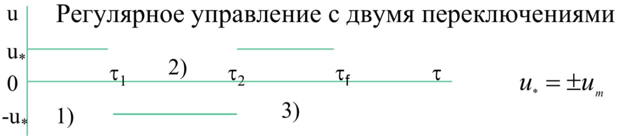

Рис.: Интервалы переключения управления

Решение задачи быстродействия

Требуется отобрать наименьший корень уравнений больший 1. При различных по знаку u_*.

$$x = \left(\frac{1}{2z} - \frac{u_* z}{2} - (\Omega_0 - u_*)\frac{1}{2z}\right)\frac{z}{u_*(1-z)} \qquad (3)$$

$$y = zx,$$

$$\left[\begin{aligned} & u_* z^2 + \Omega_0 - 1 - u_* = 0, \\ & (-u_*\Omega_0 + u_*^2 - u_*)z^4 - 4u_*^2 z^3 + (2u_*\Omega_0 + 6u_*^2 - \Omega_0^2 + 1)z^2 - \\ & - 4u_*^2 z + -u_*\Omega_0 + u_*^2 + u_* = 0 \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

$$\tau_f = 2\ln(z)$$

Определение начальных условий для задачи быстродействия

Для решения задачи быстродействия необходимо определить начальные условия после толчка.

Для этого необходимо построить оценку $\tilde{\eta}$ траектории центра масс системы, зная траекторию центра давления, и взять значение $\tilde{\eta}_0$ и $\dot{\tilde{\eta}}_0$ в момент времени завершения толчка

Связь центра масс и центра давления

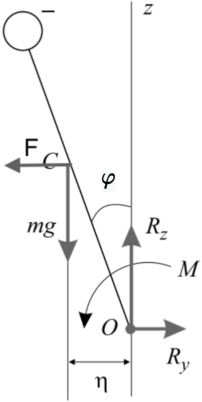

Рис.: Силы действующие на модель стержня, имитирующего тело человека

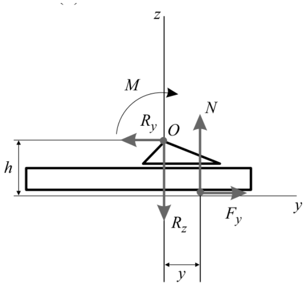

Рис.: Силы действующие на на систему «стопы ног – платформа стабилоанализатора»

Связь центра масс и центра давления

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -R_y - F, \\ 0 = R_z - mg, \\ J\ddot{\theta} = mlg\theta - Fl_1 + M_x. \end{cases} \qquad (5) \qquad \begin{cases} M_x = Ny + F_y h, \\ F_y = R_y, \\ N \approx mg. \end{cases} \qquad (6)$$

$$M_x = mgy - h\left(F + ml\ddot{\theta}\right)$$

$$(J + mlh)\,\ddot{\theta} = mgl\theta + mgy - Fl_1 - Fh$$

$$\frac{(J + mlh)l\ddot{\theta}}{mgl} = l\theta + y - \frac{F}{mg}(l_1 + h);$$ Замена: $\eta = -l\theta;$ $T^2 = \dfrac{J + mlh}{mgl};$

$$T^2\ddot{\eta} = \eta - y + \frac{F}{mg}(l_1 + h) \qquad (7)$$

Связь центра масс и центра давления

Соотношение (7) используем для определения начальных условий движения сразу после толчка

Далее необходимо построить оценку $\tilde{\eta}$ движения центра масс различными способами, описанными в работах, выполненых под руководством П.А. Кручинина

Алгоритм фильтрации (композиция двух фильтров)

Передаточная функция системы (7) имеет вид

$$G(s) = -\frac{1}{T^2 s^2 - 1}$$

Ее можно представить в виде композиции двух фильтров

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{Ts - 1}, G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Оценка координаты центра масс может быть найдена, путем последовательного применения двух фильтров

$$T\dot{x} + x = -y \text{ в прямом времени}$$

$$T\dot{\eta} - \eta = x \text{ в обратном времени}$$

Алгоритм фильтрации с использованием преобразования Фурье представлен в тексте дипломной работы

Оценка траектории центра масс

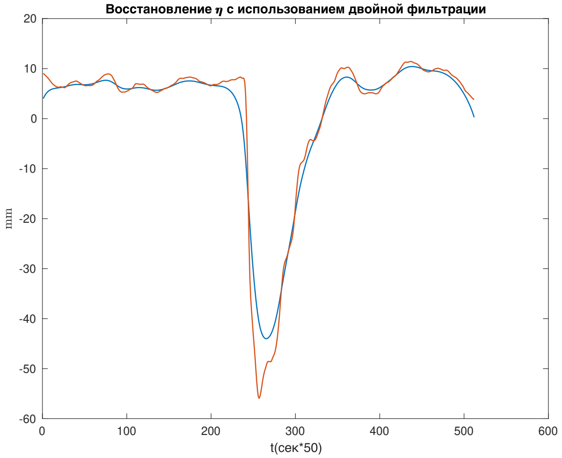

Рис.: Восстановление с использованием двойной фильтрации

Определение начальных условий

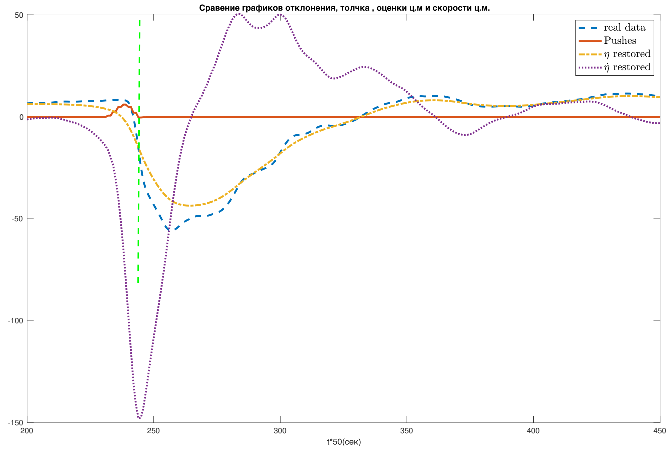

Рис.: К определению начальных условий

Поведение системы при оптимальном управлении

При $u_* = 1.46$, полученном из данных эксперимента, действительных корней уравнения (4) больших 1 нет, при обоих комбинациях знаков u_*.

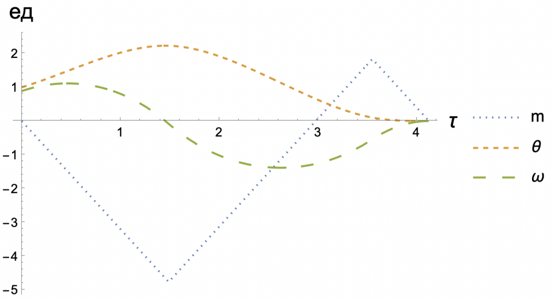

Рис.: Оптимальная траектории в безразмерном виде $u_* = 3.2$

Анализ оптимальных траекторий при различных u_*

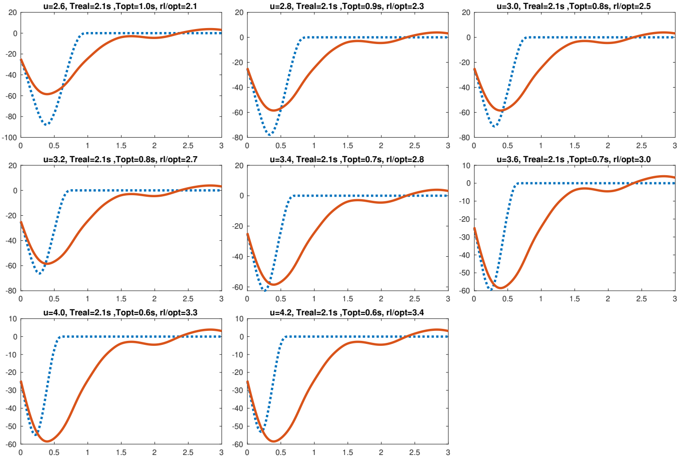

Рис.: Сравнение характерных оптимальных(пунктирные) и реальных(сплошные) траектории на возвратном движении человека

Анализ траекторий на выборке толчков

Для различных толчков, с примерно одинаковой силой отношение $\frac{T_{real}}{T_{opt}}$ остается постоянным.

Номер толчка	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
F_{max}**(Н)**	6.01	6.87	8.21	8.56	9.73	4.74	5.49	1.97	3.3
Время толчка(сек)	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
φ_0 **рад**	0.026	0.028	0.033	0.033	0.035	0.022	0.018	0.008	0.007
ω_0 **рад/с**	0.15	0.18	0.17	0.20	0.21	0.10	0.15	0.05	0.08
Момент(Н·м)	14.88	19.21	17.95	19.28	19.95	9.97	14.16	6.38	7.95
real/opt $u_* = 3.2$	2.8	2.7	2.8	2.8	2.9	2.7	1.8	1.8	2.0
real/opt $u_* = 3.6$	3.1	3.0	3.1	3.1	3.2	2.9	2.0	2.0	2.3

Таблица: Анализ различных толчков

В ходе работы:

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилометрических исследованиях;
- Представлено аналитическое решение задачи быстродействия;
- Найдены начальные условия в момент завершения толчка, с помощью метода двойной фильтрации;
- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка;
- Проведен анализ допущений, которые могут скорректировать соответствие математической модели и реального процесса.

Спасибо за внимание!