ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
МАГИСТРА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЧЕЛОВЕКОМ ИСХОДНОЙ ПОЗЫ ПОСЛЕ ТОЛЧКА

Выполнил: студент группы М - 2
Романов Андрей Владимирович

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент Кручинин Павел Анатольевич

____
(подпись научного руководителя)

Москва
2023

Оглавление

Введение

В литературе встречается решение задач оптимального быстродействия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Проба со ступенчатым воздействием является одной из стандартных проб при стабилометрических исследованиях [5, 13]. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, после толчка в спину, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью руки [5]. При проведении тестов обследуемый, стоя на стабилоплатформе без обуви, с закрытыми глазами, с руками, сложенными на груди, выполнял инструкцию “стоять спокойно, не сопротивляться возмущениям и стараться сохранять равновесие”. Сила толчков варьировала в случайном порядке от пороговой до субмаксимальной. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [6, 12]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.

Рис. 1. Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилоплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной коордианты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

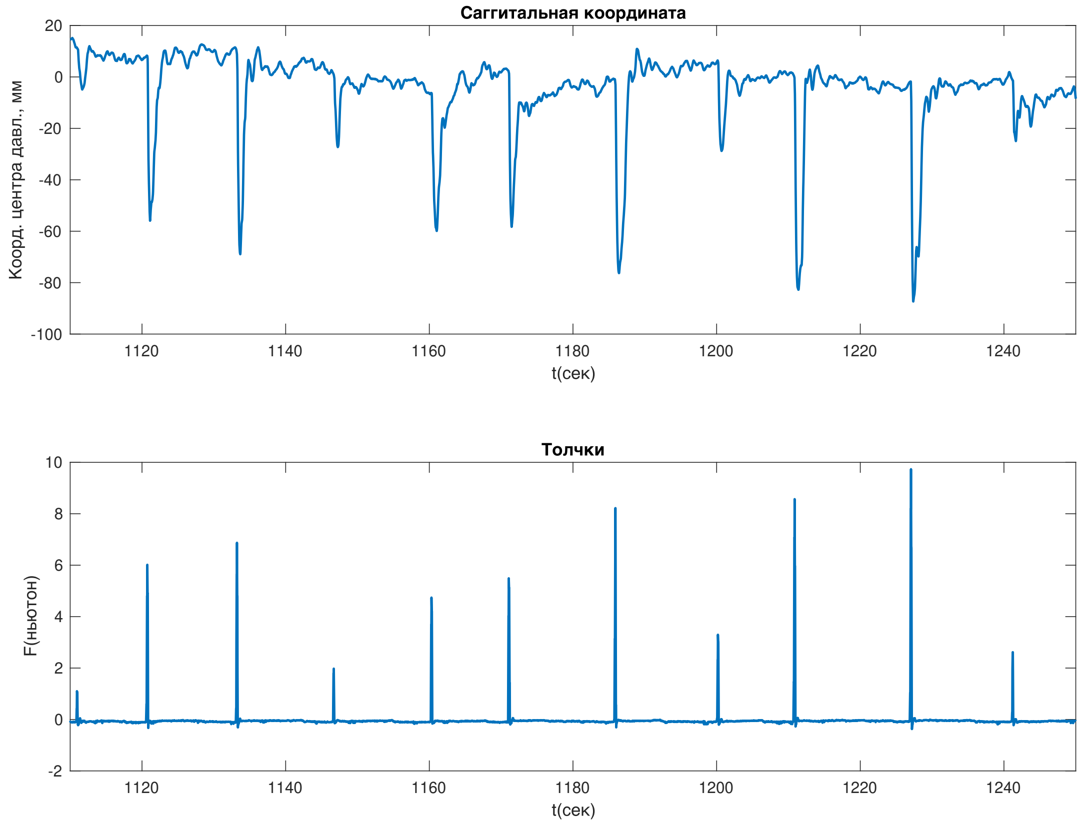

Рис. 2. Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

В качестве математической модели используется традиционно модель «перевернутого маятника»[6, 7].

Целью работы является разработка алгоритма управления изменением позы человека, основанного на решении задачи оптимального быстродействия, который можно было бы использовать для возвращения в исходную вертикальную позу. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

Акутальность работы объясняется тем, что похожие задачи уже решались, но именно эта с такими начальными условиям новая. Решение это задачи может быть применено в медицине для оценки оптимальности работы мышц человека, оценки качества выполнения заданного движения при толчках заданной величины, например для космонавтов или спортсменов.

Задачи работы:

- Описание математической модели
- Постановка задачи быстродействия, используя принцип максимума Понтрягина

- Поиск решения задачи быстродействия
- Определение начального состояния системы, в момент завершения толчка
- Решение задачи быстродействия с вычисленными начальными условиям
- Сравнение реального и оптимального времени возвращения в исходную позу
- Сравнение реальной и оптимальной траектории возвращения в исходную позу
- Интерпретация полученных результатов

Методы исследования:

- Движение человека в саггитальной плоскости описывается моделью перевернутого маятника.
- Для описания движения используется система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффицентами 3 порядка.
- Начальные условия для задачи быстродействия определяются с данных эксперимента, в ходе которого на человека оказывают толкающее воздействие.
- Проводится математическое моделирование в пакетах Matlab R2022a и Wolfram Mathematica 13.0.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 29 страниц, включая 20 рисунков и 2 таблицы.

Глава 1.

Математическая модель и решение задачи быстродействия

1.1. Математическая модель

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 1.1).

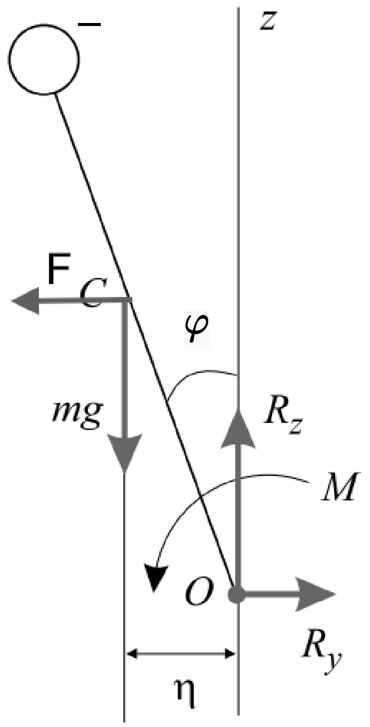

Рис. 1.1. Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы m_T, закрепленным шарнирно в точке O, которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке C, удаленной от точки O на расстояние

l. Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку O, равен J. Отклонение стержня от вертикали описывается углом φ. Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Скорость изменения момента M, который приложен в точке O к стержню, будем считать управлением.

На тело воздействует два момента: первый от силы тяжести, второй момент создают мышцы голеностопного сустава. Запишем уравнение моментов,относительно точки O на ось перпендикулярную плоскости рисунка 1.1

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \sin\varphi + M$$

Уравнение моментов для малых значений угла φ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального состояния

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

в конечное состояние

$$\varphi(t_k) = \varphi_k,\ \dot{\varphi}(t_k) = 0.$$

При этом будем принимать во внимание условия ограниченности величины момента в голеностопном суставе

$$M^- \leqslant M \leqslant\ M^+. \tag{1.1}$$

Для величины момента помимо чисто физиологических ограничений, связанных с ограниченностью развиваемых мышечных усилий, следует принимать во внимание возможность опрокидывания человека вследствие того, что равновесие стоп на платформе должно обеспечиваться нормальной реакцией, приложенной в области опоры. В нашей постановке задачи, человек не опрокидывается после толчков и точка приложения нормальной реакции опоры не выходит за пределы стопы, поэтому пренебрежем (1.1)

Будем принимать во внимание условия ограниченности скорости изменения момента в голеностопном суставе, как это соответствует физиологически

$$U^- \leqslant \dot{M} \leqslant\ U^+.$$

Перевод состояния тела должен происходить за минимальное время t_k, с помощью изменений значения $\dot{M}$ в голеностопном суставе.

Будем считать, что за время толчка система регуляции позы человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M\left(t_k\right) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi_*}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \ t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением u будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных обезразмеренные уравнения движения примут следующий вид

$$\theta^{''} = \theta + m; \ m^{'} = u \tag{1.2}$$

Здесь через $m^{'}$ обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ. Тогда необходимо решение системы (1.2) перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \ \theta^{'}(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0; \ m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \ \theta^{'}(\tau_f) = 0; \ m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leqslant \ u \leqslant \ u^+, \ \text{где}$$

$$u^- = \frac{t_* U^-}{m_T g l \varphi_*}, \quad u^+ = \frac{t_* U^+}{m_T g l \varphi_*}.$$

Далее будем считать, что $|u^-| = |-u^+| = u_*$

1.2. Постановка задачи быстродействия

Выпишем систему (1.2) в форме Коши

$$\begin{cases} \theta^{'} = \omega, \\ \omega^{'} = \theta + m, \\ m^{'} = u. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ограничение на управление $|u| \leqslant u_{max}$

Начальные условия

$$\theta(0) = 1;\ \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*}\omega_0 = \Omega_0;\ m(0) = 0$$

Конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0;\ \theta^{'}(\tau_f) = 0;\ m(\tau_f) = 0$$

Для решения задачи оптимального быстродействия $J = \tau_f \to \min$ будем использовать принцип максимума Понтрягина [8]:

Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$– оптимальный процесс, то существует нетривиальная пара $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ такая, что

- $\max\limits_{u(t)\in\Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))\ \forall t \in T \subseteq [t_0, t_k^0]$;
- $\psi(t_k^0) + \lambda_0(\frac{\partial\varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y})^T \perp M$ в точке $y^0(t_k^0)$;
- $\mathcal{H} = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_k^0]$.

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\psi_i^{'} = -\frac{\partial H}{\partial y_i},\ i = 1, \ldots, n$$

В данной задаче $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$, тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \psi_1^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi_2^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi_3^{'} = -\dfrac{\partial H}{\partial m} = -\psi_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.3. Анализ задачи быстродействия

Проверим управляемость системы (1.3).

(Критерий управляемости Калмана) Линейная стационарная система (11) вполне управляема на отрезке [0, T] тогда и только тогда, когда матрица $W = \{B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\}$ имеет ранг, равный n.

Для системы (1.3) матрицы A, B, W равны соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(W) = 3$, значит система полностью управляема

Рассмотрим собственные числа системы (1.3)

$$\det\left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{I}$ – единичная матрица.

Раскрывая определитель, получим $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$, в литературе [11] нет готового решения, для задач с нулевыми собственными значениями.

При $\psi_3 \equiv 0$ следует, что $\psi_2 \equiv 0$ и $\psi_1 \equiv 0$ следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -u_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +u_{max}, & \text{при } \psi_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Продифференцируем по безразмерному времени второе уравнение из (1.4) и подставим в него первое, получим

$$\psi_2'' = \psi_2$$

Решая систему (1.4), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^{\tau} + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения $\psi_3(\tau) = 0$, для различной комбинации коэффициентов C_1, C_2, C_3, получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений u.

Аналагичный вывод можно получить, применив к решаемой задаче теорему Фельдбаума о числе переключений оптимального управления[9]

1.4. Решение задачи быстродействия на отдельных этапах времени

Выбор знака + или - перед определяется на основании полученных корней, одно из решений явно будет не подходящим, исходя из физической реализации процесса.

Для определенности возьмем $u = -u_*$, управление на первом участке траектории до первого переключения.

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени $\tau = \tau_1$, а второе в момент времени $\tau = \tau_2$. Рассмотрим систему (1.3) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Решая систему (1.3), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = \tau u + C_1, \\ \theta(\tau) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left((C_1+C_2+C_3)e^{2\tau} - 2e^{\tau}(\tau u + C_1) + C_1 + C_2 - C_3\right), \\ \omega(\tau) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left((C_1+C_2+C_3)e^{2\tau} - 2e^{\tau}u - C_1 - C_2 + C_3\right). \end{cases} \tag{1.6}$$

Решение системы на первом этапе

Этап 1. $u = -u_*$ начальные условия

$$m(0) = 0;\ \theta(0) = 1;\ \omega(0) = \Omega_0;$$

Из (1.6) получим

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(C_1\left(e^{\tau}-1\right)^2 + C_2\left(e^{2\tau}+1\right) + C_3 e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau}\tau u_*\right), \\ \Omega_0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau}\left(C_1\left(e^{2\tau}-1\right) + C_2\left(e^{2\tau}-1\right) + C_3 e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau}u_*\right). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -u_* + \Omega_0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в (1.6)

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \dfrac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*. \end{cases}$$

Решение системы на втором этапе

Этап 2. $u = u_*$ начальные условия

$$m(\tau_1) = m_1(\tau_1);\ \theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1);\ \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);$$

$$\begin{cases} m(\tau_1) = -\tau_1 u_*, \\ \theta(\tau_1) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}-1\right)\Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1} + 1\right)u_* + 1\right), \\ \omega(\tau_1) = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}+1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau_1}-1\right)\left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1}-1\right)u_* - 1\right)\right). \end{cases}$$

Находим константы интегрирования

$$
\begin{cases}
-\tau_1 u_* = \tau_1 u_* + C_1,\\
\dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}-1\right)\Omega_0 + e^{2\tau_1} + \left(2e^{\tau_1}\tau_1 - e^{2\tau_1}+1\right)u_* + 1\right) =\\
= \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(C_1\left(e^{\tau_1}-1\right)^2 + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* + C_2 - C_3\right),\\
\dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(\left(e^{2\tau_1}+1\right)\Omega_0 - \left(e^{\tau_1}-1\right)\left(-e^{\tau_1} + \left(e^{\tau_1}-1\right)u_* - 1\right)\right) =\\
= \dfrac{1}{2}e^{-\tau_1}\left(C_1\left(e^{2\tau_1}-1\right) + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1}u_* - C_2 + C_3\right).
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
C_1 = -2\tau_1 u_*,\\
C_2 = -e^{-\tau_1}\left(-e^{\tau_1} + e^{2\tau_1}u_* - 2e^{\tau_1}\tau_1 u_* - u_*\right),\\
C_3 = e^{-\tau_1}\left(e^{\tau_1}\Omega_0 - e^{\tau_1}u_* + e^{2\tau_1}u_* + u_*\right).
\end{cases}
$$

Подставим начальные условия для второго этапа в (1.6), получим

$$
\begin{cases}
m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1)\,u_*,\\
\theta_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau}-e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau),\\
\omega_2(\tau) = \dfrac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau}+e^{-\tau}) + u_*(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1} - 1).
\end{cases}
$$

Решение системы на третьем этапе

Этап 3. $u = -u_*$ конечные условия

$$
m(\tau_f) = 0;\ \theta(\tau_f) = 0;\ \omega(\tau_f) = 0;
$$

Подставим начальные условия в (1.6), получим

$$
\begin{cases}
0 = C_1 - \tau_f u_*,\\
0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_f}\left(C_1\left(e^{\tau_f}-1\right)^2 + C_2\left(e^{2\tau_f}+1\right) + C_3 e^{2\tau_f} - C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\tau_f\right),\\
0 = \dfrac{1}{2}e^{-\tau_f}\left(C_1\left(e^{2\tau_f}-1\right) + C_2\left(e^{2\tau_f}-1\right) + C_3 e^{2\tau_f} + C_3 + 2u_* e^{\tau_f}\right).
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
C_1 = u_*\tau_f,\\
C_1 = \dfrac{1}{2}u_* e^{-\tau_f}\left(-2e^{\tau_f}\tau_f + e^{2\tau_f} - 1\right),\\
C_2 = -\dfrac{1}{2}u_* e^{-\tau_f}\left(e^{2\tau_f}+1\right).
\end{cases}
$$

Тогда решение на этом этапе имеет вид

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* \left(\tau_f - \tau\right), \\ \theta_3(\tau) = \dfrac{1}{2} u_* \left(-e^{\tau - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau} - 2\tau_f + 2\tau\right), \\ \omega_3(\tau) = u_* - \dfrac{u_*}{2}(e^{\tau - \tau_f} + e^{-\tau + \tau_f}). \end{cases}$$

Сопряжение второго и третьего этапов

Так как момент, угол отклонения и угловая скорость представлют собой кусочно-непрерывные фукнции времени, то можно сопрячь систему на втором и третьем этапе в момент времени τ_2.

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} \left(\tau_2 - 2\tau_1\right) u_* = u_* \left(\tau_f - \tau_2\right), \\ \dfrac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_*(e^{\tau_2 - \tau_1} - e^{-\tau_2 + \tau_1} + 2\tau_1 - \tau_2) = \\ = \dfrac{1}{2} u_* \left(-e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{\tau_f - \tau_2} - 2\tau_f + 2\tau_2\right), \\ \dfrac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_*(e^{\tau_2 - \tau_1} + e^{-\tau_2 + \tau_1} - 1) = \\ = u_* - \dfrac{u_*}{2}(e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{-\tau_2 + \tau_f}). \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на u_*, выражение для τ_f из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \dfrac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{-\tau_1 + \tau_2} - e^{\tau_1 - \tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2 - \tau_f} - e^{-\tau_2 + \tau_f}}{2}\right) = 0, \\ \dfrac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \dfrac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* \left(e^{\tau_1 - \tau_2} + e^{-\tau_1 + \tau_2} + \dfrac{e^{\tau_2 - \tau_f} + e^{-\tau_2 + \tau_f}}{2} - 2\right) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1},\ y = e^{\tau_2},\ z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$
\begin{cases}
z = \dfrac{y}{x},\\
\dfrac{1}{2}\left(u_*\left(\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2y}{x} - y + \dfrac{1}{y}\right) + \left(y - \dfrac{1}{y}\right)\Omega_0 + y + \dfrac{1}{y}\right) = 0,\\
\dfrac{u_*\left(\frac{y^2}{x^2} + x^2 + \frac{2y^2}{x} + 2x - y^2 - 4y - 1\right) + \left(y^2+1\right)\Omega_0 + y^2 - 1}{2y} = 0.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
z = \dfrac{y}{x},\\
(\Omega_0 - u_*)\left(xy - \dfrac{x}{y}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{y}{x} - \dfrac{2x^2}{y} + 2y\right) + \dfrac{x}{y} + xy = 0,\\
(\Omega_0 - u_*)\left(xy + \dfrac{x}{y}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^2}{y} + 2y - 4x\right) - \dfrac{x}{y} + xy = 0.
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

Полученную систему (1.8) можно решить численно, подставив вместо Ω_0 и u_* конкретные значения. Отбор корней проводим из условия, что $x > 1, y > 1, z > 1$. Но также стоит провести дальнейший анализ для поиска аналитического решения.

1.5. Сведение задачи к отысканию корней полинома

$$
\begin{cases}
y = zx,\\
(\Omega_0 - u_*)\left(x^2 z - \dfrac{x}{zx}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{zx} - \dfrac{zx}{x} - \dfrac{2x^2}{zx} + 2zx\right) + \dfrac{x}{zx} + x^2 z = 0,\\
(\Omega_0 - u_*)\left(x^2 z + \dfrac{x}{zx}\right) + u_*\left(\dfrac{x^3}{zx} + \dfrac{zx}{x} + \dfrac{2x^2}{zx} + 2zx - 4x\right) - \dfrac{x}{zx} + x^2 z = 0.
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{cases}
(\Omega_0 - u_*)\left(x^2 z - \dfrac{1}{z}\right) + u_*\left(\dfrac{x^2}{z} - z - \dfrac{2x}{z} + 2zx\right) + \dfrac{1}{z} + x^2 z = 0,\\
(\Omega_0 - u_*)\left(x^2 z + \dfrac{1}{z}\right) + u_*\left(\dfrac{x^2}{z} + z + \dfrac{2x}{z} + 2zx - 4x\right) - \dfrac{1}{z} + x^2 z = 0.
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

Сложим и вычтем уравнения системы

$$
\begin{cases}
2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_*\left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0,\\
2(\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{z} + u_*\left(2z + \dfrac{4x}{z} - 4x\right) - \dfrac{2}{z} = 0.
\end{cases}
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{cases}
2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_*\left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0,\\
2(\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{z} + 2u_* z + 4x\left(\dfrac{u_*}{z} - u_*\right) - \dfrac{2}{z} = 0.
\end{cases}
\tag{1.12}
$$

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_* \left(2\dfrac{x^2}{z} + 4zx - 4x\right) + 2x^2 z = 0, \\ x = \left(\dfrac{1}{2z} - \dfrac{u_* z}{2} - (\Omega_0 - u_*)\dfrac{1}{2z}\right) \dfrac{z}{u_*(1-z)} \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\frac{\left(u_*\left(z^2-1\right)+\Omega_0-1\right)\left(-u_*\left(z^4+\Omega_0\left(z^2-1\right)^2\right)+u_*^2(z-1)^4+u_*-\Omega_0^2 z^2+z^2\right)}{2u_*^2(z-1)^2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(u_*\left(z^2-1\right)+\Omega_0-1\right) = 0, \\ -u_*\left(z^4+\Omega_0\left(z^2-1\right)^2\right)+u_*^2(z-1)^4+u_*-\Omega_0^2 z^2+z^2 = 0 \end{array}\right. \tag{1.14}$$

$$\left[\begin{array}{l} u_* z^2 + \Omega_0 - 1 - u_* = 0, \\ (-u_*\Omega_0 + u_*^2 - u_*)z^4 - 4u_*^2 z^3 + (2u_*\Omega_0 + 6u_*^2 - \Omega_0^2 + 1)z^2 - 4u_*^2 z + -u_*\Omega_0 + u_*^2 + u_* = 0 \end{array}\right. \tag{1.15}$$

Дальнейшее решение строится на основе перебора знака u_*, выбор знака + или - определяется на основании полученных корней, одно из решений явно будет не подходящим, исходя из физической реализации процесса.

Глава 2.

Определение начальных условий в момент завершения толчка

2.1. Постановка задачи

Для корректного решения задачи быстродействия необходимо как можно лучше оценить начальные условия в момент завершения толчка. Экспериментальные данные содержат только записи силомера и стабилоанализатора, поэтому определять начальные условия будем на основе данных с саггитальной стабилограммы и силомера.

Рассмотрим силы действующие на модель стержня, иммитирующего тело человека (см. рисунок 1.1) и силы действующие на систему «стопы ног – платформа стабилоанализатора».

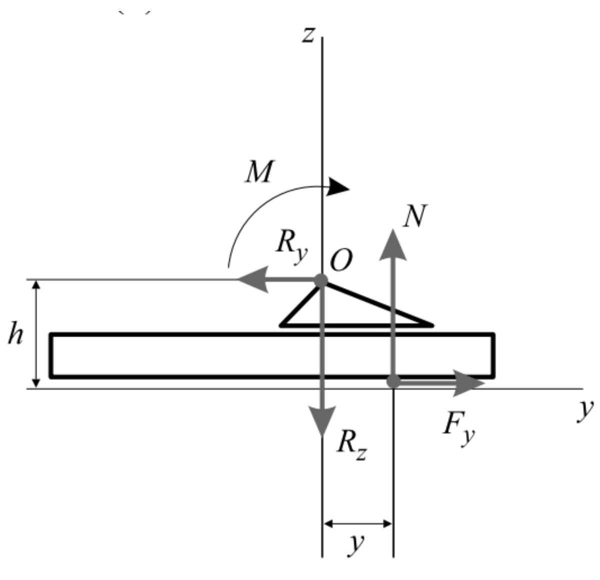

Рис. 2.1. Силы действующие на на систему «стопы ног – платформа стабилоанализатора»

Где F – это внешняя толкающая сила, y – саггитальная координата центра давления, l_1 – высота точки к которой прикладывается толкающая сила , h – суммарная высота стопы и платформы стабилоанализатора, N – нормальная реакция опоры

Ниже представлена система уравнений соответствующая рисунку 1.1

$$\begin{cases} m_T l\ddot{\varphi} = -R_y - F, \\ 0 = R_z - m_T g, \\ J\ddot{\varphi} = m_T g l \sin\varphi - F l_1 \cos\varphi + M_x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Проведем линеаризацию по φ в окрестности нуля

$$\begin{cases} m_T l\ddot{\varphi} = -R_y - F, \\ 0 = R_z - m_T g, \\ J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi - F l_1 + M_x. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ниже представлена система уравнений соответствующая рисунку 2.1

$$\begin{cases} M_x = N y + F_y h, \\ F_y = R_y, \\ N \approx m_T g. \end{cases} \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) выразим M_x

$$M_x = m_T g y - h\left(F + m_T l\ddot{\varphi}\right)$$

Подставим M_x в последнее уравнение системы (2.2) и сгруппируем слагемые с $\ddot{\varphi}$

$$\left(J + m_T l h\right)\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + m_T g y - F l_1 - F h$$

Разделим на $m_T g l$

$$\frac{(J + m_T l h) l\ddot{\varphi}}{m_T g l} = l\varphi + y - \frac{F}{m_T g}(l_1 + h); \tag{2.4}$$

Введем замену

$$\eta = -l\varphi; \quad T^2 = \frac{J + m_T l h}{m_T g l};$$

Подставим замену в (2.4)

$$T^2\ddot{\eta} = \eta - y + \frac{F}{m_T g}(l_1 + h)$$

$$T^2\ddot{\eta} = \eta - (y - \frac{F}{m_T g}(l_1 + h)) \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) можно свести к уравнению фильтра, путем корректировки входных данных y

$$T^2\ddot{\eta} = \eta - y \tag{2.6}$$

Где $y-$ входные данные стабилоанализатора, $\eta-$ выходные данные оценки координаты центра масс

В работе [10] получено такое же уравнение для связи центра масс и центра давления. Показано, что его решение неустойчиво и приводит к катастрофическому нарастанию ошибки оценки на временах больше 0.5с.

Для использования предположения об отсутствии экспоненциальных составляющих, порожденных решением однородного уравнения, запишем передаточную функцию, соответствующую уравнению (2.6)

$$G(s) = -\frac{1}{T^2 s^2 - 1} \tag{2.7}$$

В работе [10] приведены два способа фильтрации данных: через преобразование Фурье и через фильрацию в прямом и обратном времени. Кратко опишем их.

Фильтрация через Фурье преобразование: Рассмотрим Фурье-образы $N(\omega)$ и $Y(\omega)$ функций $\eta(t)$ и $y(t)$. В силу уравнения (2.7) эти функции связаны между собой соотношением.

$$N(\omega) = G(i\omega)Y(\omega). \tag{2.8}$$

Представим функцию y(t) в виде суммы

$$y(t) = a(t - t_0) + b + \delta(t), \tag{2.9}$$

где

$$a = \frac{y(t_f) - y(t_0)}{t_f - t_0}; \quad b = y(t_0) \tag{2.10}$$

Оценка координаты центра масс в этом случае может быть представлена в виде

$$\tilde{\eta} = a(t - t_0) + b + \chi(t). \tag{2.11}$$

Алгоритм построения оценки координаты $\tilde{\eta}$ центра масс будет иметь следующий вид

1) Вычисляем константы a и b по формулам (2.10) и функцию $\delta(t)$ из уравнения (2.9).

2) Вычисляем Фурье-образ $Y(\omega)$ от функции $\delta(t)$.

3) Вычисляем $N(\omega)$ в соответствии с уравнением (2.8)

4) Используя обратное преобразование Фурье вычисляем $\chi(t)$ как праобраз $N(\omega)$.

5) Оценку координаты центра масс получаем по формуле (2.11).

Фильтрация в прямом и обратном времени: Для обоснования этого алгоритма представим передаточную функцию $G(s)$ в виде произведения

$$G(s) = -G_1(s)G_2(s),$$

где $G_1(s) = \dfrac{1}{Ts - 1}$ и $G_2(s) = \dfrac{1}{Ts + 1}$

Передаточной функции $G_2(s)$ соответствует уравнение устойчивого фильтра:

$$T\dot{x} + x = -y \tag{2.12}$$

а передаточной функции $G_1(s)$ соответствует уравнение неустойчивого фильтра

$$T\dot{\eta} - \eta = x \tag{2.13}$$

Фильтр (2.13) имеет единственный положительный корень и устойчив в обратном времени. В итоге процедура сводится к последовательной фильтрации показаний стабилоанализатора фильтром (2.12) в прямом времени и последующей фильтрации (2.13) в обратном времени.

Оба алгоритма практически эквивалентны.

2.2. Применение алгоритмов фильтрации к модельным данным

Для оценки точности методов фильтрации проверим эти методы на модельных данных. Пусть наша система задается уравнением

$$J\ddot{\varphi} = m_T gl\varphi + M - Fl_1 \cos\varphi$$

Где M - момент в голеностопном суставе Рассмотрим перевернутый маятник с спиральной пружиной в основании и вязким трением. Получим следующее выражение

$$J\ddot{\varphi} = m_T gl\varphi - C\varphi - P\dot{\varphi} - Fl_1 \tag{2.14}$$

Где C и P неизвестные коэффиценты. Подберем эти коэффиценты такими, чтобы (2.14) соответствовало затухающим колебаниям с периодом $T \approx 2c$

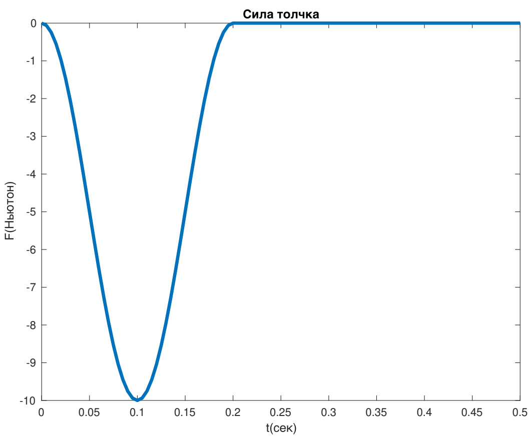

Рис. 2.2. Пример зависимости $F(t) = 5(1 - \cos(4\pi \cdot 2.5t))$

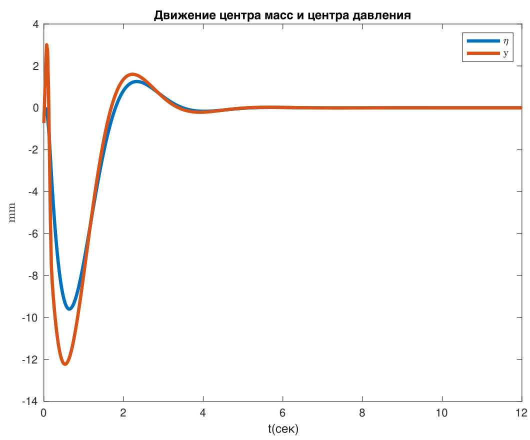

Рис. 2.3. Модельное движение центра масс и центра давления

Восстановим η двумя способами

Погрешности обоих методов очень небольшие, почти идеально восстанавливают исходную траекторию центра масс. Для Фурье преобразования $\dfrac{\sigma}{max|\eta(t)|} = 0.0079$, для двойной фильтрации $\dfrac{\sigma}{max|\eta(t)|} = 0.0007$, где $\sigma-$ среднеквадратическое отклонение

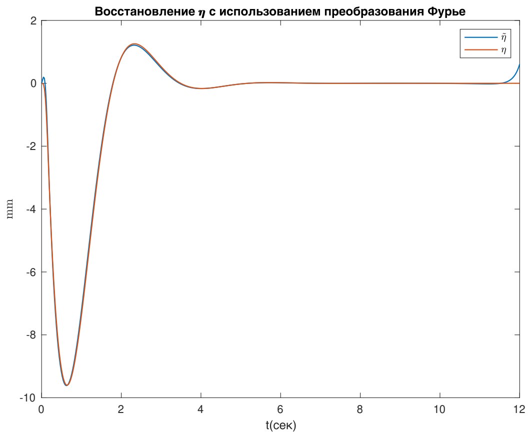

Рис. 2.4. Восстановление через преобразование Фурье

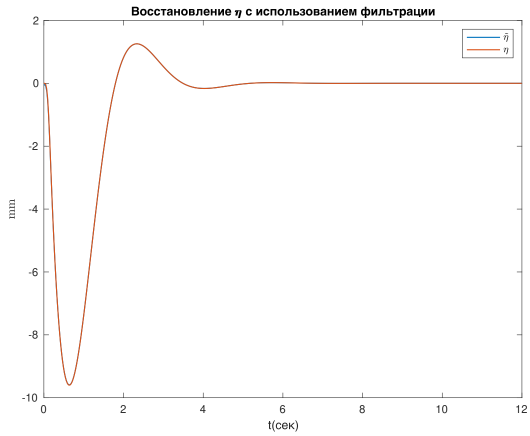

Рис. 2.5. Восстановление через двойную фильтрацию

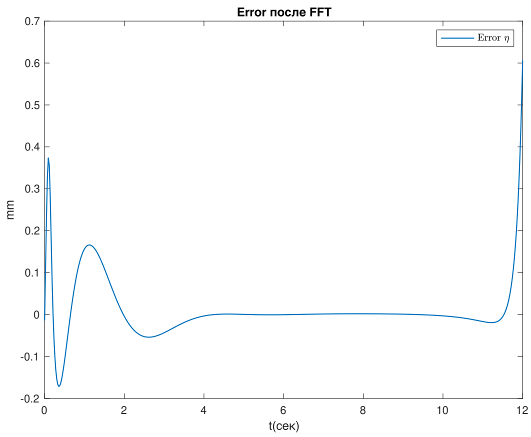

Рис. 2.6. Ошибка восстановления через преобразвоание Фурье , $\sigma = 0.0761$

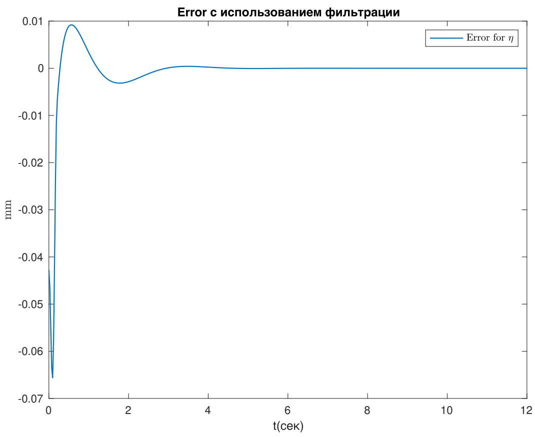

Рис. 2.7. Восстановление через двойную фильтрацию, $\sigma = 0.0061$

2.3. Анализ данных стабилоанализатора и силомера

Оценим массу, на рисунках 2.8 и 2.9 представлены графики показаний веса(в единицах кгс) испытуемого человека. На основе этих данных, путем осреденения данных на графике 2.9 определим m_T- массу человека

$$m_T = 67.8\text{кг}$$

Проанализируем силу толчков (см. рис. 2.10), сила толчка колеблется от 1 до 10 Н, в первую очередь возьмем толчки большей силы, так как на них предположительно лучше удастся провести исследование.

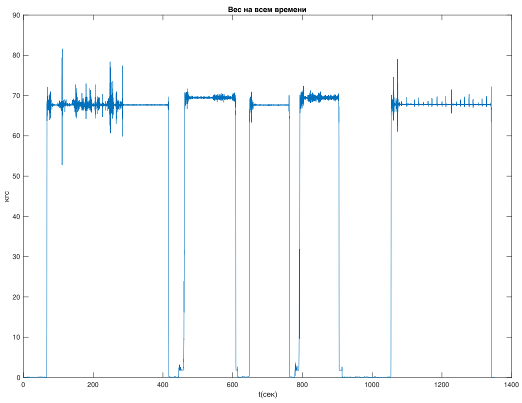

Рис. 2.8. Масса на всем интервале наблюдений

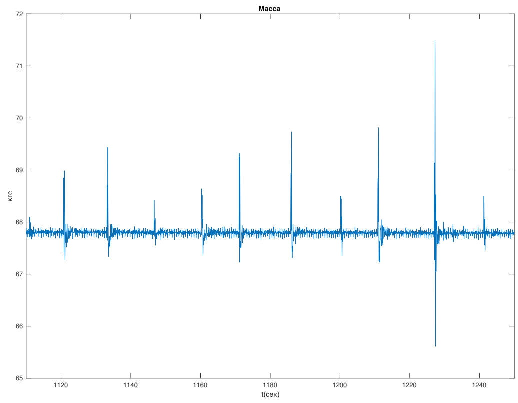

Рис. 2.9. Масса на интервале исследуемых толчков

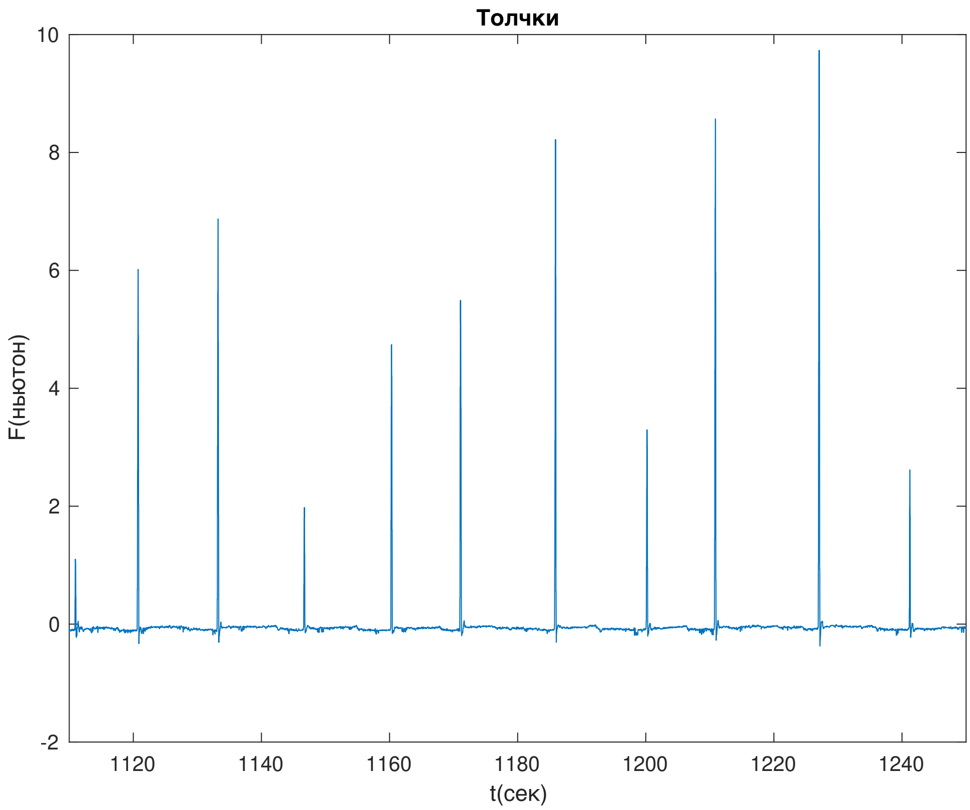

Рис. 2.10. Силовое воздействие на интервале наблюдения

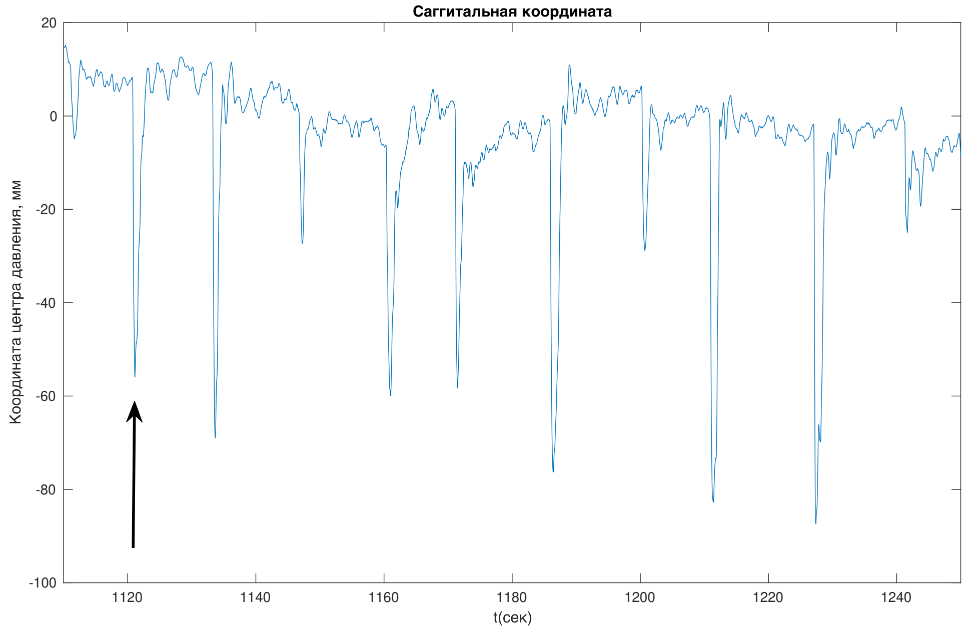

Рис. 2.11. Саггитальное отклонение центра давления при толчках

2.4. Применение алгоритмов фильтрации к экспериментальным данным

Рассмотрим для примера первый толчок (около момента времени 1120) и для него применим два способа фильтрации (см. рис. 2.12 и 2.13), для того, чтобы оценить какой из них лучше подходит для наших данных.

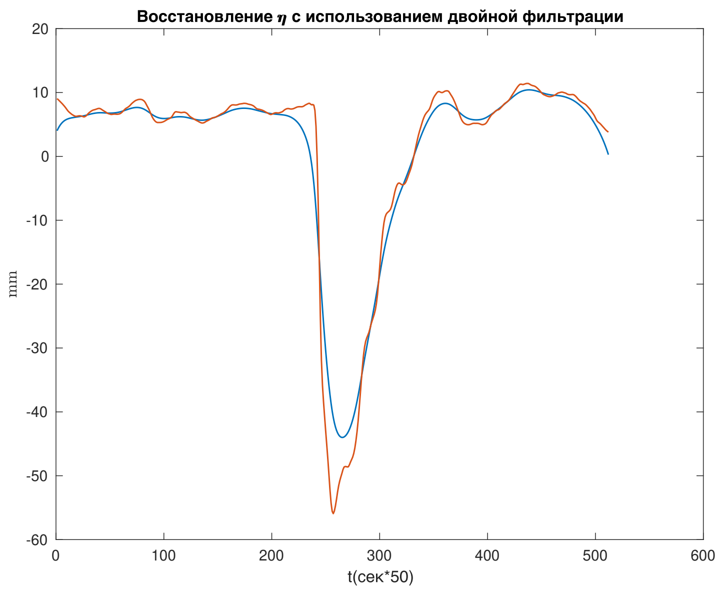

Рис. 2.12. Восстановление с использованием двойной фильтрации

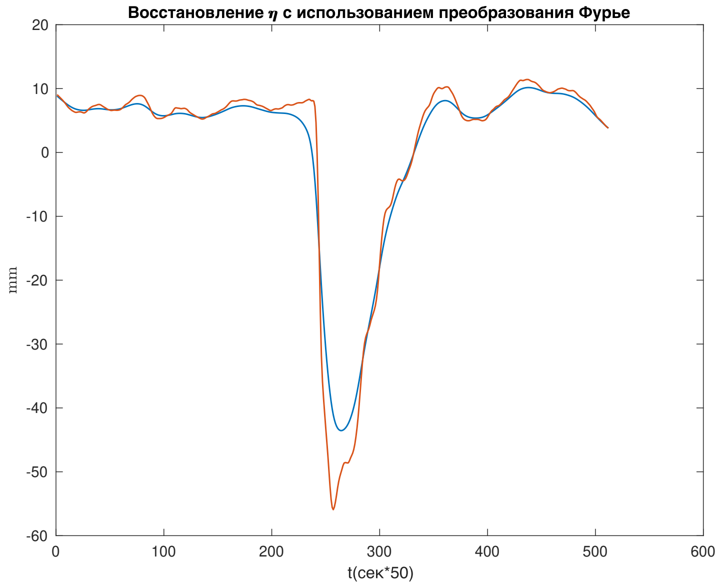

Рис. 2.13. Восстановление с использованием преобразования Фурье

Визуально видно, что ожидаемая и полученная траектория центра масс совпадают, без каких-либо аномальных отклонений. Для дальнейшего анализ будем использовать метод двойной фильтрации, так как на модельных данных он дал меньшую погрешность восстановления $\tilde{\eta}$.

2.5. Оценка неизвестных параметров задачи

В задаче быстродейтсвия присутсвует несколько неизвестных параметров:

u_* - модуль оптимального управления, t_* - коэффицент обезразмеривания времени, $\varphi_* \approx \varphi_0$ - характерное значение угла отклонения тела

$l = 0.88$м

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{1/3 \cdot m_T l^2}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{l}{3g}}$$

$$u^- = \frac{t_* U^-}{m_T g l \varphi_*}, \quad u^+ = \frac{t_* U^+}{m_T g l \varphi_*}.$$

$|U^+| = |U^-| = \dot{M} \approx \Delta M{\cdot}\nu,$ где $\nu-$частота дискретизации данных на стабилоанализаторе $\nu = 50$Гц

В работе [12] показано, что $\Delta y = \dfrac{\Delta M}{m_T g}$.

Возьмем 5 толчков и по ним определим средний возникающий момент в голеностопе см. таблицу 2.1

Среднее значение $\Delta M = 44.07$ Н·м

Среднее значение $U^+ = \dfrac{\Delta M}{\Delta t} = 144.7$ Н·м/с , $\Delta t_i = xEnd_i - xStart_i$

	xStart(сек)	**xEnd(сек)**	Δy(мм)	ΔM(**Н** · **м**)
1	1098.9	1099.3	64.7	43.1
2	1120.8	1121.0	61.5	40.9
3	1133.2	1133.6	72.6	48.3
4	1185.9	1186.2	65.18	43.4
5	1277.8	1278.0	67.3	44.7

Таблица 2.1. Данные для расчета возникающего момента в голеностопе, см. рис. 2.11

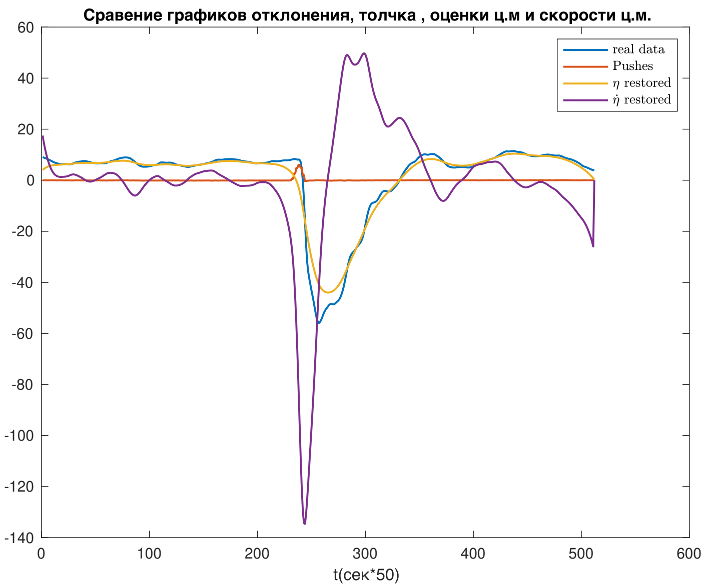

Рис. 2.14. Определение начальных условий в момент завершения толчка

На рисунке 2.14 представлены графики исходных данных, данные силомера, восстановленая траектория центра масс и ее первая производная, вычисленная как первая разность, умноженная на частоту дискретизации.

Вертикальная ось - Н, мм, мм/с для соответствующих величин. Момент завершения толчка соответствует точке с абсциссой 245. В ней берем начальные условия:

$\varphi_0 = 0.0292, \quad \omega_0 = 0.1490$ Посчитаем безразмерное u_*

$$u_* = \frac{t_* U^-}{mgl\varphi_*} = 1.46$$

На основе этих данных можем уже решать задачу быстродействия

Глава 3.

Анализ полученных решений задачи быстродействия

3.1. Сравнение траекторий и времени возвращения для выборки толчков

При таком значении действительных корней уравнения (1.15) больших 1 нет, при обоих комбинациях знаков u_*.

Объяснение этому явлению такое: в реальности в голеностопе уже возник некоторый возвращающий момент, за счет нервной системы или быстрореагирующих мышц ноги, который не даст человеку упасть. Но в нашей постановке задачи, считается, что момент не успел возникнуть. Для корректировки завысим значение u_* в $2-3$ раза.

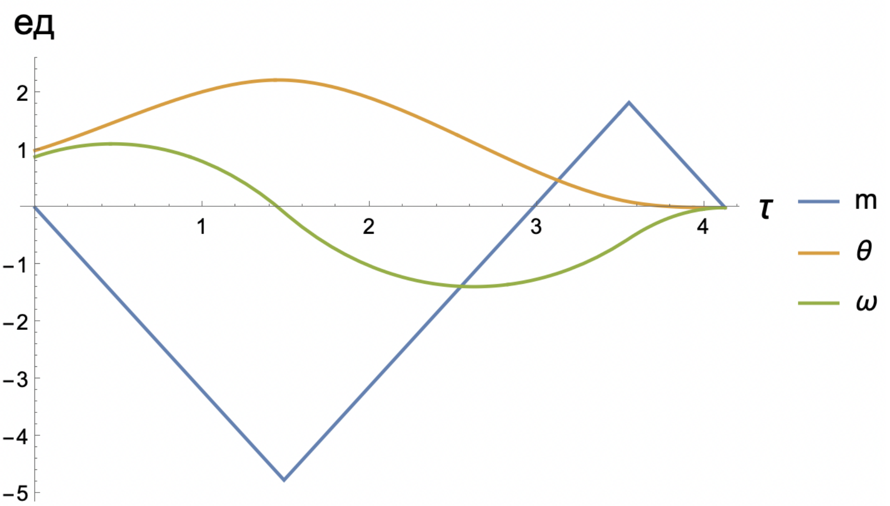

Рис. 3.1. Оптимальная траектории в безразмерном виде $u = 3.2$

Посторим полученные траектории для различных значений u_*(см. рис. 3.2, 3.3).

Данные со стабилоанализатора, содержат погрешности, спокойное положение немного блуждает, поэтому скорректируем координаты центра масс, на ее среднее значение до и после толчка. Корректировка представляет собой аналог вычитания линейного тренда.

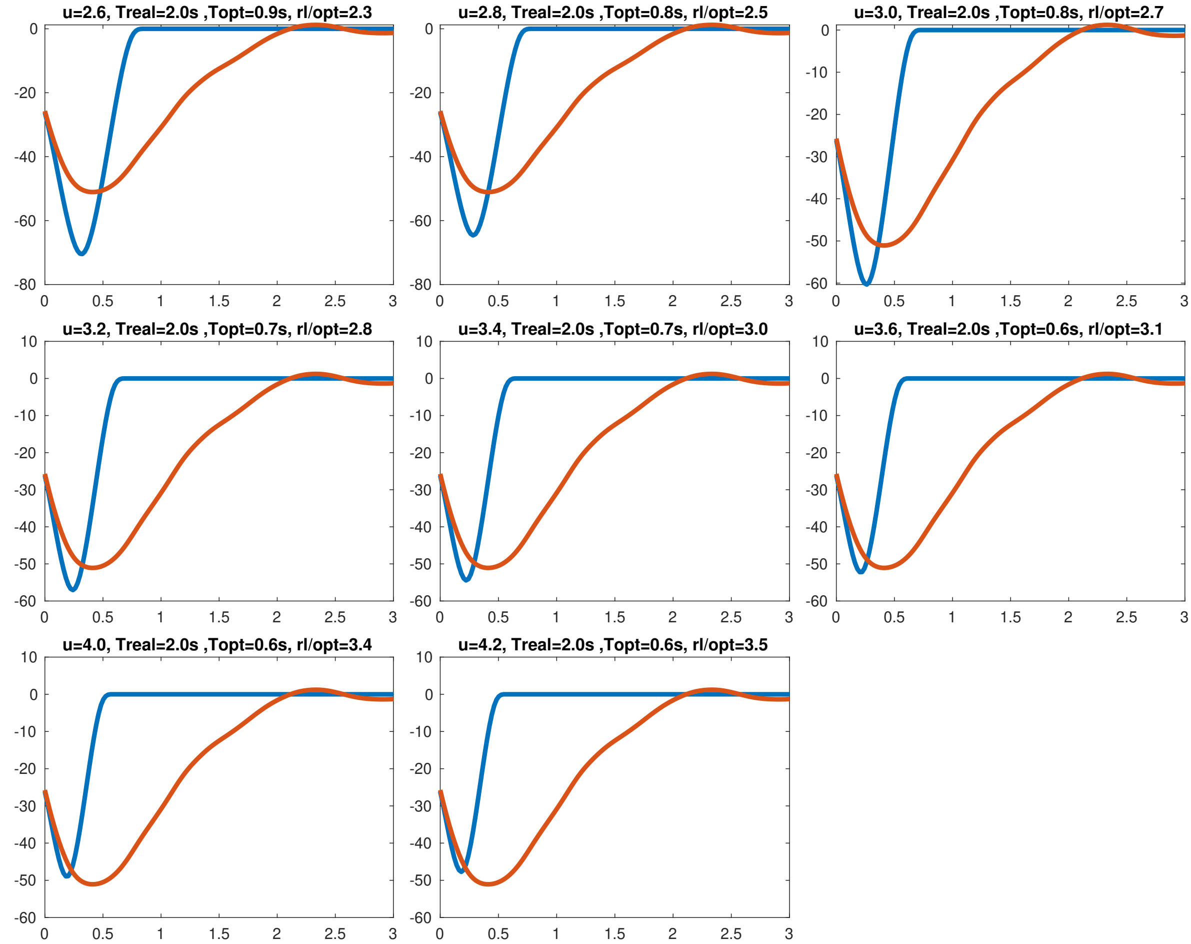

Рис. 3.2. Оптимальные(голубые) и реальные(оранжевые) траектории на возвратном движении человека отметка 1120

Проведем аналогичный анализ для нескольких толчков, результаты представлены в таблице 3.1.

По ней видно, что среднее отношение реального времени завершения толчка к оптимальному равно 2.8 для сильных(номер $1-5$) толчков и 1.86 для слабых $(7-9)$ при управлении $u_* = 3.2$. При таком управлении для нескольких толчков, максимальная амплитуда наиболее близка к реальной, поэтому для дальнейшего анализа будем рассматривать $u_* = 3.2$

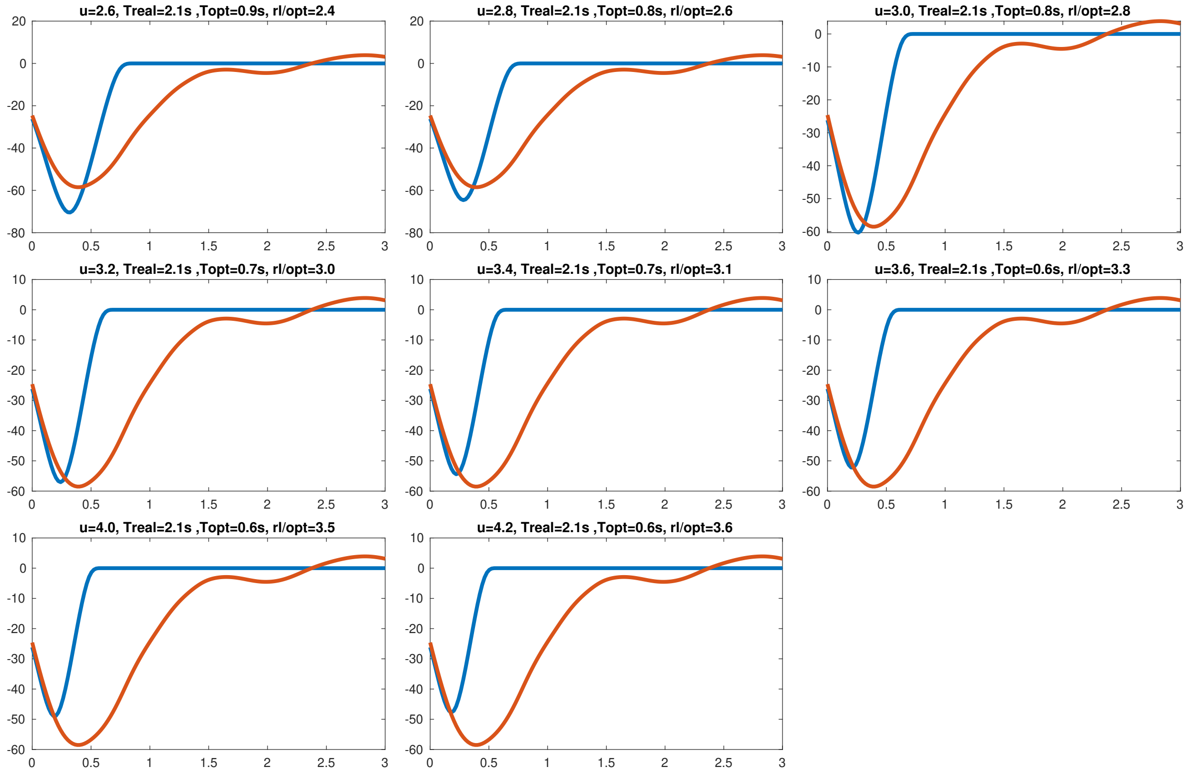

Рис. 3.3. Оптимальные(голубые) и реальные(оранжевые) траектории на возвратном движении человека отметка 1130

Номер толчка	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
F_{max}**(Н)**	6.01	6.87	8.21	8.56	9.73	4.74	5.49	1.97	3.3
Время толчка(сек)	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
φ_0	0.026	0.028	0.033	0.033	0.035	0.022	0.018	0.008	0.007
ω_0	0.1490	0.1767	0.1689	0.1955	0.2139	0.0989	0.1453	0.0513	0.0786
Момент(кг*м)	14.88	19.21	17.95	19.28	19.95	9.97	14.16	6.38	7.95
real/opt $u_* = 3.2$	2.8	2.7	2.8	2.8	2.9	2.7	1.8	1.8	2.0
real/opt $u_* = 3.6$	3.1	3.0	3.1	3.1	3.2	2.9	2.0	2.0	2.3

Таблица 3.1. Анализ различных толчков

3.2. Гипотезы по корректировке задачи

Результаты эксперимента совпадают с ожидаемым результатом, но за счет допущений задачи, оптимальная траектория отличается от реальной. Нервная система могла не успеть среагировать, но тогда среагировали камбаловидная или икроножная мышцы, без предварительного сигнала от мозга. За счет чего и успел возникнуть момент.

Ниже представлен список предложений, которые можно использовать для уточнения решения задачи:

1) Считать, что после изменения момент в голеностопе уже успел измениться, что изменит начальные условия для задачи быстродействия;

2) Использовать ДУСы для определения начальных условий после толчка;

3) Уточнить физиологические способности человека, для более детального описания процесса возврата;

4) Уменьшить погрешность исходнго эксперимента: добавить видеозапись, провести эксперимент на нескольких здоровых людях, точнее откалибровать стабилограф, для удаления шумов;

5) Провести набор различных по силе толчков, близких к критическим к падению человека.

Заключение

В дипломной работе были представлены оптимальные алгоритмы управления движением позой при ступенчатом воздействии, основанные на модели «перевернутого маятника» удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина. В задаче ставилось ограничение на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

Проводимый эксперимент и математические модели взяты из литературы, подобные исследования уже проводились.

В ходе работы:

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое хорошо качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилометрических исследованиях;
- Представлено аналитическое решение задачи быстродействия;
- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка;
- Проведен анализ допущений, которые могут скорректировать соответствие математической модели и реального процесса;

Литература

1. Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S. An optimal control model for maximum height human jumping// Journal of Biomechanics.-1990, vol. 23 – pp.1185-1198.

2. Happee R. Time optimality in the control of human movements// Biological cybernetics-1992, vol. 66 – pp. 357-366.

3. Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С. Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте// IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009» - М.: Экспоцентр, 2009.– С.121-123.

4. Муртазина Е.П. Функциональные особенности выполнения стабилографических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // Известия ЮФУ. Технические науки.- 2009.-№9-С.123-127.

5. Мельников А.А., Филёва В.В. Методика определения устойчивости вертикальной позы под влиянием внешнего толкающего воздействия // Физиология. 2015. С. 31–37.

6. Кручинин П.А. Анализ результатов стабилометрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.

7. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека - М.: Наука, 1965 - 256 с.

8. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.

9. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.

10. П.А. Кручинин, М.А. Подоприхин, И.Д. Бекеров Сравнительный анализ алгоритмов оценки движения центра масс по результатам стабилометрических измерений // Биофизика. – 2021. – Т. 66, №5. – С. 997–1004.

11. Фалб Питер Л., Атанс Майкл Оптимальное управление, Машиностроение, 1968, 764 с.

12. П.А. Кручинин Исследование колебаний человека при спокойном стоянии //Задача спецпрактикума по теоретической и прикладной механике. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2022, 36 с.

13. Д. Г. Саенко, А. А. Артамонов, И. Б. Козловская Характеристики позных коррекционных ответов до и после длительных космических полетов // Физиология человека. – 2011. – Т. 37, №5. – С. 91–99.