

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
МАГИСТРА

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЧЕЛОВЕКОМ ИСХОДНОЙ ПОЗЫ  
ПОСЛЕ ТОЛЧКА**

Выполнил: студент группы М - 2  
Романов Андрей Владимирович

---

(подпись студента)

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент Кручинин Павел Анатольевич

---

(подпись научного руководителя)

Москва  
2023

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. Математическая модель и решение задачи быстродействия</b>	<b>6</b>
1.1 Математическая модель . . . . .	6
1.2 Постановка задачи быстродействия . . . . .	9
1.3 Анализ задачи быстродействия . . . . .	10
1.4 Решение задачи быстродействия на отдельных этапах времени . . . . .	11
1.5 Сведение задачи к отысканию корней полинома . . . . .	14
1.6 Решение задачи быстродействия при $n < 2$ переключений управления . . . .	15
<b>2. Определение начальных условий в момент завершения толчка</b>	<b>17</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	17
2.2 Применение алгоритмов фильтрации к модельным данным . . . . .	20
2.3 Анализ данных стабильноанализатора и силомера . . . . .	21
2.4 Применение алгоритмов фильтрации к экспериментальным данным . . . . .	22
2.5 Оценка неизвестных параметров задачи . . . . .	23
<b>3. Анализ полученных решений задачи быстродействия</b>	<b>26</b>
3.1 Сравнение траекторий и времени возвращения для выборки толчков . . . .	26
3.2 Продолжения по корректировке и расширению задачи . . . . .	28
<b>Заключение</b>	<b>30</b>
<b>Литература</b>	<b>31</b>

# Введение

В литературе встречается решение задач оптимального быстрогодействия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Проба с толчком в спину или грудь является одной из стандартных проб при стабилметрических исследованиях [4, 12]. При проведении этой пробы обследуемый стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, после толчка в грудь, определяемое по показаниям стабилоанализатора.

В ходе теста производят толкающее воздействие на человека с помощью руки [4]. При проведении тестов обследуемый, стоя на стабилплатформе без обуви, с закрытыми глазами, с руками, сложенными на груди, выполнял инструкцию “стоять спокойно, не сопротивляться возмущениям и стараться сохранять равновесие”. Сила толчков варьировала в случайном порядке от пороговой до субмаксимальной. В результате внешнего воздействия тело человека наклоняется вперед и при не очень сильном толчке он не теряет равновесие и не падает, а возвращается в исходное положение за счет изменения угла в голеностопном суставе. Изменение остальных суставных углов может оказаться тоже не столь значительным. Родственные задачи уже решались в работах [5, 11]. Схематическое изображение эксперимента представлено на рисунке 1.



Рис. 1. Схематическое изображение толкателя и положения испытуемого на стабилплатформе

Исходные данные об отклонении сагиттальной координаты при различных по силе толчках, предоставлены сотрудниками ИМБП РАН (см. рисунок 2)

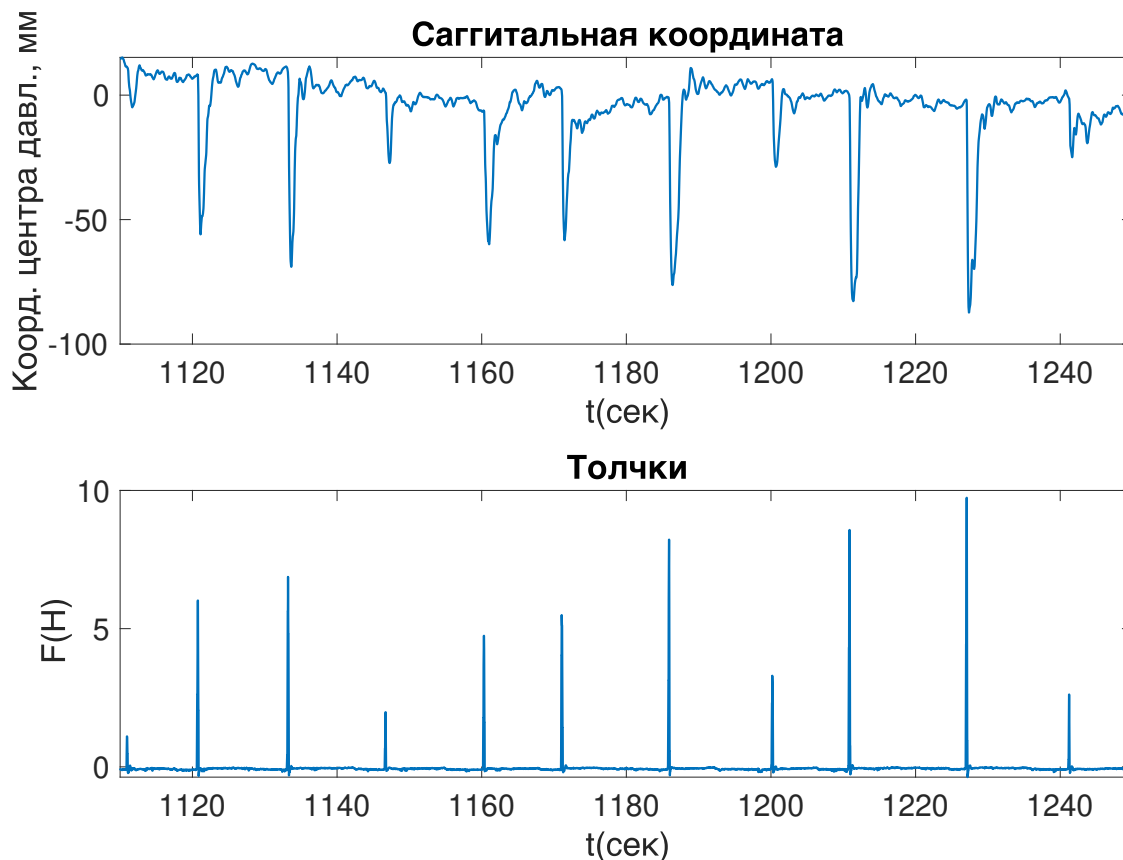


Рис. 2. Отклонение сагиттальной координаты при различных по силе толчках

В качестве математической модели используется традиционно модель «перевернутого маятника» [5, 6].

**Целью работы** является разработка алгоритма управления изменением позы человека, основанного на решении задачи оптимального быстрогодействия, который можно было бы использовать для возвращения в исходную вертикальную позу. В дальнейшем такое решение предполагается использовать для оценки эффективности управления человеком при возвращении в вертикальную позу, путем сравнения времени реального процесса с полученным эталонным решением оптимальной задачи.

**Актуальность работы** объясняется тем, что в ряде организаций проводятся подобные тесты, например в ИМБП РАН, но их анализ затруднен. Одной из причин является сложность создания фиксированных условий толчка и его силы. Предлагаемая работа призвана преодолеть эту проблему. Решение этой задачи может быть применено в медицине для оценки оптимальности работы мышц человека, оценки качества выполнения заданного движения при толчках заданной величины, например для космонавтов или спортсменов.

#### **Задачи работы:**

- Описание математической модели

- Постановка задачи быстрогодействия, используя принцип максимума Понтрягина
- Поиск решения задачи быстрогодействия
- Определение начального состояния системы, в момент завершения толчка
- Решение задачи быстрогодействия с вычисленными начальными условиями
- Сравнение реального и оптимального времени возвращения в исходную позу
- Сравнение реальной и оптимальной траектории возвращения в исходную позу
- Интерпретация полученных результатов

#### **Методы исследования:**

- Движение человека в саггитальной плоскости описывается моделью перевернутого маятника.
- Для описания движения используется система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 3 порядка.
- Начальные условия для задачи быстрогодействия определяются с данных эксперимента, в ходе которого на человека оказывают толкающее воздействие.
- Проводится математическое моделирование в пакетах Matlab R2022a и Wolfram Mathematica 13.0.

**Объем и структура работы.** Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 32 страниц, включая 21 рисунок и 2 таблицы.

# Глава 1.

## Математическая модель и решение задачи быстрогодействия

### 1.1. Математическая модель

Для описания движения тела человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника (см. рисунок 1.1).

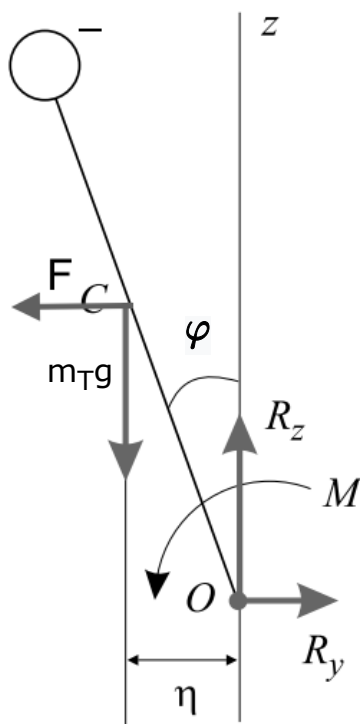


Рис. 1.1. Модель перевернутого маятника

Традиционно предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым однородным стержнем массы  $m_T$ , закрепленным шарнирно в точке  $O$ , которая соответствует голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке  $C$ , удаленной от точки  $O$  на расстояние

1. Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку  $O$ , равен  $J$ . Отклонение стержня от вертикали описывается углом  $\varphi$ . Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная плоскость параллельна оси чувствительности платформы, а его стопа неподвижна относительно платформы. Скорость изменения момента  $M$ , который приложен в точке  $O$  к стержню, будем считать управлением.

$R_z$ —вертикальная реакция со стороны ступни,

$R_y$ —горизонтальная реакция со стороны ступни,

$F$ — сила с которой толкают человека,

$g$ —ускорение свободного падения,

$\eta$ — сагиттальная координата центра масс.

На тело воздействует два момента: первый от силы тяжести, второй момент создают мышцы голеностопного сустава. Запишем уравнение моментов, относительно точки  $O$  на ось перпендикулярную плоскости рисунка 1.1

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \sin \varphi + M$$

Уравнение моментов для малых значений угла  $\varphi$  и скорости его изменения запишем, как традиционно принято для этой задачи.

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M$$

Необходимо перевести решение уравнения из начального состояния, где  $\varphi_0$ — значение угла отклонения после толчка,  $\omega_0$ — значение угловой скорости после толчка

$$\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

в конечное состояние

$$\varphi(t_k) = \varphi_k, \dot{\varphi}(t_k) = 0.$$

$\varphi_k$ — конечное значение угла отклонения тела, после стабилизации позы

При этом будем принимать во внимание условия ограниченности величины момента в голеностопном суставе

$$M^- \leq M \leq M^+. \quad (1.1)$$

$M^+$ — максимальный развиваемый момент в голеностопном суставе

$M^-$ — минимальный развиваемый момент в голеностопном суставе

Для величины момента помимо чисто физиологических ограничений, связанных с ограниченностью развиваемых мышечных усилий, следует принимать во внимание возможность опрокидывания человека вследствие того, что равновесие стоп на платформе должно обеспечиваться нормальной реакцией, приложенной в области опоры. В нашей постановке задачи, человек не опрокидывается после толчков и точка приложения нормальной реакции опоры не выходит за пределы стопы, поэтому пренебрежем (1.1)

Будем принимать во внимание условия ограниченности скорости изменения момента

в голеностопном суставе, как это соответствует физиологически

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+.$$

$U^+$  — максимальная развиваемая скорость изменения момента в голеностопном суставе

$U^-$  — минимальная развиваемая скорость изменения момента в голеностопном суставе

Перевод состояния тела должен происходить за минимальное время  $t_k$ , с помощью изменений значения  $\dot{M}$  в голеностопном суставе.

Будем считать, что за время толчка система регуляции позы человека не успела среагировать и момент в голеностопном суставе остался неизменным и соответствует значению, обеспечивающему положение равновесия человека до начала движения и после его завершения

$$M(0) = M(t_k) = -m_T g l \varphi_k;$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным

$$\theta = \frac{\varphi - \varphi_k}{\varphi_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{m_T g l \varphi_*}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы  $\varphi_* = \varphi_0 - \varphi_k$

Введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}}.$$

Управлением  $u$  будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных безразмерные уравнения движения примут следующий вид

$$\theta'' = \theta + m; \quad m' = u \tag{1.2}$$

Здесь через  $m'$  обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ . Тогда необходимо решение системы (1.2) перевести из начального положения

$$\theta(0) = 1; \quad \theta'(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

в положение

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \theta'(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \quad \text{где}$$



$$u^- = \frac{t_* U^-}{m_T g l \varphi_*}, \quad u^+ = \frac{t_* U^+}{m_T g l \varphi_*}.$$

Далее будем считать, что  $|u^-| = |-u^+| = u_* = u_{max}$

## 1.2. Постановка задачи быстрогодействия

Выпишем систему (1.2) в форме Коши

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = \theta + m, \\ m' = u. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ограничение на управление  $|u| \leq u_{max}$

Начальные условия

$$\theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \frac{t_*}{\varphi_*} \omega_0 = \Omega_0; \quad m(0) = 0$$

Конечные условия

$$\theta(\tau_f) = 0; \quad \theta'(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0$$

Для решения задачи оптимального быстрогодействия  $J = \tau_f \rightarrow \min$  будем использовать принцип максимума Понтрягина [7]:

Если  $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$  – оптимальный процесс, то существует нетривиальная пара  $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$  такая, что

- $\max_{u(t) \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \quad \forall t \in T \subseteq [t_0, t_k^0];$
- $\psi(t_k^0) + \lambda_0 \left( \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y} \right)^T \perp M$  в точке  $y^0(t_k^0);$
- $\mathcal{H} = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$  при  $t \in [t_0, t_k^0].$

Запишем функцию Понтрягина

$$H(\psi(t), y(t), u(t)) = \psi_1 \cdot \omega + \psi_2 \cdot (\theta + m) + \psi_3 \cdot u$$

Сопряженная система уравнений:

$$\psi'_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

В данной задаче  $y_1 = \theta, y_2 = \omega, y_3 = m$ , тогда сопряженная система примет вид

$$\begin{cases} \psi'_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\psi_2 \\ \psi'_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \psi'_3 = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\psi_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.3. Анализ задачи быстродействия

Проверим управляемость системы (1.3).

(Критерий управляемости Калмана) Линейная стационарная система (11) вполне управляема на отрезке  $[0, T]$  тогда и только тогда, когда матрица  $W = \{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$  имеет ранг, равный  $n$ .

Для системы (1.3) матрицы  $A, B, W$  равны соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(W) = 3$ , значит система полностью управляема

Рассмотрим собственные числа системы (1.3)

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

где  $\mathcal{I}$  – единичная матрица.

Раскрывая определитель, получим  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$ , в литературе [10] нет готового решения, для задач с нулевыми собственными значениями.

При  $\psi_3 \equiv 0$  следует, что  $\psi_2 \equiv 0$  и  $\psi_1 \equiv 0$  следовательно особого управления нет.

Тогда для условия максимизации функции Понтрягина

$$u = \begin{cases} -u_{max}, & \text{при } \psi_3 < 0 \\ +u_{max}, & \text{при } \psi_3 \geq 0 \end{cases}$$

Продифференцируем по безразмерному времени второе уравнение из (1.4) и подставим в него первое, получим

$$\psi_2'' = \psi_2$$

Решая систему (1.4), получим

$$\begin{cases} \psi_1 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3, \\ \psi_2 = C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}, \\ \psi_3 = -C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau} + C_3. \end{cases}$$

Анализируя корни уравнения  $\psi_3(\tau) = 0$ , для различной комбинации коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$ , получим, что число корней не может быть больше двух. В системе может быть не более двух переключений  $u$ .

Аналогичный вывод можно получить, применив к решаемой задаче теорему Фельдбаума о числе переключений оптимального управления[8]

## 1.4. Решение задачи быстродействия на отдельных этапах времени

Выбор знака  $+$  или  $-$  перед определяется на основании полученных корней, одно из решений явно будет не подходящим, исходя из физической реализации процесса.

Для определенности возьмем  $u = -u_*$ , управление на первом участке траектории до первого переключения.

Пусть первое переключение управления происходит в момент времени  $\tau = \tau_1$ , а второе в момент времени  $\tau = \tau_2$ . Рассмотрим систему (1.3) на трех этапах, при переходе между которыми меняется управление.

Решая систему (1.3), получим

$$\begin{cases} m(\tau) = \tau u + C_1, \\ \theta(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\tau} ((C_1 + C_2 + C_3)e^{2\tau} - 2e^{\tau}(\tau u + C_1) + C_1 + C_2 - C_3), \\ \omega(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\tau} ((C_1 + C_2 + C_3)e^{2\tau} - 2e^{\tau}u - C_1 - C_2 + C_3). \end{cases} \quad (1.6)$$

### Решение системы на первом этапе

Этап 1.  $u = -u_*$  начальные условия

$$m(0) = 0; \quad \theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \Omega_0;$$

Из (1.17) получим

$$\begin{cases} 0 = -\tau u_* + c_1, \\ 1 = \frac{1}{2}e^{-\tau} (C_1 (e^{\tau} - 1)^2 + C_2 (e^{2\tau} + 1) + C_3 e^{2\tau} - C_3 + 2e^{\tau} \tau u_*), \\ \Omega_0 = \frac{1}{2}e^{-\tau} (C_1 (e^{2\tau} - 1) + C_2 (e^{2\tau} - 1) + C_3 e^{2\tau} + C_3 + 2e^{\tau} u_*). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = -u_* + \Omega_0. \end{cases}$$

Подставим полученные константы в (1.17)

$$\begin{cases} m_1(\tau) = -\tau u_*, \\ \theta_1(\tau) = \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) + u_*. \end{cases}$$

## Решение системы на втором этапе

Этап 2.  $u = u_*$  начальные условия

$$m(\tau_1) = m_1(\tau_1); \quad \theta(\tau_1) = \theta_1(\tau_1); \quad \omega(\tau_1) = \omega_1(\tau_1);$$

$$\begin{cases} m(\tau_1) = -\tau_1 u_*, \\ \theta(\tau_1) = \frac{1}{2} e^{-\tau_1} \left( (e^{2\tau_1} - 1) \Omega_0 + e^{2\tau_1} + (2e^{\tau_1} \tau_1 - e^{2\tau_1} + 1) u_* + 1 \right), \\ \omega(\tau_1) = \frac{1}{2} e^{-\tau_1} \left( (e^{2\tau_1} + 1) \Omega_0 - (e^{\tau_1} - 1) (-e^{\tau_1} + (e^{\tau_1} - 1) u_* - 1) \right). \end{cases}$$

Находим константы интегрирования

$$\begin{cases} -\tau_1 u_* = \tau_1 u_* + C_1, \\ \frac{1}{2} e^{-\tau_1} \left( (e^{2\tau_1} - 1) \Omega_0 + e^{2\tau_1} + (2e^{\tau_1} \tau_1 - e^{2\tau_1} + 1) u_* + 1 \right) = \\ = \frac{1}{2} e^{-\tau_1} \left( C_1 (e^{\tau_1} - 1)^2 + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1} \tau_1 u_* + C_2 - C_3 \right), \\ \frac{1}{2} e^{-\tau_1} \left( (e^{2\tau_1} + 1) \Omega_0 - (e^{\tau_1} - 1) (-e^{\tau_1} + (e^{\tau_1} - 1) u_* - 1) \right) = \\ = \frac{1}{2} e^{-\tau_1} \left( C_1 (e^{2\tau_1} - 1) + C_2 e^{2\tau_1} + C_3 e^{2\tau_1} - 2e^{\tau_1} u_* - C_2 + C_3 \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -2\tau_1 u_*, \\ C_2 = -e^{-\tau_1} (-e^{\tau_1} + e^{2\tau_1} u_* - 2e^{\tau_1} \tau_1 u_* - u_*), \\ C_3 = e^{-\tau_1} (e^{\tau_1} \Omega_0 - e^{\tau_1} u_* + e^{2\tau_1} u_* + u_*). \end{cases}$$

Подставим начальные условия для второго этапа в (1.17), получим

$$\begin{cases} m_2(\tau) = (\tau - 2\tau_1) u_*, \\ \theta_2(\tau) = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^\tau - e^{-\tau}) + u_* (e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau), \\ \omega_2(\tau) = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^\tau + e^{-\tau}) + u_* (e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1} - 1). \end{cases}$$

## Решение системы на третьем этапе

Этап 3.  $u = -u_*$  конечные условия

$$m(\tau_f) = 0; \quad \theta(\tau_f) = 0; \quad \omega(\tau_f) = 0;$$

Подставим начальные условия в (1.17), получим

$$\begin{cases} 0 = C_1 - \tau_f u_*, \\ 0 = \frac{1}{2} e^{-\tau_f} \left( C_1 (e^{\tau_f} - 1)^2 + C_2 (e^{2\tau_f} + 1) + C_3 e^{2\tau_f} - C_3 + 2u_* e^{\tau_f} \tau_f \right), \\ 0 = \frac{1}{2} e^{-\tau_f} \left( C_1 (e^{2\tau_f} - 1) + C_2 (e^{2\tau_f} - 1) + C_3 e^{2\tau_f} + C_3 + 2u_* e^{\tau_f} \right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = u_* \tau_f, \\ C_1 = \frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} (-2e^{\tau_f} \tau_f + e^{2\tau_f} - 1), \\ C_2 = -\frac{1}{2} u_* e^{-\tau_f} (e^{2\tau_f} + 1). \end{cases}$$

Тогда решение на этом этапе имеет вид

$$\begin{cases} m_3(\tau) = u_* (\tau_f - \tau), \\ \theta_3(\tau) = \frac{1}{2} u_* (-e^{\tau-\tau_f} + e^{\tau_f-\tau} - 2\tau_f + 2\tau), \\ \omega_3(\tau) = u_* - \frac{u_*}{2} (e^{\tau-\tau_f} + e^{-\tau+\tau_f}). \end{cases}$$

### Сопряжение второго и третьего этапов

Так как момент, угол отклонения и угловая скорость представляют собой кусочно-непрерывные функции времени, то можно сопрячь систему на втором и третьем этапе в момент времени  $\tau_2$ .

$$\begin{cases} m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2), \\ \theta_2(\tau_2) = \theta_3(\tau_2), \\ \omega_2(\tau_2) = \omega_3(\tau_2). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} (\tau_2 - 2\tau_1) u_* = u_* (\tau_f - \tau_2), \\ \frac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* (e^{\tau_2-\tau_1} - e^{-\tau_2+\tau_1} + 2\tau_1 - \tau_2) = \\ = \frac{1}{2} u_* (-e^{\tau_2-\tau_f} + e^{\tau_f-\tau_2} - 2\tau_f + 2\tau_2), \\ \frac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* (e^{\tau_2-\tau_1} + e^{-\tau_2+\tau_1} - 1) = \\ = u_* - \frac{u_*}{2} (e^{\tau_2-\tau_f} + e^{-\tau_2+\tau_f}). \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на  $u_*$ , выражение для  $\tau_f$  из первого уравнения подставим во второе и третье

$$\begin{cases} \tau_f = 2(\tau_2 - \tau_1), \\ \frac{e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}) + u_* \left( e^{-\tau_1+\tau_2} - e^{\tau_1-\tau_2} + \frac{e^{\tau_2-\tau_f} - e^{-\tau_2+\tau_f}}{2} \right) = 0, \\ \frac{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2}}{2} + \frac{\Omega_0 - u_*}{2} (e^{\tau_2} + e^{-\tau_2}) + u_* \left( e^{\tau_1-\tau_2} + e^{-\tau_1+\tau_2} + \frac{e^{\tau_2-\tau_f} + e^{-\tau_2+\tau_f}}{2} - 2 \right) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Введем замену переменных

$$x = e^{\tau_1}, \quad y = e^{\tau_2}, \quad z = e^{\frac{\tau_f}{2}}$$

$$\begin{cases}
z = \frac{y}{x}, \\
\frac{1}{2} \left( u_* \left( \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2} - \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} - y + \frac{1}{y} \right) + \left( y - \frac{1}{y} \right) \Omega_0 + y + \frac{1}{y} \right) = 0, \\
\frac{u_* \left( \frac{y^2}{x^2} + x^2 + \frac{2y^2}{x} + 2x - y^2 - 4y - 1 \right) + (y^2 + 1) \Omega_0 + y^2 - 1}{2y} = 0.
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
z = \frac{y}{x}, \\
(\Omega_0 - u_*) \left( xy - \frac{x}{y} \right) + u_* \left( \frac{x^3}{y} - \frac{y}{x} - \frac{2x^2}{y} + 2y \right) + \frac{x}{y} + xy = 0, \\
(\Omega_0 - u_*) \left( xy + \frac{x}{y} \right) + u_* \left( \frac{x^3}{y} + \frac{y}{x} + \frac{2x^2}{y} + 2y - 4x \right) - \frac{x}{y} + xy = 0.
\end{cases} \quad (1.8)$$

Полученную систему (1.8) можно решить численно, подставив вместо  $\Omega_0$  и  $u_*$  конкретные значения. Отбор корней проводим из условия, что  $x > 1, y > 1, z > 1$ . Но также стоит провести дальнейший анализ для поиска аналитического решения.

## 1.5. Сведение задачи к отысканию корней полинома

$$\begin{cases}
y = zx, \\
(\Omega_0 - u_*) \left( x^2 z - \frac{x}{zx} \right) + u_* \left( \frac{x^3}{zx} - \frac{zx}{x} - \frac{2x^2}{zx} + 2zx \right) + \frac{x}{zx} + x^2 z = 0, \\
(\Omega_0 - u_*) \left( x^2 z + \frac{x}{zx} \right) + u_* \left( \frac{x^3}{zx} + \frac{zx}{x} + \frac{2x^2}{zx} + 2zx - 4x \right) - \frac{x}{zx} + x^2 z = 0.
\end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases}
(\Omega_0 - u_*) \left( x^2 z - \frac{1}{z} \right) + u_* \left( \frac{x^2}{z} - z - \frac{2x}{z} + 2zx \right) + \frac{1}{z} + x^2 z = 0, \\
(\Omega_0 - u_*) \left( x^2 z + \frac{1}{z} \right) + u_* \left( \frac{x^2}{z} + z + \frac{2x}{z} + 2zx - 4x \right) - \frac{1}{z} + x^2 z = 0.
\end{cases} \quad (1.10)$$

Сложим и вычтем уравнения системы

$$\begin{cases}
2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_* \left( 2\frac{x^2}{z} + 4zx - 4x \right) + 2x^2 z = 0, \\
2(\Omega_0 - u_*)\frac{1}{z} + u_* \left( 2z + \frac{4x}{z} - 4x \right) - \frac{2}{z} = 0.
\end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases}
2(\Omega_0 - u_*)x^2 z + u_* \left( 2\frac{x^2}{z} + 4zx - 4x \right) + 2x^2 z = 0, \\
2(\Omega_0 - u_*)\frac{1}{z} + 2u_* z + 4x \left( \frac{u_*}{z} - u_* \right) - \frac{2}{z} = 0.
\end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} 2(\Omega_0 - u_*)x^2z + u_* \left( 2\frac{x^2}{z} + 4zx - 4x \right) + 2x^2z = 0, \\ x = \left( \frac{1}{2z} - \frac{u_*z}{2} - (\Omega_0 - u_*)\frac{1}{2z} \right) \frac{z}{u_*(1-z)} \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\frac{(u_*(z^2 - 1) + \Omega_0 - 1) \left( -u_* \left( z^4 + \Omega_0(z^2 - 1)^2 \right) + u_*^2(z - 1)^4 + u_* - \Omega_0^2 z^2 + z^2 \right)}{2u_*^2(z - 1)^2} = 0$$

$$\begin{cases} (u_*(z^2 - 1) + \Omega_0 - 1) = 0, \\ -u_* \left( z^4 + \Omega_0(z^2 - 1)^2 \right) + u_*^2(z - 1)^4 + u_* - \Omega_0^2 z^2 + z^2 = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} u_*z^2 + \Omega_0 - 1 - u_* = 0, \\ (-u_*\Omega_0 + u_*^2 - u_*)z^4 - 4u_*^2z^3 + (2u_*\Omega_0 + 6u_*^2 - \Omega_0^2 + 1)z^2 - 4u_*^2z + -u_*\Omega_0 + u_*^2 + u_* = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Дальнейшее решение строится на основе перебора знака  $u_*$ , выбор знака  $+$  или  $-$  определяется на основании полученных корней, одно из решений явно будет не подходящим, исходя из физической реализации процесса.

## 1.6. Решение задачи быстродействия при $n < 2$ переключений управления

Пусть в системе (1.3) **нет переключений управления**, тогда

$$m(\tau) = \tau u,$$

$m(\tau_f) = 0$ , тогда либо  $u \equiv 0$ , либо  $\tau = 0$ , чего не может быть, так как тогда решение (1.3) будет неограниченно возрастать

Пусть в системе (1.3) **одно переключение управления**, тогда пусть переключение идет в момент времени  $\tau_1$ .

Этап 1.  $u = -u_*$  начальные условия

$$m(0) = 0; \quad \theta(0) = 1; \quad \omega(0) = \Omega_0;$$

$$\begin{cases} m_1(\tau) = u_*\tau, \\ \theta_1(\tau) = \frac{1}{2}e^\tau(-u_* + \Omega_0 + 1) + \frac{1}{2}e^{-\tau}(u_* - \Omega_0 + 1) + \tau u_*, \\ \omega_1(\tau) = \frac{1}{2}e^{-\tau}(-u_* + \Omega_0 - 1) + \frac{1}{2}e^\tau(-u_* + \Omega_0 + 1) + u_*. \end{cases} \quad (1.16)$$

Этап 2.  $u = u_*$  конечные условия

$$m(\tau_f) = 0; \quad \theta(\tau_f) = 0; \quad \omega(\tau_f) = 0;$$

$$\begin{cases} m_2(\tau) = u_* (\tau - \tau_f), \\ \theta_2(\tau) = \frac{1}{2}u_*e^{\tau-\tau_f} - \frac{1}{2}u_*e^{\tau_f-\tau} + \frac{1}{2}u_*(2\tau_f - 2\tau), \\ \omega_2(\tau) = \frac{1}{2}u_*e^{\tau-\tau_f} + \frac{1}{2}u_*e^{\tau_f-\tau} - u_*. \end{cases} \quad (1.17)$$

Сопряжем 1 и 2 этапы из условия

$$\begin{cases} m_1(\tau_1) = m_2(\tau_1), \\ \theta_1(\tau_1) = \theta_2(\tau_1), \\ \omega_1(\tau_1) = \omega_2(\tau_1). \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} 2\tau_1 u_* = u_* \tau_f, \\ -u_* e^{\tau_1 - \tau_f} + u_* e^{\tau_f - \tau_1} - 2u_* \tau_f - e^{-\tau_1} \Omega_0 + e^{\tau_1} \Omega_0 + e^{-\tau_1} + e^{\tau_1} + e^{-\tau_1} u_* - e^{\tau_1} u_* + 4\tau_1 u_* = 0, \\ u_* e^{\tau_1 - \tau_f} + u_* e^{\tau_f - \tau_1} - e^{-\tau_1} \Omega_0 - e^{\tau_1} \Omega_0 + e^{-\tau_1} - e^{\tau_1} + e^{-\tau_1} u_* + e^{\tau_1} u_* - 4u_* = 0. \end{cases}$$

Подставим первое уравнение  $\tau_f = 2\tau_1$  во второе и третье

$$\begin{cases} 2\tau_1 = \tau_f, \\ e^{-\tau_1} (1 - \Omega_0) + e^{\tau_1} (\Omega_0 + 1) = 0, \\ e^{\tau_1} (2u_* - \Omega_0 - 1) + e^{-\tau_1} (2u_* - \Omega_0 + 1) - 4u_* = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Сделаем замену  $e^{\tau_1} = x$ ;  $e^{\tau_f} = z$

Тогда (1.18) примет вид

$$\begin{cases} x^2 = z, \\ \frac{1}{x}(1 - \Omega_0) + x(1 + \Omega_0) = 0, \\ x(2u_* - \Omega_0 - 1) + \frac{1}{x}(2u_* - \Omega_0 + 1) - 4u_* = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Из второго уравнения (1.19) получим

$$x^2 = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + \Omega_0}$$

Будем считать, что толчок достаточно сильный, чтобы в момент завершения толчка начальная скорость была положительной, даже если мышцы уже будут оказывать некоторое сопротивление движению.

Используем предположение, что к концу толчка угол наклона продолжает увеличиваться и  $\Omega_0 > 0$ , тогда  $x < 1$ , чего не может быть.



## Глава 2.

# Определение начальных условий в момент завершения толчка

### 2.1. Постановка задачи

Для корректного решения задачи быстрогодействия необходимо как можно лучше оценить начальные условия в момент завершения толчка. Экспериментальные данные содержат только записи силомера и стабилоанализатора, поэтому определять начальные условия будем на основе данных с саггитальной стабิโลграммы и силомера.

Рассмотрим силы действующие на модель стержня, иммитирующего тело человека (см. рисунок 1.1) и силы действующие на систему «стопы ног – платформа стабилоанализатора».

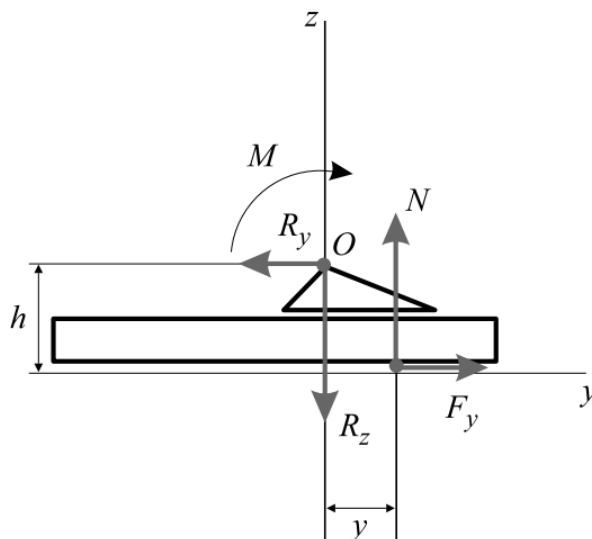


Рис. 2.1. Силы действующие на на систему «стопы ног – платформа стабилоанализатора»

$F$  – это внешняя толкающая сила,  $y$  – саггитальная координата центра давления,  $l_1$  – высота точки к которой прикладывается толкающая сила,  $h$  – суммарная высота стопы и платформы стабилоанализатора,  $N$  – вертикальная реакция опоры,  $F_y$  – горизонтальная реакция опоры

Ниже представлена система уравнений соответствующая рисунку 1.1

$$\begin{cases} m_T l \ddot{\varphi} = -R_y - F, \\ 0 = R_z - m_T g, \\ J \ddot{\varphi} = m_T g l \sin \varphi - F l_1 \cos \varphi + M_x. \end{cases} \quad (2.1)$$

Проведем линеаризацию по  $\varphi$  в окрестности нуля

$$\begin{cases} m_T l \ddot{\varphi} = -R_y - F, \\ 0 = R_z - m_T g, \\ J \ddot{\varphi} = m_T g l \varphi - F l_1 + M_x. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ниже представлена система уравнений соответствующая рисунку 2.1

$$\begin{cases} M_x = N y + F_y h, \\ F_y = R_y, \\ N \approx m_T g. \end{cases} \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) выразим  $M_x$

$$M_x = m_T g y - h (F + m_T l \ddot{\varphi})$$

Подставим  $M_x$  в последнее уравнение системы (2.2) и сгруппируем слагаемые с  $\ddot{\varphi}$

$$(J + m_T l h) \ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + m_T g y - F l_1 - F h$$

Разделим на  $m_T g l$

$$\frac{(J + m_T l h) l \ddot{\varphi}}{m_T g l} = l \varphi + y - \frac{F}{m_T g} (l_1 + h); \quad (2.4)$$

Введем замену

$$\eta = -l \varphi; \quad T^2 = \frac{J + m_T l h}{m_T g l};$$

Подставим замену в (2.4)

$$\begin{aligned} T^2 \ddot{\eta} &= \eta - y + \frac{F}{m_T g} (l_1 + h) \\ T^2 \ddot{\eta} &= \eta - (y - \frac{F}{m_T g} (l_1 + h)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) можно свести к уравнению фильтра, путем корректировки входных данных  $y$

$$T^2 \ddot{\eta} = \eta - y \quad (2.6)$$

Где  $y$ — входные данные стабилоанализатора,  $\eta$ — выходные данные оценки координаты центра масс

В работе [9] получено такое же уравнение для связи центра масс и центра давления. Показано, что его решение неустойчиво и приводит к катастрофическому нарастанию

ошибки оценки на временах больше 0.5с.

Для использования предположения об отсутствии экспоненциальных составляющих, порожденных решением однородного уравнения, запишем передаточную функцию, соответствующую уравнению (2.6)

$$G(s) = -\frac{1}{T^2 s^2 - 1} \quad (2.7)$$

В работе [9] приведены два способа фильтрации данных: через преобразование Фурье и через фильтрацию в прямом и обратном времени. Кратко опишем их.

**Фильтрация с использованием Фурье преобразования:** Рассмотрим Фурье-образы  $N(\omega)$  и  $Y(\omega)$  функций  $\eta(t)$  и  $y(t)$ . В силу уравнения (2.7) эти функции связаны между собой соотношением.

$$N(\omega) = G(i\omega)Y(\omega). \quad (2.8)$$

Представим функцию  $y(t)$  в виде суммы

$$y(t) = a(t - t_0) + b + \delta(t), \quad (2.9)$$

где

$$a = \frac{y(t_f) - y(t_0)}{t_f - t_0}; \quad b = y(t_0) \quad (2.10)$$

Оценка координаты центра масс в этом случае может быть представлена в виде

$$\tilde{\eta} = a(t - t_0) + b + \chi(t). \quad (2.11)$$

Алгоритм построения оценки координаты  $\tilde{\eta}$  центра масс будет иметь следующий вид

- 1) Вычисляем константы  $a$  и  $b$  по формулам (2.10) и функцию  $\delta(t)$  из уравнения (2.9).
- 2) Вычисляем Фурье-образ  $Y(\omega)$  от функции  $\delta(t)$ .
- 3) Вычисляем  $N(\omega)$  в соответствии с уравнением (2.8)
- 4) Используя обратное преобразование Фурье вычисляем  $\chi(t)$  как пробраз  $N(\omega)$ .
- 5) Оценку координаты центра масс получаем по формуле (2.11).

**Фильтрация в прямом и обратном времени:** Для обоснования этого алгоритма представим передаточную функцию  $G(s)$  в виде произведения

$$G(s) = -G_1(s)G_2(s),$$

где  $G_1(s) = \frac{1}{Ts - 1}$  и  $G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

Передаточной функции  $G_2(s)$  соответствует уравнение устойчивого фильтра:

$$T\dot{x} + x = -y \quad (2.12)$$

а передаточной функции  $G_1(s)$  соответствует уравнение неустойчивого фильтра

$$T\dot{\eta} - \eta = x \quad (2.13)$$

Фильтр (2.13) имеет единственный положительный корень и устойчив в обратном времени. В итоге процедура сводится к последовательной фильтрации показаний стабилизатора фильтром (2.12) в прямом времени и последующей фильтрации (2.13) в обратном времени.

Оба алгоритма практически эквивалентны.

## 2.2. Применение алгоритмов фильтрации к модельным данным

Для оценки методической ошибки методов фильтрации проверим эти методы на модельных данных. Пусть наша система задается уравнением

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi + M - Fl_1 \cos \varphi$$

Где  $M$  - момент в голеностопном суставе

В модельном примере используем соотношение для системы, состоящей из перевернутого маятника со спиральной пружиной пружиной в основании и вязким трением. Получим следующее выражение

$$J\ddot{\varphi} = m_T g l \varphi - C\varphi - P\dot{\varphi} - Fl_1 \quad (2.14)$$

Где  $C$  и  $P$  неизвестные коэффициенты. Подберем эти коэффициенты такими, чтобы (2.14) соответствовало затухающим колебаниям с периодом  $T \approx 2c$

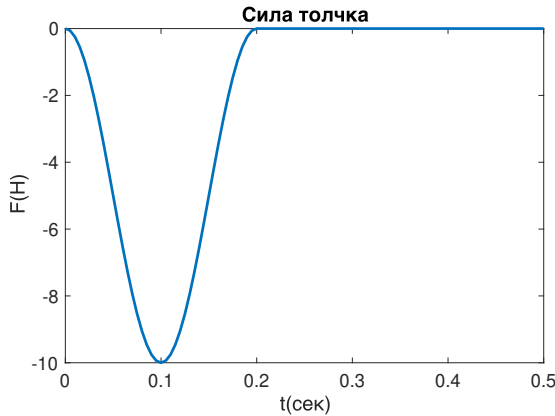


Рис. 2.2. Пример зависимости  $F(t) = 5(1 - \cos(4\pi \cdot 2.5t))$

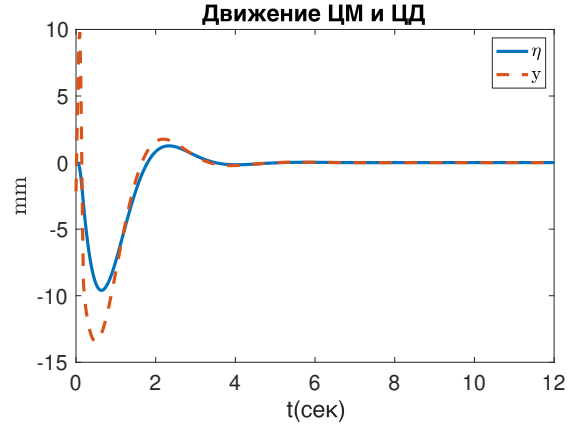


Рис. 2.3. Модельная траектория центра масс и центра давления

Восстановим  $\eta$  двумя способами

Погрешности обоих методов очень небольшие, почти идеально восстанавливают исходную траекторию центра масс. Для метода, использующего Фурье преобразование  $\frac{\sigma}{\max|\eta(t)|} = 0.0079$ , для двойной фильтрации  $\frac{\sigma}{\max|\eta(t)|} = 0.0007$ , где  $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение

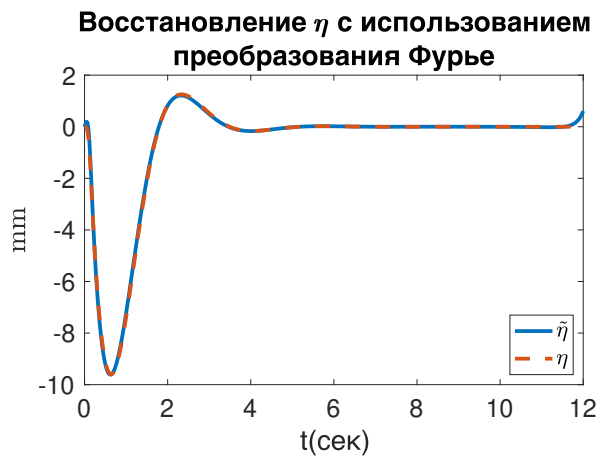


Рис. 2.4. Восстановление через преобразование Фурье

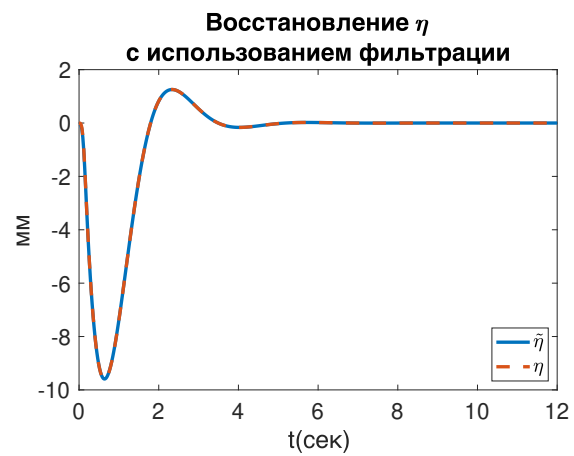


Рис. 2.5. Восстановление через двойную фильтрацию

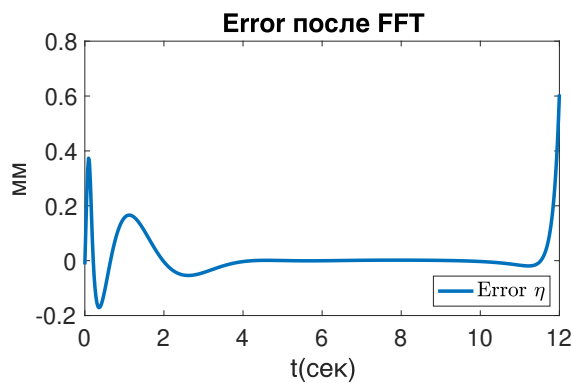


Рис. 2.6. Ошибка восстановления с использованием преобразования Фурье,  $\sigma = 0.076$

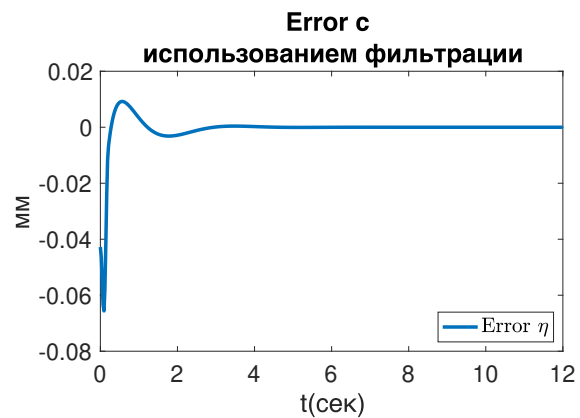


Рис. 2.7. Восстановление через двойную фильтрацию,  $\sigma = 0.006$

## 2.3. Анализ данных стабиланализатора и силомера

Оценим массу, на рисунках 2.8 и 2.9 представлены графики показаний веса (в единицах кгс) испытуемого человека. На основе этих данных, путем осреднения данных на графике 2.9 определим  $m_T$  — массу человека

$$m_T = 67.8 \text{ кг}$$

Проанализируем силу толчков (см. рис. 2.10), сила толчка колеблется от 1 до 10 Н, в первую очередь возьмем толчки большей силы, так как на них предположительно лучше удастся провести исследование.

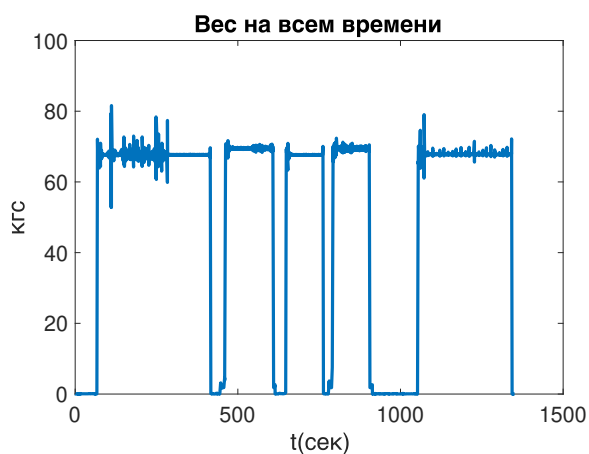


Рис. 2.8. Вес на всем интервале наблюдений

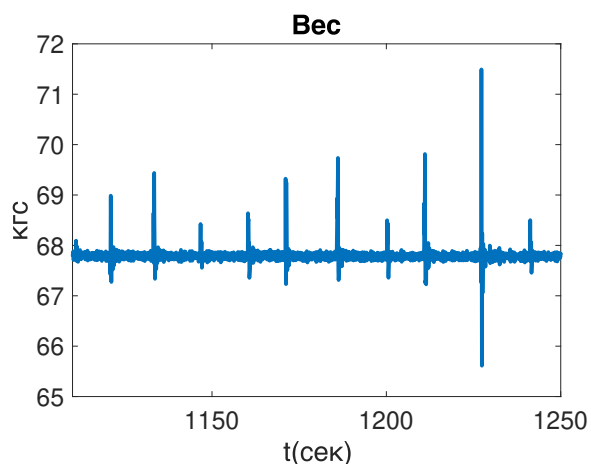


Рис. 2.9. Вес на интервале толчков

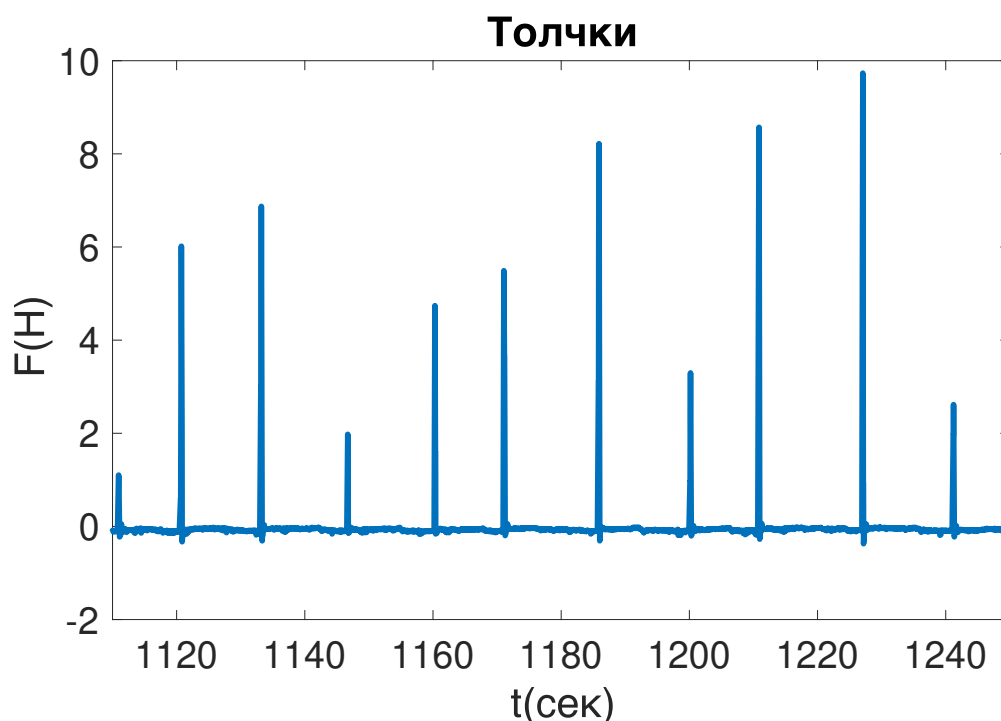


Рис. 2.10. Силовое воздействие на интервале наблюдения

## 2.4. Применение алгоритмов фильтрации к экспериментальным данным

Рассмотрим для примера первый толчок (около момента времени 1120) и для него применим два способа фильтрации (см. рис. 2.12 и 2.13), для того, чтобы оценить какой из них лучше подходит для наших данных.

Отношение,  $\frac{\sigma}{\max|\eta(t)|}$  примерно равно 0.07 для обоих методов, полученная траектории центра масс и исходная траектория центра давления довольно близки. Для даль-



Рис. 2.11. Саггитальное отклонение центра давления при толчках

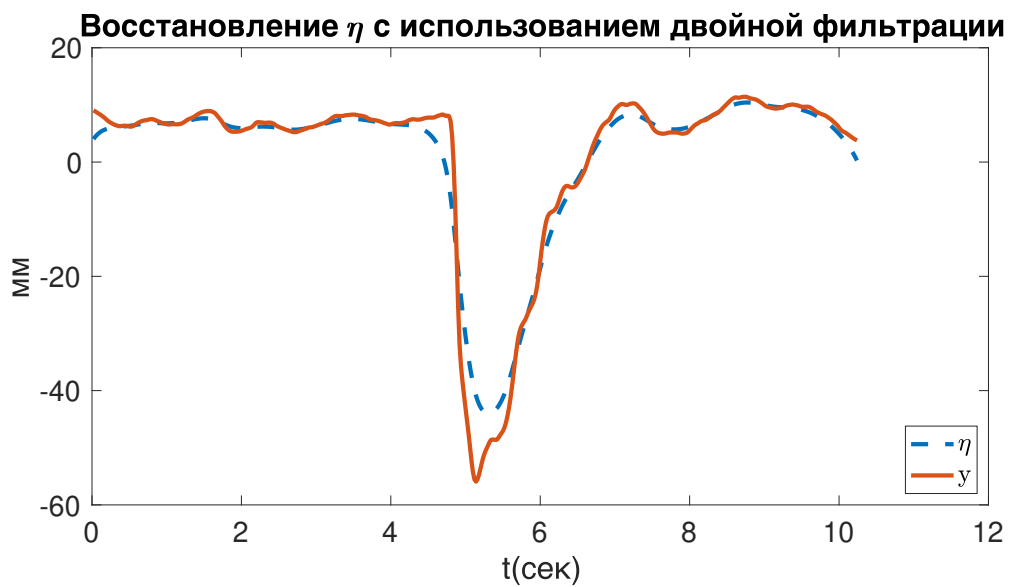


Рис. 2.12. Восстановление с использованием двойной фильтрации  $\sigma = 7.9$

нейшего анализ будем использовать метод двойной фильтрации, так как на модельных данных он дал меньшую погрешность восстановления  $\tilde{\eta}$ .

## 2.5. Оценка неизвестных параметров задачи

В задаче быстродействия присутствует несколько неизвестных параметров:

$u_*$  - модуль оптимального управления,  $t_*$  - коэффициент обезразмеривания времени,  
 $\varphi_* \approx \varphi_0$  - характерное значение угла отклонения тела

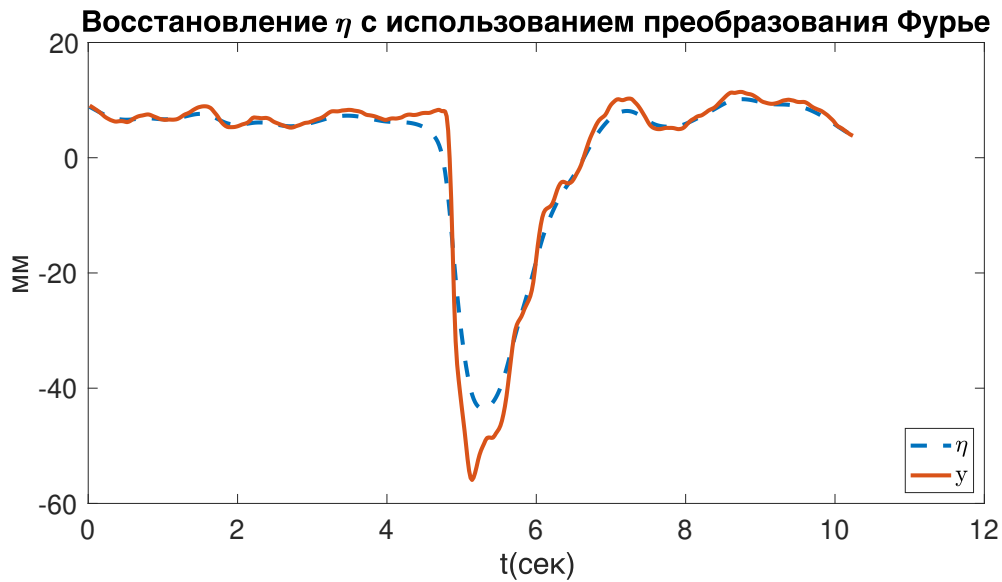


Рис. 2.13. Восстановление с использованием преобразования Фурье  $\sigma = 3.0$

$$l = 0.88\text{м}$$

$$t_* = \sqrt{\frac{J}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{1/3 \cdot m_T l^2}{m_T g l}} = \sqrt{\frac{l}{3g}}$$

$$u^- = \frac{t_* U^-}{m_T g l \varphi_*}, \quad u^+ = \frac{t_* U^+}{m_T g l \varphi_*}.$$

$|U^+| = |U^-| = \dot{M} \approx \Delta M \cdot \nu$ , где  $\nu$  – частота дискретизации данных на стабилоанализаторе  $\nu = 50\text{Гц}$

В работе [11] показано, что  $\Delta y \approx \frac{\Delta M}{m_T g}$ .

Возьмем 5 толчков и по ним определим средний возникающий момент в голеностопе см. таблицу 2.1

tНачало - время когда начался толчок

tКонец - время когда, началось возвратное движение центра давления

$\Delta y$  – изменение центра давления за время  $\Delta t = t_{\text{Конец}} - t_{\text{Начало}}$

$\Delta M$  – момент в голеностопе, возникший за время  $\Delta t$

	tНачало(сек)	tКонец(сек)	$\Delta y(\text{мм})$	$\Delta M(\text{Н} \cdot \text{м})$
<b>1</b>	1098.9	1099.3	64.7	43.1
<b>2</b>	1120.8	1121.0	61.5	40.9
<b>3</b>	1133.2	1133.6	72.6	48.3
<b>4</b>	1185.9	1186.2	65.18	43.4
<b>5</b>	1277.8	1278.0	67.3	44.7

Таблица 2.1. Данные для расчета возникающего момента в голеностопе, см. рис. 2.11

Среднее значение  $\Delta M = 44.0 \text{ Н} \cdot \text{м}$

$\max(\Delta M) = 48.3 \text{ Н} \cdot \text{м}$



$$\min(\Delta M) = 40.9 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

$$\text{Среднее значение } U^+ = \frac{\Delta M}{\Delta t} = 144.7 \text{ Н}\cdot\text{м/с}, \Delta t_i = xEnd_i - xStart_i$$

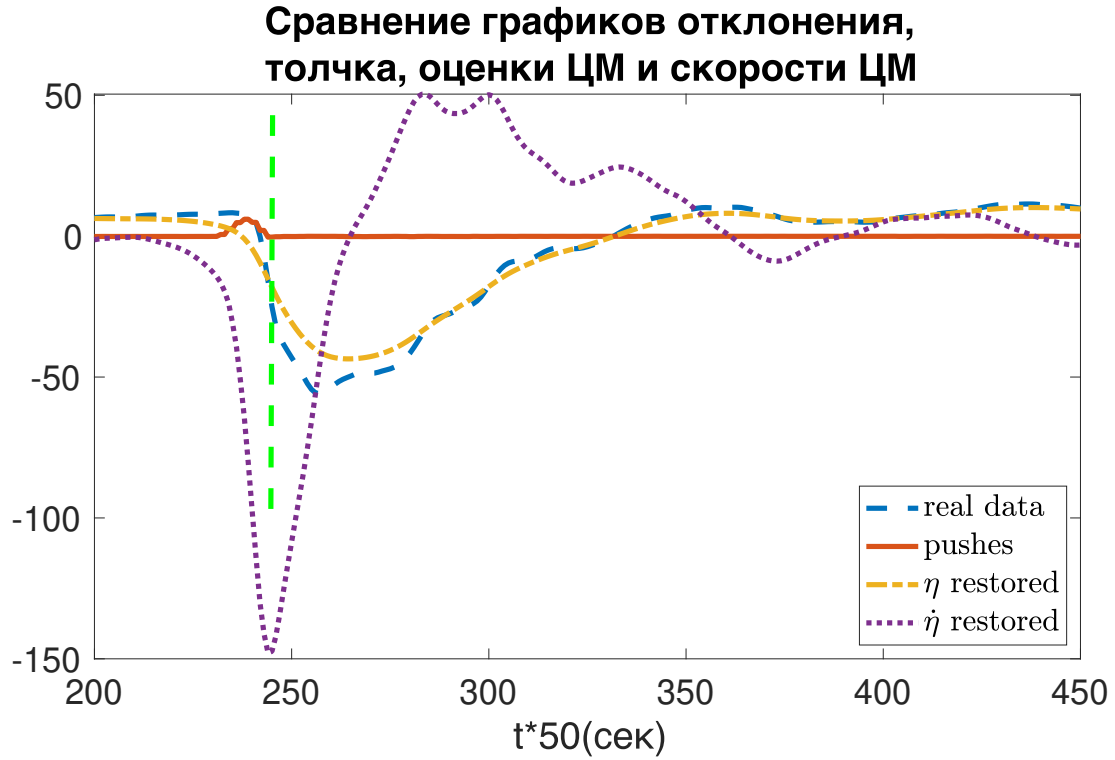


Рис. 2.14. К определению начальных условий в момент завершения толчка

На рисунке 2.14 представлены графики исходных данных(пунктирная), данные силомера(сплошная), траектория центра масс(штрих-пунктирная), восстановленная с помощью метода двойной фильтрации и ее первая производная(точечная), вычисленная как первая разность, умноженная на частоту дискретизации.

Вертикальная ось - Н, мм, мм/с для соответствующих величин. Момент завершения толчка соответствует моменту времени, отмеченному вертикальной пунктирной линией с абсциссой  $t = 245 \left( \frac{с}{50} \right)$ . В ней берем начальные условия:

$$\varphi_0 = -\frac{\tilde{\eta}(245)}{l} \cdot \frac{1}{1000} = 0.0292 \text{ рад}$$

$$\omega_0 = -\frac{\dot{\tilde{\eta}}(245)}{l} \cdot \frac{1}{1000} = 0.1490 \text{ рад/с}$$

Коэффициент  $\frac{1}{1000}$  нужен для преобразования миллиметров в метры.

Посчитаем безразмерное  $u_*$

$$u_* = \frac{t_* U^-}{m_T g l \varphi_*} = 1.46$$

## Глава 3.

# Анализ полученных решений задачи быстрогодействия

### 3.1. Сравнение траекторий и времени возвращения для выборки толчков

При  $u_* = 1.46$  действительных корней уравнения (1.15) больших 1 нет, при обоих комбинациях знаков  $u_*$ .

Объяснение этому явлению такое (см. рис. 3.1): в реальности в голеностопе уже возник некоторый возвращающий момент, за счет нервной системы и быстро реагирующих мышечных волокон, который возникает в результате реакции на изменение длины мышцы. В принятой в исследовании постановке задачи, считается, что момент не успел возникнуть. Для корректировки завишим значение  $u_*$  в 2 – 3 раза.

Посторим полученные траектории для различных значений  $u_*$  (см. рис. 3.3, 3.4).

Траектория центра масс содержит смещения относительно нуля, поэтому примем за ноль положение спокойного стояния.

При таком управлении для нескольких толчков, максимальная амплитуда наиболее близка к реальной, поэтому для дальнейшего анализа будем рассматривать  $u_* = 3.2$  и  $u_* = 3.6$

Результаты аналогичного анализа для нескольких толчков, представлены в таблице 3.1.

$F_{max}$  – максимальное значение силы с которой происходит толчок

$\varphi_0$  – угол на который отклонился человек после завершения толчка

$\omega_0$  – угловая скорость, которую получил человек после завершения толчка

Момент – момент в мышцах, возникший к моменту завершению толчка

$real/opt$  – отношение реального времени возврата к оптимальному при конкретном  $u_*$

По ней видно, что среднее отношение реального времени завершения толчка к оптимальному равно 2.8 для сильных (номер 1 – 5) толчков и 1.86 для слабых (7 – 9) при управлении  $u_* = 3.2$ .

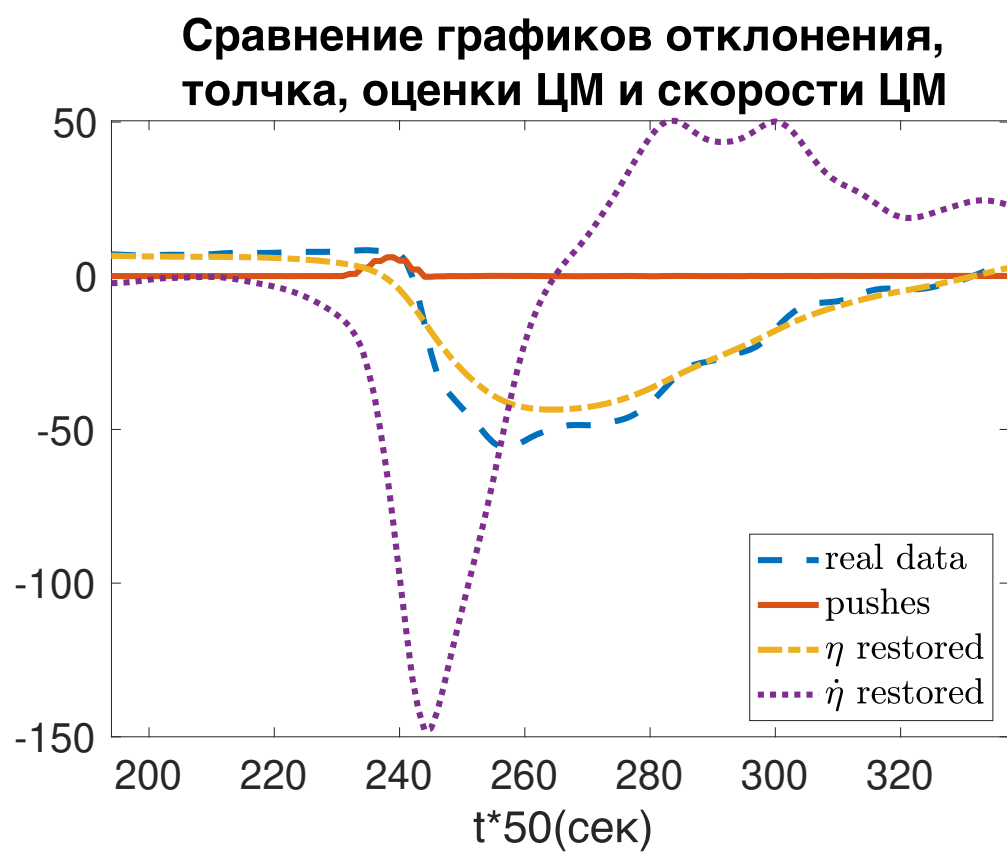


Рис. 3.1. К объяснению возникновения начального ненулевого момента

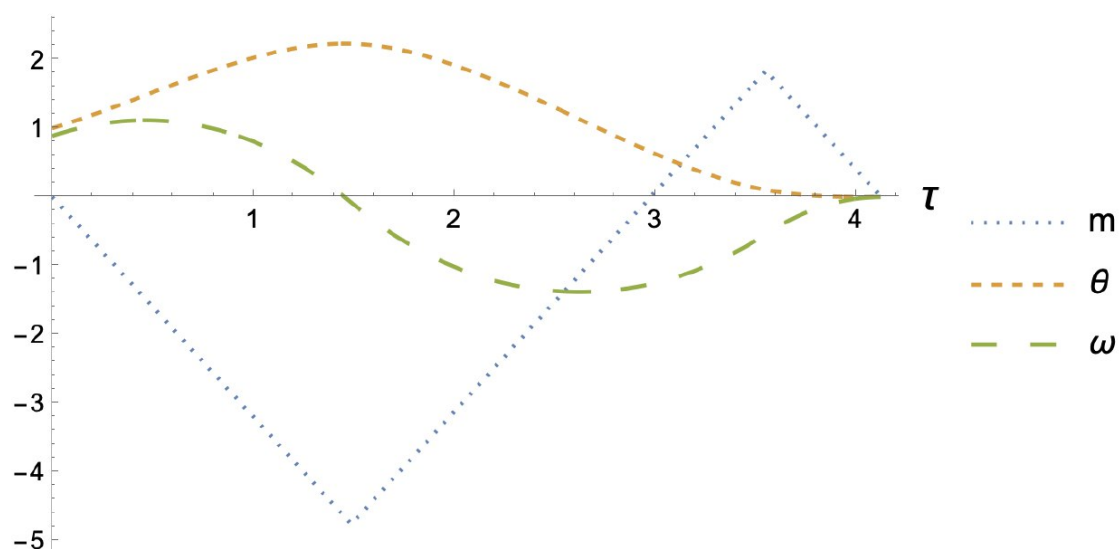


Рис. 3.2. Оптимальная траектории в безразмерном виде  $u = 3.2$

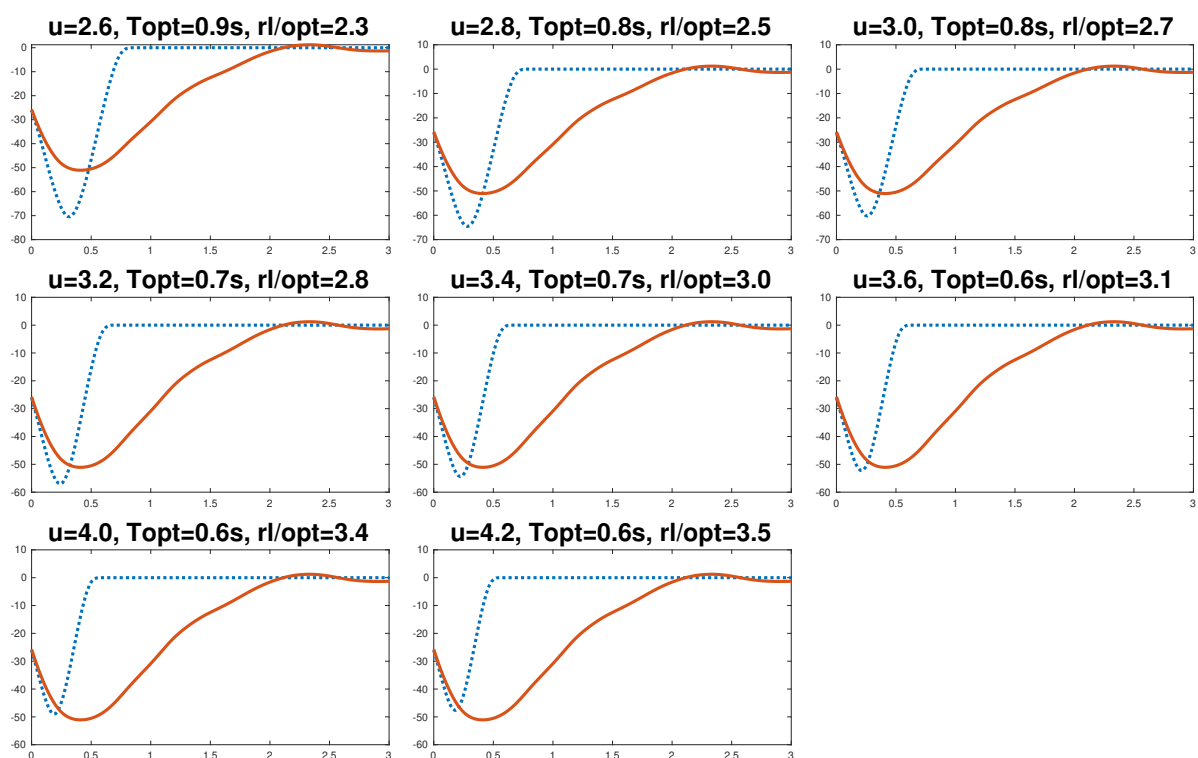


Рис. 3.3. Сравнение характерных оптимальных(пунктирные) и реальных(сплошные) траектории на возвратном движении человека  $t = 1120$

Номер толчка	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F_{max}$ (Н)	6.01	6.87	8.21	8.56	9.73	4.74	5.49	1.97	3.3
Время толчка(сек)	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
$\varphi_0$ рад	0.026	0.028	0.033	0.033	0.035	0.022	0.018	0.008	0.007
$\omega_0$ рад/с	0.15	0.18	0.17	0.20	0.21	0.10	0.15	0.05	0.08
Момент(Н·м)	14.88	19.21	17.95	19.28	19.95	9.97	14.16	6.38	7.95
real/opt $u_* = 3.2$	2.8	2.7	2.8	2.8	2.9	2.7	1.8	1.8	2.0
real/opt $u_* = 3.6$	3.1	3.0	3.1	3.1	3.2	2.9	2.0	2.0	2.3

Таблица 3.1. Анализ различных толчков

## 3.2. Предложения по корректировке и расширению задачи

Результаты эксперимента совпадают с ожидаемым результатом: оптимальная траектория по форме совпадает с реальной, но при постановке оптимальной задачи были приняты излишне сильные допущения, в результате чего, оптимальная траектория отличается от реальной намного более быстрым временем возврата. Видимо нервная система не успела среагировать, а среагировали камбаловидная или икроножная мышцы, их быстрореагирующие волокна. За счет чего и успел возникнуть момент.

Ниже представлен список предложений, которые можно использовать для уточнения решения задачи:

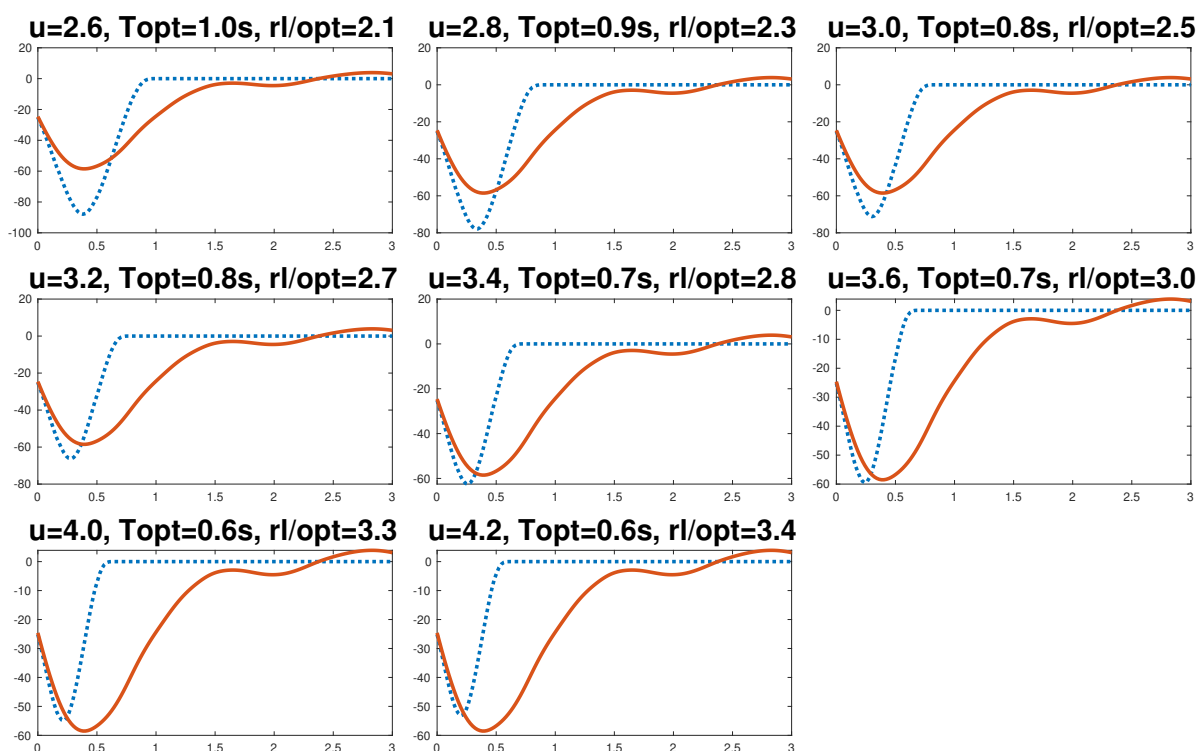


Рис. 3.4. Сравнение характерных оптимальных(пунктирные) и реальных(сплошные) траектории на возвратном движении человека  $t = 1130$

- 1) Считать, что после толчка момент в голеностопе уже успел измениться, что изменит начальные условия для задачи быстрогодействия и потребует учета ненулевого значения момента в голеностопном суставе, что не предполагала исходная постановка задачи управления
- 2) Использовать ДУСы, добавить видеозапись эксперимента для построения еще одной независимой оценки начальных условий после толчка;
- 3) Уточнить соответствие математической модели и физиологических способностей человека, для более детального описания процесса возврата;
- 4) Набрать статистику: провести эксперимент на спортсменах, космонавтах, студентах и людях с проблемами опорно-двигательного аппарата.

# Заключение

В дипломной работе решена задача оптимального управления, задача быстродействия, построенная с использованием принципа максимума Понтрягина. Представленный алгоритм позволяет определить оптимальную траекторию и время возвращения в исходную позу после толчка. Тело человека моделировалось перевернутым маятником, как это традиционно принято в литературе[6]. Предполагалось, что такая постановка соответствует процессу восстановления позы после толчка. В задаче ставилось ограничения на скорость изменения момента в голеностопном суставе.

Показано, что для данной задачи нет особых управлений, а регулярное принимает одинаковое по модулю значение, но чередуется по знаку, на различных участках движения. Решение задачи быстродействия сведено к нахождению корней полинома четвертой степени.

Для определения неизвестных параметров задачи использовались экспериментальные данные: показания саггитальной координаты центра давления, веса человека и показания силомера. По данным центра давления с помощью метода двойной фильтрации восстанавливался траектория центра масс, а по ней находились начальные условия задачи быстродействия. С помощью анализа выборки толчков определялся максимальный момент, возникающий в голеностопном суставе.

Проведено сравнение реальной траектории процесса и оптимальной, показано, что качественно они совпадают, но за счет грубых, излишне приближенных начальных допущений, времена возврата в исходную позу сильно отличаются.

В ходе работы:

- Показано, что решение оптимальной задачи быстродействия при ограниченной скорости изменения момента в голеностопном суставе может иметь решение, которое качественно совпадает с картиной, наблюдаемой в стабилметрических исследованиях;
- Представлено аналитическое решение задачи быстродействия;
- Найдены начальные условия в момент завершения толчка, с помощью метода двойной фильтрации;
- Время необходимое для восстановления исходной позы получилось соизмеримым с реальным времени возвращения после толчка;
- Проведен анализ допущений, которые могут скорректировать соответствие математической модели и реального процесса.

# Литература

1. Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S. An optimal control model for maximum height human jumping// Journal of Biomechanics.-1990, vol. 23 – pp.1185-1198.
2. Happee R. Time optimality in the control of human movements// Biological cybernetics-1992, vol. 66 – pp. 357-366.
3. Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С. Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте// IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009» - М.: Экспоцентр, 2009.– С.121-123.
4. Мельников А.А., Филёва В.В. Методика определения устойчивости вертикальной позы под влиянием внешнего толкающего воздействия // Физиология человека. 2015. С. 31–37.
5. Кручинин П.А. Анализ результатов стабилметрических тестов со ступенчатым воздействием с точки зрения механики управляемых систем // Биофизика. – 2019. – Т. 64, №5. – С. 1–11.
6. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека - М.: Наука, 1965 - 256 с.
7. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва, Механико-математический факультет МГУ, 2020, 165 с.
8. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.
9. П.А. Кручинин, М.А. Подопрхин, И.Д. Бекеров Сравнительный анализ алгоритмов оценки движения центра масс по результатам стабилметрических измерений // Биофизика. – 2021. – Т. 66, №5. – С. 997–1004.
10. Фалб Питер Л., Атанс Майкл Оптимальное управление, Машиностроение, 1968, 764 с.
11. П.А. Кручинин Исследование колебаний человека при спокойном стоянии //Задача спецпрактикума по теоретической и прикладной механике. Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2022, 36 с.

12. Д. Г. Саенко, А. А. Артамонов, И. Б. Козловская Характеристики позных коррекционных ответов до и после длительных космических полетов // Физиология человека. – 2011. – Т. 37, №5. – С. 91–99.