

Zeitreihenanalyse – Theorie und Anwendung

Stefan Krieger

Betreuer: Dr. Julio Daniel Backhoff-Veraguas

Bachelorseminar WS 2024/25



- Kurze Wiederholung
- Motivation
- Stationarität
- Unit Root Test
- Parameterschätzung
- Ordnung schätzen
- Anwendungen mit Python

Definition: Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse, \mathcal{F} die σ -Algebra und \mathbb{P} das Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Definition: Zufallsvariable

Eine Reelle Zufallsvariable X ist eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ messbar Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Ereigniss $\omega \in \Omega$ einen Wert in \mathbb{R} zuordnet.

Definition: Stochastischer Prozess

Ein stochastischer Prozess ist eine Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$, definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wobei T eine diskrete Indexmenge ist. Man nennt $(X_t)_{t \in T}$ eine Zeitreihe falls $t \in T$ für einen Zeitpunkt steht.

Beispiel: Weißes Rauschen

Einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in T}$, nennt man weißes Rauschen, falls gilt:

$$\mathbb{E}[X_t] = 0, \quad \forall t \in T \quad \text{und} \quad \text{Cov}[X_t, X_s] = \begin{cases} \sigma^2 < \infty & \text{if } t = s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Verstehen zeitlicher Abhängigkeiten
- Prognose von zukünftigen Ereignissen
- Modellierung komplexer Systeme
- Praktische Relevanz

Definition: Autokovarianzfunktion

Die Autokovarianzfunktion eines stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in T}$ ist definiert als

$$\gamma(t, \tau) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_{t-\tau} - \mu_{t-\tau})] = \text{Cov}[X_t, X_{t-\tau}],$$

für alle $t, \tau \in T$. Dabei bezeichnet μ_t den Erwartungswert von X_t .

Definition: Stationarität

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ ist stationär, falls gilt:

- $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ für alle $t \in T$
- $\gamma(t, \tau) = \gamma(\tau)$ für alle $t, \tau \in T$

Wieso ist Stationarität wichtig?

- **Grundlage vieler Modelle:** Viele lineare Modelle setzen Stationarität voraus, um gültige Ergebnisse zu liefern.
- **Eindeutige Parameterbestimmung:** Ohne Stationarität können Schätzungen verzerrt sein.
- **Vorhersagefähigkeit:** Stationäre Zeitreihen ermöglichen zuverlässige Prognosen.
- **Vergleichbarkeit:** Stationarität stellt sicher, dass Zeitreihen unabhängig vom Zeitpunkt vergleichbar sind.

Eine Irrfahrt ist ein stochastischer Prozess, bei dem

$$X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

wobei ε_t ein weißes Rauschen ist.

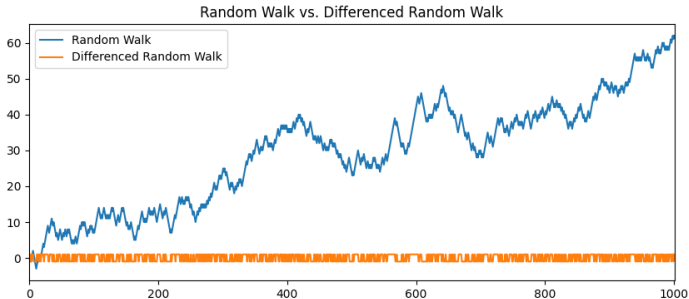
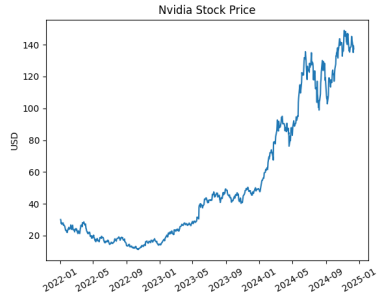
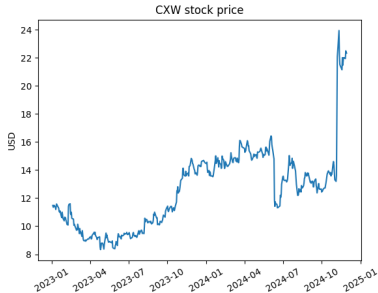


Figure: Beispiel eines Differenzstationären Prozesses



Beispiele für nicht-stationäre Prozesse

Der Unit Root Test ist ein wichtiges Werkzeug um die Stationarität eines AR Prozesses zu überprüfen

Definition: AR(p) Prozess

Ein autoregressives Modell der Ordnung p , bezeichnet als $AR(p)$, ist definiert durch

$$X_t = c + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

wobei $c, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ Konstanten sind und ε_t ein weißes Rauschen darstellt.

AR(1) Prozess

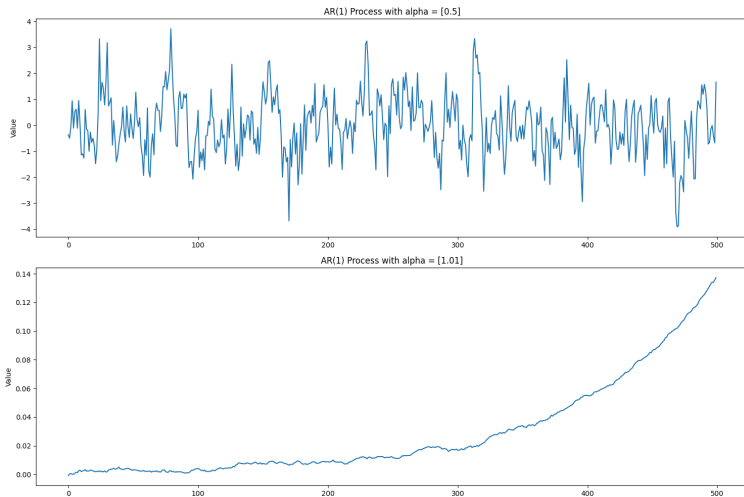


Figure: Oben: AR(1) Prozess für $\alpha = 0.5$, Unten: AR(1) Prozess für $\alpha = 1.01$

AR(1) Prozess

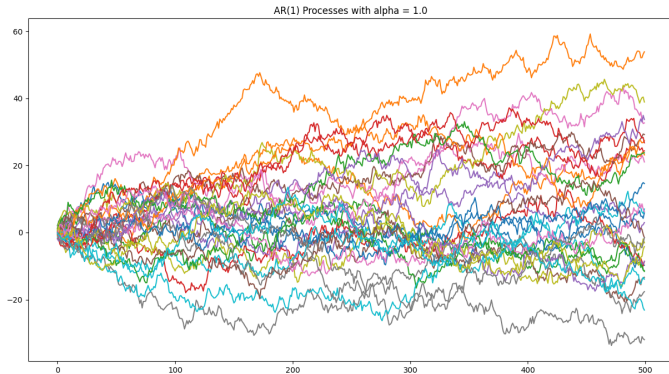


Figure: AR(1) Prozess für $\alpha = 1$

Angenommen wir haben einen stationären AR(p) Prozess gegeben durch:

$$\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t = X_t.$$

Durch Multiplikation mit $X_{t-\tau}$ und Erwartungswertbildung erhalten wir:

$$\alpha_1 \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t-\tau}] + \cdots + \alpha_p \mathbb{E}[X_{t-p} X_{t-\tau}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-\tau}] = \mathbb{E}[X_t X_{t-\tau}].$$

Da $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-\tau}] = 0$ und $\gamma(\tau) = \mathbb{E}[X_t X_{t-\tau}]$ folgt:

$$\alpha_1 \gamma(\tau - 1) + \alpha_2 \gamma(\tau - 2) + \cdots + \alpha_p \gamma(\tau - p) = \gamma(\tau).$$

Somit erhält man für $\tau = 1, \dots, p$ folgendes Gleichungssystem:

$$\alpha_1 \gamma(0) + \alpha_2 \gamma(1) + \dots + \alpha_p \gamma(p-1) = \gamma(1),$$

$$\alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(0) + \dots + \alpha_p \gamma(p-2) = \gamma(2),$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 \gamma(p-1) + \alpha_2 \gamma(p-2) + \dots + \alpha_p \gamma(0) = \gamma(p),$$

und multiplizieren mit $\frac{1}{\gamma(0)}$ ergibt:

$$\alpha_1 \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} + \cdots + \alpha_p \frac{\gamma(p-1)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)},$$

$$\alpha_1 \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} + \cdots + \alpha_p \frac{\gamma(p-2)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)},$$

\vdots

$$\alpha_1 \frac{\gamma(p-1)}{\gamma(0)} + \alpha_2 \frac{\gamma(p-2)}{\gamma(0)} + \cdots + \alpha_p \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(p)}{\gamma(0)},$$

wobei $\frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \rho(\tau)$ die Autokorrelationsfunktion ist.

Somit erhält man folgendes Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem wird als Yule-Walker Gleichungen bezeichnet.

Mittels der Partiellen Autokorrelationsfunktion kann die Ordnung eines AR-Prozesses bestimmt werden.

Definition: Partielle Autokorrelationsfunktion (PACF)

Die partielle Autokorrelationsfunktion eines stationären stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist definiert als

$$\phi_{pp} = \text{Corr} (X_t - \mathbb{E}[X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1}], \\ X_{t-p} - \mathbb{E}[X_{t-p} \mid X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1}])$$

für alle $t \in \mathbb{Z}$. Die partielle Autokorrelationsfunktion beschreibt die direkte Beziehung zwischen zwei Variablen X_t und X_{t-p} .

Mithilfe der Yule-Walker Gleichungen kann die PACF auch anders berechnet werden. Betrachte folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix}$$

Und unter Verwendung der Cramer'schen Regel folgt:

$$\phi_{pp} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & \rho(p) \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \right|}$$

Lemma

Für einen stationären AR(p) Prozess gilt:

$$\phi_{kk} = 0, \quad \text{für } k > p.$$

Beispiel

Betrachten wir einen stationären AR(1)-Prozess. Eine kleine Nebenrechnung ergibt, dass

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \frac{\frac{\alpha^\tau \sigma^2}{1-\alpha^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}} = \alpha^\tau.$$

Daher gilt:

$$\phi_{11} = \rho(1) = \alpha \neq 0,$$

da wir nur nicht-degenerierte AR-Prozesse betrachten.

Beispiel

Aber:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = 0,$$

weil $\rho(2) = \rho(1)^2$.

Ordnung von Prozessen bestimmen

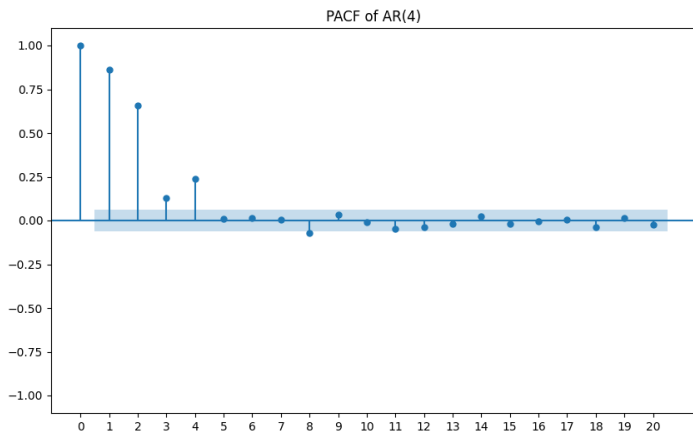


Figure: PACF eines AR(4) Prozesses

Nun ersetzen wir die Autokovarianzfunktionen durch die empirischen Autokovarianzen und lösen $\hat{A}\hat{\alpha} = \hat{\rho}$, durch das bekannte Minimierungsproblem:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^p} \sum_{j=0}^p \left(\rho_j - \sum_{k=0}^p \alpha_k a_{jk} \right)^2, \text{ mit } \hat{\alpha} = (A^\top A)^{-1} A^\top \rho.$$

Das Informationskriterium ist ein Maß für die Güte eines Modells. Ein häufig verwendetes Kriterium ist das Akaike Informationskriterium (AIC), welches definiert ist als:

$$\text{AIC}(k) = -2 \log \left(\frac{1}{N-k} \sum_{j=k+1}^N \hat{\varepsilon}_j^2 \right) + k \frac{2}{N},$$

wobei

- $\hat{\varepsilon}_t = x_t - \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j x_{t-j}$, sind die geschätzten Residuen
- k ist die Anzahl der im Modell geschätzten Parameter
- N ist die Anzahl der Beobachtungen

Es gibt noch eine Vielzahl weiterer Modelle, die in der Zeitreihenanalyse verwendet werden. Einige davon sind:

- ARMA
- ARIMA
- SARIMA
- ARCH
- GARCH
- EGARCH
- COGARCH
- TARCH
- FIGARCH
- ...



-  Jürgen Franke, Wolfgang Härdle, Christian M. Hafner. *Statistics of Financial Markets*. Springer, 2008.
-  James Douglas Hamilton. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.
-  Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2018.
-  Gebhard Kirchgässner, Jürgen Wolters. *Introduction to modern time series analysis*. Springer, 2009.
-  Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel. *Lineare Algebra*. Springer, 2014.
-  Hans-Otto Georgii. *Stochastik*. De Gruyter, 2009.
-  Klaus Neusser. *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften*. Vieweg+Teubner, 2011.