INTERPOLACIÓN

Polinomio Interpolante de Newton

Este método es algorítmico y resulta sumamente como en determinados casos, sobre todo cuando se requiere calcular un polinomio interpolador de grado elevado.

Para un polinomio de *n-esimo* orden se requiere de $\left(x_0, f(x_0)\right), \left(x_1, f(x_1)\right), \dots, (x_n, f(x_n))$. Con la Siguiente formula:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$P_n(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi_{j=1}^{i=1}(x - x_j))$$

Estos coeficientes se calculan mediante diferencias divididas cuya expresión general está dada por:

$$f\left[x_i, \dots x_{i+j+1}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, \dots x_{i+j+1}\right] - f\left[x_i, \dots x_{i+j}\right]}{x_{i+j+1} - x_j}$$

Como se ve en la formula, la diferencia dividida se calcula de modo recursivo usando coeficientes anteriores. Una vez se haya realizado cada uno de los cálculos, notara que hay muchas más diferencias divididas que coeficientes b_i.

El cálculo de todos los términos intermedios debe realizarse simplemente porque son necesarios para poder formar todos los términos finales.

La construcción del polinomio interpolador se trata de aquellos que involucren a x_0.

$$b_0 = f[x_0], b_1 = f[x_0, x_1], \dots, b_i = f\left[x_0, x_{1,} \dots, x_i\right]$$

Con esta notación podemos expresar el polinomio $p_n$con:

$$p_n(x) = [x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

A esta ecuación se conoce con el nombre de *Formula de diferencias Divididas Interpolantes de Newton*.

Ejemplo: Determine el polinomio Interpolante de Newton que contiene los puntos$(-3,9), (5,2), (7,-1), (8,0)$.

Solución:

x_i	y_i	b_1	b_2	b_3
-3	9	$\frac{-7}{8}$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-43}{528}$
5	2	$\frac{-3}{2}$	$\frac{5}{6}$	
7	-1	1		
8	0			

Para entender el algoritmo del polinomio interpolante de newton mediante las diferencias divididas, hagamos la construcción por niveles o columnas.

Nivel $b_1 = \frac{2-9}{5-(-3)} = \frac{-7}{8}, \ \frac{(-1)-2}{7-5} = \frac{-3}{2}, \ \frac{0-(-1)}{8-7} = \frac{1}{1} = 1$

Nivel $b_2 = \frac{\frac{-3}{2} - \frac{-7}{8}}{7-(-3)} = \frac{\frac{-5}{8}}{10} = \frac{-1}{16}, \ \frac{1-\frac{-3}{2}}{8-5} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$

Nivel $b_3 = \frac{-43}{528}$

Polinomio Interpolante de Lagrange

En análisis numérico el polinomio de Lagrange, interpola un conjunto de puntos dados en forma de Lagrange.

La reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo por diferencias divididas es la siguiente:

$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$ donde $L_i(x) = \pi_{i=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Teorema

Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son distintos en el intervalo $[a,b]$ y si $f \in C^{n+1}[a,b]$ entonces para cada $x \in [a,b]$ existe un número $\xi(x)$ en (a,b) tal que

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Donde ***p*** es el polinomio interpolante dado el siguiente:

$$p(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) = + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Supongamos que p_n es un polinomio de lagrange de grado ***n*** que coincide con la función ***f*** con los números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Se pueden derivar que p_n tiene la siguiente representación:

$$p_n\,(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + +a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Simultáneamente cuando p_n se evalúa en x_1 los únicos términos distintos de cero en la evaluación $P_n(x_1)$

$$f(x_0) + a_2(x_1 - x_0) \equiv p_n(x_1) = f(x_1)$$

Así despejando las constantes

$$a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Así que introducimos lo que se conoce como *notación de diferencias divididas*

La diferencia dividida ***0*** (cero) de la función ***f*** con respecto a x_1 se denota $f(x_1)$, es simplemente la evaluación de ***f*** en (x_1).

Las diferencias divididas restantes se definen inductivamente, la primera diferencia dividida de ***f*** con respecto a (x_1) y (x_{1+1}), se denota $f[x_1, x_{i+1}]$ y está definida por: $\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$.