

Análisis del CMB influenciado por Lentes Gravitacionales: Comparación de Parámetros Utilizando MCMC y Datos de Planck 2018

Deisy Angélica Torres Zermeno.

November 14, 2024

Abstract

En este proyecto se llevó a cabo un análisis detallado de algunos parámetros cosmológicos considerando la influencia del fenómeno de lentes gravitacionales (lensing) en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB). Utilizando el método de Monte Carlo Markov Chain (MCMC), se analizaron parámetros como la densidad de la materia oscura y la tasa de expansión del universo. Los datos obtenidos se compararon con los resultados del experimento Planck 2018, proporcionando una validación y ajuste de los modelos cosmológicos actuales. El uso de MCMC permitió explorar el espacio de parámetros, obteniendo estimaciones precisas y confiables que contribuyen a una mejor comprensión del universo y sus componentes fundamentales.

1 Introducción.

Sabemos que en el universo la gravedad puede ser causa de grandes fenómenos en el cielo, como efectos visuales de los objetos celestes. El fenómeno que es producido por la deflexión de la luz en un campo gravitacional es llamado "fenómeno de lentes gravitacionales". Desde La época de Newton se sospechaba ya que la gravedad podría curvar a la luz aunque fue hasta tiempo después que a partir de la teoría corpuscular de la luz [1] Cavendish y posteriormente Soldner, entre otros lograron encontrar cual era el ángulo de deflexión que debería experimentar la luz debido a la presencia del campo gravitacional de un cuerpo esférico de masa M . Sería importante mencionar que no cualquier objeto con masa genera una lente, pero tampoco es muy difícil de que ocurra, pues desde una estrella de tamaño de 0.1 a 10 veces el tamaño de nuestro sol puede generar un microlenteo gravitacional, claro que una galaxia o un cúmulo de galaxias produce un efecto de lente significativamente mayor. Las imágenes de galaxias de fondo son distorsionadas por un cúmulo en primer plano. Cuanto mayor sea la masa del cúmulo, mayores serán las distorsiones. [2] Este fenómeno óptico producido genera entonces que el observador, como podríamos ser en este caso nosotros, veamos una imagen del objeto real, decir vemos al objeto deflectado un cierto ángulo el cual depende de objeto masivo que produce la deflexión de la luz. [3] Hoy en día, las lentes gravitacionales tienen una importancia crucial tanto teórica como observacional. Se utilizan, por ejemplo, para abordar el problema

de la materia contenida en el Universo, especialmente para proponer modelos sobre la naturaleza de la materia oscura, a partir del análisis del comportamiento de la luz en la proximidad de una distribución de materia. Otra aplicación de las lentes gravitacionales es el uso de técnicas basadas en este efecto para analizar el espectro de potencias del CMB. La lista de usos prácticos de las lentes gravitacionales continúa expandiéndose, pero en este documento nos centraremos en analizar como es que el CMB es modificado por el fenómeno de las lentes gravitacionales. A lo que hoy conocemos como CMB se origina en el evento que se cree dio origen al universo tal como lo conocemos hoy, el Big Bang, pasaron unos 380,000 años antes de que el universo se enfriara lo suficiente como para que los electrones pudieran unirse a los núcleos atómicos, formando átomos estables. Esto permitió que la radiación viajara libremente por el espacio, creando entonces a lo que hoy conocemos como la radiación cósmica de fondo (CMB). [2] Las lentes gravitacionales pueden desviar la luz del CMB a medida que atraviesa estructuras masivas como cúmulos de galaxias. Esto causa una distorsión en el mapa del CMB conocido como "lensing" del CMB.

Para la lente débil del CMB, estamos interesados en la desviación de la dirección de un fotón mientras viaja desde la superficie de última dispersión hasta nuestro punto de observación. En su camino, el fotón encontrará varias sub- y sobre-densidades, donde en la dominación de la materia los potenciales debidos a estas perturbaciones son constantes en el régimen lineal. La profundidad de los potenciales es aproximadamente 2×10^{-5} , por lo que podríamos esperar que cada potencial encontrado dé una desviación $\delta\beta \sim 10^{-4}$. El tamaño característico de los pozos potenciales, dado por la escala del pico del espectro de potencia de materia, es aproximadamente 300 Mpc (en comovimiento), y la distancia a la última dispersión es aproximadamente 14000 Mpc, por lo que el número pasado es aproximadamente 50. Si los potenciales no están correlacionados, esto daría una desviación total RMS de aproximadamente $\sqrt{50} \times 10^{-4} \approx 7 \times 10^{-4}$, correspondiendo a aproximadamente 2 minutos de arco. Por lo tanto, podríamos esperar que la lente gravitacional se convierta en un efecto de orden unidad en el CMB en $l \gtrsim 3000$. De hecho, el CMB sin lente tiene muy poco poder en estas escalas debido al amortiguamiento, por lo que la lente puede dominar el poder observado en $l \gtrsim 3000$ en ausencia de cualquier otro efecto secundario. Por supuesto, hemos omitido varios efectos importantes aquí, incluyendo la correlación de los cúmulos de lentes y los factores de conversión correctos entre ángulos de desviación y ángulos observados; sin embargo, estos resultados de orden de magnitud son aproximadamente correctos. [4]

Los ángulos de desviación estarán correlacionados en el cielo por un ángulo dado por el tamaño angular de un potencial característico, que es aproximadamente $300/7000 \approx 2^\circ$ para un potencial a mitad de camino hacia la última dispersión. Así que, aunque los ángulos de desviación son mucho más pequeños que el tamaño de los picos acústicos primarios del CMB a escala de grado, están correlacionados en una escala comparable. Esto significa que la lente gravitacional también puede tener un efecto importante en la escala de los picos acústicos primarios. Si un punto caliente del tamaño de un grado en la última dispersión es lenteado, esperamos que el punto aparezca más grande o más pequeño por aproximadamente $2'$, correspondiendo a un cambio fraccional en tamaño de aproximadamente $2/60 \approx 3\%$. La lente no hará que un punto sea más grande o más pequeño en promedio, pero cambiará las estadísticas de la distribución de tamaños. La distribución será 3% más ancha, correspondiendo

a un ensanchamiento de aproximadamente 3% en el pico acústico: después de la lente, el tamaño del punto está menos definido en promedio. Por lo tanto, esperamos que la lente gravitacional tenga efectos a nivel porcentual en el espectro del CMB en la escala de los picos acústicos primarios.

Ahora bien, ¿cómo podemos usar estas distorsiones para obtener información sobre parámetros cosmológicos como h , Ω_b y Ω_{CDM} (la densidad de materia oscura fría)?

Los efectos de *lensing* en el CMB proporcionan información valiosa sobre la distribución de la materia en el Universo y, por lo tanto, sobre sus propiedades cosmológicas. La intensidad y el patrón de las distorsiones gravitacionales están directamente relacionados con la cantidad total de materia en el Universo, incluida la materia ordinaria (Ω_b) y la materia oscura fría (Ω_{CDM}). Además, h , conocido como el parámetro de Hubble, que representa la velocidad de expansión del Universo, también influye en la forma en que se observan estas distorsiones.

Los análisis detallados de las distorsiones gravitacionales en el CMB permiten inferir los valores de estos parámetros cosmológicos. Al comparar las observaciones con modelos teóricos y simulaciones computacionales, podemos ajustar los valores de h , Ω_b y Ω_{CDM} para encontrar las mejores coincidencias entre teoría y datos observacionales.

2 Métodos

Vamos ahora a analizar como es que este fenomeno de lentes gravitacionales es que afecta al CMB.

Las lentes gravitacionales pueden cambiar la distribución aparente de las anisotropías en la temperatura del CMB. Aunque el efecto de lentes gravitacionales no cambia la temperatura promedio del CMB, sí puede afectar la distribución angular de las fluctuaciones de temperatura y sus parámetros.

El lente gravitacional débil causado por estructuras a gran escala a lo largo de la línea de visión produce distorsiones pequeñas pero significativas en las anisotropías primordiales del CMB. Podemos relacionar el campo del CMB con lentes $\tilde{X}(\hat{n})$ en la dirección \hat{n} con el campo sin lentes $X(\hat{n})$ mediante el ángulo de desviación $\alpha(\hat{n})$:

$$\tilde{X}(\hat{n}) = X(\hat{n} + \alpha(\hat{n})).$$

donde $X \in \{T, E, B\}$. En la aproximación de Born, definimos el potencial de lente (proyectado) ϕ como:

$$\phi(\hat{n}) = -2 \int_0^{\chi^*} d\chi \frac{f_K(\chi^* - \chi)}{f_K(\chi^*)f_K(\chi)} \Psi(\chi\hat{n}, \eta_0 - \chi),$$

donde Ψ es el potencial gravitacional (de Weyl). El ángulo de desviación está dado por la derivada angular del potencial de lente, $\alpha(\hat{n}) = \nabla\phi(\hat{n})$. El potencial de lente es una medida integrada de la distribución de masa hasta el momento de la recombinación, incluyendo los efectos geométricos del fondo a través de f_K , que es la distancia angular de diámetro y codifica la relación entre la distancia comóvil y el ángulo.

El potencial de lente puede descomponerse en momentos multipolares:

$$\phi(\hat{n}) = \sum_{\ell m} \phi_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}),$$

y el efecto del lente en el campo del CMB sin lentes puede expresarse de forma perturbativa expandiendo en serie de Taylor la Ecuación 1 en el dominio armónico:

$$\tilde{X}_{\ell m} = X_{\ell m} + \delta X_{\ell m} + \delta^2 X_{\ell m} + \dots,$$

donde $\tilde{X}_{\ell m}$ son los multipolos del CMB con lentes. Los términos de orden alto ($\delta^n X_{\ell m}$) se deben al efecto del lente y son del orden $O(\phi^n)$ y lineales en el campo del CMB sin lentes.

Entonces para realizar el analisis de las fluctuaciones para el CMB lenteado trabajaremos con el espectro de potencias del lensing C_l que contiene información sobre la cantidad y distribución de la materia en el universo, tanto visible como oscura, que se mide con el número multipolar l . (El análisis se realiza a través del código [5]). Tomamos los datos de l y de C_l de los datos publicados por el proyecto Planck [6].

Primeramente revisaremos el contenido del archivo *COMpowerSpect_CMB-base-plikHM-TTTEEE-lowl-lowE-lensing-minimum-theory_R3.01.txt* que se encuentra en la página A dataset provided by the European Space Agency [7], el cual contiene información sobre los multipolos, espectros de potencia y sus correspondientes lensing. Visualizamos los espectros de potencia del lensing para entender su distribución para posteriormente analizar la convergencia. El análisis de la convergencia k involucra entender la distribución de la materia a través del lensing. Para ajustar el modelo teorico a los datos, utilizaremos un modelo teorico del espectro de potencias del lensing, lo cual lo derivaremos de CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System), para generar un espectro teórico del lensing $C_L^{\text{theory}}(\theta, L)$, donde θ son los parámetros cosmológicos (Ω_b , h , A_s , n_s , Ω_{cdm}). CLASS se basa en las ecuaciones fundamentales de la cosmología y la física de partículas, como las ecuaciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), las ecuaciones de Boltzmann y las ecuaciones de perturbaciones en la materia y la radiación. Para implementar los parámetros cosmológicos.

CLASS calcula el espectro de potencias de las fluctuaciones primordiales en la densidad y la temperatura del universo. Esto proporciona información sobre la distribución de la materia en el universo temprano y su impacto en la formación de estructuras a gran escala. Además de calcular el espectro de potencias primordial, CLASS también puede generar espectros observacionales, como el espectro de potencias del CMB y el espectro de potencias de materia a gran escala, que pueden compararse con datos observacionales para ajustar los parámetros cosmológicos.

El calculo del espectro de potencia teórico del lensing ($C_L^{\text{theory}}(\theta, L)$) implica resolver las ecuaciones de evolución cosmológica para obtener las perturbaciones del potencial gravitacional y luego calcular como estas afectan al CMB a través del lensing gravitacional.

Las perturbaciones en la métrica del espacio-tiempo y en el contenido de materia y energía del universo se describen utilizando la teoría de perturbaciones cosmológicas (Para una mejor comprensión de las ecuaciones que nos ayudan a relacionar los valores de las densidades de materia y energía puede consultar el

proyecto 2 [8]). Estas se expresan en términos de las ecuaciones de Einstein linealizadas y las ecuaciones de conservación para la energía y el momento.

Las ecuaciones de Einstein linealizadas en el espacio de Fourier son:

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde $\delta G_{\mu\nu}$ son las perturbaciones en el tensor de Einstein y $\delta T_{\mu\nu}$ son las perturbaciones del tensor energía-momento. El potencial de lensing ϕ esta relacionado con el potencial gravitacional de Newton Ψ y el potencial de curvatura Φ de la forma:

$$\nabla^2 \phi(x, \eta) = -2(\nabla^2 \Psi(x, \eta) + \nabla^2 \Phi(x, \eta)) \quad (2)$$

Este calculo se realiza a partir del calculo con CLASS, y vamos a explicar un poco de como es que se opera.

CLASS toma los parámetros cosmológicos $\theta = (\Omega_b, \Omega_{\text{cdm}}, h, A_s, n_s, \tau)$, donde:

- Ω_b es la densidad de bariones.
- Ω_{cdm} es la densidad de materia oscura.
- h es el parámetro de Hubble reducido.
- A_s es la amplitud de las fluctuaciones primordiales.
- n_s es el índice espectral.
- τ es el grosor de la reionización.

y posteriormente resuelve las ecuaciones de perturbaciones lineales para obtener las perturbaciones en el potencial gravitacional Ψ y Φ en el espacio de Fourier. A partir de estas soluciones CLASS calcula el potencial de lensing ϕ . El espectro de potencia del lensing $C_L^{\phi\phi}$ se define como:

$$\langle \phi_{LM} \phi_{L'M'}^* \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'} C_L^{\phi\phi} \quad (3)$$

El espectro de potencias del lensing se obtiene a partir de :

$$C_L^{\text{lensing}} = L^4 C_L^{\phi\phi} \quad (4)$$

Posteriormente ajustamos los parámetros cosmológicos utilizando el método MCMC, los cuales son métodos de simulación para generar distribuciones posteriores y estimar cantidades de interés a posteriori [9], en nuestro caso estos parámetros de interés serán los valores de los parámetros Ω_b , Ω_{cmb} , A_s , n_s , h y τ_{reio} (profundidad óptica de reionización).

Para poder realizar las inferencias acerca de los valores de los parámetros cosmológicos a partir de los datos, utilizamos la función de verosimilitud. En el contexto Bayesiano, la verosimilitud mide la probabilidad de observar los datos dados unos parámetros específicos del modelo. Aquí, los datos observados son $cl_{\text{lensing},bs}$ y los parámetros del modelo son θ . Establecemos una función $\log_{\text{verosimilitud}}$ que será una forma de la verosimilitud Gaussiana, que supone que las diferencias entre los datos observados y el modelo teórico siguen una distribución normal.

Utilizamos la función prior que define nuestras "creencias" a priori sobre los valores de los parámetros antes de observar los datos y de igual manera utilizaremos una distribución uniforme dentro de un rango razonable para cada parámetro.

Para calcular la distribución posterior de los parametros dados y los observados utilizamos la función posterior que combina la verosimilitud y el prior, según el teorema de Bayes:

$$P(\theta \mid \text{datos}) \propto P(\text{datos} \mid \theta)P(\theta) \quad (5)$$

Conociendo un parámetro B, la probabilidad condicional de A

Para generar el mapa de CMB utilizamos la función 'synfast' de HEALPix (Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization) es una herramienta utilizada principalmente en astronomía y cosmología para el mapeo y análisis de datos sobre la esfera celeste. En Python, se utiliza a través de la biblioteca healpy, que es una implementación de HEALPix. Es utilizado mayormente para el analisis y en la investigación del Fondo Cósmico de Microondas (CMB). [10]

Entonces generamos un mapa del espectro de poetencia de C_l de la forma:

$$T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (6)$$

donde $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos.

Generamos una distribucion de masa gravitacional con una distribución gaussiana:

$$\Sigma(x, y) = \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \right) \quad (7)$$

donde (x_0, y_0) es el centro de la distribución y σ es la desviación estandar. Para la desviación de la luz causada por la masa la calculamos utilizando el gradiente de la distruibución de masa:

$$\alpha_x = \frac{\partial x}{\partial \Sigma} \cdot \text{scale} \quad \alpha_y = \frac{\partial y}{\partial \Sigma} \cdot \text{scale} \quad (8)$$

que representan las desviaciones en las direcciones x y para y respectivamente. Para aplicar el efecto de lente gravitacional al mapa del CMB, primero necesitamos mapear las coordenadas angulares (θ, ϕ) a un sistema de coordenadas cartesianas en el grid de la masa. Luego, interpolamos las desviaciones α_x y α_y en estas coordenadas y calculamos las nuevas coordenadas desviadas (θ', ϕ') :

$$\theta' = \theta + \frac{\alpha_y}{n_{\text{side}}}, \quad \phi' = \phi + \frac{\alpha_x}{n_{\text{side}}} \cdot \sin(\theta)$$

Finalmente, usamos estas coordenadas desviadas para interpolar el mapa del CMB original y obtener el mapa lenteado.

3 Resultados y Discusiones,

En el análisis de fluctuaciones de la temperatura a través del código [11] obtuvimos los resultados mostrados en los siguientes gráficos:

Las lentes gravitacionales parecen tener un efecto más notable en las características locales de la distribución del CMB, pero no cambian drásticamente la

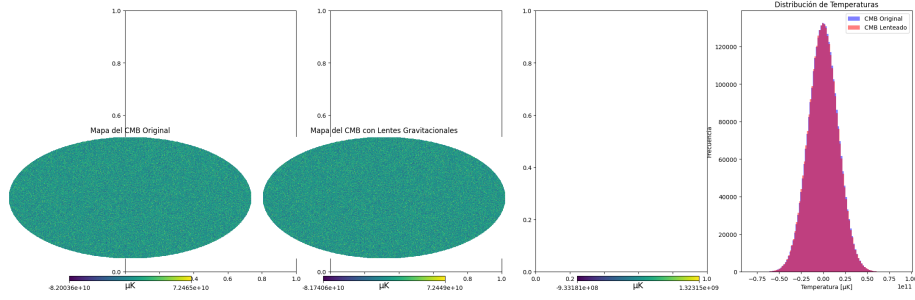


Figure 1: temperatura CMB

estadística global de las fluctuaciones de temperatura. La similitud en las distribuciones de temperatura indica que las lentes gravitacionales no introducen un sesgo significativo en las fluctuaciones de temperatura del CMB a gran escala.

Por otro lado para el ángulo de deflexión de la luz podemos ver que la figura 2 nos proporciona una visión clara de cómo la luz del CMB ha sido afectada por lentes gravitacionales, destacando las regiones con mayor y menor deflexión, lo que a su vez nos da pistas sobre la distribución de la materia en el universo. La región central tiene deflexiones muy pequeñas, lo cual sugiere que hay menos estructuras masivas en la línea de visión central, o que el efecto combinado de las lentes gravitacionales en esa región es menor.

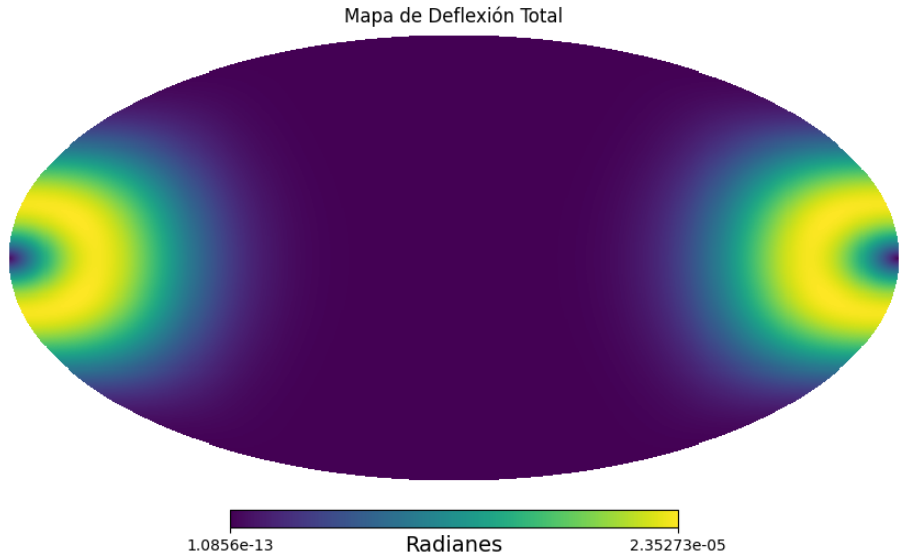
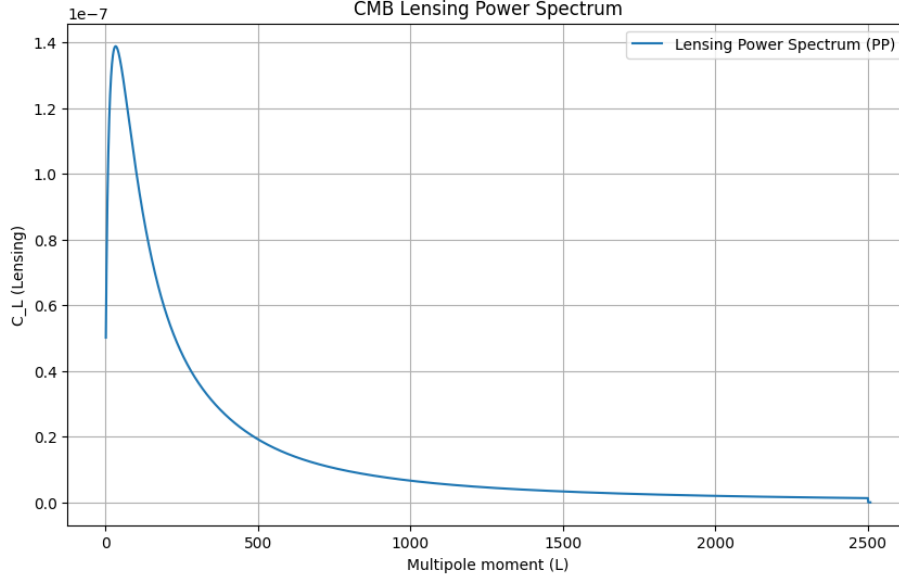


Figure 2

Estos mapas se pretende estudiarlos de mejor manera ya que se tuvieron varias dudas al procesar la información así como la interpretación de estos resultados en comparación con la teoría, es por ello que se plantea profundizar posteriormente en su análisis con otros datos y otra metodología.

Con el proceso mencionado en métodos a través del código de [5] podemos

obtenemos los siguientes gráficos. Primeramente se visualiza la forma del espectro de potencia del lensing.



En la figura anterior el eje x representa el número multipolar, que está relacionado con la escala angular del cielo. Valores bajos de L corresponden a grandes escalas angulares es decir grandes regiones del cielo. El eje y que corresponde a C_L representa el poder del espectro del lensing gravitacional que describe como la materia distribuye la luz del fondo cósmico. La curva presente muestra un pico para valores bajos de L indicando que el lensing gravitacional tiene un mayor efecto a escalas angulares grandes. Este comportamiento es consistente con la teoría de que la mayor parte del efecto lensing proviene de estructuras a gran escala en el universo. A medida que L aumenta C_L decrece rápidamente, mostrando que el efecto de lensing gravitacional es menos significativo a escalas angulares más pequeñas.

Después de realizar el análisis mencionado en la sección de métodos para obtener los valores de los parámetros cosmológicos, obtenemos la siguiente gráfica:

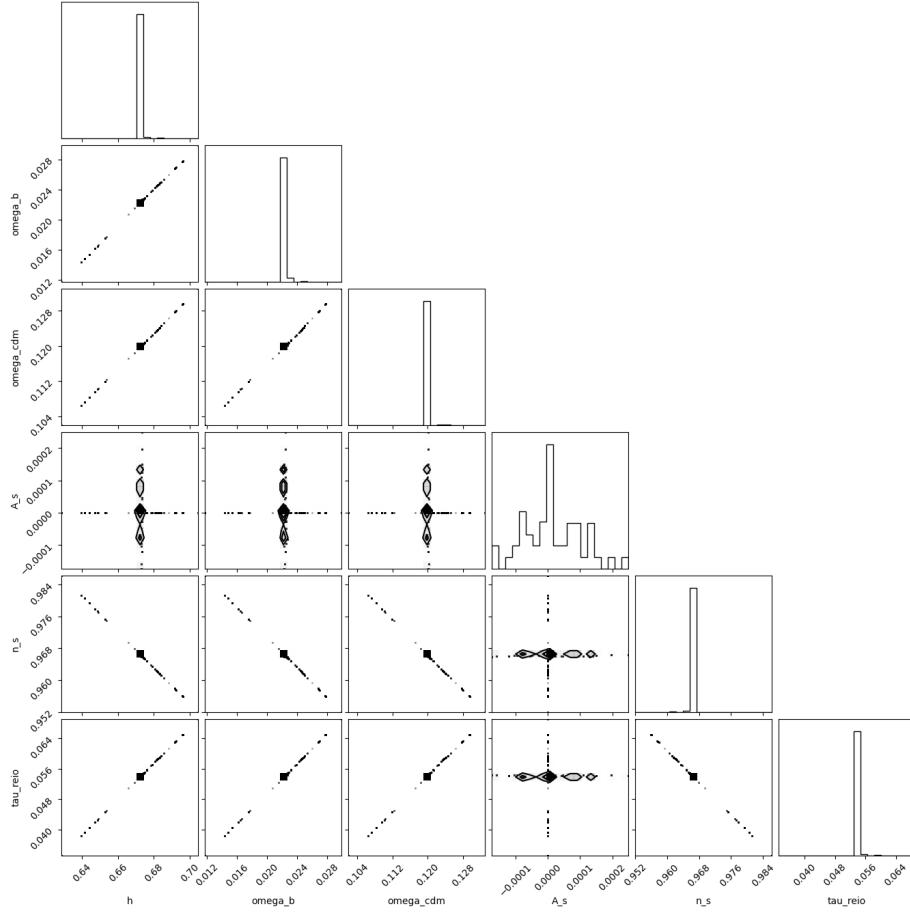


Figure 3: Caption

Podemos ver del gráfico generado [3](#) se muestran líneas bastante claras, lo que indica que hay una fuerte correlación entre los parámetros. Del gráfico podemos encontrar unos valores aproximados para los parámetros que , estableciendo una relacion con los resultados en Planck 2018 ([\[12\]](#)).

Parámetro	Resultado MCMC	Planck 2018
Hubble Parameter (h)	0.68	0.6732 ± 0.0050
Baryon Density (Ω_b)	0.022	0.022383 ± 0.000106
Cold Dark Matter Density (Ω_{cdm})	0.12	0.12011 ± 0.0012
Scalar Amplitude (A_s)	2.1×10^{-9}	$2.100 \times 10^{-9} \pm 0.030 \times 10^{-9}$
Spectral Index (n_s)	0.96	0.9665 ± 0.0038
Optical Depth (τ_{reio})	0.054	0.0540 ± 0.0074

Table 1: Comparación de los valores obtenidos (MCMC) con los valores teóricos reportados en Planck 2018.

Parámetro	Error relativo (%)
Hubble Parameter (h)	1.01
Baryon Density (Ω_b)	1.71
Cold Dark Matter Density (Ω_{cdm})	0.09
Scalar Amplitude (A_s)	0
Spectral Index (n_s)	0.67
Optical Depth (τ_{reio})	0

Table 2: Errores relativos de los valores obtenidos (MCMC) en comparación con los valores teóricos reportados en Planck 2018.

De la comparación de los datos podemos ver que se obtuvieron resultados con buena concordancia con los valores reportados en Planck 2018. Esto nos muestra que el modelo teórico y el método del ajuste que utilizamos son consistentes con las observaciones de CMB.

4 Conclusiones

Analizando las distorsiones en el CMB causadas por las lentes gravitacionales, se puede inferir la distribución de la materia, tanto visible como oscura. Los resultados obtenidos muestran que las lentes gravitacionales no solo afectan las fluctuaciones de temperatura del CMB, sino que también proporcionan datos cruciales para ajustar modelos cosmológicos. Estos datos son fundamentales para mejorar nuestra comprensión del universo, permitiendo a los científicos afinar sus teorías sobre la formación y evolución de las estructuras cósmicas.

El uso de técnicas como el método de Monte Carlo Markov Chain (MCMC) ha sido esencial para este análisis. MCMC es una herramienta que permite explorar de manera eficiente el espacio de parámetros cosmológicos, proporcionando estimaciones precisas y confiables. Las simulaciones con CLASS han complementado este enfoque, permitiendo una modelización detallada de los efectos de las lentes gravitacionales en el CMB. Estas técnicas combinadas han permitido una mejor comprensión de los parámetros cosmológicos, tales como la densidad de la materia oscura, la energía oscura y la tasa de expansión del universo, contribuyendo significativamente a nuestro conocimiento del cosmos.

Inicialmente, uno de los objetivos del proyecto era realizar una comparación visual de las fluctuaciones de temperatura del CMB. Sin embargo, no se logró comprender completamente cómo analizar los datos para generar estos gráficos y simulaciones, aunque se presentaron resultados, se pretende profundizar más en el análisis e interpretación de datos en proyectos como este, con el fin de presentar un análisis detallado que muestre estos resultados visuales de manera efectiva.

A pesar de que uno de los objetivos principales no se cumplió del todo, el proyecto ha logrado resultados significativos en relación con el análisis de los parámetros cosmológicos. La importancia de conocer estos datos radica en su capacidad para proporcionar una visión más clara y precisa del universo. Esta información nos ayuda bastante ya que permite validar y refinar modelos teóricos, así como generar nuevas hipótesis sobre la naturaleza y el comportamiento del cosmos.

Aunque el proyecto enfrentó desafíos y no cumplió todos sus objetivos iniciales, se logró generar contribuciones al análisis de los datos cosmológicos. Los resultados obtenidos resaltan la relevancia de las lentes gravitacionales y el CMB en la comprensión del universo.

5 Notes

El proyecto presentado fué realizado por mi autoria, sin embargo se consultó a inteligencia artificial para poder hacer instalaciones de programas como CLASS para ser utilizados en el entorno en el que se programó así como para poder entender el procesamiento de los datos utilizados.

References

- [1] Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, and Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2*. Pearson, México, 14 edition, 2016.
- [2] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [3] Andrew R. Liddle. *An introduction to modern cosmology*. 1998.
- [4] Firstname1 Lastname1 and Firstname2 Lastname2. The title of the article. *arXiv*, astro-ph(0601594), 2006.
- [5] Google Colaboratory. Cmb lensing simulation. <https://colab.research.google.com/drive/1e8QOGdvFt6rPV1lJRKiMbX6nPJHqRW?usp=sharing>, 2024. Accessed: 2024-06-12.
- [6] Planck Collaboration. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters, 2024. Accessed: 2024-06-12.
- [7] Planck Collaboration. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters, 2018. Accessed: 2024-06-10.
- [8] Deisy Angélica Torres Zermeno. Cosmology project 2. Documento interno, Mayo 2024. Realizado el 31 de mayo de 2024.
- [9] Carlos A. Causin. Tema 8: Control de sistemas multivariables, 2013. Accessed: 2024-06-10.
- [10] Healpix Collaboration. Healpix: A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere, 2024. Página web consultada el 6 de junio de 2024.
- [11] Deisy Torres. Temperatura cmb. https://colab.research.google.com/drive/1bUO64ftJ3O_3InePetwppM5WWBaF1_sF?usp=sharing, 2024.
- [12] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.