

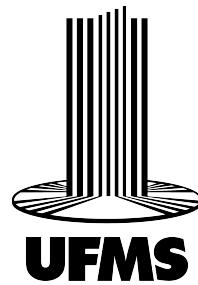


UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Uma Abordagem Matheurística baseada em Large Neighborhood Search para o Problema da Distribuição de Disciplinas

Deivid Reinke Schutz

Campo Grande - MS
23 de Janeiro de 2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Uma Abordagem Matheurística baseada em Large Neighborhood Search para o Problema da Distribuição de Disciplinas

Deivid Reinke Schutz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência para obtenção do grau de Bacha-
relado em Ciência da Computação da Universi-
dade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS.

Orientador: Profa. Dr. Edna Ayako Hoshino

Campo Grande - MS
23 de Janeiro de 2026

Uma Abordagem Matheurística baseada em Large Neighborhood Search para o Problema da Distribuição de Disciplinas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência para obtenção do grau de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS.

Banca Examinadora:

Profa. Dr. Edna Ayako Hoshino

Prof. Dr. Membro da banca 1

Prof. Dr. Membro da banca 2

Campo Grande - MS

23 de Janeiro de 2026

Agradecimentos

Resumo

Este trabalho aborda o Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD), que consiste em atribuir disciplinas a professores respeitando restrições de alocação e limites de carga horária, visando maximizar a qualidade da atribuição. O problema é modelado como um programa linear inteiro e resolvido no SCIP via Branch-and-Bound.

Como contribuição, propõe-se e avalia-se uma matheurística baseada em Large Neighborhood Search (LNS) no esquema fix-and-relax, que explora uma solução incumbente e define uma vizinhança ao fixar a maior parte das variáveis binárias $x_{p,c}$, liberando uma fração controlada para reotimização. A taxa de destruição (`lns_perc`), a ordenação de candidatos (`avgPreferenceWeight`) e o tempo máximo do sub-MIP são analisados quanto ao impacto na qualidade da solução e nas métricas de desempenho observadas: tempo, gap e nós remanescentes (`nodes-left`).

Palavras-chave: Distribuição de Disciplinas, Programação Linear Inteira, Branch-and-Bound, Matheurística, Large Neighborhood Search, Fix-and-Relax, SCIP.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Tabela 1 –	Tempo de execução (segundos) para diferentes taxas de destruição do LNS. Configuração: ordenação crescente, tempo LNS = 30s, limite global = 400s.	21
Tabela 2 –	Número de nós restantes na árvore de Branch-and-Bound para diferentes taxas de destruição. Valores menores indicam maior progresso em direção à otimalidade.	21
Tabela 3 –	Tempo de execução (segundos) comparando ordenação crescente e decrescente. Configuração: 75% de destruição, tempo LNS = 30s, limite global = 400s.	22
Tabela 4 –	Número de nós restantes comparando ordenação crescente e decrescente.	22
Tabela 5 –	Tempo de execução (segundos) para diferentes limites de tempo do sub-MIP. Configuração: 75% de destruição, ordenação crescente, limite global = 400s.	22
Tabela 6 –	Número de nós restantes para diferentes limites de tempo do sub-MIP.	23
Tabela 7 –	Gap de otimalidade (%) para diferentes taxas de destruição. Gap igual a zero indica solução ótima.	23
Tabela 8 –	Gap de otimalidade (%) comparando ordenação crescente e decrescente.	23
Tabela 9 –	Gap de otimalidade (%) para diferentes limites de tempo do sub-MIP.	24
Tabela 10 –	Tempo de execução (segundos) comparando Relaxação, LNS, GRASP e GRASP LNS. Configuração LNS: 75% destruição, crescente, 200s. Configuração GRASP: max_iter=1, alpha=0.8, local_search=0.	24
Tabela 11 –	Número de nós restantes comparando Relaxação, LNS, GRASP e GRASP LNS.	24
Tabela 12 –	Gap de otimalidade (%) comparando Relaxação, LNS, GRASP e GRASP LNS.	25

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Contextualização	9
1.2	Motivação e Justificativa	9
1.3	Objetivos	10
1.3.1	Objetivo Geral	10
1.3.2	Objetivos Específicos	10
1.4	Organização do Trabalho	11
2	Fundamentação Teórica	12
2.1	Otimização Combinatória e Programação Linear Inteira (PLI)	12
2.2	O Método Branch-and-Bound e Relaxação Linear	12
2.3	Heurísticas e Metaheurísticas	13
2.3.1	Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP)	13
2.4	Matheurísticas	13
2.4.1	Large Neighborhood Search (LNS) e Fix-and-Relax	14
3	O Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD)	15
3.1	Definição do Problema	15
3.2	Modelo Matemático Exato	15
3.2.1	Conjuntos e Índices	15
3.2.2	Parâmetros e Constantes	15
3.2.3	Variáveis de Decisão	16
3.2.4	Função Objetivo	16
3.2.5	Restrições	16
3.2.5.1	Cobertura Obrigatória de Disciplinas	16
3.2.5.2	Carga Horária Mínima Anual	16
3.2.5.3	Carga Horária Máxima no Primeiro Semestre	16
3.2.5.4	Carga Horária Máxima no Segundo Semestre	17
3.3	Matheurística LNS Proposta	17
3.3.1	Definição de Candidatos e Ordenação	17
3.3.2	Destrução (Destroy)	18
3.3.3	Reparo (Repair) via Sub-MIP	18
3.3.4	Integração com o SCIP	18
4	Resultados e Análise Computacional	20
4.1	Instâncias e Ambiente de Testes	20

4.2	Análise Interna das Configurações da LNS	20
4.2.1	Impacto da Taxa de Destrução (10%, 25%, 50% e 75%)	20
4.2.2	Impacto do Sentido de Ordenação (Crescente vs. Decrescente)	26
4.2.3	Impacto do Tempo Máximo do LNS (10s, 50s, 100s e 200s)	27
4.3	Comparativo de Desempenho e Qualidade de Solução	28
4.3.1	LNS versus GRASP	28
4.3.2	LNS versus Modelo Exato (Branch-and-Bound Padrão)	28
4.4	Análise de Tempo Computacional e Gap de Otimidade	28
5	Conclusão	29
5.1	Considerações Finais	29
5.2	Limitações do Estudo	29
5.3	Trabalhos Futuros	29
Referências		30
Apêndices		32
APÊNDICE A Códigos		33
A.1	Apêndices - Materiais do autor	33

1 Introdução

1.1 Contextualização

O planejamento acadêmico semestral envolve diversas decisões interdependentes, entre as quais se destaca a atribuição de disciplinas a professores. Em cursos de graduação, essa distribuição precisa respeitar restrições institucionais (por exemplo, alocação única de cada disciplina, limites de carga horária por período e por ano e regras internas de oferta), ao mesmo tempo em que busca atender critérios de qualidade associados à afinidade do docente com o conteúdo, histórico de atuação e preferências.

Neste trabalho considera-se o Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD), no qual o objetivo é construir uma atribuição disciplina–professor que maximize a qualidade da alocação sob restrições operacionais. O DPD pode ser modelado como um problema de otimização combinatória e, em particular, como um programa linear inteiro (PLI) com variáveis binárias indicando se um professor p é designado para uma disciplina c . Modelos desse tipo podem ser resolvidos por métodos exatos, como Branch-and-Bound, disponíveis em solvers modernos como o SCIP.

Apesar de a modelagem via PLI permitir incorporar restrições e critérios de forma sistemática, instâncias de maior porte e/ou com restrições mais detalhadas podem tornar a obtenção de boas soluções em tempo limitado um desafio prático. Isso motiva o uso de estratégias que combinem a força dos métodos exatos com mecanismos heurísticos de intensificação.

1.2 Motivação e Justificativa

Na prática, a distribuição de disciplinas é um processo recorrente e sensível: pequenas mudanças em regras, em ofertas ou no quadro docente podem alterar significativamente o espaço de soluções. Além disso, a necessidade de respostas em prazos curtos torna desejável obter soluções viáveis de boa qualidade rapidamente, mesmo quando a prova de otimalidade não é alcançada.

Uma linha de pesquisa que atende a essa necessidade é o uso de matheurísticas, isto é, heurísticas baseadas em programação matemática, que exploram subproblemas de PLI (ou relaxações) como operadores dentro de um procedimento de busca. Em particular, a Large Neighborhood Search (LNS) é uma matheurística de destruição e reparação: parte-se de uma solução incumbente, “destrói-se” uma parte controlada das decisões e, em seguida, reotimiza-se o subproblema resultante para “reparar” a solução. Esse paradigma

tem sido utilizado com sucesso em diferentes problemas combinatórios e também em contextos que integram técnicas exatas e heurísticas (??).

No contexto do DPD, a LNS é especialmente atrativa por permitir explorar vizinhanças grandes preservando a maior parte da estrutura da incumbente. Nesta monografia, implementa-se uma LNS no estilo fix-and-relax no SCIP: fixa-se a maior parte das variáveis binárias conforme a incumbente e libera-se uma fração das atribuições para reotimização, gerando um subproblema inteiro (sub-MIP) resolvido com limite de tempo. A estratégia é integrada ao processo de Branch-and-Bound, buscando intensificação por meio de melhorias sucessivas da incumbente.

Além da análise interna da LNS, este trabalho também considera uma comparação com uma heurística GRASP desenvolvida especificamente para o DPD, bem como uma estratégia híbrida na qual a LNS é aplicada como etapa de melhoria a partir de soluções construídas pelo GRASP (GRASP|LNS). Essa comparação visa evidenciar, nas métricas de tempo, gap e nós remanescentes, em quais cenários a intensificação via LNS agrega valor em relação a uma abordagem construtiva/melhorativa dedicada ([JHONATAN, 2025](#)).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Propor, implementar e avaliar uma matheurística baseada em LNS, integrada ao solver SCIP, para obter soluções de boa qualidade para o DPD em tempo limitado.

1.3.2 Objetivos Específicos

- modelar o DPD como um PLI e integrá-lo ao framework de solução do SCIP, utilizando Branch-and-Bound como abordagem exata de referência;
- implementar uma matheurística LNS do tipo fix-and-relax, baseada em destruição parcial da incumbente e reparação via resolução de um sub-MIP em uma instância secundária (sub-SCIP);
- analisar o impacto de parâmetros internos da LNS, incluindo a taxa de destruição, o sentido de ordenação dos candidatos e o tempo máximo do subproblema;
- avaliar o desempenho por meio das métricas observadas nos experimentos: tempo, gap e nós remanescentes (nodes-left);
- comparar a estratégia LNS com abordagens alternativas consideradas no trabalho (relaxação e a heurística GRASP), incluindo a variação híbrida GRASP|LNS, discutindo cenários em que a LNS é mais efetiva.

1.4 Organização do Trabalho

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica, cobrindo conceitos de otimização inteira e heurísticas/matheurísticas relevantes ao estudo. O Capítulo 3 define o DPD e descreve o modelo matemático exato adotado. O Capítulo 4 apresenta os resultados experimentais e a análise computacional, incluindo a avaliação das configurações internas da LNS e comparações de desempenho. Por fim, o Capítulo 5 conclui o trabalho e discute limitações e possibilidades de trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Otimização Combinatória e Programação Linear Inteira (PLI)

Problemas de alocação em ambientes acadêmicos podem ser formulados como problemas de otimização combinatória, nos quais se busca selecionar uma atribuição que maximize uma medida de qualidade (por exemplo, preferências) e, ao mesmo tempo, respeite restrições operacionais (carga horária, conflitos e requisitos mínimos). Na literatura, problemas próximos incluem o *class-faculty assignment* e variantes de alocação docente com preferências ([AL-YAKOOB; SHERALI, 2006](#); [AL-YAKOOB; SHERALI, 2013](#); [DOME-NECH; LUSA, 2016](#)), bem como estudos em *course timetabling* ([CARTER; LAPORTE, 1998](#); [AVELLA; VASILYEV, 2005](#)).

Uma forma padrão de modelar tais problemas é por Programação Linear Inteira (PLI), em que variáveis de decisão (frequentemente binárias) representam escolhas discretas, e a função objetivo quantifica a qualidade da solução. De modo geral, um modelo pode ser escrito como

$$\max \sum_{p \in P} \sum_{c \in C} w_{p,c} x_{p,c} \quad \text{sujeito a restrições lineares e } x_{p,c} \in \{0, 1\},$$

onde $x_{p,c} = 1$ indica que o professor p é designado à disciplina c , e $w_{p,c}$ representa o peso/-preferência. A PLI permite representar restrições de compatibilidade e limites de capacidade de forma explícita, mantendo uma interpretação direta do modelo ([VANDERBEI, 2014](#); [WOLSEY, 2020](#)).

2.2 O Método Branch-and-Bound e Relaxação Linear

Modelos de PLI são, em geral, NP-difíceis, de modo que solucionadores utilizam métodos exatos baseados em limites e enumeração inteligente. Um componente central é a relaxação linear, obtida ao substituir a integralidade por $0 \leq x \leq 1$, produzindo um problema de Programação Linear (PL) que fornece um limite para a solução inteira ótima ([VANDERBEI, 2014](#); [WOLSEY, 2020](#)).

O Branch-and-Bound (B&B) explora uma árvore de subproblemas: a cada nó, resolve-se uma relaxação para obter um limite e, quando necessário, ramifica-se em subproblemas impondo decisões de integralidade (por exemplo, $x_{p,c} = 0$ ou $x_{p,c} = 1$). Nós cujos limites não superam a melhor solução inteira conhecida podem ser podados, reduzindo a busca ([WOLSEY, 2020](#)). Na prática, solucionadores modernos integram B&B com

técnicas adicionais; neste trabalho, a resolução exata é realizada com o SCIP ([GAMRATH et al., 2020](#)).

2.3 Heurísticas e Metaheurísticas

Embora métodos exatos forneçam garantias de otimalidade, instâncias reais podem apresentar grande dimensão e múltiplas restrições, tornando necessário recorrer a estratégias aproximadas. Heurísticas constroem boas soluções em tempo reduzido, enquanto metaheurísticas organizam mecanismos de exploração e intensificação para escapar de ótimos locais e melhorar soluções iterativamente.

Para problemas de alocação docente, há abordagens heurísticas e metaheurísticas que exploram diferentes representações e movimentos de vizinhança, como algoritmos genéticos e buscas locais especializadas ([GUNAWAN; NG; ONG, 2008](#); [HOSNY, 2012](#); [SZWARC; BACH-DÁBROWSKA; BOCEWICZ, 2018](#)). Esse corpo de técnicas é especialmente útil quando se deseja produzir soluções de boa qualidade sob limites de tempo, ou quando o modelo exato é utilizado como referência/validation.

2.3.1 Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP)

O GRASP é uma metaheurística em duas fases: (i) uma construção gulosa aleatorizada, que produz uma solução inicial por escolhas guiadas por um critério de qualidade com componente probabilística; e (ii) uma busca local, que tenta melhorar a solução por movimentos em uma vizinhança definida. A aleatoriedade permite amostrar diferentes regiões do espaço de soluções, enquanto a busca local promove intensificação.

No contexto do Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD), uma estratégia GRASP é um caminho natural por combinar regras gulosas (por exemplo, priorizar pares professor-disciplina com maior peso) com fases de melhoria que reatribuem disciplinas para reduzir violações e aumentar a qualidade ([JHONATAN, 2025](#)).

2.4 Matheurísticas

Matheurísticas combinam programação matemática com componentes heurísticos/metaheurísticos, buscando aproveitar simultaneamente a força de modelagem e os limites fornecidos por modelos exatos, e a flexibilidade de estratégias de busca em grandes espaços combinatórios ([BALL, 2011](#); [BOSCHETTI; LETCHFORD; MANIEZZO, 2023](#); [MANIEZZO; STÜTZLE; VOSS, 2021](#)). Em geral, a ideia é usar submodelos (ou modelos restritos) como operadores de melhoria, resolver subproblemas por MIP/CPLEX/SCIP, ou ainda usar informações do solucionador (limites, incumbentes, cortes) para orientar a busca.

Em problemas do tipo mochila e variantes, por exemplo, há linhas de trabalho que empregam resoluções exatas em subestruturas, gerando melhorias sistemáticas em torno de incumbentes (D'AMBROSIO et al., 2023; JOVANOVIC; VOSS, 2024). Essa mesma filosofia se estende ao DPD: parte-se de um modelo de PLI e explora-se uma vizinhança definida sobre variáveis binárias, reotimizando subproblemas com tempo controlado.

2.4.1 Large Neighborhood Search (LNS) e Fix-and-Relax

O Large Neighborhood Search (LNS) alterna etapas de *destroy* e *repair*: uma porção da solução corrente é liberada (ou removida) e, em seguida, o problema restrito é resolvido para reparar e potencialmente melhorar a solução. A principal vantagem é permitir movimentos de grande alcance, mantendo a viabilidade por meio de um procedimento de reparo eficaz (AHUJA et al., 2002; PISINGER; ROPKE, 2010). Uma implementação prática e amplamente adotada é usar um solucionador MIP na etapa de reparo, o que transforma o LNS em uma matheurística.

O esquema *fix-and-relax* pode ser visto como uma forma estruturada de definir vizinhanças: fixa-se a maior parte das variáveis (mantendo decisões da incumbente) e relaxa-se um subconjunto selecionado para reotimização, normalmente sob um limite de tempo. Esse desenho permite controlar o tamanho da vizinhança e o custo computacional de cada iteração, ao mesmo tempo em que preserva a capacidade do MIP de recombinar decisões de modo consistente. Assim, o método proposto neste trabalho utiliza o SCIP (GAMRATH et al., 2020) como motor de reotimização em vizinhanças geradas a partir de uma solução incumbente.

Por fim, este TCC se insere na linha de abordagens para o DPD que exploram tanto modelos exatos quanto estratégias de melhoria, dialogando com trabalhos recentes no problema (SILVA, 2024a) e com a motivação geral de matheurísticas de melhoria para problemas combinatórios de grande porte (SILVA, 2024b).

3 O Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD)

3.1 Definição do Problema

O Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD) consiste em atribuir professores a disciplinas de modo a respeitar restrições operacionais (carga horária mínima anual e máximas por semestre para cada professor, cobertura obrigatória de todas as disciplinas) e, simultaneamente, maximizar a qualidade da alocação. A qualidade de cada atribuição é mensurada por um peso que combina a preferência do professor pela disciplina e a compatibilidade entre a área de atuação do professor e a área da disciplina. Quando um professor é designado a uma disciplina fora de suas áreas de especialização, o modelo aplica uma penalidade (`area_penalty`), resultando em um coeficiente negativo na função objetivo.

Formalmente, temos um conjunto de P professores e um conjunto de C disciplinas. Cada disciplina $j \in C$ possui uma carga horária associada ch_j (em horas/aula ou créditos) e deve ser atribuída a exatamente um professor. Cada professor $i \in P$ possui uma carga horária mínima anual \min_i e cargas horárias máximas $\max_{i,1}$ e $\max_{i,2}$ para o primeiro e segundo semestres, respectivamente. O problema é NP-difícil e sua modelagem como Programação Linear Inteira permite explorar tanto métodos exatos quanto heurísticos/matheurísticos para obtenção de soluções de boa qualidade.

3.2 Modelo Matemático Exato

3.2.1 Conjuntos e Índices

- $P = \{1, \dots, |P|\}$: conjunto de professores, indexado por i ;
- $C = \{1, \dots, |C|\}$: conjunto de disciplinas, indexado por j ;
- $C_1 \subseteq C$: disciplinas do primeiro semestre;
- $C_2 \subseteq C$: disciplinas do segundo semestre.

3.2.2 Parâmetros e Constantes

- $w_{i,j}$: peso/preferência da atribuição do professor i à disciplina j . Quando o professor possui competência na área da disciplina e alguma preferência, $w_{i,j}$ assume o valor

da preferência; caso contrário, aplica-se $w_{i,j} = -\text{area_penalty}$;

- ch_j : carga horária (créditos) da disciplina j ;
- \min_i : carga horária mínima anual do professor i ;
- $\max_{i,1}$: carga horária máxima do professor i no primeiro semestre;
- $\max_{i,2}$: carga horária máxima do professor i no segundo semestre.

3.2.3 Variáveis de Decisão

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i \in P, \quad j \in C,$$

onde $x_{i,j} = 1$ indica que o professor i é designado à disciplina j , e $x_{i,j} = 0$ caso contrário.

3.2.4 Função Objetivo

O objetivo é maximizar a soma dos pesos das atribuições:

$$\max Z = \sum_{i \in P} \sum_{j \in C} w_{i,j} x_{i,j}.$$

Valores positivos de $w_{i,j}$ indicam preferência ou adequação, enquanto valores negativos (resultantes da penalidade por incompatibilidade de área) desencorajam atribuições inadequadas.

3.2.5 Restrições

3.2.5.1 Cobertura Obrigatória de Disciplinas

Cada disciplina deve ser atribuída a exatamente um professor:

$$\sum_{i \in P} x_{i,j} = 1, \quad \forall j \in C.$$

3.2.5.2 Carga Horária Mínima Anual

A soma das cargas horárias das disciplinas atribuídas ao professor i deve ser pelo menos \min_i :

$$\sum_{j \in C} ch_j x_{i,j} \geq \min_i, \quad \forall i \in P.$$

3.2.5.3 Carga Horária Máxima no Primeiro Semestre

A soma das cargas horárias das disciplinas do primeiro semestre atribuídas ao professor i não pode exceder $\max_{i,1}$:

$$\sum_{j \in C_1} ch_j x_{i,j} \leq \max_{i,1}, \quad \forall i \in P.$$

3.2.5.4 Carga Horária Máxima no Segundo Semestre

Analogamente, para o segundo semestre:

$$\sum_{j \in C_2} ch_j x_{i,j} \leq \max_{i,2}, \quad \forall i \in P.$$

3.3 Matheurística LNS Proposta

A matheurística desenvolvida neste trabalho baseia-se no Large Neighborhood Search (LNS) no esquema fix-and-relax. A cada iteração, a heurística parte de uma solução incumbente \bar{x} e define uma vizinhança ao fixar a maior parte das variáveis binárias e liberar um subconjunto controlado de atribuições para reotimização. A estratégia é implementada no arquivo `heur_lns.c` e integra-se ao framework de heurísticas primais do SCIP.

3.3.1 Definição de Candidatos e Ordenação

A partir da solução incumbente \bar{x} , o algoritmo identifica todas as atribuições ativas (i.e., $\bar{x}_{i,j} = 1$), formando um conjunto de candidatos. Cada candidato corresponde a um par (professor, disciplina) e possui associado o valor `avgPreferenceWeight` do professor, uma métrica calculada como:

$$\text{avgPreferenceWeight}_i = \frac{\sum_{j \in J_i} w_{i,j}}{|J_i|} + \frac{|C|}{|J_i|},$$

onde J_i é o conjunto de disciplinas para as quais o professor i declarou preferência no arquivo de entrada, e $|C|$ é o número total de disciplinas. O primeiro termo representa a média aritmética dos pesos de preferência, enquanto o segundo termo ($|C|/|J_i|$) introduz um bônus inversamente proporcional ao grau de versatilidade do professor: professores mais especializados (com menos preferências declaradas) recebem valores maiores, indicando maior prioridade para reotimização devido às suas restrições de alocação.

O conjunto de candidatos é ordenado segundo o parâmetro `lns_order`:

- "decrescente" (padrão): candidatos com maior `avgPreferenceWeight` aparecem primeiro, priorizando professores mais especializados (menor número de preferências). Estes professores possuem menos opções alternativas de atribuição, sendo candidatos naturais para reotimização;
- "crescente": ordena em ordem ascendente, priorizando professores mais versáteis (maior número de preferências). Esta estratégia busca explorar a flexibilidade de realocação dos professores generalistas.

3.3.2 Destruição (Destroy)

Após a ordenação, o algoritmo seleciona os primeiros $\lfloor nCands \times lns_perc \rfloor$ candidatos, onde $lns_perc \in (0, 1)$ é a taxa de destruição configurada pelo usuário. Para cada candidato selecionado, a variável $x_{i,j}$ correspondente é liberada (i.e., seu valor é desfixado), removendo a atribuição da solução incumbente. As demais variáveis permanecem fixadas nos valores da incumbente.

3.3.3 Reparo (Repair) via Sub-MIP

Com o subconjunto de variáveis liberado, o algoritmo resolve um sub-MIP no SCIP auxiliar (mantido em memória pela estrutura `heurdata->subscip`). O sub-MIP possui:

- Todas as restrições do problema original;
- Variáveis fixadas conforme o vetor `fixed[]`;
- Limite de tempo configurado pelo parâmetro `lns_time`;
- Limite de função objetivo (`objlimit`) ajustado para parar assim que uma solução melhor que a incumbente for encontrada.

A resolução do sub-MIP busca reatribuir as disciplinas liberadas de modo a melhorar a função objetivo, respeitando todas as restrições de carga horária e cobertura. Se uma solução melhor é encontrada, ela é transferida para o SCIP principal e passa a ser a nova incumbente.

3.3.4 Integração com o SCIP

A heurística LNS é registrada como uma heurística primal do SCIP com prioridade e frequência configuráveis. A cada chamada, a heurística:

1. Verifica se existe uma solução incumbente viável;
2. Extrai os candidatos ativos e ordena conforme `lns_order`;
3. Libera uma fração `lns_perc` das atribuições;
4. Resolve o sub-MIP com limite de tempo `lns_time`;
5. Caso o sub-MIP retorne uma solução de melhor qualidade, adiciona a nova solução ao pool do SCIP principal.

A abordagem permite explorar vizinhanças de tamanho controlado, equilibrando a intensificação (ao focar em atribuições específicas) e a diversificação (ao permitir reatribuições significativas). Os parâmetros `lns_perc`, `lns_order` e `lns_time` oferecem controle sobre o trade-off entre qualidade da solução e tempo computacional, sendo objeto de análise experimental detalhada no próximo capítulo.

4 Resultados e Análise Computacional

4.1 Instâncias e Ambiente de Testes

Os experimentos computacionais foram realizados utilizando um conjunto de 42 instâncias de teste geradas sinteticamente, representando diferentes cenários do Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD). As instâncias variam em tamanho e complexidade, com número de disciplinas entre 62 e 214, número de professores entre 22 e 69, e diferentes configurações de áreas de conhecimento e preferências.

Para cada experimento, foram selecionadas aleatoriamente 10 instâncias dentre as 42 disponíveis, garantindo representatividade estatística enquanto mantém o tempo total de experimentação viável. Cada instância foi escolhida de maneira aleatória dentro do conjunto de arquivos de entrada. As mesmas instâncias foram utilizadas em todas as configurações testadas de um mesmo parâmetro, assegurando comparabilidade direta dos resultados.

Todas as execuções foram realizadas com limite de tempo global de 400 segundos por instância. O solver utilizado foi o SCIP 7.0, integrado com as heurísticas LNS e GRASP desenvolvidas neste trabalho.

A análise dos parâmetros da heurística LNS foi conduzida de forma incremental: primeiro determinou-se a melhor taxa de destruição, em seguida o melhor sentido de ordenação, e finalmente o melhor limite de tempo para o sub-MIP. Esta abordagem sistemática permite isolar o impacto de cada parâmetro e identificar a configuração ótima.

4.2 Análise Interna das Configurações da LNS

4.2.1 Impacto da Taxa de Destrução (10%, 25%, 50% e 75%)

A primeira análise experimental investigou o impacto da taxa de destruição (`lns_perc`) na qualidade das soluções e no desempenho computacional. Foram testadas quatro configurações: 10%, 25%, 50% e 75% de destruição, mantendo fixos o tempo máximo do LNS (30s por chamada), a ordenação (crescente) e o tempo total de execução (400s).

Resultados de Tempo de Execução: A Tabela 1 apresenta o tempo total de execução para 10 instâncias selecionadas. A configuração de relaxação (sem LNS) obteve o melhor desempenho médio, com 19,49 segundos, contra 25,39 segundos da melhor configuração LNS. Entretanto, sete das dez instâncias foram resolvidas de forma ótima (tempo reduzido), enquanto três instâncias (input7, input15 e input22) atingiram o limite

de tempo. Este resultado indica que o tempo adicional investido pelo LNS não se traduz necessariamente em melhoria para instâncias fáceis, mas pode ser crucial para instâncias difíceis.

Tabela 1 – Tempo de execução (segundos) para diferentes taxas de destruição do LNS. Configuração: ordenação crescente, tempo LNS = 30s, limite global = 400s.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	10%	25%	50%	75%	Melhor
input2	79	24	4,04	17,07	17,66	16,98	17,04	Relax.
input5	84	29	113,03	145,27	145,04	145,71	143,63	Relax.
input6	113	31	1,07	2,47	2,40	2,33	2,22	Relax.
input7	99	28	400,02	400,02	400,02	400,02	400,02	Empate
input9	133	41	17,06	72,52	72,33	72,57	73,48	Relax.
input13	125	39	29,13	60,21	59,56	59,04	59,43	Relax.
input19	114	39	2,11	1,39	1,44	1,42	1,47	LNS 10%
input20	113	40	0,95	4,69	4,56	4,59	5,02	Relax.
input26	185	60	33,73	25,50	24,67	24,81	24,38	LNS 75%
input34	137	42	21,92	26,68	26,08	26,38	26,41	Relax.
Média	114	39	19,49	25,38	25,38	25,59	25,39	Relax.
Total	1.296	412	623,05	755,82	753,76	753,84	753,10	Relax.

Tabela 2 – Número de nós restantes na árvore de Branch-and-Bound para diferentes taxas de destruição. Valores menores indicam maior progresso em direção à otimalidade.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	10%	25%	50%	75%	Melhor
input2	79	24	0	0	0	0	0	–
input5	84	29	0	0	0	0	0	–
input6	113	31	0	0	0	0	0	–
input7	99	28	66.230	62.628	60.540	61.056	58.921	75%
input9	133	41	0	0	0	0	0	–
input13	125	39	0	0	0	0	0	–
input19	114	39	0	0	0	0	0	–
input20	113	40	0	0	0	0	0	–
input26	185	60	0	0	0	0	0	–
input34	137	42	0	0	0	0	0	–
Média	114	39	6.623	6.263	6.054	6.106	5.892	LNS 75%
Total	1.296	412	66.230	62.628	60.540	61.056	58.921	LNS 75%

Nodes Left: O critério decisivo para a escolha do melhor parâmetro foi a quantidade de nós restantes na árvore de Branch-and-Bound ao final da execução, métrica que reflete diretamente o progresso em direção à otimalidade. A Tabela 2 mostra que a configuração com 75% de destruição alcançou o menor total de nós restantes: **58.921 nós**, comparado a 62.628 (10%), 60.540 (25%) e 61.056 (50%). Todas as configurações obtiveram desempenho idêntico em 9 das 10 instâncias (resolvidas até a otimalidade), mas na instância crítica input7, a configuração de 75% demonstrou maior capacidade de exploração e poda da árvore.

Tabela 3 – Tempo de execução (segundos) comparando ordenação crescente e decrescente. Configuração: 75% de destruição, tempo LNS = 30s, limite global = 400s.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	Crescente	Decrescente	Melhor
input4	123	46	400,05	400,04	400,05	Crescente
input5	214	69	114,18	140,64	141,47	Crescente
input12	115	37	5,79	25,70	25,84	Crescente
input15	94	30	400,03	400,02	400,02	Decrescente
input16	89	28	3,07	0,72	0,72	Decrescente
input17	108	38	400,04	400,04	400,03	Decrescente
input20	104	37	0,90	4,40	4,32	Decrescente
input33	104	36	400,03	400,03	400,03	Decrescente
input37	152	53	68,00	31,61	31,62	Crescente
input38	62	22	0,16	0,28	0,28	Decrescente
Média	106	37	91,09	180,31	180,38	Crescente
Total	1.271	433	1.792,24	1.803,48	1.804,48	Relax.

Tabela 4 – Número de nós restantes comparando ordenação crescente e decrescente.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	Crescente	Decrescente	Melhor
input4	123	46	19.797	19.541	19.507	Decrescente
input5	214	69	0	0	0	–
input12	115	37	0	0	0	–
input15	94	30	64.711	61.546	62.452	Crescente
input16	89	28	0	0	0	–
input17	108	38	4.673	4.667	4.652	Decrescente
input20	104	37	0	0	0	–
input33	104	36	50.279	46.243	47.063	Crescente
input37	152	53	0	0	0	–
input38	62	22	0	0	0	–
Média	106	37	13.946	13.200	13.367	Crescente
Total	1.271	433	139.460	131.997	133.674	Crescente

Tabela 5 – Tempo de execução (segundos) para diferentes limites de tempo do sub-MIP. Configuração: 75% de destruição, ordenação crescente, limite global = 400s.

Inst.	Disc.	Prof.	Relax.	10s	50s	100s	200s	Melhor
input6	79	24	1,19	2,40	2,14	2,15	2,14	200s
input14	99	28	14,21	22,31	68,47	118,44	168,12	Relax.
input15	94	30	400,03	400,02	400,02	76,31	77,09	100s
input21	104	31	6,98	3,02	3,04	3,05	3,10	10s
input22	133	41	400,05	400,04	400,04	400,04	400,04	10s
input23	118	35	1,55	11,41	12,80	12,66	12,50	10s
input27	125	39	4,93	7,45	7,34	7,33	7,31	200s
input29	103	39	400,03	400,03	19,42	19,40	19,39	200s
input33	104	36	400,03	400,03	400,03	400,03	400,03	200s
input38	62	22	0,16	0,28	0,28	0,28	0,28	100s
Média	104	33	162,92	164,77	162,11	160,27	159,46	200s
Total	1.125	358	1.629,16	1.647,01	1.313,60	1.039,68	1.090,00	100s

Tabela 6 – Número de nós restantes para diferentes limites de tempo do sub-MIP.

Inst.	Disc.	Prof.	Relax.	10s	50s	100s	200s	Melhor
input6	79	24	0	0	0	0	0	–
input14	99	28	0	0	0	0	0	–
input15	94	30	54.355	63.056	59.819	0	0	100s
input21	104	31	0	0	0	0	0	–
input22	133	41	21.528	29.161	25.100	50.411	33.000	50s
input23	118	35	0	0	0	0	0	–
input27	125	39	0	0	0	0	0	–
input29	103	39	12.643	4.347	0	0	0	50s
input33	104	36	47.460	48.110	45.505	1.524	539	200s
input38	62	22	0	0	0	0	0	–
Média	104	33	13.599	14.467	13.042	5.194	3.354	200s
Total	1.125	358	135.986	144.674	130.424	51.935	33.539	200s

Tabela 7 – Gap de otimalidade (%) para diferentes taxas de destruição. Gap igual a zero indica solução ótima.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	10%	25%	50%	75%	Melhor
input2	79	24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input5	84	29	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input6	113	31	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input7	99	28	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	Empate
input9	133	41	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input13	125	39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input19	114	39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input20	113	40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input26	185	60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input34	137	42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
Média	114	39	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	Empate
Total	1.296	412	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	Empate

Tabela 8 – Gap de otimalidade (%) comparando ordenação crescente e decrescente.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	Crescente	Decrescente	Melhor
input4	123	46	0,20	0,20	0,20	Empate
input5	214	69	0,00	0,00	0,00	Empate
input12	115	37	0,00	0,00	0,00	Empate
input15	94	30	0,73	0,73	0,73	Empate
input16	89	28	0,00	0,00	0,00	Empate
input17	108	38	0,20	0,20	0,20	Empate
input20	104	37	0,00	0,00	0,00	Empate
input33	104	36	0,49	0,49	0,49	Empate
input37	152	53	0,00	0,00	0,00	Empate
input38	62	22	0,00	0,00	0,00	Empate
Média	106	37	0,16	0,16	0,16	Empate
Total	1.271	433	1,62	1,62	1,62	Empate

Tabela 9 – Gap de otimalidade (%) para diferentes limites de tempo do sub-MIP.

Inst.	Disc.	Prof.	Relax.	10s	50s	100s	200s	Melhor
input6	79	24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input14	99	28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input15	94	30	0,73	0,73	0,73	0,00	0,00	100s
input21	104	31	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input22	133	41	0,32	0,32	0,32	0,48	0,48	Relax.
input23	118	35	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input27	125	39	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
input29	103	39	0,19	0,19	0,00	0,00	0,00	50s
input33	104	36	0,49	0,49	0,49	0,24	0,24	100s
input38	62	22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Empate
Média	104	33	0,17	0,17	0,15	0,07	0,07	100s
Total	1.125	358	1,73	1,73	1,54	0,72	0,72	100s

Tabela 10 – Tempo de execução (segundos) comparando Relaxação, LNS, GRASP e GRASP|LNS. Configuração LNS: 75% destruição, crescente, 200s. Configuração GRASP: max_iter=1, alpha=0,8, local_search=0.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	LNS	GRASP	GRASP LNS
input5	214	69	112,63	54,46	400,12	83,09
input11	100	31	1,54	2,59	3,90	0,83
input15	94	30	400,03	79,90	400,02	400,02
input16	89	28	3,07	0,75	8,38	0,36
input19	95	29	2,03	1,45	5,74	2,73
input21	104	31	5,93	3,16	13,45	4,42
input25	107	34	15,63	9,27	37,64	9,54
input30	109	36	3,21	1,36	7,94	2,36
input35	169	53	186,72	63,27	400,07	71,20
input42	142	35	6,91	8,18	20,19	13,39
Média	106	33	73,76	22,44	129,75	58,79
Total	1.329	409	744,13	230,05	1.314,27	594,92

Tabela 11 – Número de nós restantes comparando Relaxação, LNS, GRASP e GRASP|LNS.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	LNS	GRASP	GRASP LNS
input5	214	69	0	0	8.037	0
input11	100	31	0	0	0	0
input15	94	30	64.364	0	7.526	2.324
input16	89	28	0	0	0	0
input19	95	29	0	0	0	0
input21	104	31	0	0	0	0
input25	107	34	0	0	0	0
input30	109	36	0	0	0	0
input35	169	53	0	0	20.740	0
input42	142	35	0	0	0	0
Média	106	33	6.436	0	3.630	232
Total	1.329	409	64.364	0	36.303	2.324

Tabela 12 – Gap de otimalidade (%) comparando Relaxação, LNS, GRASP e GRASP|LNS.

Instância	Disciplinas	Profs	Relax.	LNS	GRASP	GRASP LNS
input5	214	69	0,00	0,00	1,01	0,00
input11	100	31	0,00	0,00	0,00	0,00
input15	94	30	0,73	0,00	0,24	0,24
input16	89	28	0,00	0,00	0,00	0,00
input19	95	29	0,00	0,00	0,00	0,00
input21	104	31	0,00	0,00	0,00	0,00
input25	107	34	0,00	0,00	0,00	0,00
input30	109	36	0,00	0,00	0,00	0,00
input35	169	53	0,00	0,00	2,21	0,00
input42	142	35	0,00	0,00	0,00	0,00
Média	106	33	0,07	0,00	0,35	0,02
Total	1.329	409	0,73	0,00	3,46	0,24

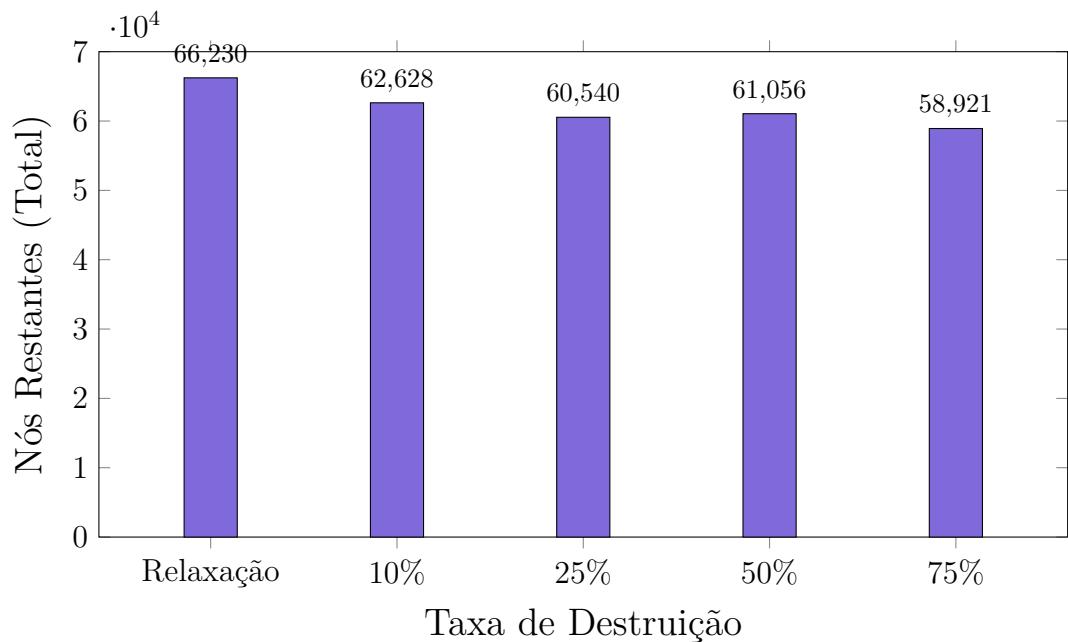


Figura 1 – Número total de nós restantes na árvore de Branch-and-Bound para diferentes taxas de destruição do LNS. A configuração de 75% apresentou o melhor desempenho com 58.921 nós restantes.

A Figura 1 demonstra visualmente a superioridade da taxa de 75%.

Gap de Optimalidade: Em termos de gap, todas as configurações apresentaram desempenho equivalente (0,60% total), com apenas a instância input7 permanecendo sem solução ótima. Este empate no gap reforça a importância da métrica de nodes left como critério de desempate.

Conclusão: A taxa de destruição de **75%** foi selecionada para as análises subsequentes, pois demonstrou melhor capacidade de redução da árvore de busca em instâncias difíceis, indicando que vizinhanças maiores permitem ao LNS realizar explorações mais agressivas e produtivas do espaço de soluções.

4.2.2 Impacto do Sentido de Ordenação (Crescente vs. Decrescente)

Com a taxa de destruição fixada em 75%, investigou-se o impacto do sentido de ordenação dos candidatos pelo valor de `avgPreferenceWeight`. Conforme descrito na metodologia, a ordenação crescente prioriza professores mais versáteis (maior número de preferências), enquanto a decrescente prioriza professores mais especializados (menor número de preferências).

Resultados de Tempo: A Tabela 3 revela desempenho temporal praticamente idêntico entre as duas estratégias: 180,31 segundos (crescente) versus 180,38 segundos (decrescente) no tempo médio, com diferença de apenas 0,07 segundos. Das 10 instâncias testadas, quatro atingiram o limite de tempo em ambas as configurações (input4, input15, input17 e input33), e as demais apresentaram variações inferiores a 1 segundo.

Nodes Left: A métrica de nós restantes revelou vantagem significativa para a ordenação crescente. A Tabela 4 mostra que a configuração crescente resultou em **131.997 nós restantes**, enquanto a decrescente deixou 133.674 nós, uma redução de 1.677 nós (1,25%). Observa-se desempenho superior da ordenação crescente em duas instâncias críticas: input15 (61.546 vs. 62.452 nós) e input33 (46.243 vs. 47.063 nós). A Figura 2 apresenta a comparação visual entre as três configurações.

Gap de Optimalidade: Ambas as configurações mantiveram gap total idêntico de 1,62%, distribuído entre três instâncias não resolvidas (input4, input15 e input17), todas com gap individual de 0,20% a 0,73%.

Interpretação: A superioridade da ordenação **crescente** sugere que, para o problema DPD, priorizar a realocação de professores mais versáteis (generalistas) oferece maior flexibilidade para o sub-MIP encontrar rearranjos que melhorem a solução global. Embora professores especializados tenham menos opções de atribuição, são justamente os generalistas que permitem redistribuições mais efetivas das disciplinas, facilitando a satisfação simultânea de múltiplas restrições de carga horária.

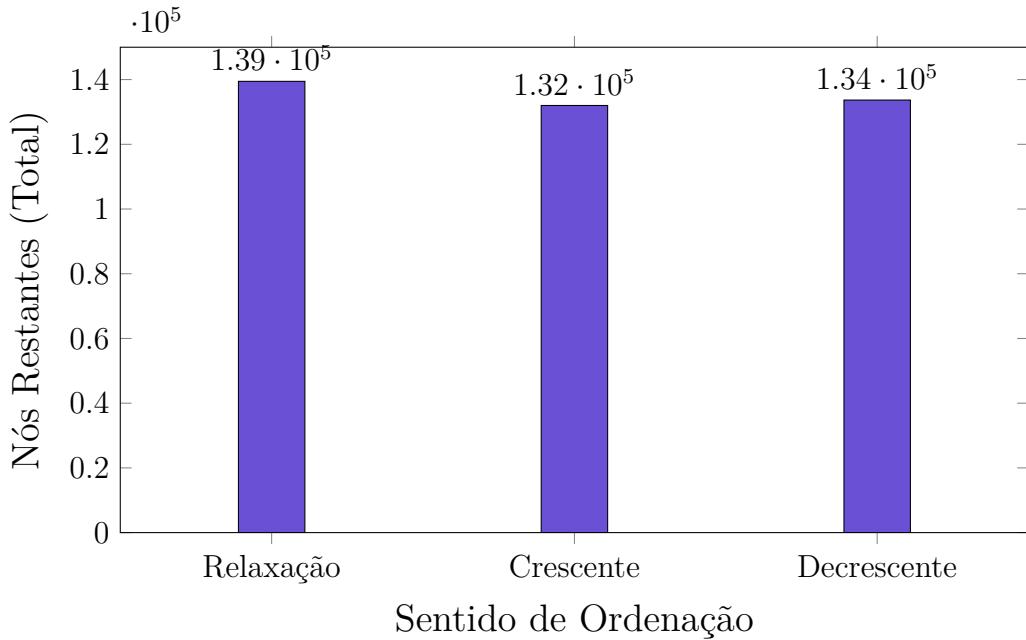


Figura 2 – Comparação do número total de nós restantes entre ordenação crescente e decrescente. A ordenação crescente (priorizando professores versáteis) obteve melhor desempenho com 131.997 nós restantes.

4.2.3 Impacto do Tempo Máximo do LNS (10s, 50s, 100s e 200s)

Com os parâmetros de taxa de destruição (75%) e ordenação (crescente) otimizados, investigou-se o impacto do limite de tempo do sub-MIP (`lns_time`). Foram testados quatro valores: 10s, 50s, 100s e 200s, mantendo o limite global de 400 segundos por instância.

Resultados de Tempo: A Tabela 5 apresenta resultados contraintuitivos. Embora esperasse-se que limites maiores de LNS aumentassem o tempo total, observou-se comportamento não monotônico: o tempo médio foi de 164,77s (10s), 162,11s (50s), 160,27s (100s) e **159,46s (200s)**. O tempo total agregado confirma esta tendência: 1.639,76s (relaxação), 1.647,01s (10s), 1.313,60s (50s), **1.039,68s (100s)** e 1.090,00s (200s). Destaca-se a instância input15, onde as configurações de 100s e 200s resolveram o problema em ~ 77 s, contra 400s nas demais.

Esta redução de tempo com limites maiores de LNS é explicada pela capacidade de encontrar soluções de melhor qualidade mais cedo, permitindo podas mais agressivas na árvore de Branch-and-Bound. Configurações com tempo insuficiente (10s) produzem melhorias marginais que não compensam o overhead da heurística.

Nodes Left: A Tabela 6 confirma a superioridade de limites maiores. O total de nós restantes foi: 135.986 (relaxação), 144.674 (10s), 130.424 (50s), 51.935 (100s) e **33.539 (200s)**. A configuração de 200s reduziu os nós em 75,3% em relação à relaxação pura e em 76,8% em relação ao LNS com 10s. As instâncias input15 e input33 foram resolvidas completamente apenas com 100s ou 200s, enquanto permaneceram com dezenas de milhares de nós nas configurações inferiores. A Figura 3 demonstra claramente o impacto

positivo de limites maiores na redução da árvore de busca.

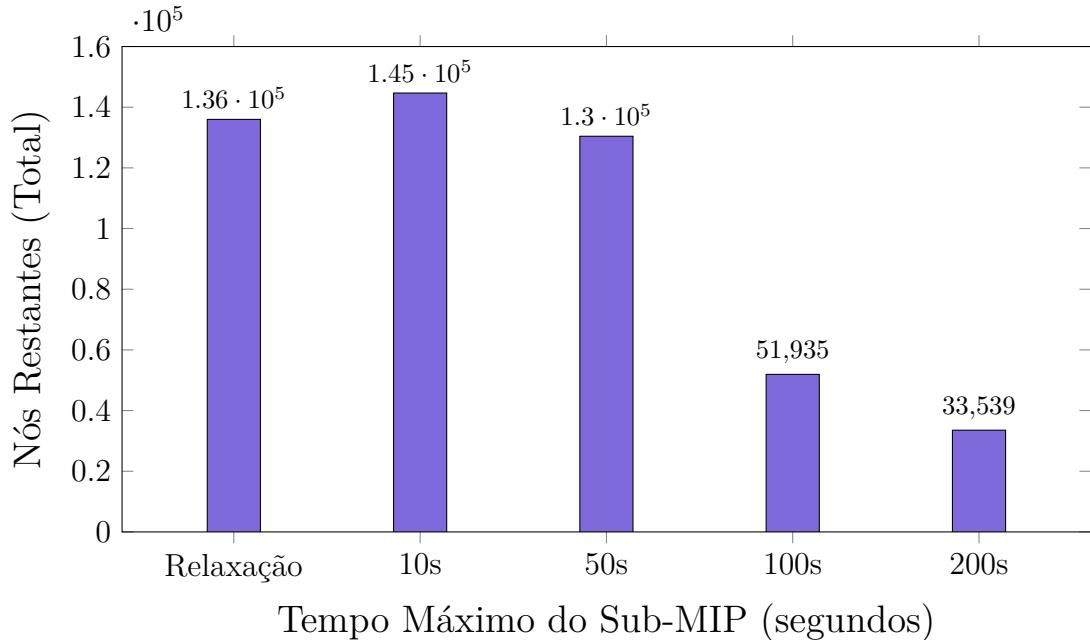


Figura 3 – Impacto do limite de tempo do sub-MIP no número de nós restantes. A configuração de 200s demonstrou o melhor desempenho com 33.539 nós, representando uma redução de 75,3% em relação à relaxação pura.

Gap de Optimalidade: A instância input22 manteve gap positivo em todas as configurações, mas com variação significativa nos nós restantes: 21.528 (relaxação), 29.161 (10s), 25.100 (50s), 50.411 (100s) e 33.000 (200s), sugerindo diferentes regiões de exploração.

Conclusão: O limite de **200 segundos** demonstrou o melhor desempenho global, reduzindo drasticamente a árvore de busca e resolvendo instâncias que outras configurações não conseguiram. O resultado evidencia que, para problemas combinatórios complexos como o DPD, investir mais tempo em cada chamada do LNS compensa através de soluções de maior qualidade que aceleram a convergência do Branch-and-Bound global. O trade-off entre intensidade (tempo por chamada) e frequência (número de chamadas) favorece claramente a intensidade para este problema.

4.3 Comparativo de Desempenho e Qualidade de Solução

4.3.1 LNS versus GRASP

4.3.2 LNS versus Modelo Exato (Branch-and-Bound Padrão)

4.4 Análise de Tempo Computacional e Gap de Otimidade

5 Conclusão

5.1 Considerações Finais

5.2 Limitações do Estudo

5.3 Trabalhos Futuros

Referências

- AHUJA, R. K. et al. A survey of very large-scale neighborhood search techniques. *Discrete Applied Mathematics*, v. 123, n. 1-3, p. 75–102, 2002.
- AL-YAKOOB, S.; SHERALI, H. A column generation mathematical programming approach for a class-faculty assignment problem with preferences. *Computational Management Science*, v. 12, 2013. Citado na página 6.
- AL-YAKOOB, S. M.; SHERALI, H. D. Mathematical programming models and algorithms for a class-faculty assignment problem. *European Journal of Operational Research*, v. 173, n. 2, p. 488–507, 2006. ISSN 0377-2217. Citado nas páginas 6 e 7. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221705002067>.
- AVELLA, P.; VASILYEV, I. A computational study of a cutting plane algorithm for university course timetabling. *Journal of Scheduling*, v. 8, p. 497–514, 2005. Citado na página 6.
- BALL, M. O. Heuristics based on mathematical programming. *Surveys in Operations Research and Management Science*, v. 16, n. 1, p. 21–38, 2011. ISSN 1876-7354. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1876735410000036>.
- BOSCHETTI, M. A.; LETCHFORD, A. N.; MANIEZZO, V. Matheuristics: survey and synthesis. *International Transactions in Operational Research*, v. 30, n. 6, p. 2840–2866, 2023.
- CARTER, M. W.; LAPORTE, G. Recent developments in practical course timetabling. In: BURKE, E.; CARTER, M. (Ed.). *Practice and Theory of Automated Timetabling II*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 3–19. ISBN 978-3-540-49803-2. Citado na página 6.
- D'AMBROSIO, C. et al. The knapsack problem with forfeit sets. *Computers & Operations Research*, v. 151, p. 106093, 2023.
- DOMENECH, B.; LUSA, A. A milp model for the teacher assignment problem considering teachers' preferences. *European Journal of Operational Research*, v. 249, n. 3, p. 1153–1160, 2016. ISSN 0377-2217. Citado na página 6. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221715008139>.
- GAMRATH, G. et al. *The SCIP Optimization Suite 7.0*. 2020. Technical report, Optimization Online. Citado na página 17. Disponível em: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2020/03/7705.html.
- GUNAWAN, A.; NG, K.; ONG, H. A genetic algorithm for the teacher assignment problem for a university in indonesia. *International Journal of Information and Management Sciences*, v. 19, 2008. Citado na página 7.
- HOSNY, M. *A heuristic algorithm for the faculty assignment problem*. 2012. Citado na página 6.

- JHONATAN. *Uma heurística GRASP para o Problema da Distribuição de Disciplinas (DPD)*. 2025. Referência provisória (completar autores, título, veículo e ano conforme o artigo original).
- JOVANOVIC, R.; VOSS, S. Matheuristic fixed set search applied to the multidimensional knapsack problem and the knapsack problem with forfeit sets. *OR Spectrum*, p. 1–37, 2024.
- MANIEZZO, V.; STÜTZLE, T.; VOSS, S. *Matheuristics: Algorithms and Implementations*. [S.l.]: Springer, 2021.
- PISINGER, D.; ROPKE, S. Large neighborhood search. In: *Handbook of Metaheuristics*. [S.l.]: Springer US, 2010. p. 399–419.
- SILVA, L. S. *Uma abordagem exata para o problema da distribuição de disciplinas*. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS.
- SILVA, P. P. A. de Paula e. *Uma Matheurística de Melhoria para o Problema da Mochila com Conjuntos de Penalidades*. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS.
- SZWARC, E.; BACH-DÁBROWSKA, I.; BOCEWICZ, G. Competence management in teacher assignment planning. In: *24th International Conference, ICIST 2018, Vilnius, Lithuania, October 4–6, 2018, Proceedings*. [S.l.]: Springer, 2018. p. 449–460. ISBN 978-3-319-99971-5. Citado na página 6.
- VANDERBEI, R. J. *Linear Programming: Foundations and Extensions*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 9.
- WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd., 2020. Citado na página 9.

Apêndices

APÊNDICE A – Códigos

A.1 Apêndices - Materiais do autor

Explicações