

Resolução Completa de Exercício 6: Oscilador Harmônico Carregado em Campo Variável

Assistente IA Gemini

November 26, 2025

O Hamiltoniano do sistema é $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$, onde $\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{X}^2$ e $\hat{W}(t) = -q\mathcal{E}(t)\hat{X}$.

a. Hamiltoniano $H(t)$ e Comutadores

1. Expressão do Hamiltoniano em \hat{a} e \hat{a}^\dagger

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad \hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

Definindo $\Lambda(t) \equiv -q\mathcal{E}(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$:

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{t}) = \hbar\omega \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \right) + \Lambda(\mathbf{t})(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger)$$

2. Cálculo dos Comutadores

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{t})] &= \hbar\omega \hat{\mathbf{a}} + \Lambda(\mathbf{t}) \\ [\hat{\mathbf{a}}^\dagger, \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{t})] &= -(\hbar\omega \hat{\mathbf{a}}^\dagger + \Lambda(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

b. Equação Diferencial para $\alpha(t)$ e Valores Médios

1. Dedução e Solução da Equação Diferencial

Pela Equação de Ehrenfest ($\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{a}, \hat{H}(t)] \rangle$):

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) - i\frac{\Lambda(t)}{\hbar}$$

Com $\frac{\Lambda(t)}{\hbar} = \lambda(t)$, a solução integrada é ($\alpha(0)$ é o valor inicial):

$$\alpha(\mathbf{t}) = \alpha(0)\mathbf{e}^{-i\omega\mathbf{t}} + i\mathbf{e}^{-i\omega\mathbf{t}} \int_0^{\mathbf{t}} \lambda(\tau)\mathbf{e}^{i\omega\tau} d\tau$$

2. Valores Médios de Posição e Momento

$$\langle \mathbf{X} \rangle(\mathbf{t}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha(\mathbf{t}) + \alpha^*(\mathbf{t})]$$

$$\langle \mathbf{P} \rangle(\mathbf{t}) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} [\alpha^*(\mathbf{t}) - \alpha(\mathbf{t})]$$

c. Evolução Temporal do estado $|\varphi(t)\rangle$ e Variação da Norma

1. Equação de Evolução

A substituição da regra do produto e das equações de movimento leva a:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = [\hat{H}(t) + \hbar\omega] |\varphi(t)\rangle$$

2. Variação da Norma

Como o operador $[\hat{H} + \hbar\omega]$ é Hermitiano, a norma é constante:

$$\frac{d}{dt} ||\varphi(t)||^2 = 0$$

d. Propriedades do Estado $\psi(t)$ e Desvios Padrão

1. Estado Coerente

Se $|\psi(0)\rangle$ é autoestado de \hat{a} , então $|\varphi(t)\rangle = 0$, implicando:

$$\hat{a}|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|\psi(t)\rangle$$

(Estado Coerente).

2. Valor Médio de Energia e Desvios Padrão

$$\langle H_0 \rangle(t) = \hbar\omega \left[|\alpha(t)|^2 + \frac{1}{2} \right]$$

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \Delta P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \quad (\text{Constantes})$$

$$\Delta H_0 = \hbar\omega |\alpha(t)| \quad (\text{Varia com a amplitude})$$

e. Caso Específico: Partícula no Estado Fundamental em $t = 0$

1. Evolução de $\langle X \rangle(t)$ e $\langle P \rangle(t)$ para $t > T$

Assumindo $|\psi(0)\rangle = |\varphi_0\rangle$, temos $\alpha(0) = 0$. Para $t > T$, $\lambda(t) = 0$, e a solução se torna uma oscilação livre:

$$\alpha(t) = A_0 e^{-i\omega t}, \quad \text{onde } A_0 = i \int_0^T \lambda(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Com $A_0 = |A_0| e^{i\phi_A}$:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} |A_0| [e^{i(\phi_A - \omega t)} + e^{-i(\phi_A - \omega t)}] \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\mathbf{A}_0| \cos(\omega t - \phi_A) \end{aligned}$$

$$\langle P \rangle(t) = \sqrt{2m\hbar\omega} |\mathbf{A}_0| \sin(\omega t - \phi_A)$$

2. Aplicação: Ressonância e Probabilidades (Contas Essenciais)

Para $\mathcal{E}(t) \propto \cos(\omega' t)$, o termo de excitação é a integral I :

$$I = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^T \left(e^{i(\omega' + \omega)\tau} + e^{i(\omega - \omega')\tau} \right) d\tau$$

Ressonância ($\omega' = \omega$)

Se $\omega' = \omega$, o segundo termo $e^{i(\omega-\omega')\tau}$ se torna $e^0 = 1$. O crescimento é linear:

$$I^{\text{res}} = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^T e^{i2\omega\tau} d\tau + \frac{\lambda_0}{2} \int_0^T d\tau$$

O termo dominante é: $\frac{\lambda_0}{2}T$.

$$|\alpha(\mathbf{T})|^2 \propto \mathbf{T}^2$$

A energia média $\langle H_0 \rangle(T)$ **cresce quadraticamente** com o tempo de interação T .

Probabilidades de Energia ($t > T$)

O estado coerente tem número médio de quanta $\bar{n} = |\alpha(t)|^2$. A probabilidade de medir $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ segue a distribuição de Poisson:

$$\mathbf{P}_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$