

# Resolução Completa de Exercício 6: Oscilador Harmônico Carregado em Campo Variável

Assistente IA Gemini

November 26, 2025

---

O Hamiltoniano do sistema é  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$ , onde  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$  e  $\hat{W}(t) = -q\mathcal{E}(t)\hat{X}$ .

---

## a. Hamiltoniano $H(t)$ e Comutadores

### 1. Expressão do Hamiltoniano em $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad \hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

Definindo  $\Lambda(t) \equiv -q\mathcal{E}(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ :

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{t}) = \hbar\omega \left( \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \right) + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{t})(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger)$$

### 2. Cálculo dos Comutadores

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{t})] = \hbar\omega\hat{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{t})$$

$$[\hat{\mathbf{a}}^\dagger, \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{t})] = -(\hbar\omega\hat{\mathbf{a}}^\dagger + \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{t}))$$

---

## b. Equação Diferencial para $\alpha(t)$ e Valores Médios

### 1. Dedução e Solução da Equação Diferencial

Pela Equação de Ehrenfest ( $\frac{d}{dt}\alpha(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{a}, \hat{H}(t)]\rangle$ ):

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) - i\frac{\Lambda(t)}{\hbar}$$

Com  $\frac{\Lambda(t)}{\hbar} = \lambda(t)$ , a solução integrada é ( $\alpha(0)$  é o valor inicial):

$$\alpha(\mathbf{t}) = \alpha(0)e^{-i\omega t} + ie^{-i\omega t} \int_0^t \lambda(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau$$

### 2. Valores Médios de Posição e Momento

$$\langle \mathbf{X} \rangle(\mathbf{t}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha(\mathbf{t}) + \alpha^*(\mathbf{t})]$$

$$\langle \mathbf{P} \rangle(\mathbf{t}) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} [\alpha^*(\mathbf{t}) - \alpha(\mathbf{t})]$$

---

## c. Evolução Temporal do estado $|\varphi(t)\rangle$ e Variação da Norma

### 1. Equação de Evolução

A substituição da regra do produto e das equações de movimento leva a:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = [\hat{H}(t) + \hbar\omega] |\varphi(t)\rangle$$

### 2. Variação da Norma

Como o operador  $[\hat{H} + \hbar\omega]$  é Hermitiano, a norma é constante:

$$\frac{d}{dt} ||\varphi(t)||^2 = 0$$


---

## d. Propriedades do Estado $\psi(t)$ e Desvios Padrão

### 1. Estado Coerente

Se  $|\psi(0)\rangle$  é autoestado de  $\hat{a}$ , então  $|\varphi(t)\rangle = 0$ , implicando:

$$\hat{a}|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|\psi(t)\rangle$$

(Estado Coerente).

### 2. Valor Médio de Energia e Desvios Padrão

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_0 \rangle(\mathbf{t}) &= \hbar\omega \left[ |\alpha(\mathbf{t})|^2 + \frac{1}{2} \right] \\ \Delta \mathbf{X} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \Delta \mathbf{P} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \quad (\text{Constantes}) \\ \Delta \mathbf{H}_0 &= \hbar\omega |\alpha(\mathbf{t})| \quad (\text{Varia com a amplitude}) \end{aligned}$$


---

## e. Caso Específico: Partícula no Estado Fundamental em $t = 0$

### 1. Evolução de $\langle X \rangle(t)$ e $\langle P \rangle(t)$ para $t > T$

Assumindo  $|\psi(0)\rangle = |\varphi_0\rangle$ , temos  $\alpha(0) = 0$ . Para  $t > T$ ,  $\lambda(t) = 0$ , e a solução se torna uma oscilação livre:

$$\alpha(t) = A_0 e^{-i\omega t}, \quad \text{onde } A_0 = i \int_0^T \lambda(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Com  $A_0 = |A_0|e^{i\phi_A}$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X} \rangle(\mathbf{t}) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} |A_0| [e^{i(\phi_A - \omega t)} + e^{-i(\phi_A - \omega t)}] \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\mathbf{A}_0| \cos(\omega\mathbf{t} - \phi_{\mathbf{A}}) \\ \langle \mathbf{P} \rangle(\mathbf{t}) &= \sqrt{2m\hbar\omega} |\mathbf{A}_0| \sin(\omega\mathbf{t} - \phi_{\mathbf{A}}) \end{aligned}$$

### 2. Aplicação: Ressonância e Probabilidades (Contas Essenciais)

Para  $\mathcal{E}(t) \propto \cos(\omega't)$ , o termo de excitação é a integral  $I$ :

$$I = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^T (e^{i(\omega' + \omega)\tau} + e^{i(\omega - \omega')\tau}) d\tau$$

### Ressonância ( $\omega' = \omega$ )

Se  $\omega' = \omega$ , o segundo termo  $e^{i(\omega-\omega')\tau}$  se torna  $e^0 = 1$ . O crescimento é linear:

$$I^{\text{res}} = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^T e^{i2\omega\tau} d\tau + \frac{\lambda_0}{2} \int_0^T d\tau$$

O termo dominante é:  $\frac{\lambda_0}{2} T$ .

$$|\alpha(\mathbf{T})|^2 \propto \mathbf{T}^2$$

A energia média  $\langle H_0 \rangle(T)$  **cresce quadraticamente** com o tempo de interação  $T$ .

### Probabilidades de Energia ( $t > T$ )

O estado coerente tem número médio de quanta  $\bar{n} = |\alpha(t)|^2$ . A probabilidade de medir  $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$  segue a distribuição de Poisson:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$