Exercícios

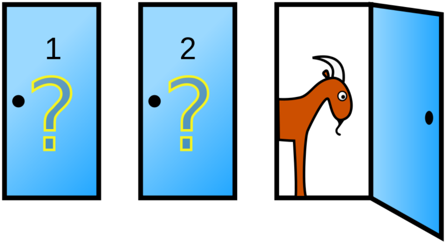
Prof. Eduardo Vargas Ferreira

Curso de Especialização em
Data Science & Big Data
Universidade Federal do Paraná

2 de abril de 2018

Exercício 1

- No exercício abaixo, uma porta esconde um carro e as outras duas um bode;

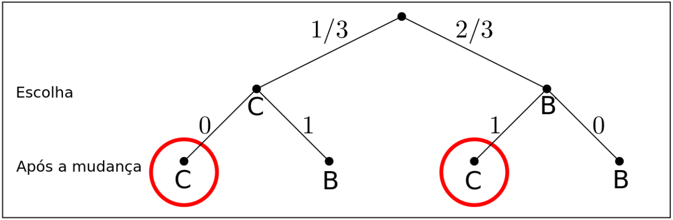


- Você escolhe uma das portas. Em seguida, o apresentador abre uma das outras que contém um bode.

- Tendo a opção de alterar sua escolha, o que faria?

Solução

- É mais fácil mostrar com uma árvore que representa a estratégia de mudança:



- Primeiro, o competidor escolhe uma porta, (então o apresentador mostra uma cabra), então o competidor muda as portas.

- A probabilidade de C (a porta conter um carro) é:

$$P(C|\text{após a mudança}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Exercício 2

- Considere o experimento: "lançar uma moeda 3 vezes".
- E os eventos:
  - A: "Obter exatamente 2 caras";
  - B: "Obter exatamente duas coroas"

- Os eventos A e B são disjuntos?

(1) Verdadeiro (2) Falso

Resposta: Verdadeiro: $\{THH, HTH, HHT\} \cap \{TTH, THT, HTT\} = \emptyset$

Exercício 3

- Considere o experimento: "lançar uma moeda 3 vezes".
- E os eventos:
  - A: "pelo menos 2 caras";
  - B: "exatamente duas caras".

- O evento A implica no evento B?

(1) Verdadeiro (2) Falso

Resposta: Falso: $\{THH, HTH, HHT, HHH\} \supset \{THH, HTH, HHT\}$

Exercício 4

- Em uma classe com 50 estudantes:
  - 20 são homens (H);
  - 25 apresentam olhos castanhos (C).
- Para um aluno escolhido aleatoriamente, qual é o intervalo de valores possíveis para $p = P(H \cup C)$?

(a) $p \leq 0,4$;

(b) $0,4 \leq p \leq 0,5$;

(c) $0,4 \leq p \leq 0,9$;

(d) $0,5 \leq p \leq 0,9$;

(e) $0,5 \leq p$.

Solução

- A maneira fácil de responder a isso é que $A \cup B$ tem:
  - Um mínimo de 25 alunos (todos os homens têm olhos castanhos);
  - Um máximo de 45 alunos (nenhum homem tem olhos castanhos).
- Assim, a probabilidade varia entre 0,5 a 0,9.
- Pensando em termos do princípio de inclusão-exclusão, temos:

$$P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C) = 0,9 - P(H \cap C).$$

- Portanto, o valor máximo possível de $P(H \cup C)$ acontece se H e C forem disjuntos, então $P(H \cap C) = 0$.
- O mínimo ocorre quando $H \subset C$, então $P(H \cap C) = P(H) = 0,4$.

Exercício 5

- Em um aeroporto todos os passageiros são verificados cuidadosamente.

- Seja T com $t \in \{0, 1\}$, variável que indica se o passageiro:
  - É terrorista ($t = 1$);
  - Não é terrorista ($t = 0$).

- Seja A com $a \in \{0, 1\}$, se o indivíduo será preso ($a = 1$) ou não ($a = 0$).
- Reconhecendo um terrorista, ele deve ser preso com probabilidade 0,98, e dado um não terroristas ele é preso com probabilidade 0,001.
- Sabendo que 1 em cada 100.000 passageiros são terroristas, qual a probabilidade de um indivíduo preso ser terrorista?

Solução

- O exercício pode ser resolvido utilizando o Teorema de Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(T=1|A=1) &= \frac{P(A=1|T=1)P(T=1)}{P(A=1)} \\
&= \frac{P(A=1|T=1)P(T=1)}{P(A=1|T=1)P(T=1)+P(A=1|T=0)P(T=0)} \\
&= \frac{0.98\times 0.00001}{0.98\times 0.00001+0.001\times(1-0.00001)} \\
&\approx 0.01.
\end{aligned}
$$

- Isto quer dizer que se alguém for preso como terrorista, é possível que ele não o seja com 99% de probabilidade.