Vaje 6 [27. marec 2024]: *Metoda končnih elementov nad triangulacijo.*

Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje s poligonskim robom, ki je razdeljeno s triangulacijo $\triangle$. Približek $\widetilde{u}$ za rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ru = f$$

na območju $\mathcal{D}$ z robnim pogojem $u|_{\partial\mathcal{D}} = g$ predstavimo v obliki

$$\widetilde{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i,$$

kjer so $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, $m \in \mathbb{N}$, zvezne odsekoma linearne funkcije nad triangulacijo $\triangle$. Te funkcije določimo na podlagi baznih funkcij h_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, prostora zveznih odsekoma linearnih funkcij nad triangulacijo $\triangle$, ki so enolično določene z zahtevami

$$h_j(x_j, y_j) = 1, \qquad h_j(x_k, y_k) = 0, \quad j \neq k,$$

v točkah $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{n}$ triangulacije $\triangle$. Za funkcije φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, vzamemo bazne funkcije h_j, ki pripadajo točkam v notranjosti območja $\mathcal{D}$ (m torej označuje število notranjih točk triangulacije $\triangle$). Funkcijo φ_0, ki predstavlja aproksimacijo za robni pogoj, pa definiramo kot linearno kombinacijo

$$\varphi_0 = \sum_{(x_j, y_j) \in \partial\mathcal{D}} g(x_j, y_j) h_j$$

preostalih baznih funkcij h_j. Koeficiente α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, ki določajo približek za u, dobimo z reševanjem sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, kjer je $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^{m}$ vektor spremenljivk, $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ matrika z elementi

$$a_{i,j} = \iint_{\mathcal{D}} \left(p\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + q\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + r\varphi_i\varphi_j \right) \mathrm{d}\mathcal{D}$$

in $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^{m}$ vektor z elementi

$$b_i = \iint_{\mathcal{D}} \left(f\varphi_i - \left(p\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + q\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + r\varphi_0\varphi_i \right) \right) \mathrm{d}\mathcal{D}.$$

V Matlabu sestavite metodo, ki za dane funkcije p, q, r, f in g ter triangulacijo $\triangle$ izračuna približek po metodi končnih elementov. Pri implementaciji sledite naslednjim navodilom.

1. Triangulacijo lahko predstavimo s pomočjo razreda `triangulation`. Objekt tega razreda vsebuje dve tabeli. Prva, `Points`, podaja točke triangulacije. Vsaka vrstica tabele predstavlja kartezične koordinate točke v triangulaciji, hkrati pa določa njen indeks. Druga, `ConnectivityList`, podaja trikotnike triangulacije. To je tabela s tremi stolpci, vsaka vrstica pa določa indekse treh točk, ki sestavljajo trikotnik. Sestavite triangulacijo za prvi primer iz točke (5) in jo narišite z vgrajenim ukazom `triplot`. Nato s pomočjo razreda `triangulation` predstavite še bazne funkcije h_j za to triangulacijo in jih narišite z vgrajenim ukazom `trisurf` ali `trimesh`.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

2. Sestavite metodo za izračun vrednosti linearne funkcije oblike
$$(x,y) \mapsto a + bx + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$
ter njenih parcialnih odvodov v poljubnih točkah. Funkcija naj bo opisana z vhodnimi parametri, ki določajo njene vrednosti v ogliščih trikotnika. Ta metoda bo uporabna pri konstrukciji integrandov v izrazih za $a_{i,j}$ in b_i.

3. Sestavite metodo za izračun približka za integral poljubne funkcije k na trikotniku T, določenem z oglišči (X_i, Y_i), $i = 1, 2, 3$. S preslikavo
$$\Psi(u,v) = (uX_1 + vX_2 + (1-u-v)X_3,\ uY_1 + vY_2 + (1-u-v)Y_3)\,,$$
ki baricentrične koordinate $(u, v, 1-u-v)$ glede na T pretvori v kartezične koordinate točke v domeni, lahko integral opišemo z
$$\iint_T k \,\mathrm{d}T = \int_0^1 \int_0^{1-u} k(\Psi(u,v))\, |\det(\boldsymbol{J}_\Psi)| \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u,$$
kjer $\boldsymbol{J}_\Psi$ označuje Jacobijevo matriko preslikave Ψ, ki je konstantna matrika. Približek za tako predstavljen integral lahko v Matlabu izračunamo z vgrajeno metodo `integral2` z ukazom oblike
$$\texttt{integral2(@(u,v)}\; k(\Psi(\texttt{u},\texttt{v}))\, |\det(\boldsymbol{J}_\Psi)|\,\texttt{,0,1,0,@(u)1-u)}.$$
Pripravljena metoda bo služila za izračun prispevkov integralov na posameznih trikotnikih triangulacije $\triangle$ v izrazih za $a_{i,j}$ in b_i.

4. Sestavite glavno metodo `mke`, ki na podlagi vhodnih podatkov konstruira matriko $\boldsymbol{A}$ in vektor $\boldsymbol{b}$ ter določi rešitev robnega problema po metodi končnih elementov z reševanjem sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$. Konstrukcija $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{b}$ naj poteka s pregledom vseh trikotnikov triangulacije $\triangle$ in prištevanjem prispevkov integralov na posameznem trikotniku k izrazom za $a_{i,j}$ in b_i. V tem postopku je pomembno ločiti med notranjimi in robnimi točkami triangulacije, za kar lahko uporabite vgrajeni ukaz `freeBoundary`. Končni rezultat metode naj bo tridimenzionalna triangulacija: vhodno triangulacijo razširite tako, da pri vsaki točki na podlagi robnega pogoja g in izračunanih koeficientov α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, določite vrednost tretje komponente v prostoru.

5. Metodo testirajte na naslednjih primerih. Narišite grafe rešitev.

   (a) Rešite Poissonovo enačbo $-\Delta u = 1$ na $\mathcal{D} = (0,1) \times (0,1)$ pri robnem pogoju $u|_{\partial\mathcal{D}} = 0$. Triangulacija $\triangle$ je določena s premicami
   $$y = \frac{1}{2}, \quad y = 2x, \quad y = 2 - 2x, \quad y = 2x - 1, \quad y = -2x + 1.$$

   (b) Rešite Poissonovo enačbo $-\Delta u = 1$ na $\mathcal{D} = (0,1) \times (0,1)$ pri robnem pogoju
   $$\begin{aligned} u(x,0) &= x^3, && x \in [0,1], \\ u(x,1) &= x^2, && x \in [0,1], \\ u(0,y) &= \sin(2\pi y), && y \in [0,1], \\ u(1,y) &= \cos(2\pi y), && y \in [0,1]. \end{aligned}$$

   Triangulacijo $\triangle$ konstruirajte z ukazi

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

```
[X,Y] = meshgrid(linspace(0,1,11));
X = X(:); Y = Y(:);
TRI = delaunay(X,Y);
t = triangulation(TRI,X,Y);
```

Rešitev na mreži točk $(i/10, j/10)$, $i, j = 0, 1, \ldots, 10$, primerjajte z rešitvijo, dobljeno z diferenčno metodo nad to mrežo.

(c) Rešite enačbo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right) + 4\pi^2(x+y)u = 2\pi\cos\left(2\pi(x+y)\right)$$

na območju Slovenije $\mathcal{D}$ pri robnem pogoju $u|_{\partial\mathcal{D}}(x, y) = \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Triangulacijo območja vsebuje datoteka `slo.mat`. Naložite jo z ukazoma

```
L = load('slo.mat');
t = triangulation(L.TRI, L.X, L.Y);
```

Primerjajte dobljeni približek s točno rešitvijo $u(x, y) = \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Kakšna je maksimalna absolutna napaka v točkah triangulacije?

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si