Vaje 2 [19. oktober 2023]: *Aproksimacijski operatorji.*

1. *Bernsteinov operator.* Bernsteinov operator

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\tfrac{i}{n}) B_i^n(x)$$

funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje manjše ali enake n. Dokažite, da je

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f(\tfrac{i}{n}) B_i^{n-1}(x), \qquad \Delta f(\tfrac{i}{n}) = f(\tfrac{i+1}{n}) - f(\tfrac{i}{n}),$$

in utemeljite, da za zvezno odvedljivo funkcijo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \|f' - (B_n f)'\|_{\infty,[0,1]} = 0.$$

2. *Kantorovičev operator.* Naj bo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija in $K_n f$ operator, ki funkciji f priredi Kantorovičev polinom

$$K_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{n,i}\, B_i^n(x), \quad f_{n,i} = (n+1) \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vrednost $f_{n,i}$ ustreza ravno povprečni vrednosti funkcije f na intervalu $[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}]$.

(a) Dokažite, da za $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ velja $(B_{n+1}F)' = K_n f$.

(b) Naj bo f zvezna. Dokažite, da tedaj velja $\lim_{n\to\infty} \|f - K_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0$.

3. *Zvezen odsekoma linearen interpolant.* Naj bo

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

delitev intervala $[a,b]$ in $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^n$ vektor delilnih točk.

(a) Dokažite, da funkcije

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \\
H_i(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\
H_n(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}
\end{aligned}$$

sestavljajo stabilno bazo prostora zveznih odsekoma linearnih funkcij

$$S_{1,\boldsymbol{x}} = \left\{ f \in C([a,b]);\ f|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1 \right\}.$$

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

(b) Naj bo $I_{1,\boldsymbol{x}}$ operator, ki funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ priredi zvezno odsekoma linearno funkcijo

$$I_{1,\boldsymbol{x}} f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) H_i(x).$$

Preverite, da zožitev $I_{1,\boldsymbol{x}} f$ na interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ustreza premici

$$x \mapsto f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Od tod sklepajte, da za vsak $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ velja $I_{1,\boldsymbol{x}} f(x_j) = f(x_j)$.

4. *Primerjava aproksimacijskih operatorjev.* V Matlabu pripravite spodaj opisane metode za aproksimacijo funkcije. Vse metode vračajo seznam `y`, ki vsebuje vrednosti aproksimacije funkcije v točkah iz vhodnega seznama `x`. Pri vseh metodah parametra `a` in `b` predstavljata levi in desni rob intervala, na katerem je funkcija aproksimirana.

   - `y = bernsteinovaAproksimacija(f,a,b,n,x)` izračuna vrednosti (reparametriziranega) Bernsteinovega polinoma stopnje `n` za funkcijo `f`.
   - `y = kantorovicevaAproksimacija(F,a,b,n,x)` izračuna vrednosti (reparametriziranega) Kantorovičevega polinoma stopnje `n` za funkcijo f, ki jo predstavlja primitivna funkcija `F`.
   - `y = odsekomaLinearnaAproksimacija(f,a,b,n,x)` izračuna vrednosti zvezne odsekoma linearne funkcije, ki interpolira vrednosti funkcije `f` v točkah $\mathtt{a} + i\frac{\mathtt{b-a}}{\mathtt{n}}$, $i = 0, 1, \dots, \mathtt{n}$.

   Izračunajte aproksimacije funkcij $x \mapsto \cos(2x)$ in $x \mapsto |x| \cos(x^2)$ na intervalu $[-1, 1]$ z vsemi tremi metodami za parametre $\mathtt{n} \in \{2, 4, 6, \dots, 50\}$. Narišite grafe aproksimacij. Primerjajte napake aproksimacij v enakomerni normi, ki jih ocenite tako, da izračunate maksimalno absolutno napako v točkah $(j - 100)/100$, $j = 0, 1, \dots, 200$. Narišite grafe napak v odvisnosti od parametra `n` v logaritemski skali. Kaj opazite?