Vaje 4 [2. november 2023]: *Najboljša enakomerna aproksimacija.*

1. *Prvi Remesov postopek.* Naj bo f zvezno odvedljiva in konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$. Radi bi poiskali polinom $p^* \in \mathbb{P}_1$, ki je element najboljše enakomerne aproksimacije za f v $\mathbb{P}_1$; to je polinom, za katerega velja $\|f - p^*\|_\infty = \mathrm{dist}_\infty(f, \mathbb{P}_1)$.

   (a) Napravite en korak Remesovega postopka z množico $E_0 = \{a, (a + b)/2, b\}$ in določite polinom $p_0 \in \mathbb{P}_1$, za katerega velja $\|f - p_0\|_{\infty,E_0} = \min_{p\in\mathbb{P}_1} \|f - p\|_{\infty,E_0}$.

   (b) Analizirajte residual $f - p_0$ in množico E_0 nadomestite z množico, ki jo dobite tako, da v E_0 zamenjate eno izmed točk.

   (c) Napravite še en korak Remesovega postopka in utemeljite, da polinom p_1, ki ga dobite v drugem koraku, ustreza polinomu p^*.

2. *Drugi Remesov postopek.* Na intervalu $[-1, 1]$ poiščite polinom stopnje manjše ali enake 2, ki najbolje aproksimira $f(x) = |x|$. Uporabite drugi Remesov postopek z začetnimi točkami $\{-2/3, -1/3, 1/3, 2/3\}$.

3. *Implementacija prvega Remesovega postopka.* V Matlabu pripravite metodo, ki za dano funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, določi koeficiente $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ polinoma

   $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

   stopnje $n \in \mathbb{N}$, ki predstavlja približek za polinom najboljše aproksimacije za f iz $\mathbb{P}_n$. Pri implementaciji metode sledite naslednjim navodilom.

   (a) Pripravite pomožno metodo, ki za dan seznam točk E dolžine $n+2$ poišče polinom $g \in \mathbb{P}_n$, čigar residual $f - g$ alternirajoče doseže vrednost $\pm m$, $m > 0$, v točkah iz seznama E.

   (b) Sestavite pomožno metodo za iskanje približka za absciso na danem intervalu, pri kateri je absolutna vrednost podane funkcije enaka njeni enakomerni normi. Natančneje, za funkcijo r in interval $[a, b]$ naj metoda razdeli $[a, b]$ z $N+1$ ekvidistantnimi točkami, ki sestavljajo množico $\boldsymbol{x} = \{a + k(b - a)/N;\ k = 0, 1, \ldots, N\}$ (vzemite na primer $N = 1000$), in določi tisto absciso $x \in \boldsymbol{x}$, za katero velja $|r(x)| = \|r\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$.

   (c) Implementirajte pomožno metodo, ki sprejme funkcijo, urejen seznam točk, na katerem funkcija alternirajoče spreminja predznak, ter še eno dodatno točko; vrne pa urejen seznam točk, ki je enake dolžine kot vhodni, a namesto ene izmed prvotnih točk vsebuje podano dodatno točko. Izhodni seznam mora ohraniti lastnost, da funkcija na njem alternirajoče spreminja predznak.

   (d) Nazadnje pripravite glavno iteracijsko metodo, ki izvede Remesov postopek. Metoda naj sprejme funkcijo, interval, stopnjo polinoma in število korakov iteracije, vrne pa koeficiente polinoma glede na podano množico baznih funkcij. Metoda naj se na vsakem koraku iteracije opre na pomožne metode iz točk 3a, 3b in 3c.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

Preizkusite implementirano metodo s funkcijo f, ki je podana s predpisom

$$f(x) = |x| \sin(2e^{\frac{3}{2}x} - 1).$$

Za vsako izmed stopenj $n \in \{2, 4, 6, 8\}$ poiščite polinom $p_n \in \mathbb{P}_n$, ki predstavlja tak približek za element najboljše enakomerne aproksimacije za f na intervalu $[-1, 1]$ iz prostora $\mathbb{P}_n$, da je razlika med normo residuala in minimaksom residuala na trenutni množici $n + 2$ točk manjša od 10^{-10}. Remesov postopek začnite izvajati z množico $\{\pm\frac{1}{n+1}, \pm\frac{3}{n+1}, \ldots, \pm\frac{n-1}{n+1}, \pm 1\}$. Narišite grafe f in p_n na intervalu $[-1, 1]$ ter primerjajte napake $\|f - p_n\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$ za različne stopnje n. Spremljajte tudi vrednosti minimaksov ter razlik med normami residualov in minimaksi tekom postopka.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si