Vaje 6 [16. november 2023]: *Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov.*

1. *Normalni sistem.* Naj bodo f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, funkcije, ki razpenjajo podprostor S v funkcijskem prostoru X, opremljenem s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot\cdot \rangle$. Funkcijo najboljše aproksimacije $f^* \in S$ za $f \in X$ po metodi najmanjših kvadratov lahko poiščemo z uporabo lastnosti, da je $f - f^* \perp S$. To napravimo tako, da f^* predstavimo kot $f^* = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j$ za neke skalarje α_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, in na podlagi omenjene lastnosti izpeljemo normalni sistem $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, kjer je

$$\boldsymbol{G} = [\langle f_j, f_i \rangle]_{i,j=0}^{n}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_j]_{j=0}^{n}, \qquad \boldsymbol{b} = [\langle f, f_i \rangle]_{i=0}^{n}.$$

   Rešitev sistema $\boldsymbol{\alpha}$ določa f^*. Dokažite, da je matrika $\boldsymbol{G}$ obrnljiva natanko tedaj, ko so funkcije f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, linearno neodvisne. Še več, utemeljite, da je ob taki predpostavki matrika $\boldsymbol{G}$ simetrična pozitivno definitna.

2. *Polinom najboljše aproksimacije.* Naj bo skalarni produkt funkcij g in h na intervalu $[0, 1]$ podan s predpisom

$$\langle g, h \rangle = \int_0^1 g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

   V prostoru $\mathbb{P}_2$ bi radi poiskali polinom f^*, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira funkcijo $f(x) = x^3$.

   (a) Prostor $\mathbb{P}_2$ predstavite s potenčno bazo $x \mapsto x^i$, $i = 0, 1, 2$, in določite pripadajočo Gramovo matriko.

   (b) Prostor $\mathbb{P}_2$ predstavite z Bernsteinovimi baznimi polinomi B_i^2, $i = 0, 1, 2$, in določite pripadajočo Gramovo matriko.

   Rešite normalna sistema in preverite, da v obeh primerih dobite enak polinom f^*.

3. *Trigonometrični polinom najboljše aproksimacije.* Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{T}_n$ aproksimacijski prostor, ki ga razpenjajo funkcije $x \mapsto 1/\sqrt{2\pi}$ ter $x \mapsto \cos(kx)/\sqrt{\pi}$ in $x \mapsto \sin(kx)/\sqrt{\pi}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Ti bazni trigonometrični polinomi sestavljajo ortonormiran sistem glede na skalarni produkt, ki je za funkciji g in h podan s predpisom

$$\langle g, h \rangle = \int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Določite trigonometrični polinom $f_n^* \in \mathbb{T}_n$, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0, \pi] \\ 1; & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

   (b) Obravnavajte $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n^*\|_2$.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

4. *Implementacija metode najmanjših kvadratov.* V Matlabu pripravite metodo, ki izračuna element najboljše aproksimacije za funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov. Metoda naj poleg f kot vhodni podatek sprejme še množico baznih funkcij $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, in funkcijo, ki danima dvema funkcijama priredi skalarni produkt. Vrne naj seznam koeficientov α_j, $j = 0, 1, \dots, n$, ki določajo element $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_j$ najboljše aproksimacije za f po metodi najmanjših kvadratov glede na podani skalarni produkt. Ti koeficienti naj bodo izračunani z reševanjem normalnega sistema. Metodo testirajte z aproksimacijo funkcije $f(x) = e^{\sin(x^2/10)}$ na intervalu $[0, 2\pi]$ glede na zvezni in diskretni skalarni produkt, ki sta za funkciji g in h podana s predpisom

$$\langle g, h \rangle = \int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \langle g, h \rangle_N = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} g(2\pi \tfrac{i}{N}) h(2\pi \tfrac{i}{N}),\ N = 50.$$

Poiščite polinoma najboljše aproksimacije iz $\mathbb{P}_4$, izražena v potenčni bazi, in trigonometrična polinoma iz $\mathbb{T}_2$, izražena s funkcijami $1/\sqrt{2\pi}$, $\cos(x)/\sqrt{\pi}$, $\sin(x)/\sqrt{\pi}$, $\cos(2x)/\sqrt{\pi}$ in $\sin(2x)/\sqrt{\pi}$. Primerjajte napake vseh štirih aproksimacij v normi, inducirani z zveznim skalarni produktom. Za integriranje uporabljajte ukaz

```
If = integral(f, a, b, 'AbsTol',1e-14, 'RelTol',1e-14),
```

ki funkciji `f` priredi natančen približek `If` za integral na intervalu [`a`, `b`]. Primerjajte tudi občutljivosti Gramovih matrik, ki jih dobite v posameznih primerih.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si