Seminarska naloga iz Statistike

Dejan Perić

10. januar 2022

Prva naloga

a)

Izmed 43886 družin izberemo vzorec družin velikosti 200. Vzorce bomo pridobivali s pomočjo *sample* iz knjižnice *random*. Za cenilko povprečnega števila otrok bomo vzeli cenilko

$$\hat{\mu} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} X_i$$

Dobimo oceno, da je povprečno število otrok v Kibergradu enako 0.8400.

b)

Za cenilko standardne napake bomo vzeli cenilko iz predavanj. Ta je enaka

$$\widehat{SE}_+^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\hat{\sigma}_+^2}{n} \ ,$$

pri čemer je $\hat{\sigma}_+^2$ enaka

$$\hat{\sigma}_+^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \ .$$

$$\widehat{SE}_+^2 = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Pri nas je $N = 43886$ in $n = 200$, torej je

$$\widehat{SE}_+^2 = \frac{43686}{43886} \cdot \frac{1}{200 \cdot 199} \sum_{i=1}^{200} (X_i - \bar{X})^2 \ .$$

Izračunamo, da je standardna napaka enaka 0.071584.
Sedaj s pomočjo studentove porazdelitve izračunajmo eksakten 95% interval zaupanja. Iz predavanj vemo, da je ta oblike

$$\mu \in (\hat{\mu} - \widehat{SE}_+ \cdot F^{-1}_{Student(n-1)}(1 - \frac{\alpha}{2}),\ \hat{\mu} + \widehat{SE}_+ \cdot F^{-1}_{Student(n-1)}(1 - \frac{\alpha}{2}))\ .$$

Oceni za povprečno število otrok ($\hat{\mu}$) in standardno napako ($\widehat{SE}_+$) že imamo. Stopnja tveganja je enaka $\alpha = 0.05$. V pythonu imamo knjižnico *scipy.stats*, s pomočjo katere izračunamo, da je

$$F^{-1}_{Student(n-1)}(1 - \frac{0.05}{2}) = F^{-1}_{Student(n-1)}(0.975) = 1.9720$$

Interval zaupanja je torej enak $(0.69884, 0.98116)$.

c)

Za cenilko povprečja celotne populacije bomo vzeli isto kot smo za oceno populacijskega povprečja pri vzorcu.

$$\mu = \frac{1}{43886} \sum_{i=1}^{200} X_i = 0.94793$$

Vzorčno povprečje primerjamo z izračunanim populacijskim povprečjem. Relativna napaka vzorčnega povprečja je 11.39%.
Iz vseh podatkov družin lahko izračunamo varianco števila otrok družin, s pomočjo katere bomo lahko ocenili, kakšna je prava standardna napaka za vzorec velikosti 200. Ker imamo podatke celotne populacije, za cenilko variance vzamemo

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{43886} (X_i - \bar{X})^2 = 1.3391$$

Za cenilko prave standardne napake vzamemo cenilko, najdeno v knjigi John Rice: *Mathematical Statistics & Data Analysis*, str. 202-220.

$$SE^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot (\frac{N-n}{N-1}) = \frac{\sigma^2}{200} \cdot \frac{43686}{43885}$$

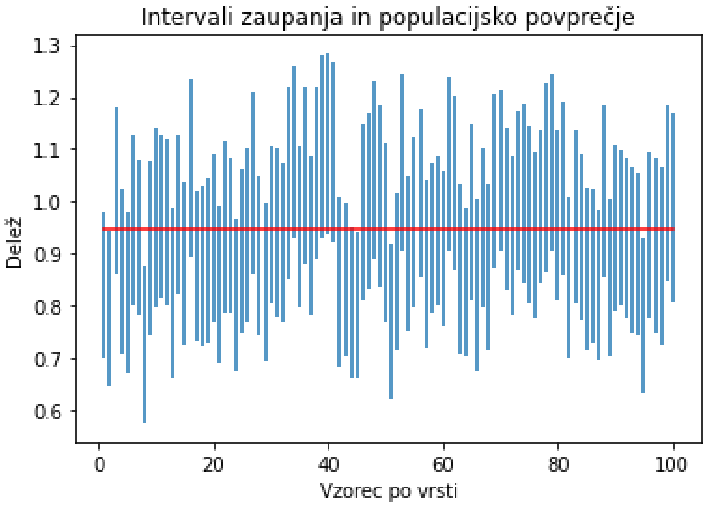
Dobimo, da je prava standardna napaka ocenjena z $SE = 0.081640$. Relativna napaka vzorčne standardne napake je torej 12.32%.
Opazimo, da je

$$\mu = 0.94793 \in (0.69884, 0.98116),$$

torej interval zaupanja iz prejšnje točke pokrije populacijsko povprečje.

d)

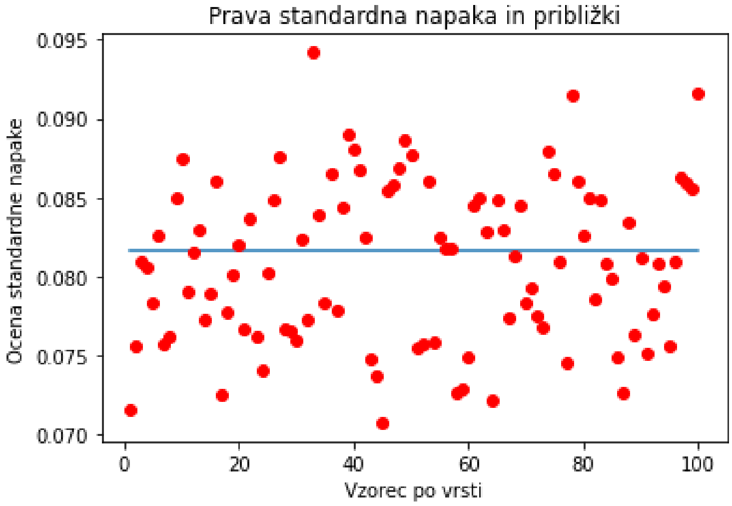
Vzemimo še 99 vzorcev populacije velikosti 200. Določimo 95% intervale zaupanja. Glede na to, da imamo skupaj 100 vzorcev, pričakujemo, da bo približno 95 intervalov zaupanja pokrilo populacijsko povprečje ($\mu = 0.94793$). Vse skupaj ponazorimo z grafom.



Ugotovimo, da 95 intervalov pokrije populacijsko povprečje, kar je tako, kot smo pričakovali.

e)

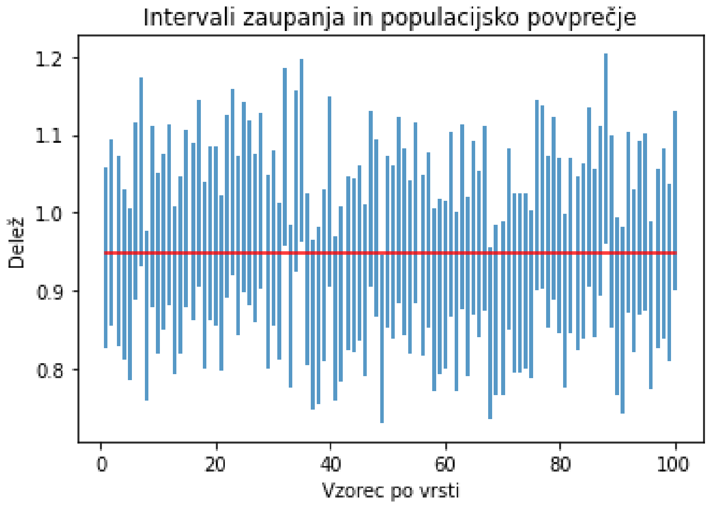
Za teh 99 vzorcev izračunamo še standardni odklon za vsakega posebej. Za cenilko standardnega odklona vzamemo isto, kot smo jo vzeli za standardno napako v prvem vzorcu; standardni odklon in standardna napaka sta namreč ista. Skupaj s pravo standardno napako rezultate prikažemo z grafom.



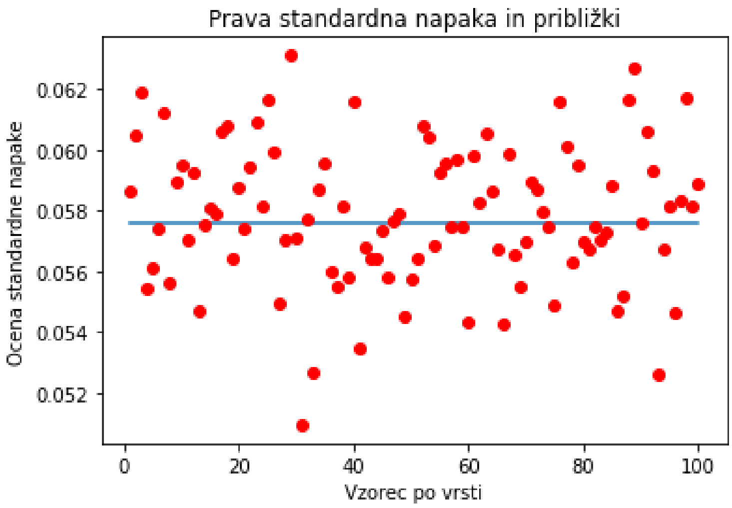
Največji vzorčni standardni odklon izmed stotih vzorcev je enak 0.094196, najmanjši pa 0.070726; standardni odkloni se torej nahajajo na območju širine 0.023469. Povprečje dobljenih standardnih odklonov je 0.080816, relativna napaka od prave standardne napake pa je enaka 1.010%, kar je po mojem mnenju kar dober približek pravi standardni napaki.

f)

Sedaj vzamemo 100 vzorcev populacije velikosti 400. Za vsak vzorec izračunamo interval zaupanja in standardni odklon. Ker imamo 95% interval zaupanja, spet pričakujemo, da bo približno 95 intervalov pokrilo populacijsko povprečje.



Sedaj imamo 96 takih intervalov zaupanja, ki pokrijejo populacijsko povprečje, kar je tudi tako, kot smo pričakovali. Opazimo tudi, da so velikosti intervalov sedaj manjše kot pri vzorcih velikosti 200.
Poglejmo si še graf z ocenjenimi standardnimi odkloni.



Največji ocenjeni standardni odklon je velikosti 0.063122, najmanjši pa 0.050939. Vidimo, da sta ti dve vrednosti še kar manjši od tistih dveh, izračunanih za vzorce velikosti 200. Razlika se opazi tudi pri širini območja ocenjenih standardnih odklonov; to je velikosti 0.012183, kar je za dvakrat manjše od prej izračunane širine. Povprečje dobljenih standardnih odklonov je 0.057846, relativna napaka od prave standardne napake pa je enaka 0.4330%. Dobimo še boljši približek prave standardne napake kot pri vzorcih velikosti 200.

Druga naloga

a)

V datoteki *TempPulz* se nahajajo podatki o temperaturi 65 moških in 65 žensk v Fahrenheitovih stopinjah (°F). Najprej ocenimo povprečje temperature tako moških kot žensk. Za cenilko vzamemo cenilko, ki jo ponavadi uporabimo za ocenjevanja povprečja:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{65}\sum_{i=1}^{65} X_i, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{65}\sum_{i=1}^{65} Y_i$$

Povprečje telesne temperature moških ocenimo z $\hat{\mu}_1 = 98.10462°\text{F} = 36.72479°\text{C}$, povprečje telesne temperature žensk pa z $\hat{\mu}_1 = 98.39385°\text{F} = 36.88547°\text{C}$.
Oceniti moramo še standardni odklon telesnih temperatur, tako žensk kot moških. Na predavanjih smo povedali, da za cenilko standardnega odklona, ko vemo, da imamo opravka z normalno porazdelitvijo, vzamemo

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2}.$$

Torej za naši cenilki standardnega odklona vzamemo

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{65}(X_i - \hat{\mu}_1)^2}, \qquad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{65}(Y_i - \hat{\mu}_2)^2}.$$

Izračunamo, da je standardni odklon moških telesnih temperatur ocenjen z $\hat{\sigma}_1 = 0.69876°\text{F} = 0.38820°\text{C}$, ženskih pa z $\hat{\sigma}_2 = 0.74349°\text{F} = 0.41305°\text{C}$.

b)

Sedaj poizkusimo določiti intervale zaupanja za povprečji iz prejšnje točke. Izračunali bomo aproksimativni in eksaktni interval zaupanja. Na predavanjih smo povedali, da je aproksimativni interval zaupanja oblike

$$\Big(\hat{\mu} - \widehat{SE}_+\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}), \quad \hat{\mu} + \widehat{SE}_+\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\Big),$$

kjer je Φ^{-1} inverz komulativne funkcije normalne porazdelitve, $\widehat{SE}$ pa je srednja kvadratična napaka, definirana kot

$$\widehat{SE}_+ = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}.$$

Ker imamo opravka z 95% intervali zaupanja, bo stopnja tveganja enaka $\alpha = 0.05$. Aproksimativni interval zaupanja telesne temperature moških je tako enak $\hat{\mu}_1 \in (97.93475°\text{F}, 98.27449°\text{F}) = (36.63041°\text{C}, 36.81916°\text{C})$, pri ženskih telesnih temperaturah pa je enak $\hat{\mu}_2 \in (98.21310°\text{F}, 98.57459°\text{F}) = (36.78506°\text{C}, 36.98588°\text{C})$.
Eksaktni interval zaupanja je oblike

$$\Big(\hat{\mu} - \widehat{SE}_+ \cdot F^{-1}_{Student(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2}), \quad \hat{\mu} + \widehat{SE}_+ \cdot F^{-1}_{Student(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})\Big),$$

kjer je $F^{-1}_{Student(n-1)}$ inverz komulativne funkcije studentove porazdelitve z $n-1$ prostostnimi stopnjami.
Dobimo, da je eksaktni interval moških telesnih temperatur enak
$\hat{\mu}_1 \in$ (97.93147°F, 98.27776°F) $= (36.62860°C, 36.82098°C)$, pri ženskih telesnih temperaturah pa je enak $\hat{\mu}_2 \in (98.20962°F, 98.57807°F) =$ (36.78312°C, 36.98782°C).

c)

Preizkusite domnevo, da imajo moški in ženske v povprečju enako telesno temperaturo.
Sedaj bomo preizkusili domnevo, da imajo moški in ženske v povprečju enako telesno temperaturo. Za ničelno domnevo H_0 bomo vzeli $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Privzeli smo, da sta temperaturi pri moških in ženskah porazdeljeni normalno, torej je

$$\hat{\mu_1} \sim N\Big(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{65}\Big) \quad \text{in} \quad \hat{\mu_2} \sim N\Big(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{65}\Big)$$

.
Sledi, da je

$$\hat{\mu_1} - \hat{\mu_2} \sim N\Big(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{65}\Big),$$

oziroma

$$\frac{(\hat{\mu_1} - \hat{\mu_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{65}}} \sim N\Big(0, 1\Big).$$

Težava je v tem, da σ_1 in σ_2 ne poznamo, poznamo pa približka izračunana v prvi točki: $\hat{\sigma_1}$ $\hat{\sigma_2}$. Na predavanjih smo povedali, da lahko imenovalec zamenjamo s približkom $\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2}{65}}$, vendar moramo normalno porazdelitev $N(0,1)$ zamenjati s Studentovo porazdelitvijo z $n-1$ prostostnimi stopnjami ($Student(n-1)$). Tako imamo test T;

$$T = \frac{(\hat{\mu_1} - \hat{\mu_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2}{65}}} \sim Student(64)$$

.
Če upoštevamo ničelno domnevo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, je

$$T = \frac{(\hat{\mu_1} - \hat{\mu_2})}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2}{65}}}.$$

Ker smo povprečji in standardna odklona ocenili že pri prvi točki, lahko izračunamo vrednost testa T:

$$T = -2.28543, \qquad |T| = 2.28543.$$

Hipotezo bomo preverili pri stopnjah tveganja $\alpha = 0.05$ in $\alpha = 0.01$. Ničelno domnevo bomo zavrnili, če bo

$$|T| \geq F^{-1}_{Student(64)}(1 - \frac{\alpha}{2}).$$

Pri $\alpha = 0.05$ bomo imeli $|T| = 2.28543 \geq 1.99773$, tako da tu ničelno domnevo zavrnemo. Za $\alpha = 0.01$ pa dobimo, da je $|T| = 2.28543 < 2.65485$, torej tu domnevo sprejmemo. Ker iz meritev vidimo, da bo kvečjemu telesna temperatura žensk v povprečju višja od moških, bomo naredili še enostranski test. Ničelno domnevo bomo zavrnili, če bo

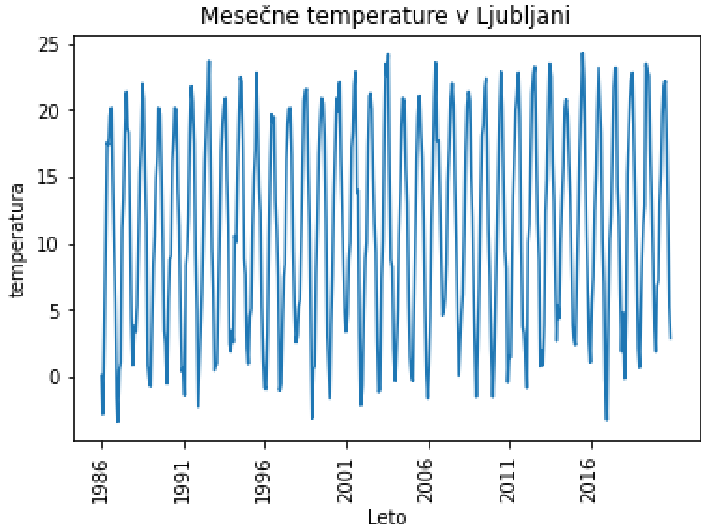
$$T \leq -F^{-1}_{Student(64)}(1 - \alpha) = F^{-1}_{Student(64)}(\alpha).$$

Za $\alpha = 0.05$ izračunamo, da je $T = -2.28543 \leq -1.66901$, torej ničelno domnevo zavrnemo. Pri $\alpha = 0.01$ dobimo, da je $T = -2.28543 > -2.38604$, tako da ničelno domnevo sprejmemo.

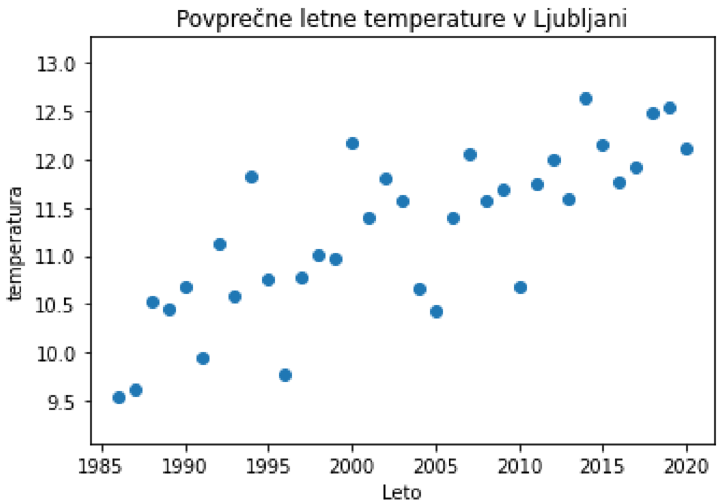
Tretja naloga

a)

V datoteki Temp_LJ smo dobili podatke o mesečnih temperaturah izmerjenih v Ljubljani od leta 1986 do leta 2020. Najprej si bomo za predstavo narisali graf iz danih podatkov:



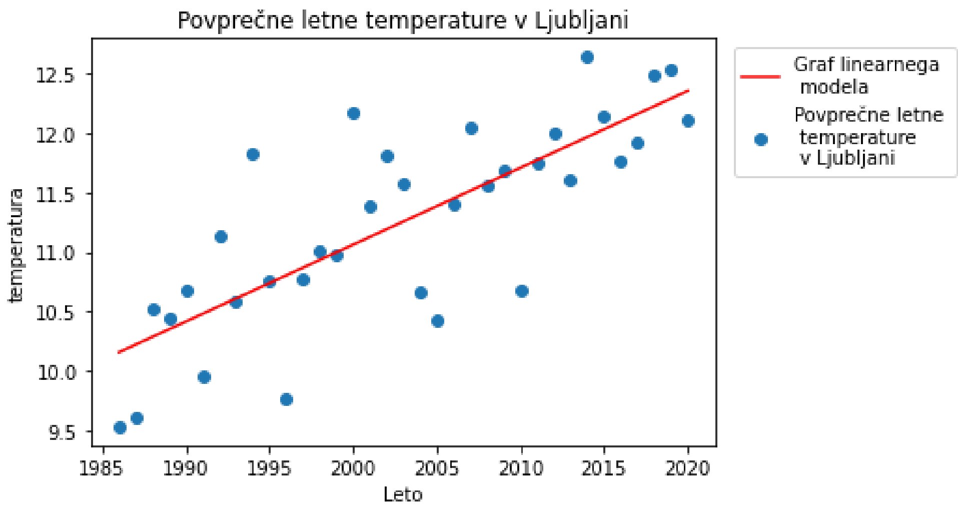
Vidimo, da graf izgleda nekako tako, kot pravi model A: graf kot celota se z rahlim naklonom linearno dviga, zraven pa vsako leto graf 'sinusno' zaniha. Za vsako leto izračunajmo povprečno temperaturo in si poglejmo, kako bo to izgledalo na grafu.



Vidimo, da se povprečne letne temperature gibljejo okoli neke premice, ki se z rahlim naklonom dviga. Po metodi najmanjših kvadratov izračunajmo, katera je premica, ki se najbolj prilega. Za to bomo potrebovali knjižnico *np.linalg*, iz katere bomo uporabili funkcijo *l*stsq() (least squares). Uporabili bomo linearni model

$$Y_i = a \cdot i + b + \epsilon_i, \quad i = 1986, 1987, \ldots, 2020,$$

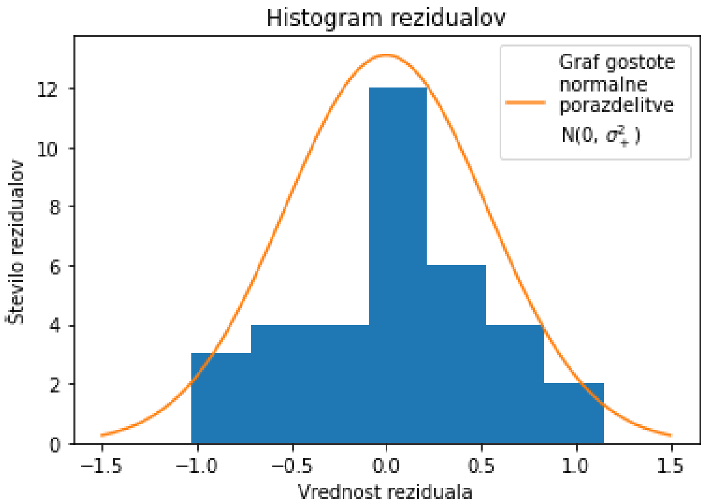
kjer so ϵ_i napake oz šumi, ki naj bi bili porazdeljeni normalno ($\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$). Kot rezultat dobimo koeficienta $a = 0.064636$ in $b = -118.20895$, ki nama podata linearno funkcijo $\hat{Y}_i = 0.064636 \cdot i - 118.20895$.



Iz slike ocenimo, da se premica kar dobro prilega letnim povprečnim temperaturam in da odstopanja niso prevelika. Funkcija $l$stsq nam poleg koeficientov vrne tudi vrednost RSS $= \sum \hat{\epsilon}_i$, kjer imamo reziduale $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$. Če poznamo RSS, znamo oceniti standardni odklon za slučajno spremenljivko ϵ_i. Na predavanjih smo povedali, da je ocena

$$\hat{\sigma}_+^2 = \frac{\text{RSS}}{n-p},$$

kjer je n število meritev, p pa število iskanih parametrov (v tem primeru $n = 35$, $p = 2$). Izračunamo, da je $\hat{\sigma}_+ = 0.53218$. Predpostavljamo tudi, da so si slučajne spremenljivke $\epsilon_i, i = 1, 2, \ldots 35$ med seboj neodvisne. Iz tega predpostavljamo, da ko jih bomo predstavili v histogramu, bodo po centralnem limitnem izreku zavzeli obliko normalne porazdelitve s standardnim odklonom $\hat{\sigma}_+$.



Sicer imamo dokaj malo 'meritev', vendar lahko vidimo, da stolpci zavzamejo približno obliko gostote normalne porazdelitve z ocenjenim standardnim odklonom $\hat{\sigma}_+$.

Vzemimo sedaj model A, ki nam ga podaja naloga:

$$Y_{ij} = \beta_1 \cdot i + \beta_2 + \beta_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi j}{12}\right) + \beta_4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi j}{12}\right) + \epsilon_{ij},$$

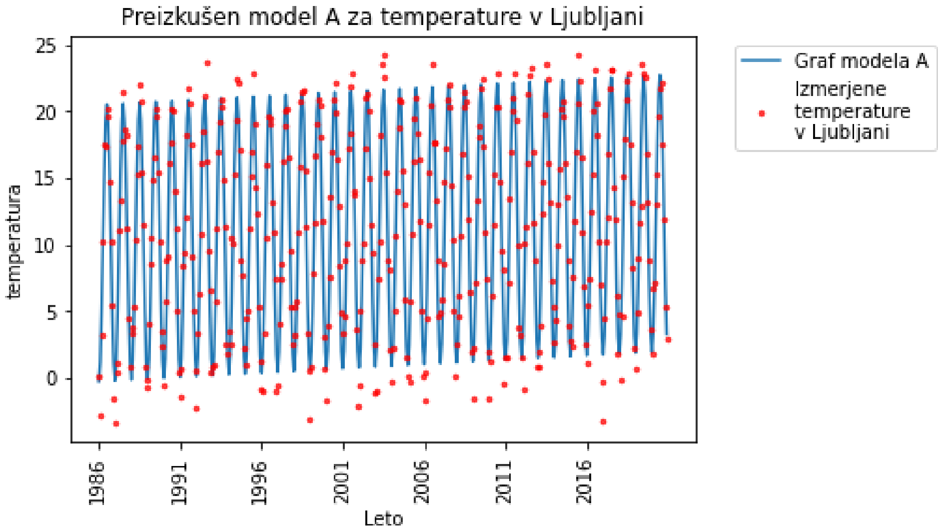
kjer je $i = 1986, \ldots, 2020$ in $j = 1, 2, \ldots, 12$. Indeks i torej pomeni leto, indeks j pa mesec. Spremenljivko za zaporedni mesec imamo tako v funkciji sinus in cosinus, perioda pa je 12 mesecev. Načeloma bi lahko vzeli tudi samo sinus z nekim faznim zamikom ($\beta_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi j}{12} + \delta\right)$), vendar potem ne bi imeli linearne regresije in ne bi znali izračunati parametrov po metodi najmanjših kvadratov; parameter δ bi nastopal znotraj nelinearne funkcije. Linearno regresijo lahko zapišemo v splošni matrični obliki

$$Y = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

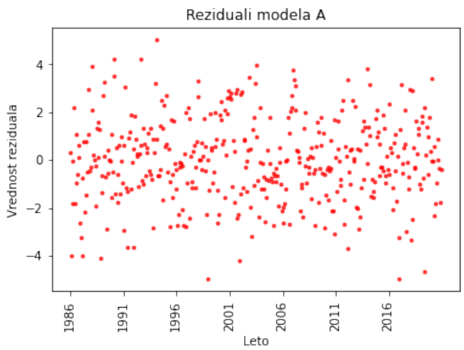
kjer je $\boldsymbol{\beta}$ neznan vektor koeficientov (pri nas $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$), Y opazljiv slučajni vektor, $\boldsymbol{\epsilon}$ slučajni vektor šumov, X pa konstantna matrika, sestavljena iz izmerjenih podatkov. Pri nas bo izgledala takole

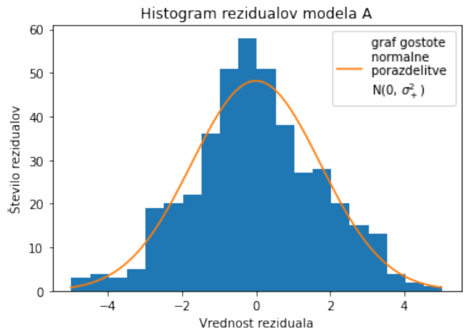
$$X^T = \begin{pmatrix} 1986 & 1986 & \ldots & 1986 & 1987 & \ldots & 2020 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \sin(\frac{2\pi \cdot 1}{12}) & \sin(\frac{2\pi \cdot 2}{12}) & \ldots & \sin(\frac{2\pi \cdot 12}{12}) & \sin(\frac{2\pi \cdot 1}{12}) & \ldots & \sin(\frac{2\pi \cdot 12}{12}) \\ \cos(\frac{2\pi \cdot 1}{12}) & \cos(\frac{2\pi \cdot 2}{12}) & \ldots & \cos(\frac{2\pi \cdot 12}{12}) & \cos(\frac{2\pi \cdot 1}{12}) & \ldots & \cos(\frac{2\pi \cdot 12}{12}) \end{pmatrix}.$$

Po metodi najmanjših kvadratov dobimo, da je vektor koeficientov enak $\beta = [0.064636, -118.20895, -5.12135, -9.04180]$. Opazimo, da sta prva dva koeficienta ista kot pri linearnem modelu. Poglejmo si, kako stvar izgleda na sliki.



Sicer ne moremo prav dobro reči, vendar se nam zdi, da se model kar dobro prilega izmerjenim temperaturam. Spet ocenimo standardni odklon, tu znaša $\hat{\sigma}_+ = 1.73922$, kar je dosti manj kot pri linearnem modelu. Poglejmo si, kako izgledajo reziduali in histogram rezidualov, na katerega narišemo še graf gostote normalne porazdelitve z varianco $\hat{\sigma}_+^2$.





Vidimo, da se histogram rezidualov modela A dokaj lepo prilega ustrezni normalni porazdelitvi. Navodilo naloge nam pove, da model B vključuje linearni trend in spreminjanje temperature za vsak mesec posebej in da je model B širši od modela A. Torej je model linearno odvisen od zaporednega leta in z nekimi dodatnimi funkcijami odvisen od zaporednega meseca, od prvega pa vse do 420. meseca.

$$Y_{ij} = \beta_1 \cdot i + \beta_2 + \boldsymbol{\beta} \cdot G(j) + \epsilon_{ij}, \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_3, \ldots, \beta_p]$$

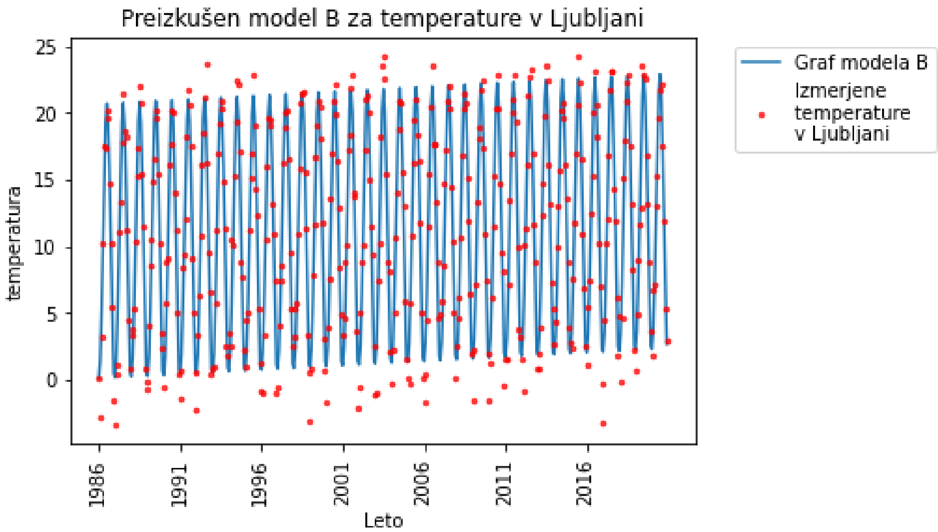
Model B mora biti širši od modela A, torej mora vsebovati sinusne in cosinusne člene:

$$Y_{ij} = \beta_1 \cdot i + \beta_2 + \beta_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi j}{12}\right) + \beta_4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi j}{12}\right) + \boldsymbol{\beta} \cdot G(j) + \epsilon_{ij}, \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_5, \ldots, \beta_p]$$

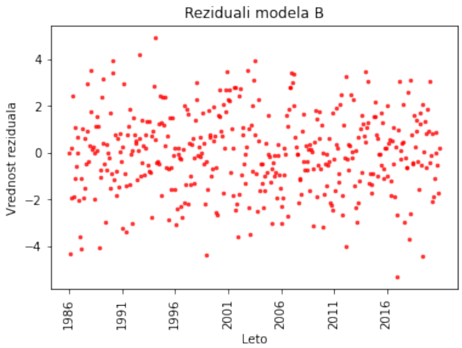
Določimo, da je $G(j) = [j, j^2]$. Torej bomo imeli

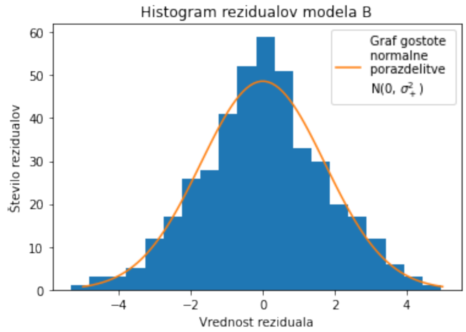
$$Y_{ij} = \beta_1 \cdot i + \beta_2 + \beta_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi j}{12}\right) + \beta_4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi j}{12}\right) + \beta_5 \cdot j + \beta_6 \cdot j^2 + \epsilon_{ij}.$$

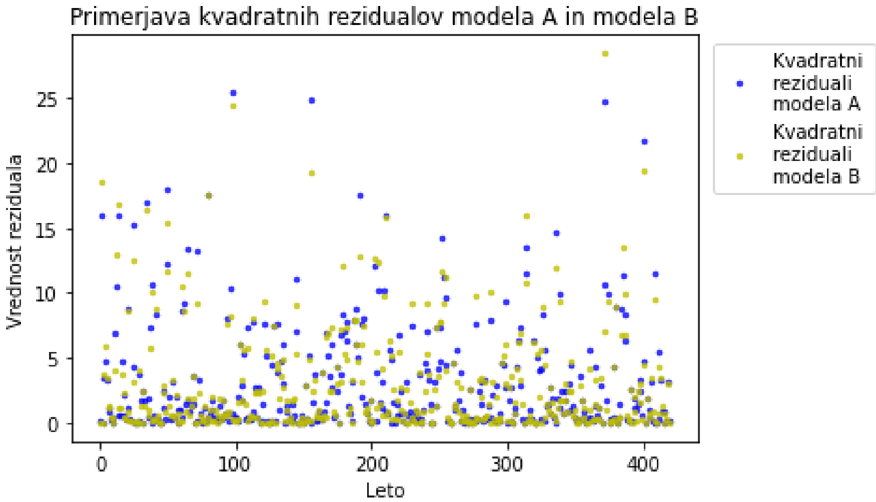
Po metodi najmanjših kvadratov določimo, da je $\boldsymbol{\beta} = [1.35754, -2685.209, -5.52345, -8.93405, -0.04750, -0.06024]$.



Model se na pogled dobro prilega. Izračunamo, da je standardni odklon pri tem modelu ocenjen z $\hat{\sigma}_+ = 1.72405$.
Spet vidimo, da histogram rezidualov zavzame obliko gostote normalne porazdelitve z ocenjeno varianco. Zraven primerjajmo še kvadratne reziduale obeh modelov.







Vidimo, da model A ne odstopa preveč glede rezidualov, na pogled izgleda, da imata modela podobno porazdelitev kvadratnih rezidualov. Sedaj pa preizkusimo model A znotraj modela B. Uporabili bomo Fisherjev test, ki smo ga izpeljali na predavanjih. Pri tem testu imamo vrednost F, ki se jo izračuna na sledeč način:

$$F = \frac{\frac{\mathrm{RSS}_A - \mathrm{RSS}_B}{p-q}}{\frac{\mathrm{RSS}_B}{n-p}}.$$

Tu je RSS_A vsota kvadratov rezidualov modela A, RSS_B vsota kvadratov rezidualov B, p število iskanih koeficientov v modelu B ($p = 6$), q število koeficientov v modelu A ($q = 4$), n pa število meritev $n = 420$. Ker je model B širši od A in ima več koeficientov kot model A, se bo lahko bolje prilegal meritvam oziroma vsota kvadratnih rezidualov bo manjša, se pravi $\mathrm{RSS}_A \geq \mathrm{RSS}_B$. Izračunamo, da je $\mathrm{RSS}_A = 1258.35895$ in $\mathrm{RSS}_B = 1230.55448$, torej neenakost res drži. Fisherjev test deluje tako, da najprej postavimo ničelno domnevo $H_0 : \beta_5 = \beta_6 = 0$ in alternativno domnevo $H_1 : \beta_5 \neq 0$ ali $\beta_6 \neq 0$. Ničelno domnevo H_0 pri stopnji tveganja α zavrnemo, če je

$$F \geq F^{-1}_{Fischer(p-q,n-p)}(1-\alpha),$$

sicer pa jo sprejmemo. Izračunamo, da je $F = 4.67718$. Pri stopnji tveganja $\alpha = 0.05$ je desna stran v testu enaka 19.49331, pri stopnji tveganja $\alpha = 0.01$ pa je desna stran enaka 99.49675. Torej v obeh stopnji tveganja sprejmemo ničelno domnevo, sprejmemo model A znotraj modela B.

b)

Pri modeliranju je nevarno privzeti preširok model: lahko bi recimo postavili model, po katerem je temperatura vsak mesec drugačna, neidvisno od ostalih mesecev, a tak model bi bil neuporaben za napovedovanje. Akaikejeva informacija nam pomaga poiskati optimalni model – izberemo tistega, za katerega je le-ta najmanjša. Akaikejeva informacija je sicer definirana z verjetjem, a pri linearni regresiji in Gaussovem modelu je le-ta ekvivalentna naslednji modifikaciji:

$$\mathrm{AIC} := 2m + n \ln \mathrm{RSS},$$

kjer je m število parametrov, n pa je število opažanj. Izračunajmo akaikejevo informacijo za naša dva modela. Za model A dobimo $\mathrm{AIC}_A = 3005.77677$, za model B pa $\mathrm{AIC}_B = 3000.39246$. Sklepamo, da za napovedovanje raje uporabimo model B.

Literatura

[1] J. A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis, Third Edition*, Thomson Brooks/Cole, Duxbury, 2007