

Rifrazione in un prisma e lunghezza d'onda

Relazione del gruppo G9 - Luca Giacomelli, Donato Romito e Francesca Sartori

Scopi dell'esperienza

Sfruttare la separazione della luce di diverse lunghezze d'onda di una lampada al cadmio tramite rifrazione attraverso un prisma per studiare la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda della luce rifratta e verificare la validità della legge di Cauchy. Studiare l'andamento dell'angolo di deviazione del prisma al variare dell'angolo di incidenza per la luce di un'arbitraria lunghezza d'onda tra quelle emesse dalla lampada. Misurare le lunghezze d'onda emesse dalla lampada al cadmio utilizzando un reticolo di diffrazione.

Materiale a disposizione

- Lampada spettrale al cadmio
- Collimatore
- Prisma ottico con angolo al vertice $\alpha = \frac{\pi}{3}$
- Supporto girevole con goniometro di risoluzione $1'^1$
- Cannocchiale con crocifilo fissato al goniometro
- Reticolo di diffrazione di 80 righe/mm

Procedure di misura

L'apparato sperimentale era costituito da una lampada la cui luce finiva dentro il collimatore, il quale la indirizzava verso il prisma. Il prisma poteva ruotare e così anche il cannocchiale, entrambi permettendo la misura dell'angolo di rotazione. Inizialmente abbiamo misurato l'*angolo zero*, cioè l'angolo letto sul goniometro quando, senza nulla tra il collimatore e il cannocchiale, l'unica linea luminosa (cioè la luce della lampada senza separazione delle lunghezze d'onda) risultava allineata con il crocifilo. Questo valore è stato quello di riferimento per tutte le successive misure d'angolo.

Successivamente abbiamo posto sul supporto girevole il prisma e abbiamo ruotato il cannocchiale fino a raggiungere la zona in cui veniva rifratta la luce. Abbiamo quindi osservato 9 linee di colori diversi, dal viola al rosso, che costituiscono lo spettro di emissione della lampada. Le linee erano una viola, due blu, due verdi di cui una molto flebile, una gialla molto flebile e tre rosse molto vicine di cui una di intensità predominante. La separazione dei diversi colori è una prima prova della dipendenza dell'indice di rifrazione, in questo caso del vetro, dalla lunghezza d'onda della luce.

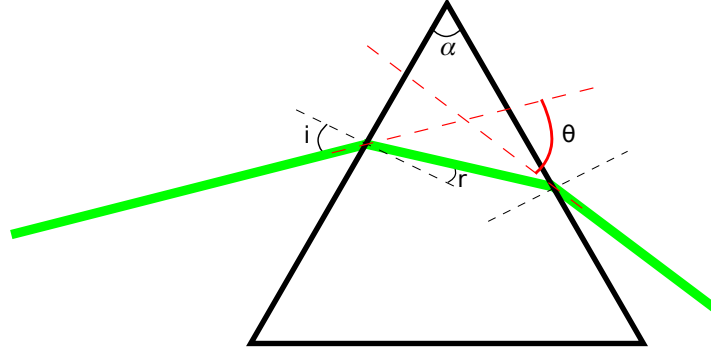
Per ogni linea dello spettro abbiamo misurato l'angolo rispetto all'angolo zero per cui, ruotando il prisma sempre nella stessa direzione, si ha un'inversione dello spostamento della linea di spettro. Questo è stato effettuato ruotando il prisma fino a raggiungere il punto di inversione del moto per una data linea e allineando il crocifilo con la linea in questione e in seguito assicurandoci che essa non superasse il crocifilo stesso per ulteriori piccole rotazioni del prisma. Dopo ogni allineamento abbiamo letto sulla scala del goniometro l'angolo corrispondente. L'angolo così misurato è detto *angolo di deviazione minima*.

Una volta terminate queste misure abbiamo scelto una linea dello spettro per misurare l'angolo di deviazione in funzione dell'angolo di incidenza. Abbiamo scelto la riga verde poichè risultava ben visibile e poco confondibile con altre linee. Prima di tutto abbiamo ruotato il prisma fino a tornare nella configurazione corrispondente all'angolo di deviazione minima per il verde e abbiamo spostato il cannocchiale fino a poter osservare e allineare con il crocifilo il raggio riflesso dalla prima faccia del prisma incontrata dal raggio collimato. Abbiamo dunque letto l'angolo indicato dal goniometro in questa configurazione. In seguito abbiamo posizionato il cannocchiale ad un angolo di circa tre gradi superiore a quello appena misurato e abbiamo ruotato il prisma fino a che la linea corrispondente al raggio riflesso non risultava allineata con il crocifilo (aggiustando leggermente anche la posizione del cannocchiale). Abbiamo così ottenuto una variazione ben definita dell'angolo di incidenza. Poi, lasciando fermo il prisma, abbiamo spostato il cannocchiale per misurare l'angolo di deviazione corrispondente a quel dato angolo di incidenza. Abbiamo ripetuto questa procedura più volte variando l'angolo di tre o quattro gradi alla volta ottenendo 19 misure, rispettivamente 9 per angoli di incidenza più piccoli di quello corrispondente all'angolo di deviazione minima e 10 per angoli maggiori.

¹La reale risoluzione dello strumento è 30 secondi di grado, abbiamo considerato solamente i primi dato che le nostre misure non sono probabilmente precise oltre tale ordine di grandezza

Infine per misurare la lunghezza d'onda delle componenti maggiormente visibili della luce abbiamo messo, al posto del prisma, un reticolo di diffrazione. Abbiamo prima di tutto misurato l'angolo zero corrispondente al primo massimo della figura di interferenza, cioè alla linea che risultava non essere scomposta nei suoi colori. Abbiamo poi misurato gli angoli corrispondenti alle diverse linee che si potevano osservare al primo ordine di massimo e quelli corrispondenti a un paio di righe al secondo ordine.

Figura 1:



In verde il raggio luminoso, in rosso i prolungamenti virtuali dei raggi. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ è l'angolo al vertice del prisma, i è l'angolo di incidenza del raggio, θ è l'angolo di deviazione e r è l'angolo di rifrazione interno.

Analisi dati

Legge di Cauchy

Come già detto quello misurato nella prima parte delle misure è l'*angolo di deviazione minima* che corrisponde ad una posizione del prisma rispetto al raggio in entrata tale da minimizzare l'angolo θ tra la reale direzione di propagazione del raggio di luce e quella che si avrebbe in assenza del prisma (vedi Figura 1). Per tale angolo, che chiameremo θ_M , vale la seguente relazione che permette di calcolare l'indice di rifrazione del prisma e della lunghezza d'onda in questione

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \theta_M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Sfruttandola abbiamo calcolato il valore dell'indice di rifrazione per ogni colore, che riportiamo in Tabella 1 a conclusione di questa sezione. Ad ognuno di questi abbiamo associato un valore di lunghezza d'onda secondo valori tabulati. Da questi dati abbiamo cercato di ricavare i parametri A , B e C della legge di Cauchy, che sapevamo avere la forma

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

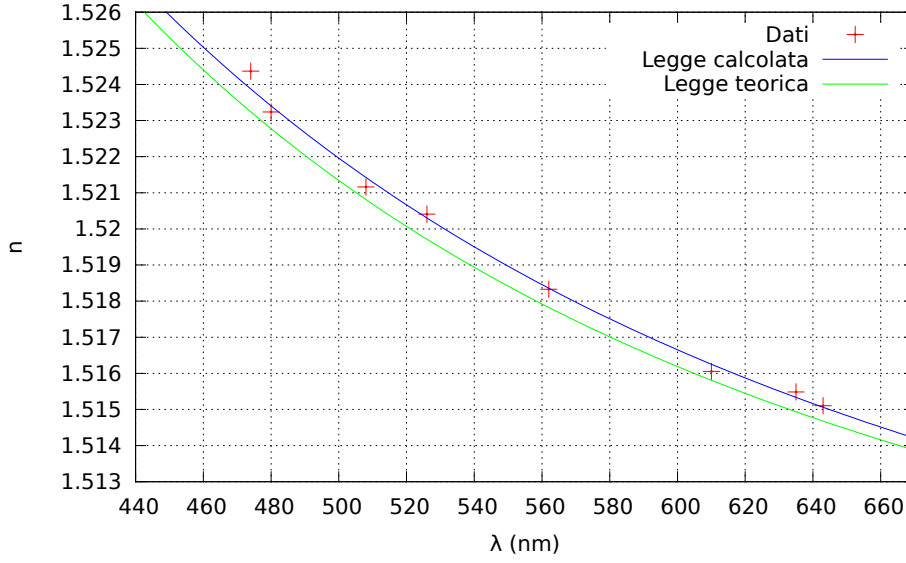
Poichè il software da noi usato per il fit dei dati è risultato avere dei problemi con una legge di questa forma abbiamo calcolato i valori $\xi = \frac{1}{\lambda^2}$ e abbiamo calcolato il fit tramite la legge polinomiale $n = A + B\xi + C\xi^2$. I parametri trovati sono stati

$$A = 1.504 \pm 0.005 \quad B = (4726 \pm 100)nm^2 \quad C = (-57000000 \pm 2000000)nm^4$$

In Figura 2 riportiamo un grafico con i nostri dati, la legge da noi trovata e la legge fornitaci dai professori in laboratorio che ha come parametri

$$A^{(teo)} = 1.5045 \pm 0.0002 \quad B^{(teo)} = (4205 \pm 80)nm^2 \quad C^{(teo)} = (1253108)nm^4$$

Figura 2:



In rosso i dati (di cui abbiamo ommesso le barre d'errore per motivi di visibilità), in blu la legge da noi calcolata e in verde quella teorica fornitaci.

Come si può vedere i parametri, ad eccezione del primo, non sono compatibili con quelli fornitici. Visivamente la nostra legge descrive abbastanza bene i dati e risulta simile nella forma a quella fornitaci, anche se traslata in verticale. Questo potrebbe essere dovuto a un qualche errore sistematico in fase di misura, ad esempio nell'allineamento del crocifilo con le linee dato che i due non risultavano paralleli. Tuttavia i risultati mostrano che una legge della forma di quella di Cauchy descrive effettivamente l'andamento dell'indice di rifrazione con la lunghezza d'onda.

Tabella 1: Dati sperimentali dell'indice di rifrazione misurato in funzione della lunghezza d'onda.

$\lambda \pm \delta\lambda$ (nm)	$n \pm \delta n$	$\lambda \pm \delta\lambda$ (nm)	$n \pm \delta n$
441 \pm 1	1.5266 \pm 0.0003	562 \pm 1	1.5183 \pm 0.0003
474 \pm 1	1.5244 \pm 0.0003	610 \pm 1	1.5161 \pm 0.0003
480 \pm 1	1.5232 \pm 0.0003	635 \pm 1	1.5155 \pm 0.0003
508 \pm 1	1.5212 \pm 0.0003	643 \pm 1	1.5151 \pm 0.0003
526 \pm 1	1.5204 \pm 0.0003		

Angolo di deviazione

I dati dell'angolo di deviazione θ raccolti al variare dell'angolo di incidenza i ci hanno permesso di verificare numericamente che l'angolo di deviazione minima θ_M oggetto delle misure precedenti è effettivamente il valore più piccolo che θ può assumere per una data lunghezza d'onda. Questo si può notare anche visivamente dal grafico riportato in Figura 3 in cui sono riportati i valori dell'angolo di deviazione in funzione di quello di incidenza, infatti il minimo centrale corrisponde a $\theta_M^{(verde)}$.

Dalla teoria sappiamo che l'andamento di tale angolo di deviazione è dato dalla relazione

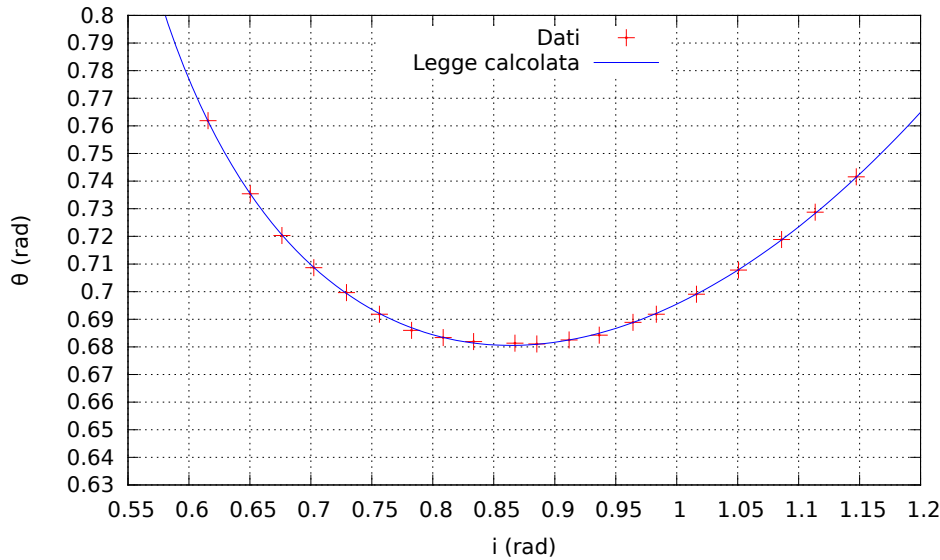
$$\theta = a \sin[n \cdot \sin(r)] + a \sin[n \cdot \sin(\alpha - r)] - \alpha$$

dove r è l'angolo interno di deviazione definito in Figura 1, α è l'angolo al vertice del prisma e n è l'indice di rifrazione. Inoltre l'angolo r è legato all'angolo di incidenza tramite la legge di Snell $\sin(i) = n \cdot \sin(r)$, dunque si ottiene la relazione che lega θ e i

$$\theta = i + a \sin \left[n \cdot \sin \left(\alpha - a \sin \left(\frac{\sin(i)}{n} \right) \right) \right] - \alpha$$

Per verificare se tale legge descrivesse bene i nostri dati e se le nostre misure fossero state eseguite con sufficiente precisione abbiamo effettuato un fit dei dati con unico parametro n . Abbiamo ottenuto il valore $n = 1.5207 \pm 0.0001$ e la legge con tale parametro è riportata sempre in Figura 3.

Figura 3:



Angolo di deviazione in funzione dell'angolo di incidenza e legge calcolata tramite fit

Come si può vedere i dati sono descritti molto bene dalla legge. Abbiamo poi confrontato il valore così ottenuto con quello ottenuto tramite le misurazioni dell'angolo di deviazione minima che, per tale linea verde, era risultato essere $n' = 1.5204 \pm 0.0004$. Si può osservare come i due siano compatibili, fatto che conferma che le nostre misure sono quantomeno tra loro coerenti. Inoltre entrambi i valori risultano credibili, infatti l'indice di rifrazione del vetro è solitamente compreso tra 1.4 e 1.9.

Lunghezze d'onda

Dalla teoria dell'ottica ondulatoria è noto che i fenomeni di diffrazione relativi a luce non monocromatica sono caratterizzati dalla separazione delle lunghezze d'onda. Esse risultano essere coincidenti nel massimo centrale della figura di diffrazione per poi mostrare massimi di ordini successivi tra di loro sfasati. Infatti ogni componente cromatica della luce segue autonomamente la legge

$$d \cdot \sin(\varphi) = m\lambda$$

dove d è il passo del reticolo di diffrazione, φ è la distanza angolare del massimo in questione da quello centrale, m è l'ordine di massimo e λ è la lunghezza d'onda della singola componente. Abbiamo applicato questa relazione a tutte le linee di spettro considerate per ricavare la lunghezza d'onda di queste. Di seguito in Tabella 1 riportiamo i valori di lunghezza d'onda così trovati e anche quelli tabulati per la nostra lampada al cadmio.

Tabella 2: Dati raccolti

Colore	Ordine di massimo	$\lambda_{mis} \pm \delta\lambda$ (nm)	$\lambda_{teo} \pm \delta\lambda$ (nm)
Viola	1	444 ± 7	441 ± 1
Azzurra 1	1	465 ± 7	467 ± 1
Azzurra 2	1	473 ± 7	474 ± 1
Verde	1	505 ± 7	508 ± 1
Rosso	1	636 ± 7	635 ± 1
Verde	2	496 ± 5	508 ± 1
Rosso	2	637 ± 5	643 ± 1

Come si può vedere i valori da noi trovati sono compatibili con quelli tabulati, tranne quelli relativi alle linee di massimo di secondo ordine, i quali risultano comunque compatibili entro 3 sigma.