第一章 集合与实数集

1.1 集合及其运算

- De Morgan 公式
  - $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
  - $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c=\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c,\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c=\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$
- 对称差
  - $A\Delta B=(A-b)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$
- 笛卡尔积（直积）
  - $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$
  - $A\times B\neq B\times A$
  - 任意多个集合也可以定义笛卡尔积 $\prod\limits_{k=1}^{n}X_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_k\in X_k,1\leqslant k\leqslant n\}$

1.2 集合序列的极限

- 极限
  - 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一列集合，定义$\{A_n\}$的 $\begin{cases}上极限为\limsup\limits_{n\to\infty}A_n=\{x\in X:x属于无穷多个A_n中\}\\下极限为\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\{x\in X:\exists n_0,s.t.\theta_n>0,x\in A_n\}\end{cases}$
  - $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$【下极限包含在上极限之中】，若这两个极限相等，则$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$极限存在
  - $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k\right);\limsup\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\right)$
- 单调
  - 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的一列集合，$\begin{cases}若A_n\subseteq A_{n+1}，单调递增\\若A_n\supseteq A_{n+1}，单调递减\end{cases}$
  - 单调收敛定理：单调 $\to$ 极限存在
    - 若递增，$\lim\limits_{n=1}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$
    - 若递减，$\lim\limits_{n=1}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$

1.3 映射

- B^A：设A,B为两个非空集合，将从A到B的【所有映射的全体】记为B^A
- 特别地，若B中仅有2个元素$(B=\{0,1\}),2^A:A\to\{0,1\}$的映射全体，(所有映成1的元素放在一起)可理解为【A中所有子集映成的集合】！
- $\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$：从$I$到$\bigcup\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$的满足条件$f(\alpha)\in X_\alpha$的映射$f$构成的集合
- **选择公理：一族非空集合的笛卡尔积一定非空**
- 若$A\subset X$，则$\mathcal{X}_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\0, & x\in X-A\end{cases}$称为集合$A$的特征函数

1.4 集合的等价、基数

势

- 等势(书上写的等价)：若在集合A，B之间存在双射，则A，B等势，$A\sim B$
- 也用$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$表示，其中$\overline{\overline{A}}$称为$A$的基数或势
- (i)若A与B的某个子集等势，则$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$
  (ii)若$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$且$\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$，则$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$
  注意：在无穷集合中$A\subsetneq B\nrightarrow\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$
- $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{2^A}}$
  $proof$：$A=\varnothing$时$0<1$显然成立：
  $A\neq\varnothing$时，一方面，集合$B=\{\{x\}:x\in A\}\subset\{A_1:A_1\subset A\}=2^A$，存在双射$A\to B:f(x)=\{x\}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{2^A}}$
  另一方面，证明$\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{2^A}}$；反证：若相等，存在双射$f:A\to 2^A$
  设$A_2=\{x\in A:x\notin f(x)\}\subset A\in 2^A$
  由于f满，$\exists x_1\in A s.t. f(x_1)=A_2$
  如果$x_1\in A_2=f(x_1)$，由A_2的定义，$x_1\notin A_2$,矛盾！
  如果$x_1\notin A_2$，由A_2的定义，$x_1\in A_2$,矛盾！
- 设$A\subset B\subset C$,且$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{C}}$，则$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}$
- $Bernstein$定理：$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$
  【双射不好构造，找不同的参照物从两个方向证明】

有限集、无限集、可数集

- 定义
  - 有限集：$\exists$正整数n，$s.t.A\sim\{1,2,\cdots,n\}$
  - 可数集：$A\sim\mathbb{N}$，元素可以排成$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$
  - （以上两者）至多可数集
  - 用势来刻画
    - $\overline{\overline{\mathbb{N}}}=\aleph_0$【书上写的$a$】
    - 若$\overline{\overline{A}}=\aleph_0$，$A$为可数集
    - 若$\overline{\overline{A}}\leqslant\aleph_0$，$A$为至多可数集(和$\mathbb{N}$的一个子集等势)
    - 若$\overline{\overline{A}}>\aleph_0$，$A$为不可数集
- 性质
  - 任一无限集必含一个可数子集(任一无穷集A，$\overline{\overline{A}}\geqslant\aleph_0$，即$\aleph_0$为最小的无穷基数)
  - 可数集
    - 可数多个可数集的并仍是可数集
      - $\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$，$\aleph_0^n=\aleph_0$
      - 至多可数个可数集的并仍是至多可数集
      - 有限多个可数集的笛卡尔积是可数集
    - $\mathbb{Q}$是可数集，即$\overline{\overline{\mathbb{Q}}}=\aleph_0$【书上写的$a$】
    - 可数集的任意无限子集是可数集
    - $\mathbb{R}$上两两互不相交的开区间至多有可数多个
      $proof$：在每个开区间中均能取出一个有理数，由区间互不相交得取出的有理数互不相同
      开区间个数 $\leqslant\overline{\overline{\mathbb{Q}}}=\aleph_0$
  - A为无限集，B是至多可数集，则$A\sim A\cup B$【无穷集合中加入一个可数集，不改变其基数】
    $proof$：$\begin{cases}A=(A-A_1)\cup A_1\\A\cup B=(A-A_1)\cup(A_1\cup B)\end{cases}$
    【构造双射的思想】从无限集里找到一个可数子集：$(0,1)\sim[0,1]=(0,1)\cup\{0,1\}$

连续统势

- 闭区间$[0,1]$是不可数集，$\overline{\overline{[0,1]}}=\aleph$【书上写的$c$】
  - 闭区间$[0,1]$是不可数集，$\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\overline{\overline{\mathbb{R}^n}}=\aleph$【书上写的$c$】
  - $\overline{\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}=\overline{\overline{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}}}=\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\aleph$
- $\aleph=2^{\aleph_0}$【书上写的$c=2^a$】
  $proof$：构造一个函数$f:2^{\mathbb{N}}\to[0,1]$，定义$f(a)$为如下的二进制小数：$f(a)=0.a_1a_2a_3\ldots=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$
  这样，每个序列a都被映射到$[0,1]$区间内的一个唯一的实数上。
  为了确保映射是一一对应的，选择排除掉那些以无限尾数1结尾的序列，因为它们与另一些序列有相同的二进制表示。
- 至多可数个具有连续统势的集合的笛卡尔积具有连续统势
  $\aleph^{\aleph_0}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0{}^2}=2^{\aleph_0}=\aleph$
- 连续统假设
  - 不存在A，$s.t.\aleph_0<\overline{\overline{A}}<\aleph$
  - 广义连续统假设：设c为一个无穷基数，则c与2^c之间不存在其他基数
- n元数列
  - 若数列$\{a_k\}_{k\geqslant1}$中的项仅由$0,1,\ldots,n-1$这n个数组成，则$\{a_k\}$称为一个n元数列
  - 又若$\{a_k\}_{k\geqslant1}$中只有有限项不为0，则$\{a_k\}$称为一个有限n元数列；不然称为无限n元数列
  - 定理：$n\geqslant2$，则n元数列的全体具有连续统势(势为$\aleph$)
    事实上，全体实数列的势为$\aleph$
    - 南开版教材的顺序先讲连续统势再引入a和c，所以很多证明都是，转化为n元数列的问题根据此定理来证明的，但是实际上可以直接用$\aleph_0$和$\aleph$的关系来计算得证。
  - 【其实直接拿$\overline{\overline{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}}=\aleph^{\aleph_0}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0{}^2}=2^{\aleph_0}=\aleph\geqslant\overline{\overline{n^{\mathbb{N}}}}\geqslant\overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}}=2^{\aleph_0}=\aleph$来说就可以了】
    上述定理证明思路为建立$(0,1]$到无限n元数列全体到一个双射：
    对于每个$x\in(0,1]$,$\exists$唯一的$k_1\in[1,n],s.t.\frac{k_1-1}{n}<x\leqslant\frac{k_1}{n}$,取$a_1=k_1-1$
    $\exists$唯一的$k_2\in[1,n],s.t.\frac{k_1-1}{n}+\frac{k_2-1}{n^2}<x\leqslant\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n^2}$,取$a_2=k_2-1$
    $\vdots$
    $\exists$唯一的$k_m\in[1,n],s.t.\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{k_i-1}{n^i}<x\leqslant\frac{k_i}{n^i}$,取$a_m=k_m-1$
    令$m\to\infty$,得$x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{n^i}$,$\{a_i\}_{i\geqslant1}$是一个无限$n$元数列
    即得到了从$(0,1]$到无限n元数列全体到一个双射$f,f(x)=\{a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots\}$
    - 所以书上这种构造双射的证明透露着浓浓的愚蠢
      但是题里还要考n元数列的内容，评价为加倍愚蠢
- 例题
  - 证明：可数集的子集全体具有连续统势【其实直接拿$2^{\aleph_0}=\aleph$来说就可以了】
    设A为$\mathbb{N}$的任一非空子集，定义$a_n=\begin{cases}1, & n\in A\\0, & n\in\mathbb{N}-A\end{cases}$
    令$f(A)=\{a_1,a_2,\ldots\},f(\varnothing)=\{0,0,\ldots\}$,$f$建立了$\mathbb{N}$的子集全体与二元数列全体的双射，
    而二元数列全体具有连续统势,则$\mathbb{N}$的子集全体具有连续统势
  - 证明：$\mathbb{R}$上所有连续函数的全体构成的集合X具有连续统势
    一方面,$\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{\{f(x)=c,c\in\mathbb{R}\}}}=\aleph$
    另一方面，连续函数由其在$\mathbb{Q}$上的取值唯一确定，$\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}}}=\aleph$

1.5 R^n中的拓扑

- 开集
  - 若$A=A^\circ$，则A为开集 $\iff\forall x\in A,\exists\varepsilon>0,s.t.\mathrm{B}(x,\varepsilon)\subset A$
  - $\mathbb{R}$与$\varnothing$都是既开又闭的
  - **任意多个开集的并都是开集**
  - 有限多个开集的交都是开集【$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$】
- 闭集
  - A是开集，A^c是闭集
  - **任意多个闭集的交都是闭集**
  - 有限多个闭集的并都是闭集【反例同上取补集】
  - A是闭集 $\iff\forall$点列$\{x_n\}_n\subset A,\{x_n\}_n$收敛，则极限$x\in A$
- 聚点
  - 聚点不一定在A中，一定能找到一个收敛于聚点的非常值点列
  - $x\in A$，x的任意邻域都包含着A中异于x的点，则称x为A的聚点
  - $\forall\varepsilon>0,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A-\{x\}\neq\varnothing$
  - $A'=\{x\in\mathbb{R}:x为A的聚点\}$叫做$A$的导集
- 闭包
  - x的任意邻域交A非空
  - A的闭包$\overline{A}=A\cup A'$
  - $\overline{A}=\{x\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\neq\varnothing\}$
  - $x\in\overline{A}\iff\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A,s.t.\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$
    当且仅当它能被表示成A中某序列的极限点
- 推论
  - A为闭集 $\iff\overline{A}=A\iff A'\subset A$
  - 若$A\subset B$,则$A^\circ\subset B^\circ;\overline{A}\subset\overline{B};A'\subset B'$
  - A°为包含在A中的最大开集；$\overline{A}$为包含着A的最小闭集
  - $A^\circ=\bigcup\{G:G\subset A,G为开集\}$；$\overline{A}=\bigcap\{F:F\subset A,F为闭集\}$
  - $A^\circ\cap B^\circ=(A\cap B)^\circ$；$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{(A\cup B)}$
- $\mathbb{R}$中的点集
  - 孤立点：$x\in A,\exists\varepsilon>0,s.t.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\{x\}$
  - $\overline{A}=A'\cup\{A的孤立点\}$
  - 完全集：【没有孤立点】的【闭集】
  - A为完全集 $\iff A=A'$
- 稠密
  - A，$B\subset\mathbb{R}$,若$\overline{A}\supset B$，则集合A在B中稠密
  - A在$\mathbb{R}$中稠密$(\overline{A}=\mathbb{R})\iff\mathbb{R}$中任意非空开集都包含$A$中的某些元素
  - 稀疏集(无处稠密集)：$A\subset\mathbb{R}$,若$\left(\overline{A}\right)^\circ=\varnothing$,则称$A$为$\mathbb{R}$中的稀疏集
    $\overline{A}$中没有内点
  - 例如：$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$,$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密，且$\mathbb{Q}$是可数集 $\Rightarrow\mathbb{Q}$是$\mathbb{R}$的【可数稠密子集】(好性质)
- 有界闭集
  - 有限覆盖定理：设A为$\mathbb{R}$中一系列有界闭集且$\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha\supset A$,则存在有限多个开集$G_{\alpha_1},\ldots,G_{\alpha_n},s.t.A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}$
  - 闭区间套定理：设$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列单减有界闭集，则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$
- $\mathbb{R}$中开集的结构
  开集 $\iff$ 开区间的并
  - 构成区间为 包含在G中的一个【极大】的开区间
  - 构成区间：$G\subset\mathbb{R}$是个开集，$(a,b)\subset G,a\notin G,b\notin G$，则称$(a,b)$是$G$的一个构成区间
  - 定理：$\mathbb{R}$中任一非空开集都可以表示成至多可数多个两两不相交的开区间之并【唯一的】
  - 推论：$\mathbb{R}$中闭集可表示为从$\mathbb{R}$中挖去至多可数多个两两不相交的开区间后剩余的集合
    (挖去的开区间叫做闭集的余区间)
  - x为闭集F的孤立点 $\iff x$是F的两个余区间的公共端点
    从而：闭集F为完全集 $\iff F$的余区间没有公共端点
- 集合上的连续函数
  - f在x_0处连续 $\iff\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap E,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
    $\iff\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$
  - 函数连续与否与其定义域是密切相关的!
    - 例1：$Dirichlet$函数：$f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\0 & ,x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$
      $f(x)$在$\mathbb{R}$中没有连续点，但$f|_{\mathbb{Q}}$就是常值函数，处处连续
    - 例2：f为E上的函数，则f在E上的孤立点处一定连续
      特别地，数列就是定义在$\mathbb{N}$上的连续函数(所有点都是孤立点)
  - f在E上连续 $\iff$ 对于E中任一开集G，$f^{-1}(G)$为E中的相对开集
    $\iff$ 对于E中任一闭集F，$f^{-1}(F)$为E中的相对闭集
    - 相对开集：若$\exists$开集$G\subset\mathbb{R},s.t.A=G\cap E$,则$A$称为$E$中的一个相对开集
      相对闭集：若$\exists$闭集$F\subset\mathbb{R},s.t.A=F\cap E$,则$A$称为$E$中的一个相对闭集
    - A在E中相对开 $\iff\forall x\in A,\exists$邻域$(a,b)\ni x,s.t.(a,b)\cap E\subset A$
      闭 $\iff\forall\{x_n\}\subset A,x_n\to x_0$,若$x_n\in E$,有$x_0\in A$
      开 $\iff E\backslash A$在E中闭
    - 例：$A=[0,\frac{1}{2}),E=[0,\frac{1}{2})\cup(1,2)$
      一方面,$\forall x\in[0,\frac{1}{2})$,$\exists$邻域$(a,b)\ni x,(a,b)\cap\left([0,\frac{1}{2})\cup(1,2)\right)\subset A$，即$A$是开集
      另一方面,$E\backslash A=(1,2)$，显然在E中也是开集，则A是闭集
      综上得，A在E中既开又闭