

推导位势积分公式：利用第二类Green公式，取 $v=1/r$

令 $v = \frac{1}{r}$, 代入Green公式，设 $B_\varepsilon(Q)$ 是以 Q 为圆心， ε 为半径小球， $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$, P 是动点， $|PQ| = r$
 则 $v = \frac{1}{r} \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon)$, 在 Ω_ε 上使用Green公式， u 仍为一般的 $C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon)$
 则 $\iiint_{\Omega_\varepsilon} \left[u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right] dx = \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$
 把这个空心小球的两部分拆开： $\iint_{\Omega_\varepsilon} \left[u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right] dx = \iint_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS$ (*)
 其中因为 $\frac{1}{r}$ 是基本解的主项，即 $\Delta c_3 \left(\frac{1}{r} \right) = \delta$, 则在 Ω_ε 中有 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \Rightarrow \iint_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dx_p = 0$, 则等式(*)左端 $= - \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta u dx$
 下考虑 $\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS : r = \varepsilon$, 则为 $- \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} u dS - \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} dS$
 由【积分中值定理】得， $\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} u dS = u(Q^*) 4\pi\varepsilon^2$, $\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} dS = \frac{\partial u}{\partial r}(\tilde{Q}) 4\pi\varepsilon^2$, 其中 $Q^*, \tilde{Q} \in \partial B_\varepsilon(Q)$
 则 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS = -4\pi u(Q)$, 此时原方程化为 $- \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx = \iint_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + 4\pi u(Q)$
 整理得到位势积分公式： $u(Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \right]$

位势积分公式($n=3$)

证明调和函数的可奇点定理：在以 A 为球心 R 为半径的小球上研究问题，构造补充定义后的函数 u_1 ，用 W 衡量两个函数的差距，手段是再构造一个 V 比较 V 和 W ，先让 $Q \rightarrow A$ ，极值原理证明 $|W| \leq V$ 在小圆环上成立，再让 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，证明在去心圆盘上成立

当 $n=2$ 时，若 $u(Q)$ 在 A 点附近调和，且 $u(Q) = o(1) \ln r(A, Q)$ ，则可补充定义，s.t. $\Delta u = 0$, $x \in B_\delta(A)$

可去奇点定理

证明：取小球 $B_R(A) \subset \Omega$ 作为研究的对象， $B_\delta(A) \subset B_R(A)$

设 u_1 满足 $\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_{\partial B_\delta} = u|_{\partial B_\delta} \end{cases}$, 下证明 u_1 和 u 在除了 A 点点地方都离得很近

【手段：构造辅助函数】令 $W = u_1 - u \Rightarrow \begin{cases} \Delta W = 0, B_R \setminus B_\delta \\ |W|_{\partial B_\delta} = 0 \end{cases}$

令 $V_\varepsilon = \varepsilon \left(\ln \frac{1}{r(A, Q)} - \ln \frac{1}{R} \right)$, 则 V_ε 满足 $\begin{cases} \Delta V_\varepsilon = 0 \\ |V_\varepsilon|_{\partial B_\delta} = 0 \end{cases}$, 进而通过比较 V_ε 和 W 来说明 u_1 和 u 离得很近

由条件， $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{u(Q)}{\ln r(A, Q)} = 0$, 则有 $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{u_1(Q)}{\ln r(A, Q)} = 0$ ($Q \rightarrow A$ 时 $\ln r(A, Q) \rightarrow \infty$, 而 $u_1(Q)$ 的大小能被边界所控制住)

则 $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{|W|}{\ln r(A, Q)} = \lim_{Q \rightarrow A} \frac{|u_1 - u|}{\ln r(A, Q)} = 0$, 而显然 $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{|W|}{V_\varepsilon} = 0$, 则 $\exists \delta_0$, s.t. $|W| \leq V_\varepsilon, \forall x \in \partial B_{\delta_0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(W - V_\varepsilon) = 0, B_R \setminus B_\delta \\ (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_{\delta_0}} = 0 \end{cases}$, 在去掉小圆盘上调和

$\Rightarrow \begin{cases} (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_{\delta_0}} = 0 \\ (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_{\delta_0}} \leq 0 \text{ 或 } \geq 0 \end{cases}$, 在大圆盘边界上是0 由于极值原理 $\Rightarrow W - V_\varepsilon$ 在 $B_R \setminus B_{\delta_0}$ 上保号，令 $\delta_0 \rightarrow 0^+$ 仍成立

则 $|W| \leq V_\varepsilon$ 在 $B_R \setminus \{A\}$ 上成立，再让 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，则 $|W| = |u_1 - u| = 0$, $B_R \setminus \{A\}$, 即可在 $u(A)$ 处补充定义使之成为 u_1

对 x 做Fourier变换，ode方程求出 $F(t)$ ，再做逆变换，凑成Gauss积分

$$\text{等式两边对 } x \text{ 做 Fourier 变换} : F_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{\partial}{\partial t} E(x, t) - a^2 \Delta E(x, t) \right)(\xi, t) = (F_{x \rightarrow \xi} \delta(x, t))(\xi, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = \delta(t) \text{ 即为 } \hat{E}(\xi, t) \text{ 的一阶线性非齐次 ode 方程, 解得为 } \hat{E}(\xi, t) = H(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t},$$

今 $v(t) = e^{a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)}$, 这样方程化为 $v'(t) = \delta(t)$, $v(t) = H(t) + C$, 因为做 Fourier 变换要求 $E(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x,t}^{n+1})$

则也要求 $\hat{E}(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x,t}^{n+1})$, 所以要求 $t \rightarrow -\infty$ 时 $\hat{E}(\xi, t) = (H(t) + C) e^{a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)}$ 的任意解导数都趋于0, 则 $C = 0$

$$\text{则 } E(x, t) = F^{-1} \left[H(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] = \frac{F^{-1} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4}} \right)}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} = H(t) \left(a\sqrt{2t} \right)^{-n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} = H(t) (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, t > 0$$

热传导算子的基本解

$$(P) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, (P_2) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$(P_1) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, \text{ 若 } u_1 \text{ 为 } P_1 \text{ 的解, } u_2 \text{ 为 } P_2 \text{ 的解, 则 } u_1 + u_2 = u \text{ 为 } (P) \text{ 的解 (线性所以才能叠加)}$$

Step 1: 求解 (P_1)

和基本解的求法基本一致，只是把 $H(t)$ 换成了 $\hat{\varphi}(\xi)$ ，再利用卷积再变化=先变化再相乘的性质

step 1: 证明当 $u(x, t)$ 满足 (P_1) 时， $u(x, t) = E(x, t) * \varphi(x)$

$$(P_1) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \text{ 关于 } x \text{ 做 Fourier 变换} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) + a^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, & t > 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t}, u(t, x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} (\hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t})$ 【和求基本解的做法一致】

$$\text{由于 } \widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2}, \text{ 令 } \begin{cases} f_1(t, x) = F^{-1} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4}} \right) = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \\ f_2(x) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2} = u(t, x) = \widehat{f_1 * f_2} = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} * \varphi(x)$$

就是基本解去掉 $H(t)$ ，方法一样的，凑成Gauss积分 $= (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy, t > 0$

$= E(x, t) * \varphi(x)$ 【直接就能看出来】

要验证 $\langle \delta(t, x), f(x) \rangle = \delta(t) f(0)$, 即等价于说明 $\delta(t, x)$ 的“时间”和“空间”是可以分离的

接下来要验证 $: u(x, t) = E(x, t) * \varphi(x)$ 满足 (P_1) :

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) (E(x, t) * \varphi(x)) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) E(x, t) \right] * \varphi(x) = \delta(t, x) * \varphi(x) = \delta(t) \varphi(x) = 0$$

claim: $\langle \delta(t, x), f(x) \rangle = \delta(t) f(0)$

证明：将 $\delta(t, x)$ 磨光，取磨光核 $\Phi_\varepsilon(x, t)$, 令 $\delta_\varepsilon(t, x) = \delta(t, x) * \Phi_\varepsilon(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\forall \psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 有

$$\langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \rangle, \langle \psi(t) \rangle = \int \psi(t) dt \int \delta_\varepsilon(t, x) f(x) dx = \iint \delta_\varepsilon(t, x) f(x) \psi(t) dx dt = \langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \psi(t) \rangle$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得 $\langle \langle \delta(t, x), f(x) \rangle, \psi(t) \rangle = \langle \delta(t, x), f(x) \psi(t) \rangle = f(0) \psi(0) = f(0) \langle \delta(t), \psi(t) \rangle = \langle f(0) \delta(t), \psi(t) \rangle = \langle f(0) f(t), \psi(t) \rangle \Rightarrow \langle \delta(t, x), f(x) \rangle = \delta(t) f(0)$

先证明基本解载全空间上的积分是1，再利用该引理将绝对值分成两段。

小球内积分自然可任意小，小球外积分要将基本解展开写，换元后易证趋于0

② 验证 $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, x) * \varphi(x) = \varphi(x)$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, x) = \delta(x)$, 即 $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle E(t, x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \varphi(0)$

claim: $\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1, t > 0$, proof: $\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{4\pi}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dz = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz = 1$

则 $E(x, t) \in L_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 由连续性可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } |x| < \delta \text{ 时, } |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$

则 $|\langle E(x, t), \varphi(x) \rangle - \varphi(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \frac{\|\varphi(0)\| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx}{\|\varphi(0)\|} \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right|$

$= \left| \int_{B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right|$

$\leq \varepsilon \left| \int_{B_\delta(0)} E(x, t) dx \right| \leq \varepsilon$

$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} E(x, t) dx = \frac{2\sqrt{4t}}{\pi} (\pi)^{\frac{n}{2}} \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

综上，即得 $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle E(t, x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \varphi(0)$

综上，得到了 $t > 0, u_1(x, t) = E(t, x) * \varphi(x) = H(t) (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy$ 为 (P_1) 的解

Step 2: 利用Duhamel原理求解 (P_2)

构造 $U(x, t, \tau)$ 将 (P_2) 转化为 (P_1) 的形式

$$(P_2) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

【齐次化原理(Duhamel原理)】将 (P_2) 化为齐次方程非零初值问题【即将 (P_2) 形式的方程转化为 (P_1) 形式的方程】

构造辅助函数 $U(x$