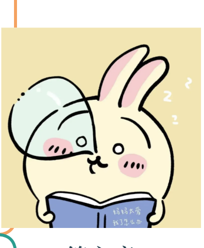
第六章 Laplace方程



$Laplace$算子 $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2$

基本解形式的导出

2023伯苓期末考过

由物理意义导出基本解只与r有关，所以写成E(r)

以$n=3$为例，在$\mathbb{R}^3$的静电场中，$Gauss$定律：在原点处放一个正电荷：$\Delta E(x)=\delta(x)$

其中$E(x)$只与x到原点的位置有关，即$E(x)=E(r), r=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$

解E(r)的ode方程，得到基本解主项

常规求导可得$\Delta E(r)=\frac{d^2E}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{dE}{dr}$，设$\frac{dE}{dr}=W(r)$，则为$\frac{dW}{dr}+\frac{n-1}{r}W(r)=\Delta E(r)=\delta(r)$

两端同乘$r^{n-1}\in C^\infty(\mathbb{R})$，则$\frac{dW}{dr}r^{n-1}+W(r)(n-1)r^{n-2}=\delta(r)\Rightarrow\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}W(r)\right]=\delta(r)$

则当$r>0$时，$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}W(r)\right]=0\Rightarrow r^{n-1}W(r)=c$，即$\frac{dE}{dr}=W(r)=cr^{1-n}, n\geqslant 2$

即$E(r)=\begin{cases}c_nr^{2-n}, & n\geqslant 3\\ c_2\ln\frac{1}{r}, & n=2\end{cases}$，接下来求$c_n, n\geqslant 2$

注：(1)此时$r=|x|=|x-0|$，因此时在原点处放置正电荷，若在x_0处放置单位正电荷$\Rightarrow r=|x-x_0|$

(2)$Laplace$方程的基本解常用$\Gamma(x$【动点】$, x_0$【定点】$)=\Gamma(|x-x_0|)$或$\Gamma(x,y)$表示

位势积分

推导位势积分公式：利用第二类Green公式，取v=1/r，2015考过

第二类Green公式

设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是一有界区域，且$\partial\Omega$光滑，设$u$和$v$都在$C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$中，则

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\iint_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS, n\text{是}\partial\Omega\text{的单位外法向量}$$

step 1: 取$v=\frac{1}{r}$，在Ω_ε上运用$Green$公式

令$v=\frac{1}{r}$，代入$Green$公式，设$B_\varepsilon(Q)$是以Q为圆心，ε为半径小球，$\Omega_\varepsilon=\Omega\backslash B_\varepsilon$，$P$是动点，$|PQ|=r$

则$v=\frac{1}{r}\in C^2(\Omega_\varepsilon)\cap C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$，在$\Omega_\varepsilon$上使用$Green$公式，$u$仍为一般的$C^2(\Omega_\varepsilon)\cap C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$

则$\iiint_{\Omega_\varepsilon}\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]dx=\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS$

step 2: 把这个空心小球的两部分拆开：$\iiint_{\Omega_\varepsilon}\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]dx=\iint_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS-\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}\left[u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]dS \quad (*)$

其中因为$\frac{1}{r}$是基本解的主项，即$\Delta c_3\left(\frac{1}{r}\right)=\delta$，则在$\Omega_\varepsilon$中有$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0\Rightarrow\iiint_{\Omega_\varepsilon}u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dx_p=0$，则等式$(*)$左端$=-\iiint_{\Omega_\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta u dx$

下考虑$\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}\left[u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]dS$：$r=\varepsilon$，则为$-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}udS-\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}\frac{\partial u}{\partial r}dS$

step 3: 由【积分中值定理】得，$\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}udS=u(Q^*)4\pi\varepsilon^2$，$\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}\frac{\partial u}{\partial r}dS=\frac{\partial u}{\partial r}(\tilde{Q})4\pi\varepsilon^2$，其中$Q^*,\tilde{Q}\in\partial B_\varepsilon(Q)$

则$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\partial B_\varepsilon(Q)}\left[u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]dS=-4\pi u(Q)$，此时原方程化为$-\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u dx=\iint_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS+4\pi u(Q)$

整理得到位势积分公式：$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\left[\iint_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u dx\right]$

$n>3$时的位势积分公式：$u(Q)=\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\left[\int_{\partial\Omega}r^{2-n}\frac{\partial u}{\partial n}dS_P-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}(r^{2-n})dS_P-\int_{\Omega}r^{2-n}\Delta u dx_P\right]$

$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$r=|P-Q|$，$\varphi(Q)=\langle\delta(Q-P),\varphi(P)\rangle_P=\left\langle\Delta\left(c_3\left(\frac{1}{r}\right)\right),\varphi(P)\right\rangle_P=c_3\left\langle\frac{1}{r},\Delta\varphi(P)\right\rangle_P=c_3\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta\varphi(P)dx_P$

又由位势积分公式，以及$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\Rightarrow\varphi|_{\partial\Omega}\equiv 0$，得$\varphi(Q)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta\varphi dx=c_3\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta\varphi(P)dx_P\Rightarrow c_3=-\frac{1}{4\pi}$

一般情况下：$c_n=\frac{-1}{(n-2)|S^{n-1}|}$，位势积分公式也可写成：$u(Q)=\int_{\partial\Omega}(-\Gamma(P,Q))\frac{\partial u}{\partial n}dS_P+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}(\Gamma(P,Q))dS_P+\int_{\Omega}\Gamma(P,Q)\Delta u dx_P$

平均值公式

设u是调和函数，$\Omega=B_R(Q)$，则有球面平均值公式$u(Q)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S(Q,R)}u(P)dS_P$

证明：由位势积分$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial B}\frac{\partial u}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial B}udS$

$claim$：设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是连通开集，$\partial\Omega$光滑，$\Delta u=0$在$\Omega$上有$\iint_{\partial B}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$

法一：利用$Green$第二公式，令$v=1$即得

法二：利用分部积分，$0=\int_{\Omega}\Delta udx=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2udx=\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\partial_{x_j}^2udx=\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\partial_{x_j}u\,\vec{n}_jdS-\int_{\Omega}(\partial_{x_j}1)(\partial_{x_j}u)dx\right)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dS$

经典位势积分
+第二类Green公式

证明极值原理
只用到了平均值公式

极值原理

2015考过

设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$是一连通开集，$u$在$\Omega$中调和，若$u$不恒等于常数，则$u$必不能在$\Omega$内达到上、下确界

推论：u在Ω中调和，则最大值、最小值一定在边界上取到

经典反证，假设在内部能取到最大值M，圈个小圈用平均值公式，证明小圈边界上的取值也一定恒为M
反证方法当然是圈个小圈原积分区域分成两部分，方法更是典中典！这个证明还很直观

证明：反证：假设$u\neq const$，且在$Q\in\Omega$达到其上确界M；由平均值公式$M=u(Q)=\frac{1}{|B_\delta(Q)|}\int_{B_\delta(Q)}u(P)dS_P$，

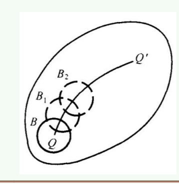
$claim$：u在$B_\delta(Q)\subseteq\Omega$上恒等于$M$，假设$P_0\in B_\delta(Q), u(P_0)=M_1<M$，由连续性可知$\exists$邻域$V_{P_0}\subset B_\delta(Q), s.t.\ u|_{V_{P_0}}<M$

$M=\frac{1}{|B_\delta(Q)|}\left[\int_{V_{P_0}}u(P)dx_P+\int_{B_\delta(Q)\backslash V_{P_0}}u(P)dx_P\right]<\frac{1}{|B_\delta(Q)|}[M|V_{P_0}|+M(|B_\delta|-|V_{P_0}|)]<M$，矛盾！

考虑到δ可以变动，即u在以Q为球心的某个球体上$\equiv M$

任取一点$Q'\in\Omega$并以一条路径联结Q与Q'。于是可以此路径含于B内之一点为心作另一球体B_1，同理在B_1中$u\equiv M$。

仿此进行即可证明$u(Q')=M$，从而在Ω中$u\equiv M$而与假设矛盾。



主要来看$Dirichlet$问题：$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$

利用极值原理，证明$Laplace$方程的唯一性和稳定性

唯一性：设u_1,u_2均满足$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$，即$\begin{cases}\Delta u_1=0\\ u_1|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$且$\begin{cases}\Delta u_2=0\\ u_2|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$

令$u=u_1-u_2$，则$\Delta u=0, u|_{\partial\Omega}=0$，而调和函数的最大/小值一定在边界取到

u在边界上的最大、最小值都是$0\Rightarrow u_1=u_2$

稳定性：方程的解连续依赖于边界条件

由极值原理$|u_1-u_2|\leqslant\max_{\partial\Omega}|u_1-u_2|=\max_{\partial\Omega}|f_1-f_2|$

2015伯苓考过

$Neumann$问题：$\begin{cases}\Delta u=0\\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=f\text{，其中}n\text{为外法向量}\end{cases}$ (P_1)

设u为(P_1)的解，则$u+C$也为(P_1)的解，要证：所有解都能表示成$u+C$的形式

设v是P_1的任一解，则：$\begin{cases}\Delta(u-v)=0\\ \left.\frac{\partial(u-v)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\text{，其中}n\text{为外法向量}\end{cases}$

将$u-v$代入$Green$第一公式：$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial(u-v)}{\partial n}dS=\iiint_{\Omega}(u-v)\Delta(u-v)dx+\iiint_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right]^2dx_i$

$\Rightarrow\iiint_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right]^2dx_i=0$，即$\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}=0$，$i=1,2,3,\Rightarrow u-v=c$

我不记得这块在干什么了

例：设$\Omega=B_R(Q), u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，

证明：(1)$u(Q)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial B_R}udS_P+\frac{1}{4\pi}\iiint_{B_R}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\Delta udx$【位势积分公式】

(2)若$\Delta\geqslant 0$，则$u(Q)\leqslant\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial B_R}udS_P$【证明方法与平均值公式类似】

简单区域中的Dirichlet问题

Green函数

和证明平均值公式一样，Green公式+位势积分表示u(Q)，典！

对于$Dirichlet$问题：$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$，考虑另外一个$Dirichlet$问题：$\begin{cases}\Delta v=0\\ v|_{\partial\Omega}=\frac{1}{r(P,Q)}\end{cases}$

将Q视为动点，P视为定点，则由$Green$公式有

$$0=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}[u\Delta v-v\Delta u]dx=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}\left[g\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS \quad (1)$$

$$\text{位势积分：}u(Q)=\frac{1}{4\pi}\left[\iint_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS-\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta udx\right]=\frac{1}{4\pi}\left[\iint_{\partial\Omega}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iint_{\partial\Omega}g\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS\right] \quad (2)$$

$(1)+(2)$得$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega}g(P)\boxed{\frac{\partial}{\partial n}\left(v-\frac{1}{r}\right)}dS=\iint_{\partial\Omega}g(P)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)dS_P$

其中$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(P,Q)}-v(P,Q)\right)$，称为$Green$函数，是有一个奇点的调和函数($P=Q$处有奇点)

Green公式+位势积分表示u(Q)，一样的！

例：$\begin{cases}\Delta u=f, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$，试用$Green$函数求解此问题，类似地，考虑另外一个$Dirichlet$问题：$\begin{cases}\Delta v=0\\ v|_{\partial\Omega}=-\Gamma(P,Q)\end{cases}$

$Green$公式有$\iiint_{\Omega}v\Delta udx=\iint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}dS_P$

位势积分有$u(Q)=\int_{\partial\Omega}(-\Gamma(P,Q))\frac{\partial u}{\partial n}dS_P+\int_{\Omega}\Delta u\Gamma(P,Q)dx_P$

则有$u(Q)=\iiint_{\Omega}\Delta u\underbrace{\boxed{(v+\Gamma(P,Q))}}_{Green\text{函数}}dx=\iiint_{\Omega}\Delta uG(P,Q)dx$

【叠加原理】$(P)\begin{cases}\Delta u=f, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$，

$(P_1)\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$，$(P_2)\begin{cases}\Delta u=f\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$

[若u_1,u_2分别为$(P_1)(P_2)$的解，则u_1+u_2为(P)的解]

则(P)有形式解$u(Q)=\int_{\partial\Omega}g(P)\frac{\partial}{\partial n}GdS_P+\int_{\Omega}f(P)Gdx$，

其中$G(P,Q)=\Gamma(P,Q)+v(P)$，$v(P)$为调和函数

$Green$函数的性质

(1)边界上是0：$G(P,Q)|_{\partial\Omega}=0$

(2)Δ作用是δ：$\Delta G(P,Q)=\Delta(\Gamma(P,Q)+\frac{1}{4\pi}v(P,Q))=\delta(P,Q)$

(3)$Green$函数可以表示$Dirichlet$问题的形式解：$\Rightarrow u(Q)=\iint_{\partial\Omega}g(P)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)dS_P$

(4)$G(Q_1,Q_2)=G(Q_2,Q_1)$

(5)$n=3$时：① $0<-G(P,Q)<\frac{1}{r(P,Q)}$

② $\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}dS_P=1$

交换性证明

和证明位势积分的思路一样，在挖去两个小球的空间上用Green公式，再拆开写

证明：设$\Omega_\varepsilon=\Omega-B_\varepsilon(Q_1)-B_\varepsilon(Q_2), u_1=G(P,Q_1), u_2=G(P,Q_2)$

在Ω_ε上对u_1,u_2使用$Green$公式：由于$\Delta u_1=\Delta u_2=0$，且$u_1|_{\partial\Omega}=u_2|_{\partial\Omega}=0$

则有$0=\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)+\partial B_\varepsilon(Q_2)}u_1\frac{\partial u_2}{\partial n}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial n}dS$，

即$\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)+\partial B_\varepsilon(Q_2)}G(P,Q_1)\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial n}dS=\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)+\partial B_\varepsilon(Q_2)}G(P,Q_2)\frac{\partial G(P,Q_1)}{\partial n}dS$

即$\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)}G(P,Q_1)\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial n}-G(P,Q_2)\frac{\partial G(P,Q_1)}{\partial n}dS=\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_2)}G(P,Q_2)\frac{\partial G(P,Q_1)}{\partial n}-G(P,Q_1)\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial n}dS$

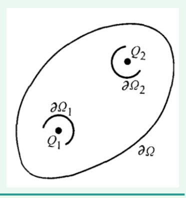
左边：由于$P\in\partial B_\varepsilon(Q_1)$，$\sup_{P\in\partial B_\varepsilon(Q_1)}|G(P,Q_1)|=\sup_{P\in\partial B_\varepsilon(Q_1)}|\Gamma(P,Q_1)+v(P)|=\sup_{P\in\partial B_\varepsilon(Q_1)}\left|v(P)-\frac{1}{4\pi\epsilon}\right|\leqslant\frac{1}{4\pi\epsilon}+c_1$

$\sup_{P\in\partial B_\varepsilon(Q_1)}\left|\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial n}\right|\leqslant c_2$，则$\left|\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)}G(P,Q_1)\frac{\partial G(P,Q_2)}{\partial n}dS\right|\leqslant 4\pi\epsilon^2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon}+c_1\right)c_2\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$

同样类似求位势积分的操作，在小球边界上化简形式，积分中值取极限

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)}-G(P,Q_2)\frac{\partial G(P,Q_1)}{\partial n}dS=\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)}-G(P,Q_2)\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{1}{4\pi r}+v(P)\right]dS$$
$$=\iint_{\partial B_\varepsilon(Q_1)}G(P,Q_2)\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}+\frac{\partial}{\partial r}v(P)\right]dS$$
$$=G(P^*,Q_2)+4\pi\varepsilon^2\left(G\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\tilde{P})\text{，其中}P^*\tilde{P}\in\partial B_\varepsilon(Q_1)$$
$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}G(Q_1,Q_2)$$

同理，右式$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}G(Q_2,Q_1)$，即得$G(Q_1,Q_2)=G(Q_2,Q_1)$



$0<-G(P,Q)<\frac{1}{r(P,Q)}$证明

v在Ω上调和，其模长能被边界上的取值所限制住，两边放缩

证明：由$G(P,Q)=-\frac{1}{4\pi r}+v$，$v=\begin{cases}\Delta v=0\\ v|_{\partial\Omega}=\frac{1}{4\pi r}\end{cases}$，由极值原理，$\min_{\partial\Omega}\frac{1}{4\pi r}\leqslant v\leqslant\max_{\partial\Omega}\frac{1}{4\pi r}$

一方面，$-G(P,Q)=\frac{1}{4\pi r(P,Q)}-v(P)\geqslant\frac{1}{4\pi r(P,Q)}-\max_{\partial\Omega}\frac{1}{4\pi r(P,Q)}\to+\infty(P\to Q)$

则$\exists\delta>0, s.t.-G(P,Q)>0$，$\forall P\in B_\delta(Q)$

则$\forall P\in\Omega\backslash B_\delta$，有$\begin{cases}\Delta(-G(P,Q))=0\\ -G(P,Q)|_{\partial\Omega}=0\\ G(P,Q)|_{\partial B_\delta(Q)}>0\end{cases}$，由极值原理得$G(P,Q)>0$，$\forall P\in\Omega\backslash B_\delta$

另一方面$-G(P,Q)=\frac{1}{4\pi r(P,Q)}-v(P)\leqslant\frac{1}{4\pi r(P,Q)}-\min_{\partial\Omega}\frac{1}{4\pi r(P,Q)}\leqslant\frac{1}{4\pi r(P,Q)}<\frac{1}{r(P,Q)}$

$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}dS_P=1$证明

要证明=1的积分形式恰为边界取值恒为1的Dirichlet问题的形式解，而u恒为1满足方程

证明：对于$(P_1)\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=1\end{cases}\Rightarrow u(Q)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}dS_P$，而$u\equiv 1$一定是$(P_1)$的解

由极值原理可得(P_1)的唯一性，$\Rightarrow\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}dS_P=1$

半平面的$Green$函数

半平面上的问题$n=2$时，静电源像法，求$Green$函数

形式解$u(Q)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}f(P)dS_P$

$\Gamma(P,Q)$：在Q点放置单位正电荷在P点产生的电势

$v(P)$：在Q点的对称点Q_1处放置负电荷产生的电位，$s.t.$在边界上的电势为0

就是针对这个问题把相应的G(P,Q)带进形式解u(Q)的表达式里去，求导，化简，2023考过：利用Green函数求解上半平面的Dirichlet问题

$\Rightarrow$在半平面问题中，在$Q(x,-y)$处放置单位负电荷

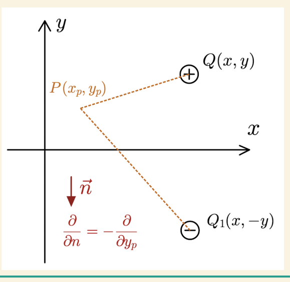
于是有$G(P,Q)=\Gamma(P,Q)+v(P)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(P,Q)}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(P,Q_1)}$，想代入形式解中

计算$\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y_P}\ln r-\frac{\partial}{\partial y_P}\ln r_1\right]=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y_P}-\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y_P}\right]$，其中$\frac{\partial r}{\partial y_P}=\frac{-(y-y_P)}{r}$，$\frac{\partial r_1}{\partial y_P}=\frac{y+y_P}{r_1}$

因为$r(P,Q)=\left[(x_P-x)^2+(y_P-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$，$r(P,Q_1)=\left[(x_P-x)^2+(y_P+y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$，且$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial y_P}$

代入得$u(Q)=\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y-y_P}{r^2}+\frac{y+y_P}{r_1^2}\right)f(x_P,y_P)dS_P=\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-x_P)^2+y^2}f(x_P,0)dS_P$【注意在边界上】

$\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_P)\frac{y}{(x-x_P)^2+y^2}dx_P$【形式解】



圆的$Green$函数

圆上的Laplace方程的Dirichlet问题

$\begin{cases}\Delta u=0, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$，利用静电源像法求$Green$函数$G(P,Q)=\Gamma(P,Q)+v(P)$

(1)Q点关于$\partial\Omega$的对称点是Q_1的位置

(2)Q_1处放置多少负电荷

如图所示，$r=|PQ|, r_1=|PQ_1|, \rho=|OQ|, \rho_1=|Q_1|$

取Q_1为Q的反演点，即$\triangle OPQ\sim\triangle OPQ_1$

即$\frac{r}{R}=\frac{r_1}{\rho_1}, \frac{R}{\rho_1}=\frac{\rho}{R}\Rightarrow\rho_1\rho=R^2\Rightarrow$确定$Q_1$的位置

$\frac{r}{r_1}=\frac{R}{\rho_1}=\frac{\rho}{R}=\frac{1}{R/\rho}\Rightarrow$在$Q_1$点放置$\frac{R}{\rho}$负电荷

$G(P,Q)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(P,Q)}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R/\rho}{r_1(PQ_1)}$

其中，$r^2(P,Q)=\rho_P^2+\rho^2-2\rho_P\rho\cos(\theta-\theta_P)$

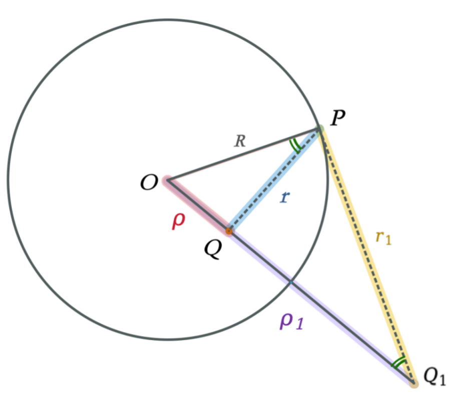
$r^2(P,Q_1)=\rho_P^2+\rho_1^2-2\rho_P\rho_1\cos(\theta-\theta_P)$，且$\rho\rho_1=R^2$

$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial\rho_P}\Rightarrow\begin{cases}(1)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\\ (2)\text{当}P\in\partial\Omega\text{时}\Rightarrow\rho_P=R\end{cases}$

经一系列计算$\left.\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{\rho^2+R^2-2R\rho\cos\gamma}$

$u(Q)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}f(P)d\rho_P=\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta_P-\theta)}f(P)d\rho_P$

$\overset{d\rho_P=Rd\theta_P}{=\!=}\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta_P-\theta)}f(\theta_P)d\theta_P=u(Q)=u(\rho,\theta)$



Thm2.3.12的极坐标形式

证明若$F_\rho(\theta-\varphi)$是$\varphi\in[0,2\pi]$周期为2π的连续函数(即圆周上的函数)，θ是一参数，则当适合以下两条件时必有$\lim_{\rho\to R^-}F_\rho(\theta-\varphi)=\delta(\theta-\varphi)$：

1.对任意$\varphi_1,\varphi_2\in[0,2\pi]$ $\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}F_\rho(\theta-\varphi)\,d\varphi\right|\leq C.$

2.在区间$[\varphi_1,\varphi_2]$上$\lim_{\rho\to R^-}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}F_\rho(\theta-\varphi)\,d\varphi=\begin{cases}1, & \theta\in[\varphi_1,\varphi_2],\\ 0, & \theta\notin[\varphi_1,\varphi_2].\end{cases}$

调和函数的另一些性质

平均值公式之逆

设$u(Q)\in C(\Omega)$满足平均值公式，则在Ω内是调和的【平均值公式$\Longleftrightarrow$调和】

构造一个调和函数v，通过u-v在边界上是0，极值原理（只需平均值公式可推）得u=v

证明：取小球$B\subseteq\Omega$，令$\begin{cases}\Delta v=0, x\in B\\ v|_{\partial B}=u|_{\partial B}\end{cases}$，$v$在$B$上调和，满足平均值公式

即$u(Q)=\frac{1}{|B|}\int_{\partial B}u(P)dx_P$，$v(Q)=\frac{1}{|B|}\int_{\partial B}v(P)dx_P$

则$u-v$在B上满足平均值公式，而考虑到平均值公式$\Rightarrow$极值原理

由于$u-v|_{\partial B}=0$，则$u\equiv v, x\in\overline{B}$，则$u$在$B$中调和，由于$B\subseteq\Omega$的任意性，$\Delta u=0, x\in\Omega$

可去奇点定理

证明调和函数的可去奇点定理：在以A为球心R为半径的小球上研究问题，构造补充定义后的函数u₁，用W衡量两个函数的差距，手段是再构造一个V比较V和W，先让Q→A，极值原理证明|W|≤V在小圆环上成立，再让ε→0，证明在去心圆盘上成立

u(Q)的奇性不能超过基本解

当$n=2$时，若$u(Q)$在A点附近调和，且$u(Q)=o(1)\ln r(A,Q)$，则可补充定义，$s.t.\ \Delta u=0$，$x\in B_\delta(A)$

证明：取小球$B_R(A)\subset\Omega$作为研究的对象，$B_\delta(A)\subset B_R(A)$

设u_1满足$\begin{cases}\Delta u_1=0\\ u_1|_{\partial B_R}=u|_{\partial B_R}\end{cases}$，下证明$u_1$和$u$在除了$A$点地方都离得很近

【手段：构造辅助函数】令$W=u_1-u\Rightarrow\begin{cases}\Delta W=0, B_R\backslash B_\delta\\ W|_{\partial B_R}=0\end{cases}$，

令$V_\varepsilon=\varepsilon\left(\ln\frac{1}{r(A,Q)}-\ln\frac{1}{R}\right)$，则$V_\varepsilon$满足$\begin{cases}\Delta V_\varepsilon=0\\ V_\varepsilon|_{\partial B_R}=0\end{cases}$，进而通过比较$V_\varepsilon$和$W$来说明$u_1$和$u$离得很近

和证明G(P,Q)的取值范围时的思路相同

由条件，$\lim_{Q\to A}\frac{u(Q)}{\ln r(A,Q)}=0$，则有$\lim_{Q\to A}\frac{u_1(Q)}{\ln r(A,Q)}=0$，则$\lim_{Q\to A}\frac{|W|}{\ln r(A,Q)}=\lim_{Q\to A}\frac{|u_1-u|}{\ln r(A,Q)}=0$，则$\forall\varepsilon>0$，$\lim_{Q\to A}\frac{|W|}{V_\varepsilon}=0$

则在Q附近存在一个小邻域B_{δ_0}满足$\frac{|W|}{V_\varepsilon}<1$，即$|W|\leqslant V_\varepsilon, \forall x\in\partial B_{\delta_0}$

$\Rightarrow\begin{cases}\Delta(W-V_\varepsilon)=0, B_R\backslash B_{\delta_0} & \text{，在去掉小圆盘上调和}\\ (W-V_\varepsilon)|_{\partial B_R}=0 & \text{，在大圆盘边界上是0}\\ (W-V_\varepsilon)|_{\partial B_{\delta_0}}\leqslant 0\text{或}\geqslant 0 & \text{，在小圆盘边界上保号}\end{cases}$ 由于极值原理$\Rightarrow W-V_\varepsilon$在$B_R\backslash B_{\delta_0}$上保号，令$\delta_0\to 0^+$仍成立

则$|W|\leqslant V\varepsilon$在$B_R\backslash\{A\}$上成立，再让$\varepsilon\to 0$，则$|W|=|u_1-u|=0, B_R\backslash\{A\}$，即可在$u(A)$处补充定义使之成为$u_1$

调和函数的解析性

若$\Delta u=0$，则$u\in C^\infty$且可以展成收敛幂级数(正则性很高)

弱：具有此形式，但正则性较低

若$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega), \langle\Delta v,\varphi\rangle=\langle 0,\varphi\rangle=0\Rightarrow\langle v,\Delta\varphi\rangle=0$，则称$v$是$\Delta u=0$的$\mathscr{D}'$解(弱解，分布定义解)

$Liouville$定理

在$\mathbb{R}^n$上有界调和函数必为常函数

思路是证明u(x)-u(0)=0，方法是展开成平均值公式，对积分区域做放缩，证明R→∞时|u(x)-u(0)|→0

证明：$\forall x\in\mathbb{R}^n$，取$B_R(0), B_R(x)$，由于u调和，有平均值公式$u(0)=\frac{1}{|B_R(0)|}\int_{B_R(0)}u(P)dx_P$，$u(x)=\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}u(P)dx_P$

$$|u(x)-u(0)|=\frac{1}{|B_R|}\left|\int_{B_R(0)}u(y)dy-\int_{B_R(x)}u(y)dy\right|\leqslant\frac{1}{|B_R|}\left(\int_{B_R(0)\backslash B_R(x)}u(y)dy+\int_{B_R(x)\backslash B_R(0)}u(y)dy\right)$$
$$\leqslant\frac{M}{|B_R|}\left(\int_{B_R(0)\backslash B_R(x)}1dy+\int_{B_R(x)\backslash B_R(0)}1dy\right)$$

$\downarrow$ $|y-x|>R, |y|\leqslant R$ $\downarrow$ $R-|x|<|y|\leqslant R$

$\downarrow$ $|y-x|\leqslant R, |y|>R$ $\downarrow$ $R<|y|\leqslant|x|+R$

$$\leqslant\frac{M}{|B_R|}\int_{R-|x|}^{R+|x|}1dy=\frac{M}{c_n\cdot R^n}c_n\left((R+|x|)^n-(R-|x|^n)\right)=O\left(\frac{1}{R}\right)\xrightarrow{R\to\infty}0$$

即得$u(x)\equiv u(0)$，即$u(x)$恒为常数【对n维成立】

调和函数列+一致收敛→极限函数也调和

设$\{u_n(Q)\}$是Ω中的调和函数列，且在Ω中一致收敛于$u(Q)$，则$u(Q)$也是Ω中的调和函数

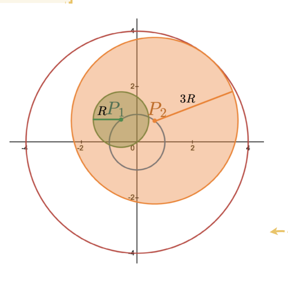
思路：$u(Q)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}f(P)dS_P$是$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$的形式解

取$B\subseteq\Omega$，u_n在∂B上一致收敛于u，$f_n(P)=u_n|_{\partial B}\rightrightarrows f(P)=u|_{\partial B}(n\to\infty)$

$\Rightarrow u_n(Q)=\int_{\partial B}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}f_n(P)dS_P\to\int_{\partial B}\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}f(P)dS_P$

$\downarrow$

$u(Q)$ $\Rightarrow\Delta u=0, x\in B$，由$B$的任意性得在$V$中调和



$Harnack$定理

u非负很重要，在大的区域上积分大，2023伯苓考过

一般的$Harnack$不等式：对紧集$K\subseteq\Omega$，有【非负】调和函数u，有$\sup_K u\leqslant c^n\inf_K u$

证明了在小球中的结论

证明：取$P_1,P_2\in B_R$，$u(P_1)=\frac{1}{|B_R(P_1)|}\int_{B_R(P_1)}u(y)dy$，$u(P_2)=\frac{1}{|B_{3R}|}\int_{B_{3R}(P_2)}u(y)dy$

$\Rightarrow B_R(P_1)\subset B_{3R}(P_2)\xrightarrow{u\text{非负}}\boxed{\int_{B_R(P_1)}u(y)dy\leqslant\int_{B_{3R}(P_2)}u(y)dy}\Rightarrow|B_R|u(P_1)\leqslant|B_{3R}|u(P_2)\Rightarrow u(P_1)\leqslant\frac{|B_{3R}|}{|B_R|}u(P_2)$

$|B_R|=c_nR^n, |B_{3R}|=c_n(3R)^n\Rightarrow u(P_1)\leqslant 3^nu(P_2)$，由$P_1,P_2$的任意性，$\sup_{B_R}u\leqslant 3^n\inf_{B_R}u$

在紧集K中，添加若干个辅助点，每两点都在一个小球中，有限个小球覆盖K

对连通紧子集$K\to$可由有限个球覆盖住$\to$球的半径如何取

取$R=\frac{1}{4}\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)$(因$\Omega$无非负调和)，$\exists$以$R$为半径的球$B_1,\ldots,B_n, s.t.\ K\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}B_n$【有限个在$\Omega$中的小球把$K$盖上】

$\forall P_1,P_2\in K$，设$P_1\in B_{i1}, P_2\in B_{i2}$，则$\exists P_{j1},\ldots,P_{jm}$，s.t.$P_1,P_{j1}\in B_{i1}$；$P_{j1},P_{j2}\in B_{j1}$；$P_{j2},P_{j3}\in B_{j2}$；$\ldots$；$P_{jm},P_2\in B_{i2}$

【保证每两点都在同一个小球中】$\Rightarrow u(P_1)\leqslant 3^nu(P_{j1}),\ldots,u(P_{j1})\leqslant 3^nu(P_{j2}),\ldots,u(P_{jm})\leqslant 3^nu(P_2)$

$\Rightarrow u(P_1)\leqslant c\,u(P_2)\Rightarrow\sup_K u\leqslant c\inf_K u$

例题

习题6.2(6)：设u在以Q为圆心R为半径的圆B内非负调和，而在$\overline{B}$上连续，则$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(Q)\leqslant u(P)\leqslant\frac{R+\rho}{R-\rho}u(Q)$

证明：$u(P)=u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)}f(P)d\varphi$

$-1\leqslant\cos(\theta-\varphi)\leqslant 1\Rightarrow\begin{cases}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)}\leqslant\frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^2}=\frac{R+\rho}{R-\rho}\\ \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)}\geqslant\frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^2}=\frac{R-\rho}{R+\rho}\end{cases}$

由u是非负的得$\frac{R-\rho}{R+\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(P)d\varphi\leqslant u(P)\leqslant\frac{R+\rho}{R-\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(P)d\varphi$

$claim$：$u(Q)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}fd\varphi$，实际上，由平均值公式或$u(P)\overset{P=Q}{=\!=}u(Q)\overset{P=0}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}fd\varphi$