第二章 广义函数的卷积

函数与函数之间的卷积

定义

设$f(x),g(x)\in C(\mathbb{R}^n)$且至少一个具有紧支集,定义卷积$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$

性质

交换

证明：$f,g\in C(\mathbb{R})$且至少有一个具有紧支集

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\overset{t=x-y}{=\!=\!=}\int_{\mathbb{R}}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t=(g*f)(x)$$

结合

$f,g,h\in C(\mathbb{R})$且至少有两个具有紧支集

$$(f*(g*h))(x)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(s)g(t)h(x-s-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$$((f*g)*h)(x)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(s)g(t-s)h(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\overset{u=t-s}{=\!=\!=}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(s)g(u)h(x-s-u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

微分

微分可以跨过卷积

设$f(x)\in C(\mathbb{R}^n)$且至具有紧支集，即$f\in C_0(\mathbb{R}^n),g\in C^k(\mathbb{R}^n)$,则$f*g\in C^k(\mathbb{R}^n)$,有$\partial_x^\alpha(f*g)=f*(\partial_x^\alpha g),|\alpha|\leqslant k$

按微分定义算 简单

证明：不妨设$x\in\mathbb{R},\mathrm{supp}f=K$是紧集

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(f*g)(x)}{\mathrm{d}x}&=\lim_{h\to\infty}\frac{(f*g)(x+h)-(f*g)(x)}{h}\\&=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\left(\int_{\mathbb{R}}f(y)g(x+h-y)-f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right)\\&=\lim_{h\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(y)\frac{1}{h}(f(x+h-y)-g(x-y))\mathrm{d}y\\&\overset{LDT}{=\!=\!=}\int_{\mathbb{R}}f(y)\frac{\mathrm{d}g(x-y)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y\\&=\left(f*\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)(x)\end{aligned}$$

于是有$\partial_x^\alpha(f*g)=f*\partial_x^\alpha g$

支集

设$f*g$有意义，$\mathrm{supp}\,(f*g)\subset\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}g=\{|x+y|;x\in\mathrm{supp}\,f,y\in\mathrm{supp}\,g\}$

考虑x-y的邻域和supp g不交是套路，证明支集的性质都这么考虑

要证：$\forall x\notin\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$，都有$x\notin\mathrm{supp}(f*g)$

$\forall x\notin\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$为闭集，$\exists x$的邻域$V_x,s.t.\,V_x\cap(\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g)=\varnothing$

$\forall y\in\mathrm{supp}f$,有$x-y\notin\mathrm{supp}g$为闭集，从而$\exists x-y$的邻域$V_{x-y}$，$s.t.\,V_{x-y}\cap\mathrm{supp}g=\varnothing$,即$g|_{V_{x-y}}=0$

从而$(f*g)(x)=\int_{\mathrm{supp}f}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y=0$

定理

卷积的性质很好,跟正则性高的那一边走

设$f\in L^1(\mathbb{R}^n),g\in L^p(\mathbb{R}^n),1<p<\infty$,则$f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)$且$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^p}$

广义函数与函数之间的卷积

定义

设$f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),g(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,定义$(f*g)(x)=\langle f(y),g(x-y)\rangle$

例子

δ在广义函数与函数的卷积运算中相当于单位元

$\delta(x)\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),f\in C^\infty(\mathbb{R}^n),(\delta*f)(x)=\langle\delta(y),f(x-y)\rangle=f(x-0)=f(x)$

性质

交换

$\mathscr{D}'$广义函数$*C_0^\infty$函数，由$\langle\cdot,\cdot\rangle$定义，没有交换

结合

引理

积分号可以放到试验函数上来,即积分号可以和广义函数作用换序

设$\Omega\subset\mathbb{R}^n,\omega\subset\mathbb{R}^m$为开集,$\varphi\in C_0^\infty(\Omega\times\omega)$且$\mathrm{supp}\,\varphi\subset K_1\times K_2$,这里$K_1\subset\Omega$, $K_2\subset\omega$为紧集,如果$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$,则$\int\langle u,\varphi(\cdot,y)\rangle\,dy=\left\langle u,\int\varphi(\cdot,y)\,dy\right\rangle$.

证明思路：$\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle_x\in C_0^\infty(W)$,从而$S(y):=\langle f(y),\varphi(x,y)\rangle$可积

将$\int\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle_x\mathrm{d}y$写成求和的极限,即有：当$h$充分小时

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f(x),\varphi(x,kh)h^m\xrightarrow{\mathrm{h}\to0}\int\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle\mathrm{d}y$$

$$=\left\langle f(x),\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x,kh)h^m\right\rangle=\left\langle f(x),\int\varphi(x,y)\mathrm{d}y\right\rangle$$

定理

若$\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，且$f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，则$(f*\psi)*\varphi=f*(\psi*\varphi)$.

$$\begin{aligned}(f*\psi)*\varphi&=\int(f*\psi)(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int\langle f(z),\psi(y-z)\rangle_z\varphi(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int\langle f(z),\psi(y-z)\varphi(x-y)\rangle_z\mathrm{d}y\\&\overset{\text{引理}}{=\!=\!=}\left\langle f(z),\int\psi(y-z)\varphi(x-y)\mathrm{d}y\right\rangle_z\\&\overset{y-z=w}{=\!=\!=}\left\langle f(z),\int\psi(w)\varphi(x-z-w)\mathrm{d}w\right\rangle\\&=\langle f(z),(\psi*\varphi)(x-z)\rangle\\&=f*(\psi*\varphi)\end{aligned}$$

思路几乎一样

微分

引理

微分号可以放到试验函数上来,即积分号可以和广义函数作用换序

设$\omega\subset\mathbb{R}^m$为开集，$\varphi(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\omega)$且有紧集$K\subset\Omega$满足当$x\notin K$时有$\varphi(x,y)=0$对任意$y\in\omega$成立。如果$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，则函数$y\mapsto\langle u,\varphi(\cdot,y)\rangle$是一$C^\infty$函数，且$\partial_y^\alpha\langle u,\varphi(\cdot,y)\rangle=\langle u,\partial_y^\alpha\varphi(\cdot,y)\rangle$.

证明：令$F(x)=\langle f(y),\varphi(x,y)\rangle$,下证$\partial_x^\alpha F(x)=\langle f(y),\partial_x^\alpha\varphi(x,y)\rangle$

当$|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$充分小时,$x\in U_x,x+h\in U_x,F(x+h)-F(x)=\langle f(y),\varphi(x+h)-\varphi(x,y)\rangle$

其中,$\varphi(x+h)-\varphi(x,y)=\sum_{j=1}^n h_j\partial_{x_j}\varphi(x,y)+R(x,y,h),R(x,y,h)\in o(|h|^2)$【多元的$Taylor$展开】

$$\Rightarrow F(x+h)-F(x)=\left\langle f(y),\sum_{j=1}^n h_j\partial_{x_j}\varphi(x,y)+R(x,y,h)\right\rangle=\left\langle f(y),\sum_{j=1}^n h_j\partial_{x_j}\varphi(x,y)\right\rangle+\langle f(y),R(x,y,h)\rangle$$

其中,$|\langle f(y),R(x,y,h)\rangle|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_K\left|\partial_y^\alpha R(x,y,h)\right|=o(|h|^2)$,而$\frac{o(|h|^2)}{|h|}\xrightarrow{|\mathrm{h}|\to0}0$

$f\in\mathscr{D}',\varphi\in C_0^\infty\Rightarrow f*\varphi\in C^\infty$

证明：$F(x)=\langle f(y),\varphi(x,y)\rangle$,不妨设$h=(0,\cdots,0,h_j,0,\cdots,0),|h|=|h_j|$

$$\partial_{x_j}F(x)=\lim_{h_j\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h_j}$$

$$=\lim_{|h|\to0}\left(\frac{1}{h_j}\sum_{j=1}^n h_j\langle f(y),\partial_{x_j}\varphi(x,y)\rangle+o(|h|)\right)=\langle f(y),\partial_{x_j}\varphi(x,y)\rangle$$

从而当$f'\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$时,$\partial_x^\alpha(f*\varphi)(x)=f*(\partial_x^\alpha\varphi)(x),\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$

定理

若$f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$(或$f\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$),则$\partial^\alpha(f*\varphi)=f*\partial^\alpha\varphi=(\partial^\alpha f)*\varphi$.

$f*\partial_x^\alpha\varphi=\langle f(y),\partial_x^\alpha\varphi(x-y)\rangle=\langle f(y),(-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha\varphi(x-y)\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle\partial_y^\alpha f(y),\varphi(x-y)\rangle=(\partial^\alpha f)*\varphi$

支集

$f\in\mathscr{D}',\varphi\in C_0^\infty\Rightarrow\mathrm{supp}(f*\varphi)\subset\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,\varphi$;

证明：即证$\forall x\in\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,\varphi$,有$x\notin\mathrm{supp}(f*\varphi)$

由于$\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,\varphi$是闭集，$\exists x$的邻域$V_x$，$s.t.\,V_x\cap(\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,\varphi)=\varnothing$

$\forall y\in\mathrm{supp}\,\varphi,x-y\notin\mathrm{supp}\,f$,则$\exists x-y$的邻域$V_{x-y}$，$s.t.\,V_{x-y}\cap\mathrm{supp}\,f=\varnothing$，即$\varphi|_{V_{x-y}}=0$

$\Rightarrow f*\varphi|_{V_x}=\langle f(y),\varphi(x-y)\rangle=0$

广义函数的正则化

定理

$\forall f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,都可由一列$C^\infty(\Omega)$函数在$\mathscr{D}'$的意义下去逼近

证明：设$f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),f_\varepsilon=f*\Phi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,要证：$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle\xrightarrow{\varepsilon\to0}\langle f,\varphi\rangle$

关注到$(f_\varepsilon*\check{\varphi})(0)=\langle f_\varepsilon(y),\check{\varphi}(x-y)\rangle(0)=\langle f_\varepsilon(y),\varphi(y-x)\rangle|_{x=0}=\langle f_\varepsilon(y),\varphi(y)\rangle$

从而$\langle f_\varepsilon,\varphi\rangle=(f_\varepsilon*\check{\varphi})(0)=[(f*\Phi_\varepsilon)*\check{\varphi}](0)\overset{\text{结合律}}{=\!=\!=}[f*(\Phi_\varepsilon*\check{\varphi})](0)=\left\langle f*(\Phi_\varepsilon*\check{\varphi})^\vee\right\rangle\xrightarrow{\varepsilon\to0}\langle f,\varphi\rangle$

若$S\in\mathscr{D}'(\Omega)$,则必可找到一串$S_j\in\mathscr{D}'(\Omega),j=1,2,\cdots,s.t.\,S_j\to S$(于$\mathscr{D}'(\Omega)$中) 证明略

广义函数与广义函数之间的卷积

定义

设$f(x)\in\mathscr{D}',g\in\mathscr{E}'$，则可定义$f$和$g$的卷积$f*g\in\mathscr{D}'$为：$\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle,\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

注意：f与g中至少有一个有紧支集，对于两个一般的$f,g\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，不能一般地定义其卷积

性质

结合

2020考过

设$f,g,h\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$，且其中至少有两个具紧支集，则$(f*g)*h=f*(g*h)$;

证明：$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\langle f*(g*h),\varphi\rangle=\langle f(x),\langle(g*h)(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle$
$=\langle f(x),\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x+y+z)\rangle\rangle\rangle$

而考虑$\langle(f*g)*h,\varphi\rangle=\langle(f*g)(x),\langle h(z),\varphi(x+z)\rangle\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\langle h(z),\varphi(x+y+z)\rangle\rangle\rangle$

交换

要把函数看成广义函数，利用性质两层嵌套证明，2023考过

定理：$f\in\mathscr{D}',g\in\mathscr{E}'$,则$f*g=g*f$;

(1)$\forall\varphi$，$\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，则$\big((f*g)*\varphi\big)*\psi=\big((g*f)*\varphi\big)*\psi$

$$\begin{aligned}\text{证明：}\big((f*g)*\varphi\big)*\psi&\overset{\text{广义函数之间卷积的结合律}}{=\!=\!=}\big(f*(g*\varphi)\big)*\psi\\&\overset{\text{广义函数与函数的卷积结合律}}{=\!=\!=}f*\big((g*\varphi)*\psi\big)\\&\overset{\text{函数之间卷积可交换}}{=\!=\!=}f*\big(\psi*(g*\varphi)\big)\\&\overset{\text{广义函数与函数的卷积结合律}}{=\!=\!=}(f*\psi)*(g*\varphi)\\&\overset{\text{函数之间卷积可交换}}{=\!=\!=}(g*\varphi)*(f*\psi)\\&\overset{\text{广义函数与函数卷积的结合律}}{=\!=\!=}g*\big(\varphi*(f*\psi)\big)\\&\overset{\text{函数与函数卷积的交换律}}{=\!=\!=}g*\big((f*\psi)*\varphi\big)\\&\overset{\text{广义函数与函数卷积的结合律}}{=\!=\!=}g*\big(f*(\psi*\varphi)\big)\\&\overset{\text{广义函数之间卷积的结合律}}{=\!=\!=}(g*f)*(\varphi*\psi)\\&\overset{\text{广义函数与函数卷积的结合律}}{=\!=\!=}\big((g*f)*\varphi\big)*\psi\end{aligned}$$

(2)则$\Big(\big((f*g)*\varphi\big)*\check{\psi}\Big)(0)=\Big(\big((g*f)*\varphi\big)*\check{\psi}\Big)(0)$

$\Rightarrow\langle(f*g)*\varphi,\psi\rangle=\langle(g*f)*\varphi,\psi\rangle$,

$\Rightarrow(f*g)*\varphi=(g*f)*\varphi$广义相等，则$(f*g)*\check{\varphi}(0)=(g*f)*\check{\varphi}(0)$

$\Rightarrow\langle f*g,\varphi\rangle=\langle g*f,\varphi\rangle,\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，则$f*g=g*f$广义相等

2020考过

定理

$f*\delta=\delta*f=f$

证明：$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\langle f*\delta,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle\delta(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle=\langle f(x),\varphi(x)\rangle$

$\Rightarrow f*\delta=f$,由交换性,$\delta*f=f$

微分

$\partial^\alpha(f*g)=(\partial^{\alpha_1}f)*(\partial^{\alpha_2}g),\forall\alpha=\alpha_1+\alpha_2$;

$$\begin{aligned}&\langle\partial^\alpha(f*g),\varphi\rangle,\forall\varphi\in C_0^\infty\\=&(-1)^{|\alpha|}\langle(f*g),\partial^\alpha\varphi\rangle\\=&(-1)^{|\alpha|}\langle f(x),\langle g(y),\partial^\alpha\varphi(x+y)\rangle\rangle\\=&(-1)^{|\alpha_1|}\langle f(x),\langle\partial^{\alpha_2}g(y),\partial^{\alpha_1}\varphi(x+y)\rangle\rangle\\=&(-1)^{|\alpha_1|}\langle f*\partial^{\alpha_2}g,\ \partial^{\alpha_1}\varphi\rangle\\=&(-1)^{|\alpha_1|}\langle\partial^{\alpha_2}g*f,\ \partial^{\alpha_1}\varphi\rangle\\=&(-1)^{|\alpha_1|}\langle\partial^{\alpha_2}g(x),\langle f(y),\partial^{\alpha_1}\varphi(x+y)\rangle\rangle\\=&(\partial^{\alpha_1}f)*(\partial^{\alpha_2}g)\end{aligned}$$

支集

2023伯苓考过

$\mathrm{supp}(f*g)\subset\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,g$

[证明思路还是类似的，但用试验函数的支集$\mathrm{supp}\varphi$代替原先的点x]

即证$\forall\varphi\in C_0^\infty,\mathrm{supp}\,\varphi\cap(\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,g)=\varnothing$,一定有$\varphi\cap\mathrm{supp}(f*g)=\varnothing$

$$\forall x\in\mathrm{supp}\,f,\ \begin{cases}\forall y\in\mathrm{supp}\,g\Rightarrow x+y\in\mathrm{supp}\,f+\mathrm{supp}\,g,\varphi(x+y)=0,\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle=0\\\forall y\notin\mathrm{supp}\,g,\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle=0,\text{于是}\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle=0\end{cases}$$

即$\langle f*g,\varphi\rangle=0$，$\Rightarrow\mathrm{supp}\,\varphi\cap\mathrm{supp}(f*g)=\varnothing$

线性

卷积运算关于每个因子是线性的.