数值代数回顾

结果不对也不会扣很严重的分
按照Gauss消去法进行，LU分解怎么样操作的，考虑每一步迭代的时候，【比如做分母的元素讨论是否为0，要严谨】

五个题，每个题两个小问，写慢一点，严谨一点

题目不难，过程写仔细一点

一、求 $Ax=b$

❶ 直接法——矩阵分裂【精确解】

出一个3×3的矩阵，迭代2次/1次就够了
1. 将过程写成算法的形式，把算法写出来α(p,q)
2. 按照具体的数，按照LU分解的方式直接迭代

- $Gauss$消去法(LU分解)
  - $Gauss$变换$L_k=I-l_ke_k^T$是一个单位矩阵的秩1变换
  - A的各阶顺序主子式非0 [保证顺利进行$Gauss$消去法的前提]
    - $A=LU$, L是单位下三角，U是上三角矩阵 — 步骤
      - (1)验证A是否严格对角占优/对称正定【$Cholesky$分解(?)】or各阶顺序主子式非0，以保证$Gauss$消去可以进行下去，若不满足，则需要做列主元$Gauss$消去法
      - (2)进行$Gauss$消去 $\begin{cases} 1.\text{抄}: U\text{的第一行} = A\text{的第一行}[u(1,1:n)=a(1,1:n))] \\ 2.\text{除}: L\text{的第一列} = A\text{的第一列}/a_{11}[l(2:n,1)=a(2:n,1)/a(11)] \\ 3.\text{乘}: \text{求}l_1u_1^T[l(2:n,1)u(1,2:n)] \\ 4.\text{减}: A_2=A_2-l_1u_1^T[A(2:n,2:n)=A(2:n,2:n)-l(2:n,1)u(1,2:n)] \end{cases}$
    - 特殊矩阵
      - 严格对角占优矩阵
      - 对称正定矩阵
        - 平方根法$A=LL^T$ — 直接设出来比较系数就好了，一列一列求
        - 改进的平方根法$A=LDL^T$ — 若$i\geqslant j$，$a_{ij}=\sum_{k=1}^{j-1}d_kl_{ki}l_{kj}+d_jl_{ij}$，待定系数，一列一列求
  - 不满足A的各阶顺序主子式非0 — 列主元$Gauss$消去法：$PA=LU$，P是置换矩阵 — 算法

```
for k = 1 : n-1
    确定p(k ⩽ p ⩽ n)，使得|A(p,k)| = max{|A(i,k)| : i = k : n}
    A(k,1:n) ↔ A(p,1:n) (交换第k行和第p行)
    if A(k,k) ≠ 0
        A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k)/A(k,k)
        A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) − A(k+1:n, k)A(k, k+1:n)
    else
        stop(矩阵奇异)
    end
end
```

- $A=LU\Rightarrow LUx=b\Rightarrow$ 解三角方程 $\begin{cases}Ly=b\text{【前代法】}\\Ux=y\text{【回代法】}\end{cases}$

❷ 迭代法——古典迭代法【近似解】

- 生成迭代序列 — 生成迭代格式[矩阵分裂的角度] 将A拆成2/3项：$A=D-L-U$
  - $Jacobi$迭代 （及时更新已经更新了的指标 → $G-S$迭代）
    - $(D-L-U)x=b\Rightarrow Dx=(L+U)x+b\Rightarrow x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$
    - 迭代格式：$x_{k+1}=D^{-1}(L+U)x_k+D^{-1}b$
  - $G-S$迭代
    - $(D-L-U)x=b\Rightarrow(D-L)x=Ux+b\Rightarrow x=(D-L)^{-1}Ux+(D-L)^{-1}b$
    - 迭代格式：$x_{k+1}=(D-L)^{-1}Ux_k+(D-L)^{-1}b$
  - SOR迭代
    - $(D-L-U)x=b\Rightarrow\left(\frac{1}{\omega}D+(1-\frac{1}{\omega})D-L-U\right)x=b\Rightarrow\left(\frac{1}{\omega}D-L\right)x=\left(U-(1-\frac{1}{\omega})D\right)x+b$ $\Rightarrow(D-\omega L)x=(\omega U+(1-\omega)D)x+\omega b$
    - 迭代格式：$x_{k+1}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]x_k+\omega(D-\omega L)^{-1}b$
- 收敛性分析
  - 与常数项无关
  - 收敛 $\iff\rho(M)<1$
  - 特殊矩阵
    - $Jacobi$迭代
      - A对称，$a_{ii}>0$，$\Rightarrow Jacobi$收 $\iff A$和$2D-A$都正定
      - 严格对角占优or不可约弱对角占优 $\Rightarrow Jacobi$收
    - $G-S$迭代
      - A对称正定 $\Rightarrow G-S$收
      - 严格对角占优or不可约弱对角占优 $\Rightarrow G-S$收
    - SOR迭代
      - A实对称正定，$\omega\in(0,2)\Rightarrow SOR$收
      - 严格对角占优or不可约弱对角占优 $+\omega\in(0,1)\Rightarrow SOR$收

不要求去选最优的松弛因子，但要知道迭代格式，元素中进行的一种松弛，跟外推法是不一样的【什么意思？】

❸ 迭代法——优化角度【前提：A对称正定】

- $Ax=b$的解 $\iff\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\varphi(x)=x^TAx-2b^Tx$
  - 最速下降法
    - 选步长：$\alpha_k=\frac{p_k^Tr_k}{p_k^TAp_k}$
    - 选下降方向p_k：负梯度方向，然而$\nabla\varphi(x)=2(Ax-b)=-2r$，则选残差方向为下降方向$p_k=r_k$
    - 线性收敛的
    - 算法

```
x_0 = 初值
r_0 = b − A x_0; k = 0
while r_k ≠ 0
    k = k + 1
    α_{k-1} = (r_{k-1}^T r_{k-1}) / (r_{k-1}^T A r_{k-1})
    x_k = x_{k-1} + α_{k-1} r_{k-1}
    r_k = b − A x_k
end
```

  - 共轭梯度法【精确解】
    - 选步长$\alpha_k=\frac{r_k^Tr_k}{p_k^TAp_k}$
    - 选下降方向$p_k=r_k+\beta_{k-1}p_{k-1}$，$\beta_k=\frac{r_{k+1}^Tr_{k+1}}{r_k^Tr_k}$ 【负梯度方向r_k和上一步下降方向p_{k-1}所构成的平面上选择下降最快的方向】
    - $r_{k+1}=r_k-\alpha_kAp_k$
    - 算法

```
x_0 = 初值
r_0 = b − A x_0; k = 0
while r_k ≠ 0
    k = k + 1
    if k = 1
        p_0 = r_0
    else
        β_{k-2} = (r_{k-1}^T r_{k-1}) / (r_{k-2}^T r_{k-2})
        p_{k-1} = r_{k-1} + β_{k-2} p_{k-2}
    end
    α_{k-1} = (r_{k-1}^T r_{k-1}) / (p_{k-1}^T A p_{k-1})
    x_k = x_{k-1} + α_{k-1} p_{k-1}
    r_k = r_{k-1} − α_{k-1} A p_{k-1}
end
```

    - 正交关系 $\forall i\neq j\begin{cases}p_i^Tr_j=0\\r_i^Tr_j=0\\p_i^TAp_j=0\end{cases}$
    - 终止条件
      - 逐步扩大搜索范围，有限步终止，至多迭代n步
      - $Krylov$子空间$\mathcal{K}(A,r_0,k+1)=\text{span}\{p_0,\cdots,p_k\}=\text{span}\{r_0,\cdots,r_k\}=\text{span}\{r_0,Ar_0,\cdots,A^kr_0\}$
      - 找$Krylov$子空间的一组线性无关的标准正交基 $\Rightarrow$ 分析A的最小多项式【$\dim\mathcal{K}(A,r_0,k+1)$】
      - 问迭代什么时候终止分析$Krylov$子空间的维数

要知道步长和方向的推导

❹ 二、最小二乘法

- $\min\limits_{x\in\mathbb{R}n}\|Ax-b\|_2$
  - 解的存在唯一性条件
    - $Ax=b$有解 $\iff\text{rank}(A)=\text{rank}([A|b])$；$Ax=b$解唯一 $\iff\mathcal{N}(A)=0$
    - $\min\limits_{x\in\mathbb{R}n}\|Ax-b\|_2$任何情况下都有解，解集为$\mathcal{X}_{LS}$；$\min\limits_{x\in\mathbb{R}n}\|Ax-b\|_2$解唯一 $\iff\mathcal{N}(A)=0$
  - 求解方法
    - 正则化方法
      - $\mathcal{X}_{LS}=\{x\in\mathbb{R}^n:A^TAx=A^Tb\}$【又归结为线性方程组求解问题了】
      - 缺点：条件数翻倍，损失A的信息
    - QR分解
      - 考一个3×3矩阵的QR分解
      - $A=QR$，Q是正交阵，R是上三角矩阵
      - 对A作用正交变换，使之化为上三角的形式：$Q^TA=R$
      - 要知道是怎么变的 — 初等正交变换
        - $Householder$变换【对称的】
        - $Givens$变换

感觉好像不考（？）

这个除了考QR分解之外还能考什么呢

❺ 三、求矩阵特征值

- 幂法
  - 收敛性分析【$\|\cdot\|_\infty$单位化和$\|\cdot\|_2$单位化都可以】 — 看一下作业

7.分别应用幂法于矩阵$A=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$和$B=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&-\lambda\end{pmatrix}(\lambda\neq0)$，并考察所得序列的特性.

对于矩阵A：不妨设$\lambda>0$，取$u_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则$y_1=Au_0=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+1\\\lambda\end{pmatrix}$

$\xi_1=\|y_1\|_\infty=\lambda+1$，$u_1=\begin{pmatrix}1\\\frac{\lambda}{\lambda+1}\end{pmatrix}$，则$y_2=Au_1=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\frac{\lambda}{\lambda+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda+1}\\\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\end{pmatrix}$

$\xi_2=\|y_2\|_\infty=\frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda+1}$，$u_2=\begin{pmatrix}1\\\frac{\lambda}{\lambda+2}\end{pmatrix}$，则$y_3=Au_2=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\frac{\lambda}{\lambda+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda+2}\\\frac{\lambda^2}{\lambda+2}\end{pmatrix}$

数学归纳法可得$\xi_k=\frac{\lambda^2+k\lambda}{\lambda+k}\to\lambda$，$u_k=\begin{pmatrix}1\\\frac{\lambda}{\lambda+k}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=x_1$，收敛

应用于矩阵B：取$u_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则$y_1=Bu_0=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+1\\-\lambda\end{pmatrix}$

$\xi_1=\|y_1\|_\infty=\lambda+1$，$u_1=\begin{pmatrix}1\\-\frac{\lambda}{\lambda+1}\end{pmatrix}$，则$y_2=Bu_1=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\frac{\lambda}{\lambda+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\\\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\end{pmatrix}$

$\xi_2=\|y_2\|_\infty=\frac{\lambda^2}{\lambda+1}$，$u_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=u_0$，则$y_3=y_1$，数学归纳法得$\xi_k=\begin{cases}\lambda_1,&k\text{为奇数}\\\frac{\lambda^2}{\lambda+1},&k\text{为偶数}\end{cases}$，$u_k=\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\-\frac{\lambda}{\lambda+1}\end{pmatrix},&k\text{为奇数}\\\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},&k\text{为偶数}\end{cases}$，不收敛

10.应用幂法给出多项式$p(z)=z^n+\alpha_1z^{n-1}+\cdots+\alpha_n$的模最大根的一种算法
要求$p(z)$的模最大根，即求以$p(z)$为特征多项式的矩阵A的模最大特征值

$$\text{由于}p(z)=\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\cdots&\alpha_n\\-1&z&&&&\\&-1&z&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&-1&z&\\&&&&-1&z\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第一排加到第二排上}}\begin{vmatrix}1&\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\cdots&\alpha_n\\&z+\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\cdots&\alpha_n\\&-1&z&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&-1&z&\\&&&&-1&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z+\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\cdots&\alpha_n\\-1&z&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&-1&z&\\&&&-1&z\end{vmatrix}=|zI-A|$$

$$\text{构造}A=\begin{pmatrix}-\alpha_1&-\alpha_2&\cdots&-\alpha_n\\1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\text{，对}A\text{应用幂法，求其模最大特征值}$$

QR方法后面还要仔细复习吗 😢

认真一点 不用太关注结果，结果有分数 不是整数

  - 算法

```
μ_0 ∈ ℂ^n, ‖μ_0‖_∞ = 1
for k = 1, 2, ···
    y_k = A u_{k-1}
    ξ_k = ‖y_k‖_∞        ⟶ λ_1 (k → ∞)
    μ_k = μ_k / y_k      ⟶ x_1 (k → ∞)
end
```

- 反幂法 — 已知一个特征根做位移，对逆矩阵做幂法，求特征向量
- QR方法
  - 迭代格式

```
A_0 = A
for m = 1, 2, ···
    A_{m-1} = Q_m R_m
    A_m = R_m Q_m
end
```

  - 设A的n个特征值满足$|\lambda_1|>\cdots>|\lambda_n|>0$，设$Y$的第$i$行是$A$对应于$\lambda_i$的左特征向量，如果$Y$有$LU$分解，则由迭代格式所产生的矩阵$A_m$对角线以下的元素趋于0，同时对角元$\alpha_{ii}^{(m)}$趋向于$\lambda_i$