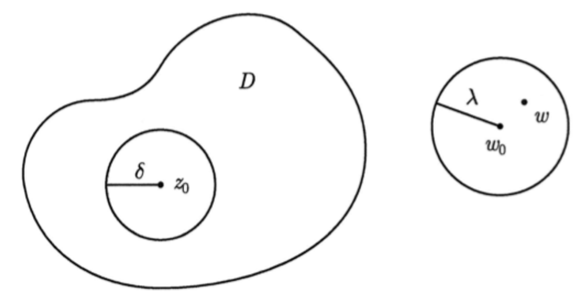
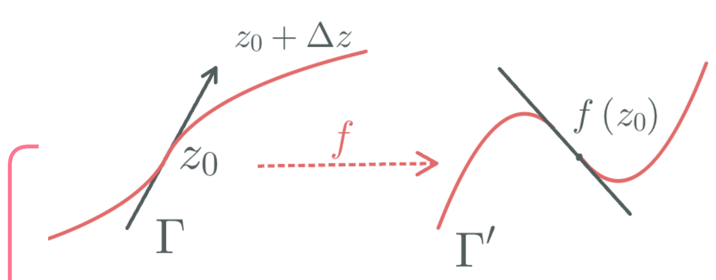
Section 6 共形映射

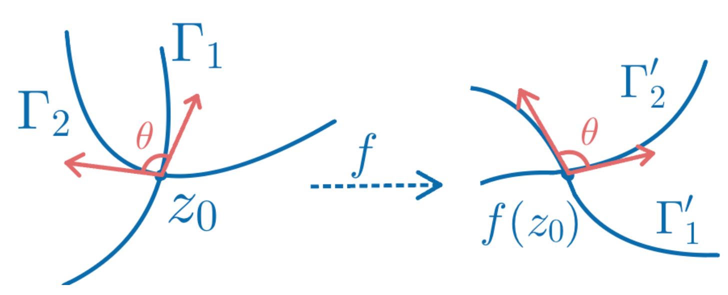
- 6.1 一些基本性质
  - 开映像原理
    - (i)对$\forall z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$及$\varepsilon > 0$，$\exists\, \delta, \lambda \in (0, \varepsilon)$，$z$的函数$f(z) - w$与$f(z) - w_0$在$V(z_0, \delta)$中有相同个数的零点，从而$V(w_0, \lambda) \subset f\left(V(z_0, \delta)\right)$.
    - (ii)$f(D)$是开域.



  - 若f在开域D中解析而且对任何$z_1 \neq z_2$有$f(z_1) \neq f(z_2)$，则称f在开域D中单叶.
  - 设f在开域D中解析
    - (i)若f在开域D上单叶，则对任何$z \in D, f'(z) \neq 0$.
    - (ii)若$z_0 \in D$，$f'(z_0) \neq 0$，则f在z_0的一个邻域中单叶.
- 6.2 保角性、导数的几何意义
  - 导数的几何意义



    - 将解析函数$f(z)$看作$\mathbb{C}$(中子集)$\to \mathbb{C}$(中子集)的映射
    - 若$f'(z_0) \neq 0, \mathrm{d}\left(f(z_0)\right) = f'(z_0)\mathrm{d}z$，$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$
    - 设Γ为经过z_0的光滑曲线，用参数方程表示：$\Gamma : z(t), t \in [a, b], z(0) = z_0, a < 0 < b$
    - f将Γ映成一条经过$f(z_0)$的曲线Γ'，则Γ'在$f(z_0)$点处也有一切向量：$f'\left(z(t)\right)z'(t)\big|_{t=0} = f(z_0)z'(0)$
    - 即当$f(z_0) \neq 0$时，f将经过z_0点一条光滑曲线映成了经过$f(z_0)$的光滑曲线，
    - 且与原曲线相比$\begin{cases} (1)\text{切方向旋转了}\operatorname{Arg} f'(z_0) \\ (2)\text{在}z_0\text{附近的“伸缩率”为}\left|f'(z_0)\right| \end{cases}$
  - 保角性
    - 若$f'(z_0) \neq 0$,则f在z_0附近具有保角性，在z_0附近相交的光滑曲线经f作用后夹角保持不变



  - 单叶解析函数也称为共形映照
  - f在开域D中单叶解析 $\Rightarrow \forall z \in D, f'(z) \neq 0 \Rightarrow f$在$D$中任何点都是保角的
  - 双全纯映射 —— 若$f : D \to f(D)$是一个单叶解析函数，则反函数$f^{-1} : f(D) \to D$也是一个单叶解析函数
  - 目标：个两个区域u,v，我们想知道这两个区域是否存在共形映射
    【若存在，我们就称这两个区域共形等价/双全纯等价】
  - 因此，在研究解析函数的性质的时候，这两个函数可以看作是没有任何区别的！
  - 若$f : \Omega_1 \to \Omega_2$为双全纯映射，则$\Omega_1$与$\Omega_2$上的解析函数之间有一一对应关系

$$\begin{tikzcd} \Omega_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ \Omega_2 \arrow[ur, "g \circ f^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

- 6.6 Riemann映照定理
  - 本质上只有研究单位圆盘和整个复平面这来两种情况
  - 设Ω为$\mathbb{C}$中单连通真子集，$z_0 \in \Omega$，则$\exists$唯一的共形映射f：$\Omega \to D(0, 1), s.t.\, f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$
    $\Downarrow$
    只需研究$\begin{cases} \text{单位圆盘}D(0, 1) \\ \text{整个复平面}\mathbb{C} \end{cases}$
  - 推论：$\mathbb{C}$中任意两个单连通真子集一定双全纯等价
    - 注意：(1)一定是单连通的
      (2)$\mathbb{C}$与$D(0, 1)$不是双全纯等价的
  - 根据$Riemannn$映照定理中单位圆盘的特殊性，将$D(0, 1)$记为$\mathbb{D}$
  - $Schwarz$定理
    - 设$f \in H(\mathbb{D})$且满足$|f(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{D}, f(0) = 0$，则有
    - (1) $|f(z)| \leqslant |z|$,若该不等式在某一点$z_0 \neq 0$处取到等号，则$\exists\, \theta \in \mathbb{R}, s.t.\, f(z) = e^{i\theta} z$
    - (2) $|f'(0)| \leqslant 1$,若该不等式取到等号，则$\exists\, \theta \in \mathbb{R}, s.t.\, f'(z) = e^{i\theta} z$
    - 理解：(1) $|f(z) - 0| \leqslant |z - 0|$ 【压缩映射】
      [$\forall z \in \mathbb{D}$，z到原点的距离在f作用后不变大，而且若有一个点z_0在f作用后与原点的距离保持不变，则f只能是一个旋转]
      (2) $|f'(0)| \leqslant 1$ 【局部压缩映射】
- 6.3 开域的解析同构与解析自同构
  - 解析自同构
    - 设Ω为$\mathbb{C}$中区域，则Ω到自身的一个双全纯映射叫做Ω上的一个解析自同构
    - 将Ω上的所有解析自同构的集合记为$\operatorname{Aut}\Omega$(对复合运算构成群)
  - 找出所有的$\operatorname{Aut}\Omega$
    - (1) :旋转(固定O点)：$z \longrightarrow e^{i\theta} z (\theta \in \mathbb{R})$
    - (2) :$\forall a \in \mathbb{D}, \varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \bar{a}z}$，具有如下性质：$\begin{cases} (i)|z| < 1 \iff |\varphi_a(z)| < 1 \\ (ii)\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z, \forall z \in \mathbb{D}\text{，即}\varphi_a^{-1} = \varphi_a, \varphi_a(a) = 0; \varphi_a(0) = a \end{cases}$
      φ_a也叫做交换a和0的对合同自同构
    - 找出了单位圆盘上所有的自同构
    - 定理：设$f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$，$\exists\, a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}, s.t.\, f(z) = e^{i\theta} \dfrac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \forall z \in \mathbb{D}$
- 6.4 分式线性变换