Section 2 解析函数

2.1一个复变量的函数

- 单复平面函数
  - 定义域与值域都是$\mathbb{C}$的函数
  - 一个复函数相当于两个二元的实函数
    - $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
      - $u(x,y)=\dfrac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}$
        $v(x,y)=\dfrac{f(z)-\overline{f(z)}}{2i}$
- 多值函数
  - 若对于定义域中一点，在值域中有多个点（不唯一）与之相对应，则称为一个“多值函数”【不满足函数定义】

2.3 导数

- 定义
  - z沿任何方向趋近于z_0
    - f定义在开域D上，$z_0\in D$，则$f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$
- 解析函数
  - 若$f(z)$在z_0点的某一邻域中可导，则称f在z_0处解析
    若$f(z)$在区域D中每一点都可导，则称$f(z)$为D上的解析函数
  - D上的解析函数的全体记为$H(D)$
  - 根据定义，解析函数定义域的全体一般默认为（连通）开集
  - 若f在$\mathbb{C}$上解析，则称f为整函数

2.4 $Cauchy-Riemann$方程

- $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$定义在开域D上，若f在$z_0=x_0+iy_0$可导 $\iff \begin{cases}u\text{和}v\text{在}(x_0,y_0)\text{可微}\\ \text{在}z_0=x_0+iy_0\text{处有}C-R\text{方程}\end{cases}$
- C-R方程
  - $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}$
- $f'(z)=u'_x+iv'_x$

2.5 解析函数

- 设f是一个复变函数，实部与虚部可微
  $\begin{cases}z=x+iy\\ \overline{z}=x-iy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2}\end{cases}$
  若把z和$\overline{z}$看成独立的变量
  $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\end{cases}$
  则$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}+i\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$只是一个定义的符号，本身并不代表任何极限含义，只是如此记号
- $f=u+iv$满足$C-R$方程 $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$
- 初等解析函数
  - a. 复系数多项式
    - 整函数
      - $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$
  - b. 有理函数
    - $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中$P(z),Q(z)$是多项式，且$(P,Q)=1$
    - $f(z)$在$\mathbb{C}$上除去Q的零点处解析
  - c. 指数函数
    - $z=x+iy$
      $e^z=e^x\cdot e^{iy}=(\cos y+i\sin y)e^x$
    - 性质
      - $e^{z_1+z_2+\cdots+z_n}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}\cdots e^{z_n}$
      - $e^{z+2\pi in}=e^z$
      - z的实部决定指数的模长，虚部决定它的辅角
        - $|e^z|=e^{\mathrm{Re}z}$
          $\mathrm{Arg}\ e^z=\mathrm{Im}\ z+2k\pi i$
      - e^z的值域是$\mathbb{C}\backslash\{0\}$
      - $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$不存在
  - d. 三角函数
    - $\begin{cases}\cos z=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin z=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{cases}$
    - $\cos\theta$和$\sin\theta$都是以2π为周期的，三角公式也都成立
    - 但$\cos\theta$和$\sin\theta$在$\mathbb{C}$上是无界的
      - 在复变里放缩可就万万不能用$|\cos\theta|\leqslant 1$了
    - $\cos z$和$\sin z$的零点全在实轴上
- 一些多值函数的例子
  - 对数函数
    - 指数函数不是单射 $\longrightarrow$ 定义对数函数是指数函数的\"反函数"
    - 由于e^z可取$\mathbb{C}\backslash\{0\},\forall z\neq 0$，都可以取对数
    - $\log z=\{w\in\mathbb{C}|\ e^w=z\}$
      设$w=x+iy,e^x\cdot x^{iy}=z$
      $\begin{cases}e^x=|z|\\ e^{iy}=\mathrm{Arg}\ z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\ln|z|\\ y=\mathrm{Arg}\ z\end{cases}$
      $\log z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\ z$
    - 若没有特别说明，$\log z$就表示$z\neq 0$的对数主值，$\arg z\in(-\pi,\pi)$