

推导位势积分公式：利用第二类Green公式，取v=1/r

令 $v = \frac{1}{r}$ ，代入 *Green* 公式， 设 $B_\varepsilon(Q)$ 是以 Q 为圆心， ε 为半径小球， $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$, P 是动点， $|PQ| = r$

则 $v = \frac{1}{r} \in C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, 在 Ω_ε 上使用 *Green* 公式， u 仍为一般的 $C^2(\Omega_\varepsilon) \cap C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$

$$\text{则} \iiint_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \, dx = \iint_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

$$\text{把这个空心小球的两部分拆开：} \iint_{\Omega_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right] dx = \iint_{\partial \Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS \quad (*)$$

其中因为 $\frac{1}{r}$ 是基本解的主项，即 $\Delta c_3 \left(\frac{1}{r} \right) = \delta$, 则在 Ω_ε 中有 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \Rightarrow \iint_{\Omega_\varepsilon} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dx_p = 0$. 则等式 (*) 左端 $= - \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta u dx$

$$\text{下考虑} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS : r = \varepsilon, \text{ 则为 } -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} u dS - \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} dS$$

$$\text{由【积分中值定理】得，} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} u dS = u(Q^*) 4\pi \varepsilon^2, \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \frac{\partial u}{\partial r} dS = \frac{\partial u}{\partial r}(\tilde{Q}) 4\pi \varepsilon^2, \text{ 其中 } Q^*, \tilde{Q} \in \partial B_\varepsilon(Q)$$

$$\text{则} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\partial B_\varepsilon(Q)} \left[u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] dS = -4\pi u(Q), \text{ 此时原方程化为 } - \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx = \iint_{\partial \Omega} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + 4\pi u(Q)$$

$$\text{整理得到位势积分公式：} u(Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{\partial \Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iint_{\partial \Omega} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta u dx \right]$$

位势积分公式 ($n = 3$)

证明调和函数的可去奇点定理：在以A为球心R为半径的小球上研究问题，构造补充定义后的函数u1，用W衡量两个函数的差距，手段是再构造一个V比较V和W，先让Q→A，极值原理证明|W|≤V在小圆环上成立，再让ε→0，证明在去心圆盘上成立

当 $n = 2$ 时，若 $u(Q)$ 在 A 点附近调和，且 $u(Q) = o(1) \ln r(A, Q)$ ，则可补充定义， $s.t. \Delta u = 0, x \in B_\delta(A)$

证明：取小球 $B_R(A) \subset \Omega$ 作为研究的对象， $B_\delta(A) \subset B_R(A)$

设 u_1 满足 $\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_{\partial B_R} = u|_{\partial B_R} \end{cases}$ ，下证明 u_1 和 u 在除了 A 点的地方都离得很近

【手段：构造辅助函数】令 $W = u_1 - u \Rightarrow \begin{cases} \Delta W = 0, B_R \setminus B_\delta \\ W|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}$

令 $V_\varepsilon = \varepsilon \left(\ln \frac{1}{r(A, Q)} - \ln \frac{1}{R} \right)$ ，则 V_ε 满足 $\begin{cases} \Delta V_\varepsilon = 0 \\ V_\varepsilon|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}$ ，进而通过比较 V_ε 和 W 来说明 u_1 和 u 离得很近

由条件， $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{u(Q)}{\ln r(A, Q)} = 0$ ，则有 $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{u_1(Q)}{\ln r(A, Q)} = 0 (Q \rightarrow A \text{ 时 } \ln r(A, Q) \rightarrow \infty, \text{ 而 } u_1(Q) \text{ 的大小能被边界所控制住})$

则 $\lim_{Q \rightarrow A} \frac{|W|}{\ln r(A, Q)} = \lim_{Q \rightarrow A} \frac{|u_1 - u|}{\ln r(A, Q)} = 0$ ，而显然 $\forall \varepsilon > 0, \lim_{Q \rightarrow A} \frac{|W|}{V_\varepsilon} = 0$ ，则 $\exists \delta_0, s.t. |W| \leq V_\varepsilon, \forall x \in \partial B_{\delta_0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(W - V_\varepsilon) = 0, B_R \setminus B_{\delta_0} & \text{, 在去掉小圆盘上调和} \\ (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_R} = 0 & \text{, 在大圆盘边界上是0} \\ (W - V_\varepsilon)|_{\partial B_{\delta_0}} \leq 0 \text{ 或 } \geq 0 & \text{, 在小圆盘边界上保号} \end{cases}$ 由于极值原理 $\Rightarrow W - V_\varepsilon$ 在 $B_R \setminus B_{\delta_0}$ 上保号，令 $\delta_0 \rightarrow 0^+$ 仍成立

则 $|W| \leq V_\varepsilon$ 在 $B_R \setminus \{A\}$ 上成立，再让 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，则 $|W| = |u_1 - u| = 0, B_R \setminus \{A\}$ ，即可在 $u(A)$ 处补充定义使之成为 u_1

对x做Fourier变换，ode方程求出F(ξ)，再做逆变换，凑成Gauss积分

$$\text{等式两边对 } x \text{ 做 } Fourier \text{ 变换：} F_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{\partial}{\partial t} E(x, t) - a^2 \Delta E(x, t) \right) (\xi, t) = (F_{x \rightarrow \xi} \delta(x, t)) (\xi, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = \delta(t) \text{ 即为 } \hat{E}(\xi, t) \text{ 的一阶线性非齐次 } ode \text{ 方程, 解得为 } \hat{E}(\xi, t) = H(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

令 $v(t) = e^{a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)} \hat{E}(\xi, t)$ ，这样方程化为 $v'(t) = \delta(t), v(t) = H(t) + C$ ，因为做 *Fourier* 变换要求 $E(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x,t}^{n+1})$ ，

则也要 $\hat{E}(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_{x,t}^{n+1})$ ，所以要求 $t \rightarrow -\infty$ 时 $\hat{E}(\xi, t) = (H(t) + C) e^{a^2 |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t)}$ 的任意解导数都趋于0，则 $C = 0$

$$\text{则 } E(x, t) = F^{-1} \left[H(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \xrightarrow[\text{把 } a\sqrt{2t}\xi \text{ 当成 } \xi, \text{ 利用相似变换的性质}]{F^{-1} \left(e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \right) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\frac{x}{a\sqrt{2t}}|^2}{2}}} } H(t) \left(a\sqrt{2t} \right)^{-n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x}{a\sqrt{2t}} \right|^2} = H(t) (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, t > 0$$

热传导算子的基本解

$$(P) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, (P_2) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$(P_1) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}, \text{ 若 } u_1 \text{ 为 } P_1 \text{ 的解, } u_2 \text{ 为 } P_2 \text{ 的解, 则 } u_1 + u_2 = u \text{ 为 } (P) \text{ 的解 (线性所以才能叠加)}$$

Step 1: 求解 (P1)

和基本解的求法基本一致，只是把H(t)换成了hatφ(ξ),再利用先卷积再变化=先变化再相乘的性质

step 1: 证明当 $u(x, t)$ 满足 (P_1) 时, $u(x, t) = E(x, t) *_{(x)} \varphi(x)$

$$(P_1) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \text{ 关于 } x \text{ 做 } Fourier \text{ 变换} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) + a^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, & t > 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t}, u(t, x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left(\hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right)$ 【和求基本解的做法一致】

$$\text{由于 } \widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2, \text{ 令 } \begin{cases} f_1(t, x) = F^{-1} \left(e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right) = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \\ f_2(x) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2 = u(t, x) = \widehat{f_1 * f_2} = (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} *_{(x)} \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \text{就是基本解去掉 } H(t), \text{ 方法一样的, 凑成 } Gauss \text{ 积分} &= (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy, t > 0 \\ &= E(x, t) *_{(x)} \varphi(x) \text{ 【直接就能看出来】} \end{aligned}$$

要验证 $\langle \delta(t, x), f(x) \rangle = \delta(t) f(0)$ ，即等价于说明 $\delta(t, x)$ 的“时间”和“空间”是可以分离的

接下来要验证： $u(x, t) = E(x, t) *_{(x)} \psi(x)$ 满足 (P_1) ：

$$\textcircled{1} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) (E(x, t) *_{(x)} \psi(x)) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) E(x, t) \right] *_{(x)} \psi(x) = \delta(x, t) *_{(x)} \psi(x) = \langle \delta(y, t), \psi(x - y) \rangle_y \stackrel{?}{=} \delta(t) \psi(x) = 0$$

claim： $\langle \delta(t, x), f(x) \rangle = \delta(t) f(0)$

证明：将 $\delta(x, t)$ 磨光，取磨光核 $\Phi_\varepsilon(x, t)$ ，令 $\delta_\varepsilon(t, x) = \delta(t, x) * \Phi_\varepsilon(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ， $\forall \psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ，有

$$\langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \rangle, \psi(t) = \int \psi(t) dt \int \delta_\varepsilon(t, x) f(x) dx = \iint \delta_\varepsilon(t, x) f(x) \psi(t) dx dt = \langle \delta_\varepsilon(t, x), f(x) \psi(t) \rangle$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得 $\langle \delta(t, x), f(x) \rangle, \psi(t) = \langle \delta(t, x), f(x) \psi(t) \rangle = f(0) \psi(0) = f(0) \langle \delta(t), \psi(t) \rangle = \langle f(0) \delta(t), \psi(t) \rangle \Rightarrow \langle \delta(t, x), f(x) \rangle = \delta(t) f(0)$

先证明基本解载全空间上的积分是1，再利用该引理将绝对值分成两段，

小球内积分自然可任意小，小球外积分要将基本解展开写，换元后易趋于0

$$\textcircled{2} \text{ 验证 } \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, x) *_{(x)} \varphi(x) = \varphi(x), \text{ 即证 } \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t, x) = \delta(x), \text{ 即证 } \forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle E(t, x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \varphi(0)$$

$$\text{claim：} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1, t > 0, \text{ proof：} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \stackrel{\text{令 } 2\sqrt{t}z=x}{=} (\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = 1$$

则 $E(x, t) \in L_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，由连续性可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |x| < \delta$ 时， $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$

$$\text{则 } \left| \langle E(x, t), \varphi(x) \rangle - \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \stackrel{\varphi(0)=\varphi(0) \int E(x,t) dx}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right|$$
$$= \left| \int_{B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right|$$

$$\left| \int_{B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq \varepsilon \left| \int_{B_\delta(0)} E(x, t) dx \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq 2 \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} E(x, t) dx \stackrel{\text{令 } 2\sqrt{t}z=x}{=} (\pi)^{\frac{n}{2}} \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{\delta}{2\sqrt{t}}}(0)} e^{-|z|^2} dz \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

综上，即得 $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \langle E(t, x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \varphi(0)$

综上，得到了 $t > 0, u_1(x, t) = E(t, x) *_{(x)} \varphi(x) = H(t) (4\pi a^2 t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy$ 为 (P_1) 的解

Step 2: 利用Duhamel原理求解 (P2)

构造 $U(x, t, \tau)$ 将 (P_2) 转化为 (P_1) 的形式

$$(P_2) \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

【齐次化原理 (Duhamel原理)】将 (P_2) 化为齐次方程非零初值问题 【即将 (P_2) 形式的方程转化为 (P_1) 形式的方程】

构造辅助函数 $U(x, t, \tau)$ 满足 $\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) U = 0, & t > \tau \\ U(x, t, \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$ ，令 $u(x, t) = \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$

$$\text{具体来说，} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau = U(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial U(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau = f(x, t) + \int_0^t a^2 \Delta U(x, t, \tau) d\tau = f(x, t) + a^2 \Delta u(x, t) \\ u|_{t=0} = \int_0^0 \dots d\tau = 0 \end{cases}$$

从而就可由 u_1 直接写出 $U(x, t, \tau)$ 的解，把积分写开变成 $n+1$ 重积分就是 u_2 的解

$$\text{利用 } (P_1) \text{ 的解, 写出 } \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) U = 0, & t - \tau > 0 \\ U(x, t, \tau)|_{t=\tau=0} = f(x, \tau) \end{cases} \text{ 的解}$$

$$U(x, t, \tau) = E(x, t - \tau) *_{(x)} f(x, \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi a^2(t - \tau))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y, \tau) dy = (4\pi a^2(t - \tau))^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} dy$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{把解出的 } U(x, t, \tau) \text{ 代回 } u(x, t) &= \int_0^t U(x, t, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t (4\pi a^2(t - \tau))^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)} \right) dy d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \boxed{(4\pi a^2(t - \tau))^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)} \right)} dy d\tau \end{aligned}$$

后面要证 $E(x, t) * (H(t) f(x, t)) = u_2(x, t)$ Green函数, Heat Kernel

验证 $u_2(x, t)$ 为 (P_2) 的解：通过 *Duhamel* 原理的推导，已经保证了 $u_2(x, t), t > 0$ 必然满足非齐次方程 (P_2) 的所有要求

于是令 $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ ，为 $(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ 的解

一个解ode初值问题的套路

思路：试求 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 变量分离的形式解，将 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 代入 (P_1) ，试求 $X(x)$ 和 $T(t) \Rightarrow u(x, t) = X(x)T(t)$ 为形式解，再验证 $u(x, t)$ 满足方程，初边值条件 $\Rightarrow u(x, t)$ 为 (P_1) 的解，又由极值原理的唯一性结论 $\Rightarrow u(x, t) = X(x)T(t)$ 为 (P_1) 的唯一解

$$\text{(1) 代入方程 } X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0 \\ \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} \triangleq -\mu \Rightarrow X''(x) + \mu X(x) = 0$$

$$\text{(2) 满足边界条件：} \begin{cases} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(l, t) = X(l)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(0) = X(l) = 0$$

$$\Rightarrow \text{从而得到形式解应满足 } ode \text{ 方程 } \begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} : \mu < 0, \text{ 设 } \mu = -\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\mu}$$

$$\Rightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}x} \Rightarrow \text{代入边界条件：} \begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{\mu}l} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}l} = 0 \end{cases}$$

有唯一解需满足系数行列式不为0 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\mu}l} & e^{-\sqrt{\mu}l} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow u$ 解为平凡解，舍去

$$\textcircled{2} : \mu = 0, X(x) = C_1 x + C_2 \Rightarrow \text{边界条件：} \begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \\ \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \text{解为平凡解：} X(x) \equiv 0, \text{ 舍去}$$

$$\textcircled{3} : \mu > 0, X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}x), \text{ 边界条件：} \begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \sin(\sqrt{\mu}l) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \sin(\sqrt{\mu}l) = 0 \Rightarrow \mu_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, k = 1, 2, \dots \Rightarrow X_k(x) = C_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Fourier方法求

齐次方程齐次边值 (P_1)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0, & t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \text{ 的解}$$

数理方程
第二次小测