第五章 曲面上的曲线

5.1 测地曲率与测地挠率

C是S上的一条曲线，$\varphi(s)=P(u(s),v(s))$，曲线C上各点处的单切向量为$T(s)=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\dfrac{\partial P}{\partial u}+\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\dfrac{\partial P}{\partial v}$

令$e_1=T(s), e_2=n(s)\times T(s), e_3=n(s)$，于是$\{\varphi(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$是$C$上幺正活动标架(不一定是$Frent$标架!)

因而有 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=e_1(s), \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}e_1(s)\\e_2(s)\\e_3(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa_g(s)&\kappa_n(s)\\-\kappa_g(s)&0&\tau_g(s)\\-\kappa_n(s)&-\tau_g(s)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1(s)\\e_2(s)\\e_3(s)\end{pmatrix}$

则 $\begin{cases}\text{测地曲率}\quad \kappa_g(s)=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s},n\times T\right\rangle=\left(\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s},n,T\right)=(n,\varphi'(s),\varphi''(s))\\ \text{法曲率}\quad \kappa_n(s)=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle\\ \text{测地挠率}\quad \tau_g(s)=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}(n\times T)}{\mathrm{d}s},n\right\rangle=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\times T+n\times\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s},n\right\rangle=\left\langle\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\times T,n\right\rangle=\left(\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s},T,n\right)\end{cases}$

对于曲线C取定幺正标架$\{\varphi(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$，
同时C上又有$Frent$标架：$\{\varphi(s);T(s),N(s),B(s)\}$，设$\alpha=\angle(N,n)$

则 $\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\\0&-\cos\alpha&\sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

测地曲率、测地挠率、法曲率和曲率、挠率的关系

$\begin{cases}\kappa_n=\kappa\cos\alpha\\ \kappa_g=\kappa\sin\alpha\\ \tau_g=\tau+\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\kappa=\sqrt{\kappa_n^2+\kappa_g^2}\\ \tau=\tau_g-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{s}}\left(\arctan\dfrac{\kappa_g}{\kappa_n}\right)\end{cases}$

法曲率与测地挠率

$Meusnier$定理

(1)$C_1,C_2\subset S$且在P_0处相切，则 $\begin{cases}\kappa_n(C_1,P_0)=\kappa_n(C_2,P_0)\\ \tau_g(C_1,P_0)=\tau_g(C_2,P_0)\end{cases}$

(2)$\kappa_n(T)=\dfrac{\mathrm{II}(T,T)}{\mathrm{I}(T,T)}$

(3)$\tau_g(T)=\mathrm{II}(n\times T,T)$

κ_n和τ_g在自然标架$\left\{P;\dfrac{\partial P}{\partial u},\dfrac{\partial P}{\partial v},n\right\}$下的表达式

设$\left\{P;\dfrac{\partial P}{\partial u},\dfrac{\partial P}{\partial v},n\right\}$为右手标架，又 $\begin{cases}\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2\\ \mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2\\ T=x\dfrac{\partial P}{\partial u}+y\dfrac{\partial P}{\partial v},\langle T,T\rangle=1\end{cases}$

则有 $\begin{cases}\kappa_n(T)=Lx^2+2Mxy+Ny^2\\ \tau_g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}y^2&-xy&x^2\\E&F&G\\L&M&N\end{vmatrix}\end{cases}$

$Euler$公式

设e_1,e_2为主方向，对应主曲率为κ_1,κ_2，又$\{e_1,e_2,n\}$为右手标架，$T=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$

则 $\begin{cases}\kappa_n(T)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\\ \tau_g(T)=\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{2}\sin 2\theta\end{cases}$

测地挠率函数

$\tau_g(X)=\dfrac{\mathrm{II}(n\times X,X)}{\mathrm{I}(n\times X,X)}$

测地曲率

$Liouville$公式

对正交参数(u,v)，C的有向曲线，则测地曲率$\kappa_g=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial\ln E}{\partial v}+\dfrac{\sin\theta}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial\ln G}{\partial u}$

θ是曲线与u线的夹角(T与$\dfrac{\partial P}{\partial u}$的夹角)。而且$C$的弧长参数为$s$，表示为$u(s),v(s)$，$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\end{cases}$

5.2 曲面上的特殊曲线

定义

- 渐进线
  - 若C在每点的切向量均为该点的渐进方向，即$\kappa_n(C')=0$，则称C为S的渐进线
  - 曲面在P有渐进方向 $\iff$ $\det\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\leqslant 0$
- 曲率线：若C在每点的切向量均为该点的主方向，即$\kappa_n(C')=\kappa_1$或κ_2，则称C为S的曲率线　$\tau_g(C')=0$
- 测地线：若C上处处有$\kappa_g=0$，则称C为测地线

$Rodriques$定理

S上的曲线$\varphi(s)$是曲率线 $\iff$ $\exists\lambda(s), s.t.\ \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}=-\lambda(s)\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$，而且$\lambda(s)$恰是相应点处的主曲率

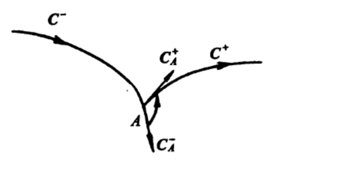
$Enneper$定理

S上两条曲率不为0、彼此不同的渐进线，在交点处它们的测地挠率τ_g分别为$\sqrt{-K}$和$-\sqrt{-K}$

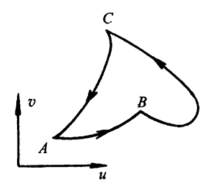
5.3 $Gauss-Bonnet$公式

转角

设C为平面上的有向曲线，点$A\in C$将其分为两段，前一段记为C^-，后一段记为C^+；
它们在点A处的切向量分别记为C_A^-和C_A^+，则 $\begin{cases}\text{有向角}\angle(C_A^-,C_A^+)\\ \alpha_A(C)\in(-\pi,\pi)\end{cases}$
若C在A光滑(可微)，则$\alpha_A(C)=0$
若C是平面上一条分段光滑的有向闭曲线，则可定义$\alpha(C)=\sum\limits_{A\in C}\alpha_A(C)$为$C$的转角



设n为曲面S的一个固定的单位法向量场，$D=\triangle ABC$是S上的一个单连通的弯曲三角形，
记$\mathbf{D}=(D,n),\mathbf{C}=\partial D$，则有$\iint_D K\mathrm{d}S+\int_{|C|}\kappa_g\mathrm{d}l+\alpha(C)=2\pi$，
$\alpha(C)=\sum\limits_{P\in C}\alpha_P(C)=\alpha_A(C)+\alpha_B(C)+\alpha_C(C)$为$C$的转角



定理

平面上有向不自交分段光滑的比曲线C，满足$\int_{|C|}\kappa^C\mathrm{d}l+\alpha(C)=\varepsilon(C)\cdot 2\pi$，$\kappa^C$是$C$的相对曲率

C如上，以$\theta(s)$表示x方向到C的切方向的夹角(θ为多值，取$\theta(s)$为C上除去不光滑点外的单值可为函数)，
则 $\int_{|C|}\kappa^C\mathrm{d}l+\alpha(C)=\varepsilon(C)\cdot 2\pi$

5.4 联络

令π_p是$\mathbb{R}^3$到$T_p(S)$的投影，即$\pi_p(D_{P_i}P_j)=\pi_p\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial u^i}\right)=\Gamma_{ij}^kP_k|_p$

协变微分

$DY=(\mathrm{d}Y)^\top$

设$Y=Y^1r_u+Y^2r_v=Y^\alpha r_\alpha$
$\nabla_Y=(\mathrm{d}(Y^\alpha r_\alpha))^\top=\mathrm{d}(Y^\alpha r_\alpha)-\langle\mathrm{d}(Y^\alpha r_\alpha),n\rangle\cdot\vec{n}=(\mathrm{d}Y^\alpha+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Y^\beta\mathrm{d}u^\gamma)r_\alpha$

协变导数

$\nabla_XY=\left(X^\beta\dfrac{\partial}{\partial u^\beta}Y^\alpha+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\alpha Y^\gamma\right)r_\beta$　Y沿X方向的协变导数　若$X(t)=r(u(t),v(t))$，则$\dfrac{DY}{\mathrm{d}t}=(\dfrac{\mathrm{d}Y^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Y^\beta\dfrac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}t})r_\alpha$

5.5 测地线

设$P(s)$是S上以s为弧长参数的曲线，则$P(s)=P(\gamma^1(s),\gamma^2(s))$为测地线 $\iff$ $\gamma^k(s)''+\sum\limits_{i,j}\Gamma_{ij}^k\gamma^i(s)'\gamma^j(s)'=0,k=1,2$

- $P(s)$为测地线 $\iff$ $P(s)''$与S正交，$P(s)''$与n差一个倍数
- 设$p\in S,X\in T_pS,|X|=1,s_0\in\mathbb{R}$，则存在唯一的测地线$\gamma$，$s.t.\ \gamma(s_0)=p,\gamma'(s_0)=X$
- 设$\gamma(s)\subset S$，s为弧长参数，又设$p=\gamma(a),q=\gamma(b)$，若γ是p与q间最短曲线，则γ为测地线
- $p\in S$，则$\exists p$的邻域U，$s.t.\forall p_1,p_2\in U$，有唯一最短弧长的测地线连接p_1,p_2

5.6 平行与平行移动

设$P(s)$是S上一条曲线，$Y(s)\in\mathscr{D}^1(s)$是沿$P(s)$的S的切向量场，设$X(s)=\dfrac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s}$；
如果$\nabla_{X(s)}Y(s)=0$，$\forall s$，则称$Y(s)$是沿$P(s)$平行的向量场

由于$\nabla_{X(s)}Y(s)=\pi\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)\right)$，因而$\nabla_{X(s)}Y(s)=0\iff\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)=\lambda(s)n(P(s))$，即$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Y(s)$与曲面$S$正交

设$\gamma(t)=P(\gamma^1(t),\gamma^2(t))$是正则曲线，$X(t)$是沿$\gamma(t)$的可微向量场，且$X(t)=\sum X^iP_i$，则$X(t)$沿$\gamma$平行
当且仅当$\dfrac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t}+\sum\limits_{i,j}\Gamma_{ij}^kX^i\dfrac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}=0$，$k=1,2$

设$\gamma(t)$是S上的正则曲线，又设$\widetilde{X}\in T_{\gamma(t_0)}S$，则存在唯一的向量场$X(t)$沿$\gamma(t)$平行，而且$X(t_0)=\widetilde{X}$

平行移动

$X(t)$为沿$\gamma(t)$平行的向量场，$X(t_0)=\widetilde{X}$，称$X(t)$是$\widetilde{X}$沿$\gamma(t)$的平行移动
设$\gamma(t)$是S上连结$p=\gamma(a),q=\gamma(b)$的可微曲线，以$\|\gamma(a,b)$表示沿γ的平行移动，则$\|\gamma(a,b):T_pS\to T_qS$

5.7 法坐标系与测地极坐标系

设(ρ,θ)是S在p点附近的测地极坐标系，则有$G(\rho,\theta)$，使得：
(1) $\mathrm{I}-\mathrm{d}\rho^2+G(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta^2$
(2) $\lim\limits_{\rho\to0}\sqrt{G}=0,\lim\limits_{\rho\to0}\left(\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial\rho}\right)=1$
(3) $\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial\rho^2}+K\sqrt{G}=0$

若S的$Gauss$曲率为常数，则由 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial\rho^2}+K\sqrt{G}=0\\ \lim\limits_{\rho\to0}\sqrt{G}=0\\ \lim\limits_{\rho\to0}\left(\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial\rho}\right)=1\end{cases}$

可得(1)$K=0,\sqrt{G}=\rho$
(2)$K=\dfrac{1}{a^2}>0,\sqrt{G}=a\sin\dfrac{\rho}{a}$
(3)$K=-\dfrac{1}{a^2}<0,\sqrt{G}=a\sinh\dfrac{\rho}{a}$

5.8 可展曲面

若曲面S有参数表示$P(u,v)=\sigma(u)+v\cdot l(u)$，其中$l$是单位向量，则称$S$是直纹面
当$l(u)=l_0$为常向量时，称S为柱面
当$\sigma(u)=\sigma_0$为常点时，称S为锥面
当$l(u)=\sigma'(u)$时，称S为切线面

定义

若直纹面满足$(\sigma',l,l')=0$，则称S为可展曲面

等价命题

(1)S为可展曲面；
(2)在v曲线(即S的直母线)上，切平面不变；
(3)$Gauss$曲率$K=0$；
(4)局部上S与平面之间有保长对应；
(5)S为平面、柱面、锥面或切线面.