第二章 一阶方程的解法

- 检查是否存在形如x=0，y=0的特解
  - 每次涉及到除法的时候都要特别注意有没有分母为0的情况！
- 观察是否是特殊方程
  - 可分离变量的方程
    - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\varphi(y)\Rightarrow\begin{cases}\varphi(y)=0\\ \int\frac{1}{\varphi(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C\end{cases}$
    - 转化为分离变量的方程
      - $(1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow$ 令 $u=\frac{y}{x}$
      - $(2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\Rightarrow$ 令 $u=ax+by+c$
      - $(3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$
        - 若 $c_1=c_2$
          - 令 $u=\frac{y}{x}$
        - 若 $c_1\neq c_2$
          - $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$
            - 求两直线交点 (α,β)，令 $\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$
          - $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$
            - $(i)a_1=b_1=0$
              - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$
            - $(ii)b_1=b_2=0$
              - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}\right)$
            - $(iii)\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$
              - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right)=f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right)$
    - 例题
      - 例1 : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$
      - 例2 : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$
      - 例3 : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$
  - 形如 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$
    - 恰当方程
      - 判断方法 : $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
      - 解题方法
        - 法1 : $\int P\mathrm{d}x+\varphi(y)=\int Q\mathrm{d}y+h(x)$, 得 $u(x,y)=C$
        - 法2 : 线积分 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$
    - 求出积分因子转化为恰当方程
    - 积分因子
      - 判断方法 : 计算 $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$
      - 解题方法
        - 注意：关于y的式子有负号关于x的式子没有
        - 看是否有 $\begin{cases}\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P(x,y)}=H(y), & \Longrightarrow \text{令}\mu=e^{-\int H(y)\mathrm{d}y}\\ \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}=J(x), & \Longrightarrow \text{令}\mu=e^{\int J(x)\mathrm{d}x}\end{cases}$
    - 例题
      - 例1 : $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2+4y^3)\mathrm{d}y=0$
      - 例2 : $y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$
  - 一阶非齐次线性微分方程
    - 形如 : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$
    - 解题方法
      - 直接代公式 : $y=e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+c\right)$
    - 例题
      - 例1 : 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x-y^2}$ 的通解，并求 $y(0)=2$ 时的特解
  - 伯努利微分方程
    - 形如 : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^n$
    - 解题方法
      - 令 $z=y^{1-n}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$
    - 例题
      - 例1 : 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6\frac{y}{x}-xy^2$ 的通解
- 一阶隐式微分方程
  - 形如 $y=f(x,y')$ 或 $x=f(y,y')$
    - 令 $p=y'$，则由 $y=f(x,y')$ 得 $p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$
  - 不含 y(或 x)的方程 $F(x,y')=0$ 或 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ p=\psi(t)\end{cases}$
    - 令 $p=y'$, $\mathrm{d}y=\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\Rightarrow\begin{cases}y=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C\\ x=\varphi(t)\end{cases}$
  - 例题
    - 例1 : 解方程 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$
    - 例2 : 解方程 $x^3+y'^3-3xy'=0$，其中 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$