3.8 特殊曲面

- 旋转曲面
  - 设$z=f(y)$是yz平面上的曲线，将其绕z轴旋转所得的曲面的方程为$P(u,v)=(u\cos v,u\sin v,f(u))$
- 极小曲面
  - 平均曲率$H\equiv 0$的曲面
  - 旋转极小曲面为悬链面，即悬链线旋转而成的曲面　　悬链线方程：$f(u)=\pm a\ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$
- 常曲率曲面
  - $Gauss$曲率K为常数的曲面称为常曲率曲面
  - $f(u)=\pm\int\sqrt{\dfrac{1-C+Ku^2}{C-Ku^2}}\mathrm{d}u$

    (1)$K=0:f(u)=Au+B,A=\pm\sqrt{\dfrac{1-C}{C}}$，$A=0$时为平面，$A\neq 0$时为锥面，$K=0$时旋转曲面为圆柱面

    (2)$K=\dfrac{1}{a^2},(a>0)$，则$f(u)=\pm\int\sqrt{\dfrac{a^2(1-C)+u^2}{Ca^2-u^2}}\mathrm{d}u,C=b^2(b>0)$，$f(u)=\pm\int\sqrt{\dfrac{a(1-b^2)+u^2}{a^2b^2-u^2}}\mathrm{d}u$

    特别当$b=1$时，$f(u)=\pm\int\dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\mathrm{d}u=\mp\sqrt{a^2-u^2}+C_0$，此时$S$为球面

    而$b^2<1$时或$b^2>1$时S就不是球面了，这说明正常数曲率面不仅仅有球面

    (3)$K=-\dfrac{1}{a^2}<0(a>0)$，则$f(u)=\pm\int\sqrt{\dfrac{a^2(1-C)-u^2}{Ca^2+u^2}}\mathrm{d}u,C<1$，令$C=1-b^2$，则$f(u)=\pm\int\sqrt{\dfrac{a^2b^2-u^2}{a^2(1-b^2)+u^2}}\mathrm{d}u$

    设$b^2=1,u=a\cos\varphi(0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，则$f=\pm a[\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-\sin\varphi]$

    在YOZ平面上，f给出的曲线是$\begin{cases}y=a\cos\varphi\\ z=\pm a[\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-\sin\varphi],0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，这是两条曳物线，在$y=a,z=0$处有一个尖点

    由此曲线旋转而成的曲面称为伪球面

3.9 保长对应与保角对应

- $\sigma:D_1\longrightarrow D_2$　　$\begin{cases}u_2=\sigma u_1=f(u_1,v_1)\\ v_2=\sigma v_1=g(u_1,v_1)\end{cases}$
- $\sigma:S_1\longrightarrow S_2$　　$\sigma P_1(u_1,v_1)=P_2(\sigma u_1,\sigma u_2)=P_2(f(u_1,v_1),g(u_1,v_1))$
- $\sigma_*:T_pS_1\longrightarrow T_{\sigma(p)}S_2$　　$\sigma_*\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial P_1}{\partial v_1}\end{pmatrix}=\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial P_2}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial P_2}{\partial v_2}\end{pmatrix}$　　σ_*称为σ诱导的切映射：$\sigma_*\mathrm{d}P_1=\mathrm{d}P_2$
- $\sigma^*:S_2\longrightarrow S_1$【拉回映射】
- $\sigma^*:S_2$的二次微分式$\longrightarrow S_1$的二次微分式
  - $\sigma^*\,\mathrm{I}_2(X,Y)=\mathrm{I}_2(\sigma_*X,\sigma_*Y)$
  - $*\,\sigma^*(\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}v_2)\begin{pmatrix}A(u_2,v_2)&B(u_2,v_2)\\ B(u_2,v_2)&C(u_2,v_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_2\\ \mathrm{d}v_2\end{pmatrix}=(\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}v_1)\left(\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right)\begin{pmatrix}A&B\\ B&C\end{pmatrix}\left(\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right)^T\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_1\\ \mathrm{d}v_1\end{pmatrix}$
    $=(\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}v_1)\begin{pmatrix}\tilde{A}&\tilde{B}\\ \tilde{B}&\tilde{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u_1\\ \mathrm{d}v_1\end{pmatrix}$
- 等距映射（保长映射）
  - 保长映射等价命题
    - 定义：$(\sigma_*X,\sigma_*Y)=(X,Y),\forall X,Y\in T_pS_1$
    - $|\sigma_*X|=|X|$
    - $\mathrm{I}_2(\sigma_*X,\sigma_*Y)=\mathrm{I}_1(X,Y)$　或也可表示为$\sigma^*\,\mathrm{I}_2(X,Y)=\mathrm{I}_1(X,Y)$，若选用相同的参数$(u,v)$，则有$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}_2$
  - 定理：保长映射下，若选用适用参数系，第一基本量是一样的，特别的，总曲率K是一样的
- 保角映射
  - 保角映射等价命题
    - 定义：存在映射$\sigma:S_1\to S_2,s.t.(\sigma_*X,\sigma_*Y)=\rho^2(p)(X,Y),\rho(p)$是定义在$S_1$上的正连续函数 —— $\rho(p)\equiv 1$时σ为保长映射
    - $\sigma^*(\,\mathrm{I}_2)=\rho^2\,\mathrm{I}_1$
    - $\left(\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right)\begin{pmatrix}E_2&F_2\\ F_2&G_2\end{pmatrix}\left(\dfrac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\right)^T=\rho^2\begin{pmatrix}E_1&F_1\\ F_1&G_1\end{pmatrix}$
    - 对于S_1,S_2的使用参数系，有$E_2=\rho^2E_1,F_2=\rho^2F_1,G_2=\rho^2G_1$
    - $|\sigma_*X|=\rho^2|X|,\forall p\in S,X\in T_pS_1$
    - $\angle(\sigma_*X,\sigma_*Y)=\angle(X,Y),\forall X,Y\in T_pS_1$

3.7 结构方程

- 基本方程
  - $\begin{cases}\dfrac{\partial P_j}{\partial u^i}=\Gamma_{ij}^kP_k+b_{ij}n\\ \dfrac{\partial n}{\partial u^j}=-\omega_j^kP_k+c_jn\end{cases}$

    满足$c_j=0,b_{ij}=\Omega_{ij},\omega_j^k=g^{ki}\Omega_{ij}$，联络系数$\Gamma_{ij}^k=\dfrac{1}{2}g^{lk}\left(\dfrac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}+\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$，$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$【下指标可互换】

    其中，$\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}\\ g^{21}&g^{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\ g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{g}\begin{pmatrix}g^{22}&-g^{12}\\ -g^{21}&g^{11}\end{pmatrix}$【$g$加上标表示取逆元素】
- 结构方程
  - $Gauss$方程　$\dfrac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\dfrac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial u^i}+\Gamma_{ij}^s\Gamma_{ks}^l-\Gamma_{kj}^s\Gamma_{is}^l=\Omega_{ij}g^{lm}\Omega_{mk}-\Omega_{kj}g^{lm}\Omega_{mi}$
  - $Codazzi$方程　$\Gamma_{ij}^l\Omega_{lk}+\dfrac{\partial\Omega_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{kj}^l\Omega_{li}+\dfrac{\partial\Omega_{kj}}{\partial u^i}$
  - 证明

    由求导顺序可换，即$\dfrac{\partial}{\partial u^k}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial u^i}\right)=\dfrac{\partial}{\partial u^i}\left(\dfrac{\partial P_j}{\partial u^k}\right)$和$pde$的存在唯一性定理得

    $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial P_j}{\partial u^i}\right)&=\frac{\partial}{\partial u^k}(\Gamma_{ij}^lP_l+\Omega_{ij}n)\\&=\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}P_l+\Gamma_{ij}^l(\Gamma_{kl}^sP_s+\Omega_{kl}n)+\frac{\partial\Omega_{ij}}{\partial u^k}n+\Omega_{ij}(-g^{ms}\Omega_{km}P_s)\\&=\left(\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}+\Gamma_{ij}^s\Gamma_{ks}^l-\Omega_{ij}g^{ml}\Omega_{km}\right)P_l+\left(\Gamma_{ij}^l\Omega_{kl}+\frac{\partial\Omega_{ij}}{\partial u^k}\right)n\end{aligned}$$

    $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial P_j}{\partial u^k}\right)&=\frac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{jk}^lP_l+\Omega_{jk}n)\\&=\frac{\partial\Gamma_{jk}^l}{\partial u^i}P_l+\Gamma_{jk}^l(\Gamma_{il}^sP_s+\Omega_{il}n)+\frac{\partial\Omega_{jk}}{\partial u^i}n+\Omega_{jk}(-g^{ms}\Omega_{si}P_m)\\&=\left(\frac{\partial\Gamma_{jk}^l}{\partial u^i}+\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is}^l-\Omega_{jk}g^{lm}\Omega_{mi}\right)P_l+\left(\Gamma_{jk}^l\Omega_{il}+\frac{\partial\Omega_{jk}}{\partial u^i}\right)n\end{aligned}$$

    即有$\begin{cases}\dfrac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}+\Gamma_{ij}^s\Gamma_{ks}^l-\Omega_{ij}g^{ml}\Omega_{km}=\dfrac{\partial\Gamma_{jk}^l}{\partial u^i}+\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is}^l-\Omega_{jk}g^{lm}\Omega_{mi}\\ \Gamma_{ij}^l\Omega_{kl}+\dfrac{\partial\Omega_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{jk}^l\Omega_{il}+\dfrac{\partial\Omega_{jk}}{\partial u^i}\end{cases}$
- $Gauss$绝妙定理
  - 总曲率K由曲面的第一基本形式完全决定
  - 记$-R_{kij}^l=\dfrac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\dfrac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial u^i}+\Gamma_{ij}^s\Gamma_{ks}^l-\Gamma_{kj}^s\Gamma_{is}^l$

    $R_{kijs}=R_{kij}^lg_{ls}=\left(\Omega_{kj}g^{lm}\Omega_{mi}-\Omega_{ij}g^{lm}\Omega_{mk}\right)g_{ls}=\Omega_{kj}\Omega_{si}-\Omega_{ij}\Omega_{sk}$【注意符号】

    则$R_{1212}=\Omega_{11}\Omega_{22}-\Omega_{12}^2$，故$K=-\dfrac{R_{1212}}{g_{12}^2-g_{11}g_{22}}$
- $Gauss$曲率K的几何解释：$Gauss$映射
  - 总曲率K就是球面的重新参数化的第一基本形式

    对于曲面S上的任何一点p，将其单位法向量$\vec{n}(p)$平移到原点，则其终点落在单位球面S^2上

    这样的映射$\tilde{n}:S\to S^2,p\mapsto\vec{n}(p)$，称为$Gauss$映射

    设$D\subseteq S,D'=\bar{n}(D)\subseteq S^2$分别是$p,n(p)$的邻域，以$A,A'$表示其面积

    $\lim\limits_{D\to p}\dfrac{A'}{A}=\lim\limits_{D\to p}\dfrac{\iint_D\left|\dfrac{\partial n}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial n}{\partial u^2}\right|du^1du^2}{\iint_D\left|\dfrac{\partial P}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial P}{\partial u^2}\right|du^1du^2}=K(p).$

    $Gauss$曲率是面积之比，反映了曲面的弯曲程度
- 第三基本形式
  - $\mathrm{III}=\langle\mathrm{d}n,\mathrm{d}n\rangle$为第三基本形式　　$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0$
- 曲面的唯一性定理
  - 设S_1,S_2是定义在同一个参数区域$D\subset E^2$上的两个正则参数曲面，若在每一点$(u^1,u^2)\in D$，

    曲面S_1和S_2都有相同的第一基本形式和第二基本形式，则曲面S_1和S_2在空间E^3的一个刚体运动下是彼此重合的
- 曲面的存在性定理
  - 设$D\subset e^2$是单连通区域，设$\varphi=g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$，$\psi=\Omega_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$是定义在$D$内的两个二次微分形式，

    其中g_{ij}在D上至少是二阶连续的，Ω_{ij}至少是一阶微分连续的，$g_{ij}=g_{ji},\Omega_{ij}=\Omega_{ji}$，且矩阵$(g_{ij})$是正定的

    构造$\Gamma_{ij}^k=\dfrac{1}{2}g^{lk}\left(\dfrac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}+\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$，如果$g_ij,\Omega_{ij},\Gamma_{ij}^k$满足$Gauss-Codazzi$方程，

    则存在u_0的一个邻域$U\subset D$以及定义在U上的曲面$\vec{r}(u^1,u^2):U\to E^3,s.t.\varphi$和$\psi$分别是$\mathrm{I}$和$\mathrm{II}$