第三章 复积分、Cauchy定理

3.2 复积分

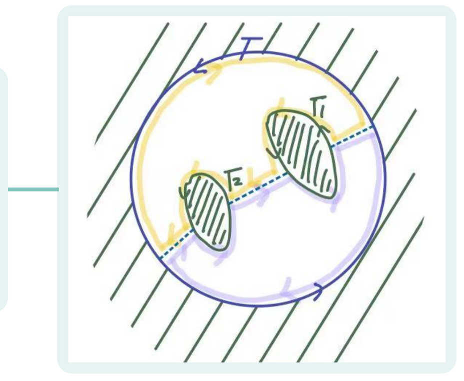
- $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$
- $\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$
  - 设 $z(t) = a + re^{it}$
    $$\int_{|z-a|=r} \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n \cdot e^{nit}} \cdot rie^{it}\mathrm{d}t = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{(n-1)it}}\mathrm{d}t$$
    $$= \begin{cases} 2\pi i & ,n = 1 \\ \dfrac{i}{r^{n-1}}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos((1-n)t) + i\sin((1-n)t)\mathrm{d}t\right) & ,n \neq 1 \end{cases}$$
- 定理
  - 若 $f(z)$ 在 Γ 上有界(即 $\exists M > 0, s.t.\ |f(z)| \leqslant M, \forall z \in \Gamma$)，则 $\left|\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant M|\Gamma|$

3.3 Cauchy积分定理

- Cauchy定理
  - 设 Γ 是一条简单闭路径，其内部为 D，$\overline{D} = D \cup \Gamma$，若 $f \in H(\overline{D})$，则 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = o$
  - 加强版
    - 设 Γ 是一条简单闭路径，其内部为 D，$\overline{D} = D \cup \Gamma$，若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = o$

3.4 单连通与多连通

- 单连通
  - 若 D 为单连通区域，$f \in H(D)$，则 f 沿任何一条闭路径的积分为0
    - 逆命题也成立
- 多连通
  - 设 Γ 为一条正向简单闭路径，其内部为 D，$\{\Gamma_k\}_{k=1}^n$ 为 D 中的 n 条正向的简单闭路径，其内部分别为 $\{D_k\}_{k=1}^n$，且 $\{D_k\}_{k=1}^n$ 两两互不相交，若 $f \in H\left(\overline{D} \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k\right)$，则有
    $$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z)\mathrm{d}z$$



- Ω 是具有分段光滑边界的有界区域，$f \in H(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$，则有 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0$

3.5 原函数、积分与路径无关

- 设 Ω 为单连通区域，$f \in H(\Omega)$，则 $f(z)$ 在 Ω 上有原函数

3.6 Cauchy型积分、Cauchy积分公式、导数公式

Cauchy积分公式说明：解析函数在区域内部的取值由其在边界上的取值所唯一确定

- 设 Γ 是一条简单闭路径，D 为其内部，$f(z) \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则对 $\forall z \in D$，有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega$

Cauchy积分公式的主要推论

1. 无穷阶可导
   - **f在一点处解析，则在该点处任意阶可导**
   - $f(z)$ 在 D 中任意阶可导，且 $\forall n \geq 1$，$\forall z \in D$，有 $f^n(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}}d\omega$
   - 推论：$f = u + iv$ 在 D 中解析 $\iff \begin{cases} u, v\text{在}D\text{中有连续偏导数} \\ \text{满足}C-R\text{方程} \end{cases}$
2. 解析函数的平均值性质
   - **几何意义：f(z)若在圆盘上解析，则f(z)在圆心处取值等于f(z)在圆周上的积分平均值**
   - $z_0 \in C$，$r > 0$，若 $f(z)$ 在 $D(z_0, r)$ 上解析，在 $\overline{D(z_0, r)}$ 上，则有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^i\theta)d\theta$
3. 最大模原理
   - 引理：设 f 为区域 D 中的一个解析函数，如果 $|f(z)|$ 在 D 中是常数，则 $f(z)$ 是常数
   - 设 $f(z)$ 是区域 D 中的一个解析函数，如果 $|f(z)|$ 在 D 中某一点处取得最大值，则 $f(z)$ 在 D 中为常值函数
   - 若 $f(z) \in H(D) \cap C(\overline{D})$ 且 $f(z)$ 不是常值函数，则对 $\forall f(z)$，$z \in \overline{D}$，有 $\sup\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \sup\limits_{z \in \partial D} |f(z)|$
   - 例题
     - 例1：$f \in H(D)$，f 非常值函数，若 $|f(z)|$ 在 $z \in D$ 处取到最小值，则 $f(z)$ 在 z 中一定有零点。
       $proof$：反证：若 $|f(z)| > 0, \forall z \in D$，$\dfrac{1}{f(z)} \in H(D)$
       由最大模原理 $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|$ 在 D 中取不到最大值，则 $|f(z)|$ 在 $z \in D$ 处取不到最小值，矛盾！
     - 例2：$f \in H(D)$，f 非常值函数，则 $\mathrm{Re}f$ 和 $\mathrm{Im}f$ 在 D 中取不到最大值.
       $proof$：构造 $g(z) = e^{f(z)} \in H(D)$，则 $g(z)$ 也非常值函数
       则 $|g(z)| = e^{\mathrm{Re}f}$，由 $|g(z)|$ 在 D 中取不到最大值且 e^x 单增，得 $\mathrm{Re}f$ 在 D 中也取不到最大值
       类似地，令 $h(z) = e^{-if(z)}$，则 $|h(z)| = e^{\mathrm{Im}f}$，同理 $\mathrm{Im}f$ 在 D 中也取不到最大值.
     - 只要 f 不是常值函数，$\mathrm{Re}f$ 和 $\mathrm{Im}f$ 的最大值和最小值都取不到
4. Cauchy不等式
   - $a \in C, r > 0, f(z) \in H(\overline{D(a,r)})$，则有：$|f^n(a)| = \left|\dfrac{n!}{2\pi}\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leq \dfrac{n!}{r^n}\sup\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$
5. Liouville定理
   - 有界整函数一定为常值函数
6. Morera定理
   - $f(z)$ 为区域 D 上的复变函数，则 $f(z) \in H(D)$ 的充要条件为：
     - ① $f(z) \in C(D)$;
     - ② $f(z)$ 在 D 中任意一条简单闭路径上，只要闭路径与"单点"同伦，有 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$

补充：Cauchy型积分

- 设 Γ 为 $\mathbb{C}$ 中的一条路径，$f(z)$ 为 Γ 上的连续(或者只要求可积就好)函数，定义 $g(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\mathrm{d}w, \forall z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$(定义在 $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 上的函数)
- 类似Cauchy积分公式的证明，可以证明 $g(z) \in H(\mathbb{C}\setminus\Gamma)$，且 $g^n(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}}d\omega$

调和函数

- $C-R$ 方程：$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \Rightarrow$ 对于任意的 u，是否存在对应的函数 v 满足 $C-R$ 方程呢？
  $$\Downarrow$$
  函数 u 需要满足：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$
  于是，若 u, v 是一个解析函数的实部和虚部，则 $\Delta u = 0$，$\Delta v = 0$.
  - v 为 u 的一个"共轭"调和函数
- **单连通区域上的任一个调和函数均可看成某个解析函数的实部/虚部**
  - 定理：设 D 为单连通区域，$u(x, y)$ 为 D 上的一个调和函数，则 u 在 D 上存在共轭调和函数.
- 定义
  - D 为 R^2 中的区域，设 u 为 D 上的一个二阶连续可导的二元(实值)函数，若在 D 中有 $\Delta u = 0$，则称 u 为 D 上的一个调和函数.
  - D 上的任何一个解析函数的实部与虚部均为调和函数.
  - 由于 $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right); \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$
    $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$
    故 u 调和 $\iff \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$
- 性质
  - 任意阶可导：设 u 是 D 上的调和函数，则 $u \in C^\infty(D)$
  - 平均值性质：设 u 在 $D(a, r)$ 上调和，在 $\overline{D(a, r)}$ 上连续，则 $u(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$
    - 与调和函数的定义等价：在任一小圆盘上都满足平均值性质 $\Updownarrow$ 调和函数
  - 最大值/最小值原理：u 是 D 上的非常值调和函数，则 u 在 D 上取不到最大值和最小值.