第五章 微分和积分

Lebesgue定理

若f是$[a,b]$上的实值单增函数，则 $\begin{cases} f\text{在}[a,b]\text{上几乎处处可导(数分)} \\ f' \in L([a,b]) \\ \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b)-f(a) \end{cases}$

证明：当$x>b$时补充定义$f(x)=f(b)$

令$g_n(x)=n\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)$，则$g_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f'(x)$

$$\begin{aligned}\int_a^b g_n\mathrm{d}x &= n\int_a^b \left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)\mathrm{d}x \\ &= n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - n\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant f(b)-f(a)\end{aligned}$$

由于g_n非负可测，由$Fatou$引理 $\int_a^b f'\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n\mathrm{d}x \leqslant f(b)-f(a)$

$*$定理中$<$可能严格取到，即要求f连续单增；
例如令f为$[0,1]$上的$Cantor$函数，即f'在$[0,1]\backslash P$上恒为0

$\begin{cases} m(P)=0 \\ m([0,1]\backslash P)=1 \end{cases}$，从而$f' \overset{a.e.}{=\!=} 0$，$\int_0^1 f'\mathrm{d}x = 0 < 1 = f(1)-f(0)$

【另：书上给的例5.1.2是一个严格单增函数，但导数也是几乎处处为0】

有界变差函数

定义

设f是定义在有界闭区间$[a,b]$上的实值函数
(1)设σ是$[a,b]$的一段分割，$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$
定义f关于分割σ的变差为$V(f,\sigma)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$
(2)令$T_a^bf=\sup\{V(f,\sigma):\sigma\text{为}[a,b]\text{的分割}\}$，叫做$f$在$[a,b]$上的全变差
(3)若$T_a^bf<+\infty$，则称f为$[a,b]$上的有界变差函数(简称BV)

例子

- $[a,b]$上的单调函数为BV
- 连续和有界变差没有什么必然联系(连续 $\nrightarrow$ 有界变差)
  反例如$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$，连续，但不是$BV$(振荡的太快了)

命题

- 若f,g均为$[a,b]$上的BV，则$f\pm g$也是$[a,b]$上的BV，且$T_a^b(f\pm g)\leqslant T_a^bf+T_a^bg$
- 若f为$[a,b]$上的BV，点$c\in(a,b)$，则$T_a^bf=T_a^cf+T_c^bf$

定理

- 设f是$[a,b]$上的实值函数，则：f是$BV \iff f$可以表示成$[a,b]$上2个单调递增的函数的差
- 推论：f是$[a,b]$上的$BV\Rightarrow f$几乎处处可导且$f'\in L([a,b])$

绝对连续函数

定义

"有限多段两两互不相交的开区间"改成"可数多段开区间"也成立

设f是定义在有界闭区间$[a,b]$上的实值函数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0, s.t.$ 对$[a,b]$中有限多段两两互不相交的小开区间$\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$，只要有$\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$，就有$\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$

性质

- $*$【线性】若f,g绝对连续，则$\alpha f+\beta g$绝对连续
- $*$【和一致连续的关系】在有界闭区间上：绝对连续 $\Rightarrow$ 一致连续(连续)
- $*$【复合函数】若f和φ分别在$[a,b]$和$[p,q]$上绝对连续，$\varphi(x)\in[a,b]$且严格单增，则$f(\varphi(t))$在$[p,q]$上绝对连续
- $*$【和BV的关系】绝对连续 $\Rightarrow$ 有界变差

  绝对连续
  $\Downarrow$ $\Downarrow$
  一致连续 有界变差

命题

设f是$[a,b]$上的实值函数，则：f绝对连续 $\iff$ f可以表示成$[a,b]$上2个绝对连续的单增函数的差

Lebesgue积分中$N-L$公式

分析

我们关心的问题是：f为定义在$[a,b]$上的实值函数，$\int_a^b f'\mathrm{d}x \overset{?}{=} f(b)-f(a)$

真正想问的是：什么条件下$\int_{x_1}^{x_2} f'\mathrm{d}x = f(x_2)-f(x_1), \forall x_1,x_2\in[a,b]$

定义：设$f\in L([a,b])$，则将$\int_a^x f\mathrm{d}x + C$当作$f$的原函数；

那么什么条件下，f是f'的一个不定积分？

一方面，若$f\in L([a,b])$，令$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$

由积分的绝对连续性(第四章的)，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall E\subset[a,b],m(E)<\delta$，就有$\left|\int_E f\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$

取$[a,b]$中有很多段两连互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$，满足$\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$，则$m\left(\bigcup_{k=1}^n(b_k-a_k)\right)<\delta$

而$\sum_{k=1}^{\infty}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^n\left|\int_a^{b_k}-\int_a^{a_k}f\mathrm{d}x\right|=\sum_{k=1}^n\left|\int_{a_k}^{b_k}f\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\int_{a_k}^{b_k}|f|\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x<\varepsilon$

从而F在$[a,b]$上绝对连续，即$[a,b]$上的任一个$Lebesgue$可积函数，其不定积分永远是绝对连续的

事实上，这一条件是充要的

定理

在Lebesgue积分中Newton-Leibnitz公式成立的充要条件是绝对连续

设f是$[a,b]$上的实值函数，则：f绝对连续 $\iff \forall x\in[a,b]$，有$\int_a^x f'\mathrm{d}x=f(x)-f(a)$

推论

- $(i)f$在$[a,b]$上绝对连续 $\iff$ f是$[a,b]$上某个$Lebesgue$可积函数的不定积分
- $(ii)f$是绝对连续的且$f'(x)\overset{a.e.}{=\!=}0$，则$f(x)\overset{a.e.}{=\!=}c$
- $(iii)f$在$[a,b]$单增，且$\int_a^b f'\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$，则$f$绝对连续

变上限积分求导的问题 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$

不定积分

- 引理：$f\in L([a,b])$，若$\forall(x_1,x_2)\subseteq[a,b]$，$\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x=0$，则$f\overset{a.e.}{=\!=}0$
- 定理：$f\in L([a,b])$，若$\forall x\in[a,b]$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\overset{a.e.}{=\!=}f(x)$

  把等号成立的点取出来

- $Lebesgue$点
  - $f\in L(\mathbb{R}), x\in\mathbb{R}$，若$\lim_{l\to0}\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=0$，则称点$x$为$Lebesgue$点
  - 定理
    - 只要可积，几乎所有点都满足变上限积分求导等于原函数

      $\forall f\in L(\mathbb{R})$，$\mathbb{R}$中几乎所有点都是$f$的$Lebesuge$点
    - $f\in L([a,b])$，x是f的$Lebesgue$点，则有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=f(x)$
- $\begin{cases} f\in R([a,b]) \iff f\text{在}[a,b]\text{几乎处处为连续点，在连续点}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=f(x) \\ f\in L([a,b]) \iff f\text{在}[a,b]\text{几乎处处为}Lebesgue\text{点，在}Lebesgue\text{点}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=f(x)\end{cases}$

密度

- E在$\mathbb{R}$中可测，$x\in\mathbb{R}$，定义E在x处的密度$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}m([x-h,x+h]\cap E)$
- 定理
  - $(1)a.e.\forall x\in E$，有E在x处密度$=1$
  - $(2)a.e.\forall x\notin E$，有E在x处密度$=0$

定理

- f在$[a,b]$上可微，且$f'\in L([a,b])$，则f在$[a,b]$上绝对连续
- 对比
  - 数分中：f在$[a,b]$上可导，且$f'\in R([a,b])$，则$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$
  - 实变中：f在$[a,b]$上几乎处处可导，且$f'\in L([a,b])$，则$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$

分部积分

f,g在$[a,b]$上绝对连续 $\Rightarrow fg$也在$[a,b]$上绝对连续，且$\int_a^b f'g\mathrm{d}x+\int_a^b gf'\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)$

积分的变量替换

$x=\varphi(t)\in[a,b]$，其中φ为$[a,b]$上严格单增的映射，且φ绝对连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_p^q f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t$