第五章 曲面上的曲线

5.1测地曲率与测地挠率

C是S上的一条曲线，$\varphi(s)=P(u(s),v(s))$，曲线C上各点处的单切向量为$T(s)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\partial P}{\partial u}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\partial P}{\partial v}$

令$e_1=T(s),e_2=n(s)\times T(s),e_3=n(s)$，于是$\{\varphi(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$是$C$上幺正活动标架(不一定是$Frent$标架!)

因而有$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=e_1(s)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}e_1(s)\\e_2(s)\\e_3(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa_g(s)&\kappa_n(s)\\-\kappa_g(s)&0&\tau_g(s)\\-\kappa_n(s)&-\tau_g(s)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1(s)\\e_2(s)\\e_3(s)\end{pmatrix}$$

则
$$\begin{cases}\text{测地曲率}\quad \kappa_g(s)=\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_2\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s},n\times T\right\rangle=\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s},n,T\right)=(n,\varphi'(s),\varphi''(s))\\ \text{法曲率}\quad \kappa_n(s)=\left\langle\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle\\ \text{测地挠率}\quad \tau_g(s)=\left\langle\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s},e_3\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{d}(n\times T)}{\mathrm{d}s},n\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\times T+n\times\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s},n\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\times T,n\right\rangle=\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s},T,n\right)\end{cases}$$

对于曲线C取定幺正标架$\{\varphi(s);e_1(s),e_2(s),e_3(s)\}$,
同时C上又有$Frent$标架：$\{\varphi(s);T(s),N(s),B(s)\}$,设$\alpha=\angle(N,n)$

则
$$\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\\0&-\cos\alpha&\sin\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$$

测地曲率、测地挠率、法曲率和曲率、挠率的关系

$$\begin{cases}\kappa_n=\kappa\cos\alpha\\ \kappa_g=\kappa\sin\alpha\\ \tau_g=\tau+\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\end{cases}\quad\text{所以}\begin{cases}\kappa=\sqrt{\kappa_n^2+\kappa_g^2}\\ \tau=\tau_g-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{s}}\left(\arctan\frac{\kappa_g}{\kappa_n}\right)\end{cases}$$

$Meusnier$定理

(1)$C_1,C_2\subset S$且在P_0处相切，则$\begin{cases}\kappa_n(C_1,P_0)=\kappa_n(C_2,P_0)\\ \tau_g(C_1,P_0)=\tau_g(C_2,P_0)\end{cases}$

(2)$\kappa_n(T)=\frac{\mathrm{II}(T,T)}{\mathrm{I}(T,T)}$

(3)$\tau_g(T)=\mathrm{II}(n\times T,T)$

测地挠率函数

$$\tau_g(X)=\frac{\mathrm{II}(n\times X,X)}{\mathrm{I}(n\times X,X)}$$

κ_n和τ_g在自然标架$\left\{P;\frac{\partial P}{\partial u},\frac{\partial P}{\partial v},n\right\}$下的表达式

设$\left\{P;\frac{\partial P}{\partial u},\frac{\partial P}{\partial v},n\right\}$为右手标架，又$\begin{cases}\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2\\ \mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2\\ T=x\frac{\partial P}{\partial u}+y\frac{\partial P}{\partial v},\langle T,T\rangle=1\end{cases}$

则有
$$\begin{cases}\kappa_n(T)=Lx^2+2Mxy+Ny^2\\ \tau_g(T)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}y^2&-xy&x^2\\E&F&G\\L&M&N\end{vmatrix}\end{cases}$$

$Euler$公式

设e_1,e_2为主方向，对应主曲率为κ_1,κ_2,又$\{e_1,e_2,n\}$为右手标架，$T=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$

则$\begin{cases}\kappa_n(T)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\\ \tau_g(T)=\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}\sin 2\theta\end{cases}$

$Liouville$公式

对正交参数(u,v),C的有向曲线，则测地曲率$\kappa_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{\cos\theta}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}+\frac{\sin\theta}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}$

θ是曲线与u线的夹角(T与$\frac{\partial P}{\partial u}$的夹角)。而且$C$的弧长参数为$s$,表示为$u(s),v(s)$,$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\end{cases}$

5.2 曲面上的特殊曲线

定义

- 渐进线
  - 若C在每点的切向量均为该点的渐进方向，即$\kappa_n(C')=0$，则称C为S的渐进线
  - 曲面在P有渐进方向 $\iff\det\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\leqslant 0$
- 曲率线：若C在每点的切向量均为该点的主方向，即$\kappa_n(C')=\kappa_1$或κ_2，则称C为S的曲率线
- 测地线：若C上处处有$\kappa_g=0$，则称C为测地线

$Rodriques$定理

S上的曲线$\varphi(s)$是曲率线 $\iff\exists\lambda(s),s.t.\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}=-\lambda(s)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$,而且$\lambda(s)$恰是相应点处的主曲率

$Enneper$定理

S上两条曲率不为0、彼此不同的渐进线，在交点处它们的测地挠率τ_g分别为$\sqrt{-K}$和$-\sqrt{-K}$

5.3 $Gauss-Bonnet$公式

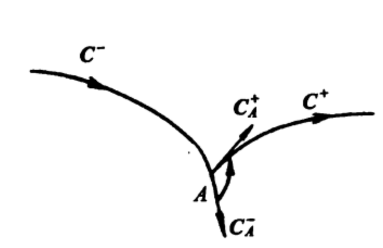
转角

设C为平面上的有向曲线，点$A\in C$将其分为两段，前一段记为C^-,后一段记为C^+;

它们在点A处的切向量分别记为C_A^-和C_A^+,则$\begin{cases}\text{有向角}\angle(C_A^-,C_A^+)\\ \alpha_A(C)\in(-\pi,\pi)\end{cases}$

若C在A光滑(可微),则$\alpha_A(C)=0$

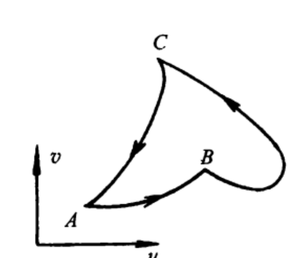
若C是平面上一条分段光滑的有向闭曲线，则可定义$\alpha(C)=\sum\limits_{A\in C}\alpha_A(C)$为$C$的转角



设n为曲面S的一个固定的单位法向量场，$D=\triangle ABC$是S上的一个单连通的弯曲三角形，

记$\mathbf{D}=(D,n),\mathbf{C}=\partial D$，则有$\iint_D K\mathrm{d}S+\int_{|C|}\kappa_g\mathrm{d}l+\alpha(C)=2\pi$,

$\alpha(C)=\sum\limits_{P\in C}\alpha_P(C)=\alpha_A(C)+\alpha_B(C)+\alpha_C(C)$为$C$的转角



定理

平面上有向不自交分段光滑的比曲线C，满足$\int_{|C|}\kappa^C\mathrm{d}l+\alpha(C)=\varepsilon(C)\cdot 2\pi$

C如上，以$\theta(s)$表示x方向到C的切方向的夹角(θ为多值，取$\theta(s)$为C上除去不光滑点外的单值可为函数),

则$\int_{|C|}\kappa^C\mathrm{d}l+\alpha(C)=\varepsilon(C)\cdot 2\pi$