函数基本逼近 插值逼近&最佳逼近

引言

- 函数$f(x)$是被逼近函数;$\varphi(x)$是逼近函数
- 两种意义下的逼近
  - 局部逼近：在$f(x)$某点附近逼近；最常用$Taylor$逼近法
  - 整体逼近

2.2 Lagrange插值

（样本点仅涉及被逼函数值）

- 问题特征：已知$n+1$个点$f(x_i)=y_i, i=0,1...,n$，求$p_n\in\mathbb{P}_n, s.t. p_n(x_1)=y_i$，称$x_0,x_1,\dots,x_n$为插值节点
- $Larguage$插值问题的解存在唯一
  - 构造特殊插值多项式$l_i\in P_n(x)$，满足$l_i(x_k)=\delta_i(x_k)\Rightarrow l_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$
  - $L_n(x)=\sum_{j=0}^n y_jl_j(x)$，满足插值条件$L_n(x_i)=y_i, i=0,1,\dots,n$
  - 若记$\omega_n(x)=\prod_{j=0}^n(x-x_j)$，则$\omega_n'(x_i)=\prod_{j=0,j\neq i}^n(x-x_j)$，$Lagrange$因子可以简洁地表示为：$l_i=\dfrac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}$
- $Newton$插值公式
  - 一步步迭代$p_i(x)=p_{i-1}(x)+A_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}), i=1,\dots,n$
  - 差商
    - 称A_k为f的k阶差商，记为$f[x_0,\cdots,x_k]$，且有$f[x_0,\cdots,x_k]=\dfrac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$
    - 性质
      - $f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\sum_{k=0}^k\dfrac{f(x_i)}{\omega_k'(x_i)}$
      - 节点可换性：$f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]=f[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n]$
      - 一个m次多项式的一阶差商$g[x_0,x_1]\in\mathbb{P}_{m-1}$
      - f在区间上有n阶导数，则$\exists\xi, s,t, f[x_0,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)(\xi)}}{n!}$
      - 重节点情形：$x_0,x_0: f[x_0,x_0]=\lim_{y\to x_0}f[x_0,y]=\lim_{y\to x_0}\dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}=f'(x_0)$
        $x_0,x_1,\dots,x_n,x,x: f[x_0,\dots,x_n,x,x]=\lim_{y\to x}f[x_0,\cdots,x_n,x,y]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[x_0,\cdots,x_n,x]$
- 误差分析
  - $R_n(x)=f(x)-N_n(x)$为误差余项
  - 定理：$f\in C^n([a,b]), f^{(n+1)}(x)$在$(a,b)$上存在，则对$\forall x\in[a,b]$，$Lagrange$插值问题解的误差为
    $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^n(x-x_i)$，其中$\xi\in(a,b)$且依赖于$x$

2.3 Hermite插值

（样本点还包含被逼近导数值的情形）

- 问题特征
  - 已知$n+1$个点$f(x_i)=y_i, f\backslash(x_i)=f_i', i=0,1....,n$．求$H\in\mathbb{P}_{2n+1}, s.t. H(x_1)=y_i, H'(x_i)=f_i'$
  - 两点$Hermite$插值，即$n=1$的情形，即求$H_3\in\mathbb{P}_3$，满足$H_3(x_i)=f_i, H_3'(x_i)=f_i', i=0,1$
- 两点$Hermite$插值问题的解存在唯一
  先在标准单元$[0,1]$上构造两个特殊的三次代数多项式$\phi_0(t),\phi_1(t)$，满足插值条件：
  $\phi_0(0)=1;\phi_0'(0)=\phi_0(1)=\phi_0'(1)=0$
  $\phi_1'(0)=1;\phi_1(0)=\phi_1(1)=\phi_1'(1)=0$
  可求得
  $\phi_0(t)=(1-t)^2(1+2t), \phi_1(t)=t(1-t)^2, t\in[0,1]$
  令 $h_{0,0}(x)=\phi_0\left(\dfrac{x-x_0}{h}\right); h_{1,0}(x)=\phi_0\left(-\dfrac{x-x_1}{h}\right);$
  $h_{1,0}(x)=h\phi_1\left(\dfrac{x-x_0}{h}\right); h_{1,1}(x)=-h\phi_1\left(-\dfrac{x-x_1}{h}\right)$
  其中$h=x_1-x_0$，则$h_{i,k}(x)\in\mathbb{P}_3, i,k=0,1$，且满足$h_{i,k}^{(l)}(x_j)=\delta_{i,j}\cdot\delta_{k,l}$
  从而有$H_3(x)=f_0\cdot h_{0,0}(x)+f_1\cdot h_{1,0}(x)+f_0'\cdot h_{0,1}(x)+f_1'\cdot h_{1,1}(x)$
- 误差分析
  - 定理：$f\in C^3([a,b]), f^{(4)}(x)$在$(a,b)$上存在，则对$\forall x\in[a,b]$，两点$Hermite$插值问题解的误差为
    $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$．其中$\xi\in(a,b)$且依赖于$x$

2.5 分段低次多项式插值

- 由误差分析知，在一定条件下可以通过增加插值节点的个数，构造相应的高次插值多项式来减少误差，但在一般情形下，这种高次插值多项式存在两个方面的缺陷
  - 这些缺陷使利用高次插值多项式来减少插值误差这条途径收到了限制为了提高逼近性，用分段低次插值多项式来代替高次插值多项式，即将插值函数空间取为分段多项式空间
  - $Runge$现象
    $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1$
    $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$f(x)$的n次$Lagrange$插值多项式为$p_n(x)=\sum_{i=0}^n\dfrac{1}{1+25x_i^2}\cdot l_i(x)$
    其中，等距节点$x_i=-1+\dfrac{2i}{n}, i=0,1,\cdots,n$
    此时$\{p_n(x)\}$在区间$[-1,1]$上并不一致收敛导$f(x)$

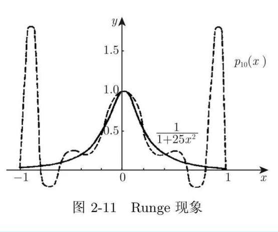
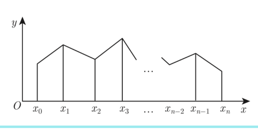


图 2-11 Runge 现象

  - 数值稳定性问题
    高次插值多项式的计算需要用到高阶差分或差商，差分的误差传播会随阶数的提高越来越严重
    如教材例，在$x=x_i$处有微小扰动ε，但是$\Delta^6\hat{f}_k$和Δ^6f_k之差将可能为ε的20倍，即高次插值算法的数值稳定性得不到保证
- 分段低次多项式插值
  关于剖分Δ的分段多项式插值函数空间为$S_p(k;l;\Delta)=\{s\in C^l[a,b]: s\in\mathbb{P}_k, x\in e_i, i=1,2,\cdots,n\}$
  它表示在每个剖分单元为k次多项式且在整个定义区间$[a,b]$上l阶连续可微的函数的全体．
  称$S_p(k;l;\Delta)$为关于剖分Δ重数为$k-l$的k次多项式样条空间
  - 分段一次多项式插值（可以局部确定 但是光滑度较低 且自由度过多）
    - 插值函数空间$S_p(1;\Delta):=S_p(1;0;\Delta)$，它表示在每个剖分单元为多项式且在区间$[a,b]$上为连续的函数全体
    - 插值问题
      - 该样条空间的维数为$2n$【每个I_j上有2个自由度】$-(n-1)$【内部$n-1$个点C^0连续】$=n+1$
      - 显然存在唯一，在每个剖分单元上$s(x)=\dfrac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}f_{i-1}+\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}f_i, x\in e_i, i=1,2,\cdots,n$



    - 误差估计
      $|e(x)|=\left|f(x)-s|_{I_j}(x)\right|=\left|\dfrac{f''(x)}{2!}(x-x_{j-1})(x-x_j)\right|\leqslant\dfrac{1}{2!}M\cdot\dfrac{1}{4}h^2$
      其中$M=\sup_{z\in(a,b)}|f''(z)|, h=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j-x_{j-1}|$
  - 分段三次多项式插值
    - 求$H\in S_p(3,1,\Delta)$，满足插值条件$H(x_i)=f_i, H'(x_i)=f_i', i=0,1,\dots,n$
    - 插值条件
      - 该样条空间的维数为$4n$【每个I_j上有4个自由度】$-2(n-1)$【内部$n-1$个点C^1连续】$=2n+2$
      - 利用关于x_{i-1},x_i的两点$Hermite$插值公式可以得到$H(x)$的分段表达式
    - 误差估计
      $$|e(x)|=\left|f(x)-s|_{I_j}(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(x)}{4!}(x-x_{j-1})^2(x-x_j)^2\right|\leqslant\frac{1}{4!}\max_{z\in(a,b)}|f^{(4)}(z)|\left[\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{2}\right)^2\right]^2\leqslant\frac{1}{4!}M\cdot\frac{1}{16}h^4$$
      其中$M=\sup_{z\in(a,b)}|f^{(4)}(z)|, h=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j-x_{j-1}|$
  - 三次样条插值函数（插值公式不能局部确定 需要求解线性方程组）
    - $S_p(3;\Delta):=S_p(1;0;\Delta)$，它表示在每个剖分单元为三次多项式且在区间$[a,b]$上二阶连续的函数全体
    - 插值条件
      - $s(x_i)=f_i, i=1,\dots,n-1$
      - 边界条件
        - Ⅰ型边界条件：$s(x_0)=f(x_0), s(x_n)=f(x_n), s'(x_0)=f'(x_0), s'(x_n)=f'(x_n)$
          - 定理：Ⅰ型三次样条插值问题的解存在且唯一
        - Ⅱ型边界条件：$s(x_0)=f(x_0), s(x_n)=f(x_n), s''(x_0)=f''(x_0), s''(x_n)=f''(x_n)$
        - Ⅲ型(或周期)边界条件：$s(x_0)=s(x_n)=f(x_0), s'(x_0)=s'(x_n), s''(x_0)=s''(x_n)$
    - 最佳逼近性质
      - $f\in C^2([a,b]), S_1(x)$是三次插值样条函数，则$\forall g\in S_p(3,\Delta)$，有
        $\int_a^b[f''(x)-s_1''(x)]\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f''(x)-g''(x)]^2\mathrm{d}x$
      - 引理：$f\in C^2([a,b]), S_1(x)$是三次插值样条函数，则$\forall g\in S_p(3,\Delta)$，有
        $\int_a^b[f''(x)-s_1''(x)]\cdot g''(x)\mathrm{d}x=0$
    - 误差估计
      设$f\in C^4[a,b]$，$e(x)=f(x)-s_1(x)$，记$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(4)}(x)|$
      定义如下两种范数：$\|e''(x)\|_2:=\sqrt{\int_a^b[e''(x)]^2\mathrm{d}x}$；$\|e(x)\|_\infty:=\|e(x)\|_{C[a,b]}=\sup_{t\in[a,b]}e(t)$
      $\|e''(x)\|_2\leqslant cMh^2$；$\|e'(x)\|_\infty\leqslant cMh^{\frac{5}{2}}$；$\|e(x)\|_\infty\leqslant cMh^{\frac{7}{2}}$；其中$c=\dfrac{\sqrt{b-a}}{2}$

3.1 最佳逼近问题的提出

- 第二章讨论了$f(x)$插值多项式逼近，但$n\to\infty$时，不能保证$p_n(x)\rightrightarrows f(x)$(如$Runge$现象)
- 范数的定义
  X线性空间，$\|\cdot\|$称为范数，满足：
  (1)$\|x\|\geqslant 0, \forall x$，$\|x\|=0\iff x=0$
  (2)$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$
  (3)$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$
- $Weierstrass$定理：$f(x)\in C([a,b]), \forall\varepsilon>0, \exists$代数多项式$p(x), s.t. \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$
- 最佳一致逼近
  $f(x)\in C([a,b])$，称$E_n(f,P_n)=\inf_{p_n\in\mathbb{P}_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p_n(x)|$为逼近子空间$P_n$对函数$f(x)$的最佳一致逼近，简记为$E_n(f)$
  而$p_n^*(x)$为$f(x)$的最佳一次逼近代数多项式，满足$E_n(f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p_n^*(x)|$
- $Benstein$多项式
  $\forall f\in C([0,1]), (\mathrm{Bn}f)(t)=\sum_{i=0}^n f\left(\dfrac{i}{n}\right)\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$，Bn算子对$f$是线性且单调的
  对$f_0(t)\equiv 1, f_1(t)=t, f_2(t)=t^2, (\mathrm{Bn}f_0)(t)=f_0(t); (\mathrm{Bn}f_1)(t)=f_1(t); (\mathrm{Bn}f_2)(t)=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)t^2+\dfrac{1}{n}t$
  有$\|(\mathrm{Bn}f_i)-f_i\|_\infty\to 0(n\to\infty), i=0,1,2$．事实上，$\forall f\in C([0,1]), \|(\mathrm{Bn}f)-f\|_\infty\to 0$

3.3 最佳一致逼近多项式

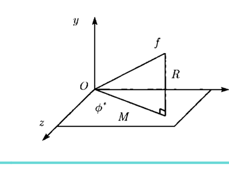
- 交错点组：$f(x_i)=(-1)^i\sigma\|f\|, i=0,1,\dots,k, \sigma=\pm1$．称$x_i$为交错点，简称$(e)$点
- 定理
  - En（f）的下界估计式
    $f\in C([a,b]), \exists$多项式$p\in\mathbb{P}_n$，$s.t. f(x)-p(x)$在$[a,b]$上至少$n+2$个点$x_0,\dots,x_{n+1}$处取值正负相间
    则$E_n(f)\geqslant\lambda:=\min_{0\leqslant i\leqslant n+1}|f(x_i)-p(x_i)|$
  - $f\in C([a,b])$则在$\mathbb{P}_n$中只存在一个关于$f(x)$的最佳一致逼近多项式
  - Chebyshev（交错定理）
    $f\in C([a,b]), f\notin\mathbb{P}_n$，$p$是$f$的$n$次最佳一致逼近多项式$\iff f-p$在$[a,b]$上至少$n+2$个点组成的交错点组
  - 设$p(x)$是$f(x)$的n次最佳一致逼近多项式，若$f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上存在且保号，则$f-p$的交错点组恰有$n+2$个交错点，且端点a,b属于$f-p$的交错点组
- 例题
  $f(x)=\sqrt{x}, x\in\left[\dfrac{1}{9},1\right]$，找其最佳一致逼近多项式$p(x)=a_1x+a_0$
  解：由$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x)=-\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}<0$在$\left[\dfrac{1}{9},1\right]$上保号，则$f-p$恰有3个交错组点，且$\dfrac{1}{9}$和1为交错点
  设另一个交错点为$x_1\in\left(\dfrac{1}{9},1\right)$，有$\begin{cases}e\left(\dfrac{1}{9}\right)=e(1)=-e(x_1)\\ e'(x_1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}a_1-a_0=1-a_1-a_0=-\dfrac{1}{3}+x_1a_1+a_0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}-a_1=0\end{cases}$
  解得$a_1=\dfrac{3}{4}, a_1=\dfrac{1}{4}, x_1=\dfrac{4}{9}$，即$p(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$
- $Remes$算法
  - 虽然$Chebyshev$定理从理论上给出了最佳一致逼近的特征性质，但交错点组$\{x_0,\dots,x_{n+1}\}$很难求得显式，从而采用迭代思想
  - $p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \{a_j\}_{j=1}^n$为待定系数
    $(*)\begin{cases}f(x_j)-p(x_j)=(-1)^j\sigma E_n(f)\overset{\triangle}{=\!=}\mu_n\\ j=0,\cdots,n+1\end{cases}$【$n+2$个方程，$n+2$个未知数】
    $\mu_n=\sigma E_n(f)=\mathrm{dist}(f,\mathbb{P}_n)=\inf_{q\in\mathbb{P}_n}\|f-q\|_\infty$　【方程组有且仅有一个解】
    步骤1：初始化$\{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$及$\varepsilon>0$，将$\{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$代入$(*)$式，求得$p_n^{(0)}(x)$及$\mu^{(0)}$
    步骤2：如果$\left||\mu^{(l)}-\|f-p_n^{(l)}\|_\infty\right|<\varepsilon$，结束；否则，调整交错点组，构造新的交错点组
    步骤3：利用$\{x_j^{(l+1)}\}_{j=0}^{n+1}$代入$(*)$式求解，至$p_n^{(l+1)}$及$\mu^{(l+1)}$，返回步骤2
    可以证明该算法收敛且速度很快
  - 如何调整交错点组？
    设$\hat{x}^{(l)}$，$s.t.\left|\hat{f}(\hat{x}^{(l)})-p_n^{(l)}(\hat{x}^{(l)})\right|=\|f-p_n^{(l)}\|_\infty$
    用$\hat{x}^{(l)}$替换$\{x_j^{(l)}\}_{j=0}^{n+1}$中的某一点，得到一组新的点组$\{x_j^{(l+1)}\}_{j=0}^{n+1}$
    ① 如果$\hat{x}^{(l)}\in\left(\hat{x_j}^{(l)},\hat{x_{j+1}}^{(l)}\right)$，且$\left(f-p_n^{(l)}\right)(\hat{x}^{(l)})$与$\left(f-p_n^{(l)}\right)(x_j^{(l)})$同号，则替换$x_j^{(l)}$
    异号，则替换$x_{j+1}^{(l)}$
    即，跟谁同号就去掉谁，再把找到的这点放进去
    ② 如果$\hat{x}^{(l)}<x_0^l$，异号，把$x_{n+1}^{(l)}$去掉
    同号，把$x_0^{(l)}$去掉
    ③ 如果$\hat{x}^{(l)}>x_n^l$，与②类似，目标就是保证$f-p_n^{(l)}$在新的点组$\{x_j^{(l+1)}\}_{j=0}^{n+1}$依旧正负相间
- 定理：$\forall f\in C([a,b]), \exists$一个插值节点阵，$s.t. f$在该点阵上的插值多项式序列$\rightrightarrows f$（点阵依赖于$f$的选取，要和$Lunge$现象作区分）

3.4 最小偏差于0的多项式——Chebyshev多项式

- 问题提出
  在区间$[-1,1]$上，子空间$\mathbb{P}_{n-1}$对函数x^n的最佳一致逼近问题，它可描述为：
  求$p_{n-1}^*\in P_{n-1}, s.t. E_{n-1}(x^n)=\min_{p_{n-1}\in P_{n-1}}\|x^n-p_{n-1}\|=\|x^n-p_{n-1}^*\|$，其中$\|f\|=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$
  P_n^1为所有首1的n次代数多项式的全体，则上述最佳逼近问题$\iff$求$p_n^*\in P_n^1, s.t. \|p_n^*-0\|=\min_{p_n\in P_n^1}\|p_n-0\|$
  因此，称上述问题为与0偏差最小问题
- $Chebyshev$多项式
  考虑变换$x=\cos\theta$，它为$[0,\pi]\to[-1,1]$上的一一映射，$T(x)=\cos n\theta=\cos(n\arccos x), n=0,1,\dots$
  由三角恒等式$\cos n\theta+\cos(n-2)\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta$可得
  - 性质
    - $\begin{cases}T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), n=2,3,\dots\\ T_0(x)=1, T_1(x)=x\end{cases}$
    - $T_n(x)$是首相系数为2^{n-1}的n次代数多项式，且$T_{2k}(x)$只含x的偶次幂，$T_{2k-1}(x)$只含x的奇次幂
    - $\{T_k(x)\}_0^n$在区间$[-1,1]$上关于权函数$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$正交，且有$\int_{-1}^1\dfrac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\\ \pi, & m=n=0\end{cases}$
    - $T_n(x)$在区间$[-1,1]$上恰有n个不同的实根$x_k=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}, k=1,2,\dots,n$
  - 定理
    - 在P_n^1中，$p_n^*(x)=2^{1-n}T_n(x)$对0的偏差最小
    - 设$p_n(x)$是首1的n次多项式，则$\|p_n\|=\max_{|x|\leqslant 1}|p_n(x)|\geqslant 2^{1-n}$

3.5 内积空间的最佳逼近

- 问题提出：在一类具有很强的几何直观背景的赋范线性空间，即所谓的内积空间中，讨论相应的最佳逼近问题
- 内积空间
  - 定义
  - 性质
  - 权函数
    称区间$[a,b]$上非负函数$\rho(x)$为权函数，若它满足：
    (1) $\int_a^b|x|^n\rho(x)\mathrm{d}x<\infty$，$\forall n$
    (2)假设对某个非负的连续函数$g(x)$，$\int_a^b\rho(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上函数$g(x)\equiv 0$
    记$L_p^2[a,b]$是区间$[a,b]$上满足$\rho(x)f^2(x)$可积的函数$f(x)$的全体，则$L_p^2[a,b]$在内积$(f,g)=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$的意义下成为内积空间
  - 定理
    - $\forall f\in X$，在M中$\exists f$的唯一最佳逼近元素



    - $\forall f\in X, M$是有限维子空间，$\phi^*\in M$是f的最佳逼近元素$\iff(f-\phi^*,\phi)=0, \forall\phi\in M$
    - $E^2(f,M)=(f-\phi^*,f-\phi^*)=(f-\phi^*,f)=(f,f)-(f,\phi^*)$
      设M维子空间的一组基为$\{\phi_k\}_{k=1}^n$，设$\forall f\in X$，其最佳逼近元素ϕ^*可表示为$\phi^*=\sum_{i=1}^n c_i^*\phi_i$
      $\left(f-\sum_{i=1}^n c_i^*\phi_i,\phi_j\right), j=1,\dots,n\Rightarrow\sum_{i=1}^n(\phi_i,\phi_j)c_i^*=(f,\phi_j), j=1,\dots,n$，系数矩阵$G$为对称正定矩阵
    - 任何n维内积空间M都存在正交$\Rightarrow$标准正交基

3.6 最佳平方逼近与正交多项式

- 连续情形的最佳平方逼近
  考虑$L_\rho^2[a,b]$空间(当$\rho(x)$取1时，简记为$L^2[a,b]$)，相应的内积及范数分别为
  $(f,g)=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x; \|f\|=\sqrt{(f,f)}, \forall f,g\in L_\rho^2[a,b]$
- 正交多项式
  - 定义
    定义在$[a,b]$上的函数系$\{g_l(x)\}_l=0^n$称为P_n的带权$\rho(x)$正交基，如果它满足：
    (1)$g_l(x)=\sum_{k=0}^l\alpha_kx^k$恰为$l$次多项式，即$a_l\neq 0$
    (2)$(g_i,g_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \int_a^b\rho(x)g_i^2(x)\mathrm{d}x, & i=j\end{cases}$
    记$g_l^*(x)=g_l(x)/\alpha_l, l=0,1,\dots,n$，则$\{g_l^*\}_{l=0}^n$构成了$P_n$的首项系数为1的带权正交多项式基
  - 定理
    - 上述带权正交基有递推公式$\begin{cases}g_{k+1}^*(x)=(x-\beta_k)g_k^*(x)-\alpha_kg_{k-1}^*(x), & k=1,2,\cdots,n-1,\\ g_0^*(x)=1, \quad g_1^*(x)=x-\dfrac{(xg_0^*,g_0^*)}{(g_0^*,g_0^*)},\end{cases}$
      其中常数$\beta_k=\dfrac{(xg_k^*,g_k^*)}{(g_k^*,g_k^*)}, \quad \alpha_k=\dfrac{(g_k^*,g_k^*)}{(g_{k-1}^*,g_{k-1}^*)}$.
    - 带权正交多项式$g_l^*(x)(l\geqslant 1)$有l个互异的实根，并且全部位于区间(a,b)内。
  - 带权正交多项式的例子
    - (1)$Tchebyshev$多项式，$[-1,1], \rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, T_n(x)=\cos(n\arccos x), n=0,1,\dots$
    - (2)第二类$Tchebyshev$多项式，$[-1,1], \rho(x)=\sqrt{1-x^2}, U_n(x)=\dfrac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, n=0,1,\dots$
    - (3)近似$Tchebyshev$逼近
      $L_\rho^2([-1,1]), \rho=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f\in L_\rho^2[-1,1], \{T_j(x)\}_{j=0}^\infty$
      由表征定理，$S_n(x)=\sum_{j=0}^n\dfrac{\langle f,T_j\rangle}{\langle T_i,T_j\rangle}a_0\dfrac{T_0(x)}{2}+\sum_{j=1}^n a_jT_j(x)T_j(x)$，为$f$在$L_\rho^2([-1,1])$中的最佳平方逼近
      当n足够大时，S_n与f在$C^0([-1,1])$上的最佳一致逼近多项式很接近
      $(f,T_j)=\int_{-1}^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\cos(j\arccos x)\mathrm{d}x$