zadOcena

Wydanie 1.0.0

Dawid Szuber

06 lis 2025

Contents:

Add your content using `reStructuredText` syntax. See the reStructuredText documentation for details.

ROZDZIAŁ 1

Teza

W dowolnym trójkącie prostokątnym, suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równa jest polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.

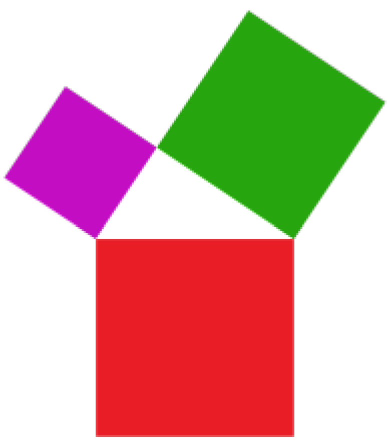
lub

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Kategoria	Opis	Wzór lub Kluczowa Idea	Kontekst / Postacie
Teza (T wierdzenie)	W trójkącie prostokątnym suma kwadratów pr zyprostokątnych (a, b) jest równa kwadratowi prze ciwprostokątnej (c).	$a^2 + b^2 = c^2$	Pitagoras (VI w. p.n.e.), choć znane wcześniej (Egipt, Babilonia).
In terpretacja	Suma pól kwadratów zbudowanych na pr zyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przec iwprostokątnej.	Pole(K_a) + Pole(K_b) = Pole(K_c)	Wizualizacja geometryczna (jak na Rysunku 1 w tekście).
Dowody	Istnieje bardzo wiele (ponad 350) dowodów twierdzenia, o różnym charakterze (algebraiczne, geometryczne).	Dowód „układanka” (kwadrat o boku $a+b$), dowód geometryczny Euklidesa (oparty na polach).	Euklides (*Elementy*), Szczepan Jeleński.
Twierdzenie Odwrotne	Jeśli boki trójkąta (a, b, c) spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt ten jest prostokątny.	Używane praktycznie do wyznaczania kąta prostego (np. trójkąt 3-4-5).	Starożytne Chiny, Indie, Egipt (zastosowania praktyczne).

ROZDZIAŁ 2

2. Interpretacja



Rysunek 1. Interpretacja twierdzenia Pitagorasa

Oto interpretacja geometryczna: jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy kwadraty, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej. W sytuacji na rysunku obok: suma pól kwadratów „fioletowego” i „zielonego” jest równa polu kwadratu „czerwonego”.

ROZDZIAŁ 3

3. Dowody

Liczba różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa jest przytłaczająca, według niektórych źródeł przekracza 350. Euklides w Elementach podaje ich osiem, kolejne pojawiały się na przestrzeni wieków i pojawiają aż po dni dzisiejsze.

Niektóre z dowodów są czysto algebraiczne (jak dowód z podobieństwa trójkątów), inne mają formę układanek geometrycznych (prawdopodobny dowód Pitagorasa), jeszcze inne oparte są o równości pól pewnych figur. Zaprezentujemy tu jedynie kilka wybranych dowodów, do innych podajemy odsyłacze na końcu artykułu.

3.1 3.1 Dowód układanka

Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości a,b i c jak rysunku z lewej. Konstruujemy kwadrat o boku długości a + b w sposób ukazany na rysunku z lewej, a następnie z prawej. Z jednej strony pole kwadratu równe jest sumie pól czterech trójkątów prostokątnych i kwadratu zbudowanego na ich przeciwprostokątnych, z drugiej zaś równe jest ono sumie pól tych samych czterech trójkątów i dwóch mniejszych kwadratów zbudowanych na ich przyprostokątnych. Stąd wniosek, że pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych.

Szczepan Jeleński w książce Śladami Pitagorasa przypuszcza, że w ten sposób mógł udowodnić swoje twierdzenie sam Pitagoras.

Powyższy dowód, choć prosty, nie jest elementarny w tym sensie, że jego poprawność wymaga uprzedniego uzasadnienia, że pole kwadratu złożonego z trójkątów i mniejszych kwadratów jest równe sumie pól tych figur. Może się to wydawać oczywiste, jednak dowód tego faktu wymaga uprzedniego zdefiniowania pola, na przykład poprzez konstrukcję miary Jordana.

3.2 3.2 Dowód czysto geometryczny

Następujący dowód znajduje się w Elementach Euklidesa i oparty jest na spostrzeżeniu, że pola dwu mniejszych kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC są równe polom odpowiednich prostokątów na jakie wysokość CD dzieli kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej.

Dla dowodu zauważmy, że pole kwadratu ACJK jest równe podwojonemu polu trójkąta KAB – podstawą trójkąta KAB jest bok KA kwadratu, a wysokość trójkąta jest równa bokowi CA tego kwadratu. Podobnie, pole prostokąta AEGD jest równe podwojonemu polu trójkąta CAE – podstawą trójkąta CAE jest bok AE prostokąta, a wysokość trójkąta jest równa bokowi EG prostokąta. Jednak trójkąty KAB i CAE są przystające, co wynika z cechy „bok-kąt-bok” – | KA | = | CA | , | AB | = | AE | i kąt jest równy kątowi – a zatem mają równe pola, skąd wynika, że pole kwadratu ACJK jest równe polu prostokąta AEGD.

Analogicznie (rozważając trójkąty CBF i HBA można udowodnić, że pole kwadratu CBHI jest równe polu prostokąta BFGD. Stąd, suma pól obu kwadratów równa jest polu kwadratu AEFB.

ROZDZIAŁ 4

4. Uwagi

Następujący dowód znajduje się w Elementach Euklidesa i oparty jest na spostrzeżeniu, że pola dwu mniejszych kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC są równe polom odpowiednich prostokątów na jakie wysokość CD dzieli kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej.

Dla dowodu zauważmy, że pole kwadratu ACJK jest równe podwojonemu polu trójkąta KAB – podstawą trójkąta KAB jest bok KA kwadratu, a wysokość trójkąta jest równa bokowi CA tego kwadratu. Podobnie, pole prostokąta AEGD jest równe podwojonemu polu trójkąta CAE – podstawą trójkąta CAE jest bok AE prostokąta, a wysokość trójkąta jest równa bokowi EG prostokąta. Jednak trójkąty KAB i CAE są przystające, co wynika z cechy „bok-kąt-bok" – | KA | = | CA | , | AB | = | AE | i kąt jest równy kątowi – a zatem mają równe pola, skąd wynika, że pole kwadratu ACJK jest równe polu prostokąta AEGD.

Analogicznie (rozważając trójkąty CBF i HBA można udowodnić, że pole kwadratu CBHI jest równe polu prostokąta BFGD. Stąd, suma pól obu kwadratów równa jest polu kwadratu AEFB.