1. Import bibliotek.

```
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore', category=FutureWarning) #turn off warnings

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import openpyxl
import numpy as np
import seaborn as sns
from scipy.stats import skew, kurtosis, bootstrap
from sklearn.impute import KNNImputer
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
```

2. Pobieranie danych.

X_1 - procent palących w danym kraju X_2 - procent palących mniej niż 20 papierosów na dzień X_3 - procent palących więcej niż 20 papierosów na dzień X_4 - procent palących zamieszkujących tereny metropolii miejskich X_5 - procent palących zamieszkujących tereny małych miast X_6 - procent palących zamieszkujących tereny wiejskie X_7 - procent palących mężczyzn X_8 - procent palących kobiet X_9 - procent palących z przedziału wiekowego 15 - 19 lat X_{10} - procent palących z przedziału wiekowego 15 - 24 lata X_{11} - procent palących z przedziału wiekowego 15 - 29 lat X_{12} - procent palących z przedziału wiekowego 15 - 64 lata X_{13} - procent palących z przedziału wiekowego 18 - 24 lata X_{14} - procent palących posiadających co najmniej 18 lat. X_{15} - procent palących z przedziału wiekowego 20 - 24 lata X_{16} - procent palących z przedziału wiekowego 25 - 29 lata X_{17} - procent palących z przedziału wiekowego 25 - 34 lata X_{18} - procent palących z przedziału wiekowego 35 - 44 lata X_{19} - procent palących z przedziału wiekowego 45 - 54 lata X_{20} - procent palących z przedziału wiekowego 45 - 64 lata X_{21} - procent palących z przedziału wiekowego 55 - 64 lata X_{22} - procent palących z przedziału wiekowego 65 - 74 lata X_{23} - procent palących posiadających co najmniej 65 lat X_{24} - procent palących posiadających co najmniej 75 lat

Wczytanie danych do DataFrame

```
df = pd.read_excel('Data.xlsx').set_index('Country')
```

3. Eksploracja zbioru danych.

Ile brakujących wartości dla każdej zmiennej?

```
np.sum(np.isnan(df), axis=0)
```

```
X1      0
X2      0
X3      0
X4      2
X5      2
X6      2
X7      0
X8      0
X9      0
X10     0
X11     0
X12     0
X13     0
X14     0
X15     0
X16     0
X17     0
X18     0
X19     0
X20     0
X21     0
X22     0
X23     0
X24     0
dtype: int64
```

Widzimy braki wartości w X_4, X_5, X_6

W jakich krajach są braki danych?

```
np.sum(np.isnan(df), axis=1)[np.sum(np.isnan(df), axis=1) > 0]
```

```
Country
Serbia     3
Türkiye    3
dtype: int64
```

Turcja i Serbia. Uzupełnienie tych danych zerami może być niewłaściwe, ze względów merytorycznych (w tych krajach te zmienne spodziewamy się, że przyjęły o wiele większe wartości).

Uzupełnianie brakujących danych

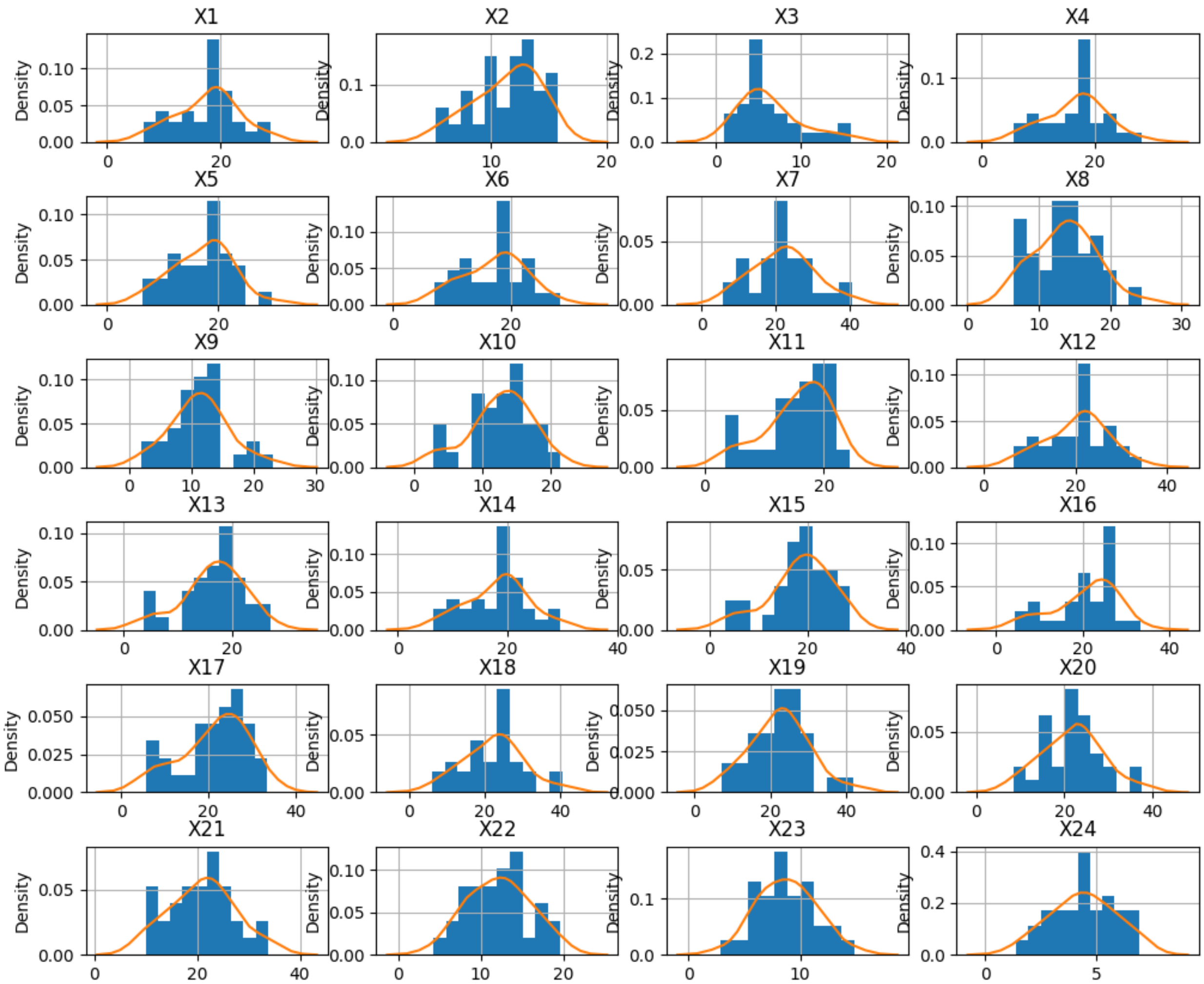
Do uzupełnienia braków posłużymy się obiektem klasy KNNImputer z pakietu sci-kit learn. Wartości hyperparametrów będą ustawione domyślnie (liczba sąsiadów = 5, odległość euklidesowa).

```
imputer = KNNImputer()
new_df = pd.DataFrame(imputer.fit_transform(df),
columns=imputer.get_feature_names_out(), index=df.index)
```

Wizualizacja zmiennych, wraz z ich szacowanymi gęstościami

W tym kroku zwizualizujemy wszystkie zmienne, chcąc otrzymać histogramy gęstości (tak więc oś pionowa przedstawia częstości, zamiast liczby występujących wartości zmiennej). Dodatkowo w celu pogłębionego zrozumienia skorzystaliśmy z metody kdeplot z pakietu SeaBorn w celu nakreślenia estymowanej krzywej gęstości. Więcej o zaimplementowanej metodzie można poczytać tutaj.

```
plt.style.use('fast')
fig, axs = plt.subplots(nrows=6, ncols=4, figsize=(12,10))
plt.subplots_adjust(hspace=0.5)
for ax, col in zip(axs.flat, df.columns):
    ax.hist(df[col], bins=10, density=True)
    sns.kdeplot(df[col], ax=ax)
    ax.grid(True)
    ax.set_title(col)
    ax.set_xlabel('')
```



Na podstawie wykresów możemy stwierdzić widoczną jednomodalność rozkładów, względną symetrię oraz różnice w obserwowanych spłaszczeniach krzywej. Dwie ostatnie obserwacje dodatkowo zweryfikujemy w dalszej części pracy.

Satystyki opisowe

W tej części policzymy i zinterpretujemy statystyki opisowe naszego zbioru danych. Do podstawowych statystyk liczonych przez pakiet Pandas dodaliśmy obliczoną skośność i kurtozę.

```
skewnesses = skew(new_df, axis=0)
kurtosises = kurtosis(new_df, axis=0)
pd.concat([new_df.describe(), pd.DataFrame({'skewness':skewnesses,
'kurtosis':kurtosises}, index=new_df.columns).T]).T
```

```
     count       mean        std   min     25%    50%     75%   max
skewness  \
X1    32.0  17.671875  5.471052   6.4  14.400  18.55  20.600  28.7 -
0.181180
X2    32.0  11.371875  2.807505   5.3   9.775  11.95  13.350  15.8 -
```

```
0.537643
X3    32.0   6.321875  3.664189   1.0   4.075   5.40   7.900  15.8
1.009990
X4    32.0  17.065625  5.375188   5.6  14.250  17.70  20.650  28.3 -
0.291134
X5    32.0  17.533125  5.453888   6.3  13.400  18.45  21.125  29.6 -
0.204242
X6    32.0  17.613750  5.335404   7.1  13.300  18.65  21.425  28.3 -
0.295805
X7    32.0  22.078125  8.239274   5.9  16.400  22.65  26.650  40.6
0.131496
X8    32.0  13.665625  4.312144   6.5  11.225  13.85  16.500  24.4
0.191824
X9    32.0  11.350000  4.700309   1.9   8.450  10.75  13.875  23.1
0.211525
X10   32.0  12.681250  4.506228   2.9  10.175  13.20  15.725  21.4 -
0.516804
X11   32.0  15.571875  5.362248   3.5  12.950  16.80  19.875  24.3 -
0.747978
X12   32.0  20.353125  6.638936   6.5  16.000  21.80  23.600  34.5 -
0.255519
X13   32.0  16.384375  5.700261   3.6  13.550  17.35  19.925  27.0 -
0.594425
X14   32.0  18.212500  5.637762   6.6  14.850  19.30  21.100  29.6 -
0.154303
X15   32.0  18.440625  6.404679   3.1  15.625  19.45  22.200  28.6 -
0.681988
X16   32.0  20.609375  7.253491   4.4  17.600  22.15  26.075  33.3 -
0.733748
X17   32.0  21.256250  7.611237   5.8  17.775  23.20  26.825  33.4 -
0.571922
X18   32.0  22.418750  7.852201   6.0  18.325  23.70  26.500  40.8
0.074154
X19   32.0  22.468750  7.694382   7.1  17.525  22.60  26.175  42.0
0.166131
X20   32.0  21.750000  6.891229   8.4  16.700  22.55  25.300  37.7
0.096605
X21   32.0  20.978125  6.322552  10.0  16.825  21.45  25.050  33.8
0.064001
X22   32.0  12.181250  3.748930   4.3   9.450  12.20  14.400  19.7
0.048543
X23   32.0   8.750000  2.579322   2.9   7.050   8.75  10.600  14.8
0.105542
X24   32.0   4.393750  1.448456   1.4   3.425   4.40   5.425   6.9 -
0.067756

     kurtosis
X1  -0.376567
X2  -0.600688
```

```
X3    0.445025
X4   -0.385678
X5   -0.382600
X6   -0.666051
X7   -0.324088
X8   -0.259796
X9    0.215907
X10  -0.003552
X11  -0.238018
X12  -0.343211
X13   0.046721
X14  -0.333782
X15   0.013456
X16  -0.345030
X17  -0.520268
X18  -0.029378
X19   0.158025
X20  -0.165837
X21  -0.485266
X22  -0.650973
X23  -0.186029
X24  -0.711995
```

Weryfikacja skośności i kurtozy rozkładów zmiennych.

Obliczone statystyki skośności i kurtozy stanowią jednak estymację parametrów z populacji, przy takiej małej liczebności każdej próby (n=32) dodatkowo obarczone znacznym błędem. Żeby poznać choć ogólny kształt tych rozkładów skorzystamy z przedziałów ufności (zarówno dla kurtozy jak i skośności) skonstruowanych za pomocą nieparametrycznej metody Bootstrap. Bedzie to o tyle zmodyfkiowana metoda Bootstrap, że skorzystamy ze zmodyfkowanych przedziałów ufności drugiego rzędu uzyskanych metodą BCa (Bias-Corrected and Accelerated). Różni się on od metody pierwszego rzędu, że używa innej niż percentyl miary do określania przedziałów, bierze pod uwagę skośność ponownie pobieranych prób oraz stara się estymować parametr dla rzeczywistej populacji a nie ów prób. Więcej o tej metodzie w tym artykule

```
def skew_statistic(data):
    return skew(data, axis=0)

def kurtosis_statistic(data):
    return kurtosis(data, axis=0)

data = (new_df.values[i] for i in range(new_df.shape[1]))
def bootstrap_for_xses(df, statistic, n_resamples=1000):
    skewness_mean = np.zeros(df.shape[1])
    kurtosis_mean = np.zeros(df.shape[1])
    skewness_intervals = np.zeros((df.shape[1], 2))
    kurtosis_intervals = np.zeros((df.shape[1], 2))
    for column in range(df.shape[1]):
        data = (df.values[column],)
```

```
        skewness_bootstrap = bootstrap(data=data,
statistic=skew_statistic, n_resamples=n_resamples,
confidence_level=.9)
        kurtosis_bootstrap = bootstrap(data=data,
statistic=kurtosis_statistic, n_resamples=n_resamples,
confidence_level=.9)
        skewness_mean[column] =
np.mean(skewness_bootstrap.bootstrap_distribution)
        kurtosis_mean[column] =
np.mean(kurtosis_bootstrap.bootstrap_distribution)
        skewness_intervals[column, :] =
np.array(tuple(skewness_bootstrap.confidence_interval))
        kurtosis_intervals[column, :] =
np.array(tuple(kurtosis_bootstrap.confidence_interval))

    return skewness_mean, kurtosis_mean, skewness_intervals,
kurtosis_intervals



s, k, s_i, k_i = bootstrap_for_xses(new_df, skew_statistic,
n_resamples=5000)
```

Skonstruowane przedziały liczymy dla każdej zmiennej, przy użyciu 5000 ponownych próbkowań. Jako że każda zmienna ma 32 wartości, to możliwa liczba wszystkich kombinacji losowania ze zwracaniem to około (dla niepowtarzających się wartości) 32^{32}, więc nie jest to na pewno za dużo próbkowań, a w metodzie Bootstrap nie tyle ten parametr jest najistotniejszy w zawężaniu przedziałów, co rozmiar próby, który w naszym przypadku jest ograniczony przez liczbę państw w badaniu (a i również obecnych w Europie). Zdecydowaliśmy się na kompromis w zakresie poziomu ufności, który w celu niezbyt szeroki przedziałów, ale dalej wysokiej pewności ustaliliśmy w obu przypadkach na 90%.

Teraz zbudujemy funkcję, która będzie dla obliczonych poziomów średnich liczonych statystyk oraz przedziałów ufności dla nich rysować wykres, gdzie pionowa linia to zakres przedziału, który z prawdopodobieństwem 90% pokrywa szukany parametr, a punkt oznacza wyestymowaną metodą Bootstrap wartość szukanej statystyki.

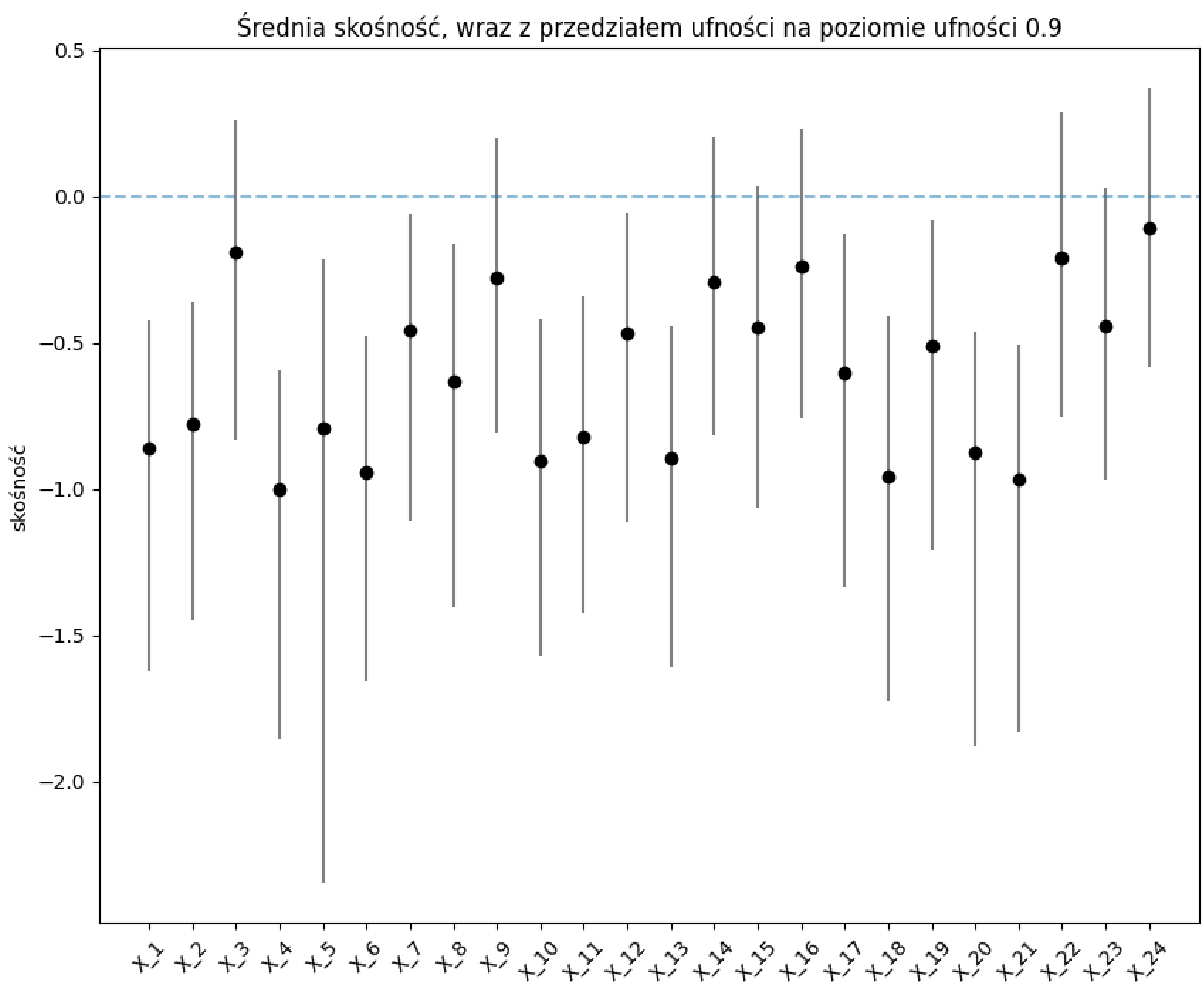
```
def plot_statistic(statistic, confidence_intervals, name='statystyki',
conf_level=.9):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,8))
    for i in range(statistic.shape[0]):
        plt.vlines(i, confidence_intervals[i,0],
confidence_intervals[i,1], color='gray', zorder=0)
    ax.scatter(np.arange(statistic.shape[0]), statistic,
color='black', zorder=1)
    plt.grid(False)
    plt.axhline(0, linestyle='--', alpha=0.5)
    ax.set_xticks(np.arange(statistic.shape[0]), labels=[f"X_{j}" for
j in range(1, statistic.shape[0]+1)], rotation=45)
```

```
    ax.set_ylabel(name)
    plt.title(f"Średnia {name}, wraz z przedziałem ufności na poziomie
ufności {conf_level}")
```

Przyjęta koncepcja zakłada, że skośność równa zero oznacza skośność rozkładu normalnego (symetryczna), gdzie wartości mniejsze od 0 oznaczają rozkład lewostronnie asymetryczny, a większe od 0 oznaczają rozkład prawostronnie symetryczny. W przypadku kurtozy skorzystaliśmy z definicji Fishera, kurtoza równa zero to spłaszczenie rozkładu charakterystyczne dla rozkładu normalnego, większa od 0 oznacza rozkład leptokurtyczny, a mniejsza od 0 rozkład platykurtyczny.

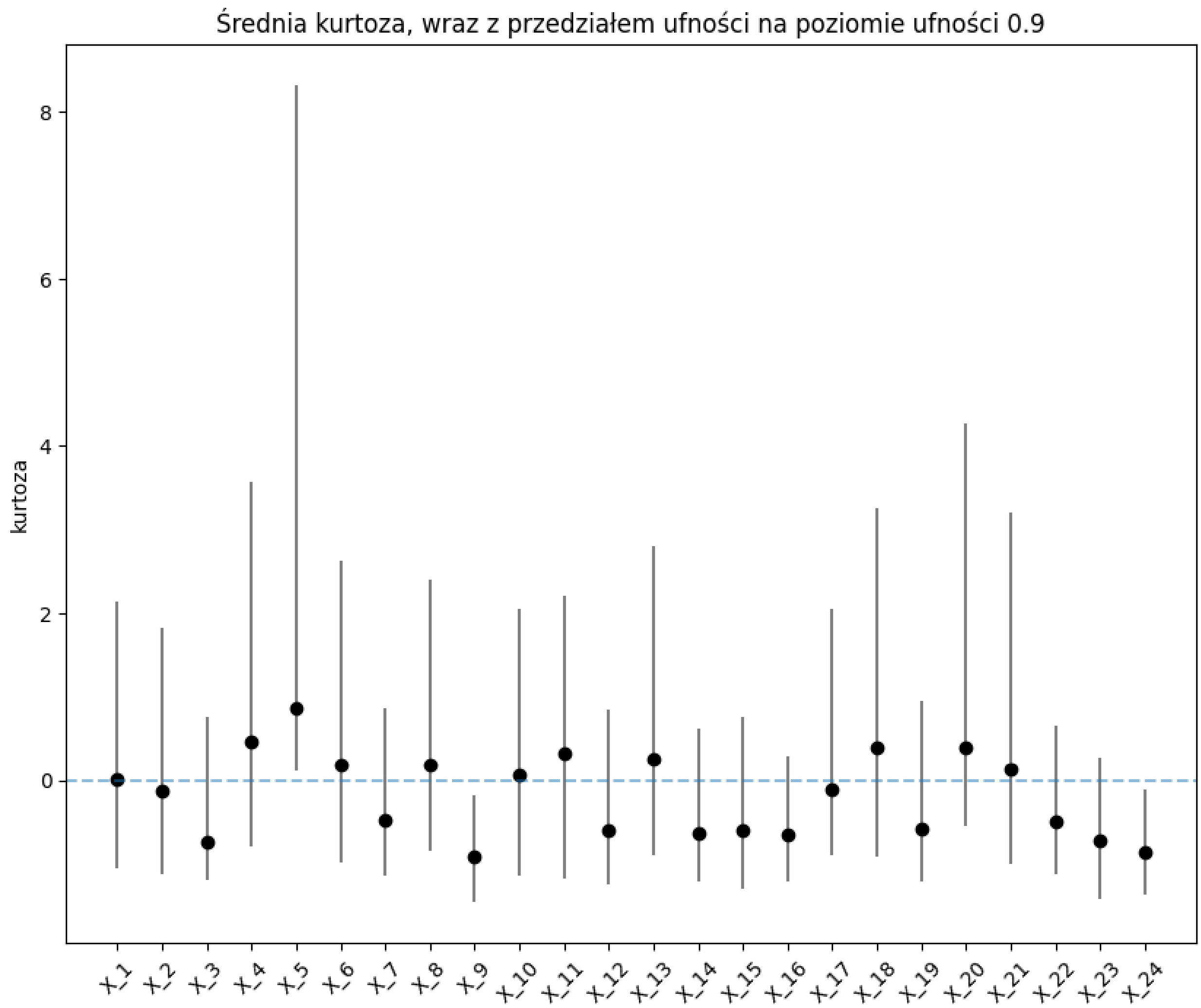
Wykres dla skośności

```
plot_statistic(s, s_i, name="skośność")
```



Wykres dla kurtozy

```
plot_statistic(k, k_i, name="kurtoza")
```



Z uwagi na bardzo małą wielkość każdej z prób (n=32), estymacje otrzymane za pomocą bootstrap nie są zbyt wiarygodne, ale pokazują że dane często nie są istotnie różne od rozkładu normalnego (częste pokrywanie wartości kurtozy i skośności równej 0).

4. Przygotowanie danych do Analizy Skupień.

Standaryzowanie zmiennych

W tym kroku wykonamy standaryzację zmiennych w celu przygotowania do analizy skupień. Dokonamy standaryzacji zmiennych, żeby skala cechy nie wpływała na jej udział w klastrze. Standaryzacja zostanie wykonana za pomocą obiektu klasy sklearn.preprocessing.StandardScaler, który jednak nie robi nic innego jak stosuje wzór:

$$X_i^{¿} = \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{D^2(X_i)}}$$

```
scaler = StandardScaler()
scaled_df = scaler.fit_transform(new_df)

scaled_df = pd.DataFrame(scaled_df, index=new_df.index,
columns=new_df.columns)
final_df = scaled_df.copy()
```

Redukcja wymiarów

Przygotujemy również dane za pomocą algorytmu Prinicipal Component Analysis do wyświetlenia na płaszczyźnie dwu-wymiarowej, żeby lepiej móc obserwować efekty klastrowania. Jako, że nie jest to temat naszej pracy, więcej informacji na temat tej metody można znaleźć tutaj. Nasz projekt wykorzystał implementację tego algorytmu pod postacią obiektu klasy sklearn.decomposition.PCA, gdzie liczba składowych została ustawiona (w celach wizualizacji) na 2, a rozkład według wektorów osobliwych został dokonany metodą LAPACK (metoda której korzenie sięgają języka Fortran).

```
from sklearn.decomposition import PCA

pca = PCA(n_components=2)
dim_reduced_df = pca.fit_transform(final_df)
```

Wyświetlanie wyników

Poniżej przygotowaliśmy funkcję, której zastosowanie w prezentowaniu wyników jest szerokie: - w przypadku braku podziałów (brak dostraczonych "predykcji" przynależności do klastra) nie wyświetla tytułu i nie nadaje wyróżniających kolorów punktom - w przypadku dostarczonych predykcji, nadaje tytuł wyjaśniający jaka metoda została użyta, dla ilu klastrów oraz na koniec koloruje punkty zgodnie z przynależnością do klastra

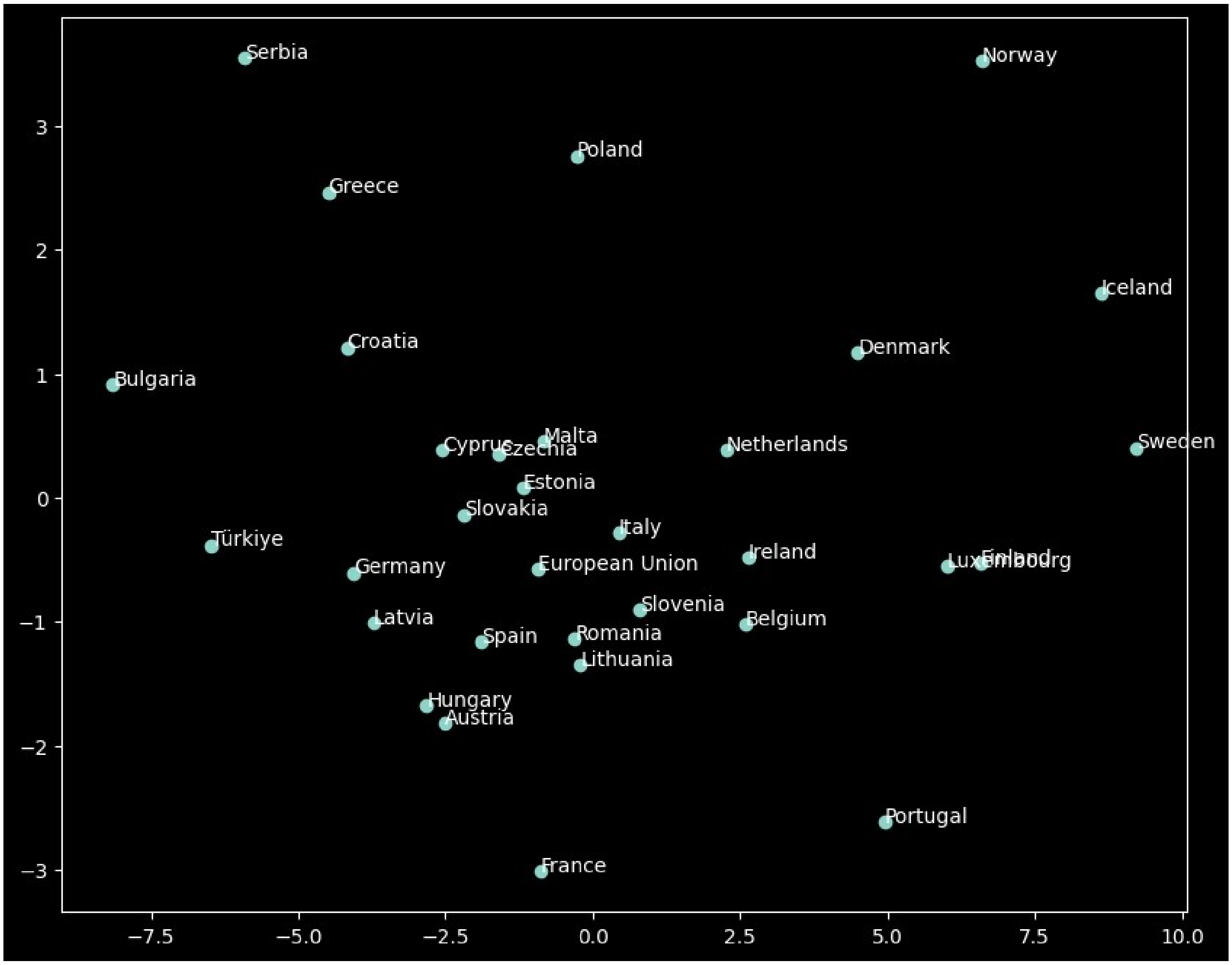
Zdecydowaliśmy się na czarny kolor tła, ze względu na większą czytelnośc kontrastujących kolorów.

```
def plot_results(df_dim_2, title='', cluster_preds=np.array([])):
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, figsize=(10,8))
    plt.style.use('dark_background')
    if cluster_preds.size:
        ax.set_title(f"Podział obiektów według metody {title}, liczba
klastrów = {np.unique(cluster_preds).shape[0]}")
        ax.scatter(dim_reduced_df[:, 0], dim_reduced_df[:, 1],
c=cluster_preds, cmap='cool')
    else:
        ax.scatter(dim_reduced_df[:, 0], dim_reduced_df[:, 1])
    for num, country in enumerate(final_df.index):
```

```
        plt.text(dim_reduced_df[num, 0], dim_reduced_df[num,1], 
country)
```

Poniżej wyniki redukcji wymiarów metodą PCA na naszym zbiorze danych:

```
plot_results(dim_reduced_df)
```



5. Zastosowanie przykładowych modeli klastrujących.

W tej sekcji pokażemy zastosowanie kilku wybranych algorytmów z biblioteki sklearn.cluster na naszych danych.

Import biblioteki oraz miar jakości klastrowania

```
import sklearn.cluster as cl
from sklearn.metrics import silhouette_score, calinski_harabasz_score,
davies_bouldin_score
```

Miary jakości klastrowania

W obliczu takiej mnogości metod oraz tak dużej liczby kombinacji hyperparametrów, musieliśmy skorzystać z obiektywnych miar jakości klastrowania. Skorzystaliśmy z tych dostępnych w pakiecie sklearn.metrics. Są to:

1. Silhouette Coefficient - miara jakości klastrowania, która mierzy dopasowanie obiektów do ich klastrów oraz ich odległość do innych klastrów. Więcej na temat tej miary można poczytać na artykule na Wikipedii lub u źródła. Przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$. Gdzie im wyższy współczynnik tym lepsza jakoś klastrowania.
2. Caliński-Harabasz Index - miara jakości klastrowania, która mierzy rozdzielność klastrów. Wyznacza się ją jako stosunek sumy wariancji międzyklastrowej do sumy wariancji wewnątrzklastrowej. Przyjmuje wartości z przedziału ¿, gdzie wyższe wartości oznaczają, że klastry są bardziej gęste i lepiej oddzielone od siebie. Więcej na temat tej metody w artykule
3. Davies-Bouldin Index - miara jakości klastrowania, która mierzy podobieństwo klastrów. Wyznacza się ją jako średnią wartość indeksu Davies-Bouldina dla wszystkich klastrów. Przyjmuje wartości z przedziału ¿, im wyższa wartość miary, tym mniejsze podobieństwo klastrów. Więcej szczegółów w tym artykule

Funkcja do klastrowania

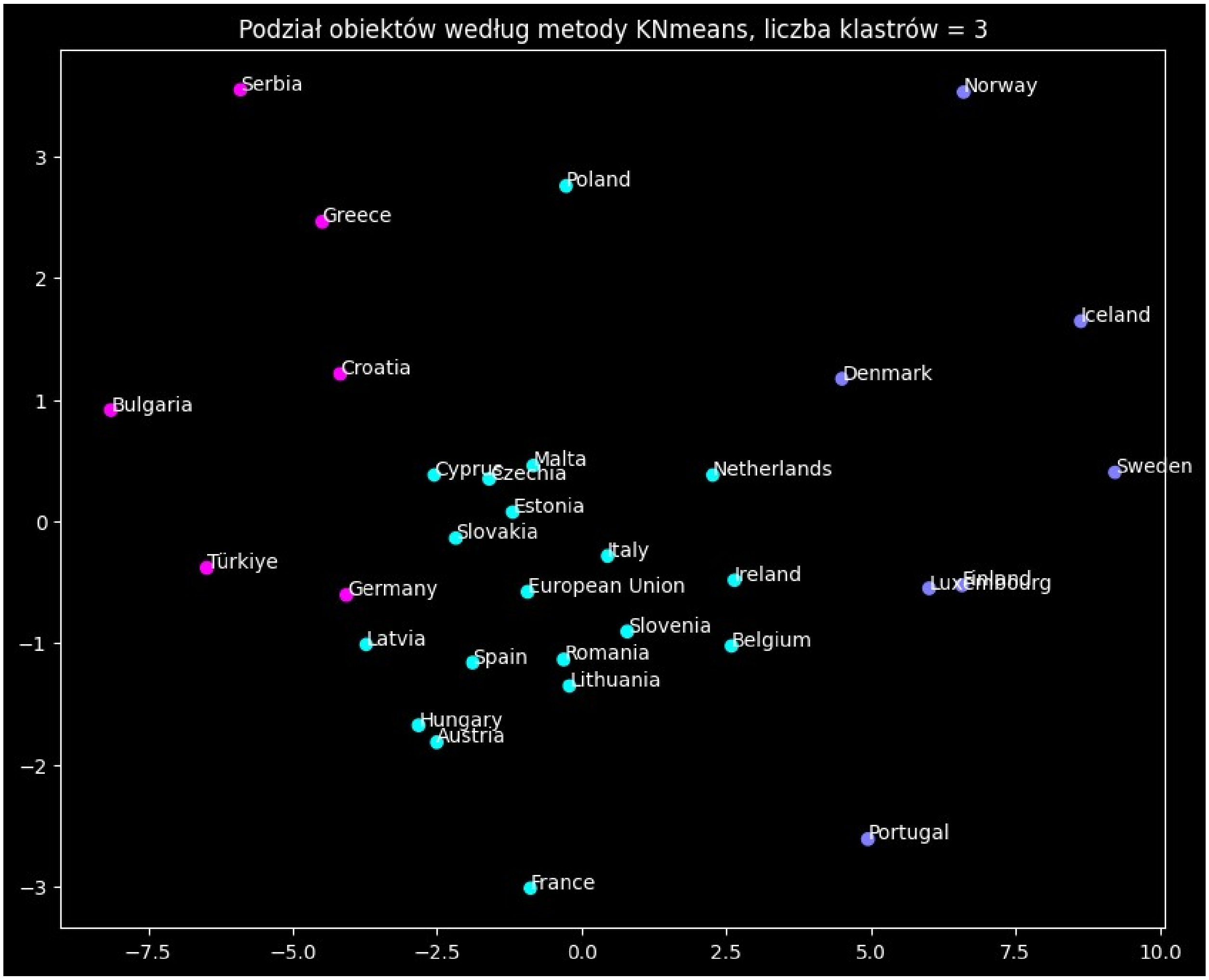
Przygotowaliśmy funkcję, której działanie jest podstawą naszej analizy. Możemy wybrać tryb kreślenia wykresu (plot=True), gdzie metoda klastrowania zostanie zastosowana na danych, wypisane zostaną miary jakości klatrowania (ale nie zwrócone) oraz wykres punktowy za pomocą funkcji *plot_results* zostanie wykonany. W przypadku flagi plot z wartością False, zostaną po prostu zwrócone wartości miar wymienonych w poprzednim punkcie dla danej metody.

```
def fit_and_show(model, name='', plot=True):
    results = model.fit_predict(final_df)
    if plot:
        plot_results(final_df, name, results)
        print(f"Silhouette Coef: {silhouette_score(final_df,
results)}")
        print(f"Calinski-Harabasz Index:
{calinski_harabasz_score(final_df, results)}")
        print(f"Davies-Bouldin Index: {davies_bouldin_score(final_df,
results)}")
        return
    return silhouette_score(final_df, results),
calinski_harabasz_score(final_df, results),
davies_bouldin_score(final_df, results)
```

KMeans

```
fit_and_show(cl.KMeans(n_clusters=3), name='KNmeans')
```

```
Silhouette Coef: 0.3452657497888547
Calinski-Harabasz Index: 31.11769535755412
Davies-Bouldin Index: 0.913465823441002
```

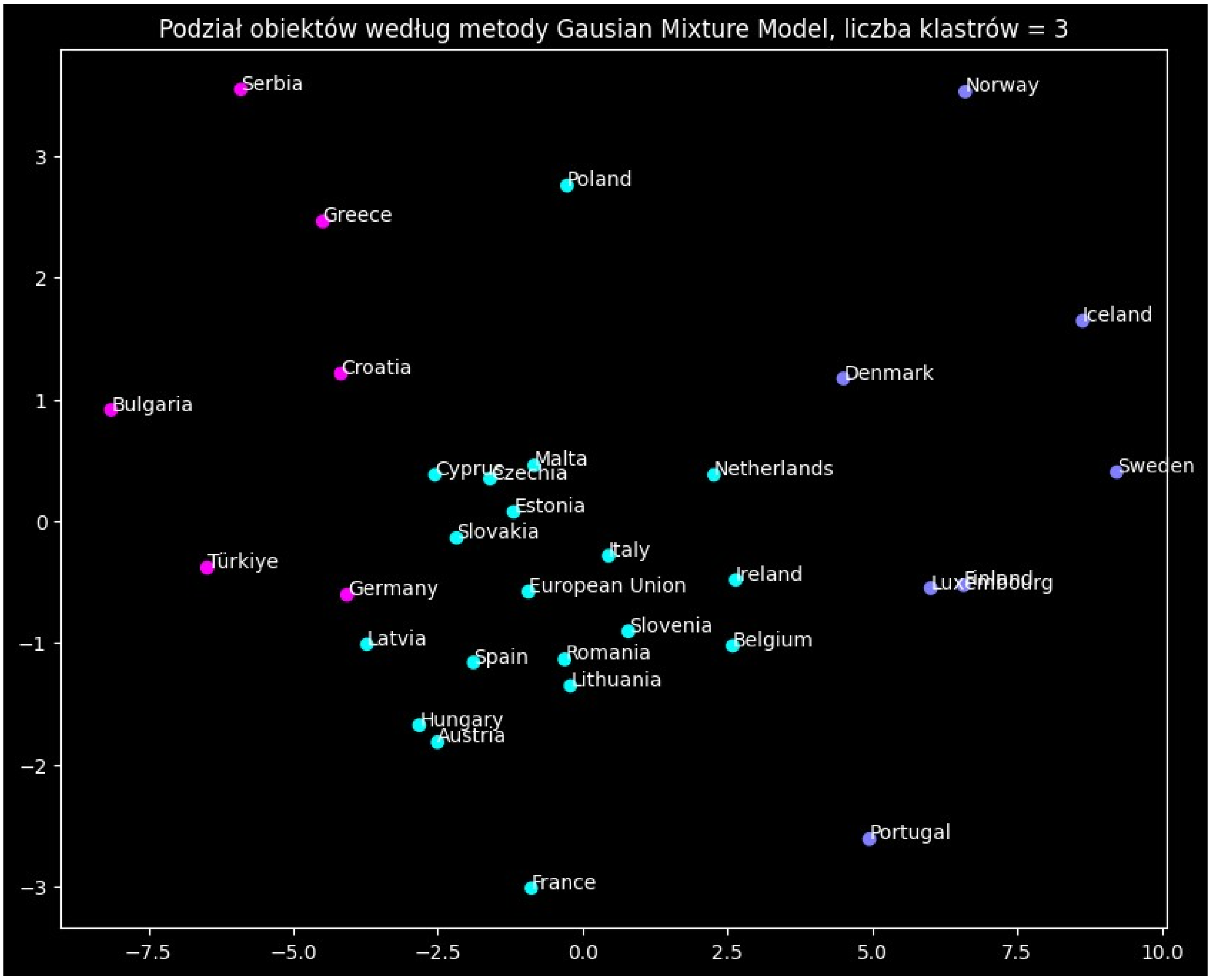


GaussianMixture

```
from sklearn.mixture import GaussianMixture

fit_and_show(GaussianMixture(n_components=3), name='Gausian Mixture
Model')
```

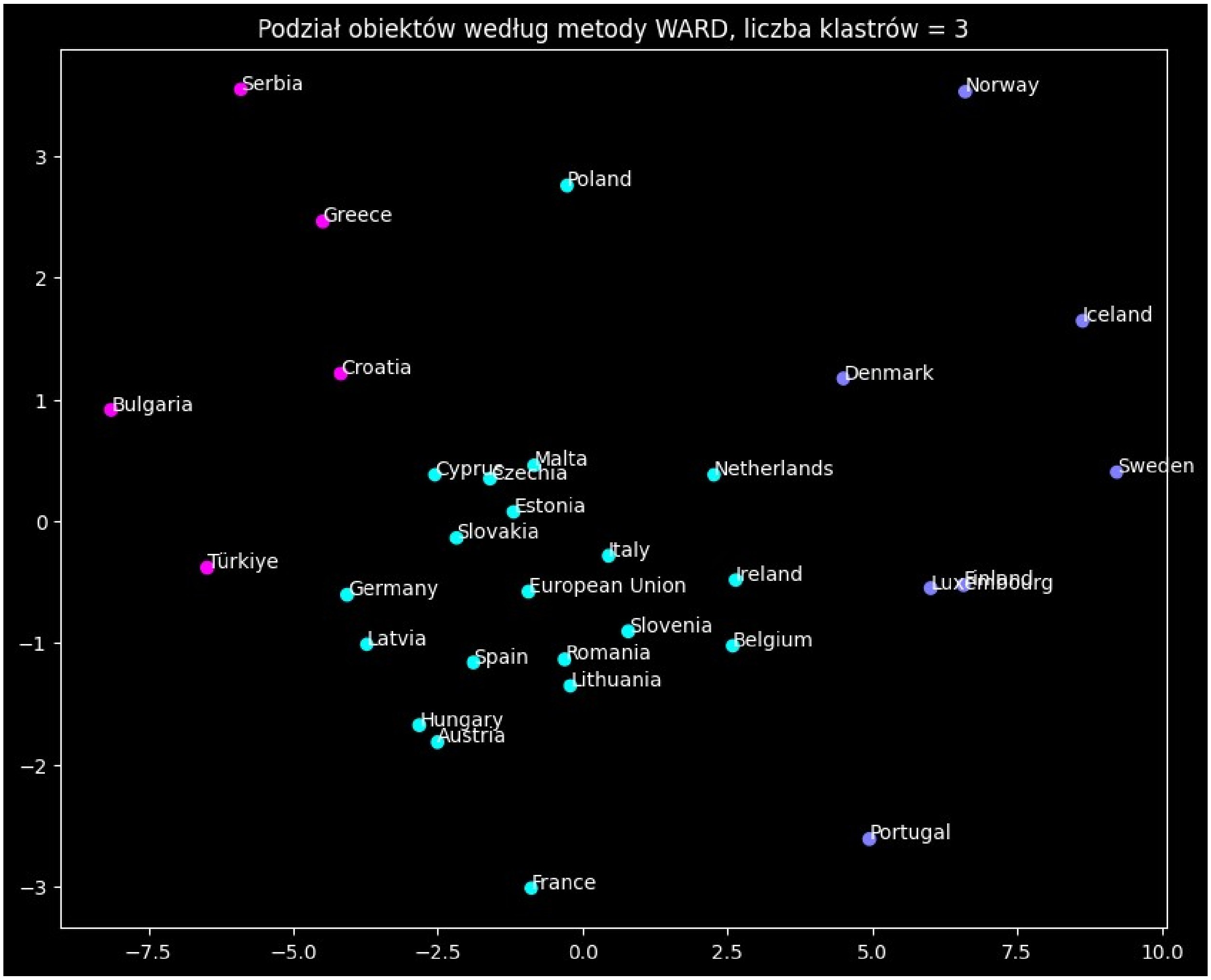
```
Silhouette Coef: 0.3452657497888547
Calinski-Harabasz Index: 31.11769535755412
Davies-Bouldin Index: 0.913465823441002
```



Metoda Warda

```
fit_and_show(cl.AgglomerativeClustering(n_clusters=3, linkage='ward'),
name='WARD')

Silhouette Coef: 0.3607635491036063
Calinski-Harabasz Index: 30.56751709378477
Davies-Bouldin Index: 0.8728271437543106
```



6. Dobór najlepszej metody klatrującej i odpowiedniej liczby klastrów.

W poprzedniej sekcji widzieliśmy działanie przykładowych modeli klastrujących na naszym zbiorze danych. W tej sekcji za pomocą trzech indeksów (wprowadzonych wcześniej) wybierzemy najlepszą metodę z większości dostępnych w pakiecie *sklearn.cluster*. Również dobierzemy odpowiednie hyperparametry liczby klastrów. Dobór będzie oparty o trzy wymienione wcześniej wskaźniki.

Użyte metody

Wykorzystane algorytmy to większość z dostępnych w ramach pakietu sklearn.cluster oraz metodę sklearn.mixture.GaussianMixture.

Lista wraz z krótszym opisem metod:

- AgglomerativeClustering - metoda hierarchiczna, która łączy obiekty w klastry w oparciu o ich odległość. Można użyć różnych metryk odległości. W naszym przypadku użyjemy metody Warda.
- Birch - metoda hierarchiczna, która wykorzystuje drzewo decyzyjne do tworzenia klastrów.
- KMeans - metoda niehierarchiczna, która przypisuje obiekty do klastrów w oparciu o ich odległość od ich najbliższego centrum klastra (tzw. centroida).
- BisectingKMeans - rozszerzenie metody KMeans, która dzieli zbiory na klastry w sposób iteracyjny.
- MiniBatchKMeans - wersja metody KMeans, która wykorzystuje minipakiety danych do obliczania centrów klastrów. Szybsza od klasycznej, może mniej dokładna. Wrzucona tutaj z ciekawości.
- SpectralClustering - technika mająca swoje korzenie w teorii grafów, w której to podejście jest wykorzystywane do identyfikowania społeczności węzłów w grafie na podstawie łączących je krawędzi.
- GaussianMixture - metoda probabilistyczna, która zakłada, że dane pochodzą z mieszaniny rozkładów Gaussa.

Poniżej lista zaimportowanych modeli:

```
models = [cl.AgglomerativeClustering, cl.Birch, cl.KMeans,
cl.BisectingKMeans, cl.MiniBatchKMeans, cl.SpectralClustering,
GaussianMixture]
```

Przygotujemy multindex, żeby móc zapisać każdej metodzie wartości trzech indeksów.

```
import itertools
index =
[np.array(list(itertools.chain.from_iterable([[model_name.__name__]*3
for model_name in models]))), np.array(['Silhouette Coef', 'Calinski-
Harabasz Index', 'Davies-Bouldin Index'] * len(models))]
results = pd.DataFrame(np.zeros((index[0].shape[0], 9)), index=index,
columns=np.arange(2, 11)) #inicjujemy pusty DataFrame na wyniki
```

Liczymy wartości miar dla wszystkich metod, z różnymi liczbami klastrów (od 2 do 11).

```
for num_clasters in range(2, 11):
    for model in models:
        try:
            sc, chi, dbi =
fit_and_show(model(n_clusters=num_clasters), plot=False)
        except Exception as e:
            sc, chi, dbi =
fit_and_show(model(n_components=num_clasters), plot=False)
        results.loc[(model.__name__, 'Silhouette Coef'), num_clasters]
= sc
        results.loc[(model.__name__, 'Calinski-Harabasz Index'),
num_clasters] = chi
```

```
        results.loc[(model.__name__, 'Davies-Bouldin Index'),
num_clasters] = dbi
```

Poniżej DataFrame który przedstawia dla każdej użytej metody klastrowania wyliczone trzy wcześniej wspomniane miary jakości klastrowania, wraz ze zmieniającą się liczbą klastrów.

```
results
```

```
                                                            2          3  \
AgglomerativeClustering Silhouette Coef               0.467550   0.360764
                        Calinski-Harabasz Index      32.295371  30.567517
                        Davies-Bouldin Index          0.699866   0.872827
Birch                   Silhouette Coef               0.467550   0.360764
                        Calinski-Harabasz Index      32.295371  30.567517
                        Davies-Bouldin Index          0.699866   0.872827
KMeans                  Silhouette Coef               0.453253   0.334457
                        Calinski-Harabasz Index      37.242326  31.561393
                        Davies-Bouldin Index          0.782450   0.947130
BisectingKMeans         Silhouette Coef               0.453253   0.317963
                        Calinski-Harabasz Index      37.242326  30.671855
                        Davies-Bouldin Index          0.782450   1.027203
MiniBatchKMeans         Silhouette Coef               0.453253   0.337302
                        Calinski-Harabasz Index      37.242326  30.926591
                        Davies-Bouldin Index          0.782450   0.983394
SpectralClustering      Silhouette Coef               0.399919   0.343277
                        Calinski-Harabasz Index      12.957842  14.937617
                        Davies-Bouldin Index          0.624935   0.815005
GaussianMixture         Silhouette Coef               0.453253   0.321115
                        Calinski-Harabasz Index      37.242326  31.382767
```

```
                          Davies-Bouldin Index      0.782450   0.978571

                                                           4          5  \
AgglomerativeClustering Silhouette Coef            0.231688   0.209568
                        Calinski-Harabasz Index   26.463591  22.389027
                        Davies-Bouldin Index       1.041464   1.190731
Birch                   Silhouette Coef            0.231688   0.209568
                        Calinski-Harabasz Index   26.463591  22.389027
                        Davies-Bouldin Index       1.041464   1.190731
KMeans                  Silhouette Coef            0.294633   0.177728
                        Calinski-Harabasz Index   26.880599  22.892973
                        Davies-Bouldin Index       1.018912   1.296234
BisectingKMeans         Silhouette Coef            0.236433   0.116440
                        Calinski-Harabasz Index   23.087534  14.450437
                        Davies-Bouldin Index       1.184079   1.721916
MiniBatchKMeans         Silhouette Coef            0.294633   0.228468
                        Calinski-Harabasz Index   26.880599  21.509910
                        Davies-Bouldin Index       1.018912   1.187710
SpectralClustering      Silhouette Coef            0.038366   0.094384
                        Calinski-Harabasz Index   10.594813  13.272259
                        Davies-Bouldin Index       1.155908   1.120455
GaussianMixture         Silhouette Coef            0.267586   0.202254
                        Calinski-Harabasz Index   26.615580  23.600918
                        Davies-Bouldin Index       1.015719   1.253174

                                                           6          7  \
AgglomerativeClustering Silhouette Coef            0.191852   0.185058
```

	Calinski-Harabasz Index	20.433568	18.787742
	Davies-Bouldin Index	1.232915	1.243733
Birch	Silhouette Coef	0.191852	0.185058
	Calinski-Harabasz Index	20.433568	18.787742
	Davies-Bouldin Index	1.232915	1.243733
KMeans	Silhouette Coef	0.201236	0.179506
	Calinski-Harabasz Index	21.611925	18.658978
	Davies-Bouldin Index	1.188793	1.209329
BisectingKMeans	Silhouette Coef	0.141489	0.152102
	Calinski-Harabasz Index	19.744349	17.089905
	Davies-Bouldin Index	1.384227	1.114889
MiniBatchKMeans	Silhouette Coef	0.174789	0.205014
	Calinski-Harabasz Index	19.468454	18.396457
	Davies-Bouldin Index	1.334279	0.981570
SpectralClustering	Silhouette Coef	0.101195	0.200032
	Calinski-Harabasz Index	13.242196	17.752986
	Davies-Bouldin Index	0.999170	0.918781
GaussianMixture	Silhouette Coef	0.156606	0.182984
	Calinski-Harabasz Index	16.739703	18.160361
	Davies-Bouldin Index	1.163995	1.005936

		8	9
\			
AgglomerativeClustering	Silhouette Coef	0.197184	0.213839
	Calinski-Harabasz Index	17.749561	17.196897
	Davies-Bouldin Index	1.120526	1.097006
Birch	Silhouette Coef	0.197184	0.213839
	Calinski-Harabasz Index	17.749561	17.196897

	Davies-Bouldin Index	1.120526	1.097006
KMeans	Silhouette Coef	0.166287	0.211109
	Calinski-Harabasz Index	18.048034	17.579565
	Davies-Bouldin Index	1.128532	0.926872
BisectingKMeans	Silhouette Coef	0.178442	0.187489
	Calinski-Harabasz Index	17.201084	16.749235
	Davies-Bouldin Index	1.109298	1.059549
MiniBatchKMeans	Silhouette Coef	0.147061	0.169916
	Calinski-Harabasz Index	16.554849	17.001483
	Davies-Bouldin Index	1.046926	1.005010
SpectralClustering	Silhouette Coef	0.071957	0.079988
	Calinski-Harabasz Index	11.004924	11.106821
	Davies-Bouldin Index	1.166089	1.221225
GaussianMixture	Silhouette Coef	0.173741	0.136157
	Calinski-Harabasz Index	16.373923	15.313244
	Davies-Bouldin Index	1.100226	1.046104

		10
AgglomerativeClustering	Silhouette Coef	0.213811
	Calinski-Harabasz Index	16.784674
	Davies-Bouldin Index	0.923910
Birch	Silhouette Coef	0.213811
	Calinski-Harabasz Index	16.784674
	Davies-Bouldin Index	0.923910
KMeans	Silhouette Coef	0.154744
	Calinski-Harabasz Index	16.029095
	Davies-Bouldin Index	1.018369
BisectingKMeans	Silhouette Coef	0.144822
	Calinski-Harabasz Index	15.150427
	Davies-Bouldin Index	1.054397
MiniBatchKMeans	Silhouette Coef	0.153364
	Calinski-Harabasz Index	14.819440
	Davies-Bouldin Index	0.887578
SpectralClustering	Silhouette Coef	0.044000

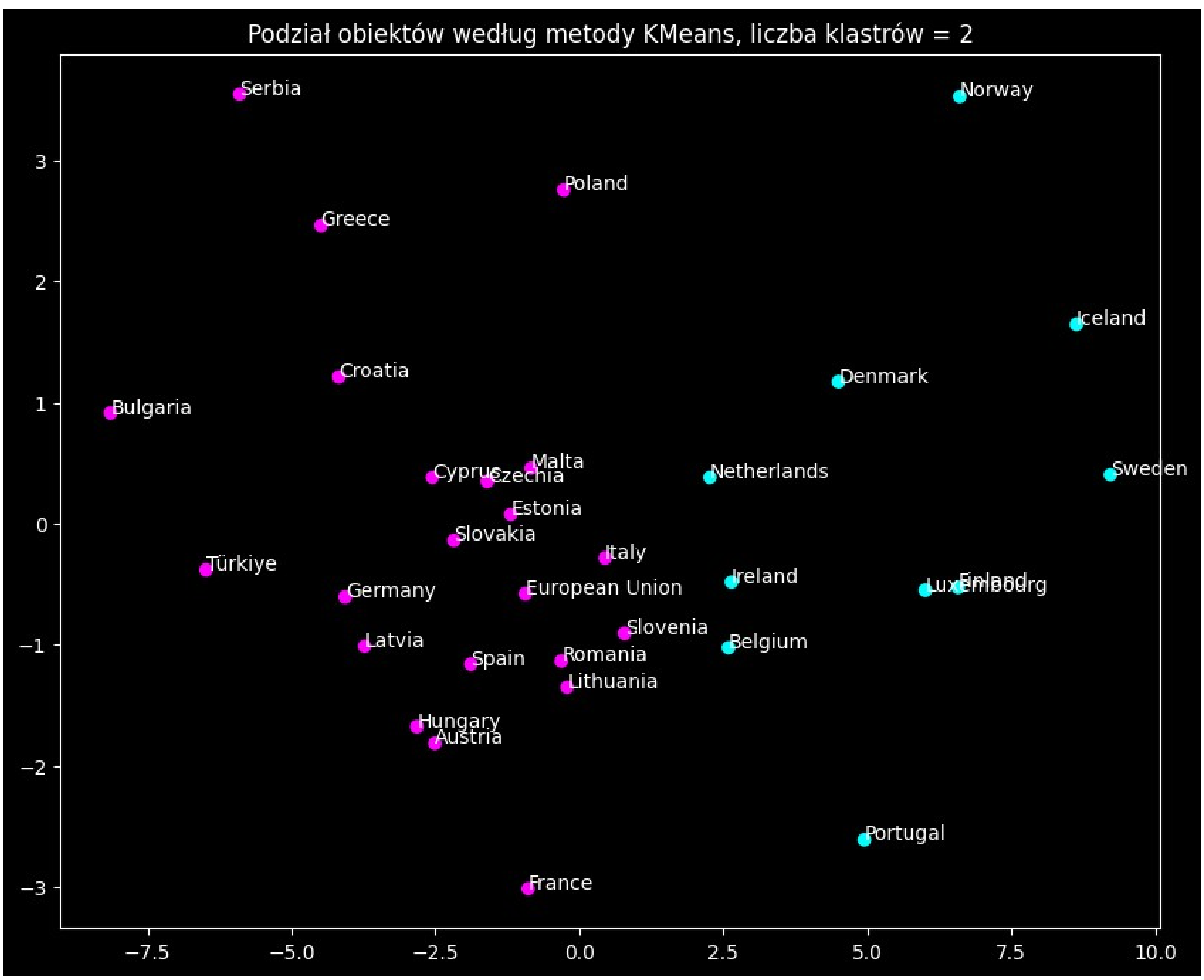
	Calinski-Harabasz Index	9.394734
	Davies-Bouldin Index	1.153687
GaussianMixture	Silhouette Coef	0.155993
	Calinski-Harabasz Index	15.029590
	Davies-Bouldin Index	1.122995

Obiecującą metodą jest K-Means dla dwóch klastrów, która ma wysoki współczynnik Silhouette Coefficient, bardzo wysoki wskaźnik Calinski-Harabasz Index i Davies-Bouldin Index na dość wysokim poziomie. Wyświetlę więc wyniki tej metody. Jeżeli chcielibyśmy uzyskać rozwiązanie dla 3 klastrów, też będziemy korzystali z metody K-Means.

7. Wyniki

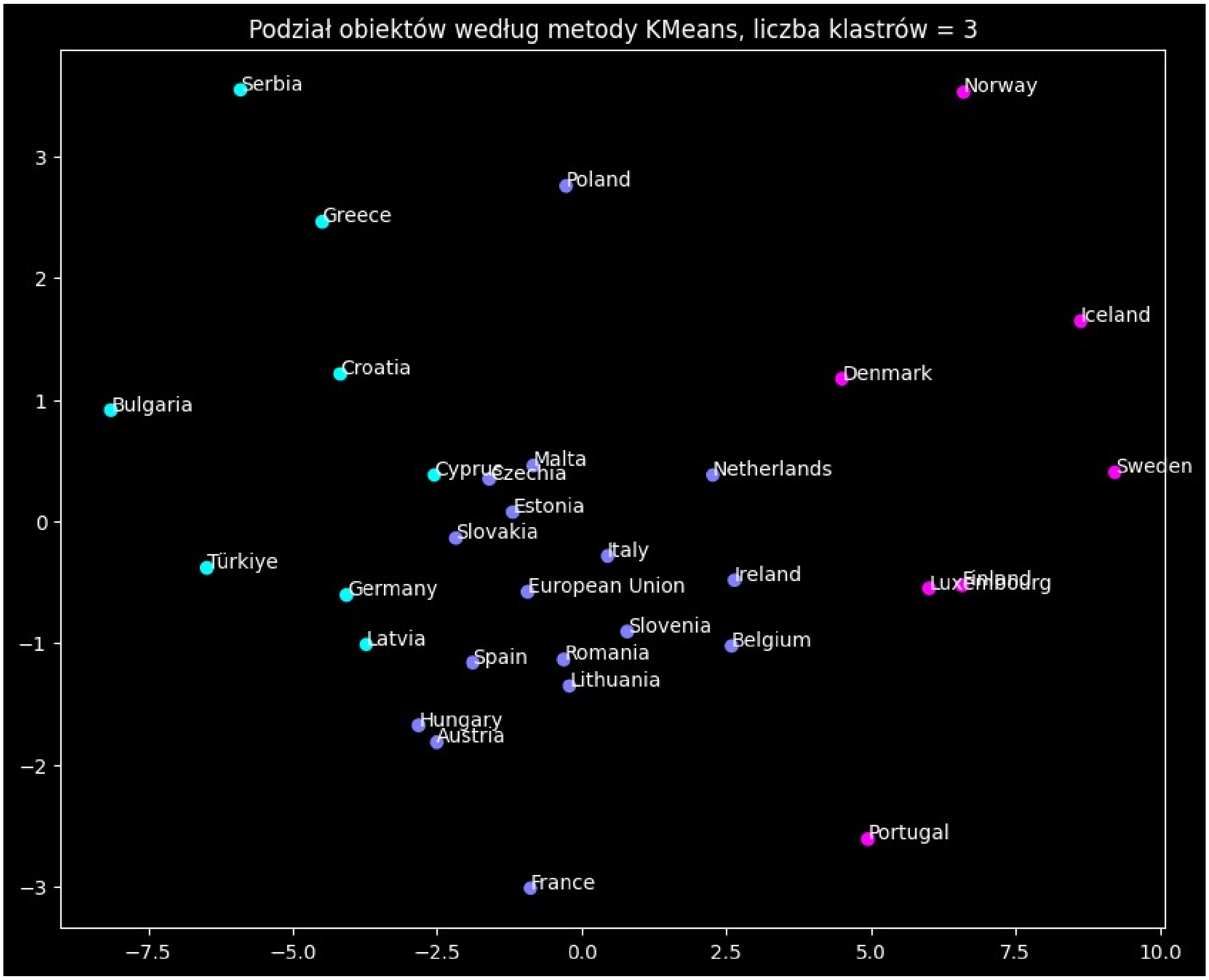
```
fit_and_show(cl.KMeans(n_clusters=2), plot=True, name='KMeans')
```

```
Silhouette Coef: 0.4532526668267554
Calinski-Harabasz Index: 37.24232575602608
Davies-Bouldin Index: 0.7824495979443283
```



```
fit_and_show(cl.KMeans(n_clusters=3), plot=True, name='KMeans')
```

```
Silhouette Coef: 0.3211145666232551
Calinski-Harabasz Index: 31.382767318572526
Davies-Bouldin Index: 0.9785705821451872
```



8. Wnioski

Uzyskane podziały sugerują zgodne z odczuciami empirycznymi wnioski.

Dla podziału na dwa skupienia: Europa w swoich zwyczajach związanych z paleniem podzieliła się na grupy:

- mało palące: cała Skandynawia, wszystkie kraje Beneluxu, Portugalia i Irlandia
- palące częściej: reszta krajów

Dla podziału na trzy skupienia (który z obliczonych mair jest gorszy):

- cała Skandynawia i Portugalia dalej w oddzielnym skupieniu (kraje potencjalnie mniej palące)
- grupa umiarkowanie palące: kraje Europy środkowej i większośc krajów zachodu (bez Niemiec)
- grupa mająca większe skłonności do palenia: kraje bałkańskie, Grecja, Turcja, Niemcy oraz Łotwa