Вопросы с доказательством для подготовки к коллоквиуму

2018-2019-й учебный год

1-й модуль

1) Что происходит с произведением матриц при транспонировании? Ответ обосновать.

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$\square$

$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum\limits_{r=1}^{n}[A]_{jr} \cdot [B]_{ri} = \sum\limits_{r=1}^{n}[A^T]_{rj} \cdot [B^T]_{ir} = [B^T \cdot A^T]_{ij}$

$\blacksquare$

2) Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом? Ответ обоснуйте для матриц второго порядка.

Произвольная линейная по столбцам кососимметрическая функция от матрицы с условием $f(E_n) = 1$, является определителем

$\square$

$(n = 2)$

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = f\left(a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right) =$$

$$= a_{11} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + a_{21} \cdot f\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot f\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + a_{21} \cdot f\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A$$

$\blacksquare$

3) Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц? Ответ обоснуйте.

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})\ \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ $\square$

Рассмотрим функцию $f(B) = \det(A \cdot B)$. Покажем, что для $f(B)$ выполнены свойства 2 и 4б

1) Если столбцы матрицы B i и j одинаковы, то и в матрице $A \cdot B$ столбцы i и j тоже одинаковы $\Rightarrow$ выполняется свойство 4б

2) Если в матрице B i-тый столбец имеет вид $\alpha \cdot a + \mu \cdot b \Rightarrow$ в $A \cdot B$ он будет иметь вид $\alpha \cdot A \cdot a + \mu \cdot A \cdot b \Rightarrow$ выполнено свойство 2.

Следовательно, $f(B) = \det B \cdot f(En)$. Возьмем и вычислим $f(E_n) = \det(A \cdot E_n) = \det E_n \cdot f(E_n) = 1 \cdot f(E_n)$

$\det(A \cdot E_n) = \det A$

$\Rightarrow f(E_n) = \det A \Rightarrow f(B) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot B$

$\blacksquare$

4) Выпишите формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и докажите их.
Правило Крамера
Пусть $A \cdot x = b$ – совместная СЛАУ.
Тогда $x_j \cdot \det(A_1, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \ldots, A_n) = \triangle_j$
Если $\triangle \equiv \det A \neq 0$, то

$$x_j = \frac{\triangle_j}{\triangle}, j = \overline{1, n} \text{ – формула Крамера}$$

□
$\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot A_k, A_{j+1}, \ldots, A_n) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = x_1 \cdot \det(A_1, \ldots, A_1, \ldots, A_n) +$
$+ \ldots + x_j \cdot \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \ldots = x_j \cdot \det A$

■

5) Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости.
Строки $a_1, \ldots, a_k$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных
□
Дано: $a_1, \ldots, a_k$ – л.з.
Доказать: хотя бы одна из них – л.к. остальных
По определению линейной зависимости:
$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = 0$
Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot a_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot a_k$ – это л.к. остальных
Дано: Пусть $a_1 = \beta_2 \cdot a_2 + \ldots + \beta_k \cdot a_k$
Доказать: $a_1, \ldots, a_k$ – л.з.
$\underbrace{1 \cdot a_1}_{\neq 0} - \beta_2 \cdot a_2 - \ldots - \beta_k \cdot a_k = 0$
не все коэффициенты этой л.к. равны 0 $\Rightarrow$ по определению $a_1, \ldots, a_k$ – л.з.

■

6) Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы? Ответ обоснуйте.
$RgA^T = RgA$
□
Докажем, что $RgA^T \geq RgA$
Пусть $RgA = r \Rightarrow \exists$ минор $M^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r} \neq 0$
В матрице A^T есть минор $N^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}$, получающийся из $M^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_r}$ транспонированием $\Rightarrow N^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} \neq 0$ (это свойство 1 определителя) $\Rightarrow RgA^T \geq r = RgA$
Таким образом, $RgA \leq RgA^T \leq Rg(A^T)^T = RgA \Rightarrow RgA = RgA^T$

■

7) Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.
1) Базисные строки (столбцы), соответсвующие любому базисному минору M матрицы A л.н.з.
2) Строки матрицы A, не входящие в M, являются линейными комбинациями базисных строк
□
1) (от противного)
Предположим, что одна из них является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow M = 0$ (по свойству определителя). А это противоречит определению базисного минора.
2) Будем считать (без ограничения общности), что базисный минор M расположен в левом

верхнем углу матрицы
Пусть $RgA = r$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \text{M} & \begin{matrix} a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \hline a_{r+11} & \dots & \dots & a_{r+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Возьмем строку $a_k, k > r$
Покажем, что $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$:
$a_k = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_r \cdot a_r$, где $a_1, \dots, a_r$ – базисные строки
Составим определитель:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$$

, получающийся добавлением к M k-той строки и j-того столбца, $j = \overline{1, n}$
Покажем, что $\triangle = 0$
Если $j \leq r$, то в $\triangle \exists$ два одинаковых столбца $\Rightarrow$ по свойству определителя $\triangle = 0$
Если $j > r$, то $\triangle$ – минор матрицы A порядка $r + 1 \Rightarrow$ по определению ранга матрицы $\triangle = 0$
Разложим $\triangle$ по последнему столбцу $a_{1j} \cdot A_1 + \dots + a_{rj} \cdot A_r + a_{kj} \cdot A_k = 0$, где $A_1, \dots, A_k$ – алгебраическое дополнение соответствующих элементов, причем $A_k = \pm M \neq 0 \Rightarrow a_{kj} - \frac{A_1}{A_k} \cdot a_{1j} - \dots - \frac{A_r}{A_k} \cdot a_{rj}, j = \overline{1, n}, k > r$
то есть $a_{kj} = \lambda_1 \cdot a_{1j} + \dots + \lambda_r \cdot a_{rj} \Rightarrow (a_{k1}, \dots, a_{kn}) = \lambda_1 \cdot (a_{11}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_r \cdot (a_{r1}, \dots, a_{rn})$
ч.т.д

■

8) Сформулируйте и докажите следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).
Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие условия эквивалентны:
1) $\det A \neq 0$
2) $RgA = n$
3) все строки A л.н.з.
□

$$\begin{array}{c} 1 \\ \nearrow \searrow \\ 3 \leftarrow 2 \end{array}$$

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ в A сеть минор n-го порядка $\neq 0 \Rightarrow$ по определению $RgA = n$
$2 \Rightarrow 3$: Пусть $RgA = n \Rightarrow$ Все строки базисны $\Rightarrow$ по теореме они все л.н.з. (по теореме о базисном миноре)
$3 \Rightarrow 1$: Пусть все строки A л.н.з. Предположим, что $\det A = 0 \Rightarrow RgA < n \Rightarrow$ по крайней мере одна из строк является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ по критерию линейной зависимости строки являются л.з. – противоречие

■

9) Сформулируйте и докажите критерий существования обратной матрицы (свойства определителя предполагаются известными). Единственна ли обратная матрица? Ответ обоснуйте.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ имеет обратную (обратима) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (она невырождена)
$\square$
Необходимость
Дано: $\exists A^{-1}$
Доказать: $\det A \neq 0$
По определению обратной: $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$
Достаточность
Дано: $\det A \neq 0$
Доказать:$\exists A^{-1}$
Рассмотрим матрицу $B = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$
$\tilde{A}$ – союзная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

– транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы A
Покажем, что $B = A^{-1}$
Рассмотрим $A \cdot B$: $[A \cdot B]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{ir} \cdot [B]_{rj} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot [\tilde{A}]_{rj} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot A_{jr} =$
$= \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = [E]_{ij}$

$\blacksquare$

Если обратная матрица существует, то она единственная.
$\square$
Предположим противоположное: $\exists B_1$ и B_2 – обратные к A.
По определению $B_i \cdot A = A \cdot B_i = E, i = 1{,}2$.
$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$

$\blacksquare$

10) Сформулируйте и докажите теорему о ранге матрицы (теорема о базисном миноре предполагается известной)
Ранг матрицы=максимальному числу ее л.н.з. строк (столбцов)
$\square$
Пусть $RgA = r$, максимальное число л.н.з. строк$= k$
Покажем, что $k = r$
1) Так как в A есть r л.н.з. строк (так как $RgA = r$, это базисные строки)
$k \geq r$ 2) Вычеркнем в A все строки, кроме k л.н.з. $\Rightarrow$ получим матрицу A_1. В ней k строк.
При этом $RgA_1 = k$ (так как если бы RgA_1 был бы $< k$, то среди этих k строк только часть была бы базисными и какая-то одна строка была бы л.к. остальных $\Rightarrow$ строки были бы л.з.)
Базисный минор A_1 имеет порядок k и является не равным 0 минором порядка k исходной матрицы $\Rightarrow k \leq r$
Следовательно, $k = r$

$\blacksquare$

2-й модуль

1) Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли и докажите ее.

СЛАУ $A \cdot x = b$ совместна $\Leftrightarrow RgA = Rg(A|b)$

$\square$

Дано: СЛАУ совместна

Доказать: $RgA = Rg(A|b)$

Слау совместна $\Rightarrow \exists x^0 \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} : A \cdot x^0 = b \Leftrightarrow x_1^0 \cdot A_1 + \ldots + x_n^0 \cdot A_n = b$

A_j – j-тый столбец матрицы A

$\Rightarrow$ столбцы $A_1, \ldots, A_r$ – базисные

столбцы $A_{r+1}, \ldots, A_n$ – их линейные комбинации

$A_{r+1} = \lambda_{1r+1} \cdot A_1 + \ldots + \lambda_{rr+1} \cdot A_r$

$A_n = \lambda_{1n} \cdot A_1 + \ldots + \lambda_{rn} \cdot A_r$

$\Rightarrow b = x_1^0 \cdot A_1 + \ldots + x_r^0 \cdot A_r + x_{r+1}^0 \cdot (\lambda_{1r+1} \cdot A_r + \ldots + \lambda_{rr+1} \cdot A_r) + \ldots +$

$+x_n^0 \cdot (\lambda_{1n} \cdot A_1) + \ldots + \lambda_{rn} \cdot A_r = (x_1^0 + x_{r+1}^0 \cdot \lambda_{1r+1} + \ldots + x_n^0 \cdot \lambda_{1n}) \cdot A_1 + \ldots + (x_r^0 + x_{r+1}^0 \cdot \lambda_{rr+1} + \ldots + x_n^0 \lambda_{rn}) \cdot A_r$

то есть b является линейной комбинацией столбцов $A_1, \ldots, A_r \Rightarrow M$ (базисный минор в матрице A) является базисным минором и в $(A|b) \Rightarrow RgA = Rg(A|b)$ так как

1. он не является нулевым

2. все окаймляющие его миноры$= 0$, так как из них один из столбцов является линейной комбинацией $A_1, \ldots, A_r$ (для $A_{r+1,\ldots,A_n}$ по определению базисного минора, а для b показали)

Дано: $RgA = Rg(A|b)$

Доказать: СЛАУ совместна

Пусть $RgA = r$. Пусть M – базисный минор, расположенный в левом верхнем углу матрицы. По теореме о базисном миноре столбец b является линейной комбинацией столбцов $A_1, \ldots, A_r$. То есть $\exists$ числа $y_1^0, \ldots, y_r^0 : b = y_1^0 \cdot A_1 + \ldots + y_r^0 \cdot A_r$.

Тогда $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_r^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – решение СЛАУ $A \cdot x = b$

$\blacksquare$

2) Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Докажите теорему о существовании ФСР.

Любые $n-r$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$, где n – число неизвестных, а $r = RgA$, называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$

Теорема о существовании ФСР

Рассмотрим СЛАУ $A \cdot x = 0$

У нее существует $n - r$ линейно независимых решений, где n – число неизвестных, а $r = RgA$

$\square$

Предположим, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу. Тогда строки $A_1, \ldots, A_r$ – базисные, а $A_{r+1}, \ldots, A_m$ – их линейные комбинации

$$\begin{cases} A_{r+1} = \lambda_1 \cdot A_1 + \ldots + \lambda_r \cdot A_r \\ \vdots \\ A_m = \mu_1 \cdot A_1 + \ldots + \mu_r \cdot A_r \end{cases}$$

Сделаем элементарные преобразования

$$\begin{cases} A_{r+1} - (\lambda_1 \cdot A_1 + \ldots + \lambda_r \cdot A_r) \to A_{r+1} \\ \vdots \\ A_m - (\mu_1 \cdot A_1 + \ldots + \mu_r \cdot A_r) \to A_m \end{cases}$$

Получим матрицу, у которой последние $m - r$ строк нулевые.

Элементарным преобразованиям строк соответствуют элементарные преобразования уравнений $\Rightarrow$СЛАУ эквивалентна.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1r} \cdot x_r = -a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \ldots + a_{rr} \cdot x_r = -a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Переменные $x_1, \ldots, x_r$, отвечающие базисным строкам, называют главными (базисными), а

$x_{r+1}, \ldots, x_n$ – свободными. (Система уравнений выше – это выражение главных переменных через свободные)

Придадим свободным переменным следующий набор значений:

Первый набор	Второй набор	$(n-r)$-й набор
$x_{r+1} = 1$	$x_{r+1} = 0$	$x_{r+1} = 0$
$x_{r+2} = 0$	$x_{r+2} = 1$	$x_{r+2} = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n = 0$	$x_n = 0$	$x_n = 1$

Для каждого набора решим СЛАУ относительно $x_1, \ldots, x_r$

Она всегда имеет единственное решение, так как ее определитель $= M \neq 0$ (базисный минор матрицы A)

Получим следующие решения:

Для первого набора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \end{pmatrix}$$

Для второго набора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2r} \end{pmatrix}$$

Для $(n - r)$-го набора набора$(n - r = k)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \end{pmatrix}$$

Тогда столбцы:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \Phi_k = \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются решениями исходной СЛАУ
Покажем, что они л.н.з.
Рассмотрим равенство: $\alpha_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + \alpha_k \cdot \Phi_k = 0$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_k \cdot \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и это должно быть } = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$
По определению $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – л.н.з.$\Rightarrow$ они образуют ФСР ОСЛАУ $A \cdot x = 0$

■

3) Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и докажите его.
Однородная СЛАУ $A \cdot x = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ Матрица A вырождена, то есть $\det A = 0$
□
Дано: $A \cdot x = 0$ имеет решение $x \neq 0$
Доказать: $\det A = 0$
Предположим противное$\Rightarrow$ по формуле Крамера СЛАУ имеет единственное решение $= 0 \rightarrow$
$\rightarrow$ противоречие
Дано: $\det A = 0$
Доказать: $\exists$ ненулевое решение СЛАУ $A \cdot x = 0$
Пусть $\det A = 0 \Rightarrow RgA < n \Rightarrow n - r = k > 0$
По теореме о существовании ФСР $\exists k$ л.н.з. решений СЛАУ $A \cdot x = 0$. Это и есть ненулевое решение.

■

4) Докажите теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений, то есть о том, что произвольное решение однородной СЛАУ может быть представлено в виде линейной комбинации элементов ФСР.
Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде
$x = c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k$, где $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные
□
Пусть $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ – произвольное решение ОСЛАУ $A \cdot x = 0$
Предположим, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу матрицы A. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы о существовании ФСР,

получим, что $A \cdot x = 0$ эквивалентна

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1r} \cdot x_r = -a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \ldots + a_{rr} \cdot x_r = -a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \ldots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Решим ее относительно главных (базисных) неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ (по формулам Крамера)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1} \cdot x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{rr+1} \cdot x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn} \cdot x_n \end{cases} \tag{9.1}$$

α_{ij} – некоторые числа
Составим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} x_1^0 & \phi_{11} & \ldots & \phi_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^0 & \phi_{1r} & \ldots & \phi_{kr} \\ x_{r+1}^0 & \phi_{1r+1} & \ldots & \phi_{kr+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & \phi_{1n} & \ldots & \phi_{kn} \end{pmatrix}$$

Покажем, что $RgD = k$
1. $RgD \geq k$, так как $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ л.н.з. (это ФСР), а $RgD =$ максимальному числу л.н.з. столбцов (по теореме о ранге матрицы)
2. Покажем, что $RgD \leq k$
Столбцы $x^0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – решения СЛАУ $A \cdot x = 0 \Rightarrow$ из (9.1) получаем, что

$$\begin{aligned} &x_1^0 = \alpha_{1r+1} \cdot x_{r+1}^0 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n^0 \\ &\phi_{11} = \alpha_{1r+1} \cdot \phi_{1r+1} + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \phi_{1n} \\ &\vdots \\ &\phi_{k1} = \alpha_{1r+1} \cdot \phi_{kr+1} + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \phi_{kn} \end{aligned}$$

то есть первая строка d_1 матрицы D – линейная комбинация строк $d_{r+1}, \ldots, d_n$:
$d_1 = \alpha_{1r+1} \cdot d_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n} \cdot d_n$
Аналогично с остальными строками вплоть до r-той:
$d_r = \alpha_{rr+1} \cdot d_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn} \cdot d_n$
Сделаем элементарные преобразования:

$$\begin{cases} d_1 - (\lambda_{1r+1} \cdot d_{r+1} + \ldots + \lambda_{1n} \cdot d_n) \to d_1 \\ \vdots \\ d_r - (\lambda_{rr+1} \cdot d_{r+1} + \ldots + \lambda_{rn} \cdot d_n) \to d_r \end{cases}$$

Получим матрицу D_1, у которой первые r строк нулевые.

$$D \backsim D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ x_{r+1}^0 \cdot \phi_{1r+1} & \ldots & \phi_{kr+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 \cdot \phi_{1n} & \ldots & \phi_{kn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow RgD_1 \leq n - r = k$

При элементарных преобразованиях ранг не меняется $\Rightarrow RgD \leq k$
Мы доказали, что $RgD = k \Rightarrow$ столбцы $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – базисные (они л.н.з.) $\Rightarrow$ по теореме о базисном миноре столбец x^0 – их линейная комбинация, то есть существуют числа $c_1, \ldots, c_k$:
$x^0 = c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k$

■

5) Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите ее (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).
Пусть известно частное решение $\tilde{x}$ СЛАУ $A \cdot x = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде $x = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР соответствующей однородной СЛАУ, а $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные
□
Пусть x^0 – произвольное решение СЛАУ $A \cdot x = b \Rightarrow (x^0 - \tilde{x})$ – по свойствам решений решение однородной СЛАУ $A \cdot x = 0 \Rightarrow$ по теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ $\exists$ постоянные $c_1, \ldots, c_n$,
$x^0 - \tilde{x} = c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k \Rightarrow x^0 = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + c_k \cdot \Phi_k$

■

6) Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трехмерного пространства, и приведите ее вывод.
Пусть $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ – разложение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ по базису.
Тогда их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

□
$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) =$
$= (a_1\overrightarrow{e_1}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_3\overrightarrow{e_3}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) =$
$= (a_1\overrightarrow{e_1}, b_1\overrightarrow{e_1}) + (a_1\overrightarrow{e_1}, b_2\overrightarrow{e_2}) + (a_1\overrightarrow{e_1}, b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_1\overrightarrow{e_1}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_2\overrightarrow{e_2}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_3\overrightarrow{e_3}, b_1\overrightarrow{e_1}) +$
$+ (a_3\overrightarrow{e_3}, b_2\overrightarrow{e_2}) + (a_3\overrightarrow{e_3}, b_3\overrightarrow{e_3}) =$
$= a_1 \cdot b_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + a_1 \cdot b_2(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + a_1 \cdot b_3(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) + a_2 \cdot b_1(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) + a_2 \cdot b_2(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) + a_2 \cdot b_3(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) +$
$+ a_3 \cdot b_1(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) + a_3 \cdot b_2(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) + a_3 \cdot b_3(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

■

7) Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трехмерного пространства и приведите ее вывод.
Пусть $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – правый ортонормированный базис, $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$,
$\overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}$.

Тогда $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(a_yb_z - b_ya_z) + \overrightarrow{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \overrightarrow{k}(a_xb_y - a_yb_x)$

□
Так как $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – правый ортонормированный базис, то

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$,
$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$
$\Rightarrow \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}) \times (b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}) =$
$= a_x b_y \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + a_x b_z \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} + a_y b_x \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} + a_y b_z \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} + a_z b_x \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + a_z b_y \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} =$

$$= \overrightarrow{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \overrightarrow{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \overrightarrow{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

■

8) Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.

1. Любая плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C, D – некоторые числа
2. Любое уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, где $A^2+B^2+C^2>0$, определяет в пространстве плоскость

□

1. Рассмотрим плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ей принадлежит. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{n} \perp \pi$. Пусть $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.
$M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$, то есть $Ax+By+Cz+D=0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению $Ax+By+Cz+D=0$
2.Рассмотрим уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, где $A^2+B^2+C^2>0$. Оно имеет хотя бы одно решение (например, если $A \neq 0$, то $x_0 = -\dfrac{D}{A}, y_0 = z_0 = 0$). Обозначим за M_0 точку (x_0, y_0, z_0). Пусть точка $M(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению $Ax+By+Cz+D=0$. Вычтем из него равенство $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 : A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$, где $\overrightarrow{n} = (A,B,C) \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$ точка M лежит в плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{n} \Rightarrow$ уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ определяет плоскость

■

9) Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и приведите ее вывод.

Рассмотрим плоскость $P : Ax+By+Cz+D=0$ и точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Найдем $\rho(M, L)$ – расстояние от точки M до плоскости P. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.

Тогда $\rho(M,P) = |\text{пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{M_1M}| = \dfrac{|(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}|} = (\text{в ОНБ}) = \dfrac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$
$= \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, так как $M_1 \in P \Leftrightarrow Ax_1+By_1+Cz_1 = -D$

■

10) Выпишите формулу Муавра и докажите ее.

$z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi), n \in \mathbb{N}$

□

$n = 2$ – база индукции
$z^2 = z \cdot z = r \cdot r \cdot (\cos(\phi+\phi) + i \cdot \sin(\phi+\phi)) = r^2 \cdot (\cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi)$
Пусть для $n = k$ это верно, тогда:
$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k \cdot r \cdot (\cos k\phi + i \cdot \sin k\phi) \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi) = r^{k+1} \cdot (\cos k\phi \cdot \cos\phi - \sin k\phi \cdot \sin\phi +$
$+ i \cdot \cos k\phi \cdot \sin\phi + i \cdot \sin k\phi \cdot \cos\phi) = r^{k+1} \cdot (\cos(k+1)\phi + i \cdot \sin(k+1)\phi)$
$\Rightarrow$ по принципу математической индукции формуала Муавра верна $\forall n \in \mathbb{N}$

■

3-й модуль

1) Сформулируйте и докажите утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.

$\forall$ подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z}$ для некоторых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\square$

Если $H = \{0\}$, то положим $k = 0$. Иначе: $k = \min(H \cap \mathbb{N}) \to$ и очевидно, что $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Если возьмем $a \in H$ и разделим a на k с остатком: $a = qk + r$, где $0 \le r < k \Rightarrow r = a - q \cdot k \in H \Rightarrow r = 0 \Rightarrow a = q \cdot k$, то есть всегда $H = k\mathbb{Z}$

$\blacksquare$

2) Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа (включая доказательство лемм). Сформулируйте три следствия из теоремы Лагранжа.

Лемма 1: $\forall g_1, g_2 \in G$ либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \varnothing$

$\square$

Если $g_1H \cap g_2H \ne \varnothing$, то $g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subseteq g_2H$ и аналогично в обратную сторону

$\exists h_1, h_2 : g_1h_1 = g_2h_2$, так как пересечение не пусто $\Rightarrow g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$

$\blacksquare$

Лемма 2: $|gH| = |H|\ \forall g \in G$,$\forall$ конечной подгруппы H

$\square$

$|gH| \le |H|$, так как $gH = \{gh | h \in H\}$

Если $gh_1 = gh_2 \Rightarrow g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow$ нет совпадений и $|gH| = |H|$

$\blacksquare$

Теорема Лагранжа:

Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда $|G| = |H| \cdot [G : H]$

$\square$

$\forall$ элемент группы G лежит в своем левом смежном классе по H и смежные классы не пересекаются (по лемме 1) и $\forall$ из них содержит $|H|$ элементов (по лемме 2)

$\blacksquare$

Следствие 1: Пусть G – конечная группа и $g \in G$. Тогда $ord(g)$ делит $|G|$

Следствие 2: Пусть G – конечная группа. Тогда $g^{|G|} = e$

Следствие 3 (малая теорема Ферма): Пусть $\overline{a}$ – ненулевой вычет по простому модулю p.

Тогда $\overline{a}^{p-1} \equiv 1 \mod p$

3) Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа в группе G. Тогда 3 условия эквивалентны:

1. H нормальна
2. $\forall g \in G\ gHg^{-1} \subseteq H$ $(gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\})$
3. $\forall g \in G\ gHg^{-1} = H$

$\square$

Схема: $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 3 & \leftarrow & 2 \end{array}$

$\boxed{1 \to 2}$ Пусть $h \in H$ и $g \in G$. Из определения $\Rightarrow \exists h, h' \in H : gh = h'g$

$ghg^{-1} = h' \in H$, то есть $gHg^{-1} \subseteq H$

$\boxed{2 \to 3}$ Остается показать, что $H \subseteq gHg^{-1}$. Для $h \in H$ имеем $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$, так как $g^{-1}hg \in H$ (вместо g взяли g^{-1})

$\boxed{3 \to 1}$ $\forall g \in G$ по пункту 3 $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$. Аналогично $Hg \subseteq gH \Rightarrow Hg = gH$ – по определению это нормальность.

■

4) Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

H – нормальная подгруппа $\Leftrightarrow H = Kerf$, где f – некоторый гомоморфизм

□

Необходимость

Дано: H – нормальная подгруппа

Нужно доказать: $\exists f$ – гомоморфизм: $H = Kerf$

Это естественный гомоморфизм, сопоставляющий $\forall$ элементу $a \in G$ его смежный класс aH

$\varepsilon : G \to G/H$

Тогда $Ker\varepsilon = eH = H$

Достаточность

$H = Kerf$

Ранее показали, что $Kerf$ – подгруппа.

Покажем, что $Kerf$ – нормальная подгруппа. Пусть $f : G \to F$ – гомоморфизм и $z \in Kerf$. Тогда $f(g^{-1}zg) = f(g^{-1})f(z)f(g) = f(g^{-1})ef(g) = f(g^{-1}g) = f(e_G) = e_F$. То есть $\forall g \in G$: $g^{-1}Hg \subseteq H$, где $H = Kerf \Rightarrow$ по критерию $H = Kerf$ – нормальна

■

5) Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.

Пусть $f : G \to F$ – гомоморфизм групп. Тогда группа $Imf = \{a \in F | \exists g \in G, f(g) = a\}$ изоморфна фактор-группе $G/Kerf$

$Kerf = \{g \in G | f(g) = e_F\}$ ($Kerf$ – ядро гомоморфизма)

$\boxed{G/Kerf \simeq Imf}$

□

Рассмотрим $\tau : G/Kerf \to F$, заданное формулой $\tau(gKer(f)) = f(g) \in F$

($gKer(f) = gH$, где $H = Kerf$)

Проверим корректность:

$\forall h_1, h_2 \in Kerf$

$f(gh_1) = f(g)f(h_1) = f(g)e_F = f(g) = f(g)f(h_2) = f(gh_2)$, то есть значения τ не зависят от выбора представителя смежного класса.

Отображение τ сюрьективно по построению и инъективно в силу того, что

$f(g) = e_F \Leftrightarrow g \in Kerf$ (то есть $gKerf = Kerf$)

Остается проверить, что τ – гомоморфизм

$\tau((gKerf) \cdot (g'Kerf)) = \tau(gg'Kerf) = f(gg') = f(g) \cdot f(g') = \tau(gKerf) \cdot \tau(g'Kerf)$

■

6) Докажите, что центр группы является ее нормальной подгруппой.

$Z(G)$ является нормальной подгруппой G

□

1. Покажем, что $Z(G)$ – подгруппа, то есть $\forall a, b \in Z(G) a \cdot b^{-1} \in Z(G)$

$ab^{-1}g = ab^{-1}(g^{-1})^{-1} = a(g^{-1}b)^{-1} = a(bg^{-1})^{-1} = a(g^{-1})^{-1}b^{-1} = agb^{-1} = gab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in Z(G)$

2. Если $a \in Z(G)$ и $g, b \in G$

$g^{-1}agb = g^{-1}gab = ab = ba = bag^{-1}g = bg^{-1}ag$, то есть если элемент $a \in Z(G)$, то $g^{-1}ag$ тоже $\in Z(G)$.

А это по критерию означает нормальность.

■

7) Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по ее центру.
$G/Z(G) \simeq Inn(G)$
$\square$
Рассмотрим отображение $f : G \to Aut(G)$, которое задается формулой $\phi_g(h) = ghg^{-1}$. Тогда $Imf = Inn(G)$ по определению. $Kerf = Z(G)$, так как $ghg^{-1} = ehe^{-1} = h \Leftrightarrow gh = hg$
$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме $G/Kerf \simeq Imf$, то есть $G/Z(G) \simeq Inn(G)$

$\blacksquare$

8) Сформулируйте и докажите теорему Кэли.
$\forall$ конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы S_n
$\square$
Пусть $|G| = n$. $\forall a \in G$ рассмотрим отображение $L_a : G \to G$ по формуле: $L_a(g) = a \cdot g$

Пусть $e, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ – элементы группы. Тогда $a, ag_1, ag_2, \ldots, ag_{n-1}$ – те же элементы, но в другом порядке (если $ag_i = ag_j \Rightarrow g_i = g_j$, так как $\exists a^{-1} \forall a \in G$)
$\Rightarrow L_a$ – биективное отображение G в себя (то есть перестановка элементов g)
Эти отображения можно умножать (взяв композицию)
Есть единичный элемент: L_e
Обратным элементом к L_a является $L_{a^{-1}}$
Из ассоциативности в $G \Rightarrow L_{ab}(g) = (a \cdot b)g = a(b \cdot g) = L_a(L_b(g)) \Rightarrow$ множество $L_e, L_{g_1}, L_{g_2}, \ldots, L_{g_{n-1}}$ образует подгруппу H в множестве всех биективных отображений G в себя, то есть $S(G)$
А изоморфизм устроен так: $a \rightarrowtail L_a \in H$ это биекция и гомоморфизм

$\blacksquare$

9) Сформулируйте и докажите лемму о том, чем является ядро гомоморфизма колец.
$Ker\phi$ – идеал в K_1
$\square$
ϕ – гомоморфизм групп (по сложению) $(K_1, +)$ и $(K_2, +) \Rightarrow (Ker\phi, +)$ – нормальная подгруппа
Покажем, что $ra \in Ker\phi, ar \in Ker\phi$
$\forall a \in ker\phi, \forall r \in K_1$
$\phi(ra) = \phi(r)\phi(a) = \phi(r) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ra \in Ker\phi$
Аналогично с ar

$\blacksquare$

10) Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю p является полем.
$\mathbb{Z}_k$ – поле$\Leftrightarrow$ k – простое
$\square$
$\mathbb{Z}_k$ – коммутативное кольцо с 1.
Если $k = p$ – простое, то в $\mathbb{Z}_p^*$ (то есть $\mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$ с операцией умножения) все элементы обратимы.
Рассмотрим $\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}$
Возьмем остаток $\overline{s}$ и докажем, что $\exists \overline{s}^{-1}$
Рассмотрим $\{\overline{s}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \overline{s} \cdot \overline{3}, \ldots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}\} = A$. Если $\overline{s} \neq 0 \Rightarrow \overline{k} \cdot \overline{s} \neq 0 \mod p \Rightarrow$ в A нет нуля. Более того, это те же элементы, но в другом порядке. Если $\overline{k} \cdot \overline{s} = \overline{q} \cdot \overline{s} \Rightarrow (\overline{k} - \overline{q}) \cdot \overline{s} = \overline{0} \Rightarrow \overline{k} - \overline{q} = \overline{0} \Rightarrow$ в наборе $\overline{s}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \overline{s} \cdot \overline{3}, \ldots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}$ найдется $1 \Rightarrow \overline{s} \cdot \overline{s}' = 1$, то есть $\overline{s}$ обратим

$\blacksquare$

11) Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть F – поле. F_0 – его простое подполе. Тогда:
1. Если $char F = p > 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$
2. Если $char F = 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Q}$

$\square$

$\langle 1 \rangle \subseteq (F, +)$, где $\langle 1 \rangle$ – циклическая подгруппа по сложению, порожденная 1 (то есть нейтральным элементом по умножению)

$|\langle 1 \rangle| = char F$

$\langle 1 \rangle$ – подкольцо в F. Так как $\forall$ подполе F содержит 1$\Rightarrow$ оно содержит и $\langle 1 \rangle \subseteq F_0$

1. Если $char F = p > 0$, то $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$ – поле$\Rightarrow$ $F_0 = \langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$
2. Если $char F = 0$, то $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$ – не поле. Но F_0 содержит и все дроби вида $\dfrac{a}{b}$, где $a, b \in \langle 1 \rangle, b \neq 0$ и они образуют поле, изоморфное $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ – поле частных для кольца $\mathbb{Z}$)

$\blacksquare$

12) Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть $x \in V, A$ и B – базисы в V. $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе A, $x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе B. Тогда $x^b = T_{A\to B}^{-1} \cdot x^a$

$\square$

Докажем, что $x^a = T_{A\to B} \cdot x^b$

$x = \mathbb{A} \cdot x^a = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix} = \mathbb{B} \cdot x^b$

$\mathbb{B} = \mathbb{A} \cdot T_{A\to B}$ – определение матрицы перехода в матричной форме

$\mathbb{A} \cdot x^a = \mathbb{A} \cdot T_{A\to B} \cdot x^b \Rightarrow$ так как разложение по базису единственно, то $x^a = T_{A\to B} x^b$

$\blacksquare$

13) Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой.

$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$ называется суммой подпространств H_1 и H_2

$H_1 + H_2$ называется прямой суммой (и обзначается $H_1 \oplus H_2$), если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то есть тривиально

$H_1 + H_2$ является прямой $\Leftrightarrow \forall x \in H_1 + H_2$ его представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$, единственно

$\square$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть сумма прямая, то есть $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Предположим, что $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ – 2 разных разложения. Тогда $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$ (так как пересечение тривиально)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть представление единственно: $x = x_1 + x_2$. Если мы предположим, что $\exists x \neq 0 : x \in H_1 \cap H_2$, то $\forall \lambda \in F$ $\lambda x \in H_1$ и $\lambda x \in H_2$. $\forall \beta \in F$ $x = \overbrace{(1 - \beta)}^{\in H_1} x + \underbrace{\beta}_{\in H_2} x \Rightarrow$ представление не единственно

$\blacksquare$

14) Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.
Пусть H_1 и H_2 – подпространства. Тогда
$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$
$\square$
Базис $H_1 \cap H_2$ можно дополнить как до базиса H_1, так и до базиса H_2. Пусть $\dim H_1 = n, \dim H_2 = m, \dim H_1 \cap H_2 = r$. Тогда
$\underbrace{e_1, \dots, e_2}_{\text{базис } H_1 \cap H_2}, \quad \underbrace{\nu_1, \dots, \nu_{n-r}}_{\text{дополнение до базиса в } H_1}, \quad \underbrace{w_1, \dots, w_{m-r}}_{\text{дополнение до базиса в } H_2}$ – базис в $H_1 + H_2$
$\Rightarrow \dim(H_1 + H_2) = r + (n - r) + (m - r) = n + m - r = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$

$\blacksquare$

15) Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса? Ответ обоснуйте.
Пусть U – матрица перехода от базиса e к базису f. Пусть B_e – матрица билинейной формы в базисе e, B_f – матрица билинейной формы в базисе f. Тогда: $B_f = U^T B_e U$
$\square$
$b(x, y) = (x^e)^T B_e y_e = (Ux^f)^T B_e (Uy^f) = (x^f)^T \underbrace{U^T B_e U}_{B_f} y^f = (x^f)^T B_f y^f$ (где x^e – столбец координат x в базисе e)
$\Rightarrow B_f = U^T B_e U$ (подставляем все базисные векторы)

$\blacksquare$

При переходе от базиса e к базису e' линейного пространства V матрица квадратичной формы меняется следующим образом: $A' = S^T AS$, где S – матрица перехода от e к e'
$\square$
$x = Sx'$ (так как $x' = S^{-1}x$)
$Q(x) = x^T Ax = (Sx')^T A(Sx') = (x')^T (S^T AS)x' = (x')^T A'x \Rightarrow A' = S^T AS$ (так как вместо x можно брать все элементы базиса)

$\blacksquare$

16) Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.
Лемма: Пусть $A, S \in M_n(\mathbb{R}), \det S \neq 0$. Тогда $RgAS = RgA = RgSA$
$\square$
$RgAS \leq RgA$, так как столбцы матрицы AS – это линейная композиции столбцов матрицы A, ранг=максимальному количеству л.н.з. столбцов
$RgA = RgA \cdot S \cdot S^{-1} \leq RgAS \Rightarrow RgA = RgAS$

$\blacksquare$

Теорема об инвариантности ранга:
Пусть Q – квадратичная форма на линейном пространстве $V; a = \{a_1, \dots, a_n\}, b = \{b_1, \dots, b_n\}$.
Пусть A – матрица Q в базисе a, B – матрица Q в базисе b. Тогда $RgA = RgB$
$\square$
$B = S^T AS$, S –матрица перехода от a к b
S – невырождена $\Rightarrow$ по лемме при умножении на невырожденные матрицы S и S^T ранг не меняется $\Rightarrow RgA = RgB$

$\blacksquare$

17) Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите ее.

Пусть φ – линейное отображение из линейного пространства V_1 в линейное пространство V_2. Пусть $A_{E_1E_2}$ – матрица линейного отображения в паре базисов: E_1 в пространстве V_1 и E_2 в пространстве V_2 и пусть T_1 – матрица перехода от E_1 к E'_1, T_2 – матрица перехода от E_2 к E'_2. Тогда $A_{E'_1E'_2} = T_2^{-1}A_{E_1E_2}T_1$

$\square$

$X^{E'_1} = T_1^{-1}x^{E_1}; Y^{E'_2} = T_2^{-1}x^{E_2}$

Пусть y – образ x под действием φ. Тогда

$Y^{E_2} = A_{E_1E_2}X^{E_1}$ и $Y^{E'_2} = A_{E'_1E'_2}X^{E'_1} \Rightarrow T_2^{-1}Y^{E_2} = A_{E'_1E'_2}T_1^{-1}X^{E_1} \Rightarrow Y^{E_2} = \underbrace{T_2A_{E'_1E'_2}T'_1}_{A_{E_1E_2}}X^{E_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{E_1E_2} = T_2A_{E'_1E'_2}T_1^{-1}$

$\blacksquare$

18) Сформулируйте и докажите теорему о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью определяется матрицей линейного оператора.

Пусть φ – линейный оператор в просрастве $V, e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис в $V, x \in V$ и $x^e = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – столбец координат вектора x в базисе e. Пусть A_e – матрица оператора φ в базисе e. $(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e$

$\square$

$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \ldots + $
$+ x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n$

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = (\text{по матричному умножению}) = A_ex^e$$

$\blacksquare$

19) Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ – линейное отображение. Тогда $\dim Ker\varphi + \dim Im\varphi = \dim V_2 = n$

$\square$

Выберем базис в $V_1 : e = \{e_1, \ldots, e_m\}$. $\forall x \in V_1$ представляется в виде $x = x_1e_1 + \ldots + x_me_m$

$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_m\varphi(e_m)$. $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_m)$ – столбцы матрицы A линейного отображения.

То есть $Im\varphi = L(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_m))$

$\Rightarrow \dim Im\varphi = RgA$

Ядро φ описывается системой $Ax = 0$. Это однородная СЛАУ и размерность пространства ее решений (число элементов ФСР) равна $n - RgA = n - \dim Im\varphi = \dim Ker\varphi$

$\blacksquare$

4-й модуль

1) Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

λ – собственное значение линейного оператора $\Leftrightarrow$ λ – корень характеристического уравнения (над алгебраически замкнутым полем)

$\square$

Необходимость

Дано: $\lambda \in$ спектру

Доказать: λ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$

$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$, то есть $Ax = \lambda I x$, где I – тождественный оператор

$(A - \lambda I)x = 0 \qquad (1)$

Запишем равенство (1) в некотором базисе: $(A_e - \lambda E)x^e = 0$

Эта однородная СЛАУ имеет ненулевое решение $\Rightarrow \det(A_e - \lambda E) = 0$

А это и есть $\chi_A(\lambda) = 0$, то есть λ – корень характеристического уравнения

Достаточность

Дано: λ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать: λ – собственное значение A

Если λ – корень, то в заданном базисе выписывается равенство $\det(A_e - \lambda E) = 0$

$\Rightarrow$ соответствующая СЛАУ с матрицей $A_e - \lambda E$ имеет ненулевое решение x^e. Это решение – набор координат некоторого вектора, для которого выполняется (1) и, соответственно,

$Ax = \lambda x, x \neq 0$, то есть x – собственный вектор, а λ – собственное значение

$\blacksquare$

2) Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – собственные значения линейного оператора $A, \lambda_i \neq \lambda_j$, а $v_1, \ldots, v_k$ – соответствующие собственные векторы. Тогда $v_1, \ldots, v_k$ – л.н.з., то есть собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, л.н.з.

$\square$

Применим принцип математической индукции. При $k = 1$ – верно, так как собственный вектор по определению $\neq 0$ и, соответственно, л.н.з.

Пусть утверждение верно для $k = m$

Добавим еще один собственный вектор e_{m+1}, отвечающий λ_{m+1}. Докажем, что система $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}$ осталась л.н.з. Рассмотрим равенство: (2) $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} = 0$. К (2) применим оператор $A : \alpha_1 A e_1 + \ldots + \alpha_m A e_m + \alpha_{m+1} A e_{m+1} = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m e_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} e_{m+1} \qquad (3)$

Умножим (2) на λ_{m+1} и вычтем из (3):

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})e_1 + \ldots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})e_m = 0$

так как λ_i все различны, а $e_1, \ldots, e_m$ – л.н.з.

$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \ldots \\ \alpha_m = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (2) можно записать в виде $\alpha_{m+1} e_{m+1} = 0$, а так как e_{m+1} – собственный вектор, то $e_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по определению линейной независимости $e_1, \ldots, e_{m+1}$ – л.н.з.

$\blacksquare$

3) Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе $\Leftrightarrow$ все векторы этого базиса являются собственными векторами для A

□
Необходимость
Дано: A_e – диагональная
Доказать: e состоит из собственных векторов A
Пусть A_e – матрица A в базисе e. По определению в j-м столбце A_e стоят координаты вектора $A(e_j)$. Если матрица диагональна, то j-й столбец имеет вид $(0, \ldots, \lambda_j, 0, \ldots, 0)^T$, то есть
$Ae_j = 0 + \ldots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \ldots + 0$, то есть по определению e_j – собственный вектор с собственным значением $= \lambda_j$. $e_j \neq 0$, так как он в базисе
$\Rightarrow$ все e_j – базисные, а на диагонали – собственные значения
Достаточность
Дано: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – состоит из собственных векторов
Доказать: A_e – диагональна
$Ae_j = \lambda_j e_j \Rightarrow$ в матрице линейного оператора по определению все элементы матрицы линейного оператора равны 0, кроме диагональных

■

4) Каким свойством обладает оператор в n-мерном вещественном пространстве, у которого есть n различных действительных корней? Ответ обоснуйте.
Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в V,
$\dim V = n$, имеет n попарно различных корней, лежащих в поле, над которым рассматривается V, то оператор диагонализируем
□
Если $\lambda_i \in \mathbb{F}$, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор v_i. Система векторов $v_1, \ldots, v_n$ будет л.н.з., а их число$= \dim V \Rightarrow$ они образуют базис в V из собственных векторов$\Rightarrow$ по критерию оператор диагонализируем

■

5) Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.
Пусть $\mathbf{e}$ и $\mathbf{g}$ – два базиса в V. Тогда $[f]_g = [f]_e T_{e \to g}$
□
$[f]_g x_g = [f]_e x_e$. Но $x_g = T_{e \to g}^{-1} x_e$, то есть $x_e = T_{e \to g} x_g \Rightarrow [f]_g x_g = [f]_e T_{e \to g} x_g$. Разложение по базису единственно$\Rightarrow [f]_g = [f]_e T_{e \to g}$

■

6) Выпишите и докажите неравенство Коши-Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника.
Теорема Коши-Буняковского
$\forall x, y \in E$ справедливо неравенство $|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$
□
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda(x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) =$
$= \lambda^2 (x, x) - \lambda(x, y) - \lambda(y, x) + (y, y) = \lambda^2 ||x||^2 - 2(x, y)\lambda + ||y||^2$
$\forall \lambda \Rightarrow D \leq 0$
$D = 4(x, y)^2 - 4||x||^2 \cdot ||y||^2 \leq 0$
$(x, y)^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2 \Rightarrow |(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$

■

Неравенство треугольника
$\forall x, y \in E \ ||x+y|| \le ||x|| + ||y||$
$\square$
$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = ||x||^2 + 2(x,y) + ||y||^2 \le$

$\le ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||x||^2 = (||x|| + ||y||)^2$ и норма всегда ≥ 0

$\blacksquare$

7) Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения
$H^\perp$ является линейным подпространством в V и $V = H \oplus H^\perp$
$(\Rightarrow \dim V = \dim H + \dim H^\perp)$
$\square$
$\forall x, y \in H^\perp \ \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad h \in H$
$(x+y, h) = (x,h) + (y,h) = 0 + 0 \Rightarrow x + y \in H^\perp$
$(\alpha x, h) = \alpha(x,h) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in H^\perp$
$\Rightarrow H^\perp$ является подпространством $\Rightarrow$ можно рассматривать $H + H^\perp$
Сумма прямая, так как если $x \in H \cap H^\perp \Rightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то есть $H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow$ сумма прямая
Пусть $f_1, \dots, f_m$ – ОНБ в H, дополним его до ОНБ в V векторами $f_{m+1}, \dots, f_n$. Применим ортогонализацию Грама-Шмидта:
$f_1, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ ($e_{m+1}, \dots, e_n$ ортогональны каждому вектору $f_1, \dots, f_m$)
$\Rightarrow e_{m+1}, \dots, e_n$ ортогональны всему H
$\forall x \in V$ можно представить в виде:
$$x = \underbrace{x_1 f_1 + \ldots + x_m f_m}_{y \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \ldots + x_n e_n}_{z \in H^\perp}$$
то есть $\forall x \in V : x = y + z, y \in H, z \in H^\perp$, то есть $V = H \oplus H^\perp$

$\blacksquare$

8) Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите ее. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответ обоснуйте.
Матрицы Грама двух базисов e и e' связаны следующим соотношением: Γ'= $U^T \Gamma U$, где U – матрица перехода от e к e'. Верно, так как Γ – матрица билинейной формы
Определитель матрицы Грама (грамиан) не изменяется при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта, то есть $Gr(a_1, \dots, a_n) = \det\Gamma = (b_1, b_1) \dots (b_n, b_n) = ||b_1||^2 \dots ||b_n||^2$
$\square$
$a_1 = b_1$
$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$
$$\Rightarrow \text{матрица } V_{a \to b} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow \det V_{a \to b} = 1 \Rightarrow \det \Gamma'_b = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = \det \Gamma$

$\blacksquare$

det$\Gamma > 0$

$\square$

det$\Gamma' =$ det$\Gamma\overbrace{(\det U)^2}^{>0}$. Перейдем в ОНБ. В нем $\Gamma' = E$. Тогда $\det E = 1 =$ det$\Gamma \cdot \underbrace{(\det U)^2}_{>0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ det$\Gamma > 0$

$\blacksquare$

9) Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама.

Векторы $a_1, \ldots, a_k \in E$ – л.н.з.$\Leftrightarrow \det \Gamma_{k\times k} \neq 0$

$\square$

Пусть $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$. Умножим скалярно на векторы $a_1, \ldots, a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \ldots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

то есть $\Gamma_{k\times k} \cdot \alpha = 0$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Это однородная СЛАУ с квадратной матрицей. У нее не существует нетривиального решения (тогда векторы л.н.з.)$\Leftrightarrow \det \Gamma_{k\times k} \neq 0$

$\blacksquare$

10) Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажите ее.

Пусть $H = \underbrace{\langle a_1, \ldots, a_k \rangle}_{\text{л.н.з.}}$. Тогда $\text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где A – матрица, составленная из столбцов $a_1, \ldots, a_k$

$\square$

$n = \text{пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k \in H$ (то есть $x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k}_{h} + h^{\perp}$)

Последовательно умножим скалярно на $a_1, \ldots, a_k$. Заметим, что $(a_i, h^{\perp}) = 0 \Rightarrow$получаем СЛАУ относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \ldots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \ldots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases}$$

В матричной форме: $\underbrace{A^T A}_{\Gamma_{k\times k}} \cdot \alpha = A^T x, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Так как $a_1, \ldots, a_k$ л.н.з.$\Rightarrow \det \underbrace{A^T A}_{\Gamma_{k\times k}} \neq 0 \Rightarrow \exists (A^T A)^{-1} \Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$

$\text{пр}_H x = A \cdot \alpha = a_1 \alpha_1 + \ldots + a_k \alpha_k \Rightarrow \text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$

$\blacksquare$

11) Докажите что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.

$\forall$ линейного оператора $A : E \to E$ $\exists!$ сопряженный оператор $A^* : E \to E$, причем его матрицей будет матрица $(A^*)_b = \Gamma^{-1}(A)_b^T \Gamma$, где Γ – матрица Грама базиса b.

□

Покажем, что линейный оператор с матрицей $B = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$ ($= A^T$ для ОНБ) является сопряженным к данному линейному оператору A. Для этого проверим выполнение равенства:
$(Ax, y) = (x, By)\ \forall x, y \in E$
Пусть x^b, y^b – столбцы координат векторов x и y в базисе b. Тогда по теореме $(Ax)^b = A_b \cdot x^b \Rightarrow$
$((Ax)^b)^T \cdot \Gamma \cdot y^b = (x^b)^T \cdot \Gamma \cdot (By)^b \leftarrow$матричная форма скалярного произведения
$(x^b)^T A_b^T \Gamma y^b = (x^b)^T \Gamma B_b y^b$
По лемме $\Gamma B_b = A_b^T \Gamma$
Так как базис состоит из л.н.з. векторов, то $\exists \Gamma^{-1}$ и $\Rightarrow B = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$

■

12) Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих p разным собственным значениям.

Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

□

Пусть:
$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad x_1 \neq 0$
$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad x_2 \neq 0$
$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$
$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$
$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$, так как A самосопряжен
$\Rightarrow (\overbrace{\lambda_1 - \lambda_2}^{\neq 0})(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$они ортогональны

■

13) Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте.

Все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами

□

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$, то есть $\det(a - \lambda E) = 0$. Тогда СЛАУ $(A - \lambda E)x = 0 \quad (1)$ имеет ненулевое решение $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, состоящее из $x_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$. Рассмотрим $\overline{x}$ – столбец, состоящий из $\overline{x_k}$. Умножим (1) на $\overline{x}^T = x^*$ слева:
$\overline{x}^T(A - \lambda_i E)x = 0$
$\overline{x}^T A x = \lambda_i \overline{x}^T x$
$\overline{x}^T x = \overline{x_1}x_1 + \ldots + \overline{x_n}x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0$, так как решение ненулевое
$\Rightarrow \lambda_i = \dfrac{\overline{x}^T A x}{\overline{x}^T x}$. Возьмем $w = \overline{x}^T A x$
$w = w^T = (\overline{x}^T A x)^T = x^T A^T (\overline{x}^T)^T = x^T A \overline{x}$
$\overline{w} = \overline{\overline{x}^T A x} = \overline{\overline{x}}^T \overline{A} \overline{x} = x^T A \overline{x} \Rightarrow w = \overline{w}$, то есть $w \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_i$ тоже является вещественным числом

■

14) Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора? Ответ обоснуйте. Сформулируйте и докажите теорему Фредгольма.

Пусть линейный оператор $A : E \to E$. Тогда $E = KerA \oplus ImA^*$

□

Докажем, что $KerA = (ImA^*)^\perp$ (Тогда из $E = H \oplus H^\perp = (ImA^*)^\perp \oplus ImA^*$ будет следовать утверждение)
Рассмотрим ОНБ в E. Пусть $x \in KerA$, тогда $\forall y \in E$ в матричной записи:
$0 = y^T A x = (A^T y)^T x = (A^* y, x) \Rightarrow x \perp ImA^* \Rightarrow KerA \subseteq (ImA^*)^\perp$

Пусть теперь $x \in (ImA^*)^{\perp}$. Тогда $(x, A^*y) = (y, Ax) = 0 \ \forall y \in E$. Положив $y = Ax$, получаем $(y, Ax) = (Ax, Ax) = ||Ax||^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$, то есть $x \in KerA$, то есть $(ImA^*)^{\perp} \subseteq KerA$

■

Теорема Фредгольма
$Ax = b$ совместна$\Leftrightarrow$вектор b $\perp$всем решениям однородной СЛАУ $A^Ty = 0$ – это $KerA^*$
□
$Ax = b$ совместна$\Leftrightarrow$ $b \in ImA$. А по теореме $E = ImA \oplus KerA^*$

■

15) Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратно? Ответ обоснуйте.
Пусть $A : E \to E$. Тогда A – ортогональный линейный оператор$\Leftrightarrow$ОНБ $e_1, \ldots, e_n$ переводит в ОНБ $Ae_1, \ldots, Ae_n$
□
Необходимость
Дано: $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ, A – ортогональный линейный оператор
Доказать: $Ae_1, \ldots, Ae_n$ – ОНБ

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

То есть система $\{Ae_j\}$ состоит из ненулевых векторов и ориентирована$\Rightarrow$он л.н.з. и так как $\dim E = n$, то это ОНБ
Достаточность
Дано: $\begin{matrix} e_1, \ldots, e_n \backslash \\ Ae_1, \ldots, Ae_n / \end{matrix}$ОНБ
Доказать: A – ортогогональный линейный оператор
$x \rightarrowtail (x_1, \ldots, x_n)^T$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$
Тогда $Ax \rightarrowtail (x_1, \ldots, x_n)^T$ в $Ae_1, \ldots, Ae_n$, так как $Ax = A(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) =$
$= x_1Ae_1 + \ldots + x_nAe_n \Rightarrow \forall x, y \in E \ (x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ (мы в ОНБ). Так же выражается (Ax, Ay) в базисе $\{Ae_j\}$ $\Rightarrow$соотношение $(Ax, Ay) = (x, y)$ верно $\forall x, y \in E$

■

16) Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.
Матрица линейного оператора A в ОНБ ортогональна$\Leftrightarrow$ A – ортогональный оператор
□
Необходимость
A_e – ортогональная матрица. доказать, что A – ортогональный линейный оператор
$A_e^TA_e = E \Rightarrow \forall x, y \in E \ x^T(A_e^TA_e)y = x^TEy \Leftrightarrow (A_ex)^TA_ey = x^Ty$ $\leftarrow$матричная запись скалярного произведения в ОНБ
$(Ax, Ay) = (x, y) \Rightarrow A$ – ортогональный линейный оператор по определению
Достаточность
A – ортогональный линейный оператор. Доказать, что $A_e^TA_e = E$
$\forall x, y \in E \ (Ax, Ay) = (x, y)$
$(A_ex)^T(A_ey) = x^Ty$
$x^TA_e^TA_ey = x^TEy \Rightarrow$по лемме $A_e^TA_e = E$

■

17) Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.

Для $\forall$ самосопряженного линейного оператора $A : E \to E, \dim E = n,\ \exists$ ОНБ, состоящий из собственных векторов A.

$\square$

По утверждению об ортогональности собственных векторов самосопряженного линейного оператора система из собственных векторов будет ортогональной$\Rightarrow$по теореме она л.н.з. и в ней n векторов$\Rightarrow$она является базисом. Этот базис является ортогональным. ОНБ получим, разделив e_i на $||e_i||$. Итак, $\exists$ ОНБ из собственных векторов.

$\blacksquare$

18) Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.

Пусть $A \in M_m(\mathbb{R})$ и столбцы $A_1, \ldots, A_m$ л.н.з. Тогда $\exists\ Q$ и $R : A = QR$, причем Q – ортогональная матрица, R – верхнетреугольная матрица

$\square$

Применим к $A_1, \ldots, A_m$ процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Получим столбцы $Q_1, \ldots, Q_m$ – ОНБ в ImA. $A_k \in L(Q_1, \ldots, Q_k), k = \overline{1, m}$ (по формулам Грама-Шмидта) $\Rightarrow A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} r_{ik} Q_i, k = \overline{1, m}$ или в матричной форме $A = Q \cdot R$, где $Q = (Q_1| \ldots |Q_m), R = \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_{mm} \end{pmatrix}$. Q является ортогональной, так как Q_i образуют ОНБ

$\blacksquare$

19) Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.

$\forall$ матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ справедливо сингулярное: $A = V \cdot \Sigma \cdot U^T, U \in O_n(\mathbb{R}), V \in O_m(\mathbb{R}), \Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и Σ является диагональной с числами $\sigma_i \geq 0$ на диагонали (σ_i – сингулярные числа). $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

$A^T A$ – матрица Грама столбцов матрицы A. Она симметрична и соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена.

$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

$Q(x) = x^T A^T A x = (Ax)^T Ax = (Ax, Ax) = |Ax^2| \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ все собственные значения $A^T A$ вещественны (так как линейный оператор с $A^T A$ является самосопряженным) и они все ≥ 0

Запишем собственные значения $A^T A$ в виде σ_i^2 (то есть $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$) Их нумеруем по невозрастанию: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Так как $A^T A$ – самосопряжен, то для него $\exists$ ОНБ из собственных векторов (собственных векторов $A^T A$). $A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, 1 \leq i \leq r \\ 0, r+1 \leq i \leq n \end{cases}$.

Положим $v_i = \dfrac{Au_i}{\sigma_i}$ для $1 \leq i \leq r$. Тогда $(v_i, v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$. Дополним $v_1, \ldots, v_r$ векторами $v_{r+1},\dots,v_m$ до ОНБ в $\mathbb{R}^m$. В итоге: $A\underbrace{[u_1,\dots,u_n]}_{U} = \underbrace{[v_1,\dots,v_m]}_{V}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

где $[u_1,\dots,u_n]$ и $[v_1,\dots,v_m]$ соответственно правые сингулярные векторы и левые сингулярные векторы

$A \cdot U = V \cdot \Sigma \Rightarrow$ так как U и V ортогональны $\Rightarrow A = V\Sigma U^T$

■

20) Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

$\forall$ квадратичную форму можно ортогональным преобразованием привести к каноническому виду

□

Матрица квадратичной формы является симметрической. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство E (n – число переменных в Q) и некоторый ОНБ в нем. Тогда матрица квадратичной формы A является матрицей некоторого самосопряженного оператора B в данном базисе. По теореме о $\exists$ ОНБ из собственных векторов для самосопряженного оператора$\Rightarrow$найдется ОНБ из собственных векторов оператора B. И матрица линейного оператора в этом базисе будет диагональной: $B' = U^{-1}BU$, где U – матрица перехода от исходного базиса. Но оба базиса являются ОНБ$\Rightarrow U^{-1} = U^T$ (то есть U – ортогональная). Матрица квадратичной формы преобразовывается по формуле: $A' = U^TAU$ $\Rightarrow$матрица квадратичной формы тоже совпадает с матрицей линейного оператора $A' = B'$ и является диагональной$\Rightarrow$это канонический вид

■