(c) 设 $\tilde{K}(x,y)=\overline{K(y,x)}$，$x,y\in[0,1]$. 证明 $T_K^*=T_{\tilde{K}}$.

(d) 定义 $T(f)(x)=\int_0^x f(1-y)dy$，$f\in H$，$x\in[0,1]$

证明 $T\in B(H)$ 且有 $T^*=T$.

最后给出 T 的非零特征值并证明相应的特征子空间两两正交。

证明：(a) 由于 $K\in L_2([0,1]\times[0,1])$，即 $\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2dxdy<\infty$，则映射 $x\longmapsto\int_0^1|K(x,y)|^2dy$ 几乎处处有定义. 由 Hölder 不等式 $|T_K(f)(x)|=|\int_0^1K(x,y)f(y)dy|$

$$\leq\left(\int_0^1|K(x,y)|^2dy\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|f(y)|^2dy\right)^{\frac12}$$

故 $T_K(f)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有定义。

(b) 由(a)知在 $[0,1]$ 上几乎处处有 $|T_K(f)(x)|\leq\left(\int_0^1|K(x,y)|^2dy\right)^{\frac12}\cdot\|f\|$，两边在 $[0,1]$ 上平方后积分得

$$\int_0^1|T_K(f)(x)|^2dx\leq\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2dydx\ \|f\|^2$$

$\Rightarrow\|T_K(f)\|\leq\|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}\|f\|$，故 $T_K\in B(H)$ 且 $\|T_K\|\leq\|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}$.

(c) 对 $\forall f,g\in L_2(0,1)$.

$$\begin{aligned}\langle T(f),g\rangle&=\int_0^1\int_0^1K(x,y)f(y)dy\,\overline{g}(x)dx\\&=\int_0^1\int_0^1K(x,y)f(y)\overline{g}(x)\,dydx\\&=\int_0^1\int_0^1K(x,y)f(y)\overline{g}(x)\,dxdy\\&=\int_0^1f(y)\overline{\int_0^1\overline{K(x,y)}g(x)dx}\,dy\\&=\int_0^1f(x)\overline{\int_0^1\tilde{K}(y,x)g(y)dy}\,dx=\langle f,T_{\tilde{K}}(g)\rangle\end{aligned}$$

故 $T_K^*=T_{\tilde{K}}$.

(d) 对 $\forall f\in H$，$\|T(f)\|^2=\int_0^1|\int_0^xf(1-y)dy|^2dx$，又对 $\forall x\in[0,1]$.

$$\left|\int_0^xf(1-y)dy\right|^2\leq\left(\int_0^x|f(1-y)|^2dy\right)^{\frac12}\cdot x=\int_{1-x}^1|f(t)|^2dt\cdot x\leq\|f\|^2\cdot x$$

则 $\|T(f)\|^2\leq\int_0^1\|f\|^2\cdot x\,dx=\frac12\|f\|^2\Rightarrow\|T(f)\|\leq\sqrt{\frac12}\|f\|\Rightarrow T\in B(H)$.

下证 $T^*=T$… ?