目录

1 第一章习题

11. 设 $E = \{x = (x_n)_n^\infty : \forall n \geq 1, x_n = 0 \text{ 或} 1\} = \{0,1\}^{N^*}$. 对每个 $x = (x_n)_{n\geq 1} \in E$, 令 $\phi(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2x_n}{3^n}$. 在 $\{0,1\}$ 上赋予离散拓扑 (即 $d(0,1) = 1$ 的度量诱导的拓扑)，则在 E 上有相应的乘积拓扑。证明 ϕ 是 E 到 $\mathbb{R}$ 的紧子集 $C = \phi(E)$ 上的同胚。

证明. 注意到结论：设 X 为紧拓扑空间，Y 为 Hausdorff 空间。若映射 $f : X \to Y$ 为连续单射，则 $f : E \to f(E)$ 为同胚。

显然 $\{0,1\}$ 为紧的，由 Tychnoff 定理 E 为紧的，则只需证明 ϕ 连续且单射。由定理 1.4.9 知 E 可度量化，记得到的度量为 ρ, 即 $\rho(x,y) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} d(x_n, y_n)$. 下面刻画 (E,ρ) 中的开球。对 $\forall 0 < \delta < 1$, 若 $\rho(x,y) < \delta$, 则 $\frac{1}{n} d(x_n, y_n) < \delta, \forall n \geq 1$ 即

$$d(x_n, y_n) < n\delta, \forall n \geq 1 \tag{*}$$

取 N s.t. $N\delta \leq 1$ 且 $(N+1)\delta > 1$, 则式 (*) 等价于 $x_n = y_n, 1 \leq n \leq N$, 故

$$B_\rho(x,\delta) \subset \{y : x_n = y_n, 1 \leq n \leq N\}$$

对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $P \geq 1$ s.t. $\sum_{n=P+1}^\infty \frac{2}{3^n} < \epsilon$. 又由上述 N 的取法知 $\delta \to 0$ 时 $N \to \infty$. 故存在充分小的 δ, s.t. $N \geq P+1$. 当 $y \in B_\rho(x,\delta)$ 时，

$$|\phi(y) - \phi(x)| = |\sum_{n=1}^\infty \frac{2(x_n - y_n)}{3^n}| \leq \sum_{n=P+1}^\infty \frac{2}{3^n} < \epsilon$$

故 ϕ 连续。

下证 ϕ 单射：设 $x \neq y$, 记 $k = \min\{i : x_i \neq y_i\}$, 则

$$|\phi(x) - \phi(y)| \geq \frac{2|x_k - y_k|}{3^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^k} - \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^k}$$

故 $\phi(x) \neq \phi(y)$, ϕ 为单射。 $\square$

第一次习题课

2019年9月15日 19:30

2. 证明度量空间(E,d)是完备的充要条件是：对E中任意序列(x_n)若对$\forall n\geq 1$, $d(x_n,x_{n+1})\leq 2^{-n}$，则序列$(x_n)$收敛.

证明："$\Rightarrow$" 由题设，对$\forall n,p\geq 1$,

$$d(x_n,x_{n+p})\leq 2^{-n}+2^{-(n+1)}+\cdots+2^{-(n+p-1)}<\sum_{k=n}^{\infty}2^{-k}=2^{1-n}\to 0\ (n,p\to\infty)$$

故(x_n)为Cauchy列 则(x_n)收敛.

"$\Leftarrow$" 设$(y_n)\subset E$为Cauchy列，则可取子列(y_{n_k}) s.t. $d(y_{n_k},y_{n_{k+1}})\leq 2^{-k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

则(y_{n_k})收敛，故(y_n)收敛.

3. 设(E,d)是度量空间，(x_n)是E中Cauchy列，并有$A\subset E$，假设A的闭包$\bar{A}$在E中完备且$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,A)=0$. 证明$(x_n)$在$E$中收敛.

证明：$\forall n\geq 1$, $\exists y_n\in A$ s.t. $|d(x_n,y_n)-d(x_n,A)|\leq\frac{1}{n}$，则$d(x_n,y_n)\leq\frac{1}{n}+d(x_n,A)$,

故$d(y_n,y_m)\leq d(y_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)$

$\leq\frac{1}{n}+d(x_n,A)+d(x_n,x_m)+\frac{1}{m}+d(x_m,A)$

故$(y_n)\subset A\subset\bar{A}$为Cauchy列，$\bar{A}$完备则$\exists y\in\bar{A}$ s.t. $d(y_n,y)\to 0\ (n\to\infty)$

故$d(x_n,y)\leq d(x_n,y_n)+d(y_n,y)\leq\frac{1}{n}+d(x_n,A)+d(x_n,y)\to 0\ (n\to\infty)$

故(x_n)在E中收敛. □

4. 设(E,d)是度量空间，$\alpha>0$. 设$A\subset E$满足对$\forall x,y\in A$且$x\neq y$，必有$d(x,y)\geq\alpha$.
证明A是完备的.

证明：设$(x_n)\subset A$为Cauchy列，则$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n,m\geq N$时$d(x_n,x_m)<\frac{\alpha}{2}<\alpha$，由题设

$x_n=x_m$ 故对$\forall n\geq N$有$x_n=x_N$ 则(x_n)收敛且极限为x_N. 故A完备. □

4. 证明紧空间中任一序列有收敛子列。

证明. 设 E 是紧空间，序列 $(x_n) \subset E$. 若 (x_n) 中只有有限个不同的点，那么一定有收敛子列。

若 (x_n) 中有无限个不同的点。反证，若 (x_n) 无收敛子列，那么，对任意 $x \in E$, 存在 $U_x \in \mathcal{N}(x)$, s.t. $U_x \backslash \{x\} \cap (x_n) = \varnothing$, $E \subset \cup_{x \in E} U_x$, 由于 E 紧，存在有限个 $y_i \in E$, $E \subset \cup_{i=1}^n U_{y_i}$, 则 E 中至多有有限个 (x_n) 的点，这与 (x_n) 有无限多个不同的点相矛盾。 □

2 第二章习题

6. [作业] 设 (E, d) 是度量空间，而 (x_n) 是 E 中发散的 Cauchy 列。证明

(a) 任取 $x \in E$, 序列 $(d(x, x_n))$ 收敛于一个正数，记为 $g(x)$.

(b) 函数 $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ 是从 E 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数。

(c) 上面的函数无界。

证明. (a) 由 d 的三角形不等式

$$|d(x, x_n) - d(x, x_m)| \le d(x_n, x_m) \to 0 (n, m \to \infty),$$

故 $(d(x, x_n))$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，因此存在 $\lambda \ge 0$, 使得 $d(x, x_n) \to \lambda (n \to \infty)$. 若 $\lambda = 0$, 则 x_n 在 E 中收敛，与题设矛盾，因此 $\lambda > 0$, 所以序列 $(d(x, x_n))$ 收敛于一个正数。

(b) 只需证 $g(x)$ 是连续函数。由 d 的三角形不等式，对于任意 $x, y \in E$, 任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$|d(x, x_n) - d(y, x_n)| \le d(x, y),$$

令 $n \to \infty$, 则 $|g(x) - g(y)| \le d(x, y)$, 故 g 为 E 到 $\mathbb{R}$ 的一致连续函数。

(c) 只需证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 x_ε, 使得 $g(x_\varepsilon) \le \varepsilon$. 实际上，由于 (x_n) 是 Cauchy 列, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \ge N$ 时，$d(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则 $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_N) \le \varepsilon$, 即 $g(x_N) \le \varepsilon$, 取 $x_\varepsilon = x_N$ 即可。 □

8. [作业] 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一致连续函数。证明存在两个非负常数 a 和 b, 使得

$$|f(x)| \le a\|x\| + b,$$

这里 $\|x\|$ 是 x 的欧氏范数。

证明. 由于 f 是一致连续的，取 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x - y\| < \delta$ 时，$|f(x) - f(y)| < 1$. 现在，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 在连接原点 0 和 x 的直线上等间距地取点 $x_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n+1$, 使得

$$x_0 = 0, x_1 = \delta \frac{x}{\|x\|}, x_2 = 2\delta \frac{x}{\|x\|}, \cdots, x_n = n\delta \frac{x}{\|x\|}, x_{n+1} = x,$$

且 n 满足 $n\delta \le \|x\| < (n+1)\delta$, 那么利用三角形不等式得

$$\begin{aligned}|f(x)-f(0)| \le & |f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})|+|f(x_{n+1})-f(x_n)| \\ < & \frac{1}{\delta}(\delta+\cdots+\delta)+1=\frac{1}{\delta}(n\delta)+1\le\frac{1}{\delta}\|x\|+1,\end{aligned}$$

再利用一次三角形不等式得

$$|f(x)| \le |f(0)|+|f(x)-f(0)| \le \frac{1}{\delta}\|x\|+|f(0)|+1.$$

取 $a=1/\delta, b=|f(0)|+1$ 就证明了结论。 □

10. [作业] 构造一个反例说明：在不动点定理中，如果我们把映射 f 满足的条件减弱为

$$d(f(x),f(y))<d(x,y), \quad \forall x,y\in E \text{ 且} x\neq y,$$

则结论不成立。
提示：考虑函数 $f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, $x\in[0,+\infty)$.

证明. 对于 $f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, 求导得 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，因此

$$|f'(x)|<1, x\in[0,\infty),$$

利用 Lagrange 中值定理，这意味着 $d(f(x),f(y))<d(x,y), \forall x,y\in E$ 且$x\neq y$. 但是 $x=f(x)$ 不可能成立，否则, $x=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$, 进而 $0=1$, 矛盾。 □

10'. [习题课] 设 E 为紧的完备度量空间，在不动点定理中，如果我们把映射 f 满足的条件减弱为

$$d(f(x),f(y))<d(x,y), \quad \forall x,y\in E \text{ 且} x\neq y,$$

那么 f 仍然存在唯一不动点。

证明. 设 $g(x)=d(x,f(x)), x\in E$, 由于 $f(\cdot), d(\cdot,\cdot)$ 都是连续函数，复合函数仍连续，故 $g:E\to\mathbb{R}$ 是连续函数。又由于 E 是紧的，那么 $g(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集，则 $g(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集，这意味着函数 g 在 E 上存在最小值。设 $x_0\in E$ 是 g 的最小值点，若 $x_0\neq f(x_0)$, 则

$$d(x_0,f(x_0))\le d(f(x_0),f(f(x_0)))<d(x_0,f(x_0))$$

矛盾，因此 $x_0=f(x_0)$.

f 的不动点是唯一的。实际上，若还有一个不动点 y_0, 则 $f(y_0)=y_0$, 那么若 $x_0\neq y_0$, 则由题设知 $d(x_0,y_0)=d(f(x_0),f(y_0))<d(x_0,y_0)$, 矛盾，所以 $x_0=y_0$. □

11. [习题课] 设 (E,d) 是一个完备的度量空间，f 是其上的映射，并满足 $f^n=f\circ\cdots\circ f$(n 次幂) 是压缩映射。证明 f 有唯一的不动点，并给出例子说明 f 可以不连续。

证明. 由于 f^n 是压缩映射，则由不动点定理，f^n 存在唯一的不动点 x_0, 即 $f^n(x_0)=x_0$, 则

$$f^n(f(x_0))=f(f^n(x_0))=f(x_0)$$

所以 $f(x_0)$ 也是 f^n 的不动点，由不动点的唯一性，则 $f(x_0)=x_0$, 故 x_0 是 f 的不动点.

下面再证 x_0 是 f 的唯一不动点，若还有 y_0 使得 $f(y_0)=y_0$, 则 $f^n(y_0)=y_0$, 即 y_0 是 f^n 的不动点，则 $x_0=y_0$.

f 可以不连续的例子：设 $E=[0,1]$, E 上的函数 f 定义为

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$$

则 f 不连续，但 f^2 为压缩映射。 □

12. [作业] 记区间 $I=(0,\infty)$ 上通常的拓扑为 τ.

(a) 证明 τ 可由如下完备的距离 d 诱导：

$$d(x,y)=|\log x-\log y|.$$

(b) 设函数 $f:I\to I$ 且 $f\in C^1(I)$, 满足对某个 $\lambda<1$, 任取 $x\in I$, 都有 $x|f'(x)|\le\lambda f(x)$. 证明 f 在 I 上存在唯一的不动点。

证明. (a) 先证明 d 是 I 上的距离，

- $d(x,y)\ge 0$. 显然。
- $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

$$d(x,y)=0\Leftrightarrow\log x=\log y\Leftrightarrow x=y.$$

- $d(x,y)=d(y,x)$, 显然。
- $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$. 只需借助 $\mathbb{R}$ 上的三角形不等式，

$$d(x,y)=|\log x-\log y|\le|\log x-\log z|+|\log z-\log y|=d(x,z)+d(z,y).$$

因此 d 是 I 上的距离。

再证明 d 是完备的，设 (x_n) 是 (I,d) 中的 Cauchy 列，即 $d(x_n,x_m)\to 0(n,m\to\infty)$, 即 $|\log x_n-\log x_m|\to 0(n,m\to\infty)$, 这意味着 $(\log x_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列。由 $\mathbb{R}$ 完备知，存在 $z\in\mathbb{R}$, s.t. $|\log x_n-z|\to 0(n\to\infty)$, 即 $|\log x_n-\log e^z|\to 0(n\to\infty)$, 因此 $d(x_n,e^z)\to 0(n\to\infty)$, 故 d 是完备的。

最后证明 τ 可以由 d 诱导，对任意 $r>0,x\in I$, 考虑 (I,d) 中的开球 $B_d(x,r)$. 由定义 $B_d(x,r)=\{y:|\log y-\log x|<r\}$, 由于

$$|\log y-\log x|<r\Leftrightarrow y\in(xe^{-r},xe^{r}),$$

故 $B_d(x,r)=(xe^{-r},xe^r)$. 另一方面，对于任意开区间 $(a,b)\subset I$, 设 $x=\sqrt{ab}, y=\frac{1}{2}\log\frac{b}{a}$, 则 $(a,b)=(xe^{-r},xe^r)$. 因此 τ 可以由 d 诱导。

(b) 可以证明 f 是 (I,d) 上的压缩映射，即存在 $0\le\lambda<1$, 使得

$$|\log f(x)-\log f(y)|<\lambda|\log x-\log y|.$$

这可以用两种方法证明。

法 I: 由 Cauchy 中值定理，对任意 $x,y\in I$, 存在 $\xi\in(x,y)$, s.t.

$$\frac{\log f(x)-\log f(y)}{\log x-\log y}=\left.\frac{(\log[f(x)])'}{(\log x)'}\right|_{x=\xi}=\frac{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}{\frac{1}{\xi}},$$

再结合已知条件知

$$\left|\frac{\log f(x)-\log f(y)}{\log x-\log y}\right|\le\lambda.$$

法 II: 由题设知

$$\pm\frac{f'(t)}{f(t)}\le\lambda\frac{1}{t}, t\in I$$

两边同时在 $[x,y]$ 上积分，则

$$\pm(\log f(y)-\log f(x))\le\lambda(\log y-\log x),$$

这意味着 $|\log f(y)-\log f(x)|\le\lambda|\log y-\log x|$.

因此 $f:I\to I$ 是完备度量空间 (I,d) 上的压缩映射，所以 f 在 I 上存在唯一的不动点。 □

注释 2.1. *12* 题中，I 上原来的度量与新定义的度量 d 诱导的拓扑相同。I 上原来的度量是不完备的，但新定义的度量 d 是完备的，这表明完备性不是一个拓扑概念。

13. [习题课] 设 E 为可数集，其元素记为 $a_1,a_2,\cdots$(两两不同). 定义

$$d(a_p,a_q)=\begin{cases}0, & p=q\\ 10+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}, & p\ne q\end{cases}$$

(a) 证明 d 是 E 上的距离并且 E 成为一个完备的度量空间。

(b) 设 $f:E\to E$ 定义为 $f(a_p)=a_{p+1}$. 证明当 $p\ne q$ 时，有

$$d(f(a_p),f(a_q))<d(a_p,a_q),$$

但是 f 没有不动点。

证明. (a) 易证 d 是 E 上的距离，下证 (E,d) 是完备的。设有 E 中的 Caushy 列 $(a_{p(n)})$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $m,n\ge N$ 时，$d(a_{p(m)},a_{p(n)})<\varepsilon$. 取 $\varepsilon<10$, 则由于

$$d(a_{p(m)},a_{p(n)})=\begin{cases}0, & p(m)=p(n)\\ 10+\frac{1}{p(m)}+\frac{1}{p(n)}, & p(m)\ne p(n)\end{cases}$$

那么 $p(m)=p(n), n, m \geq N$, 这意味着对任意 $n \geq N$, $p(n)=p(N)$, 故

$$a_{p(n)} \rightarrow a_{p(N)}(n \rightarrow \infty),$$

所以 (E, d) 完备。

(b) 当 $p \neq q$ 时，

$$d(f(a_p), f(a_q))=d(a_{p+1}, a_{q+1})=10+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}<10+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=d(a_p, a_q).$$

若 f 有不动点 a_p, 即 $f(a_p)=a_p$, 即 $a_{p+1}=a_p$, 矛盾。 □

14. 本习题的目的是给出不动点定理的一个新的证明方法. 设 (E, d) 是非空的完备度量空间，$f: E \rightarrow E$ 是压缩映射. 任取 $R \geq 0$, 设

$$A_R=\{x \in E: d(x, f(x)) \leq R\}.$$

(a) 证明 $f(A_R) \subset A_{\lambda R}$.

(b) 证明当 $R>0$ 时，A_R 是 E 中的非空闭子集.

(c) 证明任取 $x, y \in A_R$, 有 $d(x, y) \leq 2R+d(f(x), f(y))$. 并由此导出

$$\operatorname{diam}(A_R) \leq \frac{2R}{1-\lambda}.$$

(d) 证明 A_0 非空.

证明. (a) 设 $x \in A_R$, 即 $d(x, f(x)) \leq R$, 则

$$d(f(x), f(f(x))) \leq \lambda d(x, f(x)) \leq \lambda R,$$

故 $f(x) \in A_{\lambda R}$, 所以 $f(A_R) \subset A_{\lambda R}$.

(b) 由 f, d 的连续性知 A_R 是闭的。

设 $R>0$, 下证 A_R 非空。对任意 $x \in E$, $d(f(x), f(f(x))) \leq \lambda d(x, f(x))$, $d(f^2(x), f^2(f(x))) \leq \lambda^2 d(x, f(x))$, $\cdots$, 依此类推，对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$d(f^n(x), f^n(f(x))) \leq \lambda^n d(x, f(x)),$$

由于 $\lambda \in[0,1)$, 存在 N, 当 $n \geq N$ 时，$\lambda^n d(x, f(x))<R$, 取 $z=f^N(x)$, 则有 $d(z, f(z))<R$, 因此 A_R 非空。

(c) 任取 $x, y \in A_R$, 则 $d(x, f(x)) \leq R$, $d(y, f(y)) \leq R$, 则

$$d(x, y) \leq d(x, f(x))+d(f(x), f(y))+d(f(y), y) \leq 2R+d(f(x), f(y)).$$

进一步

$$d(x, y) \leq 2R+d(f(x), f(y)) \leq 2R+\lambda d(x, y),$$

因此 $d(x, y) \leq \frac{2R}{1-\lambda}$, 那么由定义知 $\operatorname{diam}(A_R) \leq \frac{2R}{1-\lambda}$.

(d) 注意到 $A_0=\{x\in E: d(x,f(x))=0\}$ 可以写成

$$A_0=\{x\in\ E: d(x,f(x))\le\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}\}=\cap_{n\ge1}A_{\frac{1}{n}}.$$

由 (b) 知对于每个 n, $A_{\frac{1}{n}}$ 是非空闭集，故 $(A_{\frac{1}{n}})$ 是 E 中单调下降的非空闭子集列，且由 (c) 知 $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A_{\frac{1}{n}})=0$, 由定理 2.2.6 知 $\cap_{n\ge1}A_{\frac{1}{n}}$ 是单点集，所以 A_0 非空。 □

15. [作业] 设 (E,d) 是完备度量空间，f 和 g 是 E 上两个可交换的压缩映射 (即 $f\circ g=g\circ f$). 证明 f 和 g 有唯一的、共同的不动点。
通过反例说明如果去掉可交换的条件，则结论不成立。

证明. 设 f 的不动点为 x_0, 即 $x_0=f(x_0)$, 则

$$g(x_0)=g(f(x_0))=f(g(x_0)),$$

这意味着 $g(x_0)$ 也是 f 的不动点，因此 $g(x_0)=x_0$.

反例：$E=[0,1]$, $f(x)\equiv\frac{1}{4}$, $g(x)\equiv\frac{3}{4}$, 则 $f[g(x)]\equiv\frac{1}{4}, g[f(x)]\equiv\frac{3}{4}$, 所以 f 与 g 不交换，f,g 的不动点分别为 $\frac{1}{4},\frac{3}{4}$. □

3 第三章习题

1. [作业] 设 $C([0,1],\mathbb{R})$ 表示 $[0,1]$ 上所有的连续实函数构成的空间。定义

$$\|f\|_\infty=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)| \text{ 且} \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt.$$

(a) 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数。

(b) 证明 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 是完备的。

(c) 证明 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不完备。

证明. (a) $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数：

- $\|f\|_\infty=0\Leftrightarrow f(t)\equiv 0,\forall t\in[0,1]$,
- $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\|f\|_\infty$, 显然，
- $\|f+g\|_\infty=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)+g(t)|\le \sup_{0\le t\le 1}|f(t)|+\sup_{0\le t\le 1}|g(t)|=\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

所以 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数。

$\|\cdot\|_1$ 是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数：

- $\|f\|_1=0\Leftrightarrow f(t)\equiv 0,\forall t\in[0,1]$,
- $\|\lambda f\|_1=|\lambda|\|f\|_1$, 显然，
- $\|f+g\|_1=\int_0^1|f(t)+g(t)|dt\le\int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|g(t)|dt=\|f\|_1+\|g\|_1$.

所以 $\|\cdot\|_1$ 是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数。

(b) 设 (f_n) 是 $C([0,1],\mathbb{R})$ 中的 Cauchy 列，则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n,m\ge N$ 时，

$$\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon, \tag{*}$$

则对于任意 $t\in[0,1]$, $(f_n(t))$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，则 $(f_n(t))$ 收敛，设 $f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)$, 下证 f 是连续的。在(*)中令 $m\to\infty$, 则 $\|f_n-f\|_\infty\le\varepsilon$. 利用 f_N 的连续性，存在 δ, 当 $|x-y|<\delta$ 时，$|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon$, 因此，联合(*)知 $|x-y|<\delta$ 时，

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<3\varepsilon,$$

所以 f 连续，故 $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, 所以范数 $\|\cdot\|_\infty$ 完备。

(c) 设 $f_n(t)$ 为如下分段函数：

$$f_n(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\ n(t-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le t\le\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}<t\le 1\end{cases}$$

则 $\|f_n - f_m\|_1 = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \to 0$, 故 (f_n) 为 $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ 上的 Cauchy 列。下面证明这个 Cauchy 列不收敛。

反证法，若存在 $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ 使得 $\|f_n - f\|_1 \to 0$, 则

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{1/2-1/n} |f(t)+1|dt + \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |f(t) - n(t-\frac{1}{2})|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |f(t)-1|dt \to 0$$

则 $\int_0^{1/2} |f(t)+1|dt + \int_{1/2}^1 |f(t)-1|dt = 0$, 这意味着对任意 $t \in [0,1/2], f(t) = -1$; 对任意 $t \in [1/2,1]$, $f(t) = 1$, 则 $f(1/2) = -1 = 1$, 矛盾，所以 (f_n) 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下不收敛，所以 $C([0,1],\mathbb{R})$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不完备。 □

2. [习题课] 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上所有的实系数多项式构成的向量空间。对任一 $p \in E$, 定义

$$\|P\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$$

(a) 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 是 E 上的范数。

(b) 任取一个 $a \in \mathbb{R}$, 定义线性映射 $L_a : E \to \mathbb{R}$ 满足 $L_a(P) = P(a)$. 证明 L_a 连续当且仅当 $a \in [0,1]$, 并且给出该连续线性映射的范数。

(c) 设 $a < b$ 并定义 $L_{a,b} : E \to \mathbb{R}$ 满足

$$L_{a,b}(P) = \int_a^b P(x)dx$$

给出 a, b 的取值范围，使其成为 $L_{a,b}$ 连续的充分必要条件，然后确定 $L_{a,b}$ 的范数。

[2] 给出 a,b 的取值范围，使其成为 $L_{a,b}$ 连续的充分必要条件，然后确定 $L_{a,b}$ 的范数。 3-2

证明：(a) • $\|P\|_\infty \geq 0$

• $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow P(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$ ~~$\Rightarrow P=0$~~ $\xRightarrow{\text{由代数基本定理}}$ $P(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$，即 $P=0$。

• $\|\lambda P\|_\infty = |\lambda|\,\|P\|_\infty$

• $\|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$

(b) "$\Rightarrow$" 若 L_a 是连续的，则 $|L_a(P)| = |P(a)| \leq \|L_a\|\,\|P\|_\infty$ 其中 $\|L_a\|<\infty$.

取 P 为 x^n，上式意味着 $|a^n| = |a|^n \leq \|L_a\|\,\|x^n\|_\infty$

而 $\|x^n\|_\infty = 1$，因此 $|a|^n \leq \|L_a\| < \infty$

故 $|a|\leq 1$.

取 P 为 $(1-x)^n$，计算其范数得 $\|(1-x)^n\|_\infty = 1$，又因为 $|P(a)| = |(1-a)^n| = |1-a|^n \leq \|L_a\|\,\|P\|_\infty = \|L_a\| < \infty$

则 $|1-a|\leq 1$，这等价于 $a\in[0,2]$。联合前面的结论则 $a\in[0,2]\cap[-1,1]=[0,1]$.

"$\Leftarrow$" 若 $a\in[0,1]$，则 $|L_a(P)| = |P(a)| \leq \|P\|_\infty$，故 L_a 连续。

下面计算 L_a 的范数.

由上面的"$\Leftarrow$"过程知 $\|L_a\|\leq 1$. 取 $P(x)\equiv 1$，则 $\|P\|_\infty = 1$，且 $|L_a(P)| = |1| = 1$ 故 $\|L_a\| = 1$.

(c) $a,b\in[0,1] \Longleftrightarrow L_{a,b}$ 连续，且 $\|L_{a,b}\| = b-a$.

"$\Leftarrow$" 若 $L_{a,b}$ 连续，则对 $\forall P\in E$，$|L_{a,b}(P)| = \left|\int_a^b P(x)dx\right| \leq \|L_{a,b}\|\,\|P\|_\infty$，其中 $\|L_{a,b}\|<\infty$，

取 $P(x)=x^n$，$\|P\|_\infty = 1$，则 $\left|\int_a^b x^n dx\right| = \left|\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\right| \leq \|L_{a,b}\| < \infty$

若 $|a|<|b|$，则 $\frac{|b|^{n+1}}{n+1}\left(1-\left|\frac{a}{b}\right|^{n+1}\right) \leq \|L_{a,b}\| < \infty$，令 $n\to\infty$ 知 $|b|\leq 1$，因此 $|a|\leq 1$，$|b|\leq 1$

同理 $|b|<|a|$ 时亦有 $|a|\leq 1$，$|b|\leq 1$。当 $|a|=|b|$ 时，由于 $a<b$，则 $a=-b$，$b>0$。$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} = \frac{b^{n+1}(1+(-1)^n)}{n+1} < \infty \Rightarrow |b|\leq 1$

取 $P(x)=(1-x)^n$，$\|P\|_\infty = 1$，则 $\left|\int_a^b (1-x)^n dx\right| = \left|\frac{(1-a)^{n+1}-(1-b)^{n+1}}{n+1}\right| \leq \|L_{a,b}\| < \infty$，类似于上面的过程知 $|a-1|\leq 1$，$|b-1|\leq 1$，即 $a,b\in[0,2]$.

联合前面的结论则 $a,b\in[-1,1]\cap[0,2]=[0,1]$.

"$\Rightarrow$" 若 $a,b\in[0,1]$，则 $|L_{a,b}(P)| = \left|\int_a^b P(x)\,dx\right| \leq (b-a)\|P\|_\infty$，故 $L_{a,b}$ 连续，且 $\|L_{a,b}\|\leq b-a$

又 $P(x)\equiv 1$，则 $\|P\|_\infty = 1$，$|L_{a,b}(P)| = \left|\int_a^b P(x)dx\right| = b-a$. 故 $\|L_{a,b}\| = b-a$.

3. [作业题] 设 $(E,\|\cdot\|_\infty)$ 是习题 2 中定义的赋范空间。设 E_0 是 E 中没有常数项的多项式构成的向量子空间 (即多项式 $P\in E_0$ 等价于 $P(0)=0$).

(a) 证明 $N(P)=\|P'\|_\infty$ 定义了 E_0 上的一个范数,并且对任意 $P\in E_0$, 有 $\|P\|_\infty\le N(P)$.

(b) 证明 $L(P)=\int_0^1\frac{P(x)}{x}dx$ 定义了 E_0 上关于 N 的连续线性泛函,并求它的范数。

(c) 上面定义的 L 是否关于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 连续?

(d) 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上是否等价?

证明. (a) 先证明 $N(P)$ 是 E_0 上的一个范数。

- $N(P)=0\Leftrightarrow P'=0\Leftrightarrow P\equiv C$(常数), 又 $P(0)=0$ 知 $C=0$, 故 $P\equiv 0$.
- $N(\lambda P)=\|(\lambda P)'\|_\infty=|\lambda|\|P'\|_\infty=|\lambda|N(P)$.
- $N(P+Q)=\|P'+Q'\|_\infty\le\|P'\|_\infty+\|Q'\|_\infty=N(P)+N(Q)$.

故 $N(P)$ 是 E_0 上的一个范数。

设 $P\in E_0$, 对任意 $x\in[0,1]$, 由 Lagrange 中值定理, $|\frac{P(x)-P(0)}{x}|=|P'(\xi)|\le\|P'\|_\infty$, 这里 $\xi\in(0,x)$, 则 $|P(x)|\le|x|\|P'\|_\infty\le\|P'\|_\infty$, 所以 $\|P\|_\infty\le\|P'\|_\infty=N(P)$.

(b) 显然 $L(P)$ 是线性泛函。任意 $x\in[0,1]$, 存在 $\xi\in(0,x)$, 使得 $\frac{P(x)}{x}=P'(\xi)$, 因此 $\sup_{x\in[0,1]}|\frac{P(x)}{x}|\le\sup_{x\in[0,1]}|P'(x)|$, 则

$$\left|\int_0^1\frac{P(x)}{x}dx\right|\le\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{P(x)}{x}\right|\le\sup_{x\in[0,1]}|P'(x)|=N(P),$$

即 $L(P)\le N(P)$, 所以 L 关于范数 N 连续,且 $\|L\|\le 1$, 取 $P(x)=x\in E_0$, 则 $N(P)=1$, $L(P)=\int_0^1dx=1$, 则 $\|L\|=1$.

(c) L 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 不连续。反证法,假设 L 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 连续。设 $A=\{f:\in C[0,1]\text{ 且}f(0)=0\}$, 则易验证 A 是一个 Banach 空间。

下证 E_0 在 A 中稠密, **法 I:** 由 Weierstrass 逼近定理,对于任意 $f\in A\subset C[0,1]$, 可取多项式 P_n 一致逼近 f, 则 $P_n(0)\to 0(n\to\infty)$, 那么 $\|P_n-P_n(0)-f\|_\infty\to 0(n\to\infty)$, 令 $Q_n=P_n-P_n(0)$, 则 $Q_n\in E_0$ 且一致逼近于 f。

法 II: 取 Berstein 多项式基

$$b_{v,n}(x)=\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v},v=0,1,\cdots,n$$

构造 Berstein 多项式

$$B_n(f)(x)=\sum_{v=0}^n f(\frac{v}{n})b_{v,n}(x),$$

则由 Bernstein 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(f)-f\|_\infty=0,$$

而且从上述构造知，若 $f(0)=0$, 则相应的多项式 $B_n(f)$ 常数项为 0, 所以 A 中的元素可以由 E_0 中的元素一致逼近，这意味着 E_0 在 A 中稠密，因此，利用定理 3.2.13, E_0 上的连续线性泛函 L 可以唯一地拓展为 A 上的连续线性泛函，记为 $\tilde{L}$. 取 A 中的元素 $f(x)=x^{1/n}$, $\|f\|=1$, 且 $\tilde{L}(f)=\int_0^1\frac{x^{1/n}}{x}dx=n$, 则 $\tilde{L}$ 关于 $\|\cdot\|_\infty$ 不连续，矛盾。

(d) 若范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上等价，则恒等映射 $I_{E_0}:(E_0,\|\cdot\|_\infty)\to(E_0,N)$ 是连续的。设 $P(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$, 则 $\|P\|_\infty=1$, 但是 $N(P)=\|P'\|_\infty=\|nx^{n-1}\|_\infty=n$, 因此对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\|I_{E_0}\|\geq n$, 这与 I_E 的连续性矛盾，所以范数 $\|\cdot\|_\infty$ 和 N 在 E_0 上不等价。 □

4. 设 E 是由 $[0,1]$ 上所有连续函数构成的向量空间。定义 E 上的两个范数分别为 $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$ 和 $N(f)=\int_0^1 x|f(x)|dx$.

(a) 验证 N 的确是 E 上的范数且 $N\leq\|\cdot\|_1$.

(b) 设函数 $f(x)=n-n^2x$, 若 $x\leq\frac{1}{n}$; $f_n(x)=0$, 其他。证明函数列 $(f_n)_{n\geq1}$ 在 (E,N) 中收敛到 0. 它在 $(E,\|\cdot\|_1)$ 中是否收敛？由这两个范数在 E 上诱导的拓扑是否相同？

(c) 设 $a\in(0,1]$, 并令 $B=\{f\in E: f(x)=0,\forall x\in[0,a]\}$. 证明这两个范数在 B 上诱导相同的拓扑。

证明. (a) 先证明 N 是 E 上的一个范数。

- $N(f)=0\Leftrightarrow xf(x)\equiv0\Leftrightarrow f\equiv0$.
- $N(\lambda f)=|\lambda|N(f)$, 显然。
- $N(f+g)=\leq N(f)+N(g)$, 显然。

故 N 是 E 上的一个范数。

$N(f)=\int_0^1 x|f(x)|dx\leq\int_0^1|f(x)|dx=\|f\|_1\Rightarrow N\leq\|\cdot\|_1$.

(b) 由于

$$N(f_n-0)=\int_0^{1/n}nx(1-nx)dx=\int_0^1 t(1-t)\frac{dt}{n}=\frac{1}{6n}\to0,$$

故 (f_n) 在 (E,N) 中收敛到 0. 然而，若 (f_n) 在 $(E,\|\cdot\|_1)$ 中收敛，设收敛于 $f\in E$, 则

$$\int_{1/n}^1|f|dx\leq\int_0^{1/n}|n(1-nx)-f(x)|dx+\int_{1/n}^1|f|dx=\|f_n-f\|_1\to0(n\to\infty),$$

则 $\int_0^1|f(x)|dx=0$, 这意味着 $f\equiv0$. 然而 $\|f_n-f\|_1=\|f_n\|=\int_0^{1/n}n(1-nx)dx=\frac{1}{2}\nrightarrow0$, 矛盾，故 (f_n) 在 $(E,\|\cdot\|_1)$ 中不收敛。这意味着这两个范数在 E 上诱导的拓扑不同。

(c) 只需证明范数 $\|\cdot\|_1$ 与 N 在 B 上等价。

$$N(f)=\int_0^1 x|f(x)|dx\leq\int_0^1|f(x)|dx=\|f\|_1\Rightarrow N\leq\|\cdot\|_1,$$

另一方面，

$$N(f)=\int_0^1 x|f(x)|dx=\int_a^1 x|f(x)|dx\geq a\int_a^1|f(x)|dx=a\int_0^1|f(x)|dx=a\|f\|_1\Rightarrow\|\cdot\|_1\leq\frac{1}{a}N,$$

故

$$N \leq \|\cdot\|_1 \leq \frac{1}{a}N$$

所以 $\|\cdot\|_1$ 与 N 在 B 上等价。 $\square$

2019年9月23日 9:37

5. 设$\varphi:[0,1]\to[0,1]$是连续函数且不恒等于1. 设$\alpha\in\mathbb{R}$, 定义$C([0,1],\mathbb{R})$上的映射T为 $T(f)(x)=\alpha+\int_0^x f(\varphi(t))dt$.

证明T^2为压缩映射. 据此证明下面的方程存在唯一解:

$f(0)=\alpha,\ f'(x)=f(\varphi(x)),\ x\in[0,1].$ (*)

证明: $\forall 0\le x\le 1$, $|T(f)(x)-T(g)(x)|=|\int_0^x f(\varphi(t))-g(\varphi(t))dt|\le x\max_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|=x\cdot\|f-g\|$

进一步, $|T(T(f))(x)-T(T(g))(x)|=|\int_0^x (Tf)(\varphi(t))-(Tg)(\varphi(t))dt|$

$$\le\int_0^x\varphi(t)\|f-g\|dt=\int_0^x\varphi(t)dt\,\|f-g\|$$

$$\le\int_0^1\varphi(t)dt\,\|f-g\|$$

由于φ不恒为1, 则$\int_0^1\varphi(t)dt<1$. 令$\lambda=\int_0^1\varphi(t)dt$, 上式左边对$x$取最大值得$\|T^2f-T^2g\|\le\lambda\|f-g\|$. 故$T^2$是压缩映射. 由第二章习题11知$T$存在唯一不动点.

(*) 等价于 $f(x)=\alpha+\int_0^x f(\varphi(t))dt$, 即$f=Tf$, 故(*)存在唯一解.

6. 设$\alpha\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>1$. 考察下面的微分方程.

$f(0)=\alpha,\ f'(x)=af(x^b),\ 0\le x\le 1.$ (*)

(a) 令$M>0$. 验证$E=C([0,1],\mathbb{R})$上赋予范数$\|f\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|e^{-Mx}$后成为一个Banach空间.

(b) 设$g(x)=\alpha+\int_0^x af(t^b)dt$, 定义映射$T:E\to E$为$T(f)=g$. 证明选择合适的$M$, 可使$T$为压缩映射.

(c) 证明方程(*)有唯一解.

证明: (a) 易看出$\|\cdot\|$为E上的范数. 下证$(E,\|\cdot\|)$完备. 法II: $e^{-M}\|f\|_\infty\le\|f\|\le\|f\|_\infty$, 故$\|\cdot\|$完备

设$(f_n)\subset(E,\|\cdot\|)$为Cauchy列, 即$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n,m\ge N$时, $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ 即

$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\cdot e^{Mx}\le\varepsilon e^M$, $\forall 0\le x\le 1$ (**)

则对于固定的x, $(f_n(x))$是$\mathbb{R}$中Cauchy列故收敛, 记极限为$f(x)$.

f连续: 在(**)中令$m\to\infty$得 $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon e^M$, $\forall 0\le x\le 1$. (***)

对函数f_N存在$\delta>0$, 当$|y-x|<\delta$时, $|f_N(y)-f_N(x)|<\varepsilon$. 则

$|f(y)-f(x)|\le|f(y)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|$

$<e^M\cdot\varepsilon+\varepsilon+e^M\cdot\varepsilon=(2e^M+1)\varepsilon$, $y\in B(x,\delta)$ 故f连续.

由(***)知 $\|f_n-f\|\le\varepsilon$ $(n>N)$ 故 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f$, 所以$(E,\|\cdot\|)$完备.

(b) $\forall f,h\in E$, 往证存在$0<\lambda<1$ s.t. $\sup|\int_0^x af(t^b)-ah(t^b)dt|e^{-Mx}\le\lambda\sup|f(x)-h(x)|e^{-Mx}$.

$|a\int_0^x f(t^b)-h(t^b)dt|=|a\int_0^x(f(t^b)-h(t^b))e^{-Mt}\cdot e^{Mt}dt|\le a\int_0^x|f(t^b)-h(t^b)|e^{-Mt}dt\cdot e^{Mx}$

$\Rightarrow |a\int_0^x f(t^b)-h(t^b)dt|e^{-Mx}\le a\int_0^x|f(t^b)-h(t^b)|e^{-Mt}dt$, 令$u=t^b$, $t=u^{\frac1b}$, $dt=\frac1b u^{\frac1b-1}du$

$$=\frac ab\int_0^{x^b}|f(u)-h(u)|e^{-Mu}e^{-M(u^{\frac1b}-u)}u^{\frac1b-1}du$$

$$\le\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-h(x)|e^{-Mx}\cdot\frac ab\int_0^{x^b}e^{-M(u^{\frac1b}-u)}u^{\frac1b-1}du$$

$\le \sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-h(x)|e^{\cdots}\cdot\frac{a}{b}\int_0 e^{-M(u^{\frac{1}{b}}-u)}u^{\frac{1}{b}-1}du$

令 $v=u^{\frac{1}{b}}$. $\frac{a}{b}\int_0^{x^b}e^{-M(u^{\frac{1}{b}}-u)}u^{\frac{1}{b}-1}du = a\int_0^x e^{-M(v-v^b)}v^{1-b}\cdot v^{b-1}dv \le a\int_0^1 e^{-M(v-v^b)}dv$

对 $\forall v\in(0,1)$, $e^{-M(v-v^b)}\to 0\ (M\to\infty)$, $\{0,1\}$ 为零测度集, 由勒贝格控制收敛定理知 右端积分趋于0 $(M\to\infty)$

记 $\lambda=a\int_0^1 e^{-M(v-v^b)}dv$, 则可取 M s.t. $\lambda\in(0,1)$. 此时 T 为压缩映射.

(c) (*) 等价于积分方程 $f(x)=f(0)+\int_0^x af(t^b)dt$ 且 $f(0)=\alpha$, 即 $Tf=f$.

由(b)知存在唯一 $f\in E$ s.t. $Tf=f$, 故 (*) 有唯一解.

7. 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的无限维向量空间。设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 中的一组向量。若 E 中任意向量可用设 $(e_i)_{i\in I}$ 中有限个向量唯一线性表示，则称 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 中一个 Hamel 基。
(a) 由 Zorn 引理证明 E 有一组 Hamel 基。
(b) 假设 E 还是一个赋范空间，证明 E 上必存在不连续的线性泛函。
(c) 证明在任一无限维赋范空间上，一定存在一个比原范数严格强的范数 (即新范数诱导的拓扑比原来的范数诱导的拓扑强且不同). 由此说明，若向量空间 E 上任意两个范数诱导同一个拓扑，E 必为有限维空间。

Lemma 3.1 (Zorn). *在任何一个非空的偏序集中，如果任何全序子集都有上界，那么这个偏序集存在一个极大元。*

证明. (a) 记 $\mathcal{F}=\{F\subset E$ 为线性子空间 $:F$ 含有 Hamel 基$\}$. 由于任意有限维子空间必含有 Hamel 基故 $\mathcal{F}$ 非空。设 $F\in\mathcal{F}$ 的一个 Hamel 基为 $(f_i)_{i\in I}$, 令 $\mathcal{G}=\{(F,(f_i)_{i\in I}),F\in\mathcal{F}\}$. 定义 $\mathcal{G}$ 上的序"$\leq$" 为

$$(F,(f_i)_{i\in I})\leq(G,(g_j)_{j\in J})\Leftrightarrow F\subset G \text{ 且}(f_i)_{i\in I}\subset(g_j)_{j\in J}$$

设 $\{(F_k,(a_{kj}))\}\subset\mathcal{F}$ 为全序子集，令 $F=\cup_k F_k$, $(a_i)=\cup_k(a_{kj})$, 显然 F 为线性空间且 (a_i) 为 F 的 Hamel 基，故 $(F,(a_i))$ 是 $\{(F_k,(a_{kj}))\}$ 的上界，由 Zorn 引理，$\mathcal{G}$ 有极大元 $(G,(g_j))$. 下证 $G=E$, 否则若 $G\neq E$, 则存在 $x\in E,x\notin G$, 则 x 不能由 (g_j) 中的元素线性表出，故 $G\subsetneqq G+\mathbb{K}x$ 且 $(g_j)\cup\{x\}$ 是 $G+\mathbb{K}x$ 的 Hamel 基，这与 $(G,(g_j))$ 的极大性矛盾, 故 E 有 Hamel 基 (g_j).

(b) 设 $(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的 Hamel 基，任取 $e_1\in(e_i)_{i\in I}$, E 为无限维则存在 $e_2\in(e_i)_{i\in I}$ 使得 $\{e_1,e_2\}$ 线性无关，同理存在 $e_3\in(e_i)_{i\in I}$ 使得 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 线性无关, 依此类推得到一个线性无关序列 $(e_n)\subset(e_i)_{i\in I}$, 除上述取得的 e_n 外 $(e_i)_{i\in I}$ 中其他元素记为 $(e_j)_{j\in J}$, 用 $\frac{e_n}{n\|e_n\|}$ 代替 e_n, 仍然记为 e_n, 则 $(e_i)_{i\in I}=(e_n)_{n\geq1}\cup(e_j)_{j\in J}$ 仍为 Hamel 基。对任意 $x\in E$, $x=\sum_i x_ie_i$ (除有限项之外均为 0), 令映射

$$f:E\to\mathbb{K},f(x)=\sum_i x_i.$$

显然 f 为 E 上的线性泛函, 注意到 $f(e_n)=1,\forall n\geq1$ 但 $e_n\to0(n\to\infty)$, 故 f 不连续。

(c) 设 E 上的原范数为 $\|\cdot\|$, 将 (b) 中找到的不连续泛函记为 f. 令

$$\|x\|_1=\|x\|+|f(x)|,\forall x\in E$$

易看出 $\|\cdot\|_1$ 为 E 上的范数且 $\|x\|\leq\|x\|_1$, 故 $\|\cdot\|_1$ 诱导的拓扑更强，又由于存在 $(e_n)_{n\geq1}$ 使得 $\|e_n\|\to0$ 且 $|f(e_n)|=1$, 则 $\|e_n\|_1=\|e_n\|+|f(e_n)|\nrightarrow0$, 故 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 诱导不同的拓扑。 □

8. [习题] 设 E 为数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维向量空间，其维数 $\dim E=n$. $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 表示 E 的一组基。任取 $u\in\mathcal{L}(E)$, 令 $[u]$ 表示 u 在这组基下对应的矩阵。

(a) 证明映射 $u\mapsto[u]$ 建立了从 $\mathcal{L}(E)$ 到所有 $n\times n$ 矩阵构成的向量空间 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 之间的同构映射。

(b) 假设 $E=\mathbb{K}^n$ 且 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是经典基。并约定 $E=\mathbb{K}^n$ 赋予欧氏范数。证明若 u(或等价的 $[u]$) 可对角化，则 $\|u\|=\max\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$, 这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 u 的特征值。

(c) $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 如上，试由 $[u]$ 中的元素分别确定在 $p=1$ 和 $p=\infty$ 时 $u:(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_p)\to(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_p)$ 的范数.

$\boxed{8}$ (a) 对于 $\forall x\in E$，$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，则 $u(x)=\sum_{i=1}^{n}x_iu(e_i)$，设 $u(e_i)=\sum_{k=1}^{n}u_{ki}e_k$，则

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_iu_{ki}e_k$$

设 $[u]$ 为矩阵 (u_{ij})，则我们建立了线性映射 $\Phi: \mathcal{L}(E)\to M_n(\mathbb{K})$，$u\mapsto[u]$.

• 若 $[u]=0$，则显然有 $u=0$，所以 Φ 是单射.

• 任意 $n\times n$ 矩阵都可以通过上面的方式定义一个 E 上的线性映射，所以 Φ 是满射。

• 取 E 上的范数 $\|x\|_\infty=\max_i|x_i|$，则

$$\|u\|\le\max_k\Big|\sum_i|u_{ki}|\Big|$$

$$\|u(x)\|_\infty=\max_k\Big|\sum_i u_{ki}x_i\Big|\le\max_k\Big(\sum_i|u_{ki}|\Big)\max_i|x_i|=\max_k\Big|\sum_i|u_{ki}|\Big|\|x\|_\infty$$

设 $\max_k\sum_i|u_{ki}|$ 在第 i_0 行取到最大值，取 $x_0=[\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n]^T$，其中 $\xi_k=\mathrm{sgn}(u_{i_0k})$，则 $\|x_0\|_\infty=1$，且 $\|u(x_0)\|_\infty=\max_k\Big|\sum_i|u_{ki}|\Big|$。所以 $\|u\|=\max_k\Big|\sum_i|u_{ki}|\Big|$。易证 RHS 是 $[u]$ 的一个范数，记为 $\|[u]\|_\infty$，则我们得到了 $\|\Phi(u)\|=\|[u]\|_\infty$，因此 Φ 与 Φ^{-1} 都是连续的，故 Φ 是同构映射。

•法II：由于对 $[u]$ 赋予的范数也是 u 的范数，所以 $\|\Phi(u)\|=\|u\|$，故 Φ 连续。

(b) 若 u 可对角化，则有 n 个特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，相应的单位特征向量设为 $f_1,\dots,f_n$，则 $uf_k=\lambda_kf_k$，且 $\{f_1,\dots,f_n\}$ 与 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 相差一个酉变换 V，$f_k=Ve_k$，设 $\Gamma=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$，则 $u=V\Gamma V^*$。那么，对于任意单位向量 x，记 $y=V^*x$，则 $\|y\|=(x^*VV^*x)^{\frac12}=(x^*x)^{\frac12}=1$

$$\|ux\|=(x^*u^*ux)^{\frac12}=(x^*V\Gamma^*\Gamma V^*x)^{\frac12}$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2|y_k|^2\Big)^{\frac12}\le\max_k|\lambda_k|\Big(\sum_k|y_k|^2\Big)^{\frac12}=\max_k|\lambda_k|$$

上式意味着 $\|u\|\le\max_k|\lambda_k|$.

设 $|\lambda_{k_0}|=\max_k|\lambda_k|$，取 $x=f_{k_0}$，则 $\|uf_{k_0}\|=|\lambda_{k_0}|$，故 $\|u\|=\max_k|\lambda_k|$.

(c) 由 (a) 知 $p=\infty$ 时，$u:(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)\to(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 的范数为 $\max_k\Big|\sum_i|u_{ki}|\Big|$

设 $p=1$，即 $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，则

$$\|u(x)\|_1=\sum_k\Big|\sum_i u_{ki}x_i\Big|\le\sum_i\sum_k|u_{ki}||x_i|=\sum_i|x_i|\sum_k|u_{ki}|\le\Big(\sum_i|x_i|\Big)\cdot\max_i\sum_k|u_{ki}|.$$

故 $\|u\|\le\max_i\sum_k|u_{ki}|$，设 $\max_i\sum_k|u_{ki}|=\sum_k|u_{ki_0}|$，取 $x=e_{i_0}$，则 $\|u(e_{i_0})\|_1=\max_i\sum_k|u_{ki}|$，因此 $\|u\|=\max_i\sum_k|u_{ki}|$.

9. [作业] 设 E 是 Banach 空间。

(a) 设 $u \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|u\| < 1$. 证明 $I_E - u$ 在 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆。提示：考虑 $\mathcal{B}(E)$ 中的级数 $\sum_n u^n$.

(b) 设 $GL(E)$ 表示 $\mathcal{B}(E)$ 中可逆元构成的集合。证明 $GL(E)$ 关于复合运算构成一个群且是 $\mathcal{B}(E)$ 中的开集。

(c) 证明 $u \mapsto u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 上的同胚映射。

证明. (a) 注意到 $\|u^n\| \le \|u\|^n$, 又由于 $\|u\| < 1$, 那么级数 $\sum_{n\ge 0} u^n$ 绝对收敛，又因为 $\mathcal{B}(E)$ 完备，由定理 3.1.8 知 $\sum_{n\ge 0} u^n$ 收敛，记其极限为 $v \in \mathcal{B}(E)$, 即 $v = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n u^k$. 那么

$$(I_E - u)v = \lim_{n\to\infty} (I_E - u)\sum_{k=0}^n u^k = \lim_{n\to\infty} I_E - u^{n+1} = I_E,$$

同理 $v(I_E - u) = I_E$, 因此，v 是 $I_E - u$ 的逆映射。

(b) 显然，$GL(E)$ 含有幺元 I_E, 关于复合运算封闭且满足结合律，且每个元素都有逆元，所以 $GL(E)$ 关于复合运算构成一个群。

设 $u \in GL(E)$, 则对任意 $v \in GL(E)$,

$$v = u - (u - v) = u[I_E - u^{-1}(u - v)]$$

则当 $\|v - u\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$ 时，$\|u^{-1}(u - v)\| \le \|u^{-1}\|\|u - v\| < 1$, 因此由 (a) 知 $I_E - u^{-1}(u - v)$ 是逆映射，所以 v 是逆映射，因此 $GL(E)$ 是开集。

(c) 易证明映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 到自身的双射，下面证映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是连续的。先证明一个小结论：设 $A \in \mathcal{B}(E)$ 且 $\|A\| < 1$, 则 $\|(I_E - A)^{-1}\| \le (1 - \|A\|)^{-1}$. 实际上, 对 E 中的任何单位向量 x,

$$\|(I_E - A)^{-1}x\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n(x)\| \le \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|\|x\| \le (\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n)\|x\| \le (1 - \|A\|)^{-1}, \tag{1}$$

所以 $\|(I_E - A)^{-1}\| \le (1 - \|A\|)^{-1}$.

现在考察映射 $u \mapsto u^{-1}$ 的连续性，

$$\|v^{-1} - u^{-1}\| = |v^{-1}(u - v)u^{-1}\| \le \|v^{-1}\|\|u - v\|\|u^{-1}\|,$$

又 $v = u[I_E - u^{-1}(u - v)]$, 则 $v^{-1} = [I_E - u^{-1}(u - v)]^{-1}u^{-1}$, 则当 $\|u^{-1}\|\|u - v\| \le 1/2$ 时，

$$\begin{aligned}\|v^{-1}\| \le \|[I_E - u^{-1}(u - v)]^{-1}\|\|u^{-1}\| \le& [1 - \|u^{-1}(u - v)\|]^{-1}\|u^{-1}\| \\ \le& (1 - \|u^{-1}\|\|u - v\|)^{-1}\|u^{-1}\| \le 2\|u^{-1}\|\end{aligned}$$

其中第二个不等号应用了前面的小结论，所以 $\|u^{-1} - v^{-1}\| \le 2\|u^{-1}\|^2\|u - v\|$, 这意味着映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是连续的，逆映射与原映射形式相同，所以也是连续的，因此 $u \mapsto u^{-1}$ 是 $GL(E)$ 上的同胚映射。 $\square$

10. [作业] 设 $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g(x) = \frac{1}{x}\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$, 证明 $fg \in L_1(\mathbb{R})$. 给出例子说明 $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, 但是 $f_1 f_2 \notin L_1(\mathbb{R})$.

证明. 利用 Hölder 不等式

$$\int |f(x)g(x)|dx \le (\int |f(x)|^2 dx)^{1/2}(\int |g(x)|^2 dx)^{1/2} = \|f\|_2 < \infty$$

所以 $fg \in L_1(\mathbb{R})$.

例子：设 $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{I}_{(0,1]}$, 则 $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$, 但是 $f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{x}\mathbb{I}_{(0,1]} \notin L_1(\mathbb{R})$. □

11. [习题课] 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为有限测度空间，即有 $\mu(\Omega) < \infty$.

(a) 证明若 $0 < p < q \le \infty$, 则 $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. 用反例说明当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时，结论不成立。

(b) 证明若 $f \in L_\infty(\Omega)$, 则 $f \in \cap_{p<\infty} L_p(\Omega)$ 且 $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

(c) 设 $f \in \cap_{p<\infty} L_p(\Omega)$ 且满足 $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p < \infty$, 证明 $f \in L_\infty(\Omega)$.

证明. (a) 当 $q = \infty$ 时，证明是直接的。对于 $0 < p < q < \infty$, 设 $s = \frac{q}{p}, t = (1 - \frac{p}{q})^{-1}$, 由 Hölder 不等式

$$\int |f(x)|^p dx = \int |f(x)|^p \cdot 1 dx \le \||f|^p\|_s \|1\|_t = \|f\|_q^p \mu(E)^{1-\frac{p}{q}},$$

则 $\|f\|_p \le \|f\|_q \mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, 所以 $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时，结论不成立。设 $\Omega = \mathbb{R}$, μ 为 Lebesgue 测度，考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x}\mathbb{I}_{[1,\infty)}$, 则 $f \in L_2(\mathbb{R})$, 但是 $f \notin L_1(\mathbb{R})$.

(b) 若 $f \in L_\infty(\Omega)$, 则对任意 $p < \infty$,

$$(\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le (\int \|f\|_\infty^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

因此 $f \in \cap_{p<\infty} L_p(\Omega)$, 且令 $p \to \infty$, 由于 $(\mu(\Omega))^{1/p} \to 1$, 所以 $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 设 A 为集合 $A = \{|f| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$, 由本性上确界的定义知 $\mu(A) \ne 0$, 则

$$(\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ge (\int_A (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

则

$$\liminf_{p\to\infty} (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ge \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

由 ε 的任意性知 $\liminf_{p\to\infty} (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ge \|f\|_\infty$. 所以 $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

(c) 反证法。若 $f \notin L_\infty(\Omega)$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, $\mu(|f| \ge n) \ne 0$, 设集合 $B = \{|f| \ge n\}$, 则

$$(\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ge (\int_B n^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = n\mu(B)^{\frac{1}{p}},$$

那么 $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \liminf_{n\to\infty} (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \ge n$, 所以 $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p = \infty$, 矛盾，故 $f \in L_\infty(\Omega)$. □

12. [作业] 设 $0<p<q\le\infty$, $0\le\theta\le 1$. 并令

$$\frac{1}{s}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}.$$

证明若 $f\in L_p(\Omega)\cap L_q(\Omega)$, 则

$$f\in L_s(\Omega)\text{ 且}\|f\|_s\le\|f\|_p^{\theta}\|f\|_q^{1-\theta}.$$

证明. 若 $f\in L_p(\Omega)\cap L_q(\Omega)$, 由于 $\frac{1}{s}=\frac{1}{p/\theta}+\frac{1}{q/(1-\theta)}$, $|f|=|f|^{\theta}|f|^{1-\theta}$, $|f|^{\theta}\in L_{\frac{p}{\theta}}(\Omega)$, $|f|^{1-\theta}\in L_{\frac{q}{1-\theta}}$, 由 Hölder 不等式知 $f\in L_s(\Omega)$ 且

$$\begin{aligned}\|f\|_s=(\int|f|^s d\mu)^{\frac{1}{s}}=[\int(|f|^{\theta}|f|^{1-\theta})^s d\mu]^{\frac{1}{s}}\le&(\int|f|^{\theta\cdot\frac{p}{\theta}}d\mu)^{\frac{\theta}{p}}(\int|f|^{(1-\theta)\cdot\frac{q}{1-\theta}}d\mu)^{\frac{1-\theta}{q}}\\=&\|f\|_p^{\theta}\|f\|_q^{1-\theta},\end{aligned}$$

□

13. (广义 Minkowski 不等式) 设 $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ 是两个测度空间，$0<p<q<\infty$. 证明对于任意可测函数 $f:(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)\to\mathbb{K}$, 有

$$(\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2))^{\frac{1}{q}}\le(\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}d\mu_1(x_1))^{\frac{1}{p}}$$

证明. 先假设 $\mu_1(\Omega_1)<\infty$, $\mu_2(\Omega_2)<\infty$. 若 f 本性有界，则式子中涉及的积分均有限，则由 Fubini 定理知

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2)\\=&\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))^{\frac{q}{p}-1}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))d\mu_2(x_2)\\=&\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}-1}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))d\mu_2(x_2)\\=&\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}-1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2)\\=&\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}-1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_2(x_2)d\mu_1(x_1)\end{aligned}\tag{2}$$

再利用 Hölder 不等式，设 $t=\frac{q}{p}$, 取 s 使得 $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$, 即 $s=\frac{q}{q-p}$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}-1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_2(x_2)\\\le&(\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2))^{\frac{q-p}{p}}\cdot(\int_{\Omega_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}-1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_2(x_2)d\mu_1(x_1)\\\le&(\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x,x_2)|^p d\mu_1(x))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2))^{\frac{q-p}{q}}\cdot\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}d\mu_1(x_1)\end{aligned}$$

结合式 (2) 两边同时除以第一个因子，则

$$
\begin{aligned}
&(\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}\\
\le&\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}d\mu_1(x_1)
\end{aligned}
$$

两边同时开 p 次方则

$$(\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2))^{\frac{1}{q}}\le(\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}d\mu_1(x_1))^{\frac{1}{p}}$$

对于一般的可测函数 f, 令 $f_n(x)=f(x)\mathbb{I}_{|f|\le n}$, 则 f_n 本性有界，故由上面的结果对于 f_n 有

$$(\int_{\Omega_2}(\int_{\Omega_1}|f_n(x_1,x_2)|^p d\mu_1(x_1))^{\frac{q}{p}}d\mu_2(x_2))^{\frac{1}{q}}\le(\int_{\Omega_1}(\int_{\Omega_2}|f_n(x_1,x_2)|^q d\mu_2(x_2))^{\frac{p}{q}}d\mu_1(x_1))^{\frac{1}{p}}$$

令 $n\to\infty$, 由单调收敛定理知结论对于一般的可测函数 f 亦成立。

若 Ω_1 为一般的 σ-有限测度空间，则存在一列递增的 Ω_{1n}, $\mu_1(\Omega_{1n})<\infty$, 令 $f_n=f(x)\mathbb{I}_{\Omega_{1n}}(x)$, 同样由单调收敛定理知结论成立。用同样的方法可把结论推广到 Ω_2 为一般的 σ-有限测度空间的情况。 □

注释 3.1. 当存在 g,h 使得 $f(x_1,x_2)=g(x_1)h(x_2)$ 时，等式成立。

15. 可分性

(a) 证明：若 (E,d) 是可分度量空间，$F\subset E$, 则 (F,d) 也是可分度量空间。

(b) 证明：$\mathbb{R}^n$, c_0, ℓ_p, $1\le p<\infty$, $C([a,b],\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 和 $L_p(0,1)$, $1\le p<\infty$, 都是可分的。

(c) 证明：ℓ_∞, $L_\infty(0,\infty)$ 都不可分。

证明. (a) 若 E 可分，则存在序列 $(x_n)\subset E$, $\overline{(x_n)}=E$. 设 $F\subset E$, 则对 $\forall n,m\ge 1$, 存在 $y_{n,m}\in F$, s.t. $d(x_n,y_{n,m})<\frac{1}{m}$. 对于 $\forall y\in F$, $\forall\varepsilon>0$, 存在 n s.t. $d(y,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$, 取 $m>\frac{2}{\varepsilon}$, 则 $d(y,y_{n,m})\le d(y,x_n)+d(x_n,y_{n,m})<\varepsilon$, 故 $(y_{n,m})_{n,m\ge 1}$ 在 F 中稠密，所以 (F,d) 是可分度量空间。 □

16. [作业] 在实数集 $\mathbb{R}$ 上取 Lebesgue σ-代数及 Lebesgue 测度，并设 $f,g\in L_1(\mathbb{R})$.

(a) 证明

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f(u)g(v)dudv=[\int_{\mathbb{R}}f(u)du][\int_{\mathbb{R}}g(v)dv]=\int_{\mathbb{R}}[\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy]dx.$$

由此导出函数 $x\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有定义。

(b) 我们定义 f 和 g 的卷积 $f*g$ 为

$$f*g(x)\begin{cases}\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy, & \text{当积分存在,}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

证明 $f*g\in L_1(\mathbb{R})$ 且 $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.

(c) 取 $f=\mathbb{I}_{[0,1]}$, 计算 $f*f$.

Thm 3.1 (Fubini-Tonelli 定理)**.** 设 X,Y 为 σ-有限测度空间。若 f 为可测函数，则

$$\int_X(\int_Y|f(x,y)|dy)dx=\int_Y(\int_X|f(x,y)|dx)dy=\int_{X\times Y}|f(x,y)|d(x,y), \tag{3}$$

并且，若上述三个积分有一个为有限的，则

$$\int_X(\int_Y f(x,y)dy)dx=\int_Y(\int_X f(x,y)dx)dy=\int_{X\times Y} f(x,y)d(x,y). \tag{4}$$

证明. (a) 由 Fubini-Tonelli 定理，

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)dudv=\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(u)g(v)du)dv=\int_{\mathbb{R}} g(v)(\int_{\mathbb{R}} f(u)du)dv=[\int_{\mathbb{R}} f(u)du][\int_{\mathbb{R}} g(v)dv],$$

再由 Fubini-Tonelli 定理，

$$\int_{\mathbb{R}}[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy]dx=\int_{\mathbb{R}} g(y)[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)dx]dy=[\int_{\mathbb{R}} f(x)dx][\int_{\mathbb{R}} g(y)dy],$$

其中最后一个等式是由于 Lebesgue 测度的平移不变性。另外，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy|dx &\le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)||g(y)|dydx\\ &=\int_{\mathbb{R}}|g(y)|[\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|dx]dy=[\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx][\int_{\mathbb{R}}|g(y)|dy]<\infty,\end{aligned}$$

则函数 $x\mapsto\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有定义。

(b) 由于

$$|f*g(x)|=|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy|\le\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)||g(y)|dy,$$

上式两端同时对 x 求 Lebesgue 积分，并应用 (a) 的结论知 $f*g\in L_1(\mathbb{R})$ 且 $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.

(c) 设 $f=\mathbb{I}_{[0,1]}$,

$$f*f(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{I}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{I}_{[0,1]}(y)dy,$$

又 $\mathbb{I}_{[0,1]}(x-y)=\mathbb{I}_{[x-1,x]}(y)$, 则上式等于 $\mu([x-1,x]\cap[0,1])$, 则

$$f*f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

$\square$

17. [习题课] 在 $\mathbb{R}$ 上考虑 Borelσ-代数和 Lebesgue 测度。设 $1 < p < \infty$ 且 $f \in L_p(0,+\infty)$. 定义

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \forall x > 0.$$

本题的目标是证明 Hardy 不等式：

$$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p, \quad \forall f \in L_p(0,+\infty). \tag{*}$$

(a) 首先说明 F 在 $(0,+\infty)$ 上的定义是合理的，并且

$$|x_1F(x_1) - x_2F(x_2)| \le |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}}\|f\|_p, \forall x_1, x_2 > 0.$$

这里 q 是 p 的共轭数。并由此证明 F 在 $(0,+\infty)$ 上连续，故可测。

(b) 假设 f 是有紧支撑的连续函数且 $f \ge 0$. 证明 F 在 $(0,\infty)$ 上连续可导且有

$$(p-1)\int_0^{+\infty} F(x)^p dx = p\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)dx.$$

并由此导出公式 (*).

(c) 证明公式 (*) 对所有的 $f \in L_p(0,+\infty)$ 成立。

(d) 用范例说明当 $p = 1$ 时，(*) 不成立，即不存在任何常数 $C > 0$, 使得

$$\|F\|_p \le C\|f\|_p, \forall f \in L_p(0,+\infty).$$

(e) 证明 $\frac{p}{p-1}$ 是使得 (*) 式成立的最优常数。也就是，若有 $C > 0$ 使得

$$\|F\|_p \le C\|f\|_p, \forall f \in L_p(0,+\infty).$$

则 $C \ge \frac{p}{p-1}$.
提示：考虑函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}\mathbb{I}_{[1,n]}(x)$ 和极限

$$\|F\mathbb{I}_{[1,n]}\|_p / \|f\|_p, n \to \infty.$$

证明. 取定任意 $x \in (0,\infty)$, 由 $f \in L_p(0,+\infty)$ 知,把 f 限制到 $(0,x]$ 区间仍然有 $f \in L_p(0,x)$. 由于 $\mu((0,x]) < \infty$，则由 11 题知 $f \in L_1(0,x)$, 故 F 在 $(0,+\infty)$ 上的定义合理。进一步

$$|x_1F(x_1) - x_2F(x_2)| = |\int_0^{x_1} f(t)dt - \int_0^{x_2} f(t)dt| = |\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt|,$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 由 Hölder 不等式知

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\cdot 1dt \le (\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_{x_1}^{x_2} 1dt)^{\frac{1}{q}} = |x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}}\|f\|_p,$$

这说明映射 $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ 是连续的，又因为 $1/x$ 在 $(0,\infty)$ 上连续，故 F 在 $(0,+\infty)$ 上连续，故可测。

(b) 设 f 有紧支撑，则 $\mathrm{supp}f$ 是 $(0,\infty)$ 上的紧集，又由于 f 连续，则 f 在 $\mathrm{supp}f$ 上有上界 M, 则 $F(x)$ 定义合理。注意到 $\int_0^x f(t)dt$ 连续可微且 $(\int_0^x f(t)dt)'=f(x)$, 又 $1/x$ 在 $(0,\infty)$ 上连续可微，则 $F(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续可微，且

$$\begin{aligned}F'(x)=(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt)'=&-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt+\frac{f(x)}{x}\\=&-\frac{F(x)}{x}+\frac{f(x)}{x},\end{aligned}$$

另外，

$$|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt|\le\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|dt\le\frac{M\mu(\mathrm{supp}f)}{x}\to 0(x\to\infty),$$

故 $F(+\infty)=0$, 则由分部积分公式得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}F(x)^p dx=&xF(x)^p|_0^{+\infty}-p\int_0^{\infty}xF(x)^{p-1}F'(x)dx\\=&-p\int_0^{+\infty}xF(x)^{p-1}\left(-\frac{F(x)}{x}+\frac{f(x)}{x}\right)dx\\=&p\int_0^{+\infty}F(x)^p dx-p\int_0^{+\infty}F(x)^{p-1}f(x)dx\end{aligned}$$

整理之后用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}F(x)^p dx=&\frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty}F(x)^{p-1}f(x)dx\\\le&\frac{p}{p-1}[F(x)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}(\int_0^{\infty}f(x)^p dx)^{\frac{1}{p}}\\=&\frac{p}{p-1}[F(x)^p]^{\frac{1}{q}}\|f\|_p,\end{aligned}$$

在上式两边同时除以 $[\int_0^{+\infty}F(x)^p dx]^{\frac{1}{q}}$ 则 $\|F\|_p\le\frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

(c) 由推论 3.3.15 易证明 $(0,+\infty)$ 上的紧支撑函数在 $L_p(0,\infty)$ 中稠密[1]，则对任意 $f\in L_p(0,\infty)$, 存在 $(0,+\infty)$ 上的紧支撑函数 f_n 使得

$$\|f_n-f\|_p\to 0(n\to\infty).$$

设 $F_n(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)dt$, 则由 (b) 知 $\|F_n\|_p\le\frac{p}{p-1}\|f_n\|_p$, 且由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F(x)|=\frac{1}{x}|\int_0^x f_n(t)-f(t)dt|\le&\frac{1}{x}\|f_n-f\|_p x^{\frac{1}{q}}\\=&x^{-\frac{1}{p}}\|f_n-f\|_p,\end{aligned}$$

故 $F_n(x)\to F(x)$, $n\to\infty$, $\forall x\in(0,\infty)$. 又由 (b) 的结论知

$$\|F_n-F_m\|_p\le\frac{p}{p-1}\|f_n-f_m\|_p,$$

[1] 设 $f\in L_p(0,\infty)$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $R>0$, s.t. $\|f-f\mathbb{I}_{(0,R)}\|_p<\varepsilon/2$, 而且由推论 3.3.15 知存在 $(0,R)$ 上的有紧支撑的连续函数 f_R s.t.$\|f\mathbb{I}_{(0,R)}-f_R\|_p<\varepsilon/2$, 因此 $\|f-f_R\|_p\le\|f-f\mathbb{I}_{(0,R)}\|_p+\|f\mathbb{I}_{(0,R)}-f_R\|_p'<\varepsilon$.

则 (F_n) 是 $L_p(0,\infty)$ 中的 Cauchy 列,由 $L_p(0,\infty)$ 完备知存在 $G\in L_p(0,\infty)$ 使得$\|F_n-G\|_p\to 0$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\|F_n\|_p=\|G\|_p.$$

对下式

$$\|F_n\|_p\le \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p$$

两边取极限知 $\|G\|_p\le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$. 现在用 Fatou 引理 ($|F_n|$ 为可测正值函数列, 且逐点收敛到 $|F|$, 所以可用 Fatou 引理) 就得

$$\|F\|_p\le \lim_{n\to\infty}\|F_n\|_p=\|G\|_p\le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

(d) 设 f 在 $(0,\infty)$ 上连续，$f(x)>0,\forall x\in(0,1)$ 且 $f\in L_1(0,\infty)$(这样的函数很容易找到), 则 $G:=\int_0^\infty f(t)dx<\infty$ 且存在 $N>0$, 当 $x>N$ 时 $\int_0^x f(t)dt>G/2>0$, 那么

$$\int_0^\infty F(x)dx\ge\int_N^\infty \frac{1}{x}(\int_0^x f(t)dt)dx\ge \frac{G}{2}\int_N^\infty \frac{1}{x}=+\infty,$$

因此不存在常数 $C>0$, s.t. $\|F\|_1\le C\|f\|_1$.

(e) 设函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}\mathbb{I}_{[1,n]}(x)$, 则

$$\|f\|_p=(\int_1^n x^{-1}dx)^{\frac{1}{p}}=(\ln n)^{\frac{1}{p}},$$

且

$$\begin{aligned}\|F\mathbb{I}_{[1,n]}\|_p=(\int_1^n\left|\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1}{p}}dt\right|^p)^{1/p}=&(\int_1^n\left|\frac{1}{x}\frac{p}{p-1}(x^{1-\frac{1}{p}}-1)\right|^p dx)^{\frac{1}{p}}\\ =&\left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^n\frac{1}{x^p}(x^{1-\frac{1}{p}}-1)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\ =&\left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^n\frac{1}{x}(1-x^{\frac{1}{p}-1})^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

又由于

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}F(x), & 1\le x\le n\\ \frac{1}{x}\int_1^n t^{-\frac{1}{p}}dt, & x>n\end{cases}$$

这意味着 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ge F\mathbb{I}_{[1,n]}$. 设 $F_n(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, 则 $\|F_n\|_p\ge\|F\mathbb{I}_{[1,n]}\|_p$. 若题设成立，则

$$C\ge\frac{\|F_n\|_p}{\|f\|_p}\ge\frac{\|F\mathbb{I}_{[1,n]}\|_p}{\|f\|_p}\ge\frac{\left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^n\frac{1}{x}(1-x^{\frac{1}{p}-1})^p dx\right]^{\frac{1}{p}}}{(\ln n)^{\frac{1}{p}}}=(h(n))^{\frac{1}{p}},$$

其中 $h(n)=\frac{(\frac{p}{p-1})^p\int_0^n\frac{1}{x}(1-x^{\frac{1}{p}-1})^p dx}{\ln n}$, 则 $\lim_{n\to\infty}h(n)=\lim_{A\to\infty}h(A)$, 由洛必达法则知

$$\lim_{A\to\infty}h(A)=\lim_{A\to\infty}\frac{\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\frac{1}{A}(1-A^{\frac{1}{p}-1})^p}{\frac{1}{A}}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p,$$

所以使得 (*) 成立的常数 C 必须满足 $C\ge\frac{p}{p-1}$. □

1.4.2 [习题课] 设 $C(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续有界的函数 $x(t)$ 全体，对 $\forall x \in C(0,1]$. 令 $\|x\| = \sup_{0<t\leq 1}|x(t)|$, 求证：

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 空间上的范数；

(2) ℓ^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间是等距同构的。

证明. (1) 验证 $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 空间上的范数：

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{0<t\leq 1}|x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0, \forall t \in (0,1]$.
- $\|\lambda x\| = \sup_{0<t\leq 1}|\lambda x(t)| = |\lambda|\sup_{0<t\leq 1}|x(t)| = |\lambda|\|x\|$.
- $\|x+y\| = \sup_{0<t\leq 1}|x(t)+y(t)| \leq \sup_{0<t\leq 1}|x(t)| + \sup_{0<t\leq 1}|y(t)| = \|x\| + \|y\|$.

(2) 设映射 $\Phi : \ell^\infty \to C(0,1]$, $(x_k) \mapsto f = \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{x_{k+1}-x_k}{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}}(t-\frac{1}{k}) + x_k\right]\mathbb{I}_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}$, 即 Φ 把序列 (x_n) 映射成折线函数，这个折线函数把点 $(1,x_1),(\frac{1}{2},x_2),\cdots,(\frac{1}{n},x_n),\cdots$ 用线段连接起来，易证 Φ 是线性映射，又因为

- 若 $f(t) = 0, \forall t \in (0,1]$, 取 $t = \frac{1}{k}$ 知 $x_k = 0, \forall k \geq 1$, 故 Φ 是单射。
- 显然 $\|f\| = \max_k |x_k|$(分段折线函数每一段上的最大绝对值在端点取到)。

故 ℓ^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间是等距同构的。 □

1.4.3 在 $C^1[a,b]$ 中，令

$$\|f\|_1 = (\int_a^b (|f|^2 + |f'|^2)dx)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall f \in C^1[a,b]).$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数。

(2) 问 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 是否完备。

证明. (1) 验证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数:

- $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (|f|^2 + |f'|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
- $\|\lambda f\|_1 = (\int_a^b |\lambda f|^2 + |\lambda f'|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|(\int_a^b |f|^2 + |f'|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|f\|_1$.
- 三角不等式的证明需要两次次使用 Hölder 不等式：往证

  $$\|f+g\|_1 = (\int_a^b (|f+g|^2 + |f'+g'|^2)dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b (|f|^2+|f'|^2)dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b (|g|^2+|g'|^2)dx)^{\frac{1}{2}}$$

  上式两边同时平方，整理之后等价于

  $$\int_a^b |f||g| + |f'||g'|dx \leq (\int_a^b |f|^2 + |f'|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b |g|^2 + |g'|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

  利用 Hölder 不等式，对任意 $x \in [a,b]$,

  $$|f(x)||g(x)| + |f'(x)||g'(x)| \leq (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)^{\frac{1}{2}}(|g(x)|^2 + |g'(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\int_a^b |f||g|+|f'||g'|dx \le \int_a^b (|f|^2+|f'|^2)^{\frac{1}{2}}(|g|^2+|g'|^2)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$\le (\int_a^b (|f|^2+|f'|^2)dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b (|g|^2+|g'|^2)dx)^{\frac{1}{2}}$$

这里第二个不等式再次利用了 Hölder 不等式，所以 $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1+\|g\|_1$ 成立。综上，$\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数。

(2) 不完备。设 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$. 下面验证 (f_n) 是 $C^1[-1,1]$ 中的 Cauchy 列，但 $f_n(x)\to|x|\notin C^1[-1,1]$.

求 f_n 的导数得 $f_n'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}, -1\le x\le 1$. 不妨设 $n<m$, 则

$$\|f_n-f_m\|_1^2=\int_{-1}^1 |f_n-f_m|^2+|f_n'-f_m'|^2dx$$
$$=\int_{-1}^1 (\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}})^2dx+\int_{-1}^1 (\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}})^2dx=\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

其中

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^1 (\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}})^2dx$$
$$=\int_{-1}^1 2x^2-2\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\le\int_{-1}^1\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}dx=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2}$$

因此 $I\to 0(n,m\to\infty)$.

$$\mathrm{II}=\int_{-1}^1 x^2\frac{(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}})^2}{(x^2+\frac{1}{n^2})(x^2+\frac{1}{m^2})}dx$$
$$=2\int_0^1 x^2\frac{(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}})^2}{(x^2+\frac{1}{n^2})(x^2+\frac{1}{m^2})}dx$$
$$\le\frac{2}{n^4}\int_0^1\frac{dx}{(x^2+\frac{1}{n^2})(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x)^2}$$
$$=\frac{2}{n^4}\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^1$$
$$\le\frac{2}{n^4}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{dx}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{n^4}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{dx}{x^4}=\frac{2}{n}+\frac{2(n^3-1)}{3n^4}\to 0(m,n\to\infty),$$

其中第一个不等式是因为

$$\frac{x^2(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}})^2}{x^2+\frac{1}{m^2}}\le\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}}\right)^2\le\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x}\right)^2.$$

所以 (f_n) 是 $(C^1[-1,1], \|\cdot\|_1)$ 上的 Cauchy 列。

下面证明 (f_n) 在 $(C^1[-1,1], \|\cdot\|_1)$ 中不收敛。反证法，若 (f_n) 收敛于 $C^1[-1,1]$ 某个元素 f, 即 $\|f_n - f\|_1 \to 0$, 那么

$$\int_{-1}^{1} |f_n - f|^2 dx \leq \|f_n - f\|_1^2 \to 0,$$

而由 f_n 的定义知，对任意 $x \in [-1,1]$, $\lim_n f_n(x) = |x|$, 由 Fatou 引理

$$\int_{-1}^{1} ||x| - f(x)|^2 dx \leq \lim_n \int_{-1}^{1} |f_n - f|^2 dx = 0,$$

这意味着 $f(x) = |x|, \forall x \in [-1,1]$, 但 $|x| \notin C^1[-1,1]$, 所以 Cauchy 列 (f_n) 不收敛，因此 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 不完备。 $\square$

作业纠错: 错误：$\|u^{-1}\| \leq \frac{1}{\|u\|}$.

纠正：

$$1 = \|I_E\| = \|u \circ u^{-1}\| \leq \|u\| \|u^{-1}\| \Rightarrow \|u^{-1}\| \geq \frac{1}{\|u\|}.$$

错误：$\frac{\cos x}{x} \mathbb{I}_{[1,\infty)} \in L_1(\mathbb{R})$, $\frac{\sin x}{x^{1/2}} \mathbb{I}_{[1,\infty)} \in L_1(\mathbb{R})$.

纠正: 对任意 $n \geq 1$, 在区间 $[n\pi - \frac{1}{3}\pi, n\pi + \frac{1}{3}\pi]$ 上 $|\cos x| \geq \frac{1}{2}$, 所以

$$\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi + \frac{1}{3}\pi} \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{3}} = \infty.$$

故 $\frac{\cos x}{x} \mathbb{I}_{[1,\infty)} \notin L_1(\mathbb{R})$, 同理可证 $\frac{\sin x}{x^{1/2}} \mathbb{I}_{[1,\infty)} \notin L_1(\mathbb{R})$.

4 第四章习题

2. [作业] 设 A 是 ℓ_2 的子集，其元素 $x = (x_n)_{n \geq 1}$ 满足 $|x_n| \leq \frac{1}{n}, n \geq 1$, 证明 A 是紧集。

证明. 我们知道 ℓ_2 是度量空间且易证 A 是闭集 (故完备), 为证明 A 是紧集, 只需证明 A 还是预紧的。对任意 $\varepsilon > 0$, 当 N 充分大时 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, 则对于任意 $x = (x_n)_{n \geq 1} \in A$, $\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. 按上述方式固定 N, 设 $F = \{(x_1, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots), x \in \ell_2\}$, 则 F 为有限维空间。令 $B = \{(x_1, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots), x \in A\} \subset F$, 则 B 是 F 中闭的且对于 B 中的任意元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots)$, 有 $\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \leq 1 + 1 = 2$, 故 B 是 F 中的有界闭集, 则紧，故存在 B 中的有限个点 $y^1, \cdots, y^N$,

$$y^j = (y_1^j, y_2^j, \cdots, y_N^j, 0, 0, \cdots), j = 1, 2, \cdots, K,$$

使得 $B \subset \cup_{j=1}^{k} B(y^j, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$, 则 $A \subset \cup_{j=1}^{K} B(y^j, \varepsilon)$, 故 A 预紧，因而 A 紧。 $\square$

3. 设E和F是内积空间H的两个向量子空间. 证明存在常数$\alpha\geq 0$ s.t. ✓ 43.4

$$|\langle x,y\rangle| = \alpha\|x\|\|y\|,\quad \forall x\in E,\ \forall y\in F$$

的充分必要条件是或者$\dim E=\dim F=1$，或者$\alpha=0$（即E和F正交）.

证明："$\Leftarrow$" 若E与F正交，则 $|\langle x,y\rangle|=0$，$\forall x\in E$，$\forall y\in F$.

若E与F不正交且$\dim E=\dim F=1$. 设$E=$ ~~{Bf}~~ $\{\beta f\}$，$F=\{\gamma g\}$，这里$f\in E$，$g\in F$取成单位向量. 对$\forall$ ~~对~~ $x\in E$，$y\in F$，设$x=\beta f$，$y=\gamma g$ 则

$$|\langle x,y\rangle| = |\beta||\gamma||\langle f,g\rangle| = |\beta||\gamma|\,\theta\|f\|\|g\| = \theta\|\beta f\|\|\gamma g\| = \theta\|x\|\|y\|$$

其中$\theta=\dfrac{|\langle f,g\rangle|}{\|f\|\|g\|}>0$，题设得证。

"$\Rightarrow$" 若$\alpha=0$，则E与F正交。

若$\alpha\neq 0$，则E与F不正交，则存在E中的单位向量x_1，F中的单位向量y，s.t. $\langle x_1,y\rangle\neq 0$，且由假设知$|\langle x_1,y\rangle|=\alpha\|x_1\|\|y\|=\alpha$.

反证法，若$\dim E>1$，则存在E中的单位向量$x_2\perp x_1$. 则设$\xi_1=\dfrac{\langle x_1,y\rangle}{|\langle x_1,y\rangle|}$，$\xi_2=\dfrac{\langle x_2,y\rangle}{|\langle x_2,y\rangle|}$

则ξ_1,ξ_2为模为1的复数，故$\|\xi_1x_1+\xi_2x_2\|=\sqrt2\|x_1\|$，那么

$$|\langle \xi_1x_1+\xi_2x_2,y\rangle| = \sqrt2\alpha\|x_1\|\|y\| = \sqrt2\alpha$$

同时$|\langle\xi_1x_1+\xi_2x_2,y\rangle| = |\xi_1\langle x_1,y\rangle+\xi_2\langle x_2,y\rangle| = |\langle x_1,y\rangle|+|\langle x_2,y\rangle| = 2\alpha$ 故$2=\sqrt2$，矛盾。 ▨

4. 设E和F是内积空间H的两个向量子空间. 假设E和F都不等于集合$\{0\}$. 定义E和F之间的夹角为θ为：$\cos\theta=\sup\left\{\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}: x\in E,\ y\in F\right\}$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

证明：$\theta>0$当且仅当存在一个常数$c>0$，s.t.

$$\|x+y\|^2\geq c(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \forall x\in E,\ \forall y\in F.$$

证明：首先注意到$\theta>0\Leftrightarrow\cos\theta<1$

"$\Rightarrow$" 若$\cos\theta<1$，则对$\forall x\in E$，$y\in F$. $\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\leq\cos\theta<1\Rightarrow|\langle x,y\rangle|\leq\cos\theta\|x\|\|y\|$，$\forall x\in E,\forall y\in F$. 则

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \geq \|x\|^2+\|y\|^2-2|\langle x,y\rangle| \geq \|x\|^2+\|y\|^2-2\cos\theta\|x\|\|y\|\\ &\geq \|x\|^2+\|y\|^2-\cos\theta(\|x\|^2+\|y\|^2)\\ &=(1-\cos\theta)(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

取$c=1-\cos\theta$即可。

"$\Leftarrow$" 设$x\neq0$，$y=0$. 由假设知$\|x\|^2\geq c\|x\|^2\Rightarrow c\leq 1$. …?（反证法?）

5. 设H是Hilbert空间，(A_n)是H中递减的非空闭子集列. 任取$x\in H$. 令$d_n(x)=d(x,A_n)$

且$d(x)=\lim\limits_{n\to\infty} d_n(x)$.

(a) 证明: 若对某一个$x\in H$, 有$d(x)<\infty$, 则对所有的$x\in H$, $d(x)<\infty$. 我们在下面假设该命题成立, 并且$A(x,\varepsilon,n)$表示中心在x, 半径为$d(x)+\varepsilon$的闭球与A_n的交集, 即

$$A(x,\varepsilon,n)=A_n\cap\overline{B}(x,d(x)+\varepsilon).$$

(b) 证明
$$\lim_{\varepsilon\to0,n\to\infty}\operatorname{diam}(A(x,\varepsilon,n))=0$$

(c) 证明所有A_n的交集A非空且$d(x)=d(x,A)$.

证明: (a) 设$x\in H$. s.t. $d(x)<\infty$ 下证对$\forall y\in H$, $d(y)<\infty$.

考虑子集A_n, $n\geq1$. 对$\forall z\in A_n$, 由于$d(y,z)\leq d(y,x)+d(x,z)$ ⇒

$$\inf_{z\in A_n} d(y,z)\leq d(y,x)+\inf_{z\in A_n} d(x,z)$$

即 $d_n(y)\leq d(y,x)+d_n(x)\leq d(y,x)+d(x)$, 故 $\lim\limits_n d_n(y)<\infty$.

(b) 设$y,z\in A_n\cap\overline{B}(x,d(x)+\varepsilon)$. 则

$$d_n(x)\leq d(x,y)\leq d(x)+\varepsilon$$
$$d_n(x)\leq d(x,z)\leq d(x)+\varepsilon$$

且由于A_n为凸集知 $\frac{y+z}{2}\in A_n$. 则

$$\|y-z\|^2=2(\|x-y\|^2+\|x-z\|^2)-\|2(x-\tfrac{y+z}{2})\|^2 \text{（平行四边形法则）}$$
$$\leq 2((d(x)+\varepsilon)^2+(d(x)+\varepsilon)^2)-4\|x-\tfrac{y+z}{2}\|^2$$
$$\leq 4(d(x)+\varepsilon)^2-4d_n(x)$$
$$\leq 4(d(x)+\varepsilon)^2-4(d(x)-\varepsilon)^2 \text{（当n充分大）}$$
$$=16\,d(x)\cdot\varepsilon$$

故 $\operatorname{diam}(A(x,\varepsilon,n))\leq 16d(x)\varepsilon$（当n充分大）⇒ $\lim\limits_{\varepsilon\to0,n\to\infty}\operatorname{diam}(A(x,\varepsilon,n))=0$.

(c) 由(b)的证明过程, 取$\varepsilon=\frac1n$ 知 $\operatorname{diam}(A(x,\frac1n,n))\leq16d(x)\cdot\frac1n$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A(x,\tfrac1n,n))=0$$

令$B_n=A(x,\frac1n,n)$, 则(B_n)是H中递减的非空闭子集列且$\lim\limits_n\operatorname{diam}(B_n)=0$. 则由定理2.2.6知$\bigcap\limits_{n\geq1}B_n$是单点集, 设$\bigcap\limits_{n\geq1}B_n=\{x_0\}$. 则由$\bigcap\limits_{n\geq1}B_n\subset\bigcap\limits_{n\geq1}A_n=A$知A非空且$d(x,x_0)\geq d(x,A)$.

故为证明$d(x)\geq d(x,A)$只需证$d(x)\geq d(x,x_0)$.

对$\forall n\geq1$, 取$y_n\in A_n$ s.t. $d_n(x)-\frac1n>d(x,y_n)$ 则 $d(x)-\frac1n\geq d_n(x)-\frac1n>d(x,y_n)$ (*)

设$1\leq n<m$, 由于$y_m\in B_m\subset B_n$ 则 $\limsup\limits_{n\to\infty,m\to\infty}d(y_n,y_m)\leq\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(A_n)=0$

故$\{y_n\}$是H中的Cauchy序列，由H是完备的知$\exists y_0\in H$ s.t. $\lim_n y_n = y_0$, 4.5

又由B_n是闭集，知$y_0\in B_n, n\geq 1$ 即$y_0\in \bigcap_{n\geq 1} B_n = \{x_0\} \Rightarrow y_0 = x_0$ 故$\lim_n y_n = x_0$.

在(*)中令$n\to\infty$则 $d(x)\geq d(x,x_0)$，故$d(x)\geq d(x,A)$.

$d(x)\leq d(x,A)$易证，实际上，由于$A_n\supset A$，故$d(x,A_n)\leq d(x,A)$即$d_n(x)\leq d(x,A)$

则 $d(x)=\lim_n d_n(x)\leq d(x,A)$. 因此$d(x)=d(x,A)$. ▨

⑥设H是内积空间，$x_n, x\in H$，并假设

$$\lim_n \|x_n\| = \|x\| \text{ 且 } \lim_n \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall y\in H$$

证明$\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

证明：设数域$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 则 $\|x_n-x\|^2 = \|x_n\|^2+\|x\|^2-2\langle x_n, x\rangle \to \|x\|^2+\|x\|^2-2\langle x,x\rangle = 0 \quad (n\to\infty)$

故$\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

设数域$\mathbb{K}=\mathbb{C}$，由极化恒等式$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x+i^k y\|^2$，$\forall x,y\in H$知

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n + x\|^2 + i\|x_n + ix\|^2 - i\|x_n - ix\|^2 - 4\langle x_n, x\rangle$$

$$= \|x_n\|^2+\|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + i(\|x_n\|^2-\|x\|^2+2\mathrm{Re}(\langle x_n, ix\rangle) - i(\|x_n\|^2-\|x\|^2-2\mathrm{Re}\langle x_n, ix\rangle) \quad -4\langle x_n,x\rangle$$

$$= \|x_n\|^2+\|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + i(\|x_n\|^2-\|x\|^2+2\mathrm{Im}\langle x_n, x\rangle) - i(\|x_n\|^2-\|x\|^2-2\mathrm{Im}\langle x_n, x\rangle) \quad -4\langle x_n,x\rangle$$

再由于$\lim_n \mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle = \|x\|^2$，$\lim_n \mathrm{Im}\langle x_n, x\rangle = 0$知

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2+\|x\|^2+2\|x\|^2+i(\|x\|^2-\|x\|^2)-i(\|x\|^2-\|x\|^2)-4\|x\|^2 = 0$$ ▨

7. 设(x_n)是Hilbert空间H中的有界序列. 证明存在(x_n)的子序列(x_{n_k})，使得对任意$y\in H$，有$\lim_k \langle y, x_{n_k}\rangle = \langle y, x\rangle$.

6. [作业] 设 H 是内积空间，$x_n, x \in H$, 并假设

$$\lim_n \|x_n\| = \|x\| \text{ 且} \lim_n \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle, \forall y \in H,$$

证明 $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

证明. 设数域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 则

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x \rangle \to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x \rangle (n \to \infty),$$

故 $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

设数域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 则

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n, x \rangle \to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, x \rangle = 0 (n \to \infty).$$

故 $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. □

4.10 ✓ 扫描

(10) (a) 设 H 是 Hilbert 空间，$D_n=\{-1,1\}^n$. 证明

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_n)\in D_n}\|\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2,\quad \forall x_1,x_2,\dots,x_n\in H$$

(b) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. 并假设有一个 X 上的内积范数 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$. 证明存在正常数 a 和 b 使得

$$a\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\le\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|^2\le b\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2,\quad\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in X.$$

(c) 设 $1\le p\ne2\le\infty$，证明空间 c_0, ℓ_p 和 $L_p(0,1)$ 没有等价的内积范数。

证明：(a)

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_n)\in D_n}\|\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n\|^2=\frac{2^n}{2^n}(\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)+\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_n)\in D_n}\sum_{i\ne j}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle x_i,x_j\rangle$$

由对称性知上式右端第二项为 0，故结论成立。

(b) 设内积范数 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$，则 ∃ 常数 $c, d>0$ s.t.

$$c|x|\le\|x\|\le d|x|,\quad\forall x\in H.$$

故 $$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|^2\le\frac{d^2}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big|^2=d^2(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)\le\frac{d^2}{c^2}(\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)$$

同理 $$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|^2\ge\frac{c^2}{d^2}(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)$$

取 $a=\frac{c^2}{d^2}$，$b=\frac{d^2}{c^2}$ 即可.

(c) 对于 c_0：对 $\forall n\ge1$，考虑向量 $e_1,\dots,e_n$. 则 $\|e_k\|=1$; $k=1,\dots,n$ 且 $\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_ke_k\|^2=1$.

反证法. 若 $\|\cdot\|$ 有等价的内积范数，则由 (b) ∃ $a,b>0$ s.t.

$$an=a\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2\le1\le b\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2=bn$$

即 $an\le1\le bn$，$\forall n\ge1$，不可能.

对于 ℓ_∞ 也同理.

对于 ℓ_p，$1\le p\ne2<\infty$. 则 $\|e_k\|_p=1$，$k=1,2,\dots,n$ 且 $\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_ke_k\|_p^2=n^{\frac{2}{p}}$，若 $\|\cdot\|_p$ 有等价的内积范数，

则 $an\le n^{\frac{2}{p}}\le bn\Rightarrow a\le n^{\frac{2}{p}-1}\le b$，$\forall n\ge1$. 则 $\frac{2}{p}-1=0\Rightarrow p=2$，矛盾.

对于 $L_p(0,1)$. 考虑 $x_k=nI_{(\frac{k}{n^p},\frac{k+1}{n^p})}$，$k=0,1,\dots,n-1$ 则 $\|x_k\|_p=1$. 且

$$\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|_p^2=(1+1+\cdots+1)^{\frac{2}{p}}=n^{\frac{2}{p}}$$

若 $\|\cdot\|_p$ 有等价的内积范数则 ∃ $a,b>0$ s.t. $an\le n^{\frac{2}{p}}\le bn$. 与前面一样得 $p=2$. 矛盾。

11. [作业] 设 (C_n) 是 Hilbert 空间 H 中的一个递增的非空闭凸子集列，C 是所有 C_n 的并集的闭包。证明：$P_C(x) = \lim_{n\to\infty} P_{C_n}(x), \forall x \in H$.

证明. 先证 $P_{C_n}(x)$ 依范数收敛。由于 C_n 递增则序列 $(\|x - P_{C_n}(x)\|)_{n\geq 1}$ 单调递减有下界故收敛，则对于任意 $n, m \geq 1$, 不妨设 $n < m$, 则

$$\begin{aligned}
\|P_{C_n}(x) - P_{C_m}(x)\|^2 =& \|P_{C_n}(x) - x - (P_{C_m}(x) - x)\|^2 \\
=& 2(\|P_{C_n}(x) - x\|^2 + \|P_{C_m}(x) - x\|^2) - \|P_{C_n}(x) + P_{C_m}(x) - 2x\|^2 \\
=& 2(\|P_{C_n}(x) - x\|^2 + \|P_{C_m}(x) - x\|^2) - 4\|\frac{P_{C_n}(x) + P_{C_m}(x)}{2} - x\|^2 \\
\leq& 2(\|P_{C_n}(x) - x\|^2 + \|P_{C_m}(x) - x\|^2) - 4\|P_{C_m}(x) - x\|^2 \\
=& 2(\|P_{C_n}(x) - x\|^2 - \|P_{C_m}(x) - x\|^2) \to 0 (n, m \to \infty),
\end{aligned}$$

其中第二个等式是由于平行四边形法则,不等式是由于 $\frac{P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)}{2} \in C_m$. 因此 $(P_{C_n}(x))_{n\geq 1}$ 是 H 中的 Cauchy 列，H 完备，故 $(P_{C_n}(x))_{n\geq 1}$ 收敛于某个 $y \in H$, 即 $\lim_{n\to\infty} P_{C_n}(x) = y$. 又对于任意 $n \geq 1$,

$$\mathrm{Re}\langle x - P_{C_n}(x), z - P_{C_n}(x)\rangle \leq 0, \forall z \in C_n,$$

令 $n \to \infty$ 由内积的连续性得

$$\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \forall z \in C_n, \forall n \geq 1,$$

进一步

$$\mathrm{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \forall z \in C,$$

故 $y = P_C(x)$, 因此 $P_C(x) = \lim_{n\to\infty} P_{C_n}(x)$, $\forall x \in H$. □

11. 设(C_n)是Hilbert空间H中的一个递增的非空闭凸子集列，C是所有C_n的并集的闭包. 证明: $P_C(x)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{C_n}(x)$, $\forall x\in H$.

证明: 先证$P_{C_n}(x)$依范数收敛. 由于C_n递增则序列$(\|x-P_{C_n}(x)\|)_{n\geq1}$单调递减有下界故收敛. 则对于$\forall n,m\geq1$, 不妨设$n<m$, 有

$$\|P_{C_n}(x)-P_{C_m}(x)\|^2=\|P_{C_n}(x)-x-(P_{C_m}(x)-x)\|^2$$
$$=2(\|P_{C_n}(x)-x\|^2+\|P_{C_m}(x)-x\|^2)-\|P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)-2x\|^2 \text{(平行四边形法则)}$$
$$=2(\|P_{C_n}(x)-x\|^2+\|P_{C_m}(x)-x\|^2)-4\left\|\frac{P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)}{2}-x\right\|^2$$
$$\leq 2(\|P_{C_n}(x)-x\|^2+\|P_{C_m}(x)-x\|^2)-4\|P_{C_m}(x)-x\|^2 \text{(这是由于}\frac{P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)}{2}\in C_m)$$
$$=2\|P_{C_n}(x)-x\|^2-2\|P_{C_m}(x)-x\|^2\to0\quad(n,m\to\infty)$$

故$(P_{C_n}(x))$是H中的Caushy列, 故收敛于某个$y\in H$. 即$\lim\limits_{n\to\infty}P_{C_n}(x)=y$.

又由于对$\forall n\geq1$, $\quad \mathrm{Re}\langle x-P_{C_n}(x),z-P_{C_n}(x)\rangle\leq0,\ \forall z\in C_n$

令$n\to\infty$由内积的连续性得 $\mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leq0,\ \forall z\in C_n,\forall n\geq1.$

进一步 $\quad \mathrm{Re}\langle x-y,z-y\rangle\leq0,\ \forall z\in C.$

故$y=P_C(x)$, 因此$P_C(x)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$, $\forall x\in H$. ▨

12. 设H是内积空间. $(x_1,\cdots,x_n)$是H中的任一向量组, 称矩阵$(\langle x_i,x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$的行列式为向量组$(x_1,\cdots,x_n)$的Gram行列式, 记作$G(x_1,\cdots,x_n)$.

(a) 证明$G(x_1,\cdots,x_n)\geq0$; 且$G(x_1,\cdots,x_n)>0$当且仅当向量组$(x_1,\cdots,x_n)$线性独立。

(b) 假设向量组$(x_1,\cdots,x_n)$线性独立. 令$E=\mathrm{span}(x_1,\cdots,x_n)$. 证明
$$d(x,E)^2=\frac{G(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)}{G(x_1,x_2,\cdots,x_n)},\quad\forall x\in H.$$

证明: (a) 对任意向量$(k_1,\cdots,k_n)\in\mathbb{C}^n$,
$$\sum_{i,j=1}^n\bar{k}_ik_j\langle x_i,x_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^n\bar{k}_ix_i,\sum_{j=1}^n\bar{k}_jx_j\rangle\geq0$$
故$G(x_1,\cdots,x_n)\geq0$.

下证$G(x_1,\cdots,x_n)>0\iff$向量组$(x_1,\cdots,x_n)$线性独立。

"$\Rightarrow$"反证法, 若不独立, 则存在$\mathbb{C}$中不全为0的k_i, $i=1,\cdots,n$ s.t. $\sum_{i=1}^n\bar{k}_ix_i=0$,
则$\sum_{i,j=1}^n\bar{k}_ik_j\langle x_i,x_j\rangle=0$, 与$G(x_1,\cdots,x_n)>0$矛盾。

"$\Leftarrow$"反证法, 若不然, 则存在$\mathbb{C}$中不全为0的k_i, $i=1,\cdots,n$ s.t. $\sum_{i,j=1}^n\bar{k}_ik_j\langle x_i,x_j\rangle=0$.
则$\sum_{i=1}^n\bar{k}_ix_i=0$, 故$(x_1,\cdots,x_n)$线性相关, 矛盾。

(b) 由定义 $d(x,E)^2=\inf_{k\in\mathbb{R}^n}\|x-\sum_{i=1}^n k_ix_i\|^2$，记 $b=(\langle x_1,x\rangle,\dots,\langle x_n,x\rangle)^t$，

令 $f(k_1,\dots,k_n)=\|x-\sum_{i=1}^n k_ix_i\|^2=\|x\|^2-2\sum_{i=1}^n k_i\langle x_i,x\rangle+\sum_{i,j=1}^n\langle x_i,x_j\rangle k_ik_j$

$$=\|x\|^2-2b^tk+k^tGk\ ,\quad k\in\mathbb{R}^n$$

这是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，则 $d(x,E)^2=\inf_{k\in\mathbb{R}^n}f(k_1,\dots,k_n)$. 计算 f 的梯度 ∇f 得

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial k_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial k_n}\right)^t=-2b+2Gk$$

令 $\nabla f=0$ 得 $k=G^{-1}b$，故 f 在 $k=G^{-1}b$ 处取最小值，此时

$$f(k)=\|x\|^2-b^tG^{-1}b$$

故 $d(x,E)^2=\|x\|^2-b^tG^{-1}b$. 下面计算 $G(x,x_1,\dots,x_n)$.

$$G(x,x_1,\dots,x_n)=G(x_1,x_2,\dots,x_n,x)=\left|\begin{pmatrix}G(x_1,\dots,x_n) & b\\ b^t & \|x\|^2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}G(x_1,\dots,x_n) & b\\ 0 & \|x\|^2-b^tG^{-1}(x_1,\dots,x_n)b\end{pmatrix}\right|$$

$$=G(x_1,\dots,x_n)\left(\|x\|^2-b^tG^{-1}(x_1,\dots,x_n)b\right)$$

$$=G(x_1,\dots,x_n)\,d(x,E)^2$$

故 $d(x,E)^2=\dfrac{G(x,x_1,\dots,x_n)}{G(x_1,x_2,\dots,x_n)}$.

13. 设 $E=C([0,1])$ 上装备有如下的内积

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

并设 E_0 表示在 $[0,1]$ 上积分为0的函数组成的E的向量子空间. 考虑E的向量子空间: $H=\{f\in E: f(1)=0\}$ 且 $H_0=E_0\cap H$.

(a) 验证 H_0 是 H 的闭的真向量子空间.

(b) 设 $h(t)=t-\frac12$，$t\in[0,1]$. 证明

(i) $E=\mathrm{span}(H,h)$ 且有 $E_0=\mathrm{span}(H_0,h)$;

(ii) h 属于 H_0 在E中的闭包.

(c) 证明 $H_0^{\perp}=\{0\}$. 解释所得结果蕴含的意义。

证明: (a). 由于 E_0 和H均为线性的，则 $E_0\cap H$ 仍为线性的.

~~显然……~~. 设 $(f_n)\subset E_0$. $\|f_n-f\|\to0$，则

$$\left|\int f(t)dt\right|=\left|\int f-f_n\,dt+\int f_n\,dt\right|=\left|\int f-f_n\,dt\right|\le\|f-f_n\|\to0\ (\text{Caushy-schwarz 不等式})$$

故 $\int f(t)dt=0$，即 $f\in E_0$. 故 E_0 是闭的. 所以 $H_0=E_0\cap H$ 是H的闭向量子空间

13. 设 $E=C([0,1])$ 上装备有如下内积

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

并设 E_0 表示再 $[0,1]$ 上积分为 0 的函数组成的 E 的向量子空间。考虑 E 的向量子空间: $H=\{f\in E:f(1)=0\}$ 且 $H_0=E_0\cap H$.

(a) 验证 H_0 是 H 的闭的真向量子空间。

(b) 设 $h(t)=t-\frac{1}{2},t\in[0,1]$, 证明

(i) $E=\mathrm{span}(H,h)$, 且有 $E_0=\mathrm{span}(H_0,h)$;

(ii) h 属于 H_0 在 E 中的闭包。

(c) 限制在 H 中讨论，证明 $H_0^{\perp}=\{0\}$, 解释所得结果蕴含的意义。

证明. (a) 由于 E_0 和 H 均为线性的，则 $E_0\cap H$ 也是线性的。设 $(f_n)\subset E_0$, $\|f_n-f\|\to 0$, 则由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$|\int f(t)dt|=|\int f-f_ndt+\int f_ndt|=|\int f-f_ndt|\leq\|f-f_n\|_2\to 0$$

故 $\int f(t)dt=0$, 即 $f\in E_0$, 故 E_0 是 E 中的闭子空间，所以 $H_0=E_0\cap H$ 是 H 中的闭向量子空间。

设 $f(t)=(t-1)^2$, 则 $f\in H$, 但 $f\notin H_0$, 故 H_0 真包含于 H.

(b)

(i) 对任意 $f\in E$, $f-2f(1)h\in H$, 故 $E=\mathrm{span}(H,h)$.

对任意 $f\in E_0$, $f-2f(1)h\in H$ 且 $f-2f(1)h\in E_0$, 故 $f-2f(1)h\in H_0$, 所以 $E_0=\mathrm{span}(H_0,h)$.

(ii) 设 f_n 为连接 $(0,0),(\frac{1}{n},h(\frac{1}{n})),(1-\frac{1}{n},h(1-\frac{1}{n})),(1,0)$ 的折线函数，则由于

$$|h(t)-f_n(t)|\leq 1\Rightarrow|h(t)-f_n(t)|^2\leq|h(t)-f_n(t)|,\forall t\in[0,1],$$

故

$$\int_0^1|h-f_n|^2dt\leq\int_0^1|h-f_n|dt=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2n}\to 0(n\to\infty),$$

故 $\|f_n-h\|_2\to 0$, 且 $f_n\in H_0$, 因此 h 属于 H_0 在 E 中的闭包。

(c) 这里限制在 H 中讨论，由 (b) 知 $E_0\subset\overline{H_0}$。任取 $f\in H_0^{\perp}$, 则 $f\perp\overline{H_0}$. 令 $g=f-\int_0^1 f(t)dt$, 则 $g\in E_0\subset\overline{H_0}$, 则

$$\langle f,g\rangle=0\Rightarrow\langle f,f\rangle-|\int_0^1 f(t)dt|^2=\|f\|^2-|\langle f,1\rangle|^2=0,\tag{5}$$

又由 Cauchy-Schwarz 不等式的等式条件，这意味着存在常数 C, s.t. $f\equiv C$, 又因为 $f(1)=0$, 故 $f\equiv 0$.

本题说明当所讨论的内积空间不完备时，正交分解定理不一定成立。实际上，若成立，则 $H=\overline{H_0}\oplus H_0^{\perp}=\overline{H_0}=H_0$, 这与 (a) 矛盾。 □

15. (a) 设 E 和 F 是 Hilbert 空间 H 的两个正交向量子空间。证明 $E+F$ 是闭的当且仅当 E 和 F 都是闭的。

(b) (e_n) 表示 ℓ_2 中的标准正交基，设 E 是 $\{e_{2n}, n\geq 1\}$ 的线性扩张的闭包，而 F 是 $\{e_{2n}+\frac{1}{n}e_{2n+1} : n\geq 1\}$ 的线性扩张的闭包。证明 $E\cap F=\{0\}$ 并且 $E+F$ 在 ℓ_2 中不是闭的。

证明. (a) "$\Leftarrow$", 设 E 和 F 都是闭的，若有序列 $(z_n)\subset E+F$, $z_n=x_n+y_n$, $x_n\in E, y_n\in F$, $z_n\to z(n\to\infty)$, 想证 $z\in E+F$.

由于 $\|x_n+y_n-z\|^2\to 0$, 则 $\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|^2\to 0(n,m\to\infty)$, 故

$$\begin{aligned}\|x_n-x_m\|^2 =&\|x_n+y_n-y_n-(x_m+y_m)+y_m\|^2\\ =&\|x_n+y_n-(x_m+y_m)-(y_n-y_m)\|^2\\ =&\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|^2+\|y_n-y_m\|^2-2\mathrm{Re}\langle x_n+y_n-(x_m+y_m), y_n-y_m\rangle\\ =&\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|^2-\|y_n-y_m\|^2\end{aligned}$$

故 $\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2=\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|^2\to 0(n,m\to\infty)$, 这意味着 (x_n) 与 (y_n) 都是 Cauchy 列，因而收敛，设 $x_n\to x, y_n\to y$, 则 $x\in E, y\in F$, 且 $x_n+y_n\to x+y$, 故 $z=x+y\in E+F$, 所以 $E+F$ 是闭的。

"$\Rightarrow$", 设 $E+F$ 是闭的。若有序列 $(x_n)\subset E$, $x_n\to x$, 注意到 $x_n=x_n+0\in E+F$, 而 $E+F$ 是闭的，那么 $x\in E+F$, 设 $x=y+z, y\in E, z\in\ F$. 则

$$\|x_n-y-z\|^2=\|x_n-y\|^2+\|z\|^2\to 0\Rightarrow\|z\|^2=0\Rightarrow z=0,$$

故 $x\in E$. 所以 E 是闭的，同理可证 F 是闭的。

(b) 先证明 $E\cap F=\{0\}$. 由题设知 E, F 中的元素具有如下形式：

$$\begin{gathered}x=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,0,x_8,\cdots),\forall x\in E,\\ y=(0,y_2,y_2,y_4,\frac{1}{2}y_4,y_6,\frac{1}{3}y_6,y_8,\cdots),\forall y\in F,\end{gathered}$$

所以，若 $x=y$, 则 $y_2=0, y_4=0,\cdots$, 故 $y=0$, 因此 $E\cap F=\{0\}$.

下证 $E+F$ 在 ℓ_2 中不是闭集。取 E 中的序列 $a_n=-\sum_{k=1}^n e_{2k}, n\geq 1$, F 中的序列 $b_n=\sum_{k=1}^n e_{2k}+\frac{1}{k}e_{2k+1}$, 则

$$a_n+b_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}e_{2k+1}\in E+F,$$

且 $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}e_{2k+1}\to\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}e_{2k+1}\in\ell_2$, 若 $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}e_{2k+1}\in E+F$, 则存在 $x\in E, y\in F$, 使得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}e_{2k+1}=x+y=&\sum_{k=1}^\infty x_{2k}e_{2k}+\sum_{k=1}^\infty y_{2k}e_{2k}+\frac{1}{k}y_{2k}e_{2k+1}\\ =&\sum_{k=1}^\infty(x_{2k}+y_{2k})e_{2k}+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}y_{2k}e_{2k+1},\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{cases} x_{2k} + y_{2k} = 0 \\ \frac{1}{k} y_{2k} = \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{2k} = -1 \\ y_{2k} = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \infty,$$

故 $x \notin E$, 矛盾，故 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_{2k+1} \notin E + F$, 因此 $E + F$ 不是闭集。 $\square$

使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e_{2k+1}=x+y=\sum_{k=1}^{\infty}x_{2k}e_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}y_{2k}e_{2k}+\frac{1}{k}y_{2k}e_{2k+1}$ 4-17, 18

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_{2k}+y_{2k})e_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y_{2k}e_{2k+1}$$

$\Rightarrow\begin{cases}x_{2k}+y_{2k}=0\\ \frac{1}{k}y_{2k}=\frac{1}{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{2k}=-1\\ y_{2k}=1\end{cases}$，$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\infty$ 故 $x\notin E$，矛盾，故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e_{2k+1}\notin E+F$。

因此 $E+F$ 不是闭集。

16. 设 H 是 Hilbert 空间，E 是 H 的非零的闭向量子空间。设 P 是 H 到 E 的投影（投影意味着 P 是 H 上的线性算子且满足 $P^2=P$）。证明以下命题等价：

(a) $P=P_E$.

(b) $\|P\|=1$

(c) $|\langle x,P(x)\rangle|\le\|x\|^2$，$\forall x\in H$.

证明：??

17. 设 H 是 Hilbert 空间，E 是 H 的向量子空间。设 F 为赋范空间，$u:E\to F$ 是连续线性映射。证明 u 有连续的线性延拓 $\hat{u}:H\to F$，且 $\|\hat{u}\|=\|u\|$.

证明：由定理3.2.13，u 可以唯一地延拓到 $\bar{E}$ 上，即有 $\tilde{u}:\bar{E}\to F$，$\tilde{u}|_E=u$ 且 $\|\tilde{u}\|=\|u\|$.

又因为 $H=\bar{E}\oplus E^{\perp}$，定义 $\hat{u}:H\to F$ 为 $\hat{u}(x)=\tilde{u}(P_{\bar{E}}(x))$，$\forall x\in H$，则 $\hat{u}$ 为线性算子且

$\hat{u}|_E=u$，且 $\|\hat{u}\|=\|\tilde{u}(P_{\bar{E}})\|\le\|\tilde{u}\|\|P_{\bar{E}}\|=\|\tilde{u}\|=\|u\|\Rightarrow\|\hat{u}\|\le\|u\|$.

又 $\sup\limits_{\substack{\|x\|\le1\\x\in H}}\|\hat{u}(x)\|\ge\sup\limits_{\substack{\|x\|\le1\\x\in E}}\|\hat{u}(x)\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|\le1\\x\in E}}\|u(x)\|=\|u\|\Rightarrow\|\hat{u}\|\ge\|u\|$，故 $\|\hat{u}\|=\|u\|$.

18. 设 $[0,1]$ 上赋予 Lebesgue 测度，$H=L_2(0,1)$，并假设 $K\in L_2([0,1]\times[0,1])$。定义

$$T_K(f)(x)=\int_0^1K(x,y)f(y)dy,\quad f\in H,\ x\in[0,1]$$

(a) 证明 $T_K(f)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有定义.

(b) 证明 $T_K\in B(H)$ 且 $\|T_K\|\le\|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}$

(c) 设 $\tilde{K}(x,y)=\overline{K(y,x)}$，$x,y\in[0,1]$. 证明 $T_K^*=T_{\tilde{K}}$.

(d) 定义 $T(f)(x)=\int_0^x f(1-y)dy$，$f\in H$，$x\in[0,1]$

证明 $T\in B(H)$ 且有 $T^*=T$.

最后给出 T 的非零特征值并证明相应的特征子空间两两正交。

证明：(a) 由于 $K\in L_2([0,1]\times[0,1])$，即 $\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2dxdy<\infty$，则映射 $x\mapsto\int_0^1|K(x,y)|^2dy$ 几乎处处有定义. 由 Hölder 不等式 $|T_K(f)(x)|=|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy|$

$$\le\left(\int_0^1|K(x,y)|^2dy\right)^{\frac12}\left(\int_0^1|f(y)|^2dy\right)^{\frac12}$$

故 $T_K(f)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有定义。

(b) 由(a)知在 $[0,1]$ 上几乎处处有 $|T_K(f)(x)|\le\left(\int_0^1|K(x,y)|^2dy\right)^{\frac12}\cdot\|f\|$，两边在 $[0,1]$ 上平方后积分得

$$\int_0^1|T_K(f)(x)|^2dx\le\int_0^1\int_0^1|K(x,y)|^2dydx\ \|f\|^2$$

$\Rightarrow\|T_K(f)\|\le\|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}\|f\|$，故 $T_K\in B(H)$ 且 $\|T_K\|\le\|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}$.

(c) 对 $\forall f,g\in L_2(0,1)$，

$$\begin{aligned}\langle T_K(f),g\rangle&=\int_0^1\int_0^1K(x,y)f(y)dy\,\overline{g}(x)dx\\&=\int_0^1\int_0^1K(x,y)f(y)\overline{g}(x)dydx\\&=\int_0^1\int_0^1K(x,y)f(y)\overline{g}(x)dxdy\\&=\int_0^1f(y)\overline{\int_0^1\overline{K(x,y)}g(x)dx}\,dy\\&=\int_0^1f(x)\overline{\int_0^1\tilde{K}(x,y)g(y)dy}\,dx=\langle f,T_{\tilde{K}}(g)\rangle\end{aligned}$$

故 $T_K^*=T_{\tilde{K}}$.

(d) 对 $\forall f\in H$，$\|T(f)\|^2=\int_0^1|\int_0^x f(1-y)dy|^2dx$，又对 $\forall x\in[0,1]$，

$$\left|\int_0^x f(1-y)dy\right|^2\le\left(\int_0^x|f(1-y)|^2dy\right)^{\frac12}\cdot x=\int_{1-x}^1|f(t)|^2dt\cdot x\le\|f\|^2\cdot x$$

则 $\|T(f)\|^2\le\int_0^1\|f\|^2\cdot x\,dx=\frac12\|f\|^2\Rightarrow\|T(f)\|\le\sqrt{\frac12}\|f\|\Rightarrow T\in B(H)$.

下证 $T^*=T$… ?

19. 和上一习题一样，令 $H=L_2(0,1)$；并设 $(e_n)_{n\geq1}$ 是 H中的规范正交集。证明：$(e_n)_{n\geq1}$ 是 H上的规范正交基的充分必要条件是

$$\sum_{n\geq1}\left|\int_0^x e_n(t)dt\right|^2=x,\quad \forall x\in[0,1].$$

证明："⇒" 设 $(e_n)_{n\geq1}$ 是 H上的规范正交基，对 $\forall x\in[0,1]$，示性函数 $I_{[0,x]}\in L_2([0,1])$。

则由Parseval恒等式知 $x=\|I_{[0,x]}\|^2=\sum\limits_{n\geq1}|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2$

$$=\sum_{n\geq1}\left|\int_0^x e_n(t)\,dt\right|^2,\quad \forall x\in[0,1].$$

故 $\sum\limits_{n\geq1}\left|\int_0^x e_n(t)\right|^2=x,\quad \forall x\in[0,1]$.

"⇐" 对 $\forall x\in[0,1]$，$\|I_{[0,x]}-\sum\limits_{k=1}^n\langle I_{[0,x]},e_n\rangle e_n\|^2$

$$=x+\sum_{k=1}^n|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2-2\sum_{k=1}^n|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2$$

$$=x-\sum_{k=1}^n|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2\to0\ (n\to\infty)$$

故 $I_{[0,x]}$ 可由 $\mathrm{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}$ 中的元素逼近，则对 $\forall a,b\in[0,1]$，$a<b$，$I_{[a,b]}=I_{[0,b]}-I_{[0,a)}$ 可由 $\mathrm{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}$ 中的元素逼近，故 $[0,1]$上的阶梯函数可由 $\mathrm{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}$ 中的元素逼近，又由于 $[0,1]$上的阶梯函数全体在 $L_2(0,1)$中稠密，故 $\overline{\mathrm{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}}=L_2(0,1)$，所以 $(e_n)_{n\geq1}$ 是 H上的规范正交基。

20.

21. 设 H是一个Hilbert空间，并设 $T\in B(H)$ 且 $\|T\|\leq1$，证明：

(a) $T(x)=x$ 当且仅当 $T^*(x)=x$，$x\in H$.

(b) $\ker(I-T)=\ker(I-T^*)$.

(c) $H=\ker(I-T)\oplus\overline{(I-T)(H)}$

证明：(a) "⇒" 若 $Tx=x$，则 $\langle x-T^*x,x-T^*x\rangle$

$$=\|x\|^2+\|T^*x\|^2-\langle x,T^*x\rangle-\langle T^*x,x\rangle$$

$$=\|x\|^2+\|T^*x\|^2-\langle Tx,x\rangle-\langle x,Tx\rangle$$

$$=\|x\|^2+\|T^*x\|^2-2\|x\|^2\leq\|x\|^2+\|T^*\|^2\|x\|^2-2\|x\|^2=\|T\|^2\|x\|^2-\|x\|^2\leq0$$

故 $\langle x-T^*x,x-T^*x\rangle=0$，因此 $x=T^*x$.

"⇐" $T=(T^*)^*$，故与前面同理可证。

(b) $x\in\ker(I-T)\iff x=Tx\iff x=T^*x\iff x\in\ker(I-T^*)$，故 $\ker(I-T)=\ker(I-T^*)$

(c) 先证 $\ker(I-T)=\overline{(I-T)(H)}^{\perp}$.

设 $x\in\ker(I-T)$，即 $x=Tx=T^*x$，则对 $\forall y\in H$，$\langle x,y-Ty\rangle=\langle Tx,y-Ty\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle Tx,Ty\rangle$
$=\langle Tx,y\rangle-\langle x,Ty\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle T^*x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle Tx,y\rangle=0$，故 $\ker(I-T)\subset(I-T)(H)^{\perp}$

20.

证明. (a) **法 II**: 对于 $0 < t \le r$, 由 Cauchy 积分公式知 $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+te^{i\theta})d\theta$, 故

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{B}(z,r)} f(w)d\lambda(w) = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(z+te^{i\theta})td\theta dt = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi f(z)tdt = f(z).$$

其中第二个等式利用了 Cauchy 积分公式。

(b) 设 $z \in \Omega$, $d(z,\Omega^c) > r$, 则 $\Omega^c \subset \overline{B}(z,r)^c$, 即 $\overline{B}(z,r) \subset \Omega$, 故由 (a) 知 $f(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{B}(z,r)} f(w)d\lambda(w)$, 由 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}|f(z)| = \frac{1}{\pi r^2}|\int_{\overline{B}(z,r)} f(w)d\lambda(w)| \le &\frac{1}{\pi r^2}[\int_{\overline{B}(z,r)}|f(w)|^2 d\lambda(w)]^{\frac{1}{2}}\cdot[\int_{\overline{B}(z,r)} 1d\lambda(w)]^{\frac{1}{2}}\\ \le &\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_2.\end{aligned}$$

(c) 只需证明 H_Ω 的完备性和可分性。

完备性：设 (f_n) 是 H_Ω 中的 Cauchy 列，由 $L_2(\Omega)$ 完备知存在 $f \in L_2(\Omega)$, 使得 $\|f_n - f\|_2 \to 0$, 下面只需证明 f 几乎处处等于 Ω 上的一个解析函数。对任意 $z \in \Omega$, 存在 $r > 0$, s.t. $d(z,\Omega^c) > r$, 则 $\overline{B}(z,r) \subset \Omega$, 则由 (b) 知 $|f_n(z) - f_m(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_n - f_m\|_2$. 更进一步，由于 $d(z,\Omega^c)$ 是关于 z 的连续函数，则存在 $r_1 > 0$, s.t. $B(z,r_1) \subset \{z : d(z,\Omega^c) > r\}$, 则

$$|f_n(w) - f_m(w)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_n - f_m\|_2, \forall w \in B(z,r_1),$$

故 $(f_n(w))$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列，则必收敛，设 $g(w) = \lim_n f_n(w)$, 在上式中令 $m \to \infty$ 则

$$|f_n(w) - g(w)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_n - f\|_2, \forall w \in B(z,r_1),$$

故 (f_n) 在 $B(z,r_1)$ 上一致收敛于 g, 所以 g 在 $B(z,r_1)$ 上解析 (参见 p94). 这样在 Ω 的任意点 $z \in \Omega$ 附近都能找到一个开球，这个开球内存在一个解析函数是 (f_n) 的 L_2 极限，取遍 Ω 所有点时，这些开球覆盖整个 Ω, 定义 Ω 上的一个函数在上述每个开球内的取值等于我们找到的函数 g, 则由定义知该函数是良定义的，且是解析的。再由 Fatou 引理，

$$\int_\Omega |f(w) - g(w)|^2 \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |f(w) - f_n(w)|^2 d\lambda(w) = 0,$$

故 $f = g$, 几乎处处，所以 (f_n) 依 L_2 范数收敛于解析函数 g, 故 H_Ω 完备。

可分性：可分度量空间的子空间仍然是可分的, $H_\Omega \subset L_2(\Omega)$, 所以 H_Ω 是可分的。

(d) 设 $z \in \Omega$, 则存在 $r > 0$, s.t. $d(z,\Omega^c) > r$, 由 (b) 知 $|f(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_2$, 则

$$|\delta_z(f) = |f(z)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_2, \forall f \in H_\Omega,$$

故 δ_z 是 H_Ω 上的连续线性泛函，由 Riesz 表示定理得，存在 $K_z \in H_\Omega$, 使得

$$f(z) = \int_\Omega f(w)\overline{K_z(w)}d\lambda(w), \forall f \in H_\Omega.$$

(e) (i) 由 (d) 知

$$f(z)=\langle f,K_z\rangle,\forall f\in H_\Omega,\forall z\in\Omega,$$

取 $f=K_w$ 则

$$K_w(z)=\langle K_w,K_z\rangle=\overline{\langle K_z,K_w\rangle}=\overline{K_z(w)},$$

故 $K_\Omega(z,w)=\overline{K_\Omega(w,z)}$.

(ii) 给定一组 H_Ω 中的标准正交基 $(e_n)_{n\geq 1}$, 则

$$K_z=\sum_{n=1}^{\infty}\langle K_z,e_n\rangle e_n=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\langle e_n,K_z\rangle}e_n=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{e_n(z)}e_n,$$

且由 Parseval 恒等式知上式在 H_Ω 中收敛。

(f) (i)$e_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, $n\geq 0$, 计算 $\langle e_n,e_m\rangle$ 得

$$\langle e_n,e_m\rangle=\frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}rdrd\theta=\delta_{n,m},$$

故 (e_n) 规范正交. 对任意 $f\in H_\Omega$, 设 f 的 Taylor 展为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$(在任何紧子集上一致收敛), 则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}}e_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_ne_n(z),\forall z\in D$$

其中 $b_n=\frac{a_n\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}}$. 对任意固定的 $r\in[0,1)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}$ 在 $\theta\in[0,2\pi)$ 上一致收敛，则在 $L_2([0,2\pi))$ 中收敛，由 Parseval 恒等式知

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}|\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}|^2\,d\theta=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}$$

则

$$\begin{aligned}\int_D|f(\omega)|^2\,d\lambda(\omega)&=\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\,r\,dr=\int_0^1 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\,r\,dr\\&=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2/(2n+2)=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2,\end{aligned}$$

其中第三个等式是由于单调收敛定理，则 $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2<\infty$, 故

$$\|f-\sum_{k=0}^{n}b_ke_k(z)\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^2\to 0\ (n\to\infty),$$

故 (e_n) 是 H_D 的规范正交基。

(ii) 由 (e) 知

$$\begin{aligned}K_D(w,z)=\langle K_z,K_w\rangle=&\sum_{n=0}^{\infty}\overline{e_n(z)}e_n(w)\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi}\overline{z}^nw^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi}(\overline{z}w)^n=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\frac{1}{\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})'\\=&\frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}.\end{aligned}$$

其中 $t=\overline{z}w$. □

5 第五章习题

1. [习题课] 对任意 $x \in [0,1]$, 设 $f_n(x) = x^n$. 在 $[0,1]$ 上的哪些点处，$(f_n)_{n\geq 1}$ 等度连续？

证明. 当 $x \in [0,1)$ 时，$(f_n)_{n\geq 1}$ 等度连续，在 $x=1$ 处，不等度连续。

实际上，设 $a \in [0,1)$, 注意到

$$\begin{aligned}|x^n - a^n| = |(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})| \leq& (1 + a + \cdots + a^{n-1})|x-a| \\ =& \frac{1-a^n}{1-a}|x-a| < \frac{1}{1-a}|x-a|,\end{aligned}$$

故 $(f_n)_{n\geq 1}$ 等度连续。当 $a=1$ 时，对 1 的任何去心邻域内任意点 x, $|f_n(x) - f_n(1)| \to 1 (n \to \infty)$, 取 $\varepsilon = 1/2$, 存在 n, s.t. $|f_n(x) - f_n(1)| > 1/2$, 所以在 $x=1$ 处不等度连续 □

2. [作业] 设 K 是度量空间，E 是赋范空间，$(f_n)_{n\geq 1}$ 是一列从 K 到 E 的连续函数。证明若 $(f_n)_{n\geq 1}$ 在一点 x 处等度连续，则对任一收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n\geq 1}$, 都有 $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n\geq 1}$ 收敛到 0. 进而证明如果 $(f_n(x))_{n\geq 1}$ 在 E 中收敛到 y, 那么对任一收敛到 x 的点列 $(x_n)_{n\geq 1}$, $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ 也收敛到 y.
取 $f_n(x) = \sin(nx)$. 证明 $(f_n)_{n\geq 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上每一点都不等度连续。

证明. 设 $(f_n)_{n\geq 1}$ 在 x 处等度连续，即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 δ, 使得对任意 $n \geq 1$,

$$\text{当} d(y,x) < \delta \text{时}, |f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

设 $x_n \to x$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, $d(x_n, x) < \delta$, 所以当 $n > N$ 时, $|f_n(x_n) - f_n(x)| < \varepsilon$, 故 $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n\geq 1}$ 收敛到 0.

进一步，设 $(f_n(x))_{n\geq 1}$ 收敛到 y, 那么

$$|f_n(x_n) - y| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - y| \to 0,$$

故 $(f_n(x_n))_{n\geq 1}$ 收敛到 y.

考虑 $f_n(x) = \sin(nx)$, 当 $x \notin \{m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$ 时，设 $x_n = x + \frac{\pi}{n}$, 则 $x_n \to x$, 同时

$$|f_n(x) - f_n(x_n)| = |\sin(nx) - (-\sin(nx))| = 2|\sin(nx)| \nrightarrow 0,$$

这是因为若 $\sin(nx)$ 收敛到 0, 则

$$\lim_{n\to\infty} 2\sin(x)\cos(nx) = \lim_{n\to\infty} \sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 0,$$

又 $\sin x \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \cos(nx) = 0$, 又由由 $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$ 知 $\lim_{n\to\infty} \sin^2 nx + \lim_{n\to\infty} \cos^2 nx = 1$, 矛盾，故 $\sin(nx)$ 不可能收敛到 0. 所以 $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n\geq 1}$ 不会收敛到 0, 所以 $(f_n)_{n\geq 1}$ 在 $x \notin \{m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$ 处不等度连续。

当 $x \in \{m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$ 时，取 $x_n = x + \frac{\pi}{2n}$, 那么 $x_n \to x$, 同时

$$|f_n(x) - f_n(x_n)| = 1 \nrightarrow 0,$$

所以 $(f_n)_{n\geq 1}$ 在 $x \in \{m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$ 时不等度连续。 □

注释 5.1. 实际上当 $x \notin \{m\pi, m \in \mathbb{Z}\}$ 时，$(\sin nx)$ 不收敛于任何数。反证法，假设 $(\sin nx)$ 收敛，则 $(\sin(n+1)x)$ 收敛，又

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

故 $(\cos nx)$ 收敛，设 $\alpha = \lim_n \sin nx$, $\beta = \lim_n \cos nx$, 由 $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$ 知 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, 故 α, β 不能同时为 0, 在下式

$$\begin{cases} \sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x \\ \cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \end{cases}$$

中令 $n \to \infty$ 得

$$\begin{cases} \alpha = \alpha \cos x + \beta \sin x \\ \beta = \beta \cos x - \alpha \sin x \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (\cos x - 1)\alpha + \beta \sin x = 0 \\ -\alpha \sin x + (\cos x - 1)\beta = 0 \end{cases}$$

有非零解，则

$$\begin{vmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $\cos x = 1$, 这意味着 $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 矛盾，因此，$(\sin nx)$ 不收敛。

3.[待查] 设 K 是拓扑空间，(E, d) 是度量空间。证明：若 (f_n) 在 $C(K, E)$ 中依一致范数收敛，则 (f_n) 等度连续。

证明. 设 (f_n) 收敛到 $f \in C(K, E)$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时，

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对任意 $x \in K$, 由 f 的连续性，存在 $U \in \mathcal{N}(x)$, 当 $y \in U$ 时，$d(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, 则

$$d(f_n(y), f_n(x)) \le d(f_n(y), f(y)) + d(f(y), f(x)) + d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

所以 $(f_n)_{n>N}$ 在 x 等度连续，又因为 $f_1, \cdots, f_N$ 是有限个连续函数，所以 (f_n) 等度连续。 □

4.[待查] 设 K 是拓扑空间，(E, d) 是度量空间，(f_n) 是 $C(K, E)$ 上等度连续序列。证明所有使得 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 序列的点 x 构成的集合是 K 中的闭子集。

证明. 设 (x_l) 是 K 中收敛于 x 的一个序列，且每个 x_l 使得 $(f_n(x_l))$ 是 E 中的 Cauchy 列。由 (f_n) 等度连续，对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}(x)$, 当 $y \in U$ 时，

$$d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon,$$

又由于 $x_l \to x$, 则存在 N, 当 $l \geq N$ 时，$x_l \in U$. 由三角形不等式，

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_N)) + d(f_n(x_N), f_m(x_N)) + d(f_m(x_N), f_m(x)),$$

则上式右边的第一项和第三项小于 ε, 又因为 $(f_n(x_N))_{n\geq 1}$ 是 Cauchy 列，则存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N_1$ 时，第二项小于 ε, 所以当 $n, m > N_1$ 时，

$$d(f_n(x), f_m(x)) < 3\varepsilon,$$

故 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 列，得证。 □

5. [习题课] 考虑函数序列 $(f_n)_{n\geq 1}$, 这里 $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty)$.

(a) 证明 (f_n) 等度连续并且逐点收敛到 0 函数。

(b) $C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ 表示 $[0, \infty)$ 上所有有界连续函数构成的空间，并赋予范数

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\geq 0} |f(t)|.$$

(f_n) 在 $C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ 上是否相对紧？

证明. (a) 由 Lagrange 中值定理，对任意 $s, t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} |f_n(s) - f_n(t)| &= |\sin\sqrt{s + 4(n\pi)^2} - \sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2}| \\ &= |\frac{\cos\sqrt{\xi + 4(n\pi)^2}}{2\sqrt{\xi + 4(n\pi)^2}}||s - t| \leq \frac{1}{4\pi}|s - t| \end{aligned}$$

（其中 $\xi \in (s, t)$）故 (f_n) 是等度连续的。

注意到

$$\sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2} = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2} - 2n\pi + 2n\pi) = \sin(\frac{t}{\sqrt{t + 4(n\pi)^2} + 2n\pi}) \to 0 (n \to \infty),$$

所以 (f_n) 逐点收敛到 0 函数。

(b) 不是相对紧的。反证法，若 (f_n) 相对紧，则闭包 $\overline{(f_n)}$ 紧，由定理 2.5.1, 存在子列 (f_{n_k}) 收敛于某个 $f \in C([0,\infty), \mathbb{R})$, 即 $\|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0 (k \to \infty)$, 则对任意 $t \in [0, \infty)$, $f_{n_k}(t) \to f(t) (k \to \infty)$, 再由 (a) 知 $f \equiv 0$, 则子列 (f_{n_k}) 一致收敛到 0 函数。下证这会导出矛盾，由 (1) 的证明过程知

$$f_{n_k}(t) = \sin\sqrt{t + 4(n_k\pi)^2} = \sin(\frac{t}{\sqrt{t + 4(n_k\pi)^2} + 2n_k\pi}),$$

注意到 $\left|\frac{t}{\sqrt{t+4(n_k\pi)^2}+2n_k\pi}\right| \leq 1$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\left|\sin(\frac{t}{\sqrt{t + 4(n_k\pi)^2} + 2n_k\pi})\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{t}{\sqrt{t + 4(n_k\pi)^2} + 2n_k\pi}\right| < \arcsin(\varepsilon),$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 若 $|f_{n_k}(t)| < 1/2$, 则

$$\left|\frac{t}{\sqrt{t+4(n_k\pi)^2}+2n_k\pi}\right| \leq \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} \tag{6}$$

设 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 则上式等价于

$$\begin{aligned} & t - 2n_k\pi\theta \leq \theta\sqrt{t+4(n_k\pi)^2} \\ & \Leftrightarrow t - 2n_k\pi\theta \leq 0 \text{ 或} \\ & t - 2n_k\pi\theta \geq 0 \text{ 且} (t-2n_k\pi\theta)^2 \leq \theta^2(t+4(n_k\pi)^2) \end{aligned}$$

后者等价于

$$2n_k\pi\theta \leq t \leq 4n_k\pi\theta + \theta^2,$$

故式 (6) 等价于 $t \leq 4n_k\pi\theta + \theta^2$, 这意味着 (f_{n_k}) 不可能一致收敛于 0 函数，因此 (f_n) 在 $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ 上不是相对紧的。 □

注释 5.2. *本题说明了在定理 5.1.4, 定理 5.1.6 中去掉 K 的紧性后，结论不再成立。*

7. 本习题的目的是在 Ascoli 定理中的空间 (K,δ) 是紧度量空间时，给充分性部分一个简单的证明。
设 (K,δ) 是紧度量空间，$(f_n) \subset C(K,E)$ 是等度连续的函数列，并且对每个点 $x \in K$, $\{f_n(x) : n \geq 1\}$ 相对紧。

(a) 证明 K 是可分的，即存在一个可数子集 D 在 K 中稠密。

(b) 使用对角线法，证明 (f_n) 有一个子列 $(f_{n_k})_k$, 使得对任意 $x \in D$, $(f_{n_k}(x))_k$ 收敛。

(c) 证明对任意 $x \in K$, $(f_{n_k}(x))_k$ 是 Cauchy 序列；并由此导出 $(f_{n_k})_k$ 在 $C(K,E)$ 中收敛。

证明. (a) 对任意有理数 $r \in Q$, 由 (K,δ) 的紧性知存在有限个 K 中的元素 $x_1^r, \cdots, x_{n_r}^r$ 使得

$$K = \cup_{k=1}^{n_r} B(x_k^r, r) = \cap_{r\in Q} \cup_{k=1}^{n_r} B(x_k^r, r).$$

设 $D = \{x_k^r, k = 1, 2, \cdots, n_r, r \in Q\}$, 上式意味着可数子集 D 在 K 中稠密，所以 K 是可分的。

(b) 设 $D = (x_m)$, 由已知条件知 $(f_n(x_1))_{n\geq 1}$ 相对紧，因此存在子列 $(f_{1,k}(x_1))_{k\geq 1}$ 收敛。显然对任意 $x \in K$, 子列 $(f_{1,k}(x))_k$ 仍然相对紧，则对于 x_2, 存在子列 $(f_{2,k}(x_2))_k$ 收敛，$\cdots$, 依此类推得到一系列收敛列 $(f_{m,k}(x_m))_k, m = 1, 2, \cdots$. 由对角线法则，取函数序列 $(f_{k,k})$, 那么对任意 $x_m \in D$, $(f_{k,k}(x_m))$ 收敛。

(c) 由 (f_n) 等度连续，则任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 当 $\delta(x,y) < \eta$ 时，

$$d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon,$$

由 (a) 知对任意 $x \in K$, 存在 $x_m \in D$, s.t.$\delta(x, x_m) < \eta$, 则

$$\begin{aligned} d(f_{s,s}(x), f_{t,t}(x)) \le & d(f_{s,s}(x), f_{s,s}(x_m)) + d(f_{s,s}(x_m), f_{t,t}(x_m)) + d(f_{t,t}(x_m), f_{t,t}(x)) \\ < & \varepsilon + d(f_{s,s}(x_m), f_{t,t}(x_m)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

又由于 $(f_{k,k}(x_m))_k$ 收敛，存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $s, t > N$ 时 $d(f_{s,s}(x_m), f_{t,t}(x_m)) < \varepsilon$, 代入上式得

$$d(f_{s,s}(x), f_{t,t}(x)) < 3\varepsilon,$$

故 $(f_{k,k}(x))_k$ 是 Cauchy 列，再加上相对紧性知 $(f_{k,k}(x))_k$ 收敛，则由定理 5.1.4 知 $(f_{k,k})_k$ 在 $C(K, E)$ 中收敛。 □

8.[待查] 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中得开集。给定一个紧子集 $K \subset \Omega$, 对任意 $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$, 令

$$\|f\|_{\infty,K} = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

定义 τ_c 为 $C(\Omega, \mathbb{C})$ 上的集族，τ_c 中的元素可表示为如下形式集合的并集：

$$B_K(f, r) = \{g \in C(\Omega, \mathbb{C}) : \|g - f\|_{\infty,K} < r\},$$

这里 $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$, $K \subset \Omega$ 是紧的且 $r > 0$.

(a) 证明 τ_c 是 $C(\Omega, \mathbb{C})$ 上的 Hausdorf 拓扑，称其为在 Ω 的任一紧子集上一致收敛的拓扑。

(b) 令 $(f_n) \subset C(\Omega, \mathbb{C})$. 证明 f_n 在 Ω 的任一紧子集上一致收敛到 f 当且仅当 f_n 依拓扑 τ_c 收敛到 f.

证明. (a) 先证 τ_c 是 $C(\Omega, \mathbb{C})$ 上的拓扑：

- 任取 $x \in \Omega$, 注意到 $\{x\}$ 是紧集，则任意 $f \in C(\Omega, \mathbb{C})$ 满足 $f \in B_x(f, 1)$, 因此

  $$C(\Omega, \mathbb{C}) = \cup_f B_x(f, 1).$$

- 显然 τ_c 对无穷并封闭。
- 考虑如下两个集合：

  $$B_{k_1}(f_1, r_1) = \{g \in C(\Omega, \mathbb{C}) : \|g - f_1\|_{\infty,K_1} < r_1\},$$

  $$B_{k_2}(f_2, r_2) = \{g \in C(\Omega, \mathbb{C}) : \|g - f_2\|_{\infty,K_2} < r_2\},$$

  设 $r_3 = \min\{r_1, r_2\}/2$, 对任意 $g \in B_{k_1}(f_1, r_1) \cap B_{k_1}(f_1, r_1)$, 下证

  $$B_{K_1 \cup K_2}(g, r_3) \subset B_{k_1}(f_1, r_1) \cap B_{k_2}(f_2, r_2).$$

  实际上，对任意 $h \in B_{K_1 \cup K_2}(g, r_3)$,

  $$\begin{aligned} \|h - f_1\|_{\infty,K_1} \le \|h - g\|_{\infty,K_1} + \|g - f_1\|_{\infty,K_1} \le & \|h - g\|_{\infty,K_1 \cup K_2} + \|g - f\|_{\infty,K_1} \\ < & \frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2} = r_1, \end{aligned}$$

  因此 $B_{K_1 \cup K_2}(g, r_3) \subset B_{k_1}(f_1, r_1)$, 同理 $B_{K_1 \cup K_2}(g, r_3) \subset B_{k_2}(f_2, r_2)$, 所以 τ_c 对有限交封闭。

故 τ_c 是 $C(\Omega,\mathbb{C})$ 上的拓扑。

设 $f,g\in C(\Omega,\mathbb{C})$ 且 $f\neq g$, 则存在 $x_0\in\Omega$, s.t. $f(x_0)\neq g(x_0)$, 设 $r_0=|f(x_0)-g(x_0)|/2$, 则 $f\in B_{x_0}(f,r_0), g\in B_{x_0}(g,r_0)$ 且

$$B_{x_0}(f,r_0)\cap B_{x_0}(g,r_0)=\varnothing,$$

故 τ_c 是 Hausfdorff 拓扑。

(b) $\Rightarrow$: 对 f 的任何开邻域 U, 存在紧集 K, 半径 $r>0$, s.t. $B_K(f,r)\subset U$, 由假设知存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时，$f_n\in B_K(f,r)\subset U$, 故 f_n 依拓扑 τ_c 收敛到 f.

$\Leftarrow$: 对 Ω 的任意紧子集 K, 任意 $r>0$, 由于 $B_K(f,r)\in\tau_c$, 由收敛性定义知 f_n 在 K 上一致收敛到 f. $\square$

9.[待查] 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中开集，$\mathcal{H}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有全纯函数构成的集合。

(a) 证明对每一个紧子集 $K\subset\Omega$,

$$\{f\in\mathcal{H}(\Omega):\sup_{z\in K}|f(z)|=\|f\|_{\infty,K}<1\}$$

是 $(\mathcal{H}(\Omega),\tau_c)$ 中的开集。

(b) 假设拓扑 τ_c 可以被一个范数 $\|\cdot\|$ 诱导，令 $\mathcal{B}=\{f\in\mathcal{H}(\Omega):\|f\|<1\}$. 证明对每一个紧子集 $K\subset\Omega$, 有常数 $t>0$, 使得 $t\mathcal{B}\subset\{f\in\mathcal{H}(\Omega):\sup_{z\in K}|f(z)|<1\}$. 并证明 $\mathcal{B}$ 关于 τ_c 拓扑是相对紧的。

(c) 证明 τ_c 不能被 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上任何范数诱导。

证明. 习题 (8) 的结论对于 $\mathcal{H}(\Omega)$ 仍然成立，只需把连续函数替换成全纯函数，证明过程完全一样。

(a) 由于 0 函数全纯，按习题 8 中的定义，(a) 中的集合为 $B_K(0,r)$, 则这是 $(\mathcal{H}(\Omega),\tau_c)$ 中的开集。

(b) 注意到 $t\mathcal{B}=\{g\in\mathcal{H}(\Omega):\|g\|<t\}$, 所以形如此式的集合是 $\|\cdot\|$ 诱导的拓扑在 0 点的邻域基，由假设拓扑 τ_c 可以被范数 $\|\cdot\|$ 诱导，则存在充分小的 t, s.t.

$$t\mathcal{B}\in\{f\in\mathcal{H}(\Omega):\sup_{z\in K}|f(z)|<1\},$$

这意味着 $t\mathcal{B}$ 中的元素在 K 上一致有界，则 $\mathcal{B}$ 中的元素在 K 上一致有界，考虑 $\mathcal{B}$ 中任一序列 (f_n), 则 (f_n) 在 K 上一致有界，所以由 Montel 定理 (定理 5.1.9) 知，存在一个子列 (f_{n_k}), (f_{n_k}) 在 Ω 的任意紧子集 K 上一致收敛于某个在 Ω 上的全纯函数 f, 由习题 8 的 (b) 知这等价于 (f_{n_k}) 依拓扑 τ_c 收敛到 f, 因此 $\mathcal{B}$ 关于 τ_c 拓扑是相对紧的。

(c) 反证法，若 τ_c 能被 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 诱导，则由 (b) 知 $\overline{\mathcal{B}}$ 是紧的，那么由 Riesz 定理知 $\mathcal{H}(\Omega)$ 是有限维的，矛盾，故若 τ_c 不能被 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 诱导。 $\square$

10. [作业] 设 (K,d) 是紧度量空间。证明所有从 K 到 $\mathbb{R}$ 的 Lipschitz 函数构成的集合在 $(C(K,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ 中稠密。

证明. 设 $\mathcal{A}$ 表示 K 到 $\mathbb{R}$ 的 Lipschitz 函数构成的集合，易验证 $\mathcal{A}$ 是一个代数，则

- 对任意 $x, y \in K, x \neq y$, 设 $f_x(y) = d(x, y)$, 则由三角形不等式看出 f_x 是系数为 1 的 Lipschitz 函数，且 $f_x(x) = 0, f_x(y) > 0$, 故 $\mathcal{A}$ 是可分点的。
- $\mathcal{A}$ 含有恒等于 1 的函数

所以可由 Stone-Weierstrass 定理 (定理 5.2.2) 知 $\mathcal{A}$ 在 $(C(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 中稠密。 □

11. 设 K_1 和 K_2 都是紧 Hausdorff 空间。对 $f \in C(K_1, \mathbb{C})$, $g \in C(K_2, \mathbb{C})$ 定义

$$f \otimes g(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2), \forall (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2.$$

并定义集合

$$\mathcal{A} = \{\sum_{\text{有限和}} a_i f_i \otimes g_i : a_i \in \mathbb{C}, f_i \in C(K_1, \mathbb{C}), g_i \in C(K_2, \mathbb{C})\}.$$

证明 $\mathcal{A}$ 在 $C(K_1 \times K_2, \mathbb{C})$ 中稠密。

证明. 易证 $\mathcal{A} \subset C(K_1 \times K_2, \mathbb{C})$.

- 设 $x, y \in K_1 \times K_2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, $x \neq y$, 不妨设 $x_1 \neq y_1$, 则由 K_1 的 Hausdorff 性知存在 x_1, y_1 的开邻域 U, V, 满足 $U \cap V = \varnothing$, 注意到单点集 $\{x_1\}$ 是紧的且闭的，$\{x_1\} \cap \overline{V} = \varnothing$, 由 Urysohn 引理 (定理 1.3.15), 存在 $f \in C(K_1, \mathbb{C})$, $f : K_1 \to [0, 1]$ 使得 $f(x_1) = 0$, 且在 $\overline{V}$ 上 f 为 1, 故 $f(y_1) = 1 \neq f(x_1)$. 则

$$f \otimes 1(x_1, x_2) = f(x_1) \neq f(x_2) = f \otimes 1(x_2, y_2),$$

  故 $\mathcal{A}$ 是可分点的。

- $\mathcal{A}$ 含有恒为 1 的函数。

故由 Stone-Weierstrass 定理得 $\mathcal{A}$ 在 $C(K_1 \times K_2, \mathbb{C})$ 中稠密。 □

12. $[0, 1]$ 上所有的偶多项式构成的集合 $\mathcal{Q}$ 是否在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上稠密？$[-1, 1]$ 上所有的偶多项式构成的集合 $\mathcal{R}$ 是否在 $C([-1, 1], \mathbb{R})$ 上稠密？

证明. (1) $\mathcal{Q}$ 在 $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上稠密，实际上

- 设 $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$, 令 $f(x) = x^2$, 则 $f(x) \neq f(y)$.
- $\mathcal{Q}$ 含有恒等于 1 的函数。

故由 Stone-Weierstrass 定理得 $\mathcal{Q}$ 在 $C([0, 1], \mathbb{C})$ 中稠密。

(2) $\mathcal{R}$ 在 $C([-1, 1], \mathbb{C})$ 中不稠密。可举反例：设 $f(x) = x$, 若 $\mathcal{R}$ 在 $C([-1, 1], \mathbb{C})$ 中稠密，则存在 $(f_n) \subset \mathcal{R}$, s.t.$\|f_n - f\|_\infty \to 0 (n \to \infty)$, 取 $x = -1/2$, 则有

$$\frac{1}{2} \leq |f_n(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

矛盾，所以 $\mathcal{R}$ 在 $C([-1, 1], \mathbb{C})$ 中不稠密。 □

14. [习题课] 本习题的目的是证明 **Berstein 定理**: 令 $f \in C([0,1],K)$. 并设

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

则 B_n 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 f.

(a) 首先导出对任一正整数 n, 有公式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx \text{ 和} \sum_{k=0}^{n} k^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

并由此证明

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

(b) 对任意 $\varepsilon > 0$, 选择适当的 $\delta > 0$, 使得

$$x, y \in [0,1], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

对任一固定 $x \in [0,1]$, 令 $I = \{k : |x - \frac{k}{n}| < \delta\}$ 及 $J = \{k : |x - \frac{k}{n}| \geq \delta\}$. 证明

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| <& \varepsilon \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &+ \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k \in J} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

从而导出

$$|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n}.$$

(c) 得出结论

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.$$

证明. (a) 注意到 $kC_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx.$$

进一步,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =& nx \sum_{k=1}^{n} k C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ =& nx \sum_{k=1}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + nx \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ =& nx \sum_{s=0}^{n-1} s C_{n-1}^{s} x^{s} (1-x)^{n-1-s} + nx \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^{s} x^{s} (1-x)^{n-1-s} \\ =& n(n-1)x^2 + nx \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} =& \sum_{k=0}^{n} C_n^k (k^2 - 2nkx + n^2x^2) x^k (1-x)^{n-k} \\ =& [nx + n(n-1)x^2] - 2nx \cdot nx + n^2x^2 = nx(1-x).\end{aligned}$$

(b) 注意到 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \equiv 1$, 则 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, 则

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| \le& \sum_{k\in I} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\in J} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ \le& \varepsilon \sum_{k\in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k\in J} C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ \le& \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{nx(1-x)}{n^2} \\ =& \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n},\end{aligned}$$

其中第三个不等号用到了 (a) 的结论。

(c) 由 (b) 的结论知

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \le \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\delta^2} \sup_{x\in[0,1]} x(1-x) = \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} < 2\varepsilon(\ n\text{充分大}).$$

故 $\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$.

法 II: 由于：

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| \le& \sum_{k\in I} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\in J} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ \le& \varepsilon \sum_{k\in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ \le& \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

上式右端第二项中的求和式可以看成服从二项分布 $B(n,x)$ 的随机变量 X 的如下概率：

$$P\{|\frac{X}{n} - x| \ge \delta\} = \sum_{k\in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

由 Chebeshev 不等式知

$$P\{|\frac{X}{n} - x| \ge \delta\} \le \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}(\ n\text{充分大}),$$

则当 n 充分大时，对任意 $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \le 2\varepsilon,$$

因此 $\lim_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$. □

注释 5.3. 设 X 表示服从 *Bernoulli* 分布 $B(n,x)$ 的随机变量，那么 $E[X]=x, Var[X]=nx(1-x)$，且 $B_n(f)(x)=E[f(\frac{X}{N})]$, $f(x)=f(E[\frac{X}{N}])$, 设 $K=\frac{X}{N}$, 本题的结论就像是在说，当参数 n 很大时，$E[f(K)]$ 和 $f(E[K])$ 十分接近 *(*当 f 是线性函数时，两者显然相等*)*，实际上法 *II* 就是由 *Bernstein* 给出的，法 *II* 的证明过程中已经得到了弱大数定律。

15. [习题课] 设 $f\in L^1_{2\pi}$, 其 Fourier 级数定义为

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}.$$

并定义相应的 n 次部分和为

$$S_n(f)(t)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}.$$

在本习题中，假设 f 属于分段的 C^1 函数类，也就是说，$f\in C_{2\pi}$ 且存在 $[0,2\pi]$ 上的划分 $0=a_0<a_1<\cdots<a_k=2\pi$, 使得 f 在每个子区间 (a_j,a_{j+1}) 属于 C^1 函数类，并且 f' 在点 a_j 的右极限和点 a_{j+1} 的左极限都存在。证明：f 的 Fourier 级数依无穷范数收敛到 f, 而且

$$\|f-S_N(f)\|_\infty\le\sqrt{\frac{2}{N}}\|f'\|_2,\forall N\ge 1.$$

注意这里的导数 f' 在 f 的不可导点取左右导数。

证明. 设 f 属于分段的 C^1 函数类，则可证莱布尼茨公式对 f 仍然成立，事实上，对任意 $a,b\in[0,2\pi]$, 设相应于 f 的划分为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, 则

$$\int_a^b f'(t)dt=\sum_{i=1}^{k}f(x_i)-f(x_{i-1})=f(b)-f(a),$$

由此，对任意两个分段的 C^1 函数类里的元素 u,v, 分部积分公式仍然成立，实际上，设相应于 uv 的划分为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, 注意到 $(uv)'=u'v+v'u$, 两边同时在 $[a,b]$ 上积分，通过与前面类似的过程知

$$\int_a^b u'vdt=uv|_a^b-\int_a^b v'udt.$$

有了前面的准备，我们可以求导函数 f' 的 Fourier 系数。当 $k\neq 0$ 时，

$$\hat{f'}(k)=\int_0^{2\pi}f'(\theta)e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\,f(\theta)e^{-ik\theta}\Big|_0^{2\pi}+ik\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi}=ik\hat{f}(k),$$

其中第一项为 0 是由于 $f(0)=f(2\pi)$, 则 $\hat{f}(k)=-i\frac{\hat{f'}(k)}{k}, k\neq 0$ 且 $\hat{f'}(0)=f(2\pi)-f(0)=0$. 注意到在题设条件下，显然 $f'\in L^2_{2\pi}$, 则有 Parseval 恒等式

$$\int_0^{2\pi}|f'(\theta)|^2\frac{d\theta}{2\pi}=\sum_{k\neq 0}|\hat{f'}(k)|^2,$$

且级数 $\sum_{k\neq 0}|\hat{f'}(k)|^2$ 收敛。注意到

$$\sum_{k\neq 0}|\hat{f}(k)|=\sum_{k\neq 0}\frac{|\hat{f'}(k)|}{k}\le(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k\neq 0}|\hat{f'}(k)|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

故 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikt}$ 一致收敛 (则依二范数收敛)，令 $g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikt}$, 则 g 连续. 注意到 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikt}$ 还依二范数收敛于 f, 则 $g=f, a.e.$, 故 $\|g-f\|_2=0$, 又 $f-g$ 连续所以 $f\equiv g$.

设 $J=\mathbb{Z}\backslash\{-N,-(N-1),\cdots,0,1,\cdots,N\}$, 则由 Hölder 不等式和 Bessel 不等式

$$
\begin{aligned}
|f(t)-S_N(f)(t)|=|\sum_{k\in J}(-i)\frac{\hat{f'}(k)}{k}e^{ikt}|\leq\sum_{n\in J}\left|\frac{\hat{f'}(k)}{k}\right| &\leq(\sum_{n\in J}\frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}}\|f'\|_2\\
&=(2\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}}\|f'\|_2\leq\left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\|f'\|_2,
\end{aligned}
$$

其中最后一个不等式用到如下事实

$$
\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{N(N+1)}+\frac{1}{(N+1)(N+2)}+\cdots=\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}+\cdots=\frac{1}{N}.
$$

至此我们证明了

$$
\|f-S_N(f)\|_\infty\leq\sqrt{\frac{2}{N}}\|f'\|_2,\forall N\geq 1.
$$

□

16.[待查] 本习题给出了一个不是 Fourier 级数的三角级数。考虑三角级数 $\sum_{n\geq 1}a_n\sin(bx)$, $a_n\geq 0$.

(a) 假设该三角级数是某函数 $f\in L_{2\pi}^1$ 的 Fourier 级数，也就是有

$$
\hat{f}(0)=0,\hat{f}(n)=\frac{a_n}{2i},\hat{f}(-n)=-\frac{a_n}{2i},\forall n\geq 1.
$$

令

$$
F(x)=\int_0^x f(t)dt.
$$

证明：$F\in C_{2\pi}$ 并且

$$
\hat{F}(n)=-\frac{a_{|n|}}{2|n|},n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}.
$$

由此导出级数 $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n}$ 收敛。

(b) 证明：三角级数 $\sum_{n\geq 2}\frac{\sin(nx)}{\log n}$(该级数在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处收敛) 不是 Fourier 级数。

证明. 首先，对任意 $x\in\mathbb{R}$,

$$
F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+2\pi}f(t)dt=F(x)+\hat{f}(0)=F(x),
$$

故 2π 是 F 的周期。下证 F 连续，设 $x\in\mathbb{R}$, 序列 (x_n) 收敛于 x 且 $x_n\geq x,\forall n\geq 1$, 则

$$
|F(x_n)-F(x)|=|\int_x^{x_n}f(t)dt|\leq\int_x^{x_n}|f(t)|dt,
$$

设 A 表示 $\mathbb{R}$ 上的可测集,注意到我们可将 $\int_A|f(t)|dt$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的测度,记为$\phi(A)=\int_A|f(t)|dt$, 则

$$
\lim_{n\to\infty}\phi([x,x_n])=\phi(\lim_{n\to\infty}[x,x_n])=\phi(\{x\})=0,
$$

故 $\lim_{n\to\infty}|F_n(x)-F(x)|=0$, 同理可证 (x_n) 从左边逼近 x 时，仍然有 $F_n(x)\to F(x)$, 故 F 连续，所以 $F\in C_{2\pi}$.

下面计算 F 的 Fourier 系数，设 $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, 则

$$\begin{aligned}\hat{F}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}[\int_0^{\theta}f(t)dt]d\theta=&\frac{1}{2\pi}\{\left(\frac{e^{-in\theta}}{-in}\right)\int_0^{\theta}f(t)dt\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{e^{-in\theta}}{-in}f(\theta)d\theta\}\\ =&-\frac{i}{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f(\theta)d\theta=-\frac{i}{n}\hat{f}(n)=-\frac{a_{|n|}}{2|n|},\end{aligned}$$

□

习题5

1. 对任意 $x\in[0,1]$，设 $f_n(x)=x^n$. 在 $[0,1]$ 上的哪些点处，$(f_n)_{n\geq1}$ 等度连续？ ✓ 5-17, 18

证明：当 $x\in[0,1)$ 时，$(f_n)_{n\geq1}$ 等度连续，在 $x=1$ 处，不等度连续。

2.✓ 3.✓ 4.✓ 5.✓ 6.✓ 7.✓ 8.✓ 9.✓ 10.✓ 11.✓ 12.✓ 13.✓ 14.✓ 15.✓

16. ~~［illegible］~~.

17. 对任意 $a\in\mathbb{R}$，相应的平移变换 $T_a(f)(x)=f(x-a)$. 证明对任意 $f\in L^p_{2\pi}$，$0<p<\infty$，有

$$\lim_{a\to0}\|T_a(f)-f\|_p=0.$$

证明：设 $f(x)=e^{inx}$，$n\in\mathbb{Z}$，$x\in\mathbb{R}$. 则 $\|f(x-a)-f(x)\|_p=\|e^{in(x-a)}-e^{inx}\|_p$

$$=\|e^{inx}\|_p\,|e^{ina}-1|=|e^{-ina}-1|\to0\,(a\to0)$$

故 $f\in P$ 时，$\lim\limits_{a\to0}\|T_a(f)-f\|_p=0$.

设 $f\in L^p_{2\pi}$，则 ~~$\exists g\in P$~~ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists g\in P$. s.t. $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$.

对于 g，$\exists\delta>0$，当 $|a|<\delta$ 时，$\|T_a(g)-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$. 故

$$\|T_a(f)-f\|_p\leq\|T_a(f)-T_a(g)\|_p+\|T_a(g)-g\|_p+\|g-f\|_p$$
$$=\|f-g\|_p+\|T_a(g)-g\|_p+\|g-f\|_p$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{a\to0}\|T_a(f)-f\|_p=0$. ▨

18. 令 $N\geq1$，N 阶的 Fejér 核定义为 $F_N=\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}D_n$. 其中 $D_n(x)=\sum\limits_{|k|\leq n}e^{ikx}=\dfrac{\sin(n+\frac12)x}{\sin\frac{x}{2}}$，$n\in\mathbb{N}$.

(a) 证明：(i) $F_N(t)=\frac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$；

(ii) $\|F_N\|_1=\int_0^{2\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}=1$.

(iii) 任取 $\delta>0$，$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}=0$

(b) 令 $\sigma_N(f)(x)=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}S_k(f)(x)=\int_0^{2\pi}f(x-t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$.

证明：(i) 若 $f\in L^p_{2\pi}$，$1\leq p\leq\infty$，则 $\|\sigma_N(f)\|_p\leq\|f\|_p$；

(ii) 若 $f\in C_{2\pi}$，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty=0$；

(iii) 若 $f\in L^p_{2\pi}$，$1\leq p<\infty$，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_p=0$ 对任意 $f\in L^p_{2\pi}$.

证明：(a) $F_N(t)=\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{\sin(n+\frac12)t}{\sin\frac{t}{2}}$，下面证 $\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sin(n+\frac12)t=\dfrac{\sin^2\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sin(n+\tfrac12)t=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{t}{2}}(1+\cdots+e^{i(N-1)t})\right)=\mathrm{Im}\left[(\cos\tfrac{t}{2}+i\sin\tfrac{t}{2})\sum_{n=0}^{N-1}e^{int}\right]$$
$$=\cos\tfrac{t}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{int}\right)+\sin\tfrac{t}{2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{int}\right)\qquad(*)$$

又 $\mathrm{Im}\left(\sum\limits_{n=0}^{N-1}e^{int}\right)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}}\right)=\dfrac{\sin t+\sin(N-1)t-\sin Nt}{2-2\cos t}$,

18. 令 $N \geq 1$, N 阶的 Fejer 核定义为

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n,$$

其中

$$D_n(x) = \sum_{|k|\leq n} e^{ikx} = \frac{sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, n \in \mathbb{N}.$$

(a) 证明：

(i) $F_N(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$;

(ii) $\|F_n\|_1 = \int_0^{2\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$;

(iii) 任取 $\delta > 0$, $\lim_{N\to\infty}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$.

(b) 令

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}.$$

(i) 若 $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \leq p \leq \infty$, 则 $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$;

(ii) 若 $f \in C_{2\pi}$, 则 $\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$;

(iii) 若 $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, 则 $\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$ 对任意 $f \in L^p_{2\pi}$.

证明. (a) (i) 令 $\theta = t\backslash 2$, 则

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sin(n+\frac{1}{2}t) = \sum_{n=0}^{N-1}\sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2 N\theta}{\sin\theta}.$$

故

$$F_N(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

(ii) 由 (i) 知 $F_N(t) \geq 0$, 故 $\|F_N\|_1 = \int_0^{2\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$, 又对 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} D_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} 1 + 2\cos t + \cdots + 2\cos nt\frac{dt}{2\pi} = 1$$

故 $\int_0^{2\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi} = N\cdot\frac{1}{N} = 1$.

(iii) 任取 $\delta > 0$,

$$\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi} = \frac{2}{N}\int_{\delta\leq t\leq\pi}\left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\frac{dt}{2\pi} \leq \frac{2}{N}\int_{\delta\leq t\leq\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\frac{dt}{2\pi} \to 0(N\to\infty).$$

(b) (i) 注意到 $\sigma_N(f) = f * F_N$, 则由广义 Minkowski 不等式 (第三章习题 13) 知

$$\|\sigma_N(f)\|_p = \|f * F_N\|_p \leq \|f\|_p\|F_N\|_1 = \|f\|_p.$$

(ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, 由于 $f\in C_{2\pi}$，存在 $\delta>0$, 当 $|t|<\delta$ 时

$$|f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$

则

$$\begin{aligned}\sigma_N(f)(x)-f(x)&=\int_0^{2\pi}f(x-t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}-\int_0^{2\pi}f(x)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\\&=\int_0^{2\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\\&=\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta\le|t|\le\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\end{aligned}$$

其中

$$|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}|<\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\int_{\delta\le|t|\le\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\le\|f\|_\infty\int_{\delta\le|t|\le\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}<\frac{\varepsilon}{2}(\text{当 N 充分大}),$$

故 $|\sigma_N(f)(x)-f(x)|<\varepsilon,\forall x\in\mathbb{R}$(当 N 充分大)，所以 $\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty=0$.

(iii) 设 $f\in L^p_{2\pi}$, $1\le p<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C_{2\pi}$ 使得 $\|g-f\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$. 由 (ii) 知存在 N_1, 当 $N>N_1$ 时 $\|\sigma_N(g)-g\|_p\le\|\sigma_N(g)-g\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3}$, 则由 (i) 知

$$\begin{aligned}\|\sigma_N(f)-f\|_p\le&\|\sigma_N(f)-\sigma_N(g)\|_p+\|\sigma_N(g)-g\|_p+\|g-f\|_p\\\le&\|f-g\|_p+\frac{\varepsilon}{3}+\|f-g\|_p<\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\lim_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_p=0$. □

19. 设 $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$，$f$ 的 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}(f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,dx,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

(a) 证明：任取 $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$，都有 $\mathcal{F}(f)\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) 证明：$\mathcal{F}$ 的像集在 $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 中稠密。

5-19

证明：(a) 对 $\forall t\in\mathbb{R}$，设 (t_n) 收敛于 t. 则

$$|\mathcal{F}(f)(t_n)-\mathcal{F}(f)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-it_nx}dx-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|$$

$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-it_nx}-e^{-itx}|\,dx$$

注意到 $|e^{-it_nx}-e^{-itx}|\leq 2$ 且 $e^{-it_nx}-e^{-itx}\to 0$. 由 Lebesgue 控制收敛定理知

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-it_nx}-e^{-itx}|\,dx\to 0\ (n\to\infty)$

故 $|\mathcal{F}(f)(t_n)-\mathcal{F}(f)(t)|\to 0\ (n\to\infty)$，所以 $\mathcal{F}(f)$ 连续。

下证 $\lim\limits_{|t|\to\infty}\mathcal{F}(f)(t)=0$.

设 $a,b\in\mathbb{R}$，$a\leq b$. $f=I_{[a,b]}$，则 $|\mathcal{F}(f)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|=\left|\int_a^b e^{-itx}dx\right|$

$$=\left|\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\right|$$

$$\leq\frac{2}{|t|}\to 0\quad(|t|\to\infty)$$

由映射 $f\mapsto\mathcal{F}(f)$ 的线性性知，当 f 为阶梯函数时仍有 $\mathcal{F}(f)(t)\to 0\ (|t|\to\infty)$.

设 $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. 则对 $\forall\varepsilon>0$ 存在阶梯函数 g s.t. $\|f-g\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$.

则 $$|\mathcal{F}(f)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-g(x))e^{-itx}dx+\int g(x)e^{-itx}dx\right|$$

$$\leq\|f-g\|_1+\left|\int g(x)e^{-itx}dx\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int g(x)e^{-itx}\,dx\right|$$

对于 g，存在 G，当 $|t|>G$ 时，$\left|\int g(x)e^{-itx}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，故 $|\mathcal{F}(f)(t)|<\varepsilon$，当 $|t|>G$.

$\Rightarrow\lim\limits_{|t|\to\infty}\mathcal{F}(f)(t)=0$，故 $\mathcal{F}(f)\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) ?

6 第六章习题

习题 六

1. (a) 证明: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 G_δ 集, 并导出 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集, 且不存在函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $Cont(f)=\mathbb{Q}$.

(b) 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: 当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 时, 令 $f(x)=0$; $f(0)=1$;

若 x 是非 0 的有理数 $\frac{p}{q}$, 这里 $\frac{p}{q}$ 是 x 的不可约形式, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, 令 $f(x)=\frac{1}{q}$.

证明: $Cont(f)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(c) 设 $f=\mathbb{1}_\mathbb{Q}$. 证明: f 不是第一纲的 (即 f 不是任一连续函数列的极限函数), 但是存在一列第一纲的函数逐点收敛到 f.

(a) 证明: $\mathbb{Q}$ 可数, 设 $\mathbb{Q}=\{x_n, n\geq1\}=\bigsqcup_{n\geq1}\{x_n\}$, 则 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\bigcap_{n\geq1}\{x_n\}^c$ 为 G_δ 集.

下证 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集, 反证法. 假设 $\mathbb{Q}$ 是 G_δ 集, 则 $\exists$ 开集 G_n, $n\geq1$, s.t. $\mathbb{Q}=\bigcap_{n\geq1}G_n$.

则对 $\forall n\geq1$, $\mathbb{Q}\subset G_n \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}\subset\overline{G_n}$ 即 $\mathbb{R}\subset\overline{G_n}$ 故 $\overline{G_n}=\mathbb{R}$, 故 G_n^c 无内点.

又由于 $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\sqcup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\left(\bigsqcup_{n\geq1}\{x_n\}\right)\sqcup\left(\bigcup_{m\geq1}G_m^c\right)$ 是可数个无内点的闭集, 由 Baire 定理知 $\mathbb{R}$ 无内点, 矛盾. 故 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集。(法II: 若 $\mathbb{Q}$ 是 G_δ 集, 则 $\mathbb{Q}$ 是稠密的 G_δ 集, 则 $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c=\phi$ 是稠密的 G_δ 集, 矛盾)

由引理 6.1.8 知, 对于函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Cont(f)$ 是 G_δ 集, 因此不可能为 $\mathbb{Q}$.

(b) 证明: 先说明 f 是以 1 为周期的函数。

对 $\forall k\geq1$, 有理数 $\frac{p}{q}$ 是不可约的 $\Leftrightarrow \frac{p}{q}+k=\frac{p+kq}{q}$ 是不可约的, 这是因为 p,q 互质 $\Leftrightarrow$ $p+kq$ 与 q 互质. 故对于非零有理数 $\frac{p}{q}$, $f(\frac{p}{q})=f(\frac{p}{q}+k)=q$, $\forall k\geq1$.

又 $f(1)=1=f(0)$, 故 f 是以 1 为周期的函数.

因此只需证明 $[0,1]$ 区间上 f 的连续点为 $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. $\forall x_0\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

$\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<\frac{1}{2}$, 使 $f(\ \ )=\frac{1}{q}>\varepsilon$ 的 p 至多有有限个, 即 $1\leq q\leq[\frac{1}{\varepsilon}]$ 的正整数,

而 $\frac{p}{q}\in[0,1]$, 因此 p 只能取 $0,\cdots,q-1$. 故满足 $f(\frac{p}{q})=\frac{1}{q}>\varepsilon$ 的有理数只有有限个, 设为 $x_1,\cdots,x_N$ ~~(从小到大排列)~~, 设其中与 x_0 最接近的为 x_j, 则当 $y\in B(x_0,|x_0-x_j|)$ 时, $f(y)\leq\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{y\to x_0}f(y)=0$, 所以 $[0,1]\setminus\mathbb{Q}\subset Cont(f)$,

又显然在 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 上 f 不连续, 故 $[0,1]$ 区间上 f 的连续点全体为 $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$,

$\Rightarrow Cont(f)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(c) 证明: 反证法. 假设 f 是某一极限函数列 $(f_n)_{n\geq1}$ 的极限函数 (逐点收敛), 则由定理 6.1.7 知 $Cont(f)$ 是 $\mathbb{R}$ 中稠密的 G_δ 集, 然而由题设 $f=\mathbb{1}_\mathbb{Q}\Rightarrow$ $Cont(f)=\phi$, 矛盾, 故 f 不是第一纲的。

设 $\mathbb{Q}=(x_n)_{n\geq1}$, 设 $f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{x_1,\cdots,x_n\}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则对 $\forall n\geq1$, 易找到逐点收敛于 f_n 的连续函数列 (折线函数), 且 (f_n) 逐点收敛到 f, 证毕。(法II: 令 $f_n(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\cos^{2m}(n!\pi x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q}\text{ 或部分 }\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\text{部分 }\mathbb{Q}\end{cases}$ 则 f_n 为第一纲的, 且 (f_n) 逐点收敛到 f.)

3.(a) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微函数. 证明: $Cont(f')$ 是 $\mathbb{R}$ 中稠密的 G_δ 集.

(b) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续且在 $\mathbb{R}^2$ 上存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 证明: f 的可微点包含 $\mathbb{R}^2$ 中一个稠密的 G_δ 集.

(a) 证明: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 则对 $\forall s\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(s+h)-f(s)}{h}=f'(s)$.

任取极限为零的一个数列 $(h_n)_{n\geq 1}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(s+h_n)-f(s)}{h_n}=f'(s),\quad \forall s\in\mathbb{R}.$$

令函数 $g_n(s)=\frac{f(s+h_n)-f(s)}{h_n}$, 则 $g_n(s)$ 连续且 $(g_n)_{n\geq 1}$ 逐点收敛到 f', 故由定理 6.1.7 知 $Cont(f')$ 是 $\mathbb{R}$ 中稠密的 G_δ 集.

(b) 证明: 注意到对于 $\mathbb{R}^2$ 上的某点 (x_0,y_0), 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 均在 (x_0,y_0) 处连续, 则由数学分析的知识知 f 在 (x_0,y_0) 可微, 故 $Cont(\frac{\partial f}{\partial x})\cap Cont(\frac{\partial f}{\partial y})\subset\{(x,y): f\text{在}(x,y)\text{处可微}\}$

故只需说明 $Cont(\frac{\partial f}{\partial x})$ 与 $Cont(\frac{\partial f}{\partial y})$ 均为 $\mathbb{R}^2$ 中稠密的 G_δ 集. 类似于 (a),

$$\frac{f(x_0+h_n,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_n}\to\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$$

故 $Cont(\frac{\partial f}{\partial x})$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中稠密的 G_δ 集. 同理 $Cont(\frac{\partial f}{\partial y})$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中稠密的 G_δ 集. ▨

4. 证明: 完备度量空间中的任何一个可数子集至少含有一个孤立点。

证明: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ 无孤立点 ??

5. 课上讲过.

6. 设 E 和 F 都是 Banach 空间, (u_n) 是 $B(E,F)$ 的序列。证明下列命题等价.

(a) $(u_n(x))$ 在每个 $x\in E$ 处~~连续~~收敛。

(b) $A\subset E$ 且 $span(A)$ 在 E 中稠密, $(u_n(a))$ 在每个 $a\in A$ 处收敛, 且 (u_n) 有界.

证明: (a)$\Rightarrow$(b), 由一致有界原理知 (u_n) 有界.

(b)$\Rightarrow$(a), (u_n) 有界, 设 $M=\sup\limits_n\|u_n\|$. 对 $\forall x\in E$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists a\in A$ s.t. $\|x-a\|<\frac{\varepsilon}{4M}$. 则

$$\begin{aligned}\|u_n(x)-u_m(x)\| &\leq \|u_n(x)-u_n(a)\|+\|u_n(a)-u_m(a)\|+\|u_m(a)-u_m(x)\|\\ &\leq \|u_n\|\|x-a\|+\|u_n(a)-u_m(a)\|+\|u_m\|\|x-a\|\\ &\leq 2M\|x-a\|+\|u_n(a)-u_m(a)\|\end{aligned}$$

6. [作业] 设 E 和 F 都是 Banach 空间，(u_n) 是 $B(E,F)$ 的序列。证明下列命题等价：

(a) $(u_n(x))$ 在每个 $x \in E$ 处收敛。

(b) $A \subset E$ 且 $\mathrm{span}(A)$ 在 E 中稠密，$(u_n(a))$ 在每个 a 处收敛，(u_n) 有界。

证明. (a)⇒(b): 由一致有界原理可知 (u_n) 有界。

(b)⇒(a):(u_n) 有界，设 $M = \sup_n \|u_n\|$. 对任意 $x \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $a \in \mathrm{span}(A)$, s.t. $\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{4M}$, 则

$$\begin{aligned}\|u_n(x) - u_m(x)\| \leq & \|u_n(x) - u_n(a)\| + \|u_n(a) - u_m(a)\| + \|u_m(a) - u_m(x)\| \\ \leq & \|u_n\|\|x - a\| + \|u_n(a) - u_m(a)\| + \|u_m\|\|x - a\| \\ \leq & 2M\|x - a\| + \|u_n(a) - u_m(a)\|\end{aligned}$$

又由于 $(u_n(a))$ 收敛，存在 N, s.t. $n, m \geq N$ 时 $\|u_n(a) - u_m(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 故

$$\|u_n(x) - u_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $(u_n(x))$ 是 Cauchy 列，由 F 完备知 $(u_n(x))$ 收敛。 $\square$

又由于$(u_n(a))$收敛，故$\exists N$, s.t. $n,m\geq N$时 $\|u_n(a)-u_m(a)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 故

$$\|u_n(x)-u_m(x)\|\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\Rightarrow (u_n(x))$是 Cauchy列，由F完备知 $(u_n(x))$ 收敛。 ▨

7. 考虑空间$E=(C([0,1]),\mathbb{R})$，其上赋予范数$\|\cdot\|_\infty$. 定义$(C([0,1]))^*$中的连续泛函数序列(u_n)如下：$u_n(f)=n\int_0^1 f(t)dt-\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

(a) 证明：如果f是Lipschitz函数，则$\frac{u_n(f)}{n}=O(\frac{1}{n})$，当$n\to\infty$

[注:] Lipschitz函数在$C([0,1])$中稠密，结合(b),(a)的结论意味着$\frac{u_n(f)}{n}$在$\forall f\in C([0,1])$上收敛。

(b) 证明：$\|u_n\|=2n$.

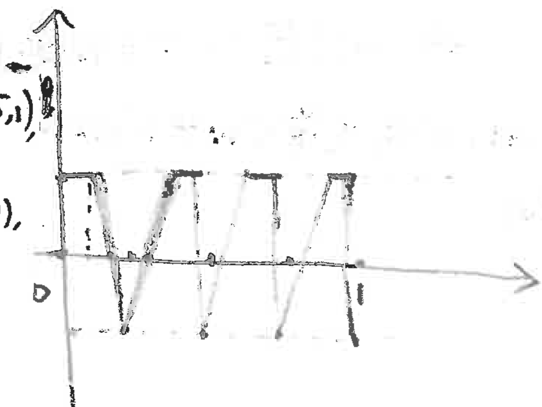
(c) 由此导出集合$\{f\in E:\frac{u_n(f)}{n}\neq O(\frac{1}{n})\}$是$C([0,1])$中稠密的$G_\delta$集。

(a) 证明：f是Lipschitz函数，设$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$, $\forall x,y\in[0,1]$.

$$\left|\frac{u_n(f)}{n}\right|=\left|\int_0^1 f(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)-f(\tfrac{k}{n})\,dt\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot K|t-\tfrac{k}{n}|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot K\cdot\frac{1}{n}=\frac{K}{n}$$

故$\frac{u_n(f)}{n}=O(\frac{1}{n})$.



(b) 证 对$\forall n\geq 1$, $\forall\varepsilon>0$, 取$\delta<\frac{\varepsilon}{2n}$, 设f为连接$(0,1)$, $(\frac{1}{n}-2\delta,1)$, $(\frac{1}{n},-1)$, $(\frac{1}{n}+2\delta,1)$, $(\frac{2}{n}-2\delta,1)$, $(\frac{2}{n},-1)$, $(\frac{2}{n}+2\delta,1)$, $(\frac{3}{n}-2\delta,1)$, $(\frac{3}{n},-1)$, $\cdots$, $(\frac{n}{n}-2\delta,1)$, $(1,-1)$的折线函数.

则 $\int_0^1 f(x)dx=(\frac{1}{n}-2\delta)n=1-2\delta n\geq 1-\varepsilon$. ~~取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2n}$ 则 $\int_0^1 f(x)dx=1-\varepsilon$~~

$\Rightarrow u_n(f)\geq n(1-\varepsilon)-\sum_{k=1}^{n}(-1)\geq n(2-\varepsilon)$，而$\|f\|_\infty=1$ 故 $\|u_n\|\geq\frac{|u_n(f)|}{\|f\|_\infty}\geq 2n-n\varepsilon$

由ε任意性知$\|u_n\|\geq 2n$.

又 $|u_n(f)|\leq n\int_0^1|f(t)|dt+\sum_{k=1}^{\infty}|f(\frac{k}{n})|\leq 2n\|f\|_\infty\Rightarrow\|u_n\|\leq 2n$，故$\|u_n\|=2n$.

(c) 证明：$\frac{u_n(f)}{n}\neq O(\frac{1}{n})\iff\exists$子列$(n_k)$, $n_k\to+\infty$ s.t. $\frac{|u_{n_k}(f)|/n_k}{(\frac{1}{n_k})}\to+\infty$ 即 $|u_{n_k}(f)|\to+\infty$ $(k\to\infty)$

$$\iff\sup_{n\geq1}|u_n(f)|=+\infty$$

即$\{f\in E:\frac{u_n(f)}{n}\neq O(\frac{1}{n})\}=\{f\in E:\sup_{n\geq 1}|u_n(f)|=\infty\}$

由(b)知 $\sup_n\|u_n\|=\infty$，故由定理6.2.4知$\{f\in E:\sup_{n\geq1}|u_n(f)|=\infty\}$为$C([0,1])$中稠密的$G_\delta$集。证毕。

8. [作业] 设 E 是 $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ 的闭向量子空间，并假设 E 中的元素都是 Lipschitz 函数。

(a) 设 $x, y \in [0,1]$ 且 $x \neq y$, 定义泛函 $\Phi_{x,y} : E \to \mathbb{R}$ 为

$$\Phi_{x,y}(f) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

证明：$\{\Phi_{x,y} : x, y \in [0,1], x \neq y\}$ 是 E^* 中的有界集。

(b) 导出 E 中的闭单位球在 $[0,1]$ 上等度连续，且 $\dim E < \infty$.

证明. (a)$\Phi_{x,y}$ 连续: 对 $\forall f \in E$, $\|\Phi_{x,y}(f)\| \leq \frac{2\|f\|}{|y-x|}$, 则 $\Phi_{x,y}$ 连续且 $\|\Phi_{x,y}\| \leq \frac{2}{|y-x|}$.

$\forall f \in E$, 存在 $K_f > 0$, $|f(y) - f(x)| \leq K_f|y - x|$, $\forall x, y \in [0,1]$, 则

$$|\Phi_{x,y}(f)| \leq K_f < \infty, \forall x, y \in [0,1], x \neq y,$$

则 $\sup_{x \neq y} |\Phi_{x,y}(f)| \leq K_f$, 由一致有界原理知 $\{\Phi_{x,y} : x, y \in [0,1], x \neq y\}$ 有界。

(b) 由 (a) 知 $\{\Phi_{x,y} : x, y \in [0,1], x \neq y\}$ 是 E^* 中的有界集，设 $M = \sup_{x \neq y} \|\Phi_{x,y}\|$. $\forall f \in \overline{B_E}$, 即 $\|f\| \leq 1$, 则 $|\Phi_{x,y}(f)| \leq \|\Phi_{x,y}\|\|f\| \leq M\|f\| \leq M$, 则

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|, \forall f \in \overline{B_E},$$

故 $\overline{B_E}$ 中的元素等度连续，又对 $\forall x \in [0,1]$, $\|f(x)\| \leq \|f\| \leq 1$, 则轨道 $\{f(x), f \in \overline{B_E}\}$ 相对紧，则由 Ascoli 定理 $\overline{B_E}$ 在 $C([0,1])$ 中紧，故 $\dim E < \infty$. □

10. [习题课] 设 E, F 都是 Banach 空间，$u \in \mathcal{B}(E, F)$ 并满足 $u(B_E)$ 在 B_F 中稠密。

(a) 计算 $\|u\|$.

(b) 证明：$u(B_E) = B_F$. 因此 u 是满射。

(c) 设 v 为 $E/\ker u$ 到 F 的映射并满足 $v \circ q = u$, 这里 $q : E \to E/\ker u$ 是商映射。证明：v 是从 $E/\ker u$ 到 F 上的等距映射。

证明. (a) 由题意知 $u(B_E) \subset B_F$, 则 $u(\overline{B_E}) \subset \overline{u(B_E)} \subset \overline{B_F}$, 则 $\|u\| \leq 1$. 又由于 $B_F \subset \overline{u(B_E)}$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $y \in B_F$ 满足 $\|y\| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, 则存在 $x \in B_E$, $\|u(x) - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则

$$\|u\| \geq \|u(x)\| \geq \|y\| - \|u(x) - y\| \geq 1 - \varepsilon,$$

故 $\|u\| = 1$.

(b) 由题设，$B_F \subset \overline{u(B_E)}$, 下证 $B_F \subset u(B_E)$.

设 $y \in B_F$, 对任意 $0 < q < 1$, 存在 $x_0 \in B_E$, s.t.

$$\|y - u(x_0)\| < q,$$

取 $y_1 = \frac{1}{q}[y - u(x_0)]$, 则 $\|y_1\| < 1$, 即 $y_1 \in B_F$, 则存在 $x_1 \in B_E$,

$$\|y_1 - u(x_1)\| < q,$$

取 $y_2 = \frac{1}{q}[y_1 - u(x_1)]$. 如此进行下去，可得一列 $(y_n) \subset B_F$ 及相应的 $(x_n) \subset B_E$, s.t.

$$\|y_n - u(x_n)\| < q, n \geq 1.$$

由以上构造过程可知

$$\begin{aligned} y = u(x_0) + qy_1 =& u(x_0) + q[u(x_1) + qy_2] \\ =& u(x_0) + qu(x_1) + \cdots + q^n u(x_n) + q^{n+1} y_{n+1} \\ =& u(\sum_{k=0}^{n} q^k x_k) + q^{n+1} y_{n+1}, \end{aligned}$$

注意到级数 $\sum_{k\geq 0} q^k x_k$ 绝对收敛且 E 完备，可知该级数收敛于某点 $x \in E$, 且

$$\|x\| \leq \sum_{n\geq 0} q^n \|x_n\| < \frac{1}{1-q},$$

即 $x \in \frac{1}{1-q} B_E$. 又由 u 连续, 则 $y = u(x)$, 故

$$y \in \frac{1}{1-q} u(B_E) \Rightarrow (1-q)y \in u(B_E) \Rightarrow (1-q)B_F \subset u(B_E),$$

则 $B_F = \cup_{0<q<1}(1-q)B_F \subset u(B_E)$, 故 $B_F \subset u(B_E)$, 所以 $B_F = u(B_E)$.

(c) 设 $A = \ker u$.

v 连续：对 $\forall e \in E$, 有

$$\|v(e + A) = \|u(e)\| = u(e + y) \leq \|u\|\|e + y\|, \forall y \in A,$$

对 y 取下确界则 $\|v(e + A)\| \leq \|u\|\|e + A\|$, 故 v 连续且 $\|v\| \leq \|u\|$.

v 是满射：对任意 $f \in F$, 存在 $e \in E$, s.t.$u(e) = v(e + A) = f$, 所以 v 是满射。

v 是单射：若 $e \in E$ 满足 $v(e + A) = u(e) = 0$，则 $e \in A$, 故 $e + A = 0 + A$, 所以 v 是单射。因此 v 是连续的线性双射，由开映射定理 v^{-1} 是连续的。

下面想说明 E/A 与 F 等距同构，先证明 $q(B_E) = B_{E\setminus A}$. 首先，$\|e\| < 1$ 时 $\|e+A\| < 1$, 故 $q(B_E) \subset B_{E\setminus A}$. 另一方面，$\|e+A\| < 1$ 时，存在 $a \in A$ 使得 $\|e+a\| < 1$, 且 $q(e+a) = e+A$, 因此 $B_{E\setminus A} \subset q(B_E)$, 故 $B_{E\setminus A} = q(B_E)$. 则

$$B_F = u(B_E) = v \circ q(B_E) = v(B_{E\setminus A}), \tag{7}$$

故

$$v(\overline{B_{E\setminus A}}) \subset \overline{v(B_{E\setminus A})} \subset \overline{B_F} \Rightarrow \|v\| \leq 1,$$

且由式 (7) 得 $v^{-1}(B_F) = B_{E\setminus A}$, 同理可证 $\|v^{-1}\| \leq 1$, 因此

$$\|e + A\| = \|v(e + A)\|, \forall e \in E.$$

□

13. [习题课](a) 设 E 是赋范空间，F 是 E 的向量子空间。证明：若 $F \neq E$, 则 F 在 E 中的内部是空集。

(b) 由此证明所有的多项式构成的空间不能赋予完备范数。

证明. (a) 反证法，若 $\mathring{F} \neq \varnothing$, 则存在 $B(x_0, r) \subset F$, 这等价于 $B(0, r) \subset F$ 且 $x_0 \in F$. 由于 $F \neq E$, 存在 $x \in E$, $x \notin F$, 而 $\frac{r}{2\|x\|} x \in B(0, r) \subset F$, 故 $x \in F$, 矛盾。

(b) 反证法。所有多项式构成的空间记为 $\mathcal{P}$, 注意到

$$\mathcal{P} = \cup_{n=1}^{\infty} \operatorname{span}\{1, x, \cdots, x^n\} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n,$$

这里 $\mathcal{P}_n = \operatorname{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$, $\mathcal{P}_n$ 有限维所以是闭的。设在某个范数 $\|\cdot\|$ 下, $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ 是完备的, 则由定理 6.1.4, $\cup_{n=1}^{\infty} \mathring{\mathcal{P}}_n$ 在 $\mathcal{P}$ 中稠密，然而由 (a) 知对任意 $n \geq 1$, $\mathring{\mathcal{P}}_n = \varnothing$, 则 $\varnothing$ 在 $\mathcal{P}$ 中稠密，矛盾。 □

14. [习题课] 设 E 是 Banach 空间，F 和 G 都是 E 的闭向量子空间，并且 $F + G$ 也是闭向量子空间。证明：存在一个常数 $C \geq 0$, 使得 $\forall x \in F + G$, 存在 $(f, g) \in E \times G$, 满足

$$x = f + g, \|f\| \leq C\|x\|, \|g\| \leq C\|x\|.$$

证明. 设 $u : F \times G \to F + G$, $(f, g) \mapsto f + g$, 显然 u 是满射，又

$$\|f + g\| \leq 2 \max\{\|f\|, \|g\|\} = 2\|(f, g)\|,$$

故 u 连续，由开映射定理，存在 $c_0 > 0$, s.t. $c_0 B_{F+G} \subset u(B_{F \times G})$, 则

$$\frac{c_0}{2} \overline{B_{F+G}} \subset c_0 B_{F+G} \subset u(B_{F \times G}),$$

令 $C = \frac{2}{c_0}$, 则 $\frac{1}{C} \overline{B_{F+G}} \subset u(B_{F \times G})$, 对任意 $x \in F + G$, $\frac{1}{C\|x\|} x \in \frac{1}{C} \overline{B_{F+G}}$, 故存在 $(f_1, g_1) \in E \times F$, 使得

$$\frac{x}{C\|x\|} = f_1 + g_1 \text{ 且 } \max\{\|f_1\|, \|g_1\|\} < 1,$$

则 $x = C\|x\| f_1 + C\|x\| g_1$, 令 $f = C\|x\| f_1, g = C\|x\| g_1$ 即可。 □

15. [习题课] 设 H 是 Hilbert 空间，且线性映射 $u : H \to H$ 满足

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle, \forall x, y \in H,$$

证明:u 连续。

证明. 设 $(x_n) \subset H$, $x_n \to 0$, $u(x_n) \to y$, 由闭图像定理，只需证明 $y = 0$. 对任意 $z \in H$,

$$\langle u(x_n), z \rangle = \langle x_n, u(z) \rangle \to 0 (n \to \infty),$$

又 $\lim_{n \to \infty} \langle u(x_n), z \rangle = \langle y, z \rangle$, 则 $\langle y, z \rangle = 0$, $\forall z \in H$, 故 $y = 0$. □

16. [作业题] 设 $X = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, 即由 $[0, 1]$ 上连续可导的函数构成的集合，其上赋予连续一致范数 $\|\cdot\|_\infty$, 并设 $Y = C([0, 1], \mathbb{R})$, 其上也赋予一致范数。考虑映射 $u : X \to Y$, $u(f) = f'$.

证明：u 的图像是闭的，但 u 不连续。解释该结论的意义。

证明. 设 $x_n, x, y \in X$, $x_n \to 0$, $u(x_n) = x_n' \to y$, 则对任意 $t \in [0,1]$,

$$\int_0^t x_n' dt \to \int_0^t y(t)dt,$$

即 $x_n(t) - x_n(0) \to \int_0^t y(t)dt$, 又 $x_n(t) - x_n(0) \to 0 - 0$, 故 $0 = \int_0^t y(t)dt$, 求导知 $y = 0$, 所以 u 的图像是闭的。

u 不连续：取 $x_n(t) = t^n$, 则 $\|x_n\| = 1$, 但是 $\|u(x_n)\| = \|x_n'\| = n\|t^{n-1}\| = n \to +\infty (n \to \infty)$, 故 u 不连续。

意义：当 X 不完备时，闭图像定理不成立。 □

19. [作业题] 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ-有限的测度空间。

(a) 假设当 $1 \le p < q \le \infty$ 时，有 $L_q(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_p(X,\mathcal{A},\mu)$. 证明：存在常数 $C \ge 0$, 使得对任意 $f \in L_q(X,\mathcal{A},\mu)$, 有 $\|f\|_p \le C\|f\|_q$.

(b) 导出以下命题的等价性：

(i) 存在 $1 \le p < q \le \infty$, 使得 $L_q(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_p(X,\mathcal{A},\mu)$.

(ii) $\mu(X) < \infty$.

(iii) 任取 $1 \le p < q \le \infty$, 有 $L_q(X,\mathcal{A},\mu) \subset L_p(X,\mathcal{A},\mu)$.

证明. (a) X 是 σ-有限的，即存在一列递增的可测集 $(A_n)_{n\ge1}$, s.t. $X = \cup_{n\ge1} A_n$ 且 $\mu(A_n) < \infty$, $\forall n \ge 1$. 考虑线性映射 $I_n : L_q \to L_p$, $f \mapsto fI_{A_n}$, 则由第三章习题 11 知

$$\|I_n(f)\|_p = (\int_{A_n} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le \mu(A_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (\int_{A_n} |f|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = \mu(A_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q,$$

故 $\|I_n\| \le \mu(A_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, 则 I_n 连续。设映射 $I : L_q \to L_p$, $f \mapsto f$, 则 $(I_n)_{n\ge1}$ 逐点收敛到 I, 由推论 6.2.5 知 I 连续且 $\sup_n \|I_n\| < \infty$ 且 $\|I\| \le \liminf_{n\to\infty} \|I_n\|$, 设 $C = \liminf_{n\to\infty} \|I_n\|$, 则 $\|f\|_p \le C\|f\|_q$.

(b) (ii)⇒(iii): 参见第三章习题 11; (iii)⇒(i): 显然;

(i)⇒(ii): 反证法，假设 $\mu(X) = \infty$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在可测集 B_n, $\mu(B_n) > n$. 取 $f = I_{B_n}$, 则 $\|f\|_p = \mu(B_n)^{\frac{1}{p}}$, $\|f\|_q = \mu(B_n)^{\frac{1}{q}}$, 则

$$\mu(B_n)^{\frac{1}{p}} \le C\mu(B_n)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \mu(B_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le C \Rightarrow n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le C \Rightarrow C = \infty,$$

矛盾。 □

20.[存在问题，因为借助了等价范数定理] 设 E 是 Banach 空间。称 p 是 E 上的半范数，若 p 满足除了正定性以外其他所有的范数公理 (即由 $p(x) = 0$ 不一定能得到 $x = 0$). 假设 p 还是 σ-次可加的：

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 在} E \text{ 中收敛} \Rightarrow p(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \le \infty$$

证明：存在常数 $M \ge 0$, s.t.$p(x) \le M(x), \forall x \in E$.

从上面这个结论导出 Banach-Steinhaus 定理、开映射定理和闭图像定理。

(a) Banach-Steinhaus 定理：令 $p(x) = \sup_{i\in I} \|u_i(x)\|$.

(b) 开映射定理：设 $u : E \to F$ 是连续线性映射，取 $p(y) = \inf\{\|x\| : u(x) = y\}, y \in F$.

(c) 闭图像定理：令 $p(x) = \|u(x)\|$.

证明. 利用等价范数定理。定义 $\|\cdot\|_1 : E \to \mathbb{R}_+$ 为 $\|x\|_1 = \|x\| + p(x), \forall x \in E$. 验证 $\|\cdot\|_1$ 是 E 上的范数：$\|x\|_1 \geq 0$, $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow x = 0$; 正齐性显然；三角形不等式显然。

验证 $\|\cdot\|_1$ 是完备的：设级数 $\sum_{n\geq 1} x_n$ 绝对收敛，即 $\sum_{n\geq 1} \|x_n\|_1 < \infty$, 则

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty \text{ 且} \sum_{n\geq 1} p(x_n) < \infty,$$

则存在 $x \in E$, s.t.$\| \sum_{k=1}^n x_k - x\| \to 0$, 且存在 N, 当 $n > m > N$ 时，$\| \sum_{k=m}^n x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 令 $n \to \infty$ 则 $\| \sum_{k=m}^\infty x_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. 而且 $p(\sum_{k=m}^\infty x_k) \leq \sum_{k=m}^\infty p(x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, 故

$$\| \sum_{k=m}^\infty x_k\|_1 = \| \sum_{k=m}^\infty x_k\| + p(\sum_{k=m}^\infty x_k) \leq \varepsilon, m > N,$$

因此 $\|x - \sum_{k=1}^{m-1} x_k\|_1 \leq \varepsilon, m > N$, 所以 $\|\cdot\|_1$ 完备且 $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_1$, 由等价范数定理，存在 $M \geq 0$, 使得 $\|\cdot\|_1 \leq M\|\cdot\| \Rightarrow p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in E$.

(a) 若 $\forall x \in E$, $\sup_{i\in I} \|u_i(x)\| < \infty$, 定义 $p(x) = \sup_{i\in I} \|u_i(x)\|$, 则 $p(x)$ 是半范数且易验证 p 满足 σ-次可加性，所以 $p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in E$, 则

$$\sup_{i\in I} \|u_i(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in E,$$

则

$$\|u_i(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in \ E \Rightarrow \|u_i\| \leq M, \forall i \Rightarrow \sup_i \|u_i\| \leq M,$$

(b) 此处设 u 为满射，想证明存在 $r > 0$, s.t. $rB_F \subset u(B_E)$. 令

$$p(y) = \inf\{\|x\| : u(x) = y\}, y \in F,$$

对于任意 $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$p(\alpha y) = \inf\{\|x\| : u(x) = \alpha y\} = \inf\{\alpha \frac{\|x\|}{\|\alpha\|} : u(\frac{x}{\alpha}) = y\} = \inf\{|\alpha|\|z\| : u(z) = y\} = |\alpha| p(y),$$

故正齐次性满足。对任意 $y_1, y_2 \in E$, 设 $A_1 = \{x_1 : u(x_1) = y_1\}$, $A_2 = \{x_2 : u(x_2) = y_2\}$, $A_3 = \{x_3 : u(x_3) = y_1 + y_2\}$. 若 $u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2$, 则

$$u(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \in A_3 \Rightarrow p(y_1 + y_2) \leq \|y_1 + y_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|,$$

所以 $p(x_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2)$, 故 p 是半范数。

验证 p 是 σ-次可加的：设 $\sum_{k=1}^\infty y_k$ 收敛，令 $J_k = \{x_k : u(x_k) = y_k\}$, 若 $u(x_k) = y_k$, 若 $\sum_{k=1}^\infty x_k$ 收敛，则由 u 的连续性有 $u(\sum_{k=1}^\infty x_k) = \sum_{k=1}^\infty y_k$, 故

$$p(\sum_{k=1}^\infty y_k) \leq \| \sum_{k=1}^\infty x_k\| \leq \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|, \tag{8}$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 发散，则 $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \infty$, 则 (8) 式仍然成立，因此

$$p(\sum_{k=1}^{\infty} y_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} p(y_k),$$

即 p 是 σ-次可加的，故 $p(y) \le M\|y\|, \forall y \in F$, 即

$$\inf\{\|x\| : u(x) = y\} \le M\|y\|,$$

因此当 $\|y\| < 1$ 时，

$$\inf\{\|x\| : u(x) = y\} < M \Rightarrow \exists x \in E, s.t. u(x) = y \text{ 且} \|x\| \le M,$$

故 $B_F \subset u(MB_E) \Rightarrow \frac{1}{M} B_F \subset u(B_E)$.

(c) 还没敲，参看笔记。 □

7 第七章习题

习题七

7.1,2,3,4

1. 证明: (a) $d(f,g)\geq 0$ ✓ $d(f,g)=d(g,f)$ ✓ $d(f,h)=\min\{1,\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-h(x)|\}\leq\min\{1,\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)-h(x)|\}\leq\min\{1,\sup|f(x)-g(x)|\}+\min\{1,\sup|g(x)-h(x)|\}$. ($\min\{1,A+B\}\leq\min\{1,A\}+\min\{1,B\}$. 可讨论 $A\leq 1$, $A>1$ 得到) $=d(f,g)+d(g,h)$. 故 d 为距离。

设 $(f_n)_{n\geq1}$ 是 Cauchy 列. 不妨设 $\varepsilon<1$. $d(f_n,f_m)<\varepsilon$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$. $(f_n(x))_{n\geq1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列, 令 $f(x)=\lim_n f_n(x)$. 在 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $(n,m>N)$ 中令 $m\to\infty$ 得 $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $n>N$. $\Rightarrow f$ 连续, 故 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, d 完备。

(b) 取 $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

若 $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),d)$ 是拓扑向量空间, 则 $\lambda\to0$ 时, $\lambda f\to0$, 即 $d(0,\lambda f)\to0$. $(\lambda\to0)$

然而 $d(0,\lambda f)=\min\{1,\sup_{x\in\mathbb{R}}|\lambda x|\}\overset{\lambda\neq0}{=\!=}1\not\to0$. 故 $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),d)$ 不是拓扑向量空间。 ▨

2. 证明: (a) A 是开集, $A+B=\bigcup_{b\in B}(A+b)$ 为开集的并, 所以 $A+B$ 开. ($A+b$ 与 A 同胚 $\Rightarrow A+b$ 开).

(b) A,B compact $\Rightarrow A\times B$ compact, 又 $\Phi(A\times B)=A+B$, Φ 连续 $\Rightarrow A+B$ compact.

(c) ??

3. 证明: (a) $f\neq0$, 则 $\exists x_0\in E$, $f(x_0)\neq0$, 令 $a=\dfrac{x_0}{f(x_0)}$, 则 $f(a)=1$.

(b) $\{1\}$ 是闭的, f 连续 $\Rightarrow f^{-1}(1)$ 是闭的 $\Rightarrow (f^{-1}(1))^c$ 是开的。

$f(0)=0\Rightarrow 0\in[f^{-1}(1)]^c$.

(c) 由(b)知 $(f^{-1}(1))^c$ 是含原点的开集, 由拓扑向量空间的性质知, 存在原点的平衡邻域 $V\subset(f^{-1}(1))^c$, 则 $\forall y\in V$, $f(y)\neq1$.

反证法, 设 $\exists y_0\in V$ s.t. $|f(y_0)|>1$, 则 $\left|\dfrac{1}{f(y_0)}\right|<1$, V 是平衡的 $\Rightarrow \dfrac{y_0}{f(y_0)}\in V$, 但 $f\left(\dfrac{y_0}{f(y_0)}\right)=1$. 矛盾, 故 $|f(y)|<1$, $\forall y\in V\Rightarrow f$ 连续。 ▨

4. 证明: (a) 往证 $\mathrm{conv}(A)=\{\sum_{k=1}^n t_k a_k: a_k\in A, t_k\geq0, \sum_{k=1}^n t_k=1, n\geq1\}$.

设 $\tilde{A}$ 为凸且 $A\subset\tilde{A}$ 则 $\sum_{k=1}^n t_k a_k\in\tilde{A}$ 故 $RHS\subset\tilde{A}$, 则 $RHS\subset\mathrm{conv}(A)$.

RHS 是凸的且 $A\subset RHS$, 故 $\mathrm{conv}(A)\subset RHS$, 故 $\mathrm{conv}(A)=RHS$.

往证 $ba(A)=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$.

若 $\tilde{A}$ 为平衡的且 $A\subset\tilde{A}$ 则 $\lambda A\subset\lambda\tilde{A}\subset\tilde{A}$, $|\lambda|\leq1$, $\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A\subset\tilde{A}$, 则 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A\subset ba(A)$.

又 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$ 为平衡的 $\Rightarrow ba(A)\subset\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$. 则 $ba(A)=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$.

7-5,6,7,8

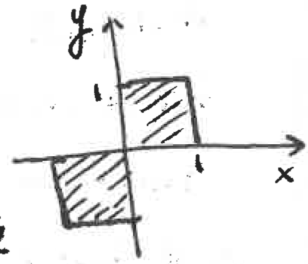
(b) 设A是平衡的，$\mathrm{conv}(A)=\{\sum_{k=1}^{n}t_k a_k: a_k\in A, t_k\geq 0, \sum_{k=1}^{n}t_k=1, n\geq 1\}$.

则 $\forall |\lambda|\leq 1$ $\lambda(\sum_{k=1}^{n}t_k a_k)=\sum_{k=1}^{n}t_k\lambda a_k\in \mathrm{conv}(A)\Rightarrow \mathrm{conv}(A)$ 平衡。

(c) 凸集的平衡包不一定还是凸的。

实数域

以$\mathbb{R}^2$为例. 设 $A=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$, A凸, $\mathrm{ba}\,A=\bigcup_{|\lambda|\leq 1}\lambda A=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ $\cup\{(x,y): -1\leq x\leq 0, -1\leq y\leq 0\}$ 不是凸的



5. 证明: (a) $p(f)\geq 0$ ✓ $p(\lambda f)=|\lambda|p(f)$ ✓ $p(f+g)\leq p(f)+p(g)$ ✓

$p(f)=0\Rightarrow f(z)=0, \forall z\in K \xRightarrow{\text{复分析}} p(z)=0, \forall z\in\Omega$ 故p是$H(\Omega)$上的范数。

(b) 设 $f_n(z)=e^{n(z-2)}$, 则对 $\forall z\in K$, $z=x+iy$, $x^2+y^2\leq 1$. $|f_n(z)|=|e^{n(x-2+iy)}|=e^{n(x-2)}$ $\leq e^{-n}\to 0\ (n\to\infty)$. 故 $p(f_n-0)\to 0\ (n\to\infty)$.

但取紧集 $K=\{2\}$. $p_K(f_n-0)=1\not\to 0$, 故由p诱导的拓扑不同于在Ω的紧子集上一致收敛的拓扑.(注意到K是紧集，则后者拓扑更强)

6. 证明: (a) $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 非负 ✓ 正齐 ✓ 三角形不等式 ✓. 故为半范。

A在[0,1]中稠密时，它是一个范数。下面设A在[0,1]中稠密.

$\inf_{t\in A}\alpha(t)>0$时，它等价于一致范数: $\sum_{t\in A}\alpha(t)f(t)\leq(\sum_{t\in A}\alpha(t))\cdot\|f\|_\infty$.

设 $\|f\|_\infty=|f(t_0)|$, $t_0\in[0,1]$, 则 $\exists(t_n)_{n\geq 1}\subset A$. $\lim_n t_n=t_0$ 则 $f(t_n)\to f(t_0)$

$\alpha(t_n)f(t_n)\geq(\inf_{t\in A}\alpha(t))(\|f\|_\infty-\varepsilon)$ 则 $\inf_{n\geq 1}\alpha(t_n)f(t_n)\geq(\inf_{t\in A}\alpha(t))\cdot\|f\|_\infty$

故 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。

7. 证明: (a) 任取 $V\in\mathcal{N}(0)$, $\exists$常数$\alpha>0$, 使得对所有$t\geq\alpha$, 有$B\subset tV$ 即 $\frac{B}{t}\subset V$. 故 $(rB)_{r>0}$ 是原点的邻域基。

(b) 由定理知存在0点的平衡邻域$D\subset B$, 则 $\mathrm{conv}\,D\subset B$ 且 $\mathrm{conv}\,D$ 仍平衡.
取 $C=(\mathrm{conv}\,D)^{\circ}$, 则 $C\subset B$, 且 C为原点的凸平衡开邻域。

(c) $p_C(x)=\inf_{\lambda>0}\{\lambda: \frac{x}{\lambda}\in C\}$. $p_C(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0.\ \frac{x}{\varepsilon}\in C\Rightarrow x\in\underset{\subset\varepsilon B}{\varepsilon C}$, $\forall\varepsilon>0$.

又$(rB)_{r>0}$是原点的邻域基. 故 $x\in\bigcap_{V\in\mathcal{N}(0)}V\Rightarrow x=0$?

8. 证明: (a)⇒(b): 设$(E,\tau)=(E,d)$, d为距离, 则 $\forall x\in E$, $(B_d(x,\frac{1}{n}))_{n\geq 1}$ 为x处的可数邻域基。 (b)⇒(c): ??

7-10,11

10. 证明：(a) 设 $f\in E^*$，$f\neq 0$. 则由于 A 是紧集知 $f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集即有界闭集，则 $f(A)$ 有最大值 α 则 $A\subset\{f\le\alpha\}$ 且 $A\cap\{f=\alpha\}$ 非空，故 $\{f=\alpha\}$ 为 A 的支撑超平面。

(b) 设 A 是内部非空的闭凸集，$\forall x\in\partial A$，$x\notin\mathring{A}$. 由 Hahn-Banach 隔离定理，存在 $f\in E^*$，$\alpha\in\mathbb{R}$ s.t. $f(a)<\alpha$，$\forall a\in\mathring{A}$ 且 $f(x)=\alpha$

则由 f 连续知 $f(a)\le\alpha$，$\forall a\in A$，故 $A\subset\{f\le\alpha\}$ $A\cap\{f=\alpha\}\neq\phi$，$x\in\{f=\alpha\}$. $\square$

11. 证明：(a) 正齐性，三角形不等式易证。
$\forall\varepsilon>0$，$\frac{x}{\|x\|+\varepsilon}\in B_X\subset C\Rightarrow p(x)\le\|x\|+\varepsilon\Rightarrow p(x)\le\|x\|$，$\forall x\in X$.

设 $I(x)=\{\lambda>0:\frac{x}{\lambda}\in C\}$. 则对 $\forall\lambda\in I(x)$，由于 $\frac{x}{\lambda}\in C\subset kB_X\Rightarrow\frac{\|x\|}{\lambda}\le k\Rightarrow\frac{\|x\|}{k}\le\lambda$

$\Rightarrow$ 故 $\frac{1}{k}\|x\|\le p(x)$ $\forall x\in X$. 综上，$\frac{1}{k}\|x\|\le p(x)\le\|x\|$，$\forall x\in X$.

(b) (i) 只需证 $x\in C\Leftrightarrow p(x)\le 1$. "$\Rightarrow$" 显然。"$\Leftarrow$" $p(x)\le 1$，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\in C$，又 $\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\to x$，C 闭，则 $x\in C$.

(ii) 设 $p(x)<1$，由 p 连续，$\exists B(x,r)\subset\{p(x)<1\}\subset C\Rightarrow x\in\mathring{C}$. 故 $p(x)<1\Rightarrow x\in\mathring{C}$.

反过来，设 $x\in\mathring{C}$，则 $\exists r>0$，$B(x,r)\subset C$，则 取 $\varepsilon<\frac{r}{\|x\|}$ 有 $x+\varepsilon x\in C\Rightarrow p(x)\le\frac{1}{1+\varepsilon}<1$，故 $\mathring{C}\subset\{x:p(x)<1\}$.

(iii) $x\in\partial C\Leftrightarrow x\in C$ 且 $x\notin\mathring{C}\Leftrightarrow p(x)\le 1$ 且 $p(x)\ge 1\Leftrightarrow p(x)=1$.

(c) 取 $x\in\partial C$，则 $x\notin\mathring{C}$，$\mathring{C}$ 是开凸对称子集，由 Hahn-Banach 隔离定理，$\exists f\in X^*$ s.t. $f(x)=1$ 且在集合 $\mathring{C}$ 上 $|f|<1$，且由 f 连续知在集合 C 上 $|f|\le 1$. $\square$

13. 证明: (a) A_0是闭的: 设 $(z^k)_{k\geq 1}\subset A_0$, $\|z_k-z\|_1\to 0$, 其中 $z\in l_1$, 往证 $z\in A_0$.

$z^k\in A_0 \Rightarrow z^k=\sum\limits_{n\geq 1} z^k_{2n-1}e_{2n-1}$, 设 $z=\sum\limits_{n\geq 1} z_n e_n$, 则 $|z_{2n}-z^k_{2n}|\leq \|z-z^k\|_1\to 0\ (k\to\infty)$

又 $z^k_{2n}=0$, 则 $z_{2n}=0 \Rightarrow z\in A_0$.

B是闭的: 设 $(z^k)_{k\geq 1}\subset B$, $z\in l_1$ 且 $\|z_k-z\|\to 0$, 往证 $z\in B$.

$z^k\in B \Rightarrow z^k_{2m}=\frac{1}{2^m}z^k_{2m-1}$, $\forall m\geq 1$. 则 $|z_{2m}-\frac{1}{2^m}z_{2m-1}|\leq |z_{2m}-z^k_{2m}|+|z^k_{2m}-\frac{1}{2^m}z^k_{2m-1}|$ $+\frac{1}{2^m}|z^k_{2m-1}-z_{2m-1}|$

$\leq 2\|z-z^k\|\to 0\ (k\to\infty) \Rightarrow z_{2m}=\frac{1}{2^m}z_{2m-1}$, $\forall m\geq 1$, 故 $z\in B$.

只需证若 $f\in l_1^*$, $f|_{A_0+B}=0 \Rightarrow f\equiv 0$, 就可得 A_0+B在l_1中稠密。

设 $f\in l_1^*=l_\infty$, $f|_{A_0+B}=0 \Rightarrow f|_{A_0}=0$ 且 $f|_B=0$.

则对 $\forall m\geq 1$, $e_{2m-1}\in A_0 \Rightarrow f(e_{2m-1})=0$.

对 $\forall m\geq 1$, $e_{2m-1}+\frac{1}{2^m}e_{2m}\in B \Rightarrow f(e_{2m-1}+\frac{1}{2^m}e_{2m})=0 \Rightarrow f(e_{2m})=0$.

故 $f(e_n)=0$, $\forall n\geq 1 \Rightarrow f\equiv 0$. 故 A_0+B在l_1中稠密。

证明A_0+B在l_1中稠密法II: $\forall x\in l_1$. $x=\sum\limits_{n\geq 1}x_n e_n=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}x_{2n-1}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n}$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{N}x_{2n-1}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{N}(2^n x_{2n}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n})+\sum\limits_{n=1}^{N}(x_{2n-1}-2^n x_n)e_{2n-1}\in A_0+B$,

故 A_0+B在l_1中稠密。

(b) 想证 $c=\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}e_{2n}\notin A_0+B$.

若 $c\in A_0+B$, 则 $\exists\, x=\sum\limits_{n\geq 1}x_{2n-1}e_{2n-1}\in A_0$, $y=\sum\limits_{n\geq 1}y_{2n-1}e_{2n-1}+\frac{y_{2n-1}}{2^n}e_{2n}\in B$. 使得 $c=x+y$, 即

$\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}e_{2n}=\sum\limits_{n\geq 1}(x_{2n-1}+y_{2n-1})e_{2n-1}+\frac{1}{2^n}y_{2n-1}e_{2n}$

$\Rightarrow$ 对 $\forall n\geq 1$, $y_{2n-1}=1 \Rightarrow y=\sum\limits_{n\geq 1}e_{2n-1}+\frac{1}{2^n}e_{2n}$, $\|y\|=\infty$, $y\notin l_1$, 矛盾, 故 $c\notin A_0+B$.

想证 $(A_0-c)\cap B=\phi$.

反设若 $(A_0-c)\cap B\neq\phi$, 则 $\exists\, y=a_0-c=b$, $a_0\in A_0$, $b\in B \Rightarrow c=a_0-b\in A_0+B$, 矛盾, 故 $A\cap B=\phi$.

若存在非零 $f\in l_1^*$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$, s.t. $A\subset\{f\leq\alpha\}$ 以及 $B\subset\{f\geq\alpha\}$. 则 $f(A_0-c)\leq\alpha \Rightarrow$

$f(A_0)\leq\alpha+f(c) \Rightarrow f|_{A_0}=0$, $f(B)\geq\alpha \Rightarrow f|_B=0$, 故 $f|_{A_0+B}=0$, 又 A_0+B在l_1中稠密

$\Rightarrow f=0$, 矛盾。

由于 $\|\frac{f_1+f_2}{2}\|=1$，可取 S_E 上的一列 (x_n)，$\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)(x_n)\to 1$.

还需说明：$\forall x\in S_E$，不存在 B_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ ⟺ 不存在 S_E 中相异的 x_1,x_2 s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

"⇒"显然。"⇐"反证，若存在 B_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$\|x_1\|\le 1$，$\|x_2\|\le 1$。则必有 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$，否则若 $\|x_1\|<1$ 则 $\|\frac{x_1+x_2}{2}\|\le\frac12\|x_1\|+\frac12\|x_2\|<1$，矛盾。则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$\|x_1\|=1$，$\|x_2\|=1$，$x_1\ne x_2$

设 $y_n=x_n-a_ne$，

(ii) ~~$x_n=y_n+a_ne$~~ $\Rightarrow (f_1-f_2)(x_n)=(f_1-f_2)(y_n)+a_n \Rightarrow (f_1-f_2)(y_n)=0$，故 $y_n\in F$

由(i)知 $a_n=f_1(x_n)-f_2(x_n)\to 0$，则 $\|y_n\|\le\|x_n\|+|a_n|\|e\|\to 1$ 且 $\|y_n\|\ge\|x_n\|-|a_n|\|e\|\to 1$，故 $\lim_n\|y_n\|=1$.

(iii) $\varphi(y_n)=\varphi(x_n-a_ne)=\overset{\to 1}{f_1(x_n)}-\overset{\to 0}{a_n}f_1(e)\to 1\ (n\to\infty)$，则 $\|\varphi\|\ge\frac{|\varphi(y_n)|}{\|y_n\|}\to 1\ (n\to\infty)$

故 $\|\varphi\|\ge 1$，又 f_1 是 φ 的延拓 $\Rightarrow \|\varphi\|\le\|f_1\|=1$，故 $\|\varphi\|=1$，因此，φ 有两个不同的Hahn-Banach线性保范延拓 f_1 和 f_2，矛盾，故 E^* 是严格凸的. ∎

16 证明：(a) $\forall x\in F$. $|f(x)|=|\lim_n\frac1n\sum_{k=1}^n x_k|\le\max_{k\ge 1}|x_k|=\|x\|_\infty$，故 $f\in F^*$.

(b) 由(a)知 $\|f\|\le 1$，取 $\mathbb{1}=(1,1,1,\cdots)$，则 $\|\mathbb{1}\|=1$，$f(\mathbb{1})=1\Rightarrow\|f\|=1$.

由Hahn-Banach延拓定理，$\exists\, m\in\ell_\infty^*$. s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$.

则对 $\forall x\in\ell^\infty$，注意到 $Tx-x=(x_2-x_1,x_3-x_2,x_4-x_3,\cdots)\Rightarrow m_n(Tx-x)=\frac{x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+x_{n+1}-x_n}{n}=\frac{x_{n+1}-x_1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，故 $Tx-x\in F$ 且 ~~$m(Tx-x)=0$~~ $f(Tx-x)=0$，则 $m(Tx-x)=f(Tx-x)=0$，即 $m\circ T=T$.

为了说明 $\liminf_{n\to\infty}x_n\le m(x)\le\limsup_{n\to\infty}x_n$，$\forall x\in\ell_\infty$，先说明当 $x\ge 0$ 时，$m(x)\ge 0$.

实际上，对 $\forall x\ge 0$，$x=\|x\|\frac{x}{\|x\|}$，$0\le\frac{x}{\|x\|}\le 1$，则 $1-m(\frac{x}{\|x\|})=m(\mathbb{1}-\frac{x}{\|x\|})\le\|\mathbb{1}-\frac{x}{\|x\|}\|\le 1$，这里 $\mathbb{1}:=(1,1,1,\cdots)$，故 $m(\frac{x}{\|x\|})\ge 0\Rightarrow m(x)\ge 0$.

设 $b=$ ~~sup~~ $\limsup_{n\to\infty}x_n$，$\forall\varepsilon>0$ $\exists N$，$n>N$ 时 $x_n<b+\varepsilon\Rightarrow(b+\varepsilon)e-T^N(x)>0\Rightarrow$

$m((b+\varepsilon)e-T^N(x))\ge 0$，即 $(b+\varepsilon)\underbrace{m(e)}_{f(e)=1}-m(T^N(x))=(b+\varepsilon)-m(x)\ge 0\Rightarrow m(x)\le b+\varepsilon$

$(m\circ T^N=m\circ T^{N-1}=\cdots=m\circ T=m)$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $m(x)\le b=\limsup_{n\to\infty}x_n$，同理 $m(x)\ge\liminf_{n\to\infty}x_n$. ∎

17 证明：(a) $d(\mathbb{1},Y)=\inf_{x\in\ell_\infty}\|\mathbb{1}-(x-Tx)\|$，故只需证对 $\forall x\in\ell_\infty$，$\|\mathbb{1}-(x-Tx)\|\ge 1$.

设 $y=\mathbb{1}-(x-Tx)$，则 $\|y\|\ge\frac1n\sum_{k=1}^n|y_k|\ge\frac1n|\sum_{k=1}^n y_k|=|\frac1n(x_{n+1}-x_1)+1|\to 1$ (因为 $|x_{n+1}-x_1|\le 2\|x\|$)

故 $d(\mathbb{1},Y)\ge 1$.

(b) 定义函数 $f:\mathrm{span}(Y\cup\{\mathbb{1}\})\to\mathbb{R}$ s.t. $f(t\mathbb{1}+y)=t$，$t\in\mathbb{R}$，$y\in Y$

则 $|f(t\mathbb{1}+y)|=|t|\le|t|\,d(\mathbb{1},Y)\le|t|\,\|\mathbb{1}+\frac{y}{t}\|=\|t\mathbb{1}+y\|\Rightarrow\|f\|\le 1$

又 $\|\mathbb{1}\|=1$，$f(\mathbb{1})=1\Rightarrow\|f\|=1$.

(c) 设 $F=\mathrm{span}(Y\cup\{\mathbb{1}\})$，由(b)知 f 是子空间 F 上的连续泛函且 $\|f\|=1$，由Hahn-Banach延拓定理知 $\exists\, m\in\ell_\infty^*$ s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$，则对 $\forall x\in\ell_\infty$ $m(x-Tx)=f(x-Tx)=0\Rightarrow m\circ T=m$ ∎

20. (a) ⇒ (b): $u\in B(E,F)$，则存在唯一的 $u^*: F^*\to E^*$，$u^*\in B(F^*,E^*)$，且 $\|u\|=\|u^*\|$，

且满足 $\langle u^*(f^*),x\rangle=\langle f^*,u(x)\rangle$，$\forall f^*\in F^*$，$x\in E$.

设 $x_\alpha \xrightarrow{w} x$（网收敛），$\alpha\in N(x)$，则 $\forall x^*\in E^*$，$x^*(x_\alpha)\to x^*(x)$.

则 $\langle u^*(f^*),x_\alpha\rangle\to\langle u^*(f^*),x\rangle$，$\forall f^*\in F^*$

即 $\langle f^*,u(x_\alpha)\rangle\to\langle f^*,u(x)\rangle$，$\forall f^*\in F^*$，故 $u(x_\alpha)\xrightarrow{w} u(x)$.

(b) ⇒ (c)：显然.

(c) ⇒ (a)：

7-21

(21) 证明：(a) $1\le p<\infty$ 时，$L_p^*(0,2\pi)=L_q(0,2\pi)\subset L_1(0,2\pi)$（有限测度空间）。

对 $\forall f\in L_q(0,2\pi)$，$\int_0^{2\pi} e_n \overline{f}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-int}\overline{f(t)}\,dt = 2\pi\hat{f}(n)\to 0$

（定理 5.2.13），故 $e_n\xrightarrow{w}0$。

但 $\|e_n\|=\int_0^{2\pi}|e_n(t)|^2dt=2\pi \not\to 0$，故 e_n 不依范数收敛到 0。

(b) $L_2^*(0,2\pi)=L_2(0,2\pi)$。

$\forall f\in L_2(0,2\pi)$，$\left|\int_0^{2\pi}f(t)f_n(t)dt\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_0^{2\pi}f(t)e_k(t)dt\right|$

$=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi}\overline{\overline{f(t)}e^{-ikt}}dt+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}\int_0^{2\pi}\overline{\overline{f(t)}e^{-ikt}}dt\right|$

$=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\hat{\overline{f}}(k)+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}\hat{\overline{f}}(k)\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|\hat{\overline{f}}(k)|+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}|\hat{\overline{f}}(k)|$

$\forall\varepsilon>0$，取 N 使得 $\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|\hat{\overline{f}}(k)|^2\right)^{\frac12}<\frac{\varepsilon}{2}$（由 Parseval 恒等式这是可以做到的），$\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}|\hat{\overline{f}}(k)|\le\frac{1}{n}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|\hat{\overline{f}}(k)|^2\right)^{\frac12}\cdot(n^2)^{\frac12}\le\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}|\hat{\overline{f}}(k)|^2\right)^{\frac12}<\frac{\varepsilon}{2}$，

又由 $\underbrace{\sum_{k\ge1}|\hat{\overline{f}}(k)|^2}_{<\infty}$ 知 $\hat{\overline{f}}(k)\to0$ 知 $(\hat{\overline{f}}(k))_{k\ge1}$ 有界，设 $K=\sup_{k\ge1}|\hat{\overline{f}}(k)|$，则

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|\hat{\overline{f}}(k)|\le\frac{N}{n}K\le\frac{\varepsilon}{2}$（$n$ 充分大），故 n 充分大时，$\left|\int_0^{2\pi}f(t)f_n(t)dt\right|<\varepsilon$，

所以 f_n 在 $L_2(0,2\pi)$ 中弱收敛到 0。

又 $\|f_n\|=\frac{1}{n}(\underbrace{1+1\cdots+1}_{n^2\text{个}})^{\frac12}=1\not\to0$，故 f_n 不依范数收敛到 0。 ▨

8 第八章习题

1. [作业] 设 $1 \leq p \leq \infty$, 考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的 p-范数：

$$\|(x_1,x_2)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, p < \infty; \|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}.$$

设 $F = \mathbb{R} \times \{0\}$, 即由 $e_1 = (1,0)$ 生成的向量子空间，并设 $f : F \to \mathbb{R}$ 是线性泛函，满足 $f(e_1) = 1$.

(a) 当 $\mathbb{R}^2$ 上赋予 $\|\cdot\|_1$ 范数时，确定 f 从 F 到 $\mathbb{R}^2$ 的所有保范延拓。

(b) 当 $\mathbb{R}^2$ 上赋予 $\|\cdot\|_p$ 范数时，考虑同样的问题。

证明. (a) 设 $\tilde{f}$ 是 f 的保范延拓，则 $\|\tilde{f}\| = 1$ 且 $\tilde{f}|_F = f$. 设 $e_2 = (0,1)$, 则 $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $\tilde{f}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1\tilde{f}(e_1) + x_2\tilde{f}(e_2) = x_1 + x_2\tilde{f}(e_2)$. 设 $c = \tilde{f}(e_2)$, 由 $\|\tilde{f}\| = 1 \Rightarrow |\tilde{f}(e_2)| \leq 1 \Rightarrow |c| \leq 1$. 反过来，设 $|c| \leq 1$, 则易看出形如 $\tilde{f}(x_1e_1+x_2e_2) = x_1+cx_2$ 的线性泛函为 f 的保范延拓。

(b) 设 $\tilde{f}$ 是 f 的保范延拓，则 $\|\tilde{f}\| = 1$ 且 $\tilde{f}|_F = f$. 与 (a) 的过程一样, 只需要确定常数 c 的取值范围即可找到 f 的所有保范延拓。

$1 \leq p < \infty$ 时:

$$\|\tilde{f}\| = 1 \Leftrightarrow \frac{|x_1 + cx_2|}{(|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}} \leq 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

上式等价于

$$|x_1|+|c||x_2| \leq (|x_1|^p+|x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |c| \leq \frac{(|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} - |x_1|}{|x_2|} = (t^p+1)^{\frac{1}{p}} - t, \forall t \geq 0,$$

进一步等价于 $|c| \leq \inf_{t\geq 0}(t^p+1)^{\frac{1}{p}} - t$, 设 $\phi(t) = (t^p+1)^{\frac{1}{p}} - t, t \geq 0$, 则 $\phi(t) \geq 0$, 又由洛必达法知 $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$, 故 $\inf_{t\geq 0} \phi(t) = 0$, 因此 $c = 0$, $\tilde{f}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1$ 即为 f 的全体保范延拓。

$p = \infty$ 时：$\|\tilde{f}\| \leq 1 \Leftrightarrow |x_1| + |c||x_2| \leq \max\{|x_1|,|x_2|\}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 则当 $|x_2| \leq |x_1|$ 时，$|x_1| + |c||x_2| \leq |x_1| \Rightarrow |c||x_2| \leq 0$, 取 $x_2 \neq 0$ 则 $c = 0$, $\tilde{f}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1$ 即为 f 的全体保范延拓。 □

3. [习题课] 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间，$A \subset E$, 并设映射 $f : A \to \mathbb{K}$ 以及常数 $\lambda \geq 0$. 证明：存在 $\hat{f} \in E^*$, 使得

$$\hat{f}|_A = f \text{ 且} \|\hat{f}\| \leq \lambda$$

的充分必要条件是

$$|\sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k)| \leq \lambda \|\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k\|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall (a_1, \cdots, a_n) \in A^n, \forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

证明. $\Rightarrow$: $|\sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k)| = |\hat{f}(\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k)| \le \lambda \|\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k\|$.

$\Leftarrow$: 记 $F = \mathrm{span}(A)$, 定义 $\mathrm{span}(A)$ 上的线性映射 $\tilde{f} : \mathrm{span}(A) \to \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k)$. 先验证这是良定义的：若有 $\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k = \sum_{l=1}^n \beta_l b_l$, 则

$$|\sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k) - \sum_{l=1}^n \beta_l f(b_l)| \le \lambda \|\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k - \sum_{l=1}^n \beta_l b_l\| = 0,$$

因此 $\sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k) = \sum_{l=1}^n \beta_l f(b_l)$, 故 $\tilde{f}$ 是良定义的。由题设 $\|\tilde{f}\|_F \le \lambda$, 且 $\tilde{f}|_A = f$, 根据 Hahn-Banach 定理，存在 $\hat{f} \in E^*$, s.t.$\hat{f}|_F = \tilde{f}$ 且 $\|\hat{f}\| = \|\tilde{f}\| \le \lambda$, 所以 $\hat{f}|_A = f$ 且$\|\hat{f}\| \le \lambda$. □

4. [习题课] 设 E 是赋范空间 (Hausdorff 拓扑向量空间)，A 是 E 中包含原点的开凸集以及 $x_0 \in E \backslash A$.

(a) 证明：存在 $f \in E^*$, s.t.

$$\mathrm{Re} f(x_0) = 1 \text{且在} A \text{上} \mathrm{Re} f < 1$$

(b) 假设 A 还是平衡的。证明：可以选择 $f \in E^*$, 使其满足

$$f(x_0) = 1 \text{且在} A \text{上} |f| < 1$$

证明. (a) 由于 $x_0 \notin A$, $\{x_0\}$ 是凸的，由 Hahn-Banach 隔离定理，存在 $f \in E^*$, 常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\mathrm{Re} f(a) < \alpha \le \mathrm{Re} f(x_0), \forall a \in A,$$

由于 $0 \in A$, 则 $\alpha > 0$, 故 $\mathrm{Re} f(x_0) > 0$, 取 $g = \frac{f}{\mathrm{Re} f(x_0)}$, 则 $g \in E^*$ 且

$$\mathrm{Re} g(a) = \frac{\mathrm{Re} f(a)}{\mathrm{Re} f(x_0)} < 1,$$

且 $\mathrm{Re} g(x_0) = 1$, g 即为所求泛函。

(b) 由于 $x_0 \notin A$, $\{x_0\}$ 是凸的，由 Hahn-Banach 隔离定理，存在 $f \in E^*$, 常数 $\alpha \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\mathrm{Re} f(a) < \alpha \le \mathrm{Re} f(x_0) \le |f(x_0)| = \lambda f(x_0), \forall a \in A,$$

这里 $\lambda = \frac{\overline{f(x_0)}}{|f(x_0)|}$, 令 $h = \frac{\lambda f}{|f(x_0)|}$, 则 $h \in E^*$ 且 $h(x_0) = 1$, 又因为 A 平衡，故对任意 $a \in A$ 有

$$|h(a)| = \lambda_a h(a) = \frac{\lambda_a \lambda f(a)}{|f(x_0)|} = \frac{f(\lambda_a \lambda a)}{|f(x_0)|} = \frac{\mathrm{Re} f(\lambda_a \lambda a)}{|f(x_0)|} < \frac{|f(x_0)|}{|f(x_0)|} = 1,$$

其中 $\lambda_a = \frac{\overline{h(a)}}{|h(a)|}$, 故 h 即为所求泛函。 □

5. [作业] 设 E 是赋范空间 (Hausdorff 局部凸空间)，A 是 E 中包含原点的闭凸集以及 $x_0 \in E \backslash A$.

(a) 证明：存在 $f \in E^*$, 使得

$$\mathrm{Re} f(x_0) > 1 \text{且} \sup_{x\in A} \mathrm{Re} f(x) \le 1.$$

(b) 假设 A 还是平衡的。证明: 可以选择 f, 使其满足

$$f(x_0) > 1 \text{且} \sup_{x\in A} |f(x)| \le 1.$$

证明. (a) 由 Hahn-Banach 严格隔离定理，存在 $g \in E^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得

$$\sup_{x\in A} \mathrm{Re} g(x) < \alpha < \beta < \mathrm{Re} g(x_0),$$

又显然 $0 \in A$, 则 $0 < \alpha < \beta$, 令 $f = \frac{g}{\alpha}$ 那么 $\mathrm{Re} f(x_0) > 1$ 且 $\sup_{x\in A} \mathrm{Re} f(x) < 1$.

(b) 由 Hahn-Banach 严格隔离定理，存在 $g \in E^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得

$$\sup_{x\in A} \mathrm{Re} g(x) < \alpha < \beta < \mathrm{Re} g(x_0) \le |g(x_0)| = \lambda g(x_0),$$

其中 $\lambda = \frac{\overline{g(x_0)}}{|g(x_0)|}$, 令 $f = \frac{\lambda g}{\alpha}$, 则 $f(x_0) = \frac{|g(x_0)|}{\alpha} > 1$, 且由于 A 是均衡的，

$$\sup_{a\in A} |f(a)| = \sup_{a\in A} \mathrm{Re} f(a) = \frac{1}{\alpha} \sup_{a\in A} \mathrm{Re} \lambda g(a) = \frac{1}{\alpha} \sup_{a\in A} \mathrm{Re} g(\lambda a) = \frac{1}{\alpha} \sup_{a\in A} \mathrm{Re} g(a) < 1.$$

□

6. [作业] 设 E 是实的赋范空间 (Hausdorff 局部凸空间)，$A \subset E$. 定义 E 的子集 $\hat{A}$ 由满足如下性质的元素 x 构成：若取 $f \in E^*$ 满足对任意 $a \in A$, 有 $f(a) \le 1$, 则 $f(x) \le 1$.

(a) 证明：$\overline{\mathrm{conv}(A)} \subset \hat{A}$.

(b) 证明：$\overline{\mathrm{conv}(A)} = \hat{A}$ 等价于 $0 \in \overline{\mathrm{conv}(A)}$.

证明. (a) 注意到 $A \subset \hat{A}$, 故只需验证 $\hat{A}$ 是凸的且闭的。设 $x \in \hat{A}$, $y \in \hat{A}$, 若 $f \in E^*$ 满足对于任意 $a \in A$, $f(a) \le 1$, 则 $f(x) \le 1$, $f(y) \le 1$, 那么 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \le 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in \hat{A}$, 故 $\hat{A}$ 是凸的，则 $\mathrm{conv}(A) \subset \hat{A}$.

设 $(x_n)_{n\ge 1} \subset \hat{A}$, 且收敛于某个 x, 若 $f \in E^*$ 满足对于任意 $a \in A$, $f(a) \le 1$, 则 $f(x_n) \le 1$, 由 f 连续，令 $n \to \infty$ 得 $f(x) \le 1$, 故 $x \in \hat{A}$, 所以 $\hat{A}$ 是闭的。

(b)"$\Rightarrow$": 显然 $0 \in \hat{A}$, 因此 $0 \in \overline{\mathrm{conv}(A)}$.

"$\Leftarrow$": 反证法，若 $\overline{\mathrm{conv}(A)} \ne \hat{A}$, 则 $\overline{\mathrm{conv}(A)} \subsetneq \hat{A}$, 那么存在 $x_0 \in \hat{A}$, $x_0 \notin \overline{\mathrm{conv}(A)}$, 由习题 5(a)(这里 E 是实数域上的，那里的 $\mathrm{Re} f$ 可以直接换成 f) 知存在 $f \in E^*$,

$$f(a) \le 1, \forall a \in \overline{\mathrm{conv}(A)} \text{且} f(x_0) > 1,$$

这与 $x_0 \in \hat{A}$ 矛盾，故 $\overline{\mathrm{conv}(A)} = \hat{A}$. □

7. [习题课] 设 E 是赋范空间 (Hausdorff 局部凸空间)，$A \subset E$. 定义 E 的子集 $\hat{A}$ 由满足如下性质的元素 x 构成：若取 $f \in E^*$ 满足对任意 $a \in A$, 有 $|f(a)| \le 1$, 则 $|f(x)| \le 1$.

设 $\mathrm{ccb}A$ 表示 A 的闭凸平衡包，即包含 A 的所有闭凸平衡集的交集。

(a) 证明：$\mathrm{ccb}A \subset \hat{A}$.

(b) 证明：$\mathrm{ccb}A = \hat{A}$.

证明. (a) 注意到 $A \subset \hat{A}$, 故只需验证 $\hat{A}$ 是闭凸平衡集。设 $x \in \hat{A}$, $y \in \hat{A}$, 若 $f \in E^*$ 满足对于任意 $a \in A$, $|f(a)| \le 1$, 则 $|f(x)| \le 1$, $|f(y)| \le 1$, 那么 $|f(\lambda x + (1-\lambda)y)| \le \lambda|f(x)| + (1-\lambda)|f(y)| \le 1$, 故 $\hat{A}$ 是凸的，同理可证 $\hat{A}$ 是平衡的。设 $(x_n)_{n\ge1} \subset \hat{A}$, 且收敛于某个 x, 若 $f \in E^*$ 满足对于任意 $a \in A$, $|f(a)| \le 1$, 则 $|f(x_n)| \le 1$, 令 $n \to \infty$ 得 $|f(x)| \le 1$, 故 $x \in \hat{A}$, 故 $\hat{A}$ 是闭的。

(b) 若 $\mathrm{ccb}A \ne \hat{A}$, 则 $\mathrm{ccb}A \subsetneq \hat{A}$, 那么存在 $x_0 \in \hat{A}$, $x_0 \notin \mathrm{ccb}A$, 由习题 5(b) 知存在 $f \in E^*$, $|f(a)| \le 1, \forall a \in \mathrm{ccb}A$ 且 $f(x_0) > 1$, 这与 $x_0 \in \hat{A}$ 矛盾。 □

9. [习题课] 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间 (拓扑向量空间)。称 E 的向量子空间 H 是超平面，若有某个 $x_0 \in E\backslash H$, 使得 $E = H + \mathbb{K}x_0$.

(a) 证明：若 H 是超平面，则对任意 $x_0 \in E\backslash H$, $E = H + \mathbb{K}x_0$ 成立。

(b) 证明：一个超平面或是 E 中的稠密集，或是闭集。

(c) 证明：H 是超平面当且仅当存在 E 上的一个非零线性泛函 f, 使得 $H = \ker f$. 因而 H 是闭的等价于 f 是连续的。

证明. (a) H 是超平面，则存在 $x \in E\backslash H$, s.t. $E = H + \mathbb{K}x$. 对任意 $x_0 \notin H$, $x_0 = h + \lambda x$, 则 $\lambda \ne 0$, 故 $x = \frac{x_0 - h}{\lambda} \in H + \mathbb{K}x_0$, 所以 $E = H + \mathbb{K}x \subset H + \mathbb{K}x_0 \Rightarrow E = H + \mathbb{K}x_0$.

(b) 设 H 是超平面，则存在 $x_0 \in E\backslash H$, 使得 $E = H + \mathbb{K}x_0$. 若 $x_0 \in \overline{H}$, 则 $E = H + \mathbb{K}x_0 \subset \overline{H}$, 故 $E = \overline{H}$.

若 $x_0 \notin \overline{H}$, 则由 Hahn-Banach 延拓定理，存在 $f \in E^*$, $f|_H = 0$, 但 $f(x_0) \ne 0$, 那么 $H \subset \ker(f)$. 又对于任意 $x \in E$, $x = h + \alpha x_0$, $h \in H, \alpha \in \mathbb{K}$, 故

$$f(x) = 0 \Rightarrow f(h + \alpha x_0) = f(h) + \alpha f(x_0) = 0,$$

注意到 $f(h) = 0$, 故 $\alpha = 0$, 这意味着 $\ker f \subset H$, 因此 $H = \ker f$, 故 H 是闭的。

法 II: 若 H 是稠密的，不需要再说明什么。

若 H 不稠密，只需证明 H 一定是闭的。反证法，假设 H 不是闭的，则存在 H 中某个序列 (x_n) 收敛于某个 $x \in E\backslash H$, 则 $d(x, H) = 0$ 且 $E = H + \mathbb{K}x$. 对于任意 $y \in E\backslash H$, 存在 $h_0 \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ 使得 $y = h_0 + \alpha x$, 则

$$d(y, H) = \inf\{\|y - h\| : h \in H\} = \inf\{\|h_0 + \alpha x - h\| : h \in H\} = |\alpha| \inf\{\|x - h\| : h \in H\} = 0,$$

故 $y \in \overline{H}$, 那么 H 在 E 中稠密，矛盾，故 H 是闭的。

(c) $\Leftarrow$: 设存在 E 上的非零线性泛函 f, s.t. $H = \ker f$, 由于存在 $x_0 \in E$, s.t.$f(x_0) \ne 0$, 因此 $x_0 \notin H$. 对任意 $e \in E$,

$$e = e - \frac{f(e)}{f(x_0)} x_0 + \frac{f(e)}{f(x_0)} x_0 \in H + \mathbb{K}x_0,$$

故 H 是超平面。若 f 还是连续的，则 $H=\ker f$ 是闭的。

$\Rightarrow$: 设 H 是超平面，则存在 $x_0\in E\backslash H$, 使得 $E=H+\mathbb{K}x_0$. 则任意 $x\in E$ 可写为 $x=h+\alpha x_0$, 定义 E 上的线性泛函 f 为 $f(h+\alpha x_0)=\alpha$, 则 $H=\ker f$, 且 $f(x_0)=1\Rightarrow f$ 非零。

若 $H=\ker f$ 还是闭的，想证明 f 连续。反证法，若 f 不连续，则存在 $(x_n)_{n\geq 1}, \|x_n\|=1$, 且 $|f(x_n)|\geq n$. 令 $y_n=\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)}$, 则 $f(y_n)=0$, 即 $y_n\in\ker f$, 但是 $y_n\to\frac{x_1}{-f(x_1)}\notin\ker f$, 故 $\ker f$ 不是闭的，矛盾。

第二种由 $\ker f$ 闭推出 f 连续的方法：若 $H=\ker f$ 是闭的，我们取线性泛函

$$\tilde{f}(h+\alpha x_0)=\alpha d(x_0,F),$$

则 $\tilde{f}$ 是连续的，则 $f(h+\alpha x_0)=\alpha=\frac{1}{d(x_0,F)}\alpha d(x_0,F)=\frac{1}{d(x_0,F)}\tilde{f}(h+\alpha x_0)$ 连续。 □

注释 8.1. *设 $f:X\to Y$ 是一般的赋范空间之间的线性映射，$\ker f$ 闭一般推不出 f 连续，比如第六章习题 16 给出的线性映射 u, $\ker u=\mathbb{K}$ 有限维所以是闭的，但 u 不连续。特别地，$X=Y$ 时也有反例，参见《泛函分析中的反例》77 页。*

13. 考虑空间 ℓ_1 中的如下子集：

$$\begin{aligned} A_0=&\{x=(x_n)_{n\geq 1}\in\ell_1: x_{2n}=0,\forall n\geq 1\},\\ B=&\{x=(x_n)_{n\geq 1}\in\ell_1: x_{2n}=2^{-n}x_{2n-1},\forall n\geq 1\}.\end{aligned}$$

(a) 证明：A_0 和 B 是 ℓ_1 的闭向量子空间且 A_0+B 在 ℓ_1 中稠密。

(b) 设 $c\in\ell_1$ 满足 $c_{2n-1}=0$ 及 $c_{2n}=2^{-n}$, 并设 $A=A_0-c$. 证明：$c\notin A_0+B$ 且 $A\cap B=\varnothing$. 并证明：不存在非零的 $f\in\ell_1^*$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使得 $A\subset\{f\leq\alpha\}$ 以及 $B\subset\{f\geq\alpha\}$.

证明. (a) 在 ℓ_1 中依范数收敛则逐点收敛：设 $(z^k)_{k\geq 1}\subset\ell_1$ 收敛于 $z\in\ell_1$, 则对任意 $n\geq 1$ 有 $|z_n^k-z_n|\leq\|z^k-z\|_1\to 0(k\to\infty)$.

A_0 闭：设 $(z^k)_{k\geq 1}\subset A_0$ 收敛于 $z\in\ell_1$, 则对任意 $n\geq 1$ 有 $z_{2n}=\lim_{k\to\infty}z_{2n}^k=0$, 故 $z\in A_0$.

B 闭：设 $(z^k)_{k\geq 1}\subset B$ 收敛于 $z\in\ell_1$, 则对任意 $n\geq 1$ 有 $z_{2n}=\lim_{k\to\infty}z_{2n}^k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^n}z_{2n-1}^k=\frac{1}{2^n}z_{2n-1}$, 故 $z\in B$.

只需证明若 $f\in\ell_1^*$, $f|_{A_0+B}=0$ 时 $f\equiv 0$, 就可得 A_0+B 在 ℓ_1 中稠密：设 $f\in\ell_1^*$, $f|_{A_0+B}=0$ 则 $f|_{A_0}=0$ 且 $f|_B=0$ 则对任意 $m\geq 1$, $f(e_{2m-1})=0$ 且 $f(e_{2m}+2^m e_{2m-1})=0$, 所以 $f(e_{2m})=0$, 故 $f(e_n)=0,\forall n\geq 1$, 即 $f\equiv 0$, 故 A_0+B 在 ℓ_1 中稠密

法 II：$\forall x\in\ell_1$,

$$\begin{aligned} x=\sum_{n\geq 1}x_ne_n=&\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N x_{2n-1}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n}\\ &=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N(2^nx_{2n}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n})+\sum_{n=1}^N(x_{2n-1}-2^nx_n)e_{2n-1}\in\overline{A_0+B},\end{aligned}$$

故 A_0+B 在 ℓ_1 中稠密。

(b) 先证明 $c\notin A_0+B$: 反证法，若 $c\in A_0+B$, 则存在 $x=\sum_{n\geq 1}x_{2n-1}e_{2n-1}\in A_0$, $y=\sum_{n\geq 1}y_{2n-1}e_{2n-1}+\frac{y_{2n-1}}{2^n}e_{2n}\in B$ 使得

$$c=x+y=\sum_{n\geq 1}2^{-n}e_{2n}=\sum_{n\geq 1}(x_{2n-1}+y_{2n-1})e_{2n-1}+\frac{1}{2^n}y_{2n-1}e_{2n},$$

则对任意 $n\geq 1$, $y_{2n-1}=1$, 这意味着 $\|y\|=\infty$, 这与 $y\in\ell_1$ 矛盾，所以 $x\notin A_0+B$.

再证 $(A_0-c)\cap B=\varnothing$: 反证，若 $(A_0-c)\cap B\neq\varnothing$, 则存在 $a_0\in A_0, b\in B$ 使得 $a_0-c=b$, 故 $c=a_0-b\in A_0+B$, 矛盾，故 $A\cap B=\varnothing$.

若存在非零 $f\in\ell_1^*$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使得 $A\subset\{f\leq\alpha\}$ 且 $B\subset\{f\geq\alpha\}$, 则由于 A_0 与 B 是线性空间则

$$f(A_0-c)\leq\alpha\Rightarrow f(A_0)\leq\alpha+f(c)\Rightarrow f|_{A_0}=0,$$

$$f(B)\geq\alpha\Rightarrow f|_B=0,$$

故 $f|_{A_0+B}=0$, 又 A_0+B 在 ℓ_1 中稠密，则 $f\equiv 0$, 矛盾。 □

15. 设 E 是一个维数至少为 2 的赋范空间，证明: E 的向量子空间 F 上每个连续线性泛函有唯一的保范延拓当且仅当 E^* 是严格凸的。我们称一个赋范空间 E 是严格凸的，若其单位球面 S_E 上的每个点是其闭单位球 $\overline{B}_E$ 上的端点。

证明. 首先说明：对任意赋范空间 E, E 严格凸等价于: $\forall x\in S_E$, 不存在 S_E 中相异两点 x_1,x_2, 使得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$. "$\Rightarrow$", 显然; "$\Leftarrow$", 反证法，假设 E 不严格凸，则存在 $x\in S_E$ 与 $\overline{B}_E$ 中相异的两点 x_1,x_2, s.t.$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则必有 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$(否则若 $\|x_1\|<1$, 则 $\|\frac{x_1+x_2}{2}\|\leq\frac{1}{2}\|x_1\|+\frac{1}{2}\|x_2\|<1$, 矛盾), 这与我们的条件矛盾。

(a) "$\Leftarrow$": 反证法，反设存在 F 上某个连续泛函 $f\in F^*$ 有两个不同的保范延拓 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2\in E^*$, 不妨设 $\|f\|=1$, 则 $\tilde{f}_1|_F=\tilde{f}_2|_F=f$ 且 $\|\tilde{f}_1\|=\|\tilde{f}_2\|=1$. 令 $\tilde{f}=\frac{\tilde{f}_1+\tilde{f}_2}{2}$, 则 $\tilde{f}\in E^*$, $\tilde{f}|_F=f$ 且 $\|\tilde{f}\|\leq\frac{1}{2}(\|\tilde{f}_1\|+\|\tilde{f}_2\|)=1$, 则必有 $\|\tilde{f}\|<1$(否则若 $\|\tilde{f}\|=1$ 则会与 E^* 严格凸矛盾)。然而 $\tilde{f}$ 是 f 的保范延拓 $\Rightarrow\|\tilde{f}\|\geq\|f\|=1$, 矛盾，所以 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$.

(b)"$\Rightarrow$": 反证法，反设 E^* 不是严格凸的，则存在 $f\in S_{E^*}$, 可以写成 $f=\frac{f_1+f_2}{2}$, 其中 $\|f_1\|=\|f_2\|=1, f_1\neq f_2$. 由于 $\|\frac{f_1+f_2}{2}\|=1$, 可取一列 $(x_n)_{n\geq 1}, \|x_n\|=1$ 且 $\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)(x_n)\to 1$.

想说明 $\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)=\lim_{n\to\infty}f_2(x_n)=1$. 已知 $|f_1(x_n)|\leq\|f_1\|\|x_n\|\leq 1$, 同理 $|f_2(x_n)|\leq 1$, 则

$$(f_1(x_n)+f_2(x_n))-1\leq f_1(x_n)+f_2(x_n)-f_2(x_n)=f_1(x_n)\leq 1,$$

由两边夹定理知 $(f_1(x_n))$ 极限存在且 $\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)=1$, 则 $\lim_{n\to\infty}f_2(x_n)=1$.

设 $F=\ker(f_1-f_2)$ 且 ϕ 是 f_1 在 F 上的限制，则 ϕ 也是 f_2 在 F 上的限制，想说明 $\|\phi\|=1$. 由于 $f_1\neq f_2$, 可取适当的 e 使得 $(f_1-f_2)(e)=1$, 设 $y_n=x_n-a_ne$, 其中 $a_n=(f_1-f_2)(x_n)\to 0(n\to\infty)$. 由于 $(f_1-f_2)(y_n)=0$, 则 $y_n\in F$, 又

$$\|x_n\|-|a_n|\|e\|\leq\|y_n\|\leq\|x_n\|+|a_n|\|e\|,$$

令 $n\to\infty$ 知 $\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1$.

注意到 $\phi(y_n)=\phi(x_n-a_ne)=f_1(x_n)-a_nf_1(e)\to 1(n\to\infty)$, 则 $\|\phi\|\geq\frac{|\phi(y_n)|}{\|y_n\|}\to 1(n\to\infty)\Rightarrow\|\phi\|\geq 1$, 又因为 f_1 是 ϕ 的延拓 $\Rightarrow\|\phi\|\leq\|f_1\|=1$, 故 $\|\phi\|=1$, 因此 ϕ 有两个不同的保范延拓 f_1 和 f_2, 矛盾，故 E^* 是严格凸的。 □

16. 考虑空间 ℓ_∞ 和它的向量子空间 F:

$$F=\{x\in\ell_\infty:\lim_{n\to\infty}m_n(x)\text{ 存在}\},\text{ 其中}m_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

(a) 定义 $f:F\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=\lim_{n\to\infty}m_n(x)$. 证明:$f\in F^*$.

(b) 证明：存在 ℓ_∞ 上连续线性泛函 m 满足下面的性质：

(i)$\liminf_{n\to\infty}x_n\leq m(x)\leq\limsup_{n\to\infty}x_n,\forall x\in\ell_\infty$.

(ii)$m\circ\tau=m$, 这里 $\tau:\ell_\infty\to\ell_\infty$ 是右移算子，即 $\tau(x)_n=x_{n+1}$. (m 被称为 Banach 平均或 ℓ_∞ 极限.)

证明. (a) $\forall x\in F$, $|f(x)|\leq\lim_n|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k|\leq\max_{k\geq 1}|x_k|=\|x\|_\infty$, 故 $f\in F^*$.

(b) 由 (a) 知道 $\|f\|\leq 1$, 取定 $\mathbb{I}=(1,1,1,\cdots)$, 则 $\|\mathbb{I}\|=1$ 且 $f(\mathbb{I})=1$, 因此 $\|f\|=1$. 由 Hahn-Banach 延拓定理，存在 $m\in\ell_\infty^*$, s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$. 对任意 $x\in\ell_\infty$, 注意到

$$\tau x-x=(x_2-x_1,x_3-x_2,\cdots),$$

则 $m_n(\tau x-x)=\frac{x_n-x_1}{n}\to 0(n\to\infty)$, 故 $\tau x-x\in F$ 且 $f(\tau x-x)=0$, 则 $m(\tau x-x)=f(\tau x-x)=0$, 即 $m\circ\tau=m$.

先说明当 $x\geq 0(x\geq y$ 即 $x_i\geq y_i,\forall i\geq 1)$ 时 $m(x)\geq 0$: 对任意 $x\geq 0$, $x=\|x\|\frac{x}{\|x\|}$, $0\leq\frac{x}{\|x\|}\leq 1$, 则

$$1-m(\frac{x}{\|x\|})=m(\mathbb{I}-\frac{x}{\|x\|})\leq\|\mathbb{I}-\frac{x}{\|x\|}\|\leq 1,$$

故 $m(\frac{x}{\|x\|})\geq 0$, 则 $m(x)\geq 0$.

设 $b=\limsup_{n\to\infty}x_n$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\geq 1$, 当 $n>N$ 时

$$x_n<b+\varepsilon\Rightarrow(b+\varepsilon)\mathbb{I}-\tau^Nx>0\Rightarrow m((b+\varepsilon)\mathbb{I}-\tau^N(x))\geq 0$$

又由于 $m\circ\tau=m\Rightarrow m\circ\tau^N=m$, 则 $m(x)\leq b+\varepsilon$, 由 ε 的任意性得 $m(x)\leq b=\limsup_{n\to\infty}x_n$, 同理 $m(x)\geq\liminf_{n\to\infty}x_n$. □

由于 $\|\frac{f_1+f_2}{2}\|=1$，可取 S_E 上的一列 (x_n)，$(\frac{f_1+f_2}{2})(x_n)\to 1$。

还需说明：$\forall x\in S_E$，不存在 B_E 中相异的 x_1, x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ $\Leftrightarrow$ 不存在 S_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$。

"$\Rightarrow$"显然。"$\Leftarrow$"仅证，若存在 B_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$\|x_1\|\le 1$，$\|x_2\|\le 1$。则必有 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$，否则若 $\|x_1\|<1$ 则 $\|\frac{x_1+x_2}{2}\|\le\frac{1}{2}\|x_1\|+\frac{1}{2}\|x_2\|<1$，矛盾。则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$\|x_1\|=1$，$\|x_2\|=1$，$x_1\ne x_2$。

设 $y_n=x_n-a_ne$，

(ii) $x_n=y_n+a_ne\Rightarrow(f_1-f_2)(x_n)=(f_1-f_2)(y_n)+a_n\Rightarrow(f_1-f_2)(y_n)=0$，故 $y_n\in F$。

由(i)知 $a_n=f_1(x_n)-f_2(x_n)\to 0$，则 $\|y_n\|\le\|x_n\|+|a_n|\|e\|\to 1$ 且 $\|y_n\|\ge\|x_n\|-|a_n|\|e\|\to 1$，故 $\lim\limits_n\|y_n\|=1$。

(iii) $\varphi(y_n)=\varphi(x_n-a_ne)=f_1(x_n)-a_nf_1(e)\to 1\ (n\to\infty)$，则 $\|\varphi\|\ge\frac{|\varphi(y_n)|}{\|y_n\|}\to 1\ (n\to\infty)$

故 $\|\varphi\|\ge 1$，又 f_1 是 φ 的延拓 $\Rightarrow\|\varphi\|\le\|f_1\|=1$，故 $\|\varphi\|=1$，因此，φ 有两个不同的 Hahn-Banach 线性延拓 f_1 和 f_2，矛盾，故 E^* 是严格凸的。 ▨

保证

16. 证明：(a) $\forall x\in F$，$|f(x)|=|\lim\limits_n\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k|\le\max\limits_{k\ge1}|x_k|=\|x\|_\infty$，故 $f\in F^*$。

(b) 由(a)知 $\|f\|\le 1$，取 $e=(1,1,1,\cdots)$，则 $\|e\|=1$，$f(e)=1\Rightarrow\|f\|=1$。

由Hahn-Banach延拓定理，$\exists m\in\ell_\infty^*$，s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$。

则对 $\forall x\in\ell^\infty$，注意到 $Tx-x=(x_2-x_1,x_3-x_2,x_4-x_3,\cdots)\Rightarrow m_n(Tx-x)=$

$\frac{x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+x_{n+1}-x_n}{n}=\frac{x_{n+1}-x_1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，故 $Tx-x\in F$ 且 ~~$m(Tx-x)=0$~~ $f(Tx-x)=0$，则 $m(Tx-x)=f(Tx-x)=0$，即 $m\circ T=T$。

为了说明 $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n\le m(x)\le\limsup\limits_{n\to\infty}x_n$，$\forall x\in\ell_\infty$，先说明当 $x\ge 0$ 时，$m(x)\ge 0$。

实际上，对 $\forall x\ge 0$，$x=\|x\|\frac{x}{\|x\|}$，$0\le\frac{x}{\|x\|}\le 1$，则 $1-m(\frac{x}{\|x\|})=m(e-\frac{x}{\|x\|})\le\|e-\frac{x}{\|x\|}\|$

≤ 1，这里 $e:=(1,1,1,\cdots)$，故 $m(\frac{x}{\|x\|})\ge 0\Rightarrow m(x)\ge 0$。

设 $b=\limsup\limits_{n\to\infty}x_n$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时 $x_n<b+\varepsilon\Rightarrow(b+\varepsilon)e-T^N(x)>0\Rightarrow$

$m((b+\varepsilon)e-T^N(x))\ge 0$，即 $(b+\varepsilon)m(e)-m(T^N(x))=(b+\varepsilon)-m(x)\ge 0\Rightarrow m(x)\le b+\varepsilon$

$f(e)=1$　$(m\circ T^N=m\circ T^{N-1}=\cdots=m\circ T=m)$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $m(x)\le b=\limsup\limits_{n\to\infty}x_n$，同理 $m(x)\ge\liminf\limits_{n\to\infty}x_n$。 ▨

17. 证明：(a) $d(\mathbb{I},Y)=\inf\limits_{x\in\ell_\infty}\|\mathbb{I}-(x-Tx)\|$，故只需证对 $\forall x\in\ell_\infty$，$\|\mathbb{I}-(x-Tx)\|\ge 1$。

设 $y=\mathbb{I}-(x-Tx)$，则 $\|y\|\ge\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|\ge\frac{1}{n}|\sum\limits_{k=1}^{n}y_k|=|\frac{1}{n}(x_{n+1}-x_1)+1|\to 1$（因为 $|x_{n+1}-x_1|\le 2\|x\|$）

故 $d(\mathbb{I},Y)\ge 1$。

(b) 定义函数 $f:\mathrm{span}(Y\sqcup\{y\})\to\mathbb{R}$ s.t. $f(t\mathbb{I}+y)=t$，$t\in\mathbb{R}$，$y\in Y$

则 $|f(t\mathbb{I}+y)|=|t|\le|t|d(\mathbb{I},Y)\le|t|\|\mathbb{I}+\frac{y}{t}\|=\|t\mathbb{I}+y\|\Rightarrow\|f\|\le 1$。

又 $\|\mathbb{I}\|=1$，$f(\mathbb{I})=1\Rightarrow\|f\|=1$。

(c) 设 $F=\mathrm{span}(Y\sqcup\{y\})$，由(b)知 f 是子空间 F 上的连续泛函且 $\|f\|=1$，由Hahn-Banach延拓定理知 $\exists m\in\ell_\infty^*$ s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$，则对 $\forall x\in\ell_\infty$，$m(x-Tx)=f(x-Tx)=0\Rightarrow m\circ T=m$。 ▨ 47

21. 设 $e_n(t) = e^{int}, t \in [0, 2\pi]$.

(a) 证明：对每个 $1 \le p < \infty$, e_n 在 $L_p(0, 2\pi)$ 中弱收敛到 0 但不依范数收敛到 0.

(b) 设 $f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} e_k$. 证明：$f_n$ 在 $L_2(0, 2\pi)$ 中弱收敛到 0 但不依范数收敛到 0.

证明. (a) $1 \le p < \infty$ 时，$L_p^*(0, 2\pi) = L_q(0, 2\pi) \subset L_1(0, 2\pi)$(有限测度空间)。由于 Fourier 变换把 $L_1(0, 2\pi)$ 中的元素映射到 c_0, 则对 $\forall f \in L_1(0, 2\pi)$, 有

$$\int_0^{2\pi} e_n(t)f(t)dt = \overline{\int_0^{2\pi} e^{-int}\overline{f(t)}dt} = 2\pi\hat{\bar{f}}(n) \to 0$$

所以 $e_n \xrightarrow{w} 0$.

$\|e_n\| = |\int_0^{2\pi} |e_n(t)|^p dt|^{\frac{1}{p}} = (2\pi)^{\frac{1}{p}} \nrightarrow 0$, 故 e_n 不依范数收敛到 0.

(b)$L_2^*(0, 2\pi) = L_2(0, 2\pi)$. 对任意 $f \in L_2(0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned}
|\int_0^{2\pi} f(t)f_n(t)dt| &= |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} f(t)e_k(t)dt| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\overline{\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}e^{-ikt}dt} + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}\overline{\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}e^{-ikt}dt}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\hat{\bar{f}}(k) + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}\hat{\bar{f}}(k)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|\hat{\bar{f}}(k)| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}|\hat{\bar{f}}(k)|,
\end{aligned}$$

由 Parseval 恒等式知，对 $\forall\varepsilon > 0$, 可取 N 使得 $(\sum_{k=N+1}^{\infty}|\hat{\bar{f}}(k)|^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n^2}|\hat{\bar{f}}(k)| \le \frac{1}{n}(\sum_{k=N+1}^{n^2}|\hat{\bar{f}}(k)|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (n^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{k=N+1}^{\infty}|\hat{\bar{f}}(k)|^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

又由 Parseval 恒等式知 $\hat{\bar{f}}(k) \to 0 (k \to \infty)$ 知 $(\hat{\bar{f}}(k))_{k\ge1}$ 有界，设 $K = \sup_{k\ge1}|\hat{\bar{f}}(k)|$, 则 n 充分大时，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|\hat{\bar{f}}(k)| \le \frac{N}{n}K < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此 n 充分大时有 $|\int_0^{2\pi} f(t)f_n(t)dt| < \varepsilon$, 所以 f_n 在 $L_2(0, 2\pi)$ 中弱收敛到 0.

$\|f_n\| = \frac{\sqrt{2\pi}}{n}(1 + 1 + \cdots + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \nrightarrow 0$. □

9 第九章习题

1. 设 E 是赋范空间，并设 E^* 是可分的。

(a) 令 (f_n) 是 E^* 中的稠密子集，选出 E 中的序列 (x_n) 使得 $f_n(x_n) \ge \frac{\|f_n\|}{2}$ 且 $\|x_n\| = 1$.

(b) 任取 $f \in E^*$. 证明：若对每个 x_n 有 $f(x_n) = 0$, 则 $f = 0$.

(c) 由此导出 $\text{span}(x_1, x_2, \cdots)$ 在 E 中稠密且 E 是可分的。

(d) 证明：一个 Banach 空间是可分的且自反的当且仅当它的对偶空间是可分的且自反的。

(e) 举一个可分赋范空间但其对偶空间不可分的例子。

证明. (a) E^* 是可分的，则存在一列 $(f_n) \subset E^*$ 中的稠密子集，即 $\overline{(f_n)} = E^*$. 由 $\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)|$, 则对任意 $n \geq 1$, 存在 x_n, $\|x_n\| = 1$ 且 $\|f_n(x_n)\| \geq \frac{\|f_n\|}{2}$.

(b) 任意 $f \in E^*$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_n\| < \varepsilon$, 则

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leq |f_n(x_n)| = |(f_n - f)(x_n)| \leq |f_n - f| < \varepsilon,$$

因此 $\|f_n\| < 2\varepsilon$, 则 $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < 3\varepsilon$, 故 $f = 0$.

(c) 设 $M = \text{span}(x_n)$ 我们已经证明了 $f|_M = 0 \Rightarrow f = 0$. 故 $\text{span}(x_n)$ 在 E 中稠密，因此 E 是可分的 (用有理数来做线性组合可以看出可分性)。

(d)"$\Leftarrow$":E^* 可分则 E 可分，E^* 自反则 E 自反。

"$\Rightarrow$":E 可分，又 $E = E^{**}$, 则 E^{**} 可分，进而 E^* 可分。E 自反，则 E^* 自反，故 E^* 可分且自反。

(e)$\ell_1, L_1(0,1)$ 可分，但 $\ell_1^* = \ell_\infty, L_1^*(0,1) = L_\infty(0,1)$ 不可分。 □

2. 设 E 是 Banach 空间，$B \subset E^*$.

(a) 证明：B 是相对 w^*-紧的当且仅当 B 是有界的。

(b) 假设 B 是有界的且 E 是可分的。证明：$(B, \sigma(E^*, E))$ 可度量化。

证明. (a) "$\Rightarrow$": 设 B 是相对 w^*-紧，即 $\overline{B}^{w^*}$ 是 w^* 紧. 对任意 $x \in E$, $\hat{x}$ 是连续则 $\hat{x}(\overline{B}^{w^*})$ 为 $\mathbb{C}$ 中紧集，故为有界闭的，故 $\{f(x)\}_{f \in \overline{B}^{w^*}}$ 有界，则由一致有界原理知 $\{f \in \overline{B}^{w^*}\}$ 有界，则 B 有界。

"$\Leftarrow$": B 有界则存在 $M \geq 0$,s.t.$B \subset MB_{E^*} \subset M\overline{B}_{E^*}$, 由 Banach-Alaoglu 定理知 $M\overline{B}_{E^*}$ 为 w^*-紧，则 w^*-闭，故 $\overline{B}^{w^*} \subset M\overline{B}_{E^*}$, 故 $\overline{B}^{w^*}$ 为 w^*-紧，即 B 相对 w^*-紧。

(b) 由 (b) 知 $\overline{B}^{w^*} \subset M\overline{B}_{E^*}$, 故 $\overline{B}^{w^*}$ 有界，故不妨假设 B 是弱 * 闭且有界的 (则为弱 * 紧的)。

可分度量空间的任意子空间仍然可分，则可取 $(x_n) \subset \overline{B}_E$ 使其为 $\overline{B}_E$ 的稠密子集

对任意 $x^*, y^* \in B$, 令

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} |\langle x^* - y^*, x_n \rangle|.$$

易验证这确实是 B 上一个度量，这里我们只验证 $d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$:

$$d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow \langle x^* - y^*, x_n \rangle = 0, \forall n \geq 1,$$

又由于 (x_n) 在 $\overline{B}_E$ 中稠密，故 $x^* - y^* = 0$.

下面验证这个度量诱导的拓扑 (记为 τ_d) 和 B 上的弱 * 拓扑相同，先证 $\tau_d \leq \sigma(E^*, E)$: 只需证明对任意 $x^* \in B$, $\forall r > 0$, $\{y^* : d(x^*, y^*) < r\}$ 是 x^* 点的一个弱 * 邻域。设常数 $M > 0$, 使得 $\forall x^* \in B$, $\|x^*\| \leq M$, 由 $\sum_{n \geq 1} 2^{-n}$ 的收敛性，存在充分大的 $N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\sum_{n > N} 2^{-n} |\langle x^* - y^*, x_n \rangle| \leq \sum_{n > N} 2^{-n} \cdot (2M) < r \backslash 2.$$

对于这个取定的 N, 存在充分小的 r_1, 当 $|\langle x^*-y^*,x_n\rangle|<r_1, n=1,\cdots,N$ 时

$$\sum_{n=1}^{N}2^{-n}|\langle x^*-y^*,x_n\rangle|<r\backslash 2,$$

故 $d(x^*,y^*)<r$, 因此

$$\{y^*:d(x^*,y^*)<r\}\supset\cap_{n=1}^{N}\{y^*:|\langle x^*-y^*,x_n\rangle|<r_1\},$$

故 $\{y^*:d(x^*,y^*)<r\}$ 是 x^* 点的一个弱 * 邻域，且 r 取遍正实数时这构成 x^* 点的一个邻域基，则 $\tau_d\leq\sigma(E^*,E)$, 则 $\mathrm{id}:(B,\sigma(E^*,E))\to(B,\tau_d)$ 为连续双射，又由 (a) 知 $(B,\sigma(E^*,E))$ 紧，则 id 为同胚 (推论 1.3.13), 故 $\tau_d=\sigma(E^*,E)$. □

4. 设 E 是自反空间。证明：E 中的每个有界序列 (x_n) 有弱收敛子序列。

证明. 自反空间的闭子空间仍然是自反空间，则 $F:=\overline{\mathrm{span}(x_n)}$ 自反，即 $F=F^{**}$ 在自然嵌入的意义下成立。由于第一题知 F 是可分的，且 F^* 是可分的。由 2.(b) 知 F 中任意有界子集可度量化，度量即为那里引入的 d. 现在 $B:=(x_n)\subset F$ 是有界的，则 $\overline{B}^{\sigma((F^*)^*,F^*)}$(简记为 $\overline{B}^{w*}$) 为 $\sigma((F^*)^*,F^*)$-紧, 所以 $(\overline{B}^{w*},d)$ 为紧度量空间 (则完备)，则序列紧，所以 (x_n) 有 d-收敛 (则 $\sigma((F^*)^*,F^*)$-收敛) 的子列 (x_{n_k})，其极限 $x\in\overline{B}^{w*}\subset\overline{\mathrm{span}(x_n)}^{w^*}$, 由 Mazur 定理知

$$\overline{\mathrm{span}(x_n)}=\overline{\mathrm{span}(x_n)}^{\sigma((F^*)^*,F^*)},$$

则 $x\in F$. 现在我们有对任意 $f\in F^*$ 有 $f(x_{n_k})$ 收敛到 $f(x)$, 则对任意 $\tilde{f}\in E^*$, 记 $f=\tilde{f}|_F$, 则有

$$\tilde{f}(x_{n_k})=f(x_{n_k})\to f(x)=\tilde{f}(x),$$

即 (x_{n_k}) 弱收敛到 x. □

6. 令 E 和 F 是两个 Banach 空间，且 $u\in B(E,F)$.

(a) 证明:u 是从 E 到 F 到上的等距映射当且仅当 u^* 也是从 F^* 到 E^* 的到上的等距映射。

证明. (a) ”$\Rightarrow$”: 由对偶关系 $\langle u^*(f^*),x\rangle=\langle f^*,u(x)\rangle$, 则

$$\|u^*(f^*)\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\langle u^*(f^*),x\rangle=\sup_{\|x\|\leq 1}\langle f^*,u(x)\rangle,$$

注意到 u 是等距的满射则 $u(\overline{B}_E)=\overline{B}_F$, 则上式最右边等于 $\|f^*\|$, 因此 $\|u^*(f^*)\|=\|f^*\|,\forall f^*\in F^*$.

”$\Leftarrow$”: 由对偶关系 $\langle u^*(f^*),x\rangle=\langle f^*,u(x)\rangle$, 则

$$\|u(x)\|=\sup_{\|f^*\|\leq 1}\langle f^*,u(x)\rangle=\sup_{\|f^*\|\leq 1}\langle u^*(f^*),x\rangle,$$

注意到 u^* 是等距的满射则 $u^*(\overline{B}_{F^*})=\overline{B}_{E^*}$, 则上式最右边等于 $\|x\|$, 因此 $\|u(x)\|=\|x\|,\forall x\in E$. □

8. 设 P 是 Banach 空间 X 上的线性映射并满足 $P\circ P=P$. 记 $R=P(X)$, $N=\ker P$.

(a) 证明：$X=R\oplus N$. 并且 P 连续的充分必要条件是 R 和 N 都是闭集。

(b) 假设 P 是连续的。证明：$R^{\perp}$ 和 $N^{\perp}$ 在 X^* 中互补，且有 $X^*=R^{\perp}\oplus N^{\perp}$.

证明. (a) 注意到对于任意 $x\in X$,

$$x=Px+x-Px\in R+N.$$

且易看出 $N\cap R=\{0\}$, 故 $X=R\oplus N$ (代数互补). 由推论 6.3.12 知 P 连续等价于 R 与 N 都是闭的。

(b) 先说明 $R^{\perp}\cap N^{\perp}=\{0\}$: $\forall f\in R^{\perp}\cap N^{\perp}$, $f|_N=0$ 且 $f|_R=0$, 故 $f=0$.

$\forall z\in X$, 存在唯一的 $x\in R, y\in N$ 使得 $z=x+y$. 则 $\forall f\in X^*$,

$$f(z)=f(x)+f(y)=f\circ P(z)+f\circ(I-P)(z).$$

则 $f=f\circ(I-P)+f\circ P\in R^{\perp}+N^{\perp}$, 所以 $X^*=R^{\perp}\oplus N^{\perp}$. □

16. 称 Banach 空间是一致凸的一致凸空间，若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$x,y\in\overline{B}_E, \|x-y\|\geq\varepsilon\Rightarrow\|\frac{x+y}{2}\|\leq 1-\delta.$$

设 (x_n) 是一致凸空间 E 中收敛到 x 的序列，并有 $\lim_n\|x_n\|=\|x\|$. 证明：(x_n) 依范数收敛到 x. 用例子说明条件 $\lim_n\|x_n\|=\|x\|$ 是必需的。

证明. 设 Banach 空间 E 是一致凸的，x_n 弱收敛到 x, 且 $\|x_n\|\to\|x\|$.

不妨设 $x\neq 0$.($x=0$ 时，$\|x_n\|\to\|0\|=0$ 意味着 x_n 依范数收敛到 0) 令 $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$, $y=\frac{x}{\|x\|}$, 则 $\|y_n\|=\|y\|=1, \forall n\geq 1$ 且 y_n 弱收敛到 y, 则

$$\langle f,\frac{y_n+y}{2}\rangle\to\langle f,y\rangle, \forall f\in E^*,$$

由一致有界原理的推论知

$$1=\|y\|\leq\liminf_{n\to\infty}\|\frac{y_n+y}{2}\|,$$

又由于 $\|\frac{y_n+y}{2}\|\leq 1$ 故 $\lim_{n\to\infty}\|\frac{y_n+y}{2}\|=1$, 则由一致凸性知 $\|y_n-y\|\to 0(n\to\infty)$(反证法). 则

$$\|x_n-x\|=\|\|x_n\|y_n-\|x\|y\|\leq\|\|x_n\|y_n-\|x_n\|y\|+\|\|x_n\|y-\|x\|y\|\to 0.$$

则 $\lim_n\|x_n-x\|=0$.

$\lim_n\|x_n\|=\|x\|$ 是必须的：以 ℓ_2 为例 (Hilbert 空间是一致凸的，见 17 题) 为例，设 (e_n) 是 ℓ_2 的标准正交基，对任意 $f\in\ell_2^*=\ell_2$, 由 Parseval 恒等式知 $f(e_n)\to 0$ 所以 e_n 弱收敛到 0, 但是 $\|e_n\|=1\nrightarrow 0, \forall n\geq 1$. □

10 第十一章习题

习题十一

1\. 证明：$(R(\lambda_n,T))$ 在 $B(E)$ 中有界，则 $\exists M\geq 0$ s.t. $\|R(\lambda_n,T)\|\leq M,\ \forall n\geq 1$. ~~对 $\forall m,n\geq 1$~~ 又由于

$\|R(\lambda_m,T)-R(\lambda_n,T)\| = |\lambda_n-\lambda_m|\,\|R(\lambda_m,T)R(\lambda_n,T)\|\leq |\lambda_n-\lambda_m|\cdot M^2\to 0\ (n,m\to\infty)$

故 $(R(\lambda_n,T))$ 是 $B(E)$ 中Cauchy列，则收敛于某个 $S\in B(H)$. 则

$\lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda_n,T)(\lambda_n-T) = S(\lambda-T)=I$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n-T)R(\lambda_n,T)=(\lambda-T)S=I$

故 $\lambda-T$ 可逆，即 $\lambda\in\rho(T)$.

3\. 证明：(a) $p<\infty$ 时：$\lambda\in\sigma_p(S)\Rightarrow\exists x\in\ell_p,\ x\neq 0$ s.t. $(\lambda-S)(x)=0$ 即 $\lambda x(n)-x(n+1)=0,\ \forall n\geq 1$

则 $x(n)=\lambda^{n-1}x(1),\ \forall n\geq 1$ 又 $x\neq 0$ 则 $x(1)\neq 0$ (否则 $x(n)=\lambda^{n-1}x(1)=0,\ \forall n\geq 1$)

又 $x\in\ell^p\Leftrightarrow\sum\limits_{n\geq 1}|\lambda^p|^{n-1}<\infty\Leftrightarrow|\lambda|<1$ 故 $\sigma_p(S)\subset\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|<1\}$.

反过来，$0<|\lambda|<1$ 时，取 x 使得 $x(n)=\lambda^{n-1},\ \forall n\geq 1$ 则 $(\lambda-S)(x)=0\Rightarrow\lambda\in\sigma_p(S)$.

$\lambda=0$ 时，取 $x=e_1$ 则 $S(0-x)=-S(x)=0$，故 $0\in\sigma_p(S)$. 故 $\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|<1\}\subset\sigma_p(S)$.

故 $\sigma_p(S)=\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|<1\}$.

~~(b)~~ $p=\infty$ 时：$\lambda\in\sigma_p(S)\Rightarrow\exists x\in\ell_\infty,\ x\neq 0$. s.t. $x(n)=\lambda^{n-1}x(1)$ 与前面同理 $x(1)\neq 0$. 要使 $x\in\ell_\infty\Leftrightarrow$

$|\lambda|\leq 1$. 故 $\sigma_p(S)\subset\{\lambda:|\lambda|\leq 1\}$.

反过来，$0<|\lambda|\leq 1$ 时，取 $x(n)=\lambda^{n-1},\ \forall n\geq 1$ 则 $(\lambda-S)(x)=0$，即 $\lambda\in\sigma_p(S)$.

$\lambda=0$ 时，取 $x=e_1$，则 $S(x)=0\Rightarrow 0\in\sigma_p(S)$. 故 $\{\lambda:|\lambda|\leq 1\}\subset\sigma(S)$.

所以 $\sigma_p(S)=\{\lambda\in\mathbb{K}:|\lambda|\leq 1\}$.

(b) 由于 $\sigma(S)$ 是闭的且 $\sigma_p(S)\subset\sigma(S)$ 故 $\overline{\sigma_p(S)}\subset\sigma(S)$ 即 $\{\lambda:|\lambda|\leq 1\}\subset\sigma(S)$.

又由于 $\|S\|=1$：$\|S(x)\|\leq\|x\|\Rightarrow\|S\|\leq 1$，$S(e_2)=e_1\Rightarrow\|S\|=1$.

则当 $|\lambda|>1$ 时，$\lambda-S=\lambda(I-\frac{S}{\lambda})$ 可逆 $\Rightarrow\sigma(S)\subset\{\lambda:|\lambda|\leq 1\}$，故 $\sigma(S)=\{\lambda:|\lambda|\leq 1\}$. ▨

4. 设 E 是 Banach 空间，T 是 E 上的线性等距映射. 并记

$$D = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda < 1|\},\ C = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\},\ \overline{D} = D \cup C.$$

(a) 证明：$\sigma_p(T) \subset C, \sigma(T) \subset \overline{D}$; 并且当 $\lambda \in D$ 时，有

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow (\lambda - T)(E) = E.$$

(b) 假设 $(\lambda_n) \subset D \cap \rho(T)$ 收敛到 D 中的元素 λ. 证明：$\lambda \in \rho(T)$.

(c) 证明：$D \cap \rho(T)$ 在 D 中既是开集又是闭集。由此导出 $D \cap \rho(T)$ 是空集或者 $D \cap \rho(T) = D$.

(d) 证明：$\sigma(T)$ 或者包含于 C 中或者等于 $\overline{D}$, 并且前者成立的充分必要条件是 T 为满射。

(e) 假设 $E = \ell_p, 1 \le p \le \infty$, 且 T 为 E 上的后移算子：

$$T(x)(1) = 0 \text{ 且} T(x)(n) = x(n-1), n > 1.$$

证明：$\sigma(T) = \overline{D}$ 并且 $\sigma_p(T) = \varnothing$.

证明. (a) 设 T 是线性等距映射，即 $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in E$.

(1) $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \exists x \neq 0, (\lambda - T)x = 0 \Rightarrow \lambda x = Tx, |\lambda| \|x\| = \|Tx\|$, 则 $\|\lambda\| = 1$. 故 $\sigma_p(T) \subset C$.

(2) 易看出 $\|T\| = 1$, 则当 $\lambda > 1$ 时，$\lambda - T = \lambda(\mathbb{I} - \frac{T}{\lambda})$ 可逆，故 $\sigma \subset \overline{D}$.

(3) 设 $\lambda < 1$. "$\Rightarrow$": $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \lambda - T$ 可逆, 则满射，即 $(\lambda - T)E = E$;

"$\Leftarrow$": 设 $\lambda - T$ 为满射，若 $\lambda - T$ 不为单射则 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 那么 $|\lambda| = 1$ 这与 $|\lambda| < 1$ 矛盾，故 $\lambda - T$ 为单射，所以 $\lambda - T$ 为连续双射，E 为 Banach 空间，则由开映射定理知 $\lambda - T$ 可逆，即 $\lambda \in \rho(T)$.

(b) ??

(c) $\rho(T)$ 是 $\mathbb{K}$ 中开集则 $D \cap \rho(T)$ 是 D 中开集；又由 (b) 知 $D \cap \rho(T)$ 是 D 中闭集，故 $D \cap \rho(T)$ 是 D 中既开又闭。注意到 D 是连通的，故 $D \cap \rho(T)$ 为空集或者 D.

(d) 当 $D \cap \rho(T) = \varnothing$ 时，$D \subset \sigma(T)$, 则 $\overline{D} \subset \sigma(T)$, 又由 (a) 知 $\sigma(T) \subset \overline{D}$, 所以 $\sigma(T) = \overline{D}$; 当 $D \cap \rho(T) = D$ 时 $D \subset \rho(T)$, 则 $\rho(T) \subset \overline{D} \backslash D = C$.

$\sigma(T) \subset C \Leftrightarrow T$ 为满射："$\Rightarrow$": 设 $\sigma(T) \subset C$, 则 $0 \notin \sigma(T)$, 故 T 可逆，则 T 满射；"$\Leftarrow$": 设 T 满射, 若 $\sigma \subset T$ 不成立，则 $\sigma(T) = \overline{D}$, 那么 $0 \in \rho(T) = \overline{D}^c$, 矛盾。

(e) 没有元素 x 使得 $T(x) = e_1$, 所以 T 不是满射，由 (d) 知这意味着 $\sigma(T) = \overline{D}$.

显然 $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, 故 T 为单射，则 $\sigma_p(T) = \varnothing$. □

8. 设 E 和 F 是赋范空间。证明下面的命题成立：

(a) 若 (x_n) 是 E 中的弱收敛序列，则 (x_n) 有界。

(b) 若 $T \in B(E, F)$ 且 x_n 弱收敛到 x, 则 $T(x_n)$ 弱收敛到 $T(x)$.

(c) 若 $T \in B(E,F)$ 是紧算子且 x_n 弱收敛到 x, 则 $T(x_n)$ 依范数收敛到 $T(x)$.

(d) 若 E 自反，$T \in B(E,F)$ 且当 x_n 弱收敛到 x 时，有 $T(x_n)$ 依范数收敛到 $T(x)$, 则 T 是紧算子。

(e) 若 E 自反，且 $T \in B(E,\ell_1)$ 或 $T \in B(c_0,E)$, 则 T 是紧算子。

证明. (a) 一致有界原理。

(b) 设 x_n 弱收敛到 x, 注意到对任意 $f \in F^*$, $f \circ T \in E^*$, 则

$$f(T(x_n)) \to f(T(x)), n \to \infty.$$

(c) 先证明任意赋范空间 F 中任意范数紧的子集 A 上范数拓扑等于弱拓扑：恒等映射 $\mathrm{id} : (A, \|\cdot\|) \to (A, \sigma(F,F^*))$ 为连续双射，又 $(A,\|\cdot\|)$ 紧故 id 为同胚映射。

由 (x_n) 弱收敛知 (x_n) 有界则存在 $M > 0$, s.t. $(x_n) \cup \{x\} \subset MB_E$. T 为紧算子，则 $T(MB_E) = MT(B_E)$ 是范数相对紧的，因此 $\overline{T(MB_E)}$ 上范数拓扑等于弱拓扑，又 $T(x_n)$ 弱收敛到 $T(x)$, 则 $T(x_n)$ 依范数收敛到 $T(x)$.

(d) 只需证明 $T(B_E)$ 相对紧，则只需证明 $T(B_E)$ 中任意无穷序列都有收敛于 F 中元素的子序列：设 (y_n) 是 $T(B_E)$ 中一个无穷序列，则存在 $(x_n) \subset B_E$ 使得 $y_n = T(x_n), \forall n \geq 1$. 由第九章第 4 题知 (x_n) 有弱收敛于某个 $x \in E$ 的子列 (x_{n_k}), 由题设知 $T(x_{n_k})$ 依范数收敛于 $T(x)$, 即 (y_{n_k}) 依范数收敛于 $T(x) \in F$, 故 $T(B_E)$ 相对紧。

(e) 先证明 $\forall T \in B(E,\ell_1)$ 是紧算子。由 (d) 知只需证明当 x_n 弱收敛到 x 时有 $T(x_n)$ 依范数收敛到 $T(x)$. 当 x_n 弱收敛到 x 时，$T(x_n)$ 弱收敛到 $T(x)$, 由下面的小结论知 $T(x_n)$ 依范数到 $T(x)$.

小结论：ℓ_1 中弱收敛的序列一定依范数收敛：设 (x_n) 弱收敛到 0, 反证法，假设 (x_n) 不依范数收敛到 0, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 子列 (x_{n_k}) 使得 $\|x_{n_k}\| \geq \varepsilon_0$, 把 (x_{n_k}) 记为 (y_n). 由 $(y_1^k) \in \ell_1$, 存在 k_1 使得

$$\sum_{k \geq k_1+1} |y_1^k| < 1, \sum_{k \leq k_1} |y_1^k| \geq \|y_1\| - 1,$$

由 (y_n) 弱收敛 (则逐点收敛)，对于取定的 k_1, 存在 $n_2 > 1$ 使得 $\sum_{k \leq k_1} |y_{n_2}^k| < 2^{-1}$. 由 $y_{n_2} \in \ell_1$ 知存在 $k_2 > k_1$ 使得

$$\sum_{k \geq k_2+1} |y_{n_2}^k| < 2^{-1}, \sum_{k_1+1}^{k_2} |y_{n_2}^k| \geq \|y_{n_2}\| - 2 \cdot 2^{-1},$$

对于取定的 k_2, 存在在 $n_3 > n_2$ 使得 $\sum_{k \leq k_2} |y_{n_3}^k| < \frac{1}{3}$. 以此类推，对任意 $s \geq 2$, 存在严格增加的 k_s 使得

$$\sum_{k \leq k_{s-1}} |y_{n_s}^k| < s^{-1}, \sum_{k \geq k_s+1} |y_{n_s}^k| < s^{-1}, \sum_{k_{s-1}+1}^{k_s} |y_{n_s}^k| \geq \|y_{n_s}\| - 2 \cdot s^{-1}$$

令 $z = (z^k)$ 满足

$$z^k = \begin{cases} \overline{\mathrm{sgn}(y_1^k)}, & k \leq k_1 \\ \overline{\mathrm{sgn}(y_s^k)}, & k_{s-1}+1 \leq k \leq k_s, s \geq 2 \end{cases}$$

则对任意 $s \geq 1$ 有：

$$|\langle z, x_{n_s}\rangle| \geq \sum_{k_{s-1}+1}^{k_s} z^k y_{n_s}^k - |\sum_{k \leq k_{s-1}} z^k y_{n_s}^k| - |\sum_{k \geq k_s+1} z^k y_{n_s}^k| \geq \|y_{n_s}\| - 4 \cdot s^{-1} \geq \varepsilon_0 - 4 \cdot s^{-1}$$

当 s 充分大时 $\varepsilon_0 - 4 \cdot s^{-1} > \varepsilon_0 \backslash 2$, 故 (y_{n_s}) 不是弱收敛的，矛盾。

至此我们说明了任意自反空间到 ℓ_1 的任意有界算子是紧算子. 另一方面，对任意 $T \in B(c_0, E)$, 则 $T^* \in B(E^*, (c_0)^*) = B(E^*, \ell_1)$, 由 E^* 仍然是自反的，则 T^* 是紧算子，所以 T 是紧算子. 证毕. □

Prop 10.1. *Let X, Y be two normed spaces, $L : X \to Y$ linear operator. If for any functional $\varphi \in X^*$, $\varphi \cdot L$ is bounded, than L is bounded.*

存在特征为素数的无限域, 如 $\mathbb{Z}_p(x)$.

《高等代数学习指导下册》p168-169. 关于域的特征。

Polar Decomposition:

$|X|(|X| + \epsilon I)^{-1}$ is uniformly bounded in norm by 1 for $\varepsilon > 0$. I'll show you that

$$s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} |X|(|X| + \epsilon I)^{-1} = P,$$

where P is the orthogonal projection onto the closure of the range of $|X|$. That's enough to give you what you want because $VP = V$(because $V = V(P + P_{\ker X}) = VP$) and

$$X(|X| + \epsilon I)^{-1} = V|X|(|X| + \epsilon I)^{-1}$$

So that's the plan.

Because of the uniform bound on the operator norm of $|X|_\epsilon = |X|(|X| + \epsilon I)^{-1}$, it is enough to show that $|X|_\varepsilon$ converges strongly as $\varepsilon \to 0^+$ on a dense set subspace of H to P. The dense subspace of interest here is

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}(|X|) \oplus \mathcal{N}(|X|).$$

This is dense because $\mathcal{R}(|X|)^\perp = \mathcal{N}(|X|)$. Notice that $|X|_\varepsilon$ is 0 on $\ker(|X|)$; so the only challenge is the strong limit on $R(|X|)$. However, if $x = |X|z$ for some z,

$$\begin{aligned} |X|(|X| + \epsilon I)^{-1} x &= x - \epsilon(|X| + \epsilon I)^{-1} x \\ &= x - \epsilon |X|(|X| + \epsilon I)^{-1} z. \end{aligned}$$

The right side converges to x as $\varepsilon \to 0^+$ because of the uniform operator norm bound on $|X|(|X| + \epsilon I)^{-1}$. So that's enough to show that

$$s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} |X|(|X| + \epsilon I)^{-1} = P \implies s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} X(|X| + \epsilon I)^{-1} = VP = V.$$