3.(a) 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微函数.证明：$Cont(f')$是$\mathbb{R}$中稠密的$G_\delta$集.

(b) 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$连续且在$\mathbb{R}^2$上存在偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$.证明：$f$的可微点包含$\mathbb{R}^2$中一个稠密的$G_\delta$集.

(a)证明：$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微函数，则对$\forall s\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(s+h)-f(s)}{h}=f'(s)$.

任取极限为零的一个数列$(h_n)_{n\geq1}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(s+h_n)-f(s)}{h_n}=f'(s),\quad\forall s\in\mathbb{R}.$$

令函数$g_n(s)=\frac{f(s+h_n)-f(s)}{h_n}$，则$g_n(s)$连续且$(g_n)_{n\geq1}$逐点收敛到$f'$，故由定理6.1.7知$Cont(f')$是$\mathbb{R}$中稠密的$G_\delta$集.

(b)证明：注意到对于$\mathbb{R}^2$上的某点(x_0,y_0)，若$\frac{\partial f}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$均在$(x_0,y_0)$处连续，则由数学分析的知识知$f$在$(x_0,y_0)$可微，故$Cont(\frac{\partial f}{\partial x})\cap Cont(\frac{\partial f}{\partial y})\subset\{(x,y):f\text{在}(x,y)\text{处可微}\}$

故只需说明$Cont(\frac{\partial f}{\partial x})$与$Cont(\frac{\partial f}{\partial y})$均为$\mathbb{R}^2$中稠密的$G_\delta$集.类似于(a)，

$$\frac{f(x_0+h_n,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_n}\to\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad\forall(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$$

故$Cont(\frac{\partial f}{\partial x})$为$\mathbb{R}^2$中稠密的$G_\delta$集.同理$Cont(\frac{\partial f}{\partial y})$为$\mathbb{R}^2$中稠密的$G_\delta$集. ▨

4.证明：完备度量空间中的任何一个可数子集至少含有一个孤立点。

证明：$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$无孤立点??

5.课上讲过.

6 设E和F都是Banach空间，(u_n)是$B(E,F)$的序列。证明下列命题等价.

(a) $(u_n(x))$在每个$x\in E$处~~连续~~收敛。

(b) $A\subset E$且$span(A)$在E中稠密，$(u_n(a))$在每个$a\in A$处收敛，且(u_n)有界.

证明：(a)⇒(b)，由一致有界原理知(u_n)有界.

(b)⇒(a)，(u_n)有界，设$M=\sup\limits_n\|u_n\|$。对$\forall x\in E$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists a\in A$ s.t. $\|x-a\|<\frac{\varepsilon}{4M}$，则

$$\begin{aligned}\|u_n(x)-u_m(x)\|&\leq\|u_n(x)-u_n(a)\|+\|u_n(a)-u_m(a)\|+\|u_m(a)-u_m(x)\|\\&\leq\|u_n\|\|x-a\|+\|u_n(a)-u_m(a)\|+\|u_m\|\|x-a\|\\&\leq2M\|x-a\|+\|u_n(a)-u_m(a)\|\end{aligned}$$