习题 六

$\boxed{1.}$ (a) 证明：$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 G_δ 集，并导出 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集，且不存在函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathrm{Cont}(f)=\mathbb{Q}$.

(b) 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 时，令 $f(x)=0$；$f(0)=1$；

若 x 是非 0 的有理数 $\frac{p}{q}$，这里 $\frac{p}{q}$ 是 x 的不可约形式，$p\in\mathbb{Z}$，$q\in\mathbb{N}$，令 $f(x)=\frac{1}{q}$.

证明：$\mathrm{Cont}(f)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(c) 设 $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. 证明：$f$ 不是第一纲的（即 f 不是任一连续函数列的极限函数），但是存在一列第一纲的函数逐点收敛到 f.

(a) 证明：$\mathbb{Q}$ 可数，设 $\mathbb{Q}=\{x_n, n\geq 1\}=\bigsqcup_{n\geq 1}\{x_n\}$，则 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\bigcap_{n\geq 1}\{x_n\}^c$ 为 G_δ 集。

下证 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集，反证法. 假设 $\mathbb{Q}$ 是 G_δ 集，则 $\exists$ 开集 G_n, $n\geq 1$, s.t. $\mathbb{Q}=\bigcap_{n\geq 1}G_n$.

则对 $\forall n\geq 1$, $\mathbb{Q}\subset G_n \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}\subset\overline{G_n}$ 即 $\mathbb{R}\subset\overline{G_n}$ 故 $\overline{G_n}=\mathbb{R}$，故 G_n^c 无内点.

又由于 $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\sqcup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\left(\bigsqcup_{n\geq 1}\{x_n\}\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{m\geq 1}G_m^c\right)$ 是可数个无内点的闭集，由 Baire 定理知 $\mathbb{R}$ 无内点，矛盾. 故 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集。(法II：若 $\mathbb{Q}$ 是 G_δ 集，则 $\mathbb{Q}$ 是稠密的 G_δ 集，则 $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c=\phi$ 是稠密的 G_δ 集，矛盾)

由引理 6.1.8 知，对于函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\mathrm{Cont}(f)$ 是 G_δ 集，因此不可能为 $\mathbb{Q}$.

(b) 证明：先说明 f 是以 1 为周期的函数。

对 $\forall k\geq 1$，有理数 $\frac{p}{q}$ 是不可约的 $\Longleftrightarrow \frac{p}{q}+k=\frac{p+kq}{q}$ 是不可约的，这是因为 p,q 互质 $\Longleftrightarrow$ $p+kq$ 与 q 互质. 故对于非零有理数 $\frac{p}{q}$，$f(\frac{p}{q})=f(\frac{p}{q}+k)=q$，$\forall k\geq 1$.

又 $f(1)=1=f(0)$，故 f 是以 1 为周期的函数.

因此只需证明 $[0,1]$ 区间上 f 的连续点为 $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. $\forall x_0\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

$\forall\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，使 $f(\ \ )=\frac{1}{q}>\varepsilon$ 的 q 至多有有限个，即 $1\leq q\leq[\frac{1}{\varepsilon}]$ 的正整数，而 $\frac{p}{q}\in[0,1]$，因此 p 只能取 $0,\cdots,q$. 故满足 $f(\frac{p}{q})=\frac{1}{q}>\varepsilon$ 的有理数只有有限个，设为 $x_1,\cdots,x_N$ ~~(从小到大排列)~~，设其中与 x_0 最接近的为 x_j，则当 $y\in B(x_0,|x_0-x_j|)$ 时，$f(y)\leq\varepsilon$，故 $\lim_{y\to x_0}f(y)=0$，所以 $[0,1]\setminus\mathbb{Q}\subset\mathrm{Cont}(f)$，

又显然在 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 上 f 不连续，故 $[0,1]$ 区间上 f 的连续点全体为 $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$，

$\Rightarrow \mathrm{Cont}(f)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(c) 证明：反证法. 假设 f 是某一极限函数列 $(f_n)_{n\geq 1}$ 的极限函数（逐点收敛），则由定理 6.1.7 知 $\mathrm{Cont}(f)$ 是 $\mathbb{R}$ 中稠密的 G_δ 集. 然而由题设 $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\Rightarrow$ $\mathrm{Cont}(f)=\phi$，矛盾，故 f 不是第一纲的。

设 $\mathbb{Q}=(x_n)_{n\geq 1}$，设 $f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{x_1,\cdots,x_n\}\\ 0, & 其他\end{cases}$，则对 $\forall n\geq 1$，易找到逐点收敛于 f_n 的连续函数列（折线函数），且 (f_n) 逐点收敛到 f，证毕。(法II：令 $f_n(x)=\lim_{m\to\infty}\cos^{2m}(n!\pi x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}^c 或部分\mathbb{Q}\\ 1, & x\in 部分\mathbb{Q}\end{cases}$ 则 f_n 为第一纲的，且 (f_n) 逐点收敛到 f.)