2019年9月23日 9:37

5. 设$\varphi:[0,1]\to[0,1]$是连续函数且不恒等于1. 设$\alpha\in\mathbb{R}$, 定义$C([0,1],\mathbb{R})$上的映射T为 $T(f)(x)=\alpha+\int_0^x f(\varphi(t))dt$.
证明T^2为压缩映射. 据此证明下面的方程存在唯一解:
$f(0)=\alpha,\ f'(x)=f(\varphi(x)),\ x\in[0,1]$. (*)

证明: $\forall 0\le x\le 1$, $|T(f)(x)-T(g)(x)|=\left|\int_0^x f(\varphi(t))-g(\varphi(t))dt\right|\le x\max_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|=x\|f-g\|$

进一步, $|T(T(f))(x)-T(T(g))(x)|=\left|\int_0^x (Tf)(\varphi(t))-(Tg)(\varphi(t))dt\right|$

$\le \int_0^x \varphi(t)\|f-g\|dt=\int_0^x\varphi(t)dt\,\|f-g\|$ 。

$\le\int_0^1\varphi(t)dt\,\|f-g\|$

由于φ不恒为1, 则$\int_0^1\varphi(t)dt<1$. 令$\lambda=\int_0^1\varphi(t)dt$, 上式左边对x取最大值得 $\|T^2f-T^2g\|\le\lambda\|f-g\|$. 故$T^2$是压缩映射. 由第二章习题11知T存在唯一不动点.
(*) 等价于 $f(x)=\alpha+\int_0^x f(\varphi(t))dt$, 即$f=Tf$, 故(*)存在唯一解.

6. 设$\alpha\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>1$. 考察下面的微分方程.
$f(0)=\alpha,\ f'(x)=af(x^b),\ 0\le x\le 1$. (*)

(a) 令$M>0$. 验证$E=C([0,1],\mathbb{R})$上赋予范数$\|f\|=\sup_{0\le x\le1}|f(x)|e^{-Mx}$后成为一个Banach空间.

(b) 设$g(x)=\alpha+\int_0^x af(t^b)dt$, 定义映射$T:E\to E$为$T(f)=g$. 证明选择合适的M, 可使T为压缩映射.

(c) 证明方程(*)有唯一解.

证明: (a) 易看出$\|\cdot\|$为E上的范数. 下证$(E,\|\cdot\|)$完备. 法II: $e^{-M}\|f\|_\infty\le\|f\|\le\|f\|_\infty$, 故$\|\cdot\|$完备

设$(f_n)\subset(E,\|\cdot\|)$为Cauchy列, 即$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n,m\ge N$时, $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ 即
$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\cdot e^{Mx}\le\varepsilon e^M$, $\forall 0\le x\le1$ (**)

则对于固定的x, $(f_n(x))$是$\mathbb{R}$中Cauchy列故收敛, 记极限为$f(x)$.

f连续: 在(**)中令$m\to\infty$得 $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon e^M$, $\forall 0\le x\le1$. (***)

对函数f_N存在$\delta>0$, 当$|y-x|<\delta$时, $|f_N(y)-f_N(x)|<\varepsilon$. 则

$|f(y)-f(x)|\le|f(y)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|$

$<e^M\cdot\varepsilon+\varepsilon+e^M\cdot\varepsilon=(2e^M+1)\varepsilon$, $y\in B(x,\delta)$ 故f连续.

由(***)知 $\|f_n-f\|\le\varepsilon$ $(n>N)$ 故 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f$, 所以$(E,\|\cdot\|)$完备.

(b) $\forall f,h\in E$, 往证存在$0<\lambda<1$ s.t. $\sup\left|\int_0^x af(t^b)-ah(t^b)dt\right|e^{-Mx}\le\lambda\sup|f(x)-h(x)|e^{-Mx}$.

$\left|a\int_0^x f(t^b)-h(t^b)dt\right|=\left|a\int_0^x(f(t^b)-h(t^b))e^{-Mt}\cdot e^{Mt}dt\right|\le a\int_0^x|f(t^b)-h(t^b)|e^{-Mt}dt\cdot e^{Mx}$

$\Rightarrow \left|a\int_0^x f(t^b)-h(t^b)dt\right|e^{-Mx}\le a\int_0^x|f(t^b)-h(t^b)|e^{-Mt}dt$, 令$u=t^b$, $t=u^{\frac1b}$, $dt=\frac1b u^{\frac1b-1}du$

$=\frac ab\int_0^{x^b}|f(u)-h(u)|e^{-Mu}e^{-M(u^{\frac1b}-u)}u^{\frac1b-1}du$

$\le\sup_{0\le x\le1}|f(x)-h(x)|e^{-Mx}\cdot\frac ab\int_0^{x^b}e^{-M(u^{\frac1b}-u)}u^{\frac1b-1}du$

$\le \sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-h(x)|e^{\cdots}\cdot\frac{1}{b}\int_0 e^{-M(u^{\frac{1}{b}}-u)}u^{\frac{1}{b}-1}du$

令 $v=u^{\frac{1}{b}}$. $\frac{a}{b}\int_0^{x^b}e^{-M(u^{\frac{1}{b}}-u)}u^{\frac{1}{b}-1}du = a\int_0^x e^{-M(v-v^b)}v^{1-b}\cdot v^{b-1}dv \le a\int_0^1 e^{-M(v-v^b)}dv$

对 $\forall v\in(0,1)$, $e^{-M(v-v^b)}\to 0\ (M\to\infty)$, $\{0,1\}$为零测度集, 由勒贝格控收敛定理知右端积分趋于0 $(M\to\infty)$

记 $\lambda=a\int_0^1 e^{-M(v-v^b)}dv$, 则可取 M s.t. $\lambda\in(0,1)$. 此时 T 为压缩映射.

(c) (*) 等价于积分方程 $f(x)=f(0)+\int_0^x af(t^b)dt$ 且 $f(0)=\alpha$, 即 $Tf=f$.

由(b)知存在唯一 $f\in E$ s.t. $Tf=f$, 故 (*) 有唯一解.