19. 设 $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$，$f$ 的 Fourier 变换定义为：

$$\mathcal{F}(f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,dx,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

5-19

(a) 证明：任取 $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$，都有 $\mathcal{F}(f)\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) 证明：$\mathcal{F}$ 的像集在 $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 中稠密。

证明：(a) 对 $\forall t\in\mathbb{R}$，设 (t_n) 收敛于 t. 则

$$|\mathcal{F}(f)(t_n)-\mathcal{F}(f)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-it_nx}dx-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-it_nx}-e^{-itx}|\,dx$$

注意到 $|e^{-it_nx}-e^{-itx}|\leqslant 2$ 且 $e^{-it_nx}-e^{-itx}\to 0$. 由 Lebesgue 控制收敛定理知

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||e^{-it_nx}-e^{-itx}|\,dx\to 0\ (n\to\infty)$

故 $|\mathcal{F}(f)(t_n)-\mathcal{F}(f)(t)|\to 0\ (n\to\infty)$，所以 $\mathcal{F}(f)$ 连续。

下证 $\lim\limits_{|t|\to\infty}\mathcal{F}(f)(t)=0$.

设 $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leqslant b$. $f=I_{[a,b]}$，则 $|\mathcal{F}(f)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|=\left|\int_a^b e^{-itx}dx\right|$

$$=\left|\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\right|\leqslant\frac{2}{|t|}\to 0\quad(|t|\to\infty)$$

由映射 $f\mapsto\mathcal{F}(f)$ 的线性性知，当 f 为阶梯函数时仍有 $\mathcal{F}(f)(t)\to 0\ (|t|\to\infty)$.

设 $f\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. 则对 $\forall\varepsilon>0$ 存在阶梯函数 g s.t. $\|f-g\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$，

则 $|\mathcal{F}(f)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-g(x))e^{-itx}dx+\int g(x)e^{-itx}dx\right|$

$$\leqslant\|f-g\|_1+\left|\int g(x)e^{-itx}dx\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int g(x)e^{-itx}\,dx\right|$$

对于 g，存在 G，当 $|t|>G$ 时，$\left|\int g(x)e^{-itx}dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，故 $|\mathcal{F}(f)(t)|<\varepsilon$，当 $|t|>G$.

$\Rightarrow\lim\limits_{|t|\to\infty}\mathcal{F}(f)(t)=0$，故 $\mathcal{F}(f)\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) ?