第一次习题课

2019年9月15日 19:30

2. 证明度量空间(E,d)是完备的充要条件是：对E中任意序列(x_n)若对$\forall n\geq 1$, $d(x_n,x_{n+1})\leq 2^{-n}$，则序列$(x_n)$收敛.

证明："$\Rightarrow$" 由题设，对$\forall n,p\geq 1$,

$$d(x_n,x_{n+p})\leq 2^{-n}+2^{-(n+1)}+\cdots+2^{-(n+p-1)}<\sum_{k=n}^{\infty}2^{-k}=2^{1-n}\to 0\ (n,p\to\infty)$$

故(x_n)为Cauchy列 则(x_n)收敛.

"$\Leftarrow$" 设$(y_n)\subset E$为Cauchy列，则可取子列(y_{n_k}) s.t. $d(y_{n_k},y_{n_{k+1}})<2^{-k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

则(y_{n_k})收敛，故(y_n)收敛.

3. 设(E,d)是度量空间，(x_n)是E中Cauchy列，并有$A\subset E$，假设A的闭包$\bar{A}$在E中完备且$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,A)=0$. 证明$(x_n)$在$E$中收敛.

证明：$\forall n\geq 1$, $\exists y_n\in A$ s.t. $|d(x_n,y_n)-d(x_n,A)|\leq\frac{1}{n}$，则$d(x_n,y_n)\leq\frac{1}{n}+d(x_n,A)$,

故
$$\begin{aligned}d(y_n,y_m)&\leq d(y_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)\\&\leq\frac{1}{n}+d(x_n,A)+d(x_n,x_m)+\frac{1}{m}+d(x_m,A)\end{aligned}$$

故$(y_n)\subset A\subset\bar{A}$为Cauchy列，$\bar{A}$完备则$\exists y\in\bar{A}$ s.t. $d(y_n,y)\to 0\ (n\to\infty)$

故$d(x_n,y)\leq d(x_n,y_n)+d(y_n,y)\leq\frac{1}{n}+d(x_n,A)+d(x_n,y)\to 0\ (n\to\infty)$

故(x_n)在E中收敛. □

4. 设(E,d)是度量空间，$\alpha>0$. 设$A\subset E$ 满足对$\forall x,y\in A$且$x\neq y$，必有$d(x,y)\geq\alpha$.

证明A是完备的.

证明：设$(x_n)\subset A$为Cauchy列，则$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n,m\geq N$时$d(x_n,x_m)<\frac{\alpha}{2}<\alpha$，由题设

$x_n=x_m$ 故对$\forall n\geq N$有$x_n=x_N$ 则(x_n)收敛且极限为x_N. 故A完备. □