6.12 ✓ 扫描

11. 设 (C_n) 是 Hilbert 空间 H 中的一个递增的非空闭凸子集列，C 是所有 C_n 的并集的闭包. 证明：$P_C(x)=\lim_{n\to\infty} P_{C_n}(x)$，$\forall x\in H$.

证明：先证 $P_{C_n}(x)$ 依范数收敛. 由于 C_n 递增则序列 $(\|x-P_{C_n}(x)\|)_{n\geq 1}$ 单调递减有下界故收敛. 则对于 $\forall n,m\geq 1$，不妨设 $n<m$，有

$$\|P_{C_n}(x)-P_{C_m}(x)\|^2=\|P_{C_n}(x)-x-(P_{C_m}(x)-x)\|^2$$
$$=2(\|P_{C_n}(x)-x\|^2+\|P_{C_m}(x)-x\|^2)-\|P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)-2x\|^2 \text{（平行四边形法则）}$$
$$=2(\|P_{C_n}(x)-x\|^2+\|P_{C_m}(x)-x\|^2)-4\left\|\frac{P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)}{2}-x\right\|^2$$
$$\leq 2(\|P_{C_n}(x)-x\|^2+\|P_{C_m}(x)-x\|^2)-4\|P_{C_m}(x)-x\|^2 \text{（这是由于 } \frac{P_{C_n}(x)+P_{C_m}(x)}{2}\in C_m\text{）}$$
$$=2\|P_{C_n}(x)-x\|^2-2\|P_{C_m}(x)-x\|^2\to 0 \quad (n,m\to\infty)$$

故 $(P_{C_n}(x))$ 是 H 中的 Caushy 列，故收敛于某个 $y\in H$. 即 $\lim_{n\to\infty} P_{C_n}(x)=y$.

又由于对 $\forall n\geq 1$，
$$\mathrm{Re}\langle x-P_{C_n}(x), z-P_{C_n}(x)\rangle\leq 0,\quad \forall z\in C_n$$
令 $n\to\infty$ 由内积的连续性得 $\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle\leq 0$，$\forall z\in C_n$，$\forall n\geq 1$，

进一步
$$\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle\leq 0,\quad \forall z\in C.$$
故 $y=P_C(x)$，因此 $P_C(x)=\lim_{n\to\infty} P_n(x)$，$\forall x\in H$. ▨

12. 设 H 是内积空间，$(x_1,\dots,x_n)$ 是 H 中的任一向量组，称矩阵 $(\langle x_i,x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ 的行列式为向量组 $(x_1,\dots,x_n)$ 的 Gram 行列式，记作 $G(x_1,\dots,x_n)$.

(a) 证明 $G(x_1,\dots,x_n)\geq 0$；且 $G(x_1,\dots,x_n)>0$ 当且仅当向量组 $(x_1,\dots,x_n)$ 线性独立。

(b) 假设向量组 $(x_1,\dots,x_n)$ 线性独立. 令 $E=\mathrm{span}(x_1,\dots,x_n)$. 证明
$$d(x,E)^2=\frac{G(x,x_1,x_2,\dots,x_n)}{G(x_1,x_2,\dots,x_n)},\quad \forall x\in H.$$

证明：(a) 对任意向量 $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{C}^n$，
$$\sum_{i,j=1}^n \bar{k}_i k_j\langle x_i,x_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n \bar{k}_i x_i, \sum_{j=1}^n \bar{k}_j x_j\right\rangle\geq 0$$
故 $G(x_1,\dots,x_n)\geq 0$.

下证 $G(x_1,\dots,x_n)>0 \Longleftrightarrow$ 向量组 $(x_1,\dots,x_n)$ 线性独立。

"$\Rightarrow$" 反证法，若不独立，则存在 $\mathbb{C}$ 中不全为 0 的 k_i，$i=1,\dots,n$ s.t. $\sum_{i=1}^n \bar{k}_i x_i=0$，

则 $\sum_{i,j=1}^n \bar{k}_i k_j\langle x_i,x_j\rangle=0$，与 $G(x_1,\dots,x_n)>0$ 矛盾。

"$\Leftarrow$" 反证法，若不然，则存在 $\mathbb{C}$ 中不全为 0 的 k_i，$i=1,\dots,n$ s.t. $\sum_{i,j=1}^n \bar{k}_i k_j\langle x_i,x_j\rangle=0$.

则 $\sum_{i=1}^n \bar{k}_i x_i=0$，故 $(x_1,\dots,x_n)$ 线性相关，矛盾。