4·10 ✓ 扫描

⑩ (a) 设H是Hilbert空间，$D_n=\{-1,1\}^n$. 证明

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_n)\in D_n}\|\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2,\quad \forall x_1,x_2,\dots,x_n\in H$$

(b) 设$(X,\|\cdot\|)$是Banach空间. 并假设有一个X上的内积范数$|\cdot|$等价于$\|\cdot\|$. 证明存在正常数a和b使得

$$a\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\le\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|^2\le b\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2,\quad \forall x_1,x_2,\dots,x_n\in X.$$

(c) 设$1\le p\ne2<\infty$，证明空间c_0，ℓ_p和$L_p(0,1)$没有等价的内积范数。

证明：(a)

$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_n)\in D_n}\|\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n\|^2=\frac{2^n}{2^n}(\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)+\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_n)\in D_n}\sum_{i\ne j}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle x_i,x_j\rangle$$

由对称性知上式右端第二项为0，故结论成立。

(b) 设内积范数$|\cdot|$等价于$\|\cdot\|$，则$\exists$常数$c,\ d>0$ s.t.

$$c|x|\le\|x\|\le d|x|,\quad \forall x\in H.$$

故
$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|^2\le\frac{d^2}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big|^2=d^2(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)$$
$$\le\frac{d^2}{c^2}(\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)$$

同理
$$\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_k)\in D_n}\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|^2\ge\frac{c^2}{d^2}(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)$$

取 $a=\frac{c^2}{d^2}$，$b=\frac{d^2}{c^2}$ 即可.

(c) 对于c_0：对$\forall n\ge1$，考虑向量$e_1,\dots,e_n$. 则$\|e_k\|=1$，$k=1,\dots,n$ 且 $\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_ke_k\|^2=1$.

反证法. 若$\|\cdot\|$有等价的内积范数，则由(b) $\exists a,b>0$ s.t.

$$an=a\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2\le1\le b\sum_{k=1}^n\|e_k\|^2=bn$$

即 $an\le1\le bn$，$\forall n\ge1$，不可能.

对于ℓ_∞也同理.

对于ℓ_p，$1\le p\ne2<\infty$. 则$\|e_k\|_p=1$，$k=1,2,\dots,n$ 且 $\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_ke_k\|_p^2=n^{\frac2p}$，若$\|\cdot\|_p$有等价的内积范数，

则 $an\le n^{\frac2p}\le bn\ \Rightarrow\ a\le n^{\frac2p-1}\le b$，$\forall n\ge1$. 则$\frac2p-1=0\Rightarrow p=2$，矛盾.

对于$L_p(0,1)$. 考虑 $x_k=nI_{(\frac{k}{n^p},\frac{k+1}{n^p})}$，$k=0,1,\dots,n-1$ 则$\|x_k\|_p=1$. 且

$$\Big\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_kx_k\Big\|_p^2=(1+1+\cdots+1)^{\frac2p}=n^{\frac2p}$$

若$\|\cdot\|_p$有等价的内积范数则$\exists a,b>0$ s.t. $an\le n^{\frac2p}\le bn$. 与前面一样得 $p=2$. 矛盾。