习题七

1. 证明: (a) $d(f,g)\geq 0$ ✓ $d(f,g)=d(g,f)$ ✓ $d(f,h)=\min\{1,\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-h(x)|\}\leq\min\{1,\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)-h(x)|\}\leq\min\{1,\sup|f(x)-g(x)|\}+\min\{1,\sup|g(x)-h(x)|\}$. ($\min\{1,A+B\}\leq\min\{1,A\}+\min\{1,B\}$. 可讨论 $A\leq 1$, $A>1$ 得到) $=d(f,g)+d(g,h)$. 故 d 为距离。

设 $(f_n)_{n\geq1}$ 是 Cauchy 列. 不妨设 $\varepsilon<1$. $d(f_n,f_m)<\varepsilon$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $(n,m>N)$. $(f_n(x))_{n\geq1}$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列, 令 $f(x)=\lim_n f_n(x)$. 在 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 中令 $m\to\infty$ 得 $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $n>N$. $\Rightarrow f$ 连续, 故 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, d 完备。

(b) 取 $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

若 $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),d)$ 是拓扑向量空间, 则 $\lambda\to0$ 时, $\lambda f\to0$. 即 $d(0,\lambda f)\to0$. $(\lambda\to0)$

然而 $d(0,\lambda f)=\min\{1,\sup_{x\in\mathbb{R}}|\lambda x|\}\overset{\lambda\neq0}{=\!=}1\not\to0$. 故 $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),d)$ 不是拓扑向量空间。 ▨

2. 证明: (a) A 是开集, $A+B=\bigcup_{b\in B}(A+b)$ 为开集的并, 所以 $A+B$ 开. ($A+b$ 与 A 同胚 $\Rightarrow A+b$ 开).

(b) A,B compact $\Rightarrow A\times B$ compact, 又 $\sigma(A\times B)=A+B$, σ 连续 $\Rightarrow A+B$ compact.

(c) ??

3. 证明: (a) $f\neq0$, 则 $\exists x_0\in E$, $f(x_0)\neq0$, 令 $a=\frac{x_0}{f(x_0)}$, 则 $f(a)=1$.

(b) $\{1\}$ 是闭的, f 连续 $\Rightarrow f^{-1}(1)$ 是闭的 $\Rightarrow(f^{-1}(1))^c$ 是开的。

$f(0)=0\Rightarrow 0\in[f^{-1}(1)]^c$.

(c) 由(b)知 $(f^{-1}(1))^c$ 是含原点的开集, 由拓扑向量空间的性质知, 存在原点的平衡邻域 $V\subset(f^{-1}(1))^c$, 则 $\forall y\in V$, $f(y)\neq1$.

反证法, 设 $\exists y_0\in V$ s.t. $|f(y_0)|>1$, 则 $\left|\frac{1}{f(y_0)}\right|<1$, V 是平衡的 $\Rightarrow\frac{y_0}{f(y_0)}\in V$, 但 $f\left(\frac{y_0}{f(y_0)}\right)=1$. 矛盾, 故 $|f(y)|<1$, $\forall y\in V\Rightarrow f$ 连续。 ▨

4. 证明: (a) 往证 $\mathrm{conv}(A)=\{\sum_{k=1}^n t_k a_k: a_k\in A, t_k\geq0, \sum_{k=1}^n t_k=1, n\geq1\}$.

设 $\tilde{A}$ 为凸且 $A\subset\tilde{A}$ 则 $\sum_{k=1}^n t_k a_k\in\tilde{A}$ 故 $RHS\subset\tilde{A}$, 则 $RHS\subset\mathrm{conv}(A)$.

RHS 是凸的且 $A\subset RHS$, 故 $\mathrm{conv}(A)\subset RHS$, 故 $\mathrm{conv}(A)=RHS$.

往证 $ba(A)=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$.

若 $\tilde{A}$ 为平衡的且 $A\subset\tilde{A}$ 则 $\lambda A\subset\lambda\tilde{A}\subset\tilde{A}$, $|\lambda|\leq1$, $\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A\subset\tilde{A}$, 则 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A\subset ba(A)$.

又 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$ 为平衡的 $\Rightarrow ba(A)\subset\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$. 则 $ba(A)=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|\leq1}\lambda A$.