2 给出a,b的取值范围，使其成为$L_{a,b}$连续的充分必要条件，然后确定$L_{a,b}$的范数。 3-2

证明: (a) • $\|P\|_\infty \geq 0$

• $\|P\|_\infty=0 \Rightarrow P(x)=0, \forall x\in[0,1]$ ~~$\Rightarrow P=0$~~ $\xRightarrow{\text{由代数基本定理}}$ $P(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. 即 $P=0$.

• $\|\lambda P\|_\infty=|\lambda|\,\|P\|_\infty$

• $\|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty+\|Q\|_\infty$

(b) "⇒" 若L_a是连续的，则 $|L_a(P)|=|P(a)|\leq\|L_a\|\,\|P\|_\infty$ 其中$\|L_a\|<\infty$.

取P为x^n，上式意味着 $|a^n|=|a|^n\leq\|L_a\|\,\|x^n\|_\infty$

而 $\|x^n\|_\infty=1$，因此 $|a|^n\leq\|L_a\|<\infty$

故 $|a|\leq1$.

取P为$(1-x)^n$，计算其范数得 $\|(1-x)^n\|_\infty=1$，又因为 $|P(a)|=|(1-a)^n|=|1-a|^n\leq\|L_a\|\,\|P\|_\infty=\|L_a\|<\infty$

则 $|1-a|\leq1$，这等价于$a\in[0,2]$. 联合前面的结论则 $a\in[0,2]\cap[-1,1]=[0,1]$.

"⇐" 若 $a\in[0,1]$，则 $|L_a(P)|=|P(a)|\leq\|P\|_\infty$，故$L_a$连续。

下面计算L_a的范数.

由上面的"⇐"过程知 $\|L_a\|\leq1$. 取 $P(x)\equiv1$，则 $\|P\|_\infty=1$，且 $|L_a(P)|=|1|=1$ 故 $\|L_a\|=1$.

(c) $a,b\in[0,1] \Longleftrightarrow L_{a,b}$连续，且 $\|L_{a,b}\|=b-a$.

"⇐" 若$L_{a,b}$连续，则对$\forall P\in E$，$|L_{a,b}(P)|=\left|\int_a^b P(x)dx\right|\leq\|L_{a,b}\|\,\|P\|_\infty$，其中$\|L_{a,b}\|<\infty$，

取$P(x)=x^n$，$\|P\|_\infty=1$，则 $\left|\int_a^b x^n dx\right|=\left|\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\right|\leq\|L_{a,b}\|<\infty$

若$|a|<|b|$，则 $\frac{|b|^{n+1}}{n+1}\left(1-\left|\frac{a}{b}\right|^{n+1}\right)\leq\|L_{a,b}\|<\infty$，令$n\to\infty$知 $|b|\leq1$. 因此 $|a|\leq1$, $|b|\leq1$

同理$|b|<|a|$时亦有$|a|\leq1$, $|b|\leq1$. 当$|a|=|b|$时，由于$a<b$，则$a=-b$, $b>0$. $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}=\frac{b^{n+1}(1+(-1)^n)}{n+1}<\infty\Rightarrow|b|\leq1$

取$P(x)=(1-x)^n$, $\|P\|_\infty=1$，则 $\left|\int_a^b(1-x)^n dx\right|=\left|\frac{(1-a)^{n+1}-(1-b)^{n+1}}{n+1}\right|\leq\|L_{a,b}\|<\infty$，类似于上面的过程知 $|a-1|\leq1$, $|b-1|\leq1$. 即 $a,b\in[0,2]$.

联合前面的结论则 $a,b\in[-1,1]\cap[0,2]=[0,1]$.

"⇒" 若$a,b\in[0,1]$，则 $|L_{a,b}(P)|=\left|\int_a^b P(x)dx\right|\leq(b-a)\|P\|_\infty$，故$L_{a,b}$连续，且$\|L_{a,b}\|\leq b-a$

又$P(x)\equiv1$，则$\|P\|_\infty=1$，$|L_{a,b}(P)|=\left|\int_a^b P(x)dx\right|=b-a$. 故$\|L_{a,b}\|=b-a$.