由于 $\|\frac{f_1+f_2}{2}\|=1$，可取 S_E 上的一列 (x_n)，$(\frac{f_1+f_2}{2})(x_n)\to 1$.

还需说明：$\forall x\in S_E$，不存在 B_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ $\Leftrightarrow$ 不存在 S_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

"$\Rightarrow$"显然. "$\Leftarrow$"反证，若存在 B_E 中相异的 x_1,x_2，s.t. $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$\|x_1\|\le 1$，$\|x_2\|\le 1$. 则必有 $\|x_1\|=\|x_2\|=1$，否则若 $\|x_1\|<1$ 则 $\|\frac{x_1+x_2}{2}\|\le\frac12\|x_1\|+\frac12\|x_2\|<1$，矛盾. 则 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$\|x_1\|=1$，$\|x_2\|=1$，$x_1\ne x_2$.

设 $y_n=x_n-a_ne$.

(ii) ~~$x_n=y_n+a_ne$~~ $\Rightarrow (f_1-f_2)(x_n)=(f_1-f_2)(y_n)+a_n \Rightarrow (f_1-f_2)(y_n)=0$，故 $y_n\in F$

由(i)知 $a_n=f_1(x_n)-f_2(x_n)\to 0$，则 $\|y_n\|\le\|x_n\|+|a_n|\|e\|\to 1$ 且 $\|y_n\|\ge\|x_n\|-|a_n|\|e\|\to 1$，故 $\lim_n\|y_n\|=1$.

(iii) $\varphi(y_n)=\varphi(x_n-a_ne)=\overset{\to 1}{f_1(x_n)}-\overset{\to 0}{a_n}f_1(e)\to 1\ (n\to\infty)$，则 $\|\varphi\|\ge\frac{|\varphi(y_n)|}{\|y_n\|}\to 1\ (n\to\infty)$

故 $\|\varphi\|\ge 1$，又 f_1 是 φ 的延拓 $\Rightarrow \|\varphi\|\le\|f_1\|=1$，故 $\|\varphi\|=1$，因此，φ 有两个不同的 Hahn-Banach 线性延拓 f_1 和 f_2，矛盾，故 E^* 是严格凸的. ∎

保范

16 证明：(a) $\forall x\in F$. $|f(x)|=|\lim_n\frac1n\sum_{k=1}^n x_k|\le\max_{k\ge 1}|x_k|=\|x\|_\infty$，故 $f\in F^*$.

(b) 由(a)知 $\|f\|\le 1$，取 $\mathbb{1}=(1,1,1,\cdots)$，则 $\|\mathbb{1}\|=1$，$f(\mathbb{1})=1\Rightarrow\|f\|=1$.

由Hahn-Banach延拓定理，$\exists m\in\ell_\infty^*$. s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$.

则对 $\forall x\in\ell^\infty$. 注意到 $Tx-x=(x_2-x_1,x_3-x_2,x_4-x_3,\cdots)\Rightarrow m_n(Tx-x)=$
$\frac{x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+x_{n+1}-x_n}{n}=\frac{x_{n+1}-x_1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，故 $Tx-x\in F$ 且 ~~$m(Tx-x)=0$~~
$f(Tx-x)=0$，则 $m(Tx-x)=f(Tx-x)=0$，即 $m\circ T=T$.

为了说明 $\liminf_{n\to\infty}x_n\le m(x)\le\limsup_{n\to\infty}x_n$，$\forall x\in\ell_\infty$，先说明当 $x\ge 0$ 时，$m(x)\ge 0$.

实际上，对 $\forall x\ge 0$，$x=\|x\|\frac{x}{\|x\|}$，$0\le\frac{x}{\|x\|}\le 1$，则 $1-m(\frac{x}{\|x\|})=m(\mathbb{1}-\frac{x}{\|x\|})\le\|\mathbb{1}-\frac{x}{\|x\|}\|$
≤ 1，这里 $\mathbb{1}:=(1,1,1,\cdots)$，故 $m(\frac{x}{\|x\|})\ge 0\Rightarrow m(x)\ge 0$.

设 $b=$ ~~sup~~ $\limsup_{n\to\infty}x_n$，$\forall\varepsilon>0$ $\exists N$，$n>N$ 时 $x_n<b+\varepsilon\Rightarrow(b+\varepsilon)e-T^N(x)>0\Rightarrow$
$m((b+\varepsilon)e-T^N(x))\ge 0$，即 $(b+\varepsilon)\underset{f(e)=1}{m(e)}-m(T^N(x))=(b+\varepsilon)-m(x)\ge 0\Rightarrow m(x)\le b+\varepsilon$
($m\circ T^N=m\circ T^{N-1}=\cdots=m\circ T=m$)

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $m(x)\le b=\limsup_{n\to\infty}x_n$，同理 $m(x)\ge\liminf_{n\to\infty}x_n$. ∎

17 证明：(a) $d(\mathbb{1},Y)=\inf_{x\in\ell_\infty}\|\mathbb{1}-(x-Tx)\|$，故只需证对 $\forall x\in\ell_\infty$. $\|\mathbb{1}-(x-Tx)\|\ge 1$.

设 $y=\mathbb{1}-(x-Tx)$，则 $\|y\|\ge\frac1n\sum_{k=1}^n|y_k|\ge\frac1n|\sum_{k=1}^n y_k|=|\frac1n(x_{n+1}-x_1)+1|\to 1$ (因为 $|x_{n+1}-x_1|\le 2\|x\|$)

故 $d(\mathbb{1},Y)\ge 1$.

(b) 定义函数 $f:\mathrm{span}(Y\cup\{\mathbb{1}\})\to\mathbb{R}$ s.t. $f(t\mathbb{1}+y)=t$，$t\in\mathbb{R}$，$y\in Y$

则 $|f(t\mathbb{1}+y)|=|t|\le|t|d(\mathbb{1},Y)\le|t|\|\mathbb{1}+\frac{y}{t}\|=\|t\mathbb{1}+y\|\Rightarrow\|f\|\le 1$.

又 $\|\mathbb{1}\|=1$，$f(\mathbb{1})=1\Rightarrow\|f\|=1$.

(c) 设 $F=\mathrm{span}(Y\cup\{\mathbb{1}\})$，由(b)知 f 是子空间 F 上的连续泛函且 $\|f\|=1$，由Hahn-Banach延拓定理知 $\exists m\in\ell_\infty^*$ s.t. $m|_F=f$ 且 $\|m\|=1$，则对 $\forall x\in\ell_\infty$ $m(x-Tx)=f(x-Tx)=0\Rightarrow m\circ T=m$ ∎