7-10.11

10. 证明: (a) 设 $f\in E^*$, $f\neq 0$. 则由于A是紧集知 $f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集即有界闭集，则 $f(A)$ 有最大值 α 则 $A\subset\{f\leq\alpha\}$ 且 $A\cap\{f=\alpha\}$ 非空，故 $\{f=\alpha\}$ 为A的支撑超平面。

(b) 设A是内部非空的闭凸集，$\forall x\in\partial A$, $x\notin \mathring{A}$. 由Hahn-Banach隔离定理，存在 $f\in E^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$ s.t. $f(a)<\alpha$, $\forall a\in\mathring{A}$ 且 $f(x)=\alpha$

则由f连续知 $f(a)\leq\alpha$, $\forall a\in A$，故 $A\subset\{f\leq\alpha\}$, $A\cap\{f=\alpha\}\neq\phi$, $x\in\{f=\alpha\}$. ▨

11. 证明: (a) 正齐次性，三角形不等式易证.
$\forall\varepsilon>0$, $\frac{x}{\|x\|+\varepsilon}\in B_X\subset C \Rightarrow p(x)\leq\|x\|+\varepsilon \Rightarrow p(x)\leq\|x\|$, $\forall x\in X$.

设 $I(x)=\{\lambda>0: \frac{x}{\lambda}\in C\}$. 则对 $\forall\lambda\in I(x)$，由于 $\frac{x}{\lambda}\in C\subset k\overline{B_X} \Rightarrow \frac{\|x\|}{\lambda}\leq k \Rightarrow \frac{\|x\|}{k}\leq\lambda$

$\Rightarrow$ 故 $\frac{1}{k}\|x\|\leq p(x)$, $\forall x\in X$. 综上, $\frac{1}{k}\|x\|\leq p(x)\leq\|x\|$, $\forall x\in X$.

(b) (i) 只需证 $x\in C \Leftrightarrow p(x)\leq 1$. "$\Rightarrow$" 显然。"$\Leftarrow$" $p(x)\leq 1$, 则 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\in C$, 又 $\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\to x$, C闭, 则 $x\in C$.

(ii) 设 $p(x)<1$, 由p连续, $\exists B(x,r)\subset\{p(x)<1\}\subset C \Rightarrow x\in\mathring{C}$. 故 $p(x)<1\Rightarrow x\in\mathring{C}$.
反过来, 设 $x\in\mathring{C}$, 则 $\exists r>0$, $B(x,r)\subset C$, 则 取 $\varepsilon<\frac{r}{\|x\|}$ 有 $x+\varepsilon x\in C \Rightarrow p(x)\leq\frac{1}{1+\varepsilon}$ <1, 故 $\mathring{C}\subset\{x: p(x)<1\}$.

(iii) $x\in\partial C \Leftrightarrow x\in C$ 且 $x\notin\mathring{C} \Leftrightarrow p(x)\leq 1$ 且 $p(x)\geq 1 \Leftrightarrow p(x)=1$.

(c) 取 $x\in\partial C$, 则 $x\notin\mathring{C}$, $\mathring{C}$ 是开凸对称子集, 由Hahn-Banach隔离定理, $\exists f\in X^*$ s.t. $f(x)=1$ 且在集合 $\mathring{C}$ 上 $|f|<1$, 且由f连续知在集合 C上 $|f|\leq 1$. ▨