习题 5

1. 对任意 $x\in[0,1]$，设 $f_n(x)=x^n$. 在 $[0,1]$ 上的哪些点处，$(f_n)_{n\geq 1}$ 等度连续？ ✓ 5-17, 18

证明：当 $x\in[0,1)$ 时，$(f_n)_{n\geq1}$ 等度连续，在 $x=1$ 处，不等度连续。

2.✓ 3.✓ 4.✓ 5.✓ 6.✓ 7.✓ 8.✓ 9.✓ 10.✓ 11.✓ 12.✓ 13.✓ 14.✓ 15.✓

16. ~~[illegible]~~.

17. 对任意 $a\in\mathbb{R}$，相应的平移变换 $T_a(f)(x)=f(x-a)$. 证明对任意 $f\in L^p_{2\pi}$，$0<p<\infty$，有
$$\lim_{a\to0}\|T_a(f)-f\|_p=0.$$

证明：设 $f(x)=e^{inx}$，$n\in\mathbb{Z}$，$x\in\mathbb{R}$. 则 $\|f(x-a)-f(x)\|_p=\|e^{in(x-a)}-e^{inx}\|_p$
$$=\|e^{inx}\|_p\,|e^{ina}-1|=|e^{-ina}-1|\to0\ (a\to0)$$

故 $f\in\mathcal{P}$ 时，$\lim\limits_{a\to0}\|T_a(f)-f\|_p=0$.

设 $f\in L^p_{2\pi}$，则 ~~$\exists g\in\mathcal{P}$~~ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists g\in\mathcal{P}$. s.t. $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$.

对于 g，$\exists\delta>0$，当 $|a|<\delta$ 时，$\|T_a(g)-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$. 故
$$\|T_a(f)-f\|_p\leq\|T_a(f)-T_a(g)\|_p+\|T_a(g)-g\|_p+\|g-f\|_p$$
$$=\|f-g\|_p+\|T_a(g)-g\|_p+\|g-f\|_p$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{a\to0}\|T_a(f)-f\|_p=0$. ▨

18. 令 $N\geq1$，N 阶的 Fejér 核定义为 $F_N=\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}D_n$. 其中 $D_n(x)=\sum\limits_{|k|\leq n}e^{ikx}=\dfrac{\sin(n+\frac12)x}{\sin\frac{x}{2}}$，$n\in\mathbb{N}$.

(a) 证明：(i) $F_N(t)=\frac{1}{N}\left(\dfrac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$；

(ii) $\|F_N\|_1=\int_0^{2\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}=1$.

(iii) 任取 $\delta>0$，$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}=0$

(b) 令 $\sigma_N(f)(x)=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}S_k(f)(x)=\int_0^{2\pi}f(x-t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$.

证明：(i) 若 $f\in L^p_{2\pi}$，$1\leq p\leq\infty$，则 $\|\sigma_N(f)\|_p\leq\|f\|_p$；

(ii) 若 $f\in C_{2\pi}$，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty=0$；

(iii) 若 $f\in L^p_{2\pi}$，$1\leq p<\infty$，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_p=0$ 对任意 $f\in L^p_{2\pi}$.

证明：(a) $F_N(t)=\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{\sin(n+\frac12)t}{\sin\frac{t}{2}}$，下面证 $\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sin(n+\frac12)t=\dfrac{\sin^2\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$.

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sin(n+\tfrac12)t=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{t}{2}}(1+\cdots+e^{i(N-1)t})\right)=\mathrm{Im}\left[(\cos\tfrac{t}{2}+i\sin\tfrac{t}{2})\sum_{n=0}^{N-1}e^{int}\right]$$
$$=\cos\tfrac{t}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{int}\right)+\sin\tfrac{t}{2}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{int}\right)\qquad(*)$$

又 $\mathrm{Im}\left(\sum\limits_{n=0}^{N-1}e^{int}\right)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}}\right)=\dfrac{\sin t+\sin(N-1)t-\sin Nt}{2-2\cos t}$,