又由于 $(u_n(a))$ 收敛 故 $\exists N$, s.t. $n,m\geq N$ 时 $\|u_n(a)-u_m(a)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 故

$$\|u_n(x)-u_m(x)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\Rightarrow (u_n(x))$ 是 Caushy 列, 由F完备知 $(u_n(x))$ 收敛。

7. 考虑空间 $E=(C([0,1]),\mathbb{R})$, 其上赋予一范数 $\|\cdot\|_\infty$. 定义 $(C([0,1]))^*$ 中的连续泛函数序列 (u_n) 如下: $u_n(f)=n\int_0^1 f(t)dt-\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$.

(a) 证明: 如果f是Lipschitz函数, 则 $\frac{u_n(f)}{n}=O(\frac{1}{n})$, 当 $n\to\infty$.

(b) 证明: $\|u_n\|=2n$.

[注:] Lipschitz函数在 $C([0,1])$ 中稠密, 结合(b), (a)的结论意味着 $\frac{u_n(f)}{n}$ 在 $\forall f\in C([0,1])$ 上收敛。

(c) 由此导出集合 $\{f\in E:\frac{u_n(f)}{n}\neq O(\frac{1}{n})\}$ 是 $C([0,1])$ 中稠密的 G_δ 集。

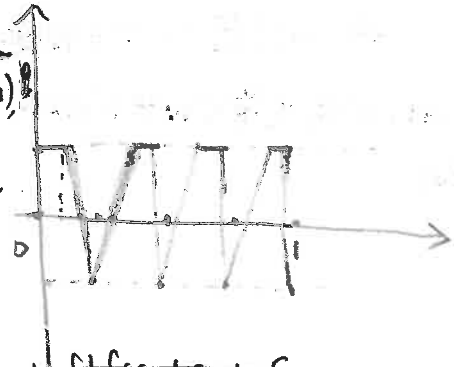
(a) 证明: f是Lipschitz函数, 设 $|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$, $\forall x,y\in[0,1]$.

$$\left|\frac{u_n(f)}{n}\right|=\left|\int_0^1 f(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\tfrac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(t)-f(\tfrac{k}{n})\,dt\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot K\left|t-\frac{k}{n}\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot K\cdot\frac{1}{n}=\frac{K}{n}$$

故 $\frac{u_n(f)}{n}=O(\frac{1}{n})$.

(b) 证 对 $\forall n\geq1$, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta<\frac{\varepsilon}{2n}$. 设 f 为连接 $(0,1)$, $(\frac{1}{n}-2\delta,1)$, $(\frac{1}{n},-1)$, $(\frac{1}{n}+2\delta,1)$, $(\frac{2}{n}-2\delta,1)$, $(\frac{2}{n},-1)$, $(\frac{2}{n}+2\delta,1)$, $(\frac{3}{n}-2\delta,1)$, $(\frac{3}{n},-1)$, $\cdots$, $(\frac{n}{n}-2\delta,1)$, $(1,-1)$ 的折线函数.



则 $\int_0^1 f(x)dx=(\frac{1}{n}-2\delta)n=1-2\delta n$.
$\geq 1-\varepsilon$

~~取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2n}$ 则 $\int_0^1 f(x)dx=1-\varepsilon$~~

$\Rightarrow u_n(f)\geq n(1-\varepsilon)-\sum_{k=1}^{n}(-1)\geq n(2-\varepsilon)$, 而 $\|f\|_\infty=1$ 故 $\|u_n\|\geq\frac{|u_n(f)|}{\|f\|_\infty}\geq 2n-n\varepsilon$

由 ε 任意性知 $\|u_n\|\geq 2n$.

又 $|u_n(f)|\leq n\int_0^1|f(t)|dt+\sum_{k=1}^{n}|f(\frac{k}{n})|\leq 2n\|f\|_\infty\Rightarrow\|u_n\|\leq 2n$, 故 $\|u_n\|=2n$.

(c) 证明: $\frac{u_n(f)}{n}\neq O(\frac{1}{n})\Longleftrightarrow\exists$ 子列 (n_k), $n_k\to+\infty$ s.t. $\frac{|u_{n_k}(f)|}{n_k}\Big/(\frac{1}{n_k})\to+\infty$ 即 $|u_{n_k}(f)|\to+\infty$ $(k\to\infty)$

$\Longleftrightarrow\sup_{n\geq1}|u_n(f)|=+\infty$

即 $\{f\in E:\frac{u_n(f)}{n}\neq O(\frac{1}{n})\}=\{f\in E:\sup_{n\geq1}|u_n(f)|=\infty\}$

由(b)知 $\sup_n\|u_n\|=\infty$, 故由定理6.2.4知 $\{f\in E:\sup_{n\geq1}|u_n(f)|=\infty\}$ 为 $C([0,1])$ 中稠密的 G_δ 集。证毕。