45

故$\{y_n\}$是H中的Cauchy序列，由H是完备的知$\exists y_0 \in H$ s.t. $\lim\limits_n y_n = y_0$,

又由B_n是闭集，知$y_0 \in B_n, n \geq 1$ 即 $y_0 \in \bigcap\limits_{n\geq 1} B_n = \{x_0\} \Rightarrow y_0 = x_0$ 故 $\lim\limits_n y_n = x_0$.

在(*)中令$n\to\infty$ 则 $d(x) \geq d(x, x_0)$， 故 $d(x) \geq d(x, A)$.

$d(x) \leq d(x,A)$ 易证. 实际上，由于$A_n \supset A$，故$d(x, A_n) \leq d(x,A)$ 即 $d_n(x) \leq d(x,A)$

则 $d(x) = \lim\limits_n d_n(x) \leq d(x,A)$. 因此 $d(x) = d(x,A)$. ▨

⑥ 设H是内积空间，$x_n, x \in H$，并假设

$$\lim_n \|x_n\| = \|x\| \text{ 且 } \lim_n \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle,\quad \forall y \in H$$

证明 $\lim\limits_n \|x_n - x\| = 0$.

证明：设数域$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 则 $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle \to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle = 0 \quad (n\to\infty)$

故 $\lim\limits_n \|x_n - x\| = 0$.

设数域$\mathbb{K}=\mathbb{C}$，由极化恒等式 $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$, $\forall x, y \in H$ 知

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n + x\|^2 + i\|x_n + ix\|^2 - i\|x_n - ix\|^2 - 4\langle x_n, x\rangle$$

$$= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + i(\|x_n\|^2 + \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x_n, ix\rangle)) - i(\|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n, ix\rangle) - 4\langle x_n, x\rangle$$

$$= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + i(\|x_n\|^2 - \|x\|^2 + 2\mathrm{Im}\langle x_n, x\rangle) - i(\|x_n\|^2 - \|x\|^2 - 2\mathrm{Im}\langle x_n, x\rangle) - 4\langle x_n, x\rangle$$

再由于 $\lim\limits_n \mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle = \|x\|^2$，$\lim\limits_n \mathrm{Im}\langle x_n, x\rangle = 0$ 知

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2 + 2\|x\|^2 + i(\|x\|^2 - \|x\|^2) - i(\|x\|^2 - \|x\|^2) - 4\|x\|^2$$

$$= 0$$ ▨

7. 设(x_n)是Hilbert空间H中的有界序列. 证明存在(x_n)的子序列(x_{n_k})，使得对任意$y \in H$，有$\lim\limits_k \langle y, x_{n_k}\rangle = \langle y, x\rangle$.