(b) 由定义 $d(x,E)^2=\inf_{k\in\mathbb{R}^n}\|x-\sum_{i=1}^n k_ix_i\|^2$，记 $b=((x_1,x),\dots,(x_n,x))^t$，

令 $f(k_1,\dots,k_n)=\|x-\sum_{i=1}^n k_ix_i\|^2=\|x\|^2-2\sum_{i=1}^n k_i\langle x_i,x\rangle+\sum_{i,j=1}^n\langle x_i,x_j\rangle k_ik_j$

$$=\|x\|^2-2b^tk+k^tGk,\quad k\in\mathbb{R}^n$$

这是 $\mathbb{R}^n$上的函数，则 $d(x,E)^2=\inf_{k\in\mathbb{R}^n} f(k_1,\dots,k_n)$. 计算f的梯度 ∇f 得

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial k_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial k_n}\right)^t=-2b+2Gk$$

令 $\nabla f=0$ 得 $k=G^{-1}b$，故f在 $k=G^{-1}b$ 处取最小值，此时

$$f(k)=\|x\|^2-b^tG^{-1}b$$

故 $d(x,E)^2=\|x\|^2-b^tG^{-1}b$. 接下面计算 $G(x,x_1,\dots,x_n)$.

$$G(x,x_1,\dots,x_n)=G(x_1,x_2,\dots,x_n,x)=\left|\begin{pmatrix}G(x_1,\dots,x_n) & b\\ b^t & \|x\|^2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}G(x_1,\dots,x_n) & b\\ 0 & \|x\|^2-b^tG^{-1}(x_1,\dots,x_n)b\end{pmatrix}\right|$$

$$=G(x_1,\dots,x_n)(\|x\|^2-b^tG^{-1}(x_1,\dots,x_n)b)$$

$$=G(x_1,\dots,x_n)\,d(x,E)^2$$

故 $d(x,E)^2=\dfrac{G(x,x_1,\dots,x_n)}{G(x_1,x_2,\dots,x_n)}$.

■

13. 设 $E=C([0,1])$上装备有如下的内积

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

并设 E_0 表示在 $[0,1]$上积分为0的函数组成的E的向量子空间. 考虑E的向量子空间：$H=\{f\in E: f(1)=0\}$ 且 $H_0=E_0\cap H$.

(a) 验证 H_0是H的闭的真向量子空间.

(b) 设 $h(t)=t-\frac{1}{2}$，$t\in[0,1]$. 证明

(i) $E=\mathrm{span}(H,h)$且有 $E_0=\mathrm{span}(H_0,h)$;

(ii) h属于 H_0 在E中的闭包.

(c) 证明 $H_0^\perp=\{0\}$，解释所得结果蕴含的意义。

证明：(a). 由于 E_0和H均为线性的，则 $E_0\cap H$ 仍为线性的.

设 $(f_n)\subset E_0$. $\|f_n-f\|\to 0$，则

$$\left|\int f(t)dt\right|=\left|\int f-f_n\,dt+\int f_n\,dt\right|=\left|\int f-f_n\,dt\right|\le\underset{\to 0}{\|f-f_n\|}\ (\text{Caushy-schwarz 不等式})$$

故 $\int f(t)dt=0$，即 $f\in E_0$，故 E_0是闭的. 所以 $H_0=E_0\cap H$ 是H的闭向量子空间