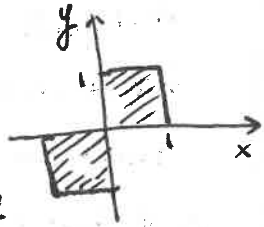
(b) 设A是平衡的, $\mathrm{conv}(A)=\{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k : a_k\in A, t_k\geq 0, \sum_{k=1}^{n} t_k=1, n\geq 1\}$.

则 $\forall|\lambda|\leq 1$ $\lambda(\sum_{k=1}^{n} t_k a_k)=\sum_{k=1}^{n} t_k \lambda a_k \in \mathrm{conv}(A) \Rightarrow \mathrm{conv}(A)$ 平衡。

(c) 凸集的平衡包不一定还是凸的。

实数域

以$\mathbb{R}^2$为例. 设 $A=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$, A凸, $\mathrm{ba}A=\bigcup_{|\lambda|\leq 1}\lambda A=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ $\cup\{(x,y): -1\leq x\leq 0, -1\leq y\leq 0\}$ 不是凸的



5.证明: (a) $p(f)\geq 0$ ✓ $p(\lambda f)=|\lambda|p(f)$ ✓ $p(f+g)\leq p(f)+p(g)$ ✓

$p(f)=0\Rightarrow f(z)=0, \forall z\in K \xRightarrow{\text{复分析}} p(z)=0, \forall z\in\Omega$ 故P是$H(\Omega)$上的范数。

(b) 设 $f_n(z)=e^{n(z-2)}$, 则对$\forall z\in K$, $z=x+iy$, $x^2+y^2\leq 1$. $|f_n(z)|=|e^{n(x-2+iy)}|=e^{n(x-2)}$ $\leq e^{-n}\to 0\ (n\to\infty)$. 故 $p(f_n-0)\to 0\ (n\to\infty)$.

但取紧集 $K=\{2\}$. $p_K(f_n-0)=1\not\to 0$, 故由P诱导的拓扑不同于在Ω的紧子集上一致收敛的拓扑. (注意到K是紧集, 则后者拓扑更强) ▨

6.证明: (a) $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 非负✓ 正齐✓ 三角形不等式✓. 故为半范。

A在[0,1]中稠密时, 它是一个范数。下面设A在[0,1]中稠密.

$\inf_{t\in A}\alpha(t)>0$时, 它等价于一致范数: $\sum_{t\in A}\alpha(t)f(t)\leq\left(\sum_{t\in A}\alpha(t)\right)\cdot\|f\|_\infty$.

设 $\|f\|_\infty=|f(t_0)|$, $t_0\in[0,1]$, 则 $\exists(t_n)_{n\geq 1}\subset A$. $\lim_n t_n=t_0$ 则 $f(t_n)\to f(t_0)$

$\alpha(t_n)f(t_n)\geq\left(\inf_{t\in A}\alpha(t)\right)(\|f\|_\infty-\varepsilon)$ 则 $\inf_{n\geq 1}\alpha(t_n)f(t_n)\geq\left(\inf_{t\in A}\alpha(t)\right)\cdot\|f\|_\infty$

故 $\|\cdot\|_{A,\alpha}$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。 ▨

7.证明: (a) 任取 $V\in\mathcal{N}(0)$, ∃常数$\alpha>0$, 使得对所有$t\geq\alpha$, 有$B\subset tV$ 即 $\frac{B}{t}\subset V$. 故 $(rB)_{r>0}$ 是原点的邻域基。

(b) 由定理知存在0点的平衡邻域 $D\subset B$, 则 $\mathrm{conv}\,D\subset B$ 且 $\mathrm{conv}\,D$ 仍平衡.

取 $C=(\mathrm{conv}\,D)^\circ$, 则 $C\subset B$, 且C为原点的凸平衡开邻域。

(c) $P_C(x)=\inf_{\lambda>0}\{\lambda: \frac{x}{\lambda}\in C\}$. $P_C(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0$. $\frac{x}{\varepsilon}\in C\Rightarrow x\in\underset{\subset\varepsilon B}{\varepsilon C}$, $\forall\varepsilon>0$.

又 $(rB)_{r>0}$ 是原点的邻域基. 故 $x\in\bigcap_{V\in\mathcal{N}(0)}V\Rightarrow x=0$?

8.证明: (a)⇒(b): 设 $(E,\tau)=(E,d)$, d为距离, 则 $\forall x\in E$, $(B_d(x,\frac{1}{n}))_{n\geq 1}$ 为x处的可数邻域基。 (b)⇒(c): ??