13 证明：(a) A_0是闭的：设$(z^k)_{k\geq1}\subset A_0$，$\|z_k-z\|_1\to0$，其中$z\in l_1$，往证$z\in A_0$。

$z^k\in A_0\Rightarrow z^k=\sum_{n\geq1}z^k_{2n-1}e_{2n-1}$，设$z=\sum_{n\geq1}z_ne_n$，则$|z_{2n}-z^k_{2n}|\leq\|z-z^k\|_1\to0\ (k\to\infty)$

又$z^k_{2n}=0$，则$z_{2n}=0\Rightarrow z\in A_0$。

B是闭的：设$(z^k)_{k\geq1}\subset B$，$z\in l_1$且$\|z_k-z\|\to0$，往证$z\in B$。

$z^k\in B\Rightarrow z^k_{2m}=\frac{1}{2m}z^k_{2m-1}$，$\forall m\geq1$。则$|z_{2m}-\frac{1}{2m}z_{2m-1}|\leq|z_{2m}-z^k_{2m}|+|z^k_{2m}-\frac{1}{2m}z^k_{2m-1}|+\frac{1}{2m}|z^k_{2m-1}-z_{2m-1}|$

$\leq 2\|z-z^k\|\to0\ (k\to\infty)\Rightarrow z_{2m}=\frac{1}{2m}z_{2m-1}$，$\forall m\geq1$，故$z\in B$。

只需证若$f\in l_1^*$，$f|_{A_0+B}=0\Rightarrow f\equiv0$，就可得$A_0+B$在$l_1$中稠密。

设$f\in l_1^*=l_\infty$，$f|_{A_0+B}=0\Rightarrow f|_{A_0}=0$且$f|_B=0$。

则对$\forall m\geq1$，$e_{2m-1}\in A_0\Rightarrow f(e_{2m-1})=0$。

对$\forall m\geq1$，$e_{2m-1}+\frac{1}{2m}e_{2m}\in B\Rightarrow f(e_{2m-1}+\frac{1}{2m}e_{2m})=0\Rightarrow f(e_{2m})=0$。

故$f(e_n)=0$，$\forall n\geq1\Rightarrow f\equiv0$。故$A_0+B$在$l_1$中稠密。

证明A_0+B在l_1中稠密法II：$\forall x\in l_1$，$x=\sum_{n\geq1}x_ne_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x_{2n-1}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n}$，

又$\sum_{n=1}^{N}x_{2n-1}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n}=\sum_{n=1}^{N}(2^nx_{2n}e_{2n-1}+x_{2n}e_{2n})+\sum_{n=1}^{N}(x_{2n-1}-2^nx_n)e_{2n-1}\in A_0+B$，

故A_0+B在l_1中稠密。

(b) 想证$c=\sum_{n\geq1}\frac{1}{2^n}e_{2n}\notin A_0+B$。

若$c\in A_0+B$，则$\exists x=\sum_{n\geq1}x_{2n-1}e_{2n-1}\in A_0$，$y=\sum_{n\geq1}y_{2n-1}e_{2n-1}+\frac{y_{2n-1}}{2^n}e_{2n}\in B$，使得$c=x+y$，即

$\sum_{n\geq1}\frac{1}{2^n}e_{2n}=\sum_{n\geq1}(x_{2n-1}+y_{2n-1})e_{2n-1}+\frac{1}{2^n}y_{2n-1}e_{2n}$

$\Rightarrow$对$\forall n\geq1$，$y_{2n-1}=1\Rightarrow y=\sum_{n\geq1}e_{2n-1}+\frac{1}{2^n}e_{2n}$，$\|y\|=\infty$，$y\notin l_1$，矛盾，故$c\notin A_0+B$。

想证$(A_0-c)\cap B=\phi$。

假设若$(A_0-c)\cap B\neq\phi$，则$\exists y=a_0-c=b$，$a_0\in A_0,b\in B\Rightarrow c=a_0-b\in A_0+B$，矛盾，故$A\cap B=\phi$。

若存在非零$f\in l_1^*$和$\alpha\in\mathbb{R}$，s.t. $A\subset\{f\leq\alpha\}$以及$B\subset\{f\geq\alpha\}$。则$f(A_0-c)\leq\alpha\Rightarrow$

$f(A_0)\leq\alpha+f(c)\Rightarrow f|_{A_0}=0$，$f(B)\geq\alpha\Rightarrow f|_B=0$，故$f|_{A_0+B}=0$，又$A_0+B$在$l_1$中稠密

$\Rightarrow f=0$，矛盾。