则

$$\|f*g\|_r^r=\int |(f*g)(x)|^r dx$$

$$\leq \int \left(\left(\int |f(x-y)|^p\cdot |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{r}}\cdot \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}}\cdot \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}}\right)^r dx$$

$$=\int\int |f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\cdot \|f\|_p^{r-p}\cdot \|g\|_q^{r-q}\, dx$$

$$=\|f\|_p^{r-p}\cdot\|g\|_q^{r-q}\cdot \int |g(y)|^q\left(\int |f(x-y)|^p dx\right)dy$$

$$=\|f\|_p^{r-p}\cdot\|g\|_q^{r-q}\cdot\int |g(y)|^q dy\cdot \int |f(x)|^p dx$$

$$=\|f\|_p^{r-p}\cdot\|g\|_q^{r-q}\cdot\|g\|_q^q\cdot\|f\|_p^p$$

$$=\|f\|_p^r\cdot\|g\|_q^r$$

$$\Longrightarrow\quad \|f*g\|_r\leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

由上述引理知 若 $f\in L_p(\mathbb{R})$, $g\in L_1(\mathbb{R})$, $p\geq 1$ 则 $\|f*g\|_p\leq\|f\|_p\|g\|_1$.

由证明过程看出把 $L_p(\mathbb{R})$, $L_q(\mathbb{R})$, $L_r(\mathbb{R})$ 换成 $L_{2\pi}^p$, $L_{2\pi}^q$, $L_{2\pi}^r$, 引理仍成立.

注意到 $\sigma_N(f)=f*F_N$. 故 $\|\sigma_N(f)\|_p=\|f*F_N\|_p\leq\|f\|_p\cdot\|F_N\|_1=\|f\|_p$.

(ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, 由于 f 连续, $\exists\delta>0$. 当 $t\in[0,\delta]$ 时, $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon/2$.

$$\sigma_N(f)(x)-f(x)=\int_0^{2\pi}f(x-t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}-\int_0^{2\pi}f(x)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$$

$$=\int_0^{2\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$$

$$=\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$$

其中 $\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\|F_N\|_1=\frac{\varepsilon}{2}$

$\left|\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}(f(x-t)-f(x))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\right|\leq 2\|f\|_\infty\cdot\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}F_N(t)\frac{dt}{2\pi}<\frac{\varepsilon}{2}$ (当 N 充分大)

故 $|\sigma_N(f)(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (当 N 充分大).

所以 $\lim\limits_{N\to\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty=0$.

(iii) 若 $f\in L_{2\pi}^p$, $1\leq p<\infty$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 则存在 $g\in C_{2\pi}$, s.t. $\|g-f\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$.

由(ii)知 $\exists N_1$, 当 $N>N_1$ 时, $\|\sigma_N(g)-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$.

则 $\|\sigma_N(f)-f\|_p\leq\|\sigma_N(f)-\sigma_N(g)\|_p+\|\sigma_N(g)-g\|_p+\|g-f\|_p$

$$\leq\|f-g\|_p+\frac{\varepsilon}{3}+\|f-g\|_p<\varepsilon$$

其中第二个不等号用了(i)的结论, 故 $\lim\|\sigma_N(f)-f\|_p=0$.