3. 设E和F是内积空间H的两个向量子空间. 证明存在常数$\alpha\geqslant 0$ s.t. ✓ 4.3.4

$$|\langle x,y\rangle|=\alpha\|x\|\|y\|,\quad \forall x\in E,\ \forall y\in F$$

的充分必要条件是或者$\dim E=\dim F=1$, 或者$\alpha=0$(即E和F正交).

证明: "$\Leftarrow$" 若E与F正交, 则 $|\langle x,y\rangle|=0$, $\forall x\in E$, $\forall y\in F$.

若E与F不正交且$\dim E=\dim F=1$. 设$E=$ ~~$\{\beta f\}$~~ $\{\beta f\}$, $F=\{\gamma g\}$, 这里$f\in E$, $g\in F$取成单位向量. 对$\forall$ ~~对~~ $x\in E$, $y\in F$, 设$x=\beta f$, $y=\gamma g$ 则

$$|\langle x,y\rangle|=|\beta||\gamma||\langle f,g\rangle|=|\beta||\gamma|\theta\|f\|\|g\|=\theta\|\beta f\|\|\gamma g\|=\theta\|x\|\|y\|$$

其中$\theta=\dfrac{|\langle f,g\rangle|}{\|f\|\|g\|}>0$, 题设得证。

"$\Rightarrow$" 若$\alpha=0$, 则E与F正交。

若$\alpha\neq 0$, 则E与F不正交, 则存在E中的单位向量x_1, F中的单位向量y, s.t. $\langle x_1,y\rangle\neq 0$, 且由假设知$|\langle x_1,y\rangle|=\alpha\|x_1\|\|y\|=\alpha$.

反证法, 若$\dim E>1$, 则存在E中的单位向量$x_2\perp x_1$. 则 设$\xi_1=\dfrac{\langle x_1,y\rangle}{|\langle x_1,y\rangle|}$, $\xi_2=\dfrac{\langle x_2,y\rangle}{|\langle x_2,y\rangle|}$

则ξ_1,ξ_2为模为1的复数, 故$\|\xi_1x_1+\xi_2x_2\|=\sqrt{2}\|x_1\|$, 那么

$$|\langle\xi_1x_1+\xi_2x_2,y\rangle|=\sqrt{2}\alpha\|x_1\|\|y\|=\sqrt{2}\alpha$$

同时$|\langle\xi_1x_1+\xi_2x_2,y\rangle|=|\xi_1\langle x_1,y\rangle+\xi_2\langle x_2,y\rangle|=|\langle x_1,y\rangle|+|\langle x_2,y\rangle|=2\alpha$ 故$2=\sqrt{2}$, 矛盾。

4. 设E和F是内积空间H的两个向量子空间. 假设E和F都不等于集合$\{0\}$. 定义E和F之间的夹角为θ为:
$$\cos\theta=\sup\left\{\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}:x\in E,\ y\in F\right\},\quad \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

证明: $\theta>0$当且仅当存在一个常数$c>0$, s.t.
$$\|x+y\|^2\geqslant c(\|x\|^2+\|y\|^2),\ \forall x\in E,\ \forall y\in F.$$

证明: 首先注意到$\theta>0\Leftrightarrow\cos\theta<1$

"$\Rightarrow$" 若$\cos\theta<1$, 则对$\forall x\in E$, $y\in F$. $\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\leqslant\cos\theta<1\Rightarrow|\langle x,y\rangle|\leqslant\cos\theta\|x\|\|y\|$, $\forall x\in E,\forall y\in F$. 则

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+\|y\|^2+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\geqslant\|x\|^2+\|y\|^2-2|\langle x,y\rangle|\geqslant\|x\|^2+\|y\|^2-2\cos\theta\|x\|\|y\|\\&\geqslant\|x\|^2+\|y\|^2-\cos\theta(\|x\|^2+\|y\|^2)\\&=(1-\cos\theta)(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

取$c=1-\cos\theta$即可。

"$\Leftarrow$" 设$x\neq 0$, $y=0$. 由假设知$\|x\|^2\geqslant c\|x\|^2\Rightarrow c\leqslant 1.\ldots$?(反证法?)