使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e_{2k+1}=x+y=\sum_{k=1}^{\infty}x_{2k}e_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}y_{2k}e_{2k}+\frac{1}{k}y_{2k}e_{2k+1}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_{2k}+y_{2k})e_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y_{2k}e_{2k+1}$$

$\Rightarrow\begin{cases}x_{2k}+y_{2k}=0\\ \frac{1}{k}y_{2k}=\frac{1}{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{2k}=-1\\ y_{2k}=1\end{cases}$，$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\infty$ 故 $x\notin E$. 矛盾，故 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e_{2k+1}\notin E+F$.

因此 $E+F$ 不是闭集。

4-17, 18

16. 设 H 是 Hilbert 空间，E 是 H 的非零的闭向量子空间. 设 P 是 H 到 E 的投影（投影意味着 P 是 H 上的线性算子且满足 $P^2=P$）. 证明以下命题等价：

(a) $P=P_E$.

(b) $\|P\|=1$

(c) $|\langle x,p(x)\rangle|\le\|x\|^2$, $\forall x\in H$.

证明：??

17. 设 H 是 Hilbert 空间，E 是 H 的向量子空间. 设 F 为赋范空间，$u:E\to F$ 是连续线性映射. 证明 u 有连续的线性延拓 $\hat{u}:H\to F$，且 $\|\hat{u}\|=\|u\|$.

证明：由定理 3.2.13，u 可以唯一地延拓到 $\bar{E}$ 上，即有 $\tilde{u}:\bar{E}\to F$ $\tilde{u}|_E=u$ 且 $\|\tilde{u}\|=\|u\|$.

又因为 $H=\bar{E}\oplus\bar{E}^{\perp}$，定义 $\hat{u}:H\to F$ 为 $\hat{u}(x)=\tilde{u}(P_{\bar{E}}(x))$, $\forall x\in H$. 则 $\hat{u}$ 为线性算子且

$\hat{u}|_E=u$，且 $\|\hat{u}\|=\|\tilde{u}(P_{\bar{E}})\|\le\|\tilde{u}\|\|P_{\bar{E}}\|=\|\tilde{u}\|=\|u\|\Rightarrow\|\hat{u}\|\le\|u\|$.

又 $\sup\limits_{\substack{\|x\|\le1\\x\in H}}\|\hat{u}(x)\|\ge\sup\limits_{\substack{\|x\|\le1\\x\in E}}\|\hat{u}(x)\|=\sup\limits_{\substack{\|x\|\le1\\x\in E}}\|u(x)\|=\|u\|\Rightarrow\|\hat{u}\|\ge\|u\|$，故 $\|\hat{u}\|=\|u\|$.

18. 设 $[0,1]$ 上赋予 Lebesgue 测度，$H=L_2(0,1)$. 并假设 $K\in L_2([0,1]\times[0,1])$. 定义

$$T_K(f)(x)=\int_0^1K(x,y)f(y)dy,\ f\in H,\ x\in[0,1]$$

(a) 证明 $T_K(f)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有定义.

(b) 证明 $T_K\in B(H)$ 且 $\|T_K\|\le\|K\|_{L_2([0,1]\times[0,1])}$