19. 和上一习题一样，令 $H=L_2(0,1)$；并设 $(e_n)_{n\geq 1}$ 是 H 中的规范正交集. 证明：$(e_n)_{n\geq1}$ 是 H 上的规范正交基的充分必要条件是

$$\sum_{n\geq 1}\left|\int_0^x e_n(t)dt\right|^2 = x,\quad \forall x\in[0,1].$$

证明："⇒" 设 $(e_n)_{n\geq1}$ 是 H 上的规范正交基，对 $\forall x\in[0,1]$，示性函数 $I_{[0,x]}\in L_2([0,1])$.

则由 Parseval 恒等式知 $x=\|I_{[0,x]}\|^2=\sum_{n\geq1}|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2$

$$=\sum_{n\geq1}\left|\int_0^x e_n(t)\,dt\right|^2,\quad \forall x\in[0,1].$$

故 $\sum_{n\geq1}\left|\int_0^x e_n(t)\right|^2=x,\quad \forall x\in[0,1]$.

"⇐" 对 $\forall x\in[0,1]$，$\|I_{[0,x]}-\sum_{k=1}^{n}\langle I_{[0,x]},e_n\rangle e_n\|^2$

$$=x+\sum_{k=1}^{n}|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2-2\sum_{k=1}^{n}|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2$$

$$=x-\sum_{k=1}^{n}|\langle I_{[0,x]},e_n\rangle|^2\to 0\ (n\to\infty)$$

故 $I_{[0,x]}$ 可由 $\operatorname{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}$ 中的元素逼近，则对 $\forall a,b\in[0,1]$，$a<b$.
$I_{[a,b]}=I_{[0,b]}-I_{[0,a)}$ 可由 $\operatorname{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}$ 中的元素逼近，故 $[0,1]$ 上的阶梯函数可由 $\operatorname{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}$ 中的元素逼近，又由于 $[0,1]$ 上的阶梯函数全体在 $L_2(0,1)$ 中稠密，故 $\overline{\operatorname{span}\{(e_n)_{n\geq1}\}}=L_2(0,1)$，所以 $(e_n)_{n\geq1}$ 是 H 上的规范正交基。

20.

21. 设 H 是一个 Hilbert 空间，并设 $T\in B(H)$ 且 $\|T\|\leq 1$. 证明：

(a) $T(x)=x$ 当且仅当 $T^*(x)=x$，$x\in H$.

(b) $\ker(I-T)=\ker(I-T^*)$.

(c) $H=\ker(I-T)\oplus\overline{(I-T)(H)}$

证明：(a) "⇒" 若 $Tx=x$，则 $\langle x-T^*x,x-T^*x\rangle$

$$=\|x\|^2+\|T^*x\|^2-\langle x,T^*x\rangle-\langle T^*x,x\rangle$$
$$=\|x\|^2+\|T^*x\|^2-\langle Tx,x\rangle-\langle x,Tx\rangle$$
$$=\|x\|^2+\|T^*x\|^2-2\|x\|^2\leq\|x\|^2+\|T^*\|^2\|x\|^2-2\|x\|^2=\|T\|^2\|x\|^2-\|x\|^2\leq 0$$

故 $\langle x-T^*x,x-T^*x\rangle=0$，因此 $x=T^*x$.

"⇐" $T=(T^*)^*$，故与前面同理可证。

(b) $x\in\ker(I-T)\Leftrightarrow x=Tx\Leftrightarrow x=T^*x\Leftrightarrow x\in\ker(I-T^*)$，故 $\ker(I-T)=\ker(I-T^*)$

(c) 先证 $\ker(I-T)=\overline{(I-T)(H)}^{\perp}$.

设 $x\in\ker(I-T)$，即 $x=Tx=T^*x$，则对 $\forall y\in H$，$\langle x,y-Ty\rangle=\langle Tx,y-Ty\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle Tx,Ty\rangle$
$=\langle Tx,y\rangle-\langle x,Ty\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle T^*x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle-\langle Tx,y\rangle=0$，故 $\ker(I-T)\subset(I-T)(H)^{\perp}$