Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра общей физики и волновых процессов

Отчет по практическому заданию №2

Основы математического моделирования

Выполнил студент 325 группы

Делекторский Никита Юрьевич

Москва

2023

1. Постановка задачи (задача № 70)

Используя метод переменных направлений, решите краевую задачу:

1. Аналитическое решение

Для начала требуется найти аналитическое решение данной задачи. Из постановки задачи видно, что начальное условие и неоднородность ортогональны. Поэтому решение будем искать в виде:

Поставим задачу Штурма-Лиувилля в прямоугольной области и разделим переменные, получив тем самым явный вид функций и :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Решением следующих краевых задач

являются

Для удобства выпишем решение для :

Запишем постановку задачи для :

где . Решим задачу Коши:

В таком случае решение задачи Коши:

Полное аналитическое решение:

1. Построение разностной схемы

Введём одномерные разностные временную и пространственные сетки в области :

где – число узлов сетки, – шаги по осям соответственно. На введённой сетке будем рассматривать сеточные функции . Введём разностную аппроксимацию оператора Лапласа:

Для граничных условий Неймана введём аппроксимацию односторонней разностной производной:

Для граничных условий Дирихле укажем значения:

Теперь аппроксимируем уравнение теплопроводности из задачи следующим разностным уравнением:

При мы получаем явную разностную схему. Решение во внутренних точках вычисляется по формуле:

При мы получаем неявную разностную схему. Для определения мы получаем на каждом шаге линейную систему:

1. Метод прогонки

Рассмотрим первый полуслой и будем решать задачу методом прогонки. Пусть имеется уравнение с начально-граничными условиями:

Пусть значение искомой функции в двух соседних точках связаны следующим линейным соотношением: . Тогда:

Для того, чтобы это соотношение было верно для любых нужно, чтобы выражение в квадратных скобках и правая часть было равны нулю. Приравнивая их нулю, получаем рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов:

Сравнивая граничные условия задачи с выражением , находим , . Используя эти значения и , совершим прогонку в направлении возрастания индекса, последовательно определяя значения коэффициентов и для . Также нетрудно получить рекуррентные соотношения для и : и . Из этих соотношений получаем:

При и условиях, наложенных при постановке задачи на получаем, что знаменатель формуле выше положительный. Следовательно значение определено. Используя найденное значение , делаем обратную прогонку в сторону уменьшающихся значений индекса, последовательно определяя значения .

1. Достаточные условия применимости метода прогонки

Выпишем уравнения и граничные условия из систем, для которых мы собираемся применить метод прогонки:

Сделаем замену индексов: . Для удобства опустим неизменяющиеся индексы. Сделаем замену:

Перепишем исходные системы в виде:

Согласно достаточному условию применения метода прогонки, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

Видно, что выполняется условие для обоих систем. Таким образом, для нашей разностной схемы, которая применяется для численного решения задачи, выполнено достаточное условие применимости метода прогонки.

1. Реализация метода переменных направлений