Mecânica Clássica I

André Del Bianco Giuffrida

IFSC - USP

andre.giuffrida@usp.br

Para uma particula com massa m na presença de um potêncial V(x) dado por:

$$V(x) = ax^2 - bx^3$$

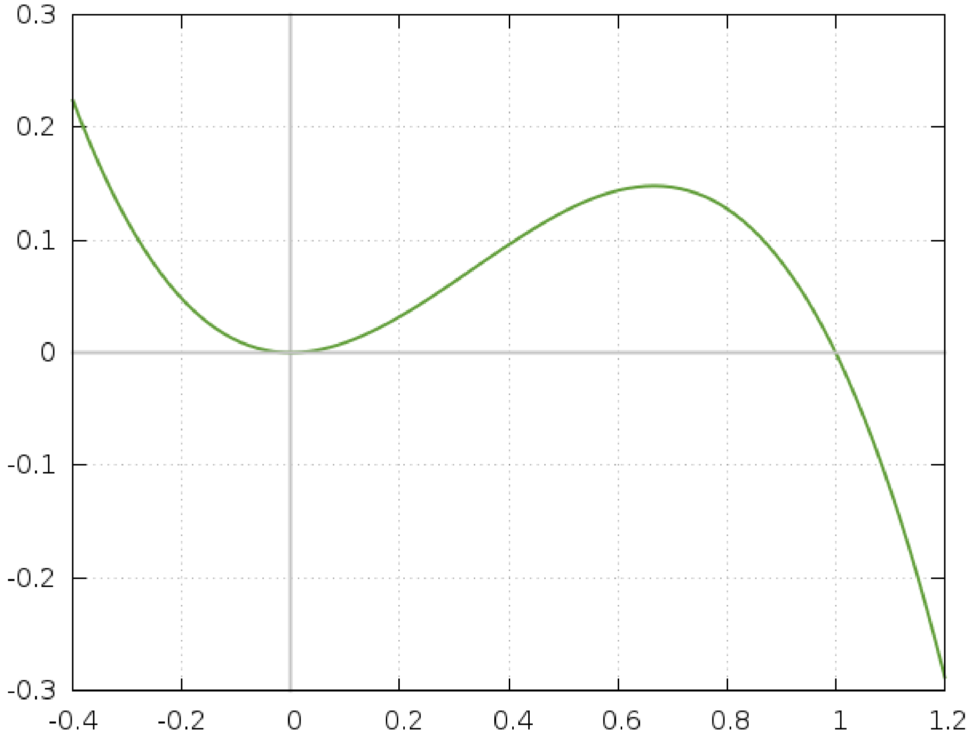

Figure 1: $V(x)$

Note que na região próxima a origem temos um vale de potencial, o que significa que se a energia inicial não for suficientemente grande para fazer com que x ultapasse o maximo de potencial, a particula estará confinada na região próxima a origem (como um oscilador). Devemos então calcular os pontos de máximo e mínimo para o potencial:

$$\frac{dV(x)}{dx} = 2ax - 3bx^2$$

e igualando a zero temos:

$$2a = 3bx \rightarrow x = \frac{2a}{3b}$$

ou seja o potencial tem um máximo local em $\frac{2a}{3b}$ e podemos notar que calculamos $-F(x)$ pois:

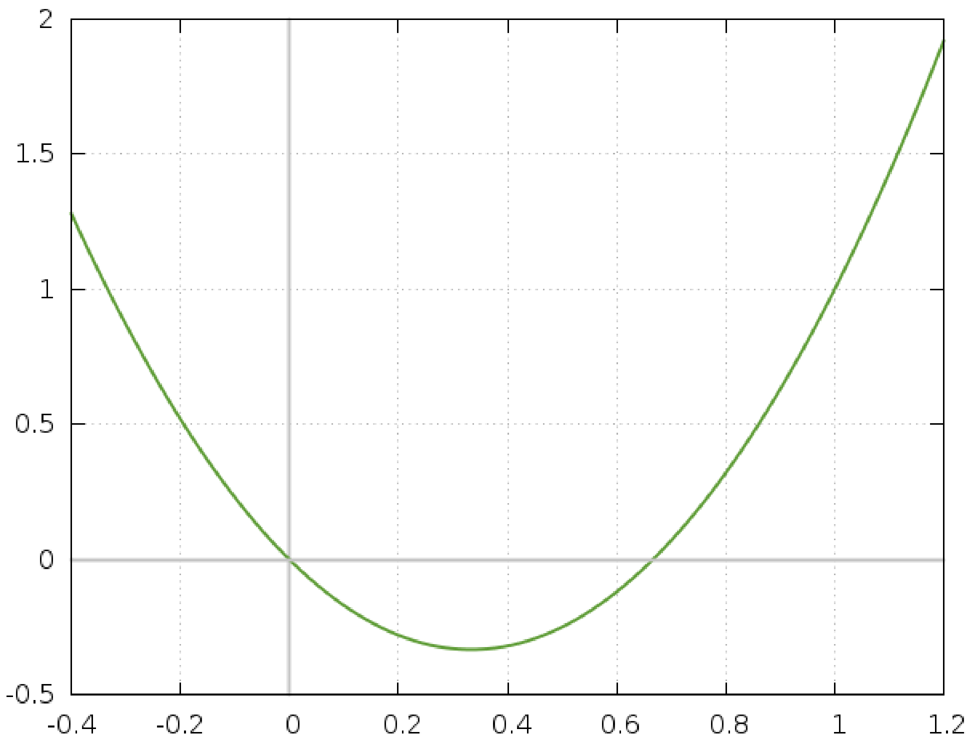

Figure 2: $F(x)$

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

ou seja:

$$F(x) = -2ax + 3bx^2$$

Note que a força é sempre oposta a x no intervalo $x < \frac{2a}{3b}$ ou seja ela se comporta como uma força restauradora nesse intervalo. Porém, se a partícula conseguir atingir um valor de x tal que a força acomanha o movimento ($x > \frac{2a}{3b}$) o movimento se torna um acelerado ($\propto x^2$) quanto mais longe da origem a particula estiver maior vai ser a força dela. Note que para valores negativos de x a partícula estará sob a atuação de uma força > 0 oposta a seu movimento, ou seja perdendo energia cinética e ganhando potencial como era esperado.

Para fazer-mos uma análise mais profunda teremos que calcular a energia total do sistema:

$$E = T + V$$

Onde T é a energia cinética do sistema.

Pelas condições iniciais temos:

$$V(0) = 0 \quad \text{implica que:} \quad E = \frac{mv_0^2}{2}$$

Como o potêncial máximo para que a particula fique aprisionada em volta da origem é:

$$V\left(\frac{2a}{3b}\right) = a\left(\frac{2a}{3b}\right)^2 - b\left(\frac{2a}{3b}\right)^3$$

$$V\left(\frac{2a}{3b}\right) = \frac{4a^3}{9b^2} - \frac{8a^3}{27b^2} = \frac{4a^3}{9b^2}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{4a^3}{27b^3}$$

E por conservação de energia

$$E_f - E_i = 0$$

Oonde E_i e E_f são respectivamente a energia final e inicial do sistema. Sendo assim:

$$(T_f + V_f) - (T_i + V_i) = 0$$

Como $V_i = 0 = T_f$

$$V_f = T_i$$

Temos que $T_i = T(0)$ e $V_f = V(\frac{2a}{3b})$ obtemos a relação:

$$\frac{mv_c^2}{2} = \frac{4a^3}{27b^3}$$

Sendo assim,

$$v_c = \sqrt{\frac{8a^3}{27b^3m}}$$