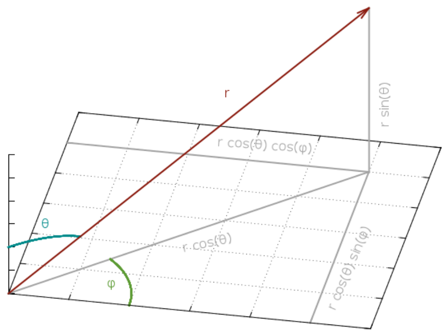
Mecânica Clássica I Coordenadas - Esféricas

Anderson Thiago and André Del Bianco Giuffrida and Gabriela Curti and Priscila França Guidini

Para tratar problemas de Mecânica Clássica, é comum ultilizar-mos três sistemas de coordenadas: Esféricas, Cilindricas e Cartesianas.

A maior diferença entre coordenadas esféricas e cartesianas é visualizar que os versores $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ variam com o tempo, diferente de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ que são fixos, de modo que:

$$\begin{cases} x = rsin(\theta)cos(\varphi) \\ y = rsin(\theta)sin(\varphi) \\ z = rcos(\theta) \end{cases}$$



Pela Figura podemos ver que a posição é dada pelo vetor $\vec{r}$, onde:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{r} = rsin(theta)cos(\varphi)\hat{i} + rsin(\theta)sin(\varphi)\hat{j} + rcos(\theta)\hat{k}$$

de modo que $\hat{r}$:

$$\hat{r} = sin(\theta)cos(\varphi)\hat{i} + sin(\theta)sin(\varphi)\hat{j} + cos(\theta)\hat{k}$$

além disso temos:

$$\hat{\varphi} = \hat{k} \quad \text{x} \quad \hat{r} = -sin(\varphi)\hat{i} + cos(\varphi)\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = \hat{\varphi} \quad \text{x} \quad \hat{r} = cos(\theta)cos(\varphi)\hat{i} + cos(\theta)sin(\varphi)\hat{j} - sin(\theta)\hat{k}$$

Com os versores definidos podemos calcular a aceleração e a velocidade em coordenadas esféricas.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + (r\dot{\varphi}sin(\theta))\hat{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = &+ (\ddot{\vec{r}} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin(\theta)^2)\hat{r} \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 sin(\theta)cos(\theta))\hat{\theta} \\ &+ (r\ddot{\varphi}sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos(\theta))\hat{\varphi} \end{aligned}$$

Vemos nas equações acima que alguns termos são reconhecíveis, como:

$\dot{r}\hat{r}$ Velocidade radial: velocidade com que o objeto se aproxima ou se afasta da origem na direção radial.

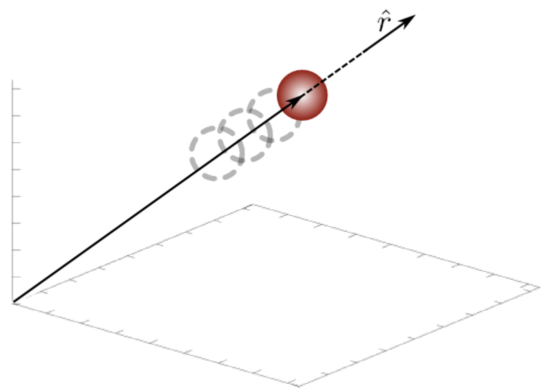


FIG. 1: Movimento em $\hat{r}$

$r\dot{\theta}\hat{\theta}$ Velocidade tangencial em θ: é perpendicular a $\hat{r}$ sendo orientada na direção polar.

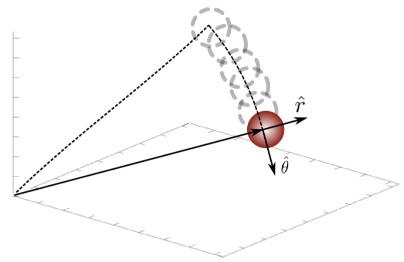


FIG. 2: Movimento em $\hat{\theta}$

$rsin(\theta)\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ Velocidade tangencial em φ : é perpendicular a $\hat{r}$ sendo orientada na direção azimutal.

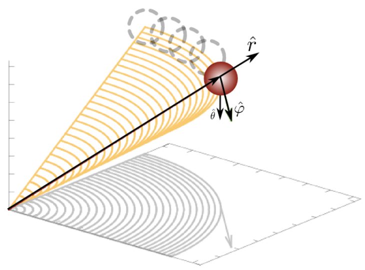


FIG. 3: Movimento em $\hat{\varphi}$

$\ddot{r}\dot{\theta}^2 r\hat{r}$ Aceleração centripeta: Característico de movimentos curvilíneos ou circulares. Ela é perpendicular à velocidade e aponta para o centro da trajetória.

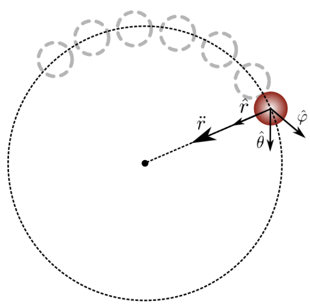


FIG. 4: Aceleração centripeta

$r\ddot{\theta}\hat{\theta}$ Aceleração angular: é a variação da velocidade angular no tempo

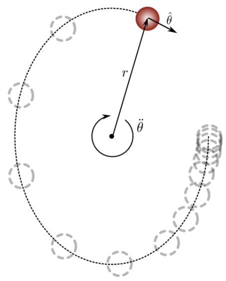


FIG. 5: Aceleração Angular

$2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ e $2\dot{r}sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ Aceleração de Coriolis: Aceleração de um corpo que se move em relação a um sistema de referência, medida em outro sistema de referência que apresenta um movimento angular em relação ao primeiro.

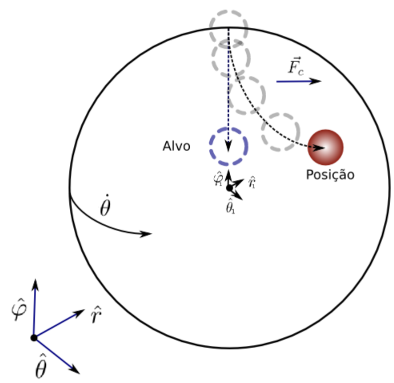


FIG. 6: Efeito de Coriolis

Na figura acima, o sistema de coordenadas $\hat{r_1}$,$\hat{\theta}_1$,$\hat{\varphi}_1$ esta em movimento ($\dot{\theta}$ referencial inercial), a descrição do movimento no sistema $\hat{r}$,$\hat{\theta}$,$\hat{\varphi}$ (não-inercial) será diferente pois surgirá a força inercial provinda de $\dot{\theta}$