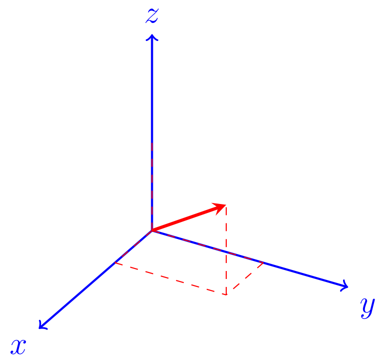
Resumo de Mecânica Clássica I - Movimento em duas e três dimensões

Alexandre Ray da Silva e Raphaela Makki

USP, 09 de Setembro de 2013

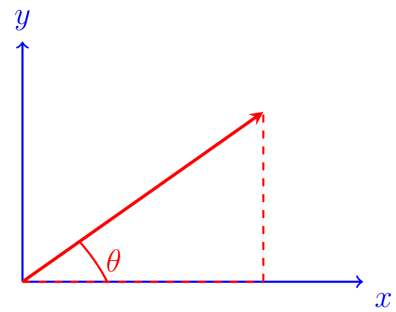
1 Coordenadas Cartesianas



O movimento de uma partícula no espaço tridimensional pode ser completamente descrito por seu vetor posição e suas derivadas.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{\kappa} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{\kappa} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\kappa}$$

2 Coordenadas Polares



Alguns problemas são mais fáceis de resolver em um sistema de coordenadas tais que a posição da partícula pode ser localizada em um plano por meio de uma distância e de um ângulo. Essas são as coordenadas polares. Um exemplo de aplicação é o movimento planetário, em que as coordenadas polares são convenientes porque as forças são centrais. Nesse sistema de coordenadas o versor $\hat{r}$ pode ser escrito como:

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

O versor $\hat{\theta}$ pode ser encontrado com a premissa de que $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são ortogonais. Logo, o produto escalar entre eles é nulo.

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

O sinal negativo decorre da convenção do sentido de θ (sentido anti-horário). Podemos conferir fazendo $\theta = 0$, que dá $\hat{\theta} = \hat{\jmath}$, ou $\theta = 90^{\text{o}}$, que dá $\hat{\theta} = -\hat{\imath}$. Como podemos ver, as direções de $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ dependem do tempo, diferentemente do caso anterior (coordenadas cartesianas) onde $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ independem do tempo.

Encontraremos a velocidade e a aceleração derivando o vetor posição:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Agora, precisamos calcular $\dfrac{d\hat{r}}{dt}$:

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin\theta\dot{\theta}\hat{i} + \cos\theta\dot{\theta}\hat{j} = \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Obs: Note que os versores não podem variar na sua própria direção, pois seu módulo deixaria de ser unitário. Isso vale para qualquer versor.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

Agora, precisamos calcular $\dfrac{d\hat{\theta}}{dt}$:

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\cos\theta\dot{\theta}\hat{i} - \sin\theta\dot{\theta}\hat{j} = -\dot{\theta}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r}) \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

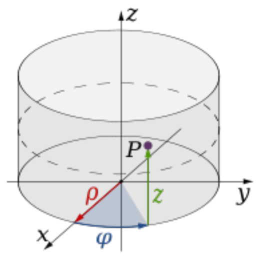
$\ddot{r}$ é o termo da aceleração radial.
$r\dot{\theta}^2$ é o termo da aceleração centrípeta.
$2\dot{r}\dot{\theta}$ possui velocidade em $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ (força de Coriolli).
$r\ddot{\theta}$ é a aceleração tangencial.

Para conversão entre coordenadas cartesianas e polares, temos que

$x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

3 Coordenadas Cilíndricas



As coordenadas cilíndricas são úteis quando estamos trabalhando com forças perpendiculares ao eixo de simetria do sistema. No plano xy, o raciocínio é idêntico ao de coordenadas polares.

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z} \qquad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho}^2 - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z}$$