Mecânica Clássica I

André Del Bianco Giuffrida
IFSC - USP
andre.giuffrida@usp.br

Para um barco de massa m e velocidade inicial Vo, onde atua a força:

$$F(t) = -be^{\alpha V(t)}$$

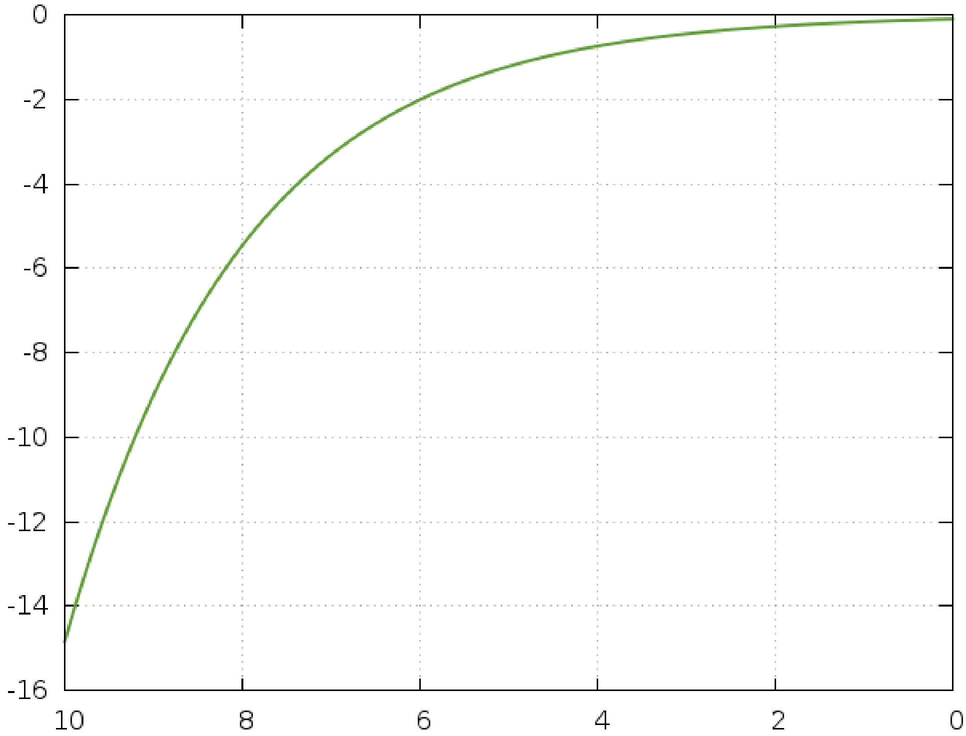

Figure 1: $F(v)$ é no sentido contrário ao movimento

Podemos calcular $V(t)$ e também $x(t)$ do seguinte modo:

$$m\frac{dv}{dt} = -be^{\alpha v} \rightarrow mdv = -be^{\alpha v}dt$$

juntando as variáveis comuns

$$e^{-\alpha v}dv = \frac{-b}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} e^{-\alpha v}dv = \int_0^t \frac{-b}{m}dt'$$

$$-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha v}\Big|_{v_0}^{v(t)} = \frac{-b}{m}t$$

$$e^{-\alpha v(t)} - e^{-\alpha v_0} = \frac{b\alpha}{m}t$$

$$v(t) = -\frac{ln(\frac{b\alpha}{m}t + e^{-\alpha v_0})}{\alpha}$$

Aqui podemos obter o tempo de translado t_t que demora para o barco atingir a velocidade $v(t_t) = 0$:

$$1 - e^{-\alpha v_0} = \frac{b\alpha}{m}t_t$$

$$t_t = (1 - e^{-\alpha v_0})\frac{m}{b\alpha}$$

Calculando numericamente através do código em Python:

```
#EulerMethod.py#

from math import *
import sys

##
#       Metodo de Euler simples
#       Entradas: Velocidade inicial do barco
#                         Resolucao para a derivada (dt)
#
#       Saidas: Exibe na tela o tempo e sua respectiva
#                         velocidade instantanea
##
def Euler(Vi, dt):

        #constantes#
        m=100
        b=1
        alpha=3
```

```
        #condicaoe iniciais
        v=Vi
        t=0

        #Enquanto a Velocidade nao cair para 1 por
            cento da velocidade inicial
        #(Tentativa de reduzir tempo de processamento!)
        while v > Vi*0.01 :
                #Marcador de tempo
                t = t+dt
                #Calculo da velocidade
                v = v -(b/m)*exp(alpha*v)*dt
                #Exibicao na tela
                print t,v

#chamada da funcao
Euler(1,0.001)
```

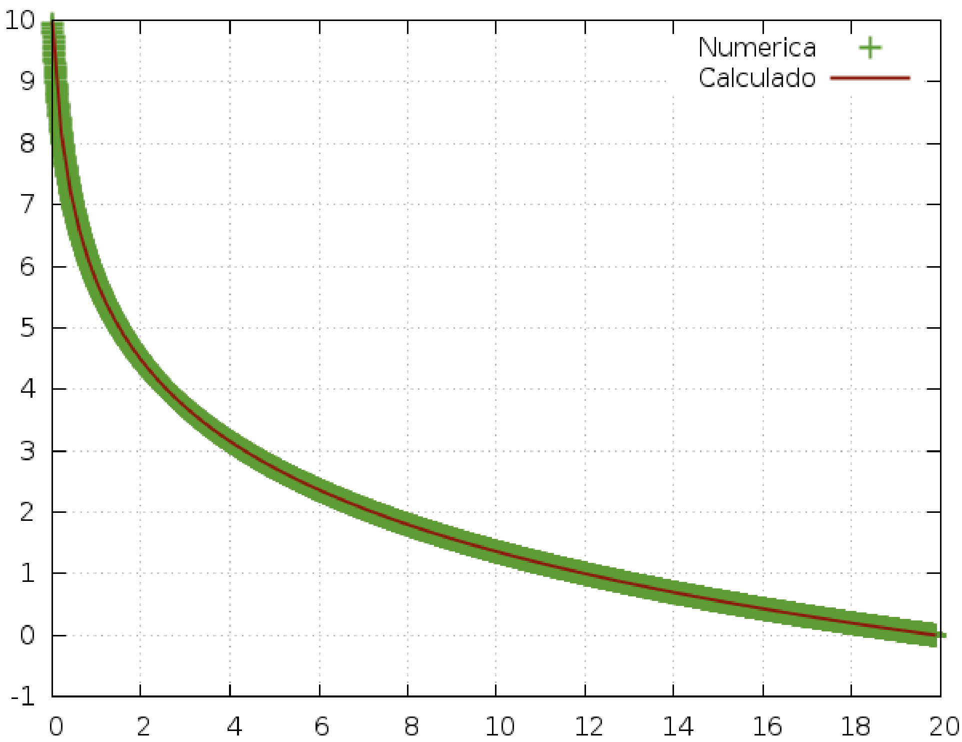

Figure 2: $v(t)$ Numérica e Calculada

Já para obter-mos a posição em função do tempo temos:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ln(\frac{b\alpha}{m}t + e^{-\alpha v_0})}{\alpha}$$

Integrando ambos os lados:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t -\frac{ln(\frac{b\alpha}{m}t' + e^{-\alpha v_0})}{\alpha} dt'$$

$$x(t) - x_0 = \int_0^t -\frac{ln(\frac{b\alpha}{m}t' + e^{-\alpha v_0})}{\alpha} dt'$$

Para facilitar trocaremos $\frac{b\alpha}{m}$ por A e $e^{-\alpha v_0}$ por B temos:

$$x(t) - x_0 = \frac{-1}{\alpha} \int_0^t ln(At' + B)dt'$$

usando substituição de $At + B = u$ e depois aplicando integração por partes, temos:

$$x(t) - x_0 = \frac{-1}{\alpha} \left[\frac{(At' + B)ln(At' + B) - At'}{A} \right]_0^t$$

$$x(t) - x_0 = \frac{-1}{\alpha} \left(\frac{(At + B)ln(At + B) - At}{A} - \frac{Bln(B)}{A} \right)$$

Agora voltando os valores para A e B obtemos a equação de $x(t)$

$$x(t) - x_0 = \frac{-1}{\alpha} \left(\frac{(\frac{b\alpha}{m}t + e^{-\alpha v_0})ln(\frac{b\alpha}{m}t + e^{-\alpha v_0}) - \frac{b\alpha}{m}t}{\frac{b\alpha}{m}} - \frac{e^{-\alpha v_0}ln(e^{-\alpha v_0})}{\frac{b\alpha}{m}} \right)$$

Simplificando fica:

$$x(t) = \frac{-m}{b\alpha^2} \left(\left(\frac{b\alpha}{m}t + e^{-\alpha v_0} \right) ln \left(\frac{b\alpha}{m}t + e^{-\alpha v_0} \right) - \frac{b\alpha}{m}t + \alpha v_0 e^{-\alpha v_0} \right) + x_0$$

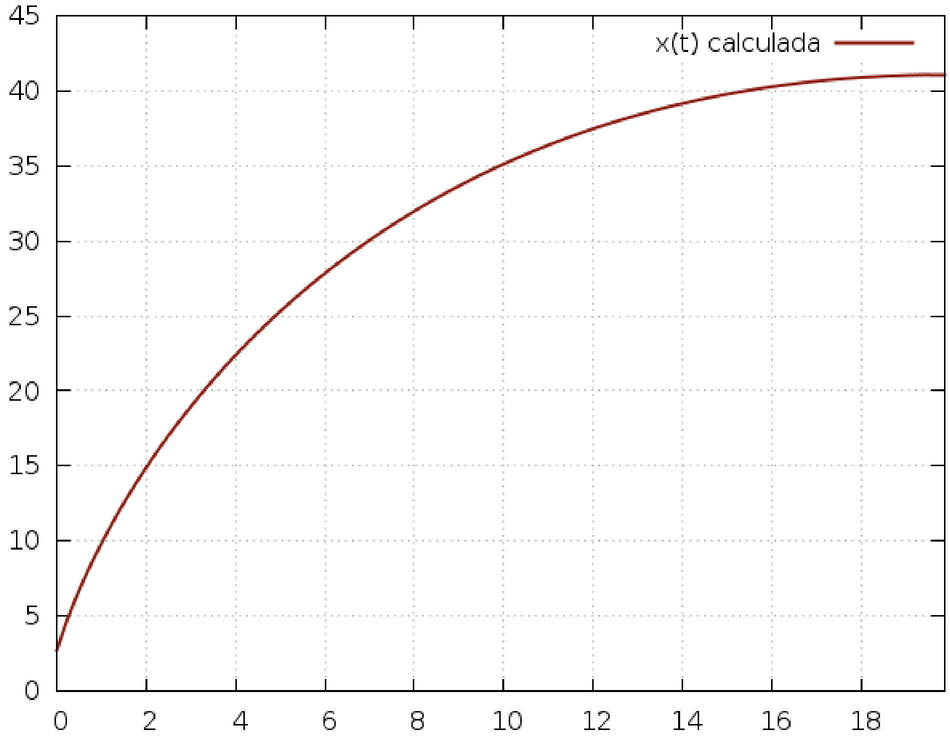

Figure 3: $x(t)$ Calculada

Observações: devido ao fato da modelagem ter sido feita em cima de uma força puramente dissipativa, podemos notar que não são quais quer valores de α e b que resolvem o sistema, estes coeficientes têm de ser medidos por isso para plotar os gráficos foram usados os valores que mais se aproximavam do resultado esperado, a fim de modelar o problema e buscar uma estimativa de ordem de grandeza para estes valores.

Para todos os gráficos mostrados foram utilizados os seguintes valores:

$m = 1$
$b = 0.1$
$\alpha = 0.5$
$V_0 = 10$