Mecânica Clássica I

André Del Bianco Giuffrida
IFSC - USP
andre.giuffrida@usp.br

Oscilador Harmonico amortecido!
Como:

$$F = -kx - b\dot{x}$$

Obtemos a Equação Diferencial:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Como a solução é clássica vamos testar o Ansatz :

$$x(t) = e^{pt}$$

Isso pois:

$$\dot{x}(t) = pe^{pt}$$
$$\ddot{x}(t) = p^2 e^{pt}$$

Substituindo na equação diferencial obtemos o seguinte:

$$\left[p^2 + p\frac{b}{m} + \frac{k}{m}\right]e^{pt} = 0$$

Para satisfazer a equação teremos que resolver a equação de segundo grau entre colchetes para p. Sendo assim:

$$p = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

Com o intuito de simplificar faremos:

$$\frac{b}{2m} = \gamma \quad \text{e} \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

temos, por fim.

$$p = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

O que faz, com que $x(t)$ tenha duas soluções. e por isso, $x(t)$ é uma combinação linear ($x = \alpha x_1 + \beta x_2$) das duas. ou seja:

$$x(t) = \alpha e^{\frac{-\gamma t}{2} + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + \beta e^{\frac{-\gamma}{2} - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t}$$

$$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}} \left[\alpha e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + \beta e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \right]$$

Agora podemos analisar os diversos casos para γ e ω.

- Para $\gamma < \omega$.

  Note que a raiz $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ torna-se complexa, podendo ser reescrita como:

  $$i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

  O que faz de $x(t)$ possuir uma componente complexa.

  $$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}} \left[\alpha e^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + \beta e^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right]$$

  Lembrando da Formula de Euler podemos substituir as exponenciais complexas por senos e cossenos.

  $$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$

  e assim podemos fazer a substituição

  $$\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = \Omega$$

  Para ficar-mos com:

  $$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}} \left[\alpha[cos(\Omega t) + isin(\Omega t)] + \beta[sin(\Omega t) + icos(\Omega t)] \right]$$

  Como não estamos interessados na parte imaginária ficamos com:

  $$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}} \left[\alpha cos(\Omega t) + \beta sin(\Omega t) \right]$$

  Que pode ser reescrito como:

  $$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}} Acos(\Omega t + \theta_0)$$

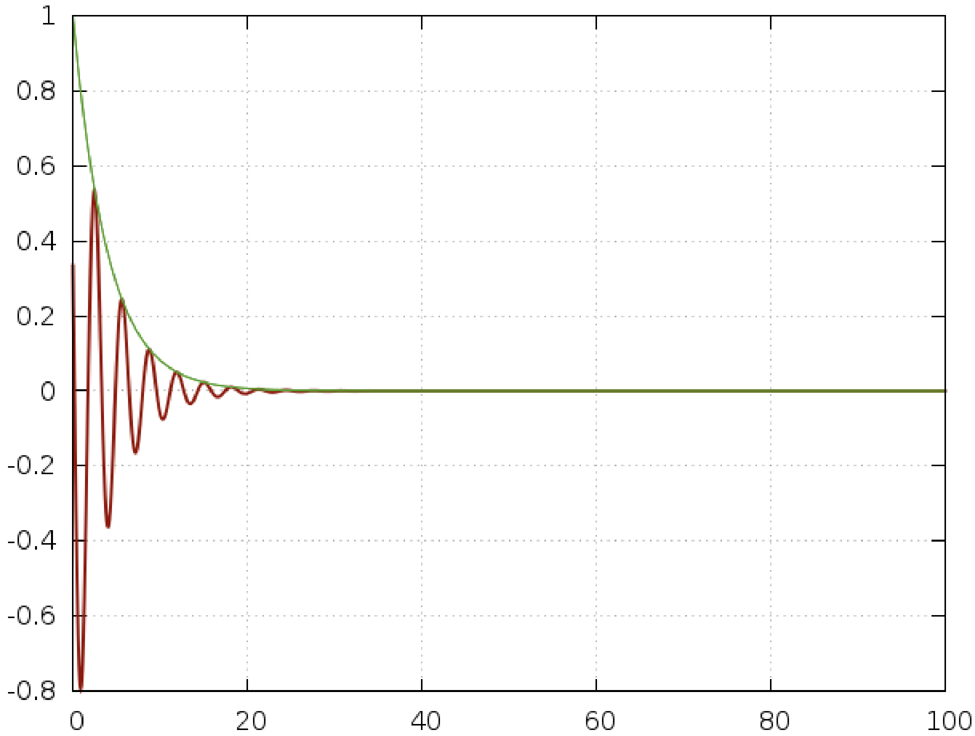

Figure 1: Subamortecimento - em verde o decamimento: $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

- Para $\gamma > \omega$.

  Nesse caso não temos o termo complexo ou seja a raiz $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ é real fazendo com que

$$x(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2}} \left[\alpha e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + \beta e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \right]$$

  onde as constantes α e β dependem das condições iniciais:

$$x(0) = \alpha + \beta = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \frac{-\gamma}{2}[\alpha + \beta] + [\alpha - \beta]\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = 0$$

$$\frac{\gamma}{2} x_0 = [2\alpha - x_0]\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma x_0}{4\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} + \frac{x_0}{2}$$

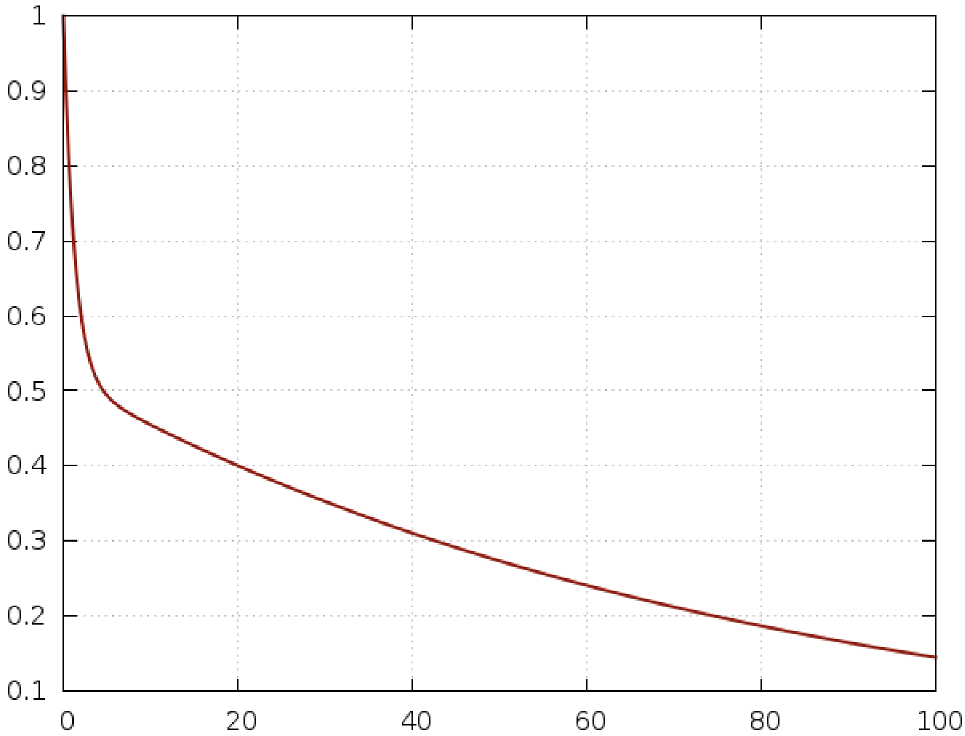

Figure 2: Amortecimento

- Para $\gamma = \omega$. Aqui vamos voltar na equação diferencial, e substituir nela.

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$\frac{b}{m} = 2\gamma \quad \text{e} \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

o que nos dá:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$$

agora temos algo diferente na Equação Diferencial e isso leva em um novo ansatz:

$$x(t) = f(t)e^{st}$$

pois:

$$\dot{x}(t) = \dot{f}(t)e^{st} + f(t)se^{st}$$
$$\ddot{x}(t) = \ddot{f}(t)e^{st} + 2\dot{f}(t)se^{st} + f(t)s^2e^{st}$$

substituindo na Equação inicial obtemos:

$$\ddot{f}(t)e^{st} + 2\dot{f}(t)se^{st} + f(t)s^2e^{st} + 2\gamma\Big[\dot{f}(t)e^{st} + f(t)se^{st}\Big] + \gamma^2\Big[f(t)e^{st}\Big] = 0$$

$$\ddot{f}(t) + 2\dot{f}(t)s + f(t)s^2 + 2\gamma\Big[\dot{f}(t) + f(t)s\Big] + \gamma^2\Big[f(t)\Big] = 0$$

$$\ddot{f}(t) + \dot{f}(t)\Big[2s + 2\gamma\Big] + f(t)\Big[s^2 + 2\gamma s + \gamma^2\Big] = 0$$

Note o quadrado perfeito.

$$\ddot{f}(t) + 2\Big(s + \gamma\Big)\dot{f}(t) + \Big(s + \gamma\Big)^2 f(t) = 0$$

sendo $s = -\gamma$

$$\ddot{f}(t) = 0$$

o que leva a

$$f(t) = f_0 + f_1 t$$

$$x(t) = (f_0 + f_1 t)e^{-\gamma t}$$

vemos que utilizando as condições iniciais, as constantes f_0 e f_1 podem ser encontradas como segue:

$$x(0) = f_0 = x_0$$

$$\dot{x}(t) = 0 = f_1 - \gamma f_0 \to f_1 = \gamma x_0$$

Podemos escrever.

$$x(t) = (x_0 + \gamma x_0 t)e^{-\gamma t}$$

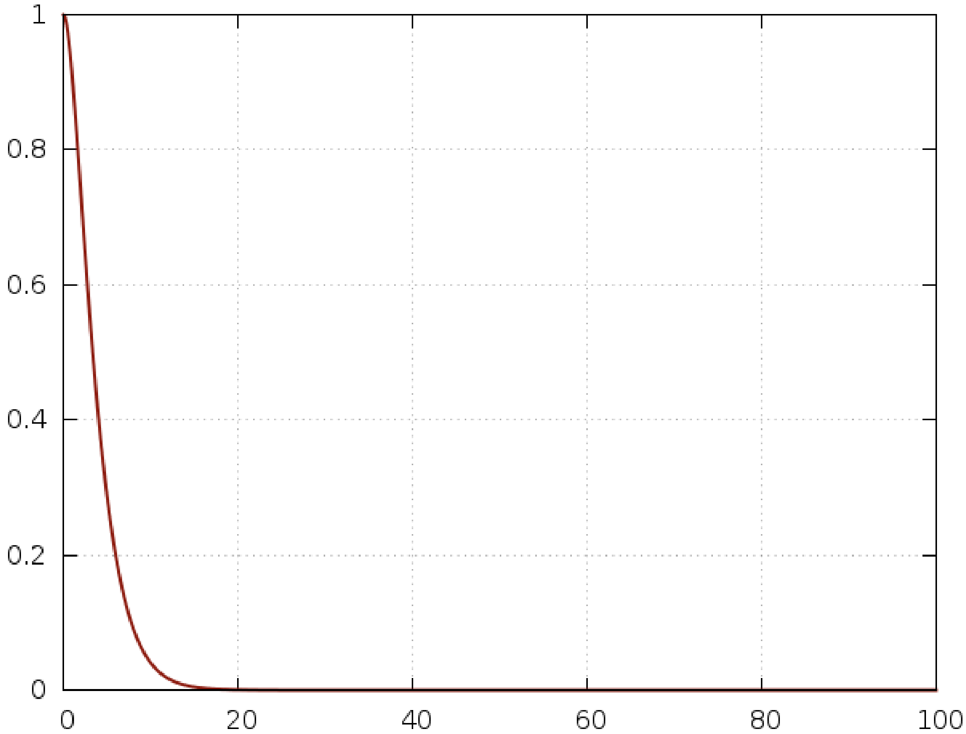

Figure 3: Amortecimento Crítico