Equações de Lagrange

Guilherme Caes, Guilherme Souza e Lucas Francisco

- Definições

Coordenadas generalizadas: $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, onde n é o número de graus de liberdade do sistema.

Sendo uma partícula única cujo movimento em três dimensões é descrito em coordenadas cartesianas, $x = x(t)\,; y = y(t)\,; z = z(t)$, há uma relação entre a descrição em coordenadas generalizadas e a descrição em coordenadas cartesianas:

$$q_1 = q_1(x, y, z)\ , \dots , q_k = q_k(x, y, z), \dots , q_n = q_n(x, y, z)$$
$$x = x(q_1, \dots , q_n)\ , y = y(q_1, \dots , q_n)\ , z = z(q_1, \dots , q_n)$$

Pode-se escrever então para cada coordenada cartesiana:

$$\delta x = \sum_k \frac{\partial x}{\partial q_k}\delta q_k \rightarrow \dot{x} = \sum_k \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q_k} \ \rightarrow \ \boxed{\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q_k}} = \frac{\partial x}{\partial q_k}} \ (*)$$

Sendo V o potencial de uma força conservativa, F, p_x o momento em uma componente cartesiana, W o trabalho de uma força e T a energia cinética da partícula:

$$\delta V = -\delta W = \sum_k \frac{\partial V}{\partial x}\delta x \ ; \ \frac{\partial V}{\partial x} = F_k$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$$

Pode-se inferir, então, as seguintes definições para a força generalizada Q_k e o momento generalizado p_x em relação a uma coordenada generalizada q_k:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q_k}} = p_k} \quad ; \quad \delta V = \sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k \ \leftrightarrow \ \boxed{\frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k}$$

O momento generalizado, em relação a coordenadas cartesianas, é:

$$p_k = \frac{\partial}{\partial \dot{q_k}}T \overset{*}{\rightarrow} \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q_k}} + 2\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q_k}} + 2\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q_k}}\right) = m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)$$

- Dedução da equação

A expressão para o momento generalizado p_k obtida anteriormente pode ser derivada em relação ao tempo:

$$\frac{dp_k}{dt} = m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_k} + \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right) + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right) + \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_k} + m\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right) + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right) + \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)\right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial q_k}\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{y}^2}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{z}^2}{\partial q_k}\right)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Sabendo que $\frac{\partial T}{\partial q_k} = p_k$, tem-se que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_k}} = \frac{\partial}{\partial q_k}(T - V)$$

A Lagrangiana $\mathcal{L}$ é definida como:

$$\mathcal{L} = T - V$$

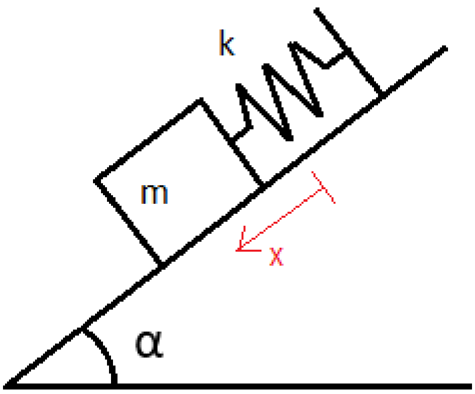
Como a função potencial V não depende explicitamente de $\dot{q}_k$, tem-se que:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k}$$

Portanto, a equação de Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

- Aplicação: Oscilador harmônico em um plano inclinado



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, V = \frac{1}{2}kx^2 - mgx \; sen \; \alpha$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgx \; sen \; \alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx + mg \; sen \; \alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$m\ddot{x} = -kx + mg \; sen \; \alpha$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \; sen \; \alpha$$