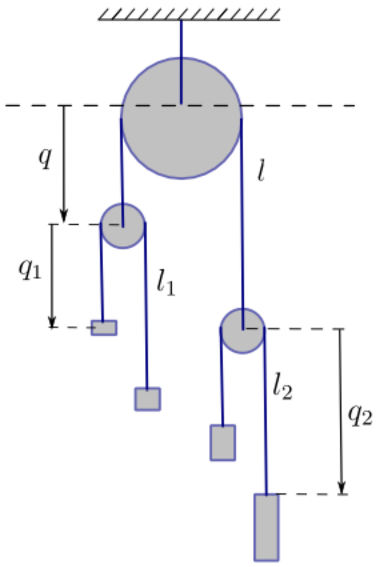
Mecânica Clássica I
André Del Bianco Giuffrida

Máquina de Atwood dupla

Inicialmente vamos definir os vínculos:
Temos todas as massas vinculadas as cordas l, l_1 e l_2
Podemos definir a posição de cada uma das quatro massas (m, $2m$, $3m$ e $4m$) com base na posição de uma das duas polias suspensas; e da posição de uma massa em cada ramo, ou seja, precisamos de três coordenadas generalizadas. sendo assim vamos escrever a posição de cada uma das massas em função de q, q_1 e q_2 como mostra a figura.



de modo que se colocar-mos a referencia no centro da primeira polia podemos escrever:

para a massa m_1: $h_1 = q + q_1$
para a massa m_2: $h_2 = q + (l_1 - q_1)$
para a massa m_3: $h_3 = (l - q) + (l_2 - q_2)$
para a massa m_4: $h_4 = (l - q) + q_2$

Podemos escrever assim as Energias do sistema:
Para a Energia Potencial:

$$V = mg(-4q - q_1 + q_2 + 2l_1 + 3l_2 + 7l)$$

Já para a Energia Cinética:

$$T = m\Big(\frac{(\dot{q} + \dot{q}_1)^2}{2} + (\dot{q} + \dot{l}_1 - \dot{q}_1)^2 + \frac{3(\dot{l} - \dot{q} + \dot{l}_2 - \dot{q}_2)^2}{2} + 2(\dot{l} - \dot{q} + \dot{q}_2)^2\Big)$$

Usando o fato de que as cordas não esticam notamos que $\dot{l} = \dot{l}_1 = \dot{l}_2 = 0$

$$T = m\Big(\frac{(\dot{q} + \dot{q}_1)^2}{2} + (\dot{q} - \dot{q}_1)^2 + \frac{3(-\dot{q} - \dot{q}_2)^2}{2} + 2(-\dot{q} + \dot{q}_2)^2\Big)$$

Calculando a Lagrangeana para o sistema temos

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = m\left[\frac{(\dot{q}+\dot{q}_1)^2}{2} + (\dot{q}-\dot{q}_1)^2 + \frac{3(-\dot{q}-\dot{q}_2)^2}{2} + 2(-\dot{q}+\dot{q}_2)^2 - g(-4q - q_1 + q_2 + 2l_1 + 3l_2 + 7l)\right]$$

Pela Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

para q

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m(\dot{q} + \dot{q}_1 + 2\dot{q} - 2\dot{q}_1 + 3\dot{q} + 3\dot{q}_2 + 4\dot{q} - 4\dot{q}_2) = m(6\dot{q} - \dot{q}_1 + 3\dot{q}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m(6\ddot{q} - \ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 4mg, \quad \text{e assim ficamos com:} \quad (6\ddot{q} - \ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2) = 4g$$

para q_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m(\dot{q} + \dot{q}_1 - 2\dot{q} + 2\dot{q}_1) = m(-\dot{q} + 3\dot{q}_1) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m(-\ddot{q} + 3\ddot{q}_1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = mg, \quad \text{e assim ficamos com:} \quad (-\ddot{q} + 3\ddot{q}_1) = g$$

e para q_2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m(7\dot{q}_2 - \dot{q}) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m(7\ddot{q}_2 - \ddot{q})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -mg, \quad \text{e assim ficamos com:} \quad (7\ddot{q}_2 - \ddot{q}) = -g$$

Com as três equações podemos resolver o problema.

$$\begin{aligned} (6\ddot{q} - \ddot{q}_1 + 3\ddot{q}_2) &= 4g \\ (-\ddot{q} + 3\ddot{q}_1) &= g \\ (-7\ddot{q}_2 + \ddot{q}) &= g \end{aligned}$$

$$\ddot{q} = \frac{25}{32}g \qquad \ddot{q}_1 = \frac{19}{32}g \qquad \ddot{q}_2 = -\frac{g}{32}$$

Usando a definição inicial das coordenadas escolhidas podemos saber as posições de cada uma das massas (h_i) em função do tempo.

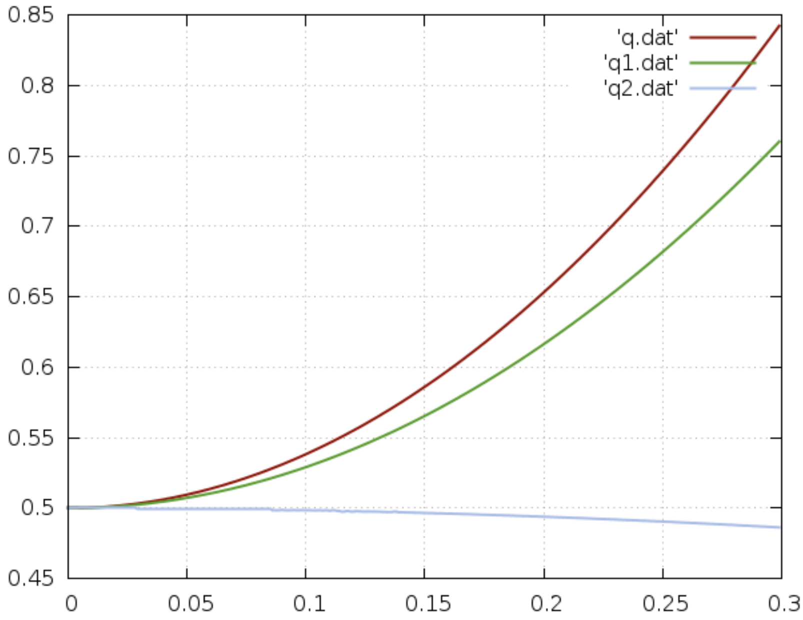


Figure 1: Posição das coordenadas generalizadas por tempo

Partindo todas as massas da mesma altura $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, podemos saber q_0, q_{1_0} e q_{2_0}.

$$\begin{array}{ll} \text{para a massa } m_1\text{:} & h = q_0 + q_{1_0} \\ \text{para a massa } m_2\text{:} & h = q_0 - q_{1_0} + l_1 \\ \text{para a massa } m_3\text{:} & h = l + l_2 - q_0 - q_{2_0} \\ \text{para a massa } m_4\text{:} & h = l - q_0 + q_{2_0} \end{array}$$

$$h = \frac{1}{4}(2l + l_1 + l_2); \quad q_0 = \frac{1}{4}(2l - l_1 + l_2); \quad q_{1_0} = \frac{l_1}{2}; \quad q_{2_0} = \frac{l_2}{2}$$

$$\begin{array}{lclclcl} q(t) & = & q_0 + \frac{25}{64}gt^2 & = & \frac{1}{4}(2l - l_1 + l_2) & + & \frac{25}{64}gt^2 \\ q_1(t) & = & q_{1_0} + \frac{19}{64}gt^2 & = & \frac{l_1}{2} & + & \frac{19}{64}gt^2 \\ q_2(t) & = & q_{2_0} - \frac{1}{64}gt^2 & = & \frac{l_2}{2} & - & \frac{1}{64}gt^2 \end{array}$$

Agora vamos achar as forças nos vínculos ou seja as trações nas cordas. e para isso vamos voltar na $\mathcal{L}$ porém vamos considerar $\dot{l}$, $\dot{l}_1$ e $\dot{l}_2$ ambas $\neq 0$ em T, com isso temos:

$$T = m\Big(\frac{(\dot{q} + \dot{q}_1)^2}{2} + (\dot{q} + \dot{l}_1 - \dot{q}_1)^2 + \frac{3(\dot{l} - \dot{q} + \dot{l}_2 - \dot{q}_2)^2}{2} + 2(\dot{l} - \dot{q} + \dot{q}_2)^2\Big)$$

$$V = mg(-4q - q_1 + q_2 + 2l_1 + 3l_2 + 7l)$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = m\Bigg[\Big(\frac{(\dot{q} + \dot{q}_1)^2}{2} + (\dot{q} + \dot{l}_1 - \dot{q}_1)^2 + \frac{3(\dot{l} - \dot{q} + \dot{l}_2 - \dot{q}_2)^2}{2} + 2(\dot{l} - \dot{q} + \dot{q}_2)^2\Big) - g(-4q - q_1 + q_2 + 2l_1 + 3l_2 + 7l)\Bigg]$$

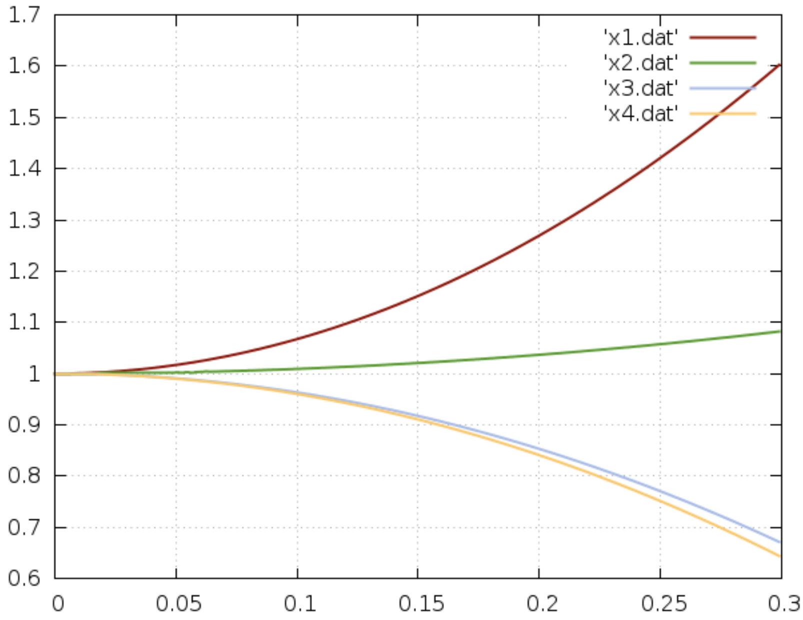


Figure 2: Posição das massas no tempo

sabemos pela equação de Euler-Lagreange que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_i} = T_i$$

Para cada um dos vínculos, e assim podemos achar as Tensões T_i nas cordas

Para a corda l

$$m\Big[3(\ddot{l} - \ddot{q} + \ddot{l}_2 - \ddot{q}_2) + 4(\ddot{l} - \ddot{q} + \ddot{q}_2)\Big] + 7mg = T$$

Para a corda l_1

$$m\Big[2(\ddot{q} + \ddot{l}_1 - \ddot{q}_1)\Big] + 2mg = T_1$$

Para a corda l_2

$$m\Big[3(\ddot{l} - \ddot{q} + \ddot{l}_2 - \ddot{q}_2)\Big] + 3mg = T_2$$

Aqui já sabemos $\ddot{q}$, $\ddot{q}_1$ e $\ddot{q}_2$ restando assim um sistema de três equações e três incógnitas, como segue:

$$\begin{aligned}
3m\ddot{l} - 3m\tfrac{25}{32}g + 3m\ddot{l}_2 + 3m\tfrac{g}{32} + 4m\ddot{l} - 4m\tfrac{25}{32}g - 4m\tfrac{g}{32} + 7mg &= T \\
2m\tfrac{25}{32}g + 2m\ddot{l}_1 - 2m\tfrac{19}{32}g + 2mg &= T_1 \\
3m\ddot{l} - 3m\tfrac{25}{32}g + 3m\ddot{l}_2 + 3m\tfrac{g}{32} + 3mg &= T_2
\end{aligned}$$