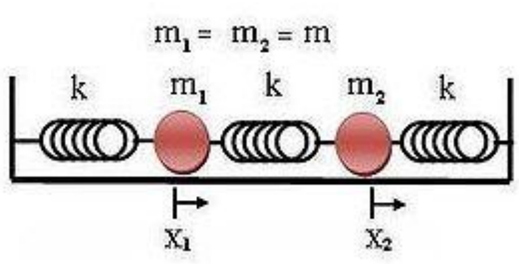
Resumo de Mecânica Clássica I – Movimento de um Sistema de Partículas

Fábio Henrique, Flávio Pinto, Murilo Nascimento e Julio Cesar Cardoso

USP, 21 de Outubro de 2013

Exemplo:



$m\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2)$

$m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1)$

O procedimento utilizado vale para massas e molas diferentes.

Soluções: $x_1 = \alpha e^{pt} \rightarrow \ddot{x}_1 = \alpha p^2 e^{pt}$

$x_2 = \beta e^{pt} \rightarrow \ddot{x}_2 = \beta p^2 e^{pt}$

Estamos procurando uma solução em que massas fazem os mesmo movimentos, por isso a constante p do exponencial é a mesma.

Derivando 2 vezes x1 e x2 e substituindo nas equações do movimento, temos:

$mp^2\alpha = -k(2\alpha - \beta)$

$mp^2\beta = -k(2\beta - \alpha)$

Fazendo o procedimento diferente da outra aula, considerando que as equações acima são relacionadas entre si, temos:

$(mp^2 + 2k)\alpha = k\beta \ (1) \qquad \alpha \neq 0$

$(mp^2 + 2k)\beta = k\alpha \ (2)$

Isolando β em (1) e substituindo em (2), temos:

$$\beta = \frac{(mp^2 + 2k)\alpha)}{k} => mp^2 + 2k = \pm k$$

Portanto:

$mp^2 = -k => p = \pm i\omega_0$ OU $p = \pm i\omega_0 => p = \pm i\sqrt{3}\omega_0$

Soluções gerais: $x_1 = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} + d_1 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + d_2 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t}$

$x_2 = c_1' e^{i\omega_0 t} + c_2' e^{-i\omega_0 t} + d_1' e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + d_2' e^{i\sqrt{3}\omega_0 t}$

Pelas equações serem relacionadas entre si, as constantes das soluções gerais também vão ser relacionadas entre si:

se $p = i\omega_0 => (mp^2 + 2k)\alpha = k\beta => \alpha = \beta \ \therefore \ c_1 = c_1'$

se $p = -i\omega_0 => \alpha = \beta \ \therefore \ c_2 = c_2'$

se $p = -i\sqrt{3}\omega_0 => \alpha = -\beta \ \therefore \ d_1 = -d_1'$

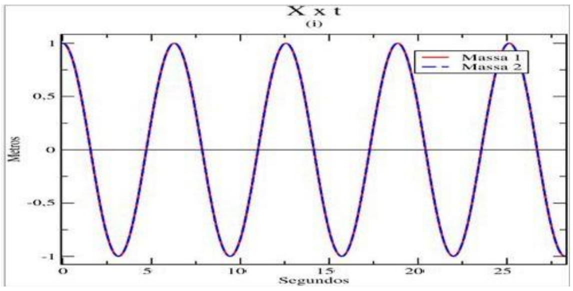
se $p = -i\sqrt{3}\omega_0 => \alpha = -\beta \ \therefore \ d_2 = -d_2'$

Então, pela Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$:

$x_1 = Acos(\omega_0 t - \theta_0) + Bcos(\sqrt{3}\omega_0 t - \varphi_0)$ e $x_2 = Acos(\omega_0 t - \theta_0) - Bcos(\sqrt{3}\omega_0 t - \varphi_0)$

Vamos analisar o comportamento do sistema com as seguintes condições iniciais:

(I)Condições iniciais: $x_1(0) = x_2(0) = 1$; $v_1(0) = v_2(0) = 0$



$x_1(0) = Acos(\theta_0) + Bcos(\varphi_0) = 1$, $x_2(0) = Acos(\theta_0) - Bcos(\varphi_0) = 1$

$v_1(0) = A\omega_0 sen(\theta_0) + B\sqrt{3}\omega_0 sen(\varphi_0) = 0,$

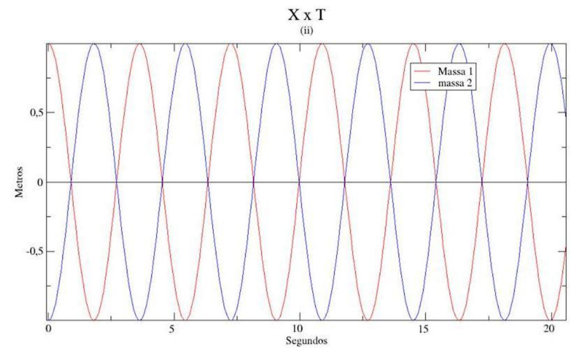
$v_2(0) = A\omega_0 sen(\theta_0) - B\sqrt{3}\omega_0 sen(\varphi_0) = 0$

Logo, encontramos que: $A = 1, B = 0, \omega_0 = \varphi_0 = 0$, portanto:

$x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$

Através do resultado obtido podemos ver que as massas oscilam igualmente, e também é possível ver que a mola central não sofre compressão, se ela fosse retirada do sistema, o movimento continuaria igual. Esse é o chamado primeiro modo normal de vibração.

(II)Condições iniciais: $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 1$; $v_1(0) = v_2(0) = 0$



$x_1(0) = Acos(\theta_0) + Bcos(\varphi_0) = -1$, $x_2(0) = Acos(\theta_0) - Bcos(\varphi_0) = 1$

$v_1(0) = A\omega_0 sen(\theta_0) + B\sqrt{3}\omega_0 sen(\varphi_0) = 0,$

$v_2(0) = A\omega_0 sen(\theta_0) - B\sqrt{3}\omega_0 sen(\varphi_0) = 0$

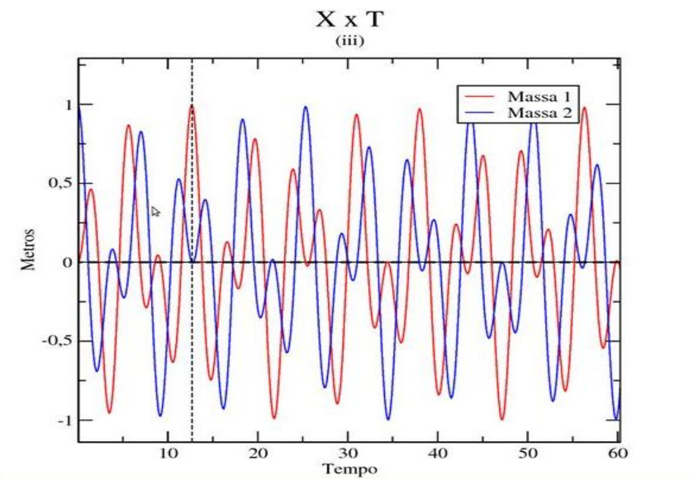
Logo, encontramos que: $A = 0, B = -1, \omega_0 = \varphi_0 = 0$, portanto:

$x_1(t) = -\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$ e $x_2(t) = \cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$

Analisando os movimentos obtidos, vemos que nesse caso o CM tem de ficar parado, e as forças exercidas por cada massa sobre a mola central tem a mesma intensidade, logo, hora a mola central tem compressão máxima e hora ela tem estiramento máximo. Esse é o chamado segundo modo normal de vibração.

(III) Condições iniciais: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$; $v_1(0) = v_2(0) = 0$.

A velocidade tem modulo zero em t=0 ⇔ $\theta_0 = \varphi_0 = 0$.



Para que estas soluções iniciais sejam satisfeitas é necessário que A=B=0.5, logo segue como equação de movimento: $x_1 = 0.5[\cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{3}\omega_0 t)]$

$$x_2 = 0.5[\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{3}\omega_0 t)]$$

Neste caso as massas oscilam de maneira alternada, isto é, enquanto uma tem amplitude máxima a outra tem amplitude mínima. A massa com amplitude máxima transfere, progressivamente, energia para a massa em repouso. Isto fica evidenciado no ponto marcado com a linha tracejada onde a massa 1 tem amplitude 1 e a massa 2 tem amplitude 0.

O modo de vibração deste caso é uma combinação linear dos dois módulos normais. Com isso o movimento é descrito por uma oscilação modulada por outra oscilação.

O primeiro modo normal de vibração quando se tem dois corpos é caracterizado pelo seguinte gráfico:

Enquanto que o segundo modo normal de vibração é caracterizado pelo seguinte: