

Diretor Editorial
Claudio M. Rothmuller

Tradução
Gilson Brand Batista
Departamento de Física – PUC/RJ

MECÂNICA

Keith R. Symon



46431



1701027922



ED. CAMPUS

Preencha a ficha de cadastro no final deste livro
e receba gratuitamente o informativo da Campus

Do original:
Mechanics, Third Edition
"Tradução autorizada do idioma inglês da edição publicada
por Addison-Wesley Co. Inc. Reading"

© 1996, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados e protegidos pela Lei 5988 de 14/12/73.
Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da editora, poderá
ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados:
eletromagnéticos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

Capa
Otávio Studart

Projeto Gráfico, Composição e Revisão:

Editora Campus Ltda.

A qualidade da informação.

Rua Sete de Setembro, 111 – 16º andar

20050-002 Rio de Janeiro RJ Brasil

Telefone: (021)221-5340 FAX (021)507-1991

E-mail: info@campus.com.br

ISBN 85-7001-369-8

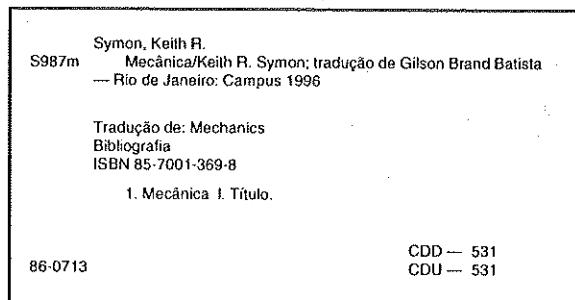
(Edição original: ISBN 0-201-07392-7, Addison-Wesley Publishing

Co. Inc., Massachusetts, USA)

Ficha Catalográfica

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte.

Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ



96 97 98 99 00

12 11 10 9 8 7

SOC

NEN: 11308

531

S988m

L. 10

1. Mecânica

A meu pai

SUMÁRIO

PREFÁCIO	15
CAPÍTULO 1 ELEMENTOS DE MECÂNICA NEWTONIANA	
1.1 MECÂNICA, UMA CIÊNCIA EXATA	19
1.2 CINEMÁTICA, A DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO	21
1.3 DINÂMICA. MASSA E FORÇA	23
1.4 AS LEIS DO MOVIMENTO, DE NEWTON	25
1.5 GRAVITAÇÃO	28
1.6 UNIDADES E DIMENSÕES	29
1.7 ALGUNS PROBLEMAS ELEMENTARES DE MECÂNICA	31
CAPÍTULO 2 MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL DE UMA PARTÍCULA	
2.1 TEOREMA DO MOMENTO E DA ENERGIA	41
2.2 DISCUSSÃO DO PROBLEMA GERAL DO MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL	42
2.3 FORÇA APLICADA DEPENDENTE DO TEMPO	44
2.4 FORÇA DE AMORTECIMENTO DEPENDENTE DA VELOCIDADE ..	47
2.5 FORÇA CONSERVATIVA DEPENDENTE DE POSIÇÃO. ENERGIA POTENCIAL	51
2.6 CORPOS EM QUEDA LIVRE	56
2.7 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES	60
2.8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES	62
2.9 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO	67
2.10 OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO	71
2.11 PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO. OSCILADOR HARMÔNICO COM FORÇA APLICADA ARBITRARIAMENTE	79
CAPÍTULO 3 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM DUAS OU TRÊS DIMENSÕES	
3.1 ÁLGEBRA VETORIAL	95

3.2 APLICAÇÕES A UM CONJUNTO DE FORÇAS QUE ATUAM SOBRE UMA PARTÍCULA	104
3.3 DIFERENCIADAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE VETORES	108
3.4 CINEMÁTICA NO PLANO	114
3.5 CINEMÁTICA EM TRÊS DIMENSÕES	118
3.6 ELEMENTOS DE ANÁLISE VETORIAL	122
3.7 TEOREMAS DO MOMENTO LINEAR E DA ENERGIA	127
3.8 TEOREMAS DO MOMENTO ANGULAR NO PLANO E VETORIAL	129
3.9 DISCUSSÃO DO PROBLEMA GERAL DO MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES	131
3.10 O OSCILADOR HARMÔNICO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES	133
3.11 PROJETIS	136
3.12 ENERGIA POTENCIAL	140
3.13 MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA CENTRAL	147
3.14 FORÇA CENTRAL INVERSAMENTE PROPORCIONAL AO QUADRADO DA DISTÂNCIA	152
3.15 ÓRBITAS ELÍPTICAS. O PROBLEMA DE KEPLER	159
3.16 ÓRBITAS HIPERBÓLICAS. O PROBLEMA DE RUTHERFORD. SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO	161
3.17 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM CAMPO ELETROMAGNÉTICO	165

CAPÍTULO 4 MOVIMENTO DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

4.1 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR. CENTRO DE MASSA	187
4.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR	190
4.3 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA	193
4.4 ANÁLISE CRÍTICA DAS LEIS DA CONSERVAÇÃO	196
4.5 FOGUETES, ESTEIRAS E PLANETAS	199
4.6 PROBLEMAS SOBRE COLISÃO	202
4.7 O PROBLEMA DE DOIS CORPOS	209
4.8 COORDENADAS DO CENTRO DE MASSA. ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD POR UMA PARTÍCULA CARREGADA DE MASSA FINITA	212
4.9 O PROBLEMA DE N CORPOS	215
4.10 ACOPLAMENTO DE DOIS OSCILADORES HARMÔNICOS	219

CAPÍTULO 5 CORPOS RÍGIDOS. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO. ESTÁTICA

5.1 O PROBLEMA DE DINÂMICA RELATIVO AO MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO	237
---	-----

5.2 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO	240
5.3 O PÊNDULO SIMPLES	242
5.4 O PÊNDULO COMPOSTO	245
5.5 CÁLCULO DO CENTRO DE MASSA E DO MOMENTO DE INÉRCIA	248
5.6 ESTÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS	258
5.7 ESTÁTICA DAS ESTRUTURAS	264
5.8 TENSÃO E DEFORMAÇÃO	265
5.9 EQUILÍBRIO DE FIOS E DE CABOS FLEXÍVEIS	268
5.10 EQUILÍBRIO DE VIGAS SÓLIDAS	271
5.11 EQUILÍBRIO DE FLUIDOS	278

CAPÍTULO 6 GRAVITAÇÃO

6.1 CENTROS DE GRAVIDADE DE CORPOS DE GRANDES DIMENSÕES	291
6.2 CAMPO E POTENCIAL GRAVITACIONAIS	293
6.3 EQUAÇÕES DOS CAMPOS GRAVITACIONAIS	296

CAPÍTULO 7 SISTEMAS DE COORDENADAS EM MOVIMENTO

7.1 ORIGEM DO MOVIMENTO DE COORDENADAS	303
7.2 ROTAÇÃO DOS SISTEMAS DE COORDENADAS	305
7.3 LEIS DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA	312
7.4 PÊNDULO DE FOUCault	314
7.5 TEOREMA DE LARMOR	317
7.6 FORMA RESTRITA DO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS	319

CAPÍTULO 8 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

8.1 A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA UMA CORDA VIBRANTE	329
8.2 MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO PARA UMA CORDA VIBRANTE	331
8.3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS AO LONGO DE UMA CORDA	335
8.4 A CORDA COMO CASO-LIMITE DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS	340
8.5 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A PROPAGAÇÃO DE ONDAS	344
8.6 CINEMÁTICA DOS FLUIDOS EM MOVIMENTO	347

8.7 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA UM FLUIDO IDEAL	355
8.8 LEIS DA CONSERVAÇÃO PARA O MOVIMENTO DOS FLUIDOS	357
8.9 ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO	362
8.10 ONDAS SONORAS	365
8.11 VIBRAÇÕES NORMAIS DE UM FLUIDO COLOCADO NUMA CAIXA RETANGULAR	370
8.12 ONDAS SONORAS EM TUBOS	374
8.13 VELOCIDADE DE GRUPO	375
8.14 O NÚMERO DE MACH	378
8.15 VISCOSIDADE	380

CAPÍTULO 9 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

9.1 COORDENADAS GENERALIZADAS	389
9.2 EQUAÇÕES DE LAGRANGE	400
9.3 EXEMPLOS	403
9.4 SISTEMAS SUJEITOS A VÍNCULOS	404
9.5 EXEMPLOS DE SISTEMAS SUJEITOS A VÍNCULOS	409
9.6 CONSTANTES DO MOVIMENTO E COORDENADAS IGNORÁVEIS	414
9.7 OUTROS EXEMPLOS	417
9.8 FORÇAS ELETROMAGNÉTICAS E POTENCIAIS DEPENDENTES DA VELOCIDADE	422
9.9 EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA UMA CORDA VIBRANTE	425
9.10 EQUAÇÕES DE HAMILTON	429
9.11 TEOREMA DE LIOUVILLE	432

CAPÍTULO 10 ÁLGEBRA TENSORIAL. TENSORES DE INÉRCIA E DE TENSÃO

10.1 MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO	441
10.2 ÁLGEBRA TENSORIAL	442
10.3 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	449
10.4 DIAGONALIZAÇÃO DE UM TENSOR SIMÉTRICO	455
10.5 O TENSOR DE INÉRCIA	463
10.6 O TENSOR DE TENSÃO	471

CAPÍTULO 11 A ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

11.1 MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO NO ESPAÇO	485
---	-----

11.2 EQUAÇÕES DE EULER PARA O MOVIMENTO DE CORPOS RÍGIDOS	486
11.3 SOLUÇÃO DE POINSOT PARA O CASO DE UM CORPO QUE GIRA LIVREMENTE	490
11.4 ÂNGULOS DE EULER	492
11.5 O PIÃO SIMÉTRICO	495

CAPÍTULO 12 TEORIA DAS PEQUENAS VIBRAÇÕES

12.1 CONDIÇÕES PARA ESTABILIDADE NAS VIZINHANÇAS DE UMA CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO	509
12.2 EQUAÇÕES LINEARIZADAS DO MOVIMENTO NAS VIZINHANÇAS DE UMA CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO	511
12.3 MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO	513
12.4 VIBRAÇÕES FORÇADAS, AMORTECIMENTO	517
12.5 TEORIA DA PERTURBAÇÃO	520
12.6 PEQUENAS VIBRAÇÕES EM TORNO DO MOVIMENTO ESTACIONÁRIO	525
12.7 OSCILAÇÕES DE BETATRON EM UM ACELERADOR	531
12.8 ESTABILIDADE DOS TRÊS CORPOS, DE LAGRANGE	535

CAPÍTULO 13 POSTULADOS BÁSICOS DA TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE

13.1 OS POSTULADOS DA TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE	549
13.2 O PARADOXO APARENTE RELATIVO À VELOCIDADE DA LUZ	553
13.3 SISTEMAS DE COORDENADAS, SISTEMAS DE REFERÊNCIA	555
13.4 COMPORTAMENTO DE RELÓGIOS E RÉGUAS	566
13.5 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	571
13.6 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	574

CAPÍTULO 14 DINÂMICA RELATIVÍSTICA

14.1 ÁLGEBRA VETORIAL NO ESPAÇO-TEMPO	585
14.2 AS LEIS DA CONSERVAÇÃO SOB O PONTO DE VISTA RELATIVÍSTICO	596
14.3 TEORIA DAS COLISÕES	600
14.4 AS EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS DO MOVIMENTO	607

PREFÁCIO

14.5 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	608
14.6 LEIS RELATIVÍSTICAS DA FORÇA. ELETRODINÂMICA	616
14.7 ÁLGEBRA TENSORIAL NO ESPAÇO QUADRIDIMENSIONAL	622
14.8 TEORIA GERAL DA RELATIVIDADE	624
BIBLIOGRAFIA	645
RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES	649
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	661
ÍNDICE ANALÍTICO	671

A intenção do autor ao escrever este livro foi dar, aos alunos dos cursos de Mecânica de nível universitário, um texto básico, como preparação essencial para estudos mais avançados de Física. Assim sendo, a obra visa principalmente a levar o estudante a compreender de maneira profunda os princípios fundamentais da Mecânica e tratar detalhadamente de alguns problemas específicos e de fundamental importância em Física, como, por exemplo, o do oscilador harmônico e o do movimento de partículas sob a ação de uma força central. O autor escolheu os problemas sugeridos e os resolvidos no próprio texto tendo em vista não só o interesse e a importância em relação à Física como também seu valor instrutivo.

Neste livro, tanto a seleção dos tópicos como a maneira de tratá-los enfatizam o ponto de vista moderno, de modo que, sempre que possível, as aplicações de Física Atômica foram apresentadas com indicações da extensão em que os resultados da Mecânica Clássica são válidos, evidenciando-se os limites dessa validade e indicando-se os pontos de partida para o estudo da Mecânica Quântica e da Teoria da Relatividade. Os dois últimos capítulos apresentam o desenvolvimento da Mecânica Relativística Especial. O desenvolvimento do assunto na obra, com exceção dos seis últimos capítulos, deriva diretamente das Leis do Movimento, formuladas por Newton, pois são elas que formam a base conveniente para se resolver a maioria dos problemas de Mecânica. No entanto, os métodos mais avançados, para os quais é imprescindível o conhecimento das equações de Lagrange e da Álgebra Tensorial, foram introduzidos nos Caps. 8 a 12.

Um dos objetivos mais importantes de um primeiro curso de Mecânica é levar o estudante a pensar no problema de Física em termos matemáticos. A maioria dos alunos já possui uma intuição bastante razoável dos aspectos qualitativos relacionados aos fenômenos mecânicos. Assim sendo, o professor deve objetivar desenvolver essa intuição no sentido de levá-los à formulação matemática precisa dos problemas de Física paralelamente à interpretação física das soluções matemáticas. Tendo isso em vista, o autor apresenta no texto exemplos que visam a integrar, tanto quanto possível, o tratamento matemático com a interpretação física. Após resolver os problemas propostos, o estudante deve estudá-los até convencer-se de que entende a interpretação física de cada aspecto da solução matemática, para poder decidir se a sua solução, ou intuição, deve ser corrigida apropriadamente. Se a resposta de um problema for complicada, deverá procurar casos especiais que permitam simplificações ou casos-limite, tentando formular e resolver problemas similares aos apresentados no texto.

O autor pressupõe que os estudantes já possuem alguns conhecimentos de Cálculo Integral e Diferencial, mas quando se fazem necessários conceitos matemáticos além dos tratados no primeiro ano do curso universitário, eles são apresentados e expli-

cados, mas é claro que conhecimentos sobre equações diferenciais elementares ou Análise Vetorial podem ajudar; entretanto, segundo a experiência do autor, alunos aptos a operarem com Álgebra e Cálculo são capazes de entender a Álgebra Vetorial e de solucionar equações diferenciais necessárias a este curso apenas com a explicação fornecida no texto. Um estudante de Física provavelmente terá vantagens em cursos mais avançados de Matemática caso já se tenha defrontado com estes conceitos em Física.

Como este livro contém matéria mais do que suficiente para dois semestres do curso, é fácil ao professor selecionar os tópicos que se adaptam a sua classe. Os sete primeiros capítulos fornecem a base para cursos de Mecânica em nível intermediário, com duração de um semestre. Quando for preciso omitir alguns tópicos, nos primeiros capítulos, é possível, segundo o autor, incluir no curso de um semestre partes dos Caps. 8 ou 9, pois o texto foi trabalhado de modo a oferecer o máximo de flexibilidade na seleção e arranjo dos tópicos a serem estudados. Com certas exceções óbvias, muitas das seções ou grupos de seções podem ser adiados ou mesmo omitidos sem prejudicar o entendimento da matéria restante. Quando tópicos apresentados anteriormente são necessários em partes posteriores do curso, há referência das seções e dos números das equações para facilitar a localização da matéria necessária.

Os últimos capítulos dependem, em princípio, da matéria estudada nos Caps. 2, 3 e 4, nas Seçs. 1, 2 e 6 do Cap. 5, e Seçs. 1 e 2 do Cap. 7. Depois que esta matéria for estudada, será fácil compreender os capítulos seguintes. A Seç. 5.11 deve prececer a matéria sobre movimento de fluidos do Cap. 8 se esta for estudada. Os Caps. 9 e 10 devem ser estudados antes dos Caps. 11 e 12. Os dois últimos, versando sobre Relatividade, podem ser estudados em qualquer tempo depois do Cap. 7. O Cap. 14 contém algumas referências, exemplos e extensões da matéria abrangida pelos Caps. 8, 9 e 10, que podem ser omitidos sem afetar a continuidade da matéria restante.

No primeiro capítulo, são revistos os conceitos básicos de Mecânica, formulando-se suas leis e a da gravitação e aplicando-se alguns exemplos simples. No segundo capítulo, o problema do movimento unidimensional é retomado e estudado profundamente e conclui com o estudo do oscilador harmônico, que, provavelmente, é o exemplo mais importante desse movimento. Os números complexos são usados para representar grandezas oscilantes. Na última seção, sobre o princípio de superposição, a série de Fourier é usada e servirá de base para algumas partes dos Caps. 8 e 12. Se estes dois capítulos não forem estudados, a Seç. 2.11 pode ser omitida ou, o que é melhor, vista superficialmente para fornecer uma breve indicação do significado do princípio de superposição e na maneira como a série de Fourier é usada no tratamento do problema da ação de uma força arbitrária.

O Cap. 3 começa com o desenvolvimento da Álgebra Vetorial e a sua utilização na descrição de movimentos no plano e no espaço. As letras em negrito indicam os vetores. Na Seç. 3.6 faz-se breve introdução de Análise Vetorial, muito pouco usada neste texto com exceção do Cap. 8, podendo ser omitida ou vista superficialmente, caso esse capítulo e algumas demonstrações em outros forem omitidos. O autor sugere algumas vantagens em iniciar o estudo de conceitos e notações de Análise Vetorial neste estágio, quando o nível de tratamento ainda é razoavelmente fácil; em cursos mais avançados, em que os conceitos físicos e o tratamento matemático se tornam

mais difíceis, será conveniente que o estudante já esteja familiarizado com tal notação. O estudo dos teoremas que estabelecem a taxa de variação com o tempo do momento linear, da energia e do momento angular, em relação às partículas em movimento, é seguido de alguns problemas, entre os quais os do movimento sob a ação de uma força central. A esses se deu maior atenção, e foram escolhidos com base em problemas de Astronomia e Física Atômica.

No Cap. 4 são derivadas as Leis da Conservação da Energia do Momento Linear e do Momento Angular, enfatizando-se a sua posição como marcos da Física moderna. Estas leis são, então, aplicadas a problemas típicos, particularmente aos que tratam de colisões. O problema dos dois corpos é resolvido, e estuda-se o movimento de dois osciladores acoplados, cuja teoria geral é melhor descrita quando se utilizam transformações lineares no espaço vetorial, como é feito no Cap. 12, mas o comportamento de sistemas oscilantes acoplados é demasiadamente importante para ser totalmente omitido, mesmo em cursos de um semestre. A seção sobre dois osciladores pode ser omitida ou adiada até o Cap. 12. Corpos rígidos são discutidos no Cap. 5 como um caso especial de sistemas de partículas; só se trata da rotação em torno de um eixo fixo, deixando-se o estudo mais geral do movimento de um corpo para um capítulo posterior, onde se empregam métodos mais avançados. A seção sobre Estática trata do problema da redução de um sistema de forças a um sistema simples equivalente. Nas Seçs. 5.9, 5.10 e 5.11, estuda-se o equilíbrio de vigas, cordas flexíveis e de fluidos de maneira bem elementar. Com exceção das Seçs. 1, 2, 6 e 8, que formam a base da matéria seguinte, as várias seções do Cap. 5 são independentesumas das outras e podem ser estudadas em qualquer ordem ou omitidas conforme se deseje.

A Teoria da Gravitação é estudada em detalhe no Cap. 6. A última seção, por tratar das equações dos campos gravitacionais, pode ser omitida sem perturbar a continuidade da matéria restante. As leis do movimento em sistemas de coordenadas girantes são apresentadas no Cap. 7 e aplicadas ao movimento da Terra e ao de um sistema de partículas carregadas, em campo magnético. Empresta-se particular atenção à posição das "forças fictícias", na Mecânica Newtoniana, que aparecem quando se introduz um sistema de coordenadas girantes e ao papel assumido por estas forças na Teoria Geral da Relatividade.

No Cap. 8, trata-se de cordas vibrantes e do movimento de fluidos, enfatizando-se conceitos fundamentais e os métodos matemáticos usados no tratamento da Mecânica dos meios contínuos. O Cap. 9, sobre equações de Lagrange, pretende iniciar o estudo dos métodos de Dinâmica Avançada. As equações de Hamilton e o conceito de espaço de fases são apresentados, porque são pré-requisitos para qualquer curso posterior de Mecânica Quântica e de Mecânica Estatística, entretanto a teoria das transformações canônicas e a utilização dos princípios variacionais estão além do nível deste livro. No Cap. 10, desenvolve-se a Álgebra de Tensores, incluindo transformações de coordenadas ortogonais, necessárias ao estudo dos Caps. 11 e 12. Nele, trata-se de tensor de inércia e de tensor de tensão, como exemplos. A Seç. 10.6, que versa sobre tensor de tensão, capacitará o leitor a estender a análise dos fluidos ideais, indicada no Cap. 8, aos meios sólido ou viscoso. Os métodos desenvolvidos nos Caps. 9 e 10 aplicam-se ao Cap. 11 no que se refere ao estudo da rotação geral de corpos rígidos em torno de

um ponto e, no Cap. 12, ao estudo de pequenas vibrações de sistemas físicos em torno de um estado de equilíbrio ou de movimento estacionário.

O Cap. 13 é uma introdução à Teoria da Relatividade Especial. Apresenta os conceitos básicos e os princípios físicos e conclui com a derivação das transformações de Lorentz. No Cap. 14, desenvolve-se de maneira mais ou menos completa a Mecânica Relativística de uma partícula, apresentando-se o ferramental matemático necessário à maioria das aplicações da teoria. O leitor que precisa desembarpaçar-se na aplicação da Teoria da Relatividade Especial deverá estudá-lo todo, mas se só estiver interessado em adquirir conhecimentos básicos de Dinâmica Relativística, é suficiente deter-se nas Seçs. 14.1, 14.2, 14.4 e 14.8.

Os problemas apresentados no final de cada capítulo são numerados na mesma ordem em que a matéria é estudada, por ser mais conveniente na ocasião em que forem propostos. O autor procurou incluir uma variedade de problemas de modo a garantir que qualquer estudante capaz de resolvê-los entendeu a matéria do texto. O inverso não é necessariamente verdade, porque a maioria requer um pouco de intuição em Física em complemento à compreensão do texto. Muitos dos problemas são razoavelmente fáceis e podem ser resolvidos por qualquer um que tenha entendido a matéria apresentada, mas é provável que a maioria dos estudantes desse curso não consiga resolvê-los sem assistência. Esses particularmente difíceis ou muito trabalhosos são indicados com um asterisco.

Esta terceira edição* difere da segunda principalmente por incluir dois capítulos finais sobre Teoria da Relatividade e problemas suplementares nos primeiros sete capítulos, similares àqueles contidos nas edições anteriores porém, em média, em nível mais baixo de dificuldade.

O autor agradece sinceramente ao Professor Francis W. Sears, da Universidade de Dartmouth, e ao Professor George H. Vineyard, do Laboratório Nacional de Brookhaven, pelas muitas sugestões úteis, ao Srs. Charles Vittitoe e Donald Roiseland pela leitura crítica dos Caps. 8 a 12, e ao Professor Robert March e Sra. Vernita Aigner pela leitura crítica dos Caps. 13 e 14. Agradece particularmente a muitos professores e estudantes que sugeriram correções e ofereceram sugestões de melhoramentos já incorporados na terceira edição. Como o espaço não permite mencionar todos individualmente, o autor deseja que cada um possa encontrar seus agradecimentos expressos nas mudanças introduzidas nesta edição.

Madison, Wisconsin
Maio de 1971

K.R.S.

* N.T. O autor refere-se à edição americana.

CAPÍTULO 1

ELEMENTOS DE MECÂNICA NEWTONIANA

1.1 MECÂNICA, UMA CIÊNCIA EXATA

Quando se afirma que a Física é uma ciência exata, o que se quer dizer é que suas leis, uma vez expressas em forma de equações matemáticas, descrevem e predizem os resultados de medidas quantitativas precisas. A vantagem de uma teoria física quantitativa não é apenas ser prática, mas dar aos cientistas o poder de prever com precisão e de controlar o fenômeno natural. Comparando-se os resultados de uma medida precisa com as previsões numéricas da teoria, pode-se confiar em sua correção, podendo-se também determinar os aspectos que precisam ser modificados. É, muitas vezes, possível explicar, grosseiramente, um dado fenômeno de várias maneiras qualitativas e, uma vez satisfeitos, pode ser impossível decidir sobre a teoria correta, mas, quando a teoria dada pode prever com certeza o resultado de medidas com até quatro ou cinco (ou mesmo dois ou três) algarismos significativos, imagina-se logo que não deverá estar muito errada. Concordância grosseira pode significar coincidência, mas muito próxima certamente não. Existiram, no entanto, muitos casos na história da Ciência que uma pequena, porém significante, discrepância entre teoria e medida exata levou ao desenvolvimento de novas e mais completas teorias. Estas pequenas discrepâncias não teriam nem mesmo sido detectadas se o pesquisador estivesse satisfeito com uma simples explanação qualitativa do fenômeno.

Os símbolos que aparecem nas equações que expressam as leis de uma ciência devem representar quantidades que podem ser expressas em termos numéricos. Logo, os conceitos em termos dos quais se desenvolve uma ciência devem ter um significado numérico preciso. Quando se dá uma definição (massa, por exemplo), deve-se fazê-lo de tal modo que ela especifique com exatidão como o valor da quantidade deve ser determinado em cada caso. Um comentário qualitativo sobre o significado pode ser útil, mas não é suficiente como definição. Na realidade, muitas vezes não se pode fornecer uma definição ideal e precisa de cada um dos conceitos relacionados a uma teoria de Física. No entanto, quando se escreve uma equação matemática, presume-se que os símbolos usados na equação tenham significados exatos, e, sendo assim, é preciso tornar as idéias tão claras e rigorosas quanto possível e reconhecer em que pontos há falta de precisão e clareza. Algumas vezes, um conceito novo pode ser definido em termos de outros conceitos cujos significados são conhecidos, mas nestes casos não há problema. Por exemplo,

$$\text{momento linear} = \text{massa} \times \text{velocidade}$$

fornecer uma definição perfeitamente precisa de "momento linear", caso sejam conhecidas as definições exatas de "massa" e "velocidade". Entretanto, este tipo de definição não funcionará para todos os termos da teoria; será necessário, então, partir de algum ponto, usando a definição de um conjunto de conceitos básicos ou de termos "primitivos", cujo significado se suponha ser conhecido. O primeiro conceito a ser introduzido numa teoria não pode ser definido como no exemplo acima, desde que não se tenha nada para colocar no lado direito da equação. O significado desses termos básicos deve ser esclarecido por meios que não envolvam a teoria que está sendo formulada. Pode-se, por exemplo, usar simplesmente os termos até que o seu significado se torne claro. Esta é a maneira como as crianças aprendem uma linguagem e, provavelmente, dentro de seus limites, os estudantes de Física aprendem da mesma maneira. É preciso definir toda a terminologia básica, estabelecendo o seu significado em termos de observações e experiências. Em particular, nomes designativos de quantidades mensuráveis, como força, massa etc., podem ser definidos especificando-se o processo operacional para medi-los. Uma corrente de pensamento sugere que todos os termos usados em Física devem ser definidos desta maneira, mas pode-se simplesmente estabelecer o significado desses termos básicos, por meio de indicação simples, deixando para mais tarde ser determinado precisamente pelas leis e postulados estabelecidos e pelas regras fornecidas para que o aluno possa interpretar os resultados teóricos em situações experimentais. Esta é a maneira mais conveniente e flexível e é por meio dela que as teorias da Física são usualmente estabelecidas. Ela tem a desvantagem de nunca permitir a certeza de que se atribuiu o significado preciso aos conceitos, mas a experiência decidirá não somente se as leis estão corretas, como também se os conceitos usados têm um significado exato. As teorias modernas sobre Relatividade e Quântica nasceram mais da dificuldade encontrada nos conceitos clássicos para explicar alguns fenômenos do que da falta de precisão nas leis clássicas.

Historicamente, a Mecânica foi o primeiro ramo da Física a ser desenvolvido como uma ciência exata. As leis das alavancas e dos fluidos em equilíbrio estático eram conhecidas pelos cientistas gregos já no século III a.C. O grande desenvolvimento da Física, nos últimos três séculos, começou quando Galileu e Newton descobriram as leis da Mecânica. Estas leis, segundo formulação de Isaac Newton, em meados do século XVII, e as leis da eletricidade e magnetismo, segundo James Clerk Maxwell, aproximadamente duzentos anos depois, são as duas teorias básicas da Física Clássica. A Física Relativística, que foi iniciada com o trabalho de Einstein, em 1905, e a Física Quântica, como fundamentada nos trabalhos de Heisenberg e Schrödinger, em 1925-1926, contribuíram para modificar e reformular a Mecânica e a Eletrodinâmica em termos de novos conceitos. Não obstante, a Física Moderna foi construída sobre os fundamentos estabelecidos pela Clássica, sendo preciso conhecer profundamente os princípios da Mecânica e da Eletrodinâmica Clássicas para estudar as Físicas Relativística e Quântica. Além do mais, na maioria das aplicações práticas da Mecânica, em vários ramos da Engenharia e da Astronomia, as leis da Mecânica Clássica são ainda válidas. Excetuando-se os casos em que os corpos viajam com velocidades próximas à da luz, ou quando há envolvimento de massas e distâncias muito grandes, a Mecânica Relativística fornece os mesmos resultados que a Clássica; dever-se-ia esperá-lo, porquanto

sabe-se por experiência que a Mecânica Clássica fornece o resultado correto nas aplicações ordinárias. Similarmente, a Mecânica Quântica deve e realmente concorda com a Clássica, exceto quando é aplicada a sistemas de tamanho molecular ou menores. Na realidade, um dos principais princípios usados como guia na formulação de novas teorias da Física é a imposição de que elas devam concordar com as teorias antigas quando aplicadas aos fenômenos para os quais as mais antigas fornecem o resultado correto.

A Mecânica é o estudo dos movimentos de corpos materiais. Pode ser dividida em três subdisciplinas: *Cinemática, Dinâmica e Estática*. Cinemática é o estudo e a descrição dos possíveis movimentos de corpos materiais. Dinâmica é o estudo das leis que determinam, entre todos os possíveis movimentos, aquele que ocorrerá realmente em cada caso específico. Em Dinâmica, introduz-se o conceito de força. O problema central da Dinâmica é determinar, para qualquer sistema físico, os movimentos que ocorrerão sob a ação de uma dada força. Estática é o estudo de forças e sistemas de forças, com referência particular aos que atuam sobre corpos em equilíbrio.

O estudo da Mecânica pode também ser subdividido de acordo com a espécie de sistema a ser estudado. Esta é, de modo geral, a base deste livro. O sistema físico mais simples, o que será estudado primeiro, é a partícula, passando-se depois para o movimento de um sistema de partículas. Corpos rígidos podem ser considerados como um tipo especial de sistema de partículas. Finalmente, estudar-se-á o movimento de meios contínuos, substâncias plásticas e elásticas, sólidos, líquidos e gases.

Grande número de aplicações da Mecânica Clássica baseia-se diretamente nas leis do movimento, de Newton. Todos os problemas estudados neste livro, exceto os dos Caps. 9 a 14, são tratados desta maneira. Entretanto, existem outras maneiras de formular os princípios da Mecânica Clássica, por exemplo, as equações de Lagrange e de Hamilton. Elas não são teorias novas, pois derivam-se das leis de Newton, mas são formas diferentes de expressar a mesma teoria, por meio de conceitos matemáticos mais avançados. Em muitos aspectos, são mais elegantes do que a formulação newtoniana, e, em alguns casos, mais poderosas, porque permitem uma solução de alguns problemas que, se baseada diretamente nas leis de Newton, seria muito difícil. Quanto maior o número de maneiras conhecidas para formular uma teoria de Física, melhores serão as oportunidades de aprender a modificá-las, a fim de explicar fenômenos novos, à medida que são descobertos. Esta é uma das principais razões para justificar a importância de formulações mais avançadas em Mecânica: elas são os pontos de partida para se chegar às teorias mais recentes da Relatividade e da Quântica.

1.2 CINEMÁTICA, A DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

Mecânica é a ciência que estuda o movimento de corpos físicos. Inicialmente deve-se descrever movimentos, e o mais fácil para isso é o de uma *partícula*, isto é, um objeto cujo tamanho e estrutura interna sejam desprezíveis para o problema em que se está interessado. A Terra, por exemplo, pode ser olhada como uma partícula, na maioria dos problemas sobre movimento planetário, mas certamente não poderá sê-lo no caso de problemas terrestres. Pode-se descrever a posição de uma partícula especificando um ponto no espaço, desde que se conheçam três coordenadas (usualmente utili-

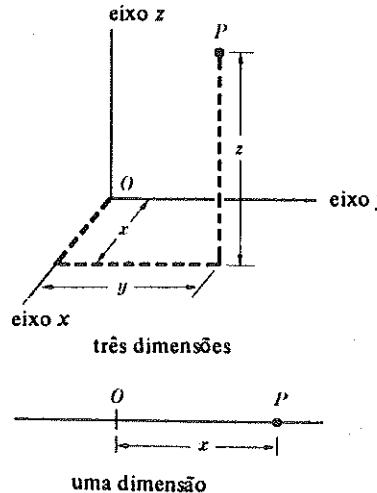


Fig. 1.1 Coordenadas retangulares, especificando a posição de uma partícula P relativa à origem O .

zam-se retangulares), mas no caso de partículas que se movem ao longo de uma linha reta (Cap. 2) apenas uma coordenada é necessária. Para descrever o movimento de uma partícula, especificam-se as coordenadas como função do tempo:

$$\begin{aligned} \text{uma dimensão: } & x(t), \\ \text{três dimensões: } & x(t), y(t), z(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

O problema básico de Mecânica Clássica é encontrar maneiras para determinar funções como estas, capazes de especificar a posição de objetos em função do tempo, para qualquer situação mecânica. O significado da função $x(t)$ está contido nas regras que ensinam a medir a coordenada x de uma partícula no tempo t . Admitindo-se como conhecido o significado de $x(t)$, ou, pelo menos, que ela tenha um (esta suposição, que se faz em Mecânica Clássica, não é correta de acordo com a Mecânica Quântica), pode-se definir o componente- x da velocidade, v_x , no tempo t como¹

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad (1.2)$$

e, similarmente

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

¹ A derivada será representada em relação ao tempo por d/dt ou por um ponto. Ambas as notações são dadas na Eq. (1.2).

Para definir os componentes da aceleração a_x, a_y, a_z como as derivadas dos componentes da velocidade em relação ao tempo (listam-se várias notações equivalentes que podem ser usadas):

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y &= \ddot{v}_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \ddot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para muitos propósitos, alguns outros sistemas de coordenadas podem ser mais convenientes para se especificar a posição de uma partícula. Quando se usam outros sistemas de coordenadas, deve-se procurar obter as fórmulas apropriadas para os componentes da velocidade e da aceleração. Coordenadas polares, esféricas, cilíndricas e polares planas são discutidas no Cap. 3. Nos problemas em que se usam três dimensões, o conceito de vetor é muito útil para a representação de posições, velocidades e acelerações. O desenvolvimento sistemático de Álgebra Vetorial é dado na Seç. 3.1.

Para descrever um sistema de partículas, especificam-se as coordenadas de cada uma delas em qualquer sistema de coordenadas conveniente, ou introduzem-se outros tipos de coordenadas, como, por exemplo, as do centro de massa, ou a distância entre duas partículas. Se estas formarem um corpo rígido, as três coordenadas do seu centro de massa e três coordenadas angulares, indicadoras da orientação no espaço, são suficientes para especificar sua posição. Para descrever o movimento de matéria contínua, como, por exemplo, um fluido, especifica-se a densidade $\rho(x, y, z, t)$ em qualquer ponto (x, y, z) no espaço, em qualquer instante t no tempo, e o vetor velocidade $v(x, y, z, t)$ com a qual a matéria no ponto (x, y, z) se move no instante t . Artifícios apropriados para descrever o movimento de um sistema físico são introduzidos de acordo com a necessidade.

1.3 DINÂMICA. MASSA E FORÇA

A experiência leva à crença de que os movimentos de corpos físicos são controlados pelas interações existentes entre eles e suas vizinhanças. Observando-se o comportamento de projéteis e de objetos que deslizam sobre uma superfície lisa e bem lubrificada, tem-se a idéia de que as variações de velocidade do corpo são produzidas por sua interação com a vizinhança. A velocidade de um corpo isolado de qualquer interação é constante, logo, na formulação das leis da Dinâmica, deve-se focalizar a atenção nas acelerações.

Imagine-se dois corpos interagindo entre si e isolados da vizinhança. Como analogia grosseira desta situação, imagine duas crianças, não necessariamente do mesmo tamanho, brincando de cabo-de-guerra com uma vara rígida sobre gelo liso.

Embora nenhum dos dois corpos possa ser realmente isolado completamente das interações com os outros corpos, esta é a situação mais simples para se pensar a respeito e capaz de se descrever por meio de leis matemáticas mais simples. Experiências cuidadosas realizadas com corpos reais levam a conclusões idênticas às que seriam obtidas caso se pudesse conseguir o isolamento ideal dos dois corpos. Deve-se observar que dois corpos estão sempre acelerados em direções opostas, e que a razão de suas acelerações é constante para qualquer par particular de corpos, não importando a força com que eles possam puxar ou empurrar um ao outro. Medindo-se as coordenadas x_1 e x_2 dos dois corpos, ao longo da linha de suas acelerações, obtém-se o seguinte resultado

$$\ddot{x}_1/\ddot{x}_2 = -k_{12}, \quad (1.4)$$

onde k_{12} é uma constante positiva característica dos dois corpos em questão. O sinal negativo expressa o fato de que as acelerações são em sentidos opostos.

Em adição ao que foi dito, em geral, quanto maior ou mais pesado ou mais massivo for o corpo, menor será a sua aceleração. Na realidade, a razão k_{12} é proporcional à razão do peso do corpo 2 pelo peso do corpo 1. A aceleração de dois corpos que interagem é inversamente proporcional a seus pesos. Este resultado, portanto, sugere a possibilidade de uma definição da Dinâmica, a da *massa* do corpo, em termos de suas acelerações mútuas. Escolhendo-se um corpo-padrão como unidade de massa, a massa de qualquer outro corpo é definida como a razão entre a aceleração da unidade de massa e a aceleração do outro corpo, quando os dois estão interagindo:

$$m_i = k_{1i} = -\dot{x}_1/\ddot{x}_i, \quad (1.5)$$

onde m_i é a massa do corpo i e o corpo 1 é o padrão de unidade de massa.

Para que a Eq. (1.5) se torne uma definição útil, a razão k_{12} das acelerações dos dois corpos deve satisfazer algumas condições. Considerando-se a massa definida pela Eq. (1.5) como sendo a medida daquilo que se chama vagamente de quantidade de matéria em um corpo, então a massa do corpo deve ser a soma das massas de suas partes, e este é o caso dentro de um elevado grau de precisão. Não é essencial, para terem utilidade em teorias científicas, que os conceitos da Física, para os quais são apresentadas definições precisas, correspondam aproximadamente a qualquer idéia preestabelecida. Entretanto, a maioria desses conceitos originou-se mais ou menos de idéias comuns, e massa é um bom exemplo. Mais tarde, quando se estudar a Teoria da Relatividade, ver-se-á que o conceito de massa será um pouco modificado, e que não é exatamente verdade que a massa de um corpo seja a soma das massas de suas partes.

Um requisito certamente essencial é que o conceito de massa seja independente do corpo particular que foi escolhido como tendo massa unitária, o que significa que a razão de duas massas será a mesma, não importando a unidade de massa escolhida. Será verdade por causa da seguinte relação, obtida experimentalmente, entre a razão de acelerações mútuas definidas pela Eq. (1.4) de três corpos quaisquer:

$$k_{12}k_{23}k_{31} = 1. \quad (1.6)$$

Suponha que o corpo 1 seja a massa unitária. Então, se os corpos 2 e 3 interagirem, encontrar-se-á, usando as Eqs. (1.4), (1.6) e (1.5):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2/\ddot{x}_3 &= -k_{23} \\ &= -1/(k_{12}k_{31}) \\ &= -k_{13}/k_{12} \\ &= -m_3/m_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

O resultado final não contém referência explícita ao corpo 1, que foi considerado ser a massa unitária padrão. Logo, a razão das massas de dois corpos quaisquer é o inverso negativo da razão de suas acelerações mútuas, independente da unidade de massa escolhida.

Pela Eq. (1.7), tem-se, para dois corpos que interagem,

$$m_2\ddot{x}_2 = -m_1\ddot{x}_1. \quad (1.8)$$

Este resultado sugere que a grandeza (*massa x aceleração*) será importante. Esta grandeza é chamada a *força* atuante sobre um corpo. A aceleração de um corpo no espaço tem três componentes; os três componentes da força atuante sobre o corpo são

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}. \quad (1.9)$$

Estas forças são de várias espécies: elétrica, magnética, gravitacional etc. e dependem do comportamento de outros corpos. Em geral, forças devidas a várias origens agem sobre um dado corpo, sendo possível mostrar que a força total dada pelas Eqs. (1.9) é um vetor soma das que podem estar presentes, caso cada origem seja considerada separadamente.

A teoria do Eletromagnetismo preocupa-se com o problema de determinação de forças elétricas e magnéticas exercidas por cargas e correntes elétricas uma sobre as outras. A teoria da gravitação, com o problema da determinação de forças gravitacionais exercidas pelas massas uma sobre as outras. O problema fundamental da Mecânica é determinar o movimento de qualquer sistema mecânico, caso se conheçam as forças que atuam sobre os corpos que constituem o sistema.

1.4 AS LEIS DO MOVIMENTO, DE NEWTON

Isaac Newton foi o primeiro a formular de maneira completa as três leis da Mecânica, enunciando-as como segue.²

². Isaac Newton, *Mathematical principles of natural philosophy and his system of the world*, trad. por Cajori (p. 13), Berkeley: University of California Press, 1934.

1. Todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha reta, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças aplicadas sobre ele.
2. A taxa de variação de momento linear é proporcional à força aplicada, e na direção em que a força age.
3. Para cada ação existe sempre uma reação igual e oposta.

Na segunda lei, momento linear é definido como o produto da massa pela velocidade da partícula. Momento linear, para o qual usaremos o símbolo p , tem três componentes, definidos ao longo dos eixos x , y e z pelas seguintes equações:

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z. \quad (1.10)$$

As duas primeiras leis, juntamente com a definição de momento linear, Eqs. (1.10), e o fato de que a massa permanece constante pela Eq. (1.4)³ são equivalentes às Eqs. (1.9), que as expressam em forma matemática. A terceira lei estabelece que quando há interação entre dois corpos, a força exercida sobre o corpo 1 pelo corpo 2 é igual e em direção oposta à força exercida sobre o corpo 2 pelo corpo 1. Estas leis expressam o fato experimental dado pela Eq. (1.4), e podem ser derivadas facilmente da Eq. (1.4) e das Eqs. (1.5) e (1.9).

A posição das duas primeiras leis de Newton, ou das Eqs. (1.9), é freqüentemente assunto de discussão, podendo-se considerar as Eqs. (1.9) como a definição de força em termos da massa e da aceleração. Neste caso, as duas primeiras leis de Newton não são como tal consideradas, mas meras definições de um novo conceito a ser introduzido na teoria. As leis da Física são, então, a da gravitação, o eletromagnetismo etc., as que nos dizem quais são as forças, em qualquer situação particular. A descoberta de Newton não se refere ao fato de a força ser igual à massa vezes a aceleração, pois isto é apenas uma definição de "força". Newton descobriu que as leis da Física podem ser expressas mais facilmente em termos do conceito de força definido desta maneira. A terceira lei de Newton, no entanto, é uma verdadeira lei da Física, pois expressa os resultados experimentais dados pela Eq. (1.4) em termos do conceito de força. Este ponto de vista sobre as duas primeiras leis newtonianas é conveniente para muitos propósitos, sendo, por isso, adotado freqüentemente. Sua desvantagem principal é que as Eqs. (1.9) só definem a ação da força total sobre um corpo, quando freqüentemente é preciso falar da força total como um (vetor) soma de forças componentes de várias espécies e devido a várias origens. A ciência da Estática, por lidar com forças que atuam sobre estruturas em repouso, tornar-se-ia ininteligível caso se tomassem as Eqs. (1.9) como definição de força, porque para as estruturas em repouso as acelerações são iguais a zero.

³ Pela Teoria da Relatividade, a massa de um corpo não é constante, dependendo da sua velocidade. Neste caso, a lei (2) e as Eqs. (1.9) não são equivalentes, e a lei (2) torna-se a formulação correta. Nesse caso, a força deve ser igualada à taxa de variação do momento linear. De acordo com a Teoria da Relatividade, a definição simples de massa (1.5) não é correta, a não ser que as partículas que estão sendo aceleradas movam-se em baixa velocidade.

As leis do eletromagnetismo, da gravitação etc. podem ser consideradas, juntamente com a regra do paralelogramo para a adição de vetores, como definição de "força" e, nesse caso, as Eqs. (1.9) tornam-se as leis associadas a grandezas já definidas. Este procedimento tem uma desvantagem: é que a definição de força muda quando se descobre uma nova espécie (por exemplo, a força nuclear), ou quando se operam alterações no eletromagnetismo ou na gravitação. Provavelmente o melhor plano, pelo menos o mais flexível, é considerar a força como um conceito básico da teoria, talvez definida operacionalmente em relação a medidas com uma balança de molas. As leis de Newton são leis, da mesma maneira que o são as leis das teorias de forças especiais, tais como gravitação e eletromagnetismo.

Fora da questão da definição de força, existem outras dificuldades na Mecânica, como Newton a formulou. A terceira lei nem sempre é verdadeira. Ela falha quando se refere a forças eletromagnéticas, por exemplo, ou quando fala da interação de corpos muito separados ou rapidamente acelerados. Na realidade, apresenta falhas no caso de qualquer força de interação que se propague de um corpo para outro com velocidade finita. Afortunadamente, a maior parte do desenvolvimento deste livro baseia-se nas duas primeiras leis, e sempre que for preciso usar a terceira lei, ela será explicitamente identificada e os resultados obtidos serão válidos apenas em relação à validade da terceira lei.

Outra dificuldade é que os conceitos da Mecânica Newtoniana não são perfeitamente claros e precisos, como na realidade nenhum conceito pode ser em relação a qualquer teoria, embora se tenha de desenvolver a teoria como se eles o fossem. Um exemplo marcante é o fato de não se fazer especificação alguma sobre o sistema de coordenadas, em relação ao qual as acelerações mencionadas nas duas primeiras leis devem ser medidas. O próprio Newton reconheceu esta dificuldade, mas não encontrou nenhuma maneira satisfatória de especificar corretamente o sistema de coordenadas a ser usado. Talvez a melhor maneira de formular estas leis seja dizendo que existe um sistema de coordenadas em relação ao qual elas são válidas, deixando para os experimentadores a determinação do sistema de coordenadas correto. Sendo possível demonstrar a validade destas leis num sistema de coordenadas, mostra-se que elas são válidas em qualquer outro sistema de coordenadas com movimento retilíneo uniforme em relação ao primeiro. Este é o chamado Princípio da Relatividade Newtoniana, que será demonstrado na Seç. 7.1, embora o leitor não deva encontrar dificuldades em demonstrá-lo por si próprio.

Há duas suposições levantadas na Física Clássica – a de que o comportamento dos instrumentos de medidas não é afetado pelo estado de movimento, desde que eles não sejam acelerados rapidamente, e a de que é possível, pelo menos em princípio, obter instrumentos capazes de medir qualquer grandeza com uma aproximação tão pequena quanto se queira – que falham em casos extremos. A primeira, quando se refere a velocidades muito grandes, e a segunda, quando se deseja medir grandezas muito pequenas. Os defeitos destas suposições formam a base da Teoria da Relatividade e da Teoria da Mecânica Quântica, respectivamente. No entanto, no caso de vários fenômenos, a Mecânica Newtoniana é correta com um alto grau de precisão, constituindo o ponto de partida para as teorias modernas. Não somente as leis como também os conceitos da

Física Clássica devem ser modificados de acordo com as teorias modernas. Entretanto, o entendimento dos conceitos modernos será facilitado caso se compreenda com clareza os conceitos clássicos. Evidenciam-se estas dificuldades aqui para que o leitor possa estar preparado para aceitar as modificações que, certamente, serão introduzidas na teoria. Isto não quer dizer que Newton (ou mesmo o leitor, neste estágio) deva ter-se preocupado com este assunto antes de enunciar as leis do movimento, pois se agisse assim, provavelmente nunca teria desenvolvido uma teoria. É necessário fazer qualquer suposição que pareça razoável para iniciar uma teoria. Que suposições devam ser alteradas, quando, ou de que maneira só podem ser determinadas posteriormente pelos sucessos e fracassos obtidos na previsão de resultados experimentais.

1.5 GRAVITAÇÃO

Embora haja sugestões anteriores a respeito do movimento dos planetas e corpos em queda livre sobre a Terra se deverem a uma propriedade dos corpos físicos, pela qual eles se atraem mutuamente, o primeiro a formular uma teoria matemática deste fenômeno foi Isaac Newton. Ele mostrou, por métodos que serão considerados posteriormente, que o movimento dos planetas poderia ser explicado pela suposição de que a cada par de corpos associa-se uma força de atração proporcional a suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância existente entre eles. Simbolicamente,

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (1.11)$$

onde m_1, m_2 são as massas dos dois corpos envolvidos, r é a distância entre eles e G é uma constante universal, cujo valor, de acordo com a experiência, é⁴

$$G = (6,670 \pm 0,005) \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{g}^{-1}. \quad (1.12)$$

Para um corpo esfericamente simétrico, será mostrado posteriormente (Seç. 6.2) que a força pode ser calculada como se toda a massa do corpo estivesse concentrada no centro. Em casos de corpos de pequenas dimensões e massa m , na superfície da Terra, a força de gravitação é então

$$F = mg, \quad (1.13)$$

onde

$$g = \frac{GM}{R^2} = 980,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (1.14)$$

sendo M a massa da Terra e R o seu raio. A quantidade g tem as dimensões de uma aceleração, podendo-se demonstrar imediatamente a partir das Eqs. (1.9) e (1.13) que

⁴ Smithsonian physical tables, 9. ed., 1954.

qualquer corpo em queda livre, na superfície da Terra, é acelerado para baixo, sofrendo uma aceleração g .

O fato de a força gravitacional que age sobre o corpo ser proporcional à sua massa, ao invés de qualquer outra constante característica do corpo (ex., sua carga elétrica), é mais ou menos acidental, do ponto de vista da teoria newtoniana. Este fato é fundamental na Teoria da Relatividade Geral. A proporcionalidade entre força gravitacional e massa é provavelmente a razão da Teoria da Gravitação ser comumente considerada como um ramo da Mecânica, enquanto as teorias que envolvem outras forças não o são.

A Eq. (1.13) fornece uma maneira mais prática e conveniente de medir massa do que a sugerida na definição original (1.5). É possível medir a massa de um corpo usando-se a força gravitacional que atua sobre ele, como, por exemplo, utilizando uma balança de mola, ou comparando a força gravitacional sobre o corpo com a força sobre uma massa-padrão, como, por exemplo, com o auxílio de uma balança de pratos ou de braços; em outras palavras, pesando o corpo.

1.6 UNIDADES E DIMENSÕES

Ao estabelecer um sistema de unidades, em termos do qual se exprimem as medidas usadas na Física, escolhem-se, primeira e arbitrariamente, padrões unitários para um determinado conjunto de grandezas físicas fundamentais (ex., massa, comprimento e tempo). Definem-se, então, outras unidades derivadas, em relação às unidades fundamentais (ex., a unidade de velocidade é uma unidade de comprimento dividida por uma unidade de tempo). Usualmente, em Mecânica, escolhem-se como unidades fundamentais a massa, o comprimento e o tempo, embora não exista nada sagrado nesta seleção. Poder-se-ia escolher igualmente outras três grandezas, ou mesmo maior ou menor número de grandezas fundamentais.

Existem três sistemas de unidades usados comumente, o centímetro-grama-segundo ou sistema CGS, o metro-quilograma-segundo ou sistema internacional ou SI⁵ e o pé-libra-segundo ou sistema inglês. Unidades para outras espécies de grandezas físicas são obtidas das suas equações de definição, substituindo as unidades para as grandezas fundamentais que aparecem, como, por exemplo, a velocidade, dada pela Eq. (1.2),

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

é definida como a distância dividida pelo tempo. Logo, as unidades de velocidade são cm/s, m/s e pé/s, nos sistemas mencionados acima, respectivamente.

⁵ No sistema internacional, existe uma quarta unidade fundamental, o coulomb, para carga elétrica, que entra na definição das unidades elétricas. As unidades elétricas no sistema CGS são todas definidas em termos de centímetro, grama e segundo. As unidades elétricas do sistema inglês não têm utilização prática.

Similarmente, o leitor pode mostrar que as unidades de força, nos três sistemas, a partir das Eqs. (1.9), são $\text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$, $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^{-2}$. Estas unidades têm os seguintes nomes especiais: *dina*, *newton* e *poundal*, respectivamente. As unidades gravitacionais de força algumas vezes são definidas em substituição às Eqs. (1.9) pelas equações

$$F_x = m\ddot{x}/g, \quad F_y = m\ddot{y}/g, \quad F_z = m\ddot{z}/g, \quad (1.15)$$

onde $g = 980,2\text{cm}\cdot\text{s}^{-2} = 9,802\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 32,16\text{ft}\cdot\text{s}^{-2}$ é a aceleração da gravidade padrão na superfície terrestre. A unidade de força é, então, definida como a força exercida pelo campo gravitacional padrão sobre a unidade de massa. Os nomes dados às unidades gravitacionais de forças, nos três sistemas, são grama-peso, quilograma-peso e libra-peso, respectivamente. Neste livro, a lei fundamental da Mecânica é apresentada na forma das Eqs. (1.9), ao invés da Eq. (1.15), usando-se, então, as unidades *absolutas*, e não as unidades gravitacionais, para força.

O problema das unidades aparecerá raramente, porque quase todos os exemplos serão resolvidos em forma algébrica. O Autor admite que o leitor esteja suficientemente familiarizado com as unidades das medidas e a sua manipulação para ser capaz de resolver os exemplos numéricos em qualquer sistema de unidades em que o problema for apresentado.

Em qualquer equação da Física, as dimensões ou unidades de quaisquer termos que estejam sendo somados em ambos os membros de uma equação devem concordar, quando reduzidos às unidades fundamentais. Como exemplo, pode-se verificar se as dimensões da constante gravitacional, na Eq. (1.11), estão corretas no valor apresentado na Eq. (1.12):

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (1.11)$$

Substituindo, para cada grandeza, as unidades em que elas são expressadas:

$$(\text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}) = \frac{(\text{cm}^3\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{g}^{-1})(\text{g})(\text{g})}{(\text{cm}^2)} = (\text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}). \quad (1.16)$$

A verificação não depende do sistema de unidades escolhido, contanto que se usem unidades absolutas de força, podendo-se verificar as dimensões sem qualquer referência às unidades, por meio de símbolos l , m , t para comprimento, massa e tempo:

$$(mlt^{-2}) = \frac{(l^3t^{-2}m^{-1})(m)(m)}{(l^2)} = (mlt^{-2}) \quad (1.17)$$

Quando se introduzem fatores constantes como G em qualquer equação, é sempre possível escolher as dimensões de modo que haja concordância entre ambos os membros. Se, porém, não houver concordância, é porque a equação está errada, o que não quer dizer que, se as unidades concordarem, a equação esteja correta. Entretanto, a verifi-

cação das dimensões do resultado revelará a maioria dos erros algébricos. O leitor deve, portanto, adquirir o hábito de verificar mentalmente as dimensões de suas fórmulas a cada passo da derivação. Quando se introduzem constantes no problema, as dimensões devem ser as da primeira equação em que elas aparecem, e usadas para verificar os passos subsequentes.

1.7 ALGUNS PROBLEMAS ELEMENTARES DE MECÂNICA

Antes de começar a desenvolver a Mecânica de modo sistemático, com base nas leis introduzidas neste capítulo, é preciso rever alguns problemas de Mecânica Elementar com o objetivo de fixar claramente estas leis.

Um dos problemas mais simples é o que se refere ao movimento de um corpo que se move em linha reta, sendo submetido à ação de uma força constante. Se a massa do corpo for m e a força F , tem-se, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$F = ma. \quad (1.18)$$

Logo, a aceleração será constante:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}. \quad (1.19)$$

Multiplicando-se a Eq. (1.19) por dt , obtém-se uma expressão para a variação de velocidade dv durante o período curto de tempo dt :

$$dv = \frac{F}{m} dt. \quad (1.20)$$

Integrando esta equação, vê-se que a variação total da velocidade durante o intervalo de tempo t é:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t \frac{F}{m} dt, \quad (1.21)$$

$$v - v_0 = \frac{F}{m} t, \quad (1.22)$$

onde v_0 é a velocidade em $t = 0$. Se x for a distância do corpo a uma origem fixa, medida ao longo da linha em que ele se desloca, então

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F}{m} t. \quad (1.23)$$

Multiplicando-se outra vez por dt e integrando para determinar x , tem-se:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt, \quad (1.24)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2, \quad (1.25)$$

Onde x_0 representa a posição do corpo em $t = 0$, obtendo-se, assim, a descrição completa do movimento. Das Eqs. (1.25) e (1.22), pode-se calcular a velocidade do corpo em qualquer tempo t , assim como a distância em que ele se deslocou. Um corpo em queda livre próximo à superfície terrestre sofre a ação de uma força constante dada pela Eq. (1.13), e por nenhuma outra força, considerando-se que a resistência do ar é desprezível. Neste caso, sendo x a altura do corpo em relação a um ponto de referência, tem-se

$$F = -mg. \quad (1.26)$$

O sinal negativo aparece porque a força é dirigida para baixo e a direção positiva de x é para cima. Substituindo nas Eqs. (1.19), (1.22) e (1.25), obtém-se as seguintes equações familiares:

$$a = -g. \quad (1.27)$$

$$v = v_0 - gt, \quad (1.28)$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.29)$$

Ao se aplicar as leis do movimento de Newton, Eq. (1.18), é essencial decidir, em primeiro lugar, em que corpo deve ser aplicada, introduzir a massa m do corpo e a força total F que age sobre ele. A falta de atenção a este aspecto, aparentemente óbvio, é a origem de muitas dificuldades, e pode ser ilustrado pelo dilema do cavalo e da carroça. Um cavalo puxa a carroça, mas de acordo com a terceira lei de Newton a carroça puxa o cavalo com uma força igual e de sentido contrário. Então, como ambos, o cavalo e a carroça, conseguem mover-se? O leitor, que deve ser capaz de resolver o Probl. 6, no final deste capítulo, não terá dificuldades para responder a esta questão.

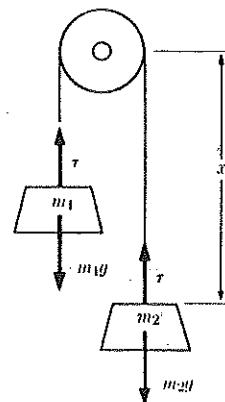


Fig. 1.2 Máquina de Atwood.

Considere o movimento do sistema ilustrado na Fig. 1.2. Duas massas, m_1 e m_2 , estão penduradas nas extremidades de uma corda que passa por uma roldana, supondo-se que m_2 seja maior do que m_1 . Tome-se x como a distância da massa m_2 até a roldana. Como o comprimento da corda é constante, a coordenada x fixa a posição de ambas as massas m_1 e m_2 . Ambas se movem com a mesma velocidade

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (1.30)$$

sendo a velocidade positiva quando m_1 se move para cima e m_2 , para baixo. Desprezando-se o atrito e a resistência do ar, as forças atuantes sobre m_1 e m_2 são

$$F_1 = -m_1g + \tau, \quad (1.31)$$

$$F_2 = m_2g - \tau, \quad (1.32)$$

onde τ é a tensão na corda. As forças são consideradas positivas quando sua tendência é produzir a velocidade dx/dt positiva. Note que os termos relativos a τ nestas equações satisfazem a terceira lei de Newton. As equações do movimento das duas massas são

$$-m_1g + \tau = m_1a, \quad (1.33)$$

$$m_2g - \tau = m_2a, \quad (1.34)$$

onde a é a aceleração dv/dt , e é a mesma para as duas massas. Somando as Eqs. (1.33) e (1.34), é possível eliminar τ e determinar a aceleração:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g. \quad (1.35)$$

A aceleração é constante e a velocidade v e a posição x podem ser determinadas para qualquer tempo t , como no exemplo anterior. Pode-se substituir a da Eq. (1.35) na Eq. (1.33) ou (1.34) e determinar a tensão:

$$\tau = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (1.36)$$

Como verificação, observe-se que se $m_1 = m_2$, então $a = 0$ e

$$\tau = m_1g = m_2g, \quad (1.37)$$

Como se deveria esperar, as massas estão em equilíbrio estático. É interessante notar ainda que se $m_2 \gg m_1$, então

$$a \approx g, \quad (1.38)$$

$$\tau \approx 2m_1g. \quad (1.39)$$

O leitor deve convencer-se que estes dois resultados deveriam ser esperados, neste caso:

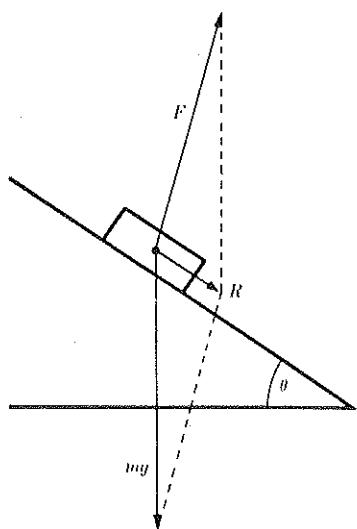


Fig. 1.3 Forças em ação sobre um bloco que desliza para baixo num plano inclinado.

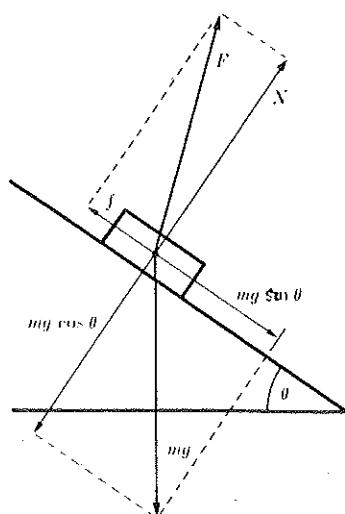


Fig. 1.4 Decomposição das forças em componentes paralelos e perpendiculares ao plano inclinado.

Quando várias forças agem sobre um corpo, sua aceleração é determinada pelo vetor soma dessas forças componentes. Reciprocamente, qualquer força pode ser decomposta de maneira conveniente em componentes vetoriais, cujo vetor soma é a força considerada. Estas componentes podem ser tratadas como forças separadas em ação sobre o corpo.⁶ Como exemplo, considere-se um bloco de massa m deslizando para baixo num plano inclinado, como o mostrado na Fig. 1.3. As duas forças que agem sobre o bloco são o peso mg e a força F com a qual o plano age sobre o bloco. Estas forças devem ser somadas de acordo com a regra do paralelogramo para se obter a resultante R que age sobre o bloco:

$$R = ma. \quad (1.40)$$

Como o bloco é acelerado na direção da força resultante, é evidente que se o bloco descer o plano inclinado sem pular para fora ou penetrar no plano inclinado, a força resultante R deverá estar dirigida ao longo do plano inclinado. Para determinar R , decompõe-se cada uma das forças nos componentes paralelos e perpendiculares ao plano inclina-

⁶ Um desenvolvimento sistemático, a partir da Álgebra Vetorial, será apresentado no Cap. 3. É necessário conhecer a regra do paralelogramo para soma de vetores para entender a presente discussão.

do, como na Fig. 1.4. A força F exercida pelo plano sobre o bloco é mostrada na Fig. 1.4, decomposta em dois componentes: a força N normal ao plano e que impede o bloco de penetrar nele e a força f paralela ao plano e oposta ao movimento do bloco, oriunda do atrito entre o bloco e o plano. Somando os componentes paralelos, obtém-se

$$R = mg \sin \theta - f, \quad (1.41)$$

e

$$0 = N - mg \cos \theta. \quad (1.42)$$

Se a força de atrito f for proporcional à força normal N , o que geralmente é aproximadamente verdade, no caso de superfícies de deslizamento secas, então

$$f = \mu N = \mu mg \cos \theta, \quad (1.43)$$

onde μ é o coeficiente de atrito. Usando as Eqs. (1.43), (1.41) e (1.40), calcula-se a aceleração:

$$a = g (\sin \theta - \mu \cos \theta). \quad (1.44)$$

A velocidade e a posição podem agora ser determinadas como funções do tempo t , como no primeiro exemplo. A Eq. (1.44) é válida somente no caso de o bloco deslizar para baixo no plano inclinado. Quando ele desliza no sentido de subida, a força f opõe-se ao movimento, e o segundo termo na Eq. (1.44) é positivo. Isto só acontece se a velocidade inicial do bloco for no sentido de subida, no plano inclinado. Se o bloco estiver em repouso, a força de atrito f terá qualquer valor até o máximo de $\mu_s N$.

$$f \leq \mu_s N, \quad (1.45)$$

onde μ_s , o coeficiente de atrito estático, é geralmente maior do que μ . Neste caso R é igual a zero, e

$$f = mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta. \quad (1.46)$$

De acordo com a Eq. (1.46), o ângulo θ de inclinação não pode ser maior do que um valor limite θ_c , o ângulo crítico:

$$\tan \theta \leq \tan \theta_c = \mu_s. \quad (1.47)$$

Se θ for maior que θ_c , o bloco não permanecerá em repouso.

Quando um corpo se move em velocidade constante v sobre uma circunferência de raio r , sua aceleração aponta para o centro da circunferência, como será demonstrado no Cap. 3, e seu valor é

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (1.48)$$

Tais corpos devem estar sob a ação de forças constantes que apontam para o centro. Esta força centrípeta é dada por

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} \quad (1.49)$$

Note que mv^2/r não é uma "força centrífuga" apontando para fora do centro da circunferência, mas é o produto da massa pela aceleração e aponta para o centro da circunferência, como o faz a força centrípeta F . Como exemplo, a órbita da Lua é aproximadamente circular; supondo-se que a Terra esteja em repouso no seu centro, então, pela Eq. (1.11), a força que atua sobre a Lua será

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (1.50)$$

onde M é a massa da Terra e m é a massa da Lua. Expressa-se esta força em termos do raio R da Terra e da aceleração da gravidade g na superfície terrestre substituindo GM na Eq. (1.14):

$$F = \frac{mg R^2}{r^2}. \quad (1.51)$$

A velocidade v da Lua é

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (1.52)$$

onde T é o período de revolução. Substituindo as Eqs. (1.51) e (1.52) na Eq. (1.49), determina-se r :

$$r^3 = \frac{g R^2 T^2}{4\pi^2}. \quad (1.53)$$

Esta equação foi determinada pela primeira vez por Isaac Newton, que verificou sua validade para a gravitação da Lei do Inverso do Quadrado da Distância.⁷ Ela não é muito precisa, pois a órbita lunar não é perfeitamente circular, e porque a Terra não permanece em repouso no centro da órbita da Lua, mas oscila levemente devido à atração exercida por seu satélite. Pela terceira lei de Newton, esta força atrativa é também dada pela Eq. (1.51). Como a Terra é muito mais pesada do que a Lua, sua aceleração é muito menor, e a Eq. (1.53) não está muito errada. O tratamento exato deste problema é dado na Seç. 4.7. Outro erro pequeno refere-se ao fato de o valor de g , confor-

me determinado experimentalmente, incluir um efeito pequeno devido à rotação terrestre (ver Seç. 7.3). Se introduzirmos os valores medidos,

$$g = 980,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$R = 6368 \text{ km}$$

$$T = 27 \frac{1}{3} \text{ dias},$$

obteremos, da Eq. (1.53)

$$r = 383\,000 \text{ km}$$

A distância média da Lua à Terra, de acordo com medidas modernas, é

$$r = 385\,000 \text{ km}.$$

Os valores de r e R , conhecidos de Newton, não permitiriam obter esta boa aproximação.

PROBLEMAS

1. Calcule a força de atração gravitacional entre um elétron e um próton separados por uma distância de $0,5 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$). Compare com a força de atração eletrostática, cuja distância de separação seja a mesma.

2. O coeficiente de viscosidade η é definido pela equação

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{ds},$$

onde F é a força de atrito, que se manifesta numa área A num fluido em movimento, e dv é a diferença na velocidade paralela a A , entre duas camadas de fluido separadas por uma distância ds , sendo ds medido perpendicularmente a A . Determine as unidades nas quais a viscosidade η deve ser expressada nos sistemas pé-libra-segundo, CGS e SI. Determine os três fatores de conversão para transformar o coeficiente de viscosidade de um destes sistemas para outro.

3. Um fluido escoa por um tubo cilíndrico, de comprimento l e raio a . Uma diferença de pressão ΔP (força por unidade de área) produz um fluxo Φ (volume por segundo) para escoar através do tubo. Suponha que ΔP seja proporcional a l e depende, por outro lado, somente de Φ , do raio a do tubo e da viscosidade η , já definido no Probl. 2. Mostre, usando Análise Dimensional, que ΔP deve ser também proporcional a η e a Φ e inversamente proporcional a a^4 .

⁷ Isaac Newton, *op. cit.*, p. 407.

4. Um sistema de unidades freqüentemente usado por engenheiros mecânicos escolhe, além de pé e segundo, uma terceira unidade fundamental de força, a libra-peso (usualmente chamada somente libra). A unidade de massa é, então, uma unidade derivada, baseada na Eq. (1.9), chamada *slug*. Expressse o *slug* nas unidades fundamentais (pé, lb, s) e em libra no sistema pé-libra-segundo. Determine a constante gravitacional G no sistema pé-libra-peso-segundo.

5. Um motorista aproxima-se de um sinal de trânsito, que está verde, com velocidade v_0 , quando o sinal se torna amarelo.

a) Se a reação do motorista ocorrer no tempo τ , durante o qual ele decide parar e aplicar o pé no freio, e se a desaceleração máxima dos freios for a , qual a distância mínima S_{\min} antes de atingir o cruzamento, no momento em que a luz se torna amarela, que ele pode fazer com que o carro pare sem cruzá-la?

b) Se o sinal amarelo permanecer aceso durante um tempo t antes de tornar-se vermelho, qual a distância máxima S_{\max} , antes do cruzamento, no instante em que a luz amarela acende, de modo que ele possa atravessar o cruzamento com velocidade v_0 sem que o sinal vermelho acenda?

c) Mostre que no caso de a velocidade inicial ser maior do que

$$v_{0\max} = 2a(\tau - t),$$

existirá um intervalo de distâncias antes do cruzamento, de modo que o motorista não pare a tempo nem consiga cruzá-lo sem que o sinal vermelho acenda.

d) Faça uma estimativa razoável de τ , t e a e calcule $v_{0\max}$ em quilômetros por hora. Se $v_0 = \frac{2}{3} v_{0\max}$, calcule S_{\min} e S_{\max} .

6. Um menino de massa m puxa (horizontalmente) um trenó de massa M . O coeficiente de atrito entre o trenó e a neve é μ .

a) Desenhe um diagrama mostrando todas as forças que agem sobre o menino e sobre o trenó.

b) Determine os componentes horizontais e verticais de cada uma das forças no momento em que o menino e o trenó têm uma aceleração a .

c) Se o coeficiente de atrito estático entre os pés do garoto e o solo for μ_s , qual é a aceleração máxima que ele pode fornecer a ele próprio e ao trenó, supondo-se que a tração é o fator que limita a aceleração?

7. Um escovão de massa m é empurrado com uma força F dirigida ao longo do cabo, que faz um ângulo θ com a vertical. O coeficiente de atrito com o solo é μ .

a) Desenhe um diagrama mostrando todas as forças que agem sobre o escovão.

b) Para θ e μ dados, determine a força F necessária para que o escovão deslize com velocidade uniforme sobre o assoalho.

c) Mostre que sendo θ menor do que o ângulo crítico [conforme definido pela Eq. (1.47)], o movimento do escovão sobre o solo não poderá ser iniciado quando é empurrado pelo cabo. Despreze a massa do cabo do escovão.

8. Uma caixa de massa m desliza sobre uma mesa horizontal com coeficiente de atrito μ . A caixa está conectada por uma corda que passa por uma roldana a um corpo de massa M , pendurado ao lado da mesa. Determine a aceleração do sistema e a tensão na corda.

9. Ao bloco mostrado nas Figs. 1.3 e 1.4 é dada uma velocidade inicial v_0 , no sentido de subida de um plano inclinado. O ângulo θ é maior do que o ângulo crítico. Determine a distância em que o bloco se moverá, ao subir o plano inclinado, e o tempo necessário para que ele deslize para baixo de volta à sua posição original.

10. Uma curva, em uma auto-estrada, cujo raio de curvatura é r , é inclinada num ângulo θ com relação à horizontal. Se o coeficiente de atrito for μ_s , qual a velocidade máxima de um carro para percorrer-la sem derrapar?

11. Supondo-se que a Terra se move formando circunferência cujo raio seja igual a 150 000 000 km no período de revolução de um ano, determine a massa do Sol em toneladas.

12. a) Calcule a massa da Terra usando o valor de seu raio e os valores de g e G .

b) Procure as massas e as distâncias existentes entre o Sol, a Lua e a Terra e calcule a força de atração entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua. Compare os resultados obtidos, fazendo uma estimativa grosseira da razão entre essas duas forças, considerando que a primeira faz com que a órbita terrestre em torno do Sol seja de um ano, enquanto a segunda a faz girar numa pequena circunferência, aproximadamente em um mês, em torno de um centro de gravidade comum ao sistema Terra-Lua.

13. O Sol encontra-se aproximadamente a uma distância de 25 000 anos-luz do centro da galáxia e desloca-se em uma circunferência à velocidade de 300 km/s. Determine a massa aproximada da galáxia, supondo que a força gravitacional exercida sobre o Sol possa ser calculada considerando-se que toda a massa galáctica esteja concentrada em seu centro. Exprima o resultado como a razão entre a massa da galáxia e a massa solar. Não é necessário conhecer a constante G ou a massa do Sol para resolver este problema, se você comparar o período de revolução do Sol em torno do centro da galáxia com o período de revolução da Terra em torno do Sol.

14. Uma estrela de nêutrons é uma coleção dessas partículas ligadas por sua atração gravitacional mútua, com uma densidade comparável à de um núcleo atômico (aproximadamente 10^{12} g/cm^3). Suponha que a estrela de nêutrons seja uma esfera e mostre que a freqüência máxima com a qual ela pode girar, sem que a massa se desprenda do equador, é $f = (\rho G / 3\pi)^{1/2}$, onde ρ é a densidade. Calcule f para uma densidade de 10^{12} g/m^3 . Existe uma suposição de que os pulsares, que emitem uma certa quantidade de radiação com intervalos regulares e com uma taxa de repetição de até 30/s, são estrelas de nêutrons.

CAPÍTULO 2

MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL DE UMA PARTÍCULA

2.1 TEOREMA DO MOMENTO E DA ENERGIA

Neste capítulo, estuda-se o movimento de uma partícula de massa m ao longo de uma linha reta, considerada o eixo dos x , sob a ação de uma força F dirigida também ao longo do eixo dos x . A discussão aplica-se, como se verá adiante, a outros casos em que o movimento de um sistema mecânico depende apenas de uma coordenada, ou quando todas as coordenadas, com exceção de uma, podem ser eliminadas.

O movimento da partícula é governado, de acordo com as Eqs. (1.9), pela equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (2.1)$$

Antes de se considerar a solução da Eq. (2.1), é melhor definir alguns conceitos de grande utilidade na discussão de problemas da Mecânica, provando-se alguns teoremas gerais e simples sobre o movimento unidimensional. O momento linear p , de acordo com a Eq. (1.10), é definido como

$$p = mv = m \frac{dx}{dt}. \quad (2.2)$$

Da Eq. (2.1), usando-se a Eq. (2.2) e o fato de m ser constante, obtém-se o seguinte resultado:

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (2.3)$$

Esta equação estabelece que a taxa de variação do momento linear com o tempo é igual à força aplicada, o que, evidentemente, é a segunda lei de Newton. Este teorema pode ser chamado Teorema de Momento Linear (diferencial). Multiplicando-se a Eq. (2.3) por dt e integrando-se de t_1 a t_2 , obtém-se a forma integral do Teorema de Momento Linear:

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt. \quad (2.4)$$

A Eq. (2.4) fornece a variação do momento linear devido à ação da força F entre os tempos t_1 e t_2 . A integral da direita é chamada *impulso*, que é fornecido pela força F durante este tempo; F deve ser conhecida como função de t somente para que se possa calcular a integral. Se F for dada como $F(x, v, t)$, então o impulso pode ser calculado para qualquer movimento $x(t), v(t)$ particular.

Outra grandeza de considerável importância é a *energia cinética*, definida (em Mecânica Clássica) pela equação

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.5)$$

21

Multiplicando-se a Eq. (2.1) por v , obtém-se

$$mv \frac{dv}{dt} = Fv,$$

ou então:

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{dT}{dt} = Fv. \quad (2.6)$$

A Eq. (2.6) fornece a taxa de variação da energia cinética, podendo ser chamada Teorema da Energia (diferencial). Multiplicando-se por dt e integrando de t_1 a t_2 , obtém-se a forma integral do Teorema da Energia.

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fv dt. \quad (2.7)$$

A Eq. (2.7) fornece a variação de energia devido à ação da força F entre os tempos t_1 e t_2 . A integral à direita denomina-se *trabalho*, que é executado pela força durante este intervalo de tempo. O integrando Fv à direita é a taxa de execução de trabalho com o tempo, chamada *potência*, e é fornecida pela força F . Em geral, quando F é conhecida como $F(x, v, t)$, o trabalho pode ser calculado somente para um movimento particular $x(t), v(t)$ especificado. Como $v = dx/dt$, pode-se reescrever a integral do trabalho de forma conveniente, quando F é conhecida em função de x :

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F dx. \quad (2.8)$$

2.2 DISCUSSÃO DO PROBLEMA GERAL DO MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

Quando se conhece a força F , a equação de movimento (2.1) torna-se uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, para a função desconhecida $x(t)$. A força F pode ser conhecida como função de qualquer uma ou de todas as variáveis t, x e v .

Em relação a um dado movimento de um sistema dinâmico, todas as variáveis dinâmicas (x, v, F, p, T etc.) associadas ao sistema são, evidentemente, funções de t , isto é, cada uma tem um valor definido para cada tempo em particular. Em muitos casos, entretanto, uma variável dinâmica, tal como a força, pode guardar uma certa relação funcional com x , com v , ou com qualquer combinação de x, v e t . Como exemplo, a força gravitacional que age sobre um corpo em queda livre, de uma grande altura acima da Terra, é conhecida como função da altura acima da Terra. A força de atrito de arrastamento que atua sobre um corpo depende de sua velocidade e da densidade do ar, bem como da altura em que se encontra acima da Terra; se as condições atmosféricas mudarem, ela poderá depender ainda de t . Sendo F conhecida como $F(x, v, t)$, então, quando $x(t)$ e $v(t)$ também são conhecidas, estas funções podem ser substituídas para que F seja função apenas de t , embora, em geral, isto não possa ser realizado até que se resolva a Eq. (2.1). Mesmo assim, a função $F(t)$ pode ser diferente para diferentes movimentos possíveis da partícula. Em geral, quando F é dada como $F(x, v, t)$ (onde F pode depender de qualquer ou de todas essas variáveis), a Eq. (2.1) torna-se uma equação diferencial definida, que deve ser resolvida:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x, \dot{x}, t). \quad (2.9)$$

Esta é a forma mais geral de equação diferencial ordinária de segunda ordem, e este capítulo refere-se ao estudo de suas soluções e aplicações em problemas de Mecânica.

A Eq. (2.9) é aplicável a todos os problemas de uma partícula submetida à ação de uma força conhecida. Em geral, existem muitos movimentos possíveis, pois a Eq. (2.9) fornece somente a aceleração da partícula, em cada instante, em termos de sua posição e de sua velocidade naquele instante. Conhecida a posição e a velocidade de uma partícula em certo tempo, pode-se determinar sua posição após (ou anteriormente a) um pequeno intervalo de tempo. Conhecida a aceleração, pode-se determinar sua velocidade após um pequeno intervalo de tempo. A Eq. (2.9), então, fornece a aceleração após esse pequeno intervalo. Desta maneira, é possível seguir as posições e velocidades anteriores como as subsequentes de uma partícula, caso sua posição x_0 e velocidade v_0 sejam conhecidas em qualquer instante t_0 . t_0 denomina-se *instante inicial*, embora possa ser qualquer instante da história da partícula; os valores x_0 e v_0 em t_0 denominam-se *condições iniciais*. Ao invés de especificar os valores iniciais de x e v , especifica-se o valor de quaisquer outras duas grandezas a partir das quais x e v podem ser obtidas; por exemplo, é possível especificar x_0 e o momento linear inicial $p_0 = mv_0$. Estas condições iniciais, juntamente com a Eq. (2.9), representam um problema perfeitamente definido, cuja solução deve ser uma única função $x(t)$ representando o movimento de uma partícula sobre condições especificadas.

A teoria matemática das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem leva a resultados concordes com o que se espera da natureza do problema de Física que deu origem à equação. A teoria assegura que, ordinariamente, a solução de uma equação da forma (2.9) é contínua e única, $x(t)$, que assume os valores x_0 e v_0 de x e \dot{x} , em qualquer valor escolhido t_0 de t . "Ordinariamente", aqui, quer dizer até que ponto aqueles que começam a estudar Mecânica devem preocupar-se, "em todos os casos de

interesse".¹ As propriedades das equações diferenciais, como a (2.9), podem ser estudadas na maioria dos tratados sobre o assunto. Sabe-se que qualquer problema de Física deve ter sempre uma solução única e, portanto, qualquer força $F(x, \dot{x}, t)$ que apareça deverá satisfazer necessariamente à condição imposta para aqueles valores de x , \dot{x} e t que tenham interesse físico. Logo, em geral não é preciso saber se a solução existe ou não. No entanto, a maioria dos problemas de Mecânica envolve algumas simplificações da situação real, o que leva o aluno a simplificar demais ou mesmo a distorcer o problema físico de tal maneira que impede o problema matemático resultante de ter apenas uma solução. Em geral, os físicos, ao tratarem de Mecânica ou de outros ramos, tendem a ignorar as questões de rigor matemático. Naqueles casos, raros afortunadamente, em que encontram dificuldades, eles usam a intuição ou verificam a falta de rigor, até descobrirem a solução. Tal procedimento é capaz de causar tremores nos matemáticos, mas é a maneira mais conveniente e rápida de aplicar a Matemática à solução de problemas de Física. Os físicos, embora procedendo de maneira não rigorosa, devem estar a par do rigor com que os matemáticos aplicam esses métodos.

O teorema que gerou a Eq. (2.9) garante que existe uma solução matemática única para todos os casos que aparecerão na prática. Em alguns deles, a solução exata pode ser obtida através de métodos elementares. A maioria dos problemas considerados neste livro é desta natureza. Afortunadamente, muitos dos mais importantes problemas de Mecânica podem ser resolvidos sem dificuldade, por meios físicos. Na realidade, uma das razões por que certos problemas são considerados importantes é sua fácil resolução. Os físicos estão preocupados em descobrir e verificar as leis da Física. Ao verificá-las experimentalmente, eles podem, muitas vezes, escolher os casos em que a elaboração da análise matemática não é muito difícil. Já os engenheiros não são tão afortunados, porque os problemas com que deparam não são selecionados devido à facilidade, mas porque têm importância prática. Em Engenharia e também frequentemente em Física, aparecem muitos casos em que a solução da Eq. (2.9) é de obtenção difícil ou impossível. Em tais casos, existe um número variado de métodos para se obter pelo menos a resposta aproximada. Recomenda-se ao leitor recorrer a cursos ou livros que tratem de equações diferenciais para poder conhecer tais métodos.² Do ponto de vista da Mecânica Teórica, o importante é que a solução exista sempre e que possa ser obtida de modo tão preciso quanto se queira. Aqui, dar-se-á atenção a exemplos que possam ser resolvidos por métodos simples.

2.3 FORÇA APLICADA DEPENDENTE DO TEMPO

Se uma força F for dada como função do tempo, então é possível resolver a equação de movimento (2.9) da seguinte maneira: multiplicando-a por dt e integrando

¹ Para que a demonstração das condições para existência de uma solução da Eq. (2.9) seja rigorosa, consulte um livro sobre equações diferenciais, como, por exemplo: *An introduction to the theory of differential equations*, de W. Leighton. New York, McGraw-Hill, 1952. (Apêndice 1.)

² W. E. Milne, *Numerical calculus*. Princeton University Press, 1949 (Cap. 5). H. Levy e E. A. Baggott, *Numerical solutions of differential equations*. New York, Dover Publications, 1950.

desde um instante inicial t_0 até um instante t qualquer posterior (ou anterior), obtendo-se a Eq. (2.4) que, para o presente caso, é

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F(t) dt. \quad (2.10)$$

Como $F(t)$ é uma função conhecida de t , a integral à direita pode ser resolvida, pelo menos em princípio, e o segundo membro será então uma função de t (e de t_0). Pode-se escrever para v a seguinte solução:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt. \quad (2.11)$$

Multiplicando agora por dt e integrando novamente de t_0 a t :

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt. \quad (2.12)$$

Para evitar confusão, escreve-se a variável de integração como t' na primeira integral e como t'' na segunda:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t'} F(t') dt'. \quad (2.13)$$

Esta é a solução procurada $x(t)$, em termos de duas integrais, que podem ser calculadas quando se conhece $F(t)$. Uma integral definida pode ser sempre calculada; não sendo possível encontrar um resultado analítico explícito, calcula-se a integral por métodos numéricos, obtendo-se resultados tão precisos quanto se queira. Por esta razão, na discussão de problema como o anterior, considera-se comumente que ele esteja resolvido quando a solução foi expressada em termos de uma ou mais integrais definidas. Em problemas de cunho prático, as integrais devem ser calculadas objetivando-se a solução final de forma que possa ser utilizada.³

Problemas nos quais F é dada como função de t aparecem usualmente quando se deseja determinar o comportamento de um sistema mecânico sob a ação de uma influência externa. Como exemplo, considere-se o movimento de um elétron de carga — e — quando submetido à ação de um campo elétrico que oscila ao longo do eixo dos x :

³ O leitor que já estudou equações diferenciais deve estar preocupado com as três constantes t_0 , v_0 e x_0 , que aparecem na solução (2.13), enquanto a solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem deveria conter somente duas constantes arbitrárias. Matematicamente, existem somente duas constantes independentes na Eq. (2.13): uma constante contendo os termos $x_0 - v_0 t_0$ mais um termo resultando do limite inferior da última integral; e uma constante que aparece multiplicando t e que contém o termo v_0 mais um termo oriundo do limite inferior da primeira integral. Em Física, pode-se considerar qualquer instante t_0 e, então, somente os dois parâmetros x_0 e v_0 são necessários para especificar um dos movimentos de todos os movimentos possíveis para o corpo sujeito à força dada.

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (2.14)$$

A força sobre o elétron é

$$F = -eE_x = -eE_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (2.15)$$

A equação de movimento é

$$m \frac{dv}{dt} = -eE_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (2.16)$$

Multiplicando-se por dt , integrando e fazendo $t_0 = 0$, tem-se:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} - \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t + \theta). \quad (2.17)$$

Integrando novamente, obtém-se

$$x = x_0 - \frac{eE_0 \cos \theta}{m\omega^2} + \left(v_0 + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} \right) t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta). \quad (2.18)$$

Se o elétron estiver inicialmente em repouso em $x_0 = 0$, então

$$x = -\frac{eE_0 \cos \theta}{m\omega^2} + \frac{eE_0 \sin \theta}{m\omega} t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta). \quad (2.19)$$

A explicação dada pela Física sobre a origem do termo constante e do termo linear em t , na Eq. (2.19), em relação à fase do campo elétrico no instante inicial é deixada ao leitor. Como os termos da Eq. (2.19) dependem de e , m , E_0 e ω ? Explique em termos da Física. Por que o termo oscilante está fora de fase com a força aplicada?

O problema considerado aqui é de interesse no estudo da propagação das ondas de rádio através da ionosfera, cuja densidade de elétrons é elevada. A uma onda de rádio de freqüência ω está associado um campo elétrico, dado pela Eq. (2.14). O termo oscilante na Eq. (2.18) tem a mesma freqüência ω e é independente das condições iniciais. Esta oscilação coerente dos elétrons livres modifica a propagação das ondas. O termo não oscilatório na Eq. (2.18) depende das condições iniciais e, consequentemente, do movimento detalhado de cada elétron, quando a onda chega. Estes termos não podem contribuir para a propagação característica da onda, porque eles não oscilam com a freqüência dela, embora possam afetar a frente que chegar primeiro. Verifica-se que a parte oscilatória do deslocamento x encontra-se 180° fora de fase com a força aplicada, oriunda do campo elétrico. Como o elétron tem carga negativa, a polarização elétrica resultante está 180° fora de fase com o campo elétrico. Como resultado, a constante dielétrica da ionosfera é menor do que um. (Em um dielétrico comum e em baixas freqüências, as cargas são deslocadas na direção da força elétrica que atua sobre elas, e a constante dielétrica é maior que um.) Como a velocidade da luz é

$$v = c(\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}, \quad (2.20)$$

onde $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ e ϵ/ϵ_0 e μ/μ_0 são respectivamente as constantes dielétricas e magnéticas relativas, e como aqui $\mu = \mu_0$, a velocidade (de fase) v das ondas de rádio na ionosfera é maior do que a velocidade c das ondas eletromagnéticas no vácuo. Logo, as ondas que entram inclinadas na ionosfera são refletidas de volta para a Terra. Este efeito parece ser inversamente proporcional a ω^2 , de forma que, para freqüências suficientemente elevadas, as ondas não retornam, mas passam através da ionosfera.

Um pouco de conhecimento da teoria eletromagnética é suficiente para levar adiante matematicamente esta discussão.⁴ O momento de dipolo do elétron deslocado de sua posição de equilíbrio é

$$-ex = -\frac{e^2}{m\omega^2} E_0 \cos(\omega t + \theta) = -\frac{e^2}{m\omega^2} E_x, \quad (2.21)$$

considerando-se somente o termo oscilante. Existindo N elétrons por cm^3 , o momento de dipolo total, por unidade de volume, é

$$P_x = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} E_x, \quad (2.22)$$

O deslocamento elétrico é

$$D_x = \epsilon_0 E_x + P_x = \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right) E_x \text{ (unidades MKS).} \quad (2.23)$$

Como a permissividade elétrica é definida por

$$D_x = \epsilon E_x, \quad (2.24)$$

conclui-se que

$$\epsilon/\epsilon_0 = 1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}, \quad (2.25)$$

e como $\mu = \mu_0$,

$$v = c \left(1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right)^{-1/2} \quad (2.26)$$

2.4 FORÇA DE AMORTECIMENTO DEPENDENTE DA VELOCIDADE

Outro tipo de força que permite uma solução fácil da Eq. (2.9) é o caso em que F é somente função de v :

$$m \frac{dv}{dt} = F(v). \quad (2.27)$$

⁴ Veja, por exemplo, F. W. Sears e M. W. Zemansky, *University physics*, 3. ed., Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1964. (Seçs. 26.7, 27.7 e 27.9.)

Para resolvê-la, multiplica-se a equação anterior por $[mF(v)]^{-1}dt$ e integra-se de t_0 a t :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_0}{m}. \quad (2.28)$$

A integral à esquerda pode ser calculada, pelo menos em princípio, quando $F(v)$ é conhecida, tendo-se como resultado uma equação que contém a incógnita v . Resolvendo-se esta equação para determinar v (supõe-se nas discussões gerais que isso é sempre possível), o resultado será uma equação da forma

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right). \quad (2.29)$$

O resultado para x será, então,

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right) dt. \quad (2.30)$$

No caso do movimento unidimensional, as únicas espécies importantes de força que dependem da velocidade são as forças de atrito. As forças de atrito de deslizamento ou rolamento entre superfícies sólidas e secas são aproximadamente constantes para um dado par de superfícies, havendo uma força normal conhecida entre elas, e depende da velocidade somente quanto ao fato de ser sempre oposta à velocidade. A força de atrito entre superfícies lubrificadas ou entre um corpo sólido e um meio líquido ou gasoso depende, de maneira complicada, da velocidade; a função $F(v)$ só pode ser conhecida em forma de tabela de dados experimentais. Em certos casos e em certos intervalos de velocidade, a força de atrito é proporcional a algumas potências fixas da velocidade:

$$F = (\mp)bv^n. \quad (2.31)$$

Sendo n um número inteiro e ímpar, o sinal negativo deve ser escolhido na equação acima; em caso contrário, o sinal deve ser escolhido de maneira que a velocidade v tenha sempre o sinal oposto. A força de atrito é sempre oposta à velocidade; portanto, realiza trabalho negativo, isto é, absorve energia do corpo em movimento. A força dependente da velocidade e na mesma direção representaria uma fonte de energia; estes casos não ocorrem freqüentemente.

Como exemplo, considere o problema de um barco cuja velocidade inicial é v_0 . Desligados os motores no instante $t_0 = 0$, quando está na posição $x_0 = 0$, supõe-se que a força de atrito seja dada pela Eq. (2.31) com $n = 1$.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv. \quad (2.32)$$

A Eq. (2.32) é resolvida seguindo os passos delineados acima, da Eq. (2.27) até a (2.30):

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -\frac{b}{m} t, \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{b}{m} t, \\ v &= v_0 e^{-bt/m}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Verifica-se que se $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$, como deveria, mas que o barco nunca atingirá o repouso completo em tempo finito. O resultado para x é

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v_0 e^{-bt/m} dt \\ &= \frac{mv_0}{b} (1 - e^{-bt/m}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, x se aproxima do valor limite

$$x_s = \frac{mv_0}{b}. \quad (2.35)$$

Logo, é possível especificar uma distância definida em que o barco corre até parar. Embora, de acordo com o resultado acima, Eq. (2.33), a velocidade nunca se torne exatamente igual a zero, quando t é suficientemente grande, a velocidade torna-se tão pequena que o barco estará praticamente parado. Escolhendo-se um valor pequeno da velocidade v_s de modo que, quando $v < v_s$, considera-se o barco parado (digamos, por exemplo, a velocidade randômica média adquirida por um barco ancorado como consequência das ondas que passam por ele). Define-se, então, o tempo t_s para o barco parar como

$$v_s = v_0 e^{-bt_s/m}, \quad t_s = \frac{m}{b} \ln \frac{v_0}{v_s}. \quad (2.36)$$

Como o logaritmo é uma função de variação lenta, o tempo t_s não dependerá muito do v_s escolhido, desde que seja muito menor que v_0 . Freqüentemente é instrutivo ex-

pandir a solução em série de Taylor em potências de t . Expandindo-se os segundos membros das Eqs. (2.33) e (2.34) em uma série de potências em t , obtém-se⁵

$$v = v_0 - \frac{bv_0}{m} t + \dots, \quad (2.37)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} \frac{bv_0}{m} t^2 + \dots \quad (2.38)$$

Note que os dois primeiros termos nas séries para v e x são exatamente as fórmulas para uma partícula sujeita a uma força constante $-bv_0$, a qual é o valor inicial da força de atrito da Eq. (2.32). Isto era de esperar e nos permite fazer uma boa verificação na Álgebra, o que nos leva à solução (2.34). As expansões em série são meios muito úteis de obter fórmulas simples, aproximadas, que são válidas quando o intervalo de tempo é pequeno.

As características do movimento de um corpo sob a ação de uma força de atrito, como a dada pela Eq. (2.31), depende do expoente n . Em geral, um valor muito grande desse expoente resultará em rápido decréscimo inicial da velocidade, mas demorará a atingir o repouso, e vice-versa, como se pode verificar fazendo gráficos da variação de F com v para vários valores de n . Para valores suficientemente pequenos de n , a velocidade atingirá o valor zero em tempo finito. Para grandes valores de n , o corpo não só requer um tempo infinito, como viaja uma distância infinita antes de parar. Este fato está em desacordo com a experiência comum, o que é uma indicação de que o expoente n deve ser grande para velocidades elevadas, mas tornar-se pequeno no caso de velocidades baixas. O expoente $n = 1$ é freqüentemente usado em problemas envolvendo atrito, particularmente quando este é muito pequeno para ser levado em conta aproximadamente. A razão para se escolher $n = 1$ é que este valor resulta numa equação de fácil solução, sendo freqüentemente uma boa aproximação quando a força de atrito é pequena e quando b é escolhido apropriadamente.

⁵ O leitor que ainda não o fez deve memorizar a série de Taylor para algumas funções simples, como, por exemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Estas três séries são extremamente úteis na obtenção de aproximações de fórmulas complicadas e são válidas quando x é pequeno.

2.5 FORÇA CONSERVATIVA DEPENDENTE DE POSIÇÃO. ENERGIA POTENCIAL

Um dos mais importantes tipos de movimento ocorre quando a força F só é função da coordenada x :

$$m \frac{dv}{dt} = F(x). \quad (2.39)$$

Pelo teorema da energia (2.8),

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (2.40)$$

A integral à direita é o trabalho realizado pela força quando a partícula caminha de x_0 para x . Define-se, então, a *energia potencial* $V(x)$ como o trabalho realizado pela força quando a partícula desloca-se de x a um ponto de referência escolhido, x_s :

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x) dx = - \int_{x_s}^x F(x) dx. \quad (2.41)$$

O motivo para se chamar esta grandeza de energia potencial aparecerá em seguida. Em termos de $V(x)$, pode-se escrever a integral na Eq. (2.40), como se segue:

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = -V(x) + V(x_0). \quad (2.42)$$

Com o auxílio da Eq. (2.42), a Eq. (2.40) torna-se

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0). \quad (2.43)$$

A grandeza no membro à direita depende somente das condições iniciais, sendo, portanto, constante durante o movimento. Ela é denominada *energia total* E . Obtém-se assim a lei de conservação de energia cinética mais energia potencial, válida, como pode ser verificado, quando a força só depende da posição:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = T + V = E. \quad (2.44)$$

Resolvendo para v , obtém-se

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} [E - V(x)]^{1/2}. \quad (2.45)$$

A função $x(t)$ é obtida resolvendo a equação para x

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x [E - V(x)]^{-1/2} dx = t - t_0. \quad (2.46)$$

Neste caso, as condições iniciais são expressadas em termos das constantes E e x_0 .

Ao aplicar a Eq. (2.46) e resolver a raiz quadrada indicada no integrando, deve-se tomar cuidado para usar o sinal apropriado, dependendo se a velocidade v , dada pela Eq. (2.45), é positiva ou negativa. Nos casos em que v é positiva durante algumas partes do movimento e negativa durante outras partes, pode ser necessário resolver a integral da Eq. (2.46) separadamente para cada parte do movimento.

Da definição (2.41), pode-se exprimir a força em termos da energia potencial:

$$F = -\frac{dV}{dx}. \quad (2.47)$$

Esta equação pode ser tomada como expressão do significado físico da energia potencial, que é uma função cuja derivada negativa é igual à força. O resultado de mudar-se a coordenada do ponto de referência x_s é adicionar uma constante a $V(x)$. Como é a derivada de V que entra como força nas equações dinâmicas, a escolha do ponto de referência x_s não tem importância, pois uma constante pode ser sempre somada ao potencial $V(x)$ sem afetar o resultado físico. (A mesma constante deve, certamente, ser adicionada a E .)

Como exemplo, considerar o problema de uma partícula submetida à força restauradora linear, como uma massa ligada a uma mola:

$$F = -kx. \quad (2.48)$$

Tomando-se $x_s = 0$, a energia potencial é

$$\begin{aligned} V(x) &= - \int_0^x (-kx) dx \\ &= \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

A Eq. (2.46) torna-se, neste caso, com $t_0 = 0$,

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x (E - \frac{1}{2}kx^2)^{-1/2} dx = t. \quad (2.50)$$

Fazendo as substituições abaixo

$$\sin \theta = x \sqrt{\frac{k}{2E}}, \quad (2.51)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.52)$$

de tal forma que

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x (E - \frac{1}{2}kx^2)^{-1/2} dx = \frac{1}{\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0),$$

e, pela Eq. (2.50),

$$\theta = \omega t + \theta_0.$$

Pode-se obter x da Eq. (2.51):

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta = A \sin (\omega t + \theta_0), \quad (2.53)$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (2.54)$$

Logo, a coordenada x oscila harmonicamente no tempo, com amplitude A e freqüência $\omega/2\pi$. As condições iniciais são determinadas aqui pelas constantes A e x_0 , relacionadas a E e x_0 por

$$E = \frac{1}{2}kA^2, \quad (2.55)$$

$$x_0 = A \sin \theta_0. \quad (2.56)$$

Note que neste exemplo é difícil escolher o sinal quando se extrai a raiz quadrada na Eq. (2.50), substituindo $(1 - \sin^2 \theta)^{-1/2}$ por $(\cos \theta)^{-1}$, uma grandeza que pode assumir valores positivos ou negativos, conforme o problema requerer, pela escolha de θ no quadrante apropriado.

Uma função dependente de uma variável e de sua derivada primeira, que é constante para todas as soluções de uma equação diferencial de segunda ordem, denomina-se *integral primeira* da equação. A função $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ denomina-se *integral da energia* da Eq. (2.39). Uma integral da equação de movimento de um sistema mecânico denomina-se *constante do movimento*. Em geral, qualquer problema de Mecânica pode ser resolvido caso se encontre um número suficiente de primeiras integrais, ou constantes do movimento.

Mesmo em casos em que não é fácil o cálculo da integral da Eq. (2.46) ou em que não se possa resolver a equação resultante, para fornecer uma solução para $x(t)$, a integral de energia, Eq. (2.44), dá informações úteis sobre a solução. Para uma dada energia E , verifica-se na Eq. (2.45) que a partícula está confinada àquelas regiões no eixo dos x onde $V(x) \leq E$. Além disso, a velocidade é proporcional à raiz quadrada da diferença entre E e $V(x)$. Logo, fazendo-se um gráfico de $V(x)$ em função de x , pode-se descrever qualitativamente as espécies possíveis de movimentos. Para a função energia potencial mostrada na Fig. 2.1, verifica-se que a menor energia possível é E_0 . Nesta energia, a partícula só pode permanecer em repouso em x_0 . Com a energia E_1 um pouco maior, a partícula pode mover-se entre x_1 e x_2 ; sua velocidade decresce quando se aproxima de x_1 ou x_2 e quando atinge esses dois pontos pára e seu movimento re-

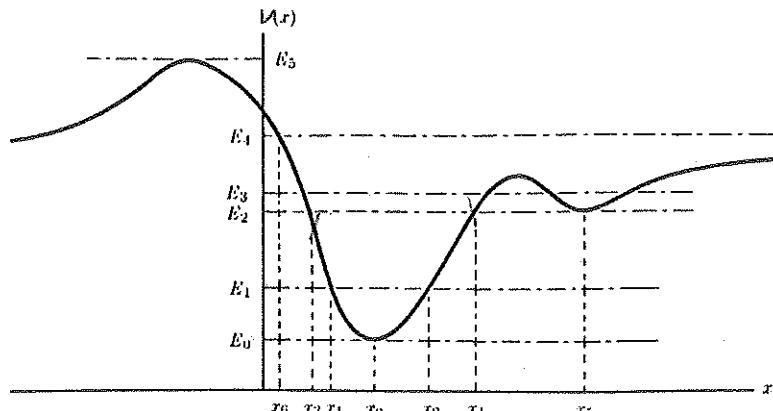


Fig. 2.1 Função energia potencial para movimento unidimensional.

verte. Os pontos x_1 e x_2 denominam-se *pontos de retorno* do movimento. Com a energia E_2 , a partícula pode oscilar entre os pontos x_3 e x_4 , ou permanecer em repouso em x_5 . Com a energia E_3 , haverá quatro pontos de retorno e a partícula poderá oscilar em qualquer um dos dois vales do potencial. Com a energia E_4 , existe somente um ponto de retorno; se a partícula inicialmente deslocar-se para a esquerda, ele inverterá seu movimento em x_6 e retornará para a direita acelerando nas descidas dos vales entre x_0 e x_5 e desacelerando nas subidas desses vales. No caso de energias acima de E_5 , não haverá pontos de retorno e a partícula só se moverá em uma direção, variando sua velocidade de acordo com a profundidade do potencial em cada ponto.

Quando a partícula oscila próximo a um ponto de equilíbrio estável, pode-se achar uma solução aproximada para o seu movimento. Considere que $V(x)$ tenha um mínimo em $x = x_0$; expandindo-se a função $V(x)$ numa série de Taylor, em torno desse ponto:

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

A constante $V(x_0)$ pode ser desprezada sem afetar o resultado físico. Como x_0 é um ponto de mínimo,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0} \geq 0. \quad (2.58)$$

Escolhendo as seguintes abreviações

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}, \quad (2.59)$$

$$x' = x - x_0, \quad (2.60)$$

pode-se escrever a função potencial na seguinte forma:

$$V(x') = \frac{1}{2} k x'^2 \dots \quad (2.61)$$

Para valores de x' suficientemente pequenos, considerando-se $k \neq 0$, podem-se desprezar os termos representados por pontos, e a Eq. (2.61) torna-se idêntica à Eq. (2.47). Logo, para pequenas oscilações em torno de um ponto de mínimo do potencial, com exceção no caso excepcional quando $k = 0$, o movimento é o de um oscilador harmônico, com freqüência dada pelas Eqs. (2.52) e (2.59).

Um ponto onde $V(x)$ tem um mínimo denomina-se ponto de *equilíbrio estável*. Uma partícula em repouso num destes pontos permanecerá em repouso. Se for deslocada numa distância pequena, a partícula experimentará uma força restauradora tendendo a retornar ao ponto de equilíbrio e oscilará em torno deste ponto. Um ponto onde $V(x)$ tem um máximo chama-se *equilíbrio instável*. Na teoria, uma partícula em repouso neste ponto pode permanecer em repouso, desde que a força aplicada seja igual a zero, porém se for ligeiramente deslocada desta posição, a força que atua sobre ela a empurrará para mais longe da posição de equilíbrio. A região onde $V(x)$ é constante denomina-se região de *equilíbrio indiferente*, porque a partícula pode sofrer pequeno afastamento sem que força restauradora ou repulsiva atue sobre ela.

Esta espécie de discussão qualitativa, baseada na integral da energia, é simples e muito útil. Estude este exemplo até entendê-lo suficientemente bem para tornar-se capaz de ver, imediatamente, no caso de qualquer curva de energia potencial, os possíveis tipos de movimento.

Pode acontecer que somente parte da força agindo sobre a partícula derive de uma função potencial $V(x)$. Considere que F' seja o restante da força:

$$F = -\frac{dV}{dx} + F'. \quad (2.62)$$

Neste caso, a energia $(T + V)$ não é mais constante. Substituindo-se F dada pela Eq. (2.62) na Eq. (2.1), e multiplicando-se por dx/dt , tem-se, após arrumar os termos,

$$\frac{d}{dt}(T + V) = F'v. \quad (2.63)$$

A taxa de variação da energia cinética mais potencial é igual à potência fornecida pela força adicional F' .

2.6 CORPOS EM QUEDA LIVRE

Um dos mais simples e dos mais comuns tipos de movimento unidimensional conhecido é o de corpos em queda livre. Considere-se agora este movimento como exemplo dos princípios discutidos na seção anterior.

Um corpo em queda livre próximo à superfície terrestre, desprezada a resistência do ar, acha-se submetido à ação de uma força constante

$$F = -mg, \quad (2.64)$$

onde se considera positiva a direção para cima. A equação do movimento é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg. \quad (2.65)$$

A solução pode ser obtida por qualquer um dos três métodos discutidos nas Seçs. 2.3, 2.4 e 2.5, desde que uma força constante possa ser considerada como função de qualquer t , v ou x . Ao leitor: será instrutivo resolver o problema pelos três métodos. A solução foi apresentada no Cap. 1 [Eqs. (1.28) e (1.29)].

Para incluir os efeitos da resistência do ar, suponha-se que a força de atrito seja proporcional a v , de forma que a força total será

$$F = -mg - bv. \quad (2.66)$$

A constante b dependerá do tamanho e da forma do corpo em queda livre, como também da viscosidade do ar. O problema deve ser tratado como um caso de $F(v)$:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv. \quad (2.67)$$

Considerando que $v_0 = 0$ em $t = 0$, procede-se como na Seç. 2.4 [Eq. (2.28)]:

$$\int_0^v \frac{dv}{v + (mg/b)} = -\frac{bt}{m}. \quad (2.68)$$

Integrando e explicitando v :

$$v = -\frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}). \quad (2.69)$$

Pode-se obter uma fórmula útil para intervalos pequenos do tempo de queda, expandindo a função exponencial em uma série de potências:

$$v = -g(1 + \frac{1}{2} \frac{bg}{m} t) + \dots \quad (2.70)$$

Logo, para um intervalo pequeno de tempo, ($t \ll m/b$), $v = -gt$, aproximadamente, e o efeito da resistência do ar pode ser desprezado. Após um intervalo de tempo longo, verifica-se da Eq. (2.69) que

$$v \doteq -\frac{mg}{b}, \quad \text{se} \quad t \gg \frac{m}{b}$$

A velocidade mg/b denomina-se *velocidade terminal* do corpo em queda livre. O corpo atingirá $1/e$ de sua velocidade terminal em intervalo de tempo $t = m/b$. Para determinar a constante b , usa-se a velocidade terminal obtida experimentalmente. Agora, integra-se a Eq. (2.69), considerando $x_0 = 0$:

$$x = \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - \frac{bt}{m} - e^{-bt/m} \right). \quad (2.71)$$

Pela expansão em série de potências da função exponencial, obtém-se

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + \frac{1}{6} \frac{bg}{m} t^3 + \dots \quad (2.72)$$

Se $t \ll m/b$, $x = -\frac{1}{2} gt^2$, como na Eq. (1.29). Quando $t \gg m/b$,

$$x \doteq \left(\frac{m^2 g}{b^2} - \frac{mg}{b} t \right).$$

Este resultado pode ser interpretado facilmente em termos da velocidade terminal. Por que aparece uma constante positiva no resultado acima?

Vale a pena notar que é possível obter a solução em forma de série (2.70) diretamente da equação diferencial (2.67) sem resolvê-la exatamente. Primeiramente, despreza-se totalmente o termo que envolve b , de forma que a solução é

$$v^{(0)} = -gt.$$

Substituindo este resultado no último termo da Eq. (2.67) e integrando novamente:

$$v^{(1)} = -gt + \frac{1}{2} \frac{bg}{m} t^2.$$

Este resultado concorda com os dois primeiros termos da Eq. (2.70). Fazendo-se $v = v^{(1)}$, no último termo na Eq. (2.67) e integrando-se, obtém-se uma aproximação melhor $v^{(2)}$, boa até a ordem de b^2 e assim sucessivamente. Este método de aproximações sucessivas muitas vezes é útil na resolução de equações que contém um termo tão pequeno que na aproximação de ordem zero possa ser desprezado. Um método similar é às vezes usado quando se resolve por aproximações sucessivas uma equação algébrica que contenha um ou mais termos pequenos.

Para corpos pequenos e pesados, cuja velocidade terminal seja grande, uma aproximação melhor pode ser

$$F = bt^2. \quad (2.73)$$

O leitor deve ser capaz de mostrar que com a força de atrito dada pela Eq. (2.73), o resultado (considerando $x_0 = v_0 = 0$ em $t_0 = 0$) é

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right)$$

$$\doteq \begin{cases} -gt, & \text{se } t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}, \\ -\sqrt{\frac{mg}{b}}, & \text{se } t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}}, \end{cases} \quad (2.74)$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right)$$

$$\doteq \begin{cases} -\frac{1}{2}gt^2, & \text{se } t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}, \\ \frac{m}{b} \ln 2 - \sqrt{\frac{mg}{b}} t, & \text{se } t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}}. \end{cases} \quad (2.75)$$

Neste exemplo, novamente a velocidade terminal é dada por $(mg/b)^{1/2}$. A velocidade terminal pode ser obtida sempre como a velocidade em que a força de atrito se iguala à força gravitacional, e existirá quando a força de atrito tornar-se suficientemente grande em altas velocidades.

No caso de corpos cuja queda é de grandes altitudes, deve-se levar em conta a variação da força gravitacional com a altura. Neste caso, despreza-se a resistência do ar (com o objetivo de usar o método de energia), e mede-se x a partir do centro da Terra. Então, se M for a massa da Terra e m , a massa do corpo em queda livre,

$$F = -\frac{mMG}{x^2} \quad (2.76)$$

e

$$V(x) = - \int_{\infty}^x F dx = -\frac{mMG}{x}, \quad (2.77)$$

onde se considera $x_s = \infty$ para eliminar um termo constante em $V(x)$. A Eq. (2.45) torna-se

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \left(E + \frac{mMG}{x} \right)^{1/2}. \quad (2.78)$$

O sinal *mais* refere-se ao movimento ascendente e o sinal *menos*, ao movimento descendente.

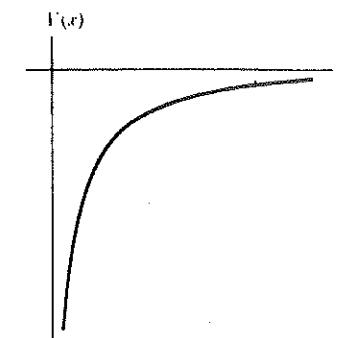


Fig. 2.2 Gráfico de $V(x) = -(mMG/x)$.

Um gráfico da função $V(x)$ é mostrado na Fig. 2.2. Verifica-se que existem dois tipos de movimento, dependendo de E ser positivo ou negativo. Quando E é positivo, não existem pontos de retorno, e se o corpo se mover para cima, continuará nessa direção para sempre, com velocidade decrescente, que se aproxima da velocidade limite

$$v_t = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (2.79)$$

Quando E é negativo, existirá um ponto de retorno à altura

$$x_T = \frac{mMG}{-E}. \quad (2.80)$$

Se o corpo se mover inicialmente para cima, ele parará em x_T , e cairá de volta à Terra. O caso entre estes dois tipos de movimento ocorre quando a posição e a velocidade iniciais são tais que $E = 0$. O ponto de retorno encontra-se, então, no infinito e o corpo se moverá sempre para cima, aproximando-se da velocidade $v_t = 0$. Sendo $E = 0$, então a qualquer altura x , a velocidade será

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{x}}. \quad (2.81)$$

Esta é denominada *velocidade de escape* para corpos situados a uma distância x do centro da Terra, porque o corpo que se move para cima a uma altura x e velocidade v_e terá suficiente energia para se mover para cima indefinidamente (se não houver resistência do ar).

Para determinar $x(t)$, calcula-se a integral

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \left(E + \frac{mMG}{x} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t, \quad (2.82)$$

onde x_0 é a altura em $t = 0$. Para resolver o caso quando E é negativo, substitui-se

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{-Ex}{mMG}}. \quad (2.83)$$

A Eq. (2.82) torna-se então

$$\frac{mMG}{(-E)^{3/2}} \int_{\theta_0}^{\theta} 2 \cos^2 \theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}} t. \quad (2.84)$$

(Escolhe-se o sinal positivo para o integrando de forma que θ aumente quando t aumenta.) Pode-se, sem perda de generalidade, considerar x_0 como sendo o ponto de retorno x_T , desde que o corpo, em algum instante passado ou futuro do seu movimento, passe por x_T se nenhuma força além da gravidade agir sobre ele, admitindo-se que $E < 0$. Logo $\theta_0 = 0$, e

$$\frac{mMG}{(-E)^{3/2}} (\theta + \sin \theta \cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{m}} t,$$

ou

$$\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \sqrt{\frac{2MG}{x_T^3}} t, \quad (2.85)$$

e

$$x = x_T \cos^2 \theta. \quad (2.86)$$

Este par de equações não pode ser resolvido explicitamente quando se quer encontrar $x(t)$. É possível obter uma solução numérica, quando se escolhe uma seqüência de valores de θ e determina-se o valor correspondente de x e t das Eqs. (2.85) e (2.86). A parte do movimento para o qual x é menor do que o raio da Terra não será, com certeza, corretamente obtido, porque a Eq. (2.76) leva à suposição de que toda a massa da Terra concentra-se em $x = 0$ (sem mencionar o fato de terem sido omitidas nas equações do movimento não só a resistência do ar mas também as forças que poderiam agir sobre corpo quando ele colide com a Terra).

A solução pode ser encontrada de maneira similar para os casos em que E é positivo ou igual a zero.

2.7 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

O problema mais importante no movimento unidimensional é felizmente um dos mais fáceis de resolver é o do oscilador harmônico ou linear. O exemplo mais simples é o de uma massa m presa a uma mola cuja constante elástica é k (Fig. 2.3). Medindo-se x , a partir da posição da mola em repouso, então a mola exerce uma força restauradora

$$F = -kx. \quad (2.87)$$

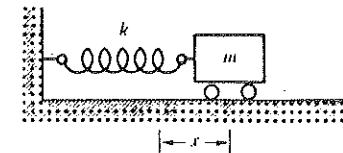


Fig. 2.3 Modelo de um oscilador harmônico simples.

A energia potencial associada a esta força é

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.88)$$

A equação do movimento, admitindo-se que nenhuma outra força age sobre o corpo, é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (2.89)$$

A Eq. (2.89) descreve o oscilador harmônico livre, cuja solução já foi obtida na Seç. 2.5. O movimento é uma oscilação senoidal simples em torno do ponto de equilíbrio. Em todos os casos físicos, existe uma força de atrito agindo sobre o corpo, embora ela seja freqüentemente muito pequena. Como boa aproximação, na maioria dos casos, particularmente quando a força de atrito é pequena, pode-se supor que a força de atrito é proporcional à velocidade. Como esta é quase que a única força de atrito para a qual o problema é resolvido facilmente, é melhor restringir a atenção a este caso. Usando-se a Eq. (2.31) com $n = 1$ para a força de atrito, a equação do movimento torna-se

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (2.90)$$

Esta equação descreve o oscilador harmônico amortecido. O seu movimento, pelo menos no caso de amortecimentos pequenos, consiste numa oscilação senoidal cuja amplitude decresce gradualmente, como será visto mais tarde. Se o oscilador estiver sujeito a uma força adicional $F(t)$, seu movimento será descrito pela seguinte equação:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (2.91)$$

Se $F(t)$ for uma força de variação senoidal, a Eq. (2.91) leva ao fenômeno da ressonância, onde a amplitude se torna muito grande quando a freqüência da força aplicada se iguala à freqüência natural do oscilador livre, sem amortecimento.

A importância do problema do oscilador harmônico está no fato de que as equações similares às Eqs. (2.89) a (2.91) são encontradas em grande variedade de problemas de Física. Em quase todos os casos do movimento unidimensional, em que a função potencial $V(x)$ tem um ou mais pontos de mínimo, o movimento da partícula para pequenas oscilações em torno desses pontos de mínimo segue a Eq. (2.89), como foi mostrado na Seç. 2.5.

Ao sofrer deformação, um sólido resiste com uma força proporcional à deformação, admitindo-se que ela não seja muito grande. É a chamada *Lei de Hooke*, que é obtida considerando-se que o sólido não deformado tem um mínimo de energia potencial, e que esta energia potencial pode ser expandida, em série de Taylor, nas coordenadas que descrevem a deformação. Se a deformação se fizer além de um ponto determinado, denominado *limite elástico*, o sólido permanecerá indefinidamente deformado, isto é, sua estrutura será alterada de maneira que a forma inicial da energia potencial se modifica. Na maioria dos casos em que os termos de ordem mais alta na série (2.57) são desprezíveis até as proximidades do limite elástico, a Lei de Hooke permanece válida até o limite elástico. Quando o limite elástico é superado, iniciando-se o fluxo plástico, as forças dependerão, de maneira complicada, da forma do material, da velocidade de deformação e, ainda, de sua história anterior, de tal modo que as forças não poderão mais ser especificadas em termos da função energia potencial.

Assim, praticamente qualquer problema que envolva vibrações mecânicas reduz-se a um oscilador harmônico, desde que as amplitudes de vibração pequenas também estejam envolvidas, isto é, quando não é ultrapassado o limite elástico do material. O movimento de estiramento de molas e membranas, bem como o de vibrações sonoras num gás contido em recipiente fechado ou num sólido, resultam em alguns dos denominados modos normais de vibração, cada um deles se comportando, de muitas maneiras, semelhante a um oscilador harmônico independente. Um circuito elétrico contendo indutância L , resistência R e capacitância C em série, e sujeito a uma força eletromotiva aplicada $E(t)$ satisfaz a equação

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t), \quad (2.92)$$

onde q é a carga no condensador e dq/dt é a corrente. Esta equação é idêntica em forma à Eq. (2.91). Os primeiros trabalhos sobre circuitos elétricos foram realizados levando-se em conta a sua analogia com o problema mecânico correspondente. Hoje em dia, a situação, muitas vezes, apresenta-se invertida, isto é, os engenheiros mecânicos e acústicos empregam métodos simples e efetivos desenvolvidos por engenheiros elétricos para resolver problemas de vibrações. A teoria de oscilações elétricas numa linha de transmissão ou numa cavidade é matematicamente similar ao problema da corda vibrante ou da cavidade de ar ressonante. A teoria da Mecânica Quântica relacionada ao átomo pode ser colocada de forma matematicamente idêntica à teoria de um sistema de osciladores harmônicos.

2.8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

As equações (2.89) a (2.91) são exemplos de equações diferenciais lineares de segunda ordem. A *ordem* de uma equação diferencial é a da derivada de mais alta ordem que aparece nela. A maioria das equações da Mecânica é de segunda ordem. (Por quê?) Equação diferencial *linear* é aquela em que não existem termos maiores do que

o primeiro grau da variável dependente (neste caso x) e suas derivadas. Logo, o tipo mais geral de equação diferencial linear de ordem n seria

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = b(t). \quad (2.93)$$

Sendo $b(t) = 0$, a equação denomina-se *homogênea*; em caso contrário, será *não-homogênea*. As equações lineares são importantes, porque existem métodos gerais para resolvê-las, particularmente quando os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n são constantes, como acontece nas Eqs. (2.89) a (2.91). Na presente seção, será resolvido o problema do oscilador harmônico livre [Eq. (2.89)], ao mesmo tempo em que se desenvolve o método geral para resolução de equações diferenciais homogêneas e lineares com coeficientes constantes. Este método será aplicado na Seç. 2.9, no que se refere à equação do oscilador harmônico amortecido (2.90) e, na Seç. 2.10, estudar-se-á o comportamento de um oscilador harmônico sob ação de forças que oscilam senoidalmente. Na Seç. 2.11, será estudado um teorema básico, quando se trata de resolver a Eq. (2.91) com qualquer força $F(t)$ aplicada, bem como os métodos que levam à solução.

A solução da Eq. (2.89), obtida na Seç. 2.5, também pode ser apresentada na seguinte forma:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad (2.94)$$

dependendo de duas constantes “arbitrárias” A e θ . Elas são chamadas arbitrárias porque, não importando os valores que lhe são atribuídos, a solução (2.94) satisfará a Eq. (2.89). Elas não são arbitrárias no caso de problema de Física e dependem das condições iniciais. É possível mostrar que a solução geral de qualquer equação diferencial de segunda ordem depende de duas constantes arbitrárias, o que significa que se pode escrever a solução na forma:

$$x = x(t; C_1, C_2), \quad (2.95)$$

de modo que, para cada valor de C_1 e C_2 , ou para cada valor num intervalo definido, $x(t; C_1, C_2)$ satisfaz a equação e, além do mais, praticamente todas as soluções da equação acham-se incluídas na função $x(t; C_1, C_2)$ para valores determinados de C_1 e C_2 .⁶ Sendo possível encontrar uma solução que tenha duas constantes arbitrárias satisfazendo uma equação diferencial de segunda ordem, pode-se estar certo de que praticamente todas as soluções estarão incluídas. Os métodos de resolução das equações diferenciais já estudadas em seções anteriores conduzem diretamente à solução correspondente às condições iniciais do problema de Física. Nesta seção e nas subsequentes deste capítulo, os métodos apresentados serão os que conduzem a uma solução geral com duas constantes arbitrárias. A estas constantes devem ser atribuídos valores adequados às condições iniciais do problema físico; o fato de que a solução com duas constantes arbitrárias seja a solução geral garante que sempre é possível satisfazer as condições iniciais, desde que se escolha apropriadamente estas constantes.

⁶ As únicas exceções são algumas soluções “singulares”, que podem ocorrer em regiões onde as condições matemáticas para existência de uma solução única (Seç. 2.2) não são satisfeitas.

Agora, serão enunciados dois teoremas sobre equações diferenciais homogêneas e lineares.

Teorema 1. Sendo $x = x_1(t)$ solução de uma equação diferencial linear e homogênea e C uma constante qualquer, então $x = Cx_1(t)$ também será uma solução.

Teorema 2. Sendo $x = x_1(t)$ e $x = x_2(t)$ soluções de uma equação diferencial, homogênea e linear, então $x = x_1(t) + x_2(t)$ também é uma solução.

Aqui, estes teoremas são demonstrados somente no caso de equação de segunda ordem:

$$a_2(t) \frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0, \quad (2.96)$$

mas a demonstração pode ser facilmente generalizada para equações de ordens mais elevadas. Suponha que $x = x_1(t)$ satisfaça a Eq. (2.96). Então,

$$a_2(t) \frac{d^2(Cx_1)}{dt^2} + a_1(t) \frac{d(Cx_1)}{dt} + a_0(t)(Cx_1) = C \left[a_2(t) \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_0(t)x_1 \right] = 0.$$

Logo $x = Cx_1(t)$ também satisfaz a Eq. (2.96). Se ambos, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, satisfazem a Eq. (2.96), então

$$\begin{aligned} a_2(t) \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + a_1(t) \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + a_0(t)(x_1 + x_2) \\ = \left[a_2(t) \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_0(t)x_1 \right] \\ + \left[a_2(t) \frac{d^2x_2}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx_2}{dt} + a_0(t)x_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Logo, $x = x_1(t) + x_2(t)$ também satisfaz a Eq. (2.96). O problema de encontrar a solução geral da Eq. (2.96) reduz-se, então, à busca de duas soluções "particulares" e independentes quaisquer, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, porque os teoremas 1 e 2 garantem que

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (2.97)$$

também é uma solução. Como esta tem duas constantes arbitrárias, deve ser a solução geral. A condição imposta de que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam independentes significa neste caso que uma não seja o múltiplo da outra. Se $x_1(t)$ fosse um múltiplo constante de $x_2(t)$, então a Eq. (2.97) teria na realidade somente uma constante arbitrária. O segundo membro da Eq. (2.97) denomina-se *combinação linear* de x_1 e x_2 .

No caso de equações como a (2.89) e a (2.90), em que os coeficientes são constantes, existe sempre uma solução da forma $x = e^{pt}$. Para demonstrá-lo, suponha que a_0 , a_1 e a_2 , na Eq. (2.96), são constantes. Substituindo

$$x = e^{pt}, \quad \frac{dx}{dt} = pe^{pt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = p^2e^{pt}, \quad (2.98)$$

tem-se

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)e^{pt} = 0. \quad (2.99)$$

Cancelando o termo e^{pt} , tem-se uma equação algébrica de segundo grau em p , equação que, em geral, tem duas raízes. Se as raízes forem diferentes, haverá duas funções independentes e^{pt} que satisfazem a Eq. (2.96) e o problema estará resolvido. No caso de as duas raízes de p serem iguais, haveria somente uma solução, mas, então, como se mostrará na próxima seção, a função

$$x = te^{pt} \quad (2.100)$$

também satisfaz a equação diferencial. A equação homogênea e linear de n -ésima ordem com coeficientes constantes também pode ser resolvida por este método.

Aplica-se este método à Eq. (2.89), fazendo a substituição de (2.98) nesta equação; tem-se

$$mp^2 + k = 0, \quad (2.101)$$

cuja solução é

$$p = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.102)$$

Este resultado dá, como solução geral,

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.103)$$

Para se interpretar este resultado, é preciso lembrar que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta. \quad (2.104)$$

Ao se permitir que as soluções x da equação diferencial sejam números complexos, então as constantes arbitrárias C_1 e C_2 devem ser complexas para que a Eq. (2.103) seja a solução geral. A solução do problema físico tem de ser real, logo deve-se escolher C_1 e C_2 , de tal forma que x seja real. A soma de dois números complexos é real se um deles for o complexo conjugado do outro. Se

$$C = a + ib, \quad (2.105)$$

e

$$C^* = a - ib, \quad (2.106)$$

então

$$\begin{aligned} C + C^* &= 2a, \\ C - C^* &= 2ib. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Como $e^{i\omega_0 t}$ é o complexo conjugado de $e^{-i\omega_0 t}$, escolhendo-se $C_1 = C$, $C_2 = C^*$, então x será real:

$$x = Ce^{i\omega_0 t} + C^*e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.108)$$

Pode-se calcular x usando as Eqs. (2.104), (2.105) e (2.106), mas a Álgebra se tornará mais simples usando-se a representação polar de um número complexo:

$$C = a + ib = re^{i\theta}, \quad (2.109)$$

$$C^* = a - ib = re^{-i\theta}, \quad (2.110)$$

onde

$$r = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \theta = b/a, \quad (2.111)$$

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta. \quad (2.112)$$

O leitor deve verificar que estas questões resultam algebricamente da Eq. (2.104). Representando-se C como um ponto no plano complexo, então a e b serão suas coordenadas retangulares, e r e θ , suas coordenadas polares. Usando-se a representação polar de C , a Eq. (2.108) torna-se (fazendo-se $r = \frac{1}{2} A$)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}Ae^{i(\omega_0 t + \theta)} + \frac{1}{2}Ae^{-i(\omega_0 t + \theta)} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \theta). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Esta é a solução real e geral da Eq. (2.89), que só difere da solução (2.94) por um deslocamento de $\pi/2$ na constante de fase θ .

Fazendo $B_1 = A \cos \theta$, $B_2 = -A \sin \theta$, pode-se escrever a solução de outra forma:

$$x = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t. \quad (2.114)$$

As constantes A , θ , ou B_1 , B_2 devem ser obtidas em termos de valores iniciais x_0 , v_0 em $t = 0$, fazendo-se

$$x_0 = A \cos \theta = B_1, \quad (2.115)$$

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \theta = \omega_0 B_2. \quad (2.116)$$

As soluções são obtidas facilmente:

$$A = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2}, \quad (2.117)$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}, \quad (2.118)$$

ou

$$B_1 = x_0, \quad (2.119)$$

$$B_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (2.120)$$

Outra maneira de tratar a Eq. (2.103) seria considerar que, como a Eq. (2.89) contém somente coeficientes reais, uma função complexa só poderá satisfazê-la se ambas as partes, real e imaginária, a satisfizerem separadamente. (A prova desta afirmativa é obtida quando se substitui $x = u + iw$ e se usa um pouco de Álgebra.) Logo, se a solução é (fazendo $r = A$)

$$\begin{aligned} x &= Ce^{i\omega_0 t} = Ae^{i(\omega_0 t + \theta)} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \theta) + iA \sin(\omega_0 t + \theta), \end{aligned} \quad (2.121)$$

então ambas as partes, real e imaginária, desta solução devem ser, separadamente, soluções: assim, obtém-se a solução (2.113) ou a (2.94). Podem-se resolver equações lineares como estas e realizar operações algébricas em suas soluções em formas complexas, conforme se desejar (contanto que não se multipliquem dois números complexos), entendendo que a cada passo deve-se ter a preocupação de ver o que é a parte real e a parte imaginária. Este procedimento é útil quando se trata de problemas envolvendo oscilações harmônicas (Seç. 2.10).

Muitas vezes é muito conveniente representar uma função senoidal como exponencial complexa:

$$\cos \theta = \text{parte real de } e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (2.122)$$

$$\sin \theta = \text{parte imaginária de } e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (2.123)$$

As funções exponenciais são mais fáceis de manipular algebricamente do que senos e co-senos. O leitor verificará que as relações (2.122), (2.123) e (2.104) são úteis quando se trata de relações trigonométricas. A série de potências para as funções seno e co-seno são facilmente obtidas expandindo-se $e^{i\theta}$ em uma série de potências e separando a parte real e a imaginária. A regra trigonométrica para $\sin(A + B)$ e $\cos(A + B)$ podem ser facilmente obtidas pela regra algébrica para a soma de expoentes. Muitos outros exemplos poderiam ser citados.

2.9 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

A equação de movimento para partículas submetidas a uma força linear restauradora e a uma força de atrito proporcional à sua velocidade é [Eq. (2.90)]

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (2.124)$$

onde pontos representam derivadas em relação ao tempo. Aplicando-se o método desenvolvido na Seç. 2.8 e fazendo a substituição (2.98), obtém-se

$$mp^2 + bp + k = 0. \quad (2.125)$$

A solução será

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2}. \quad (2.126)$$

Pode-se distinguir três casos: (a) $k/m > (b/2m)^2$, (b) $k/m < (b/2m)^2$ e (c) $k/m = (b/2m)^2$.

No caso (a), fazem-se as seguintes substituições:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.127)$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}, \quad (2.128)$$

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad (2.129)$$

sendo γ denominado coeficiente de amortecimento e $(\omega_0/2\pi)$ a freqüência natural do oscilador sem amortecimento. Existem duas soluções para p :

$$p = -\gamma \pm i\omega_1. \quad (2.130)$$

A solução da equação diferencial é, então,

$$x = C_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega_1 t}, \quad (2.131)$$

Fazendo-se

$$C_1 = \frac{1}{2} A e^{i\theta}, \quad C_2 = \frac{1}{2} A e^{-i\theta}, \quad (2.132)$$

obtém-se

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta). \quad (2.133)$$

solução que corresponde a uma oscilação de freqüência $(\omega_1/2\pi)$ com amplitude $Ae^{-\gamma t}$, decrescendo exponencialmente com o tempo (Fig. 2.4). As constantes A e θ dependem das condições iniciais. A freqüência de oscilação é menor do que a freqüência sem amortecimento. A solução (2.133) pode ser escrita também como

$$x = e^{-\gamma t} (B_1 \cos \omega_1 t + B_2 \sin \omega_1 t). \quad (2.134)$$

Em termos das constantes ω_0 e γ , a Eq. (2.124) torna-se

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.135)$$

forma freqüentemente usada na discussão de oscilações mecânicas.

A energia total (cinética mais potencial) do oscilador é

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2. \quad (2.136)$$

que não é mais constante; o atrito $-b\dot{x}$ toma o lugar de F' na Eq. (2.63). No caso importante de pequeno amortecimento, $\gamma \ll \omega_0$, pode-se fazer $\omega_1 \approx \omega_0$ e desprezar γ em

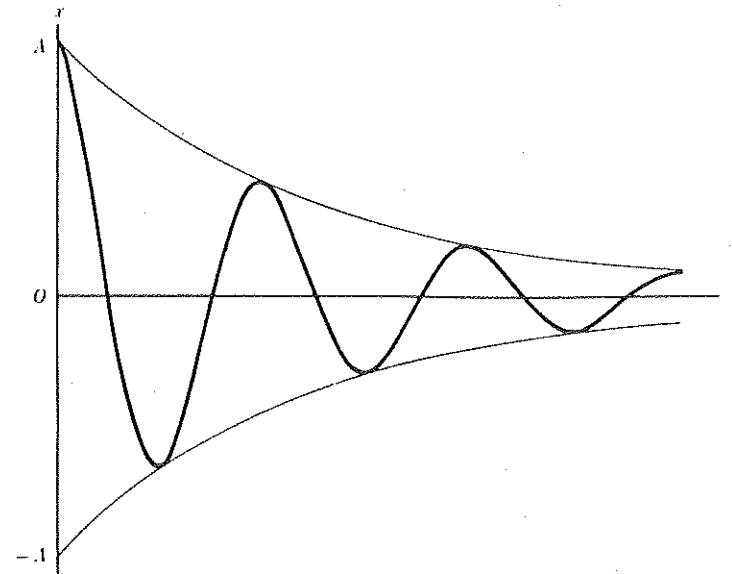


Fig. 2.4 Movimento do oscilador harmônico amortecido. Curva espessa: $x = Ae^{-\gamma t} \cos \omega_1 t$, $\gamma = \omega/8$. Curva fina: $x = \pm Ae^{-\gamma t}$.

comparação com ω_0 ; a energia correspondente à solução (2.133) pode ser aproximada por

$$E \doteq \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}. \quad (2.137)$$

Logo, a energia decresce exponencialmente numa taxa igual a duas vezes a taxa de decaimento da amplitude. A taxa fracional de decréscimo ou *derivada logarítmica* de E é

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{d \ln E}{dt} = -2\gamma. \quad (2.138)$$

Considere agora o caso (b), ($\omega_0 < \gamma$). Neste caso, as duas soluções para p são

$$p = -\gamma_1 = -\gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}, \quad (2.139)$$

$$p = -\gamma_2 = -\gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}.$$

A solução geral é

$$x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}. \quad (2.140)$$

Estes dois termos decrescem exponencialmente com o tempo, um com taxa de decréscimo maior do que a do outro. As constantes C_1 e C_2 podem ser escolhidas para satisfazer as condições iniciais. O leitor deve determiná-las para dois casos importantes: $x_0 \neq 0$, $v_0 = 0$ e $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$, e desenhar as curvas $x(t)$ para os dois casos.

No caso (c), ($\omega_0 = \gamma$), há somente uma solução para p :

$$p = -\gamma. \quad (2.141)$$

A solução correspondente para x é

$$x = e^{-\gamma t}. \quad (2.142)$$

Neste caso, a outra solução é

$$x = te^{-\gamma t}. \quad (2.143)$$

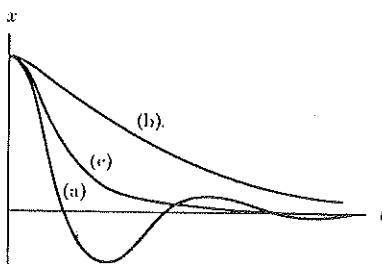


Fig. 2.5 Retorno de um oscilador para o equilíbrio. (a) Subamortecido. (b) Superamortecido. (c) Criticamente amortecido.

Para provar isto, calcula-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t}, \\ \ddot{x} &= -2\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 t e^{-\gamma t}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

O primeiro membro da Eq. (2.135) é, para este x ,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \gamma^2)te^{-\gamma t}. \quad (2.145)$$

Esta equação é igual a zero se $\omega_0 = \gamma$. Logo, a solução geral no caso que $\omega_0 = \gamma$ é

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}. \quad (2.146)$$

Mantendo-se ω_0 ou γ fixos e deixando que o outro varie, vê-se pela Eq. (2.139) que

$$\gamma_1 > \gamma_c > \gamma_2; \quad (2.147)$$

onde γ_c é o valor quando $\gamma = \omega_0$. A solução (2.146) decresce exponencialmente com uma taxa intermediária entre as dos dois termos exponenciais na Eq. (2.140). Logo, após um intervalo de tempo suficientemente longo, para γ ou ω_0 fixo, a solução (2.146) cai a zero mais rapidamente do que a solução (2.140), com exceção do caso em que $C_2 = 0$ na Eq. (2.140). Os casos (a), (b) e (c) são importantes em problemas sobre mecanismos que se aproximam da posição de equilíbrio sob a ação de uma força de atrito de amortecimento, por exemplo, ponteiros de medidores, molas pneumáticas ou hidráulicas de portas etc. Na maioria dos casos, deseja-se que, quando deslocado, o mecanismo retorne à posição de equilíbrio rápida porém maciamente. Para um dado coeficiente de amortecimento γ , ou para um dado ω_0 , isto é conseguido no tempo mais curto sem bater, se $\omega_0 = \gamma$ [caso (c)].⁷ Este caso é denominado *amortecimento crítico*, mas se $\omega_0 < \gamma$, o sistema chama-se *superamortecido*; seu comportamento é lento e não retorna tão rapidamente a $x = 0$, como no caso de amortecimento crítico. Se

⁷ Observe, entretanto, o Probl. 41, no final deste capítulo.

$\omega_0 > \gamma$, o sistema é chamado *subamortecido*; a coordenada x ultrapassa o valor $x = 0$ e oscila. Observe que, no caso de amortecimento crítico, $\omega_1 = 0$, de tal forma que o período de oscilação torna-se infinito. O comportamento do oscilador, nos três casos, é mostrado na Fig. 2.5, considerando-se que o sistema foi deslocado da posição de equilíbrio e largado ($x_0 \neq 0, v_0 = 0$). O leitor deve desenhar curvas similares para o caso em que é dado um golpe instantâneo no sistema em que $t = 0$ (isto é, $x_0 = 0, v_0 \neq 0$).

2.10 OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO

O oscilador harmônico submetido à ação de uma força externa é governado pela Eq. (2.91). Para simplificar a resolução desta equação, há o seguinte teorema:

Teorema 3. Sendo $x_i(t)$ a solução de uma equação linear não-homogênea [por exemplo, Eq. (2.91)], e $x_h(t)$ a solução da equação homogênea associada [por exemplo, (2.90)], então $x(t) = x_i(t) + x_h(t)$ também é solução da equação não-homogênea.

Aplica-se este teorema todas as vezes que os coeficientes da equação são constantes ou funções de t . Faz-se a demonstração por simples substituição, e é deixada ao leitor. Como consequência do Teorema 3: conhecida a solução geral x_h da equação homogênea (2.90) (obtida na Seç. 2.9), então só é preciso encontrar uma solução particular, x_i , da equação não-homogênea (2.91) e, em seguida, somar x_i e x_h para obter-se uma solução da Eq. (2.91) contendo duas constantes arbitrárias e que será, portanto, a solução geral.

O caso mais importante é o de uma força aplicada que varia senoidalmente com o tempo. Se a força aplicada oscilar com freqüência angular ω e amplitude F_0 , a equação do movimento será dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t + \theta_0), \quad (2.148)$$

onde θ_0 é uma constante que especifica a fase da força aplicada. Existem certamente muitas soluções para a Eq. (2.148), das quais é preciso encontrar somente uma. Através de considerações de ordem física, espera-se que uma das soluções seja a da coordenada x com a mesma freqüência que a da força aplicada:

$$x = A_s \cos(\omega t + \theta_s). \quad (2.149)$$

A amplitude A_s e a fase θ_s das oscilações de x terá que ser determinada pela substituição da Eq. (2.149) na Eq. (2.148). Este procedimento é direto e conduz à solução correta. A aplicação algébrica é simplificada, considerando-se a força como parte real de uma função complexa:⁸

$$F(t) = \operatorname{Re}(F_0 e^{i\omega t}), \quad (2.150)$$

$$F_0 = F_0 e^{i\theta_0}, \quad (2.151)$$

⁸ Observe que foram usadas letras em negrito do tipo (F , x) para distinguir as grandezas complexas da correspondente grandeza real (F , x).

Logo, pode-se determinar uma solução $\mathbf{x}(t)$ da equação

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + b \frac{d\mathbf{x}}{dt} + k\mathbf{x} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t}, \quad (2.152)$$

separando-se a equação nas partes real e imaginária; pode-se, então, mostrar⁹ que a parte real de $\mathbf{x}(t)$ satisfaz a Eq. (2.148). Suponha uma solução da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t},$$

de tal forma que

$$\dot{\mathbf{x}} = i\omega \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}. \quad (2.153)$$

Substituindo-se na Eq. (2.152), obtém-se \mathbf{x}_0 como:

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{F}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \quad (2.154)$$

A solução da Eq. (2.152) será, então,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t} = \frac{(\mathbf{F}_0/m)e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}. \quad (2.155)$$

A maneira mais simples de escrever a Eq. (2.155) é expressando o denominador em coordenadas polares [Eq. (2.109)]:

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2} \exp\left(i \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (2.156)$$

É conveniente introduzir o ângulo

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}, \quad (2.157)$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}, \quad (2.158)$$

$$\cos \beta = \frac{2\gamma\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (2.159)$$

Esta definição é puramente uma questão de escolha, que deve ser feita de tal forma que $\beta = 0$, quando $\omega = \omega_0$ e $\beta = \pm\beta/2$, quando $\omega \rightarrow \pm\infty$ (veja a Fig. 2.6). Esta definição mantém o tratamento paralelo, dado neste livro, ao tratamento usual da Eq. (2.92) em Engenharia Elétrica. Usando-se as Eqs. (2.156) e (2.157) e o fato de que

$$i = e^{i\pi/2}, \quad (2.160)$$

⁹ A afirmação “pode-se mostrar que...” durante todo este livro significa que o leitor que seguiu a discussão até aquele ponto deve ser capaz de obter a prova sozinho. (Neste caso, fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{x} + iy$ o resultado aparecerá.) As demonstrações longas e truncadas ou são dadas no texto ou haverá uma referência, ou alternativamente, o leitor será advertido da dificuldade.

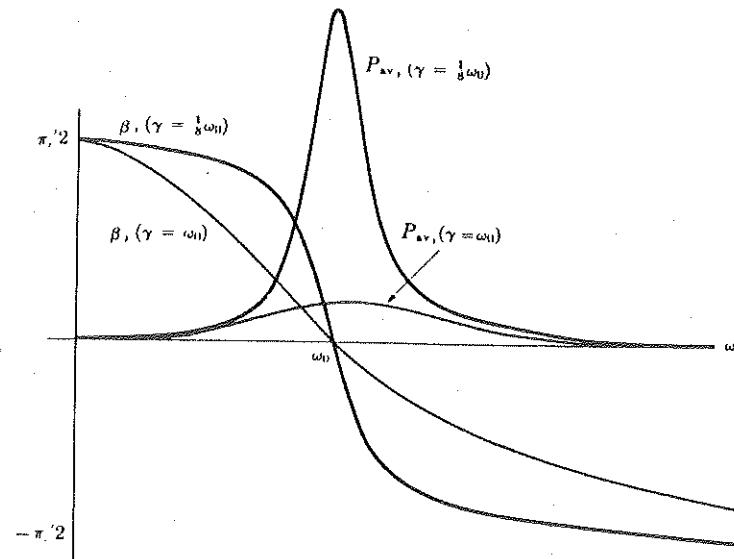


Fig. 2.6 A potência e a fase de oscilações harmônicas forçadas.

pode-se reescrever a Eq. (2.155) na seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{F}_0}{im[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}. \quad (2.161)$$

A velocidade complexa será

$$\dot{\mathbf{x}} = i\omega \mathbf{x} = \frac{\omega \mathbf{F}_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}. \quad (2.162)$$

A posição e velocidade reais serão então

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \operatorname{Re}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\mathbf{F}_0}{m} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0 + \beta), \end{aligned} \quad (2.163)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{\mathbf{F}_0}{m} \frac{\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \operatorname{cos}(\omega t + \theta_0 + \beta). \end{aligned} \quad (2.164)$$

Esta é uma solução particular da Eq. (2.148) sem constantes arbitrárias. Pelo Teorema 3 e Eq. (2.133), a solução geral (para um oscilador subamortecido) é

$$\mathbf{x} = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{\mathbf{F}_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0 + \beta). \quad (2.165)$$

Esta solução contém duas constantes arbitrárias, A , θ , cujos valores são determinados pelos valores iniciais x_0 e v_0 em $t = 0$. O primeiro termo decresce exponencialmente com o tempo e é chamado *transiente*. O segundo termo é chamado *estado estacionário*, e oscila com amplitude constante. O transiente depende das condições iniciais. O estado estacionário, que permanece depois que o transiente desaparece, é independente das condições iniciais. (Quando não existe amortecimento, $\gamma = 0$, o “transiente” não desaparecerá, mas ainda é possível defini-lo como a parte da solução que tem freqüência natural $\omega_1 = \omega_0$; neste caso, o termo transiente não é muito significativo.)

No estado estacionário, a taxa com que o trabalho é realizado sobre o oscilador pela força aplicada é

$$\begin{aligned}\dot{x}F(t) &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t + \theta_0) \cos(\omega t + \theta_0 + \beta) \\ &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega \cos \beta \cos^2(\omega t + \theta_0)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} - \frac{F_0^2}{2m} \frac{\omega \sin \beta \sin 2(\omega t + \theta_0)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}.\end{aligned}\quad (2.166)$$

O último termo à direita tem valor médio igual a zero, enquanto o valor médio de $\cos^2(\omega t + \theta_0)$ no ciclo completo é igual a $\frac{1}{2}$. Logo, a potência média gerada pela força aplicada é

$$P_{\text{méd}} = \langle \dot{x}F(t) \rangle_{\text{méd}} = \frac{F_0^2 \cos \beta}{2m} \frac{\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}, \quad (2.167)$$

ou

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2} F_0 \dot{x}_m \cos \beta, \quad (2.168)$$

onde \dot{x}_m é o valor máximo de \dot{x} . Uma relação similar pode ser obtida para a potência gerada por um circuito elétrico. O fator $\cos \beta$ denomina-se *fator de potência*. No caso elétrico, β é o ângulo de fase entre a corrente e a fem aplicada. Usando-se a fórmula (2.162) para $\cos \beta$, reescrever-se-á a Eq. (2.167):

$$P_{\text{méd}} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (2.169)$$

É fácil mostrar que, para o oscilador, a potência é suprida no estado estacionário numa taxa média igual à que está sendo dissipada pelo atrito, como era de esperar. A potência $P_{\text{méd}}$ tem um máximo para $\omega = \omega_0$. Na Fig. 2.6, a potência $P_{\text{méd}}$ (em unidades arbitrárias) e a fase β do estado estacionário das oscilações forçadas são mostradas como função de ω para dois valores de γ . As curvas mais espessas referem-se a pequenos amortecimentos; as curvas mais finas, a amortecimento maior. A fórmula (2.169) pode ser mais simplificada no caso em que $\gamma \ll \omega_0$. Neste caso, $P_{\text{méd}}$ só é grande quando próxima à freqüência de ressonância ω_0 . Deduzir-se-á agora uma fórmula válida quando $\omega = \omega_0$. Definindo

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad (2.170)$$

e, supondo $\Delta\omega \ll \omega_0$, tem-se

$$(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega + \omega_0)\Delta\omega \doteq 2\omega_0\Delta\omega, \quad (2.171)$$

$$\omega^2 \doteq \omega_0^2. \quad (2.172)$$

Logo,

$$P_{\text{méd}} \doteq \frac{F_0^2}{4m} \frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (2.173)$$

Esta fórmula simples fornece uma boa aproximação para $P_{\text{méd}}$ próxima à ressonância. A fórmula correspondente para β é

$$\cos \beta \doteq \frac{\gamma}{[(\Delta\omega)^2 + \gamma^2]^{1/2}}, \quad \sin \beta \doteq \frac{-\Delta\omega}{[(\Delta\omega)^2 + \gamma^2]^{1/2}}. \quad (2.174)$$

Quando $\omega \ll \omega_0$, $\beta \doteq \pi/2$ e a Eq. (2.164) torna-se

$$x \doteq \frac{F_0}{\omega_0^2 m} \cos(\omega t + \theta_0) = \frac{F(t)}{k}. \quad (2.175)$$

Este resultado é facilmente interpretado em relação à Física; quando a força varia lentamente, a partícula move-se de tal maneira que a força aplicada é balanceada pela força restauradora. Quando $\omega \gg \omega_0$, $\beta \doteq \pi/2$ e a equação (2.164) torna-se

$$x \doteq -\frac{F_0}{\omega^2 m} \cos(\omega t + \theta_0) = -\frac{F(t)}{\omega^2 m}. \quad (2.176)$$

O movimento agora depende somente da massa da partícula e da freqüência da força aplicada, sendo independente do atrito e da força restauradora. Este resultado é, de fato, idêntico ao obtido na Seç. 2.3 [veja as Eqs. (2.15) e (2.19)] para uma partícula submetida à ação de uma força oscilante.

Pode-se aplicar o resultado (2.165), no caso de elétrons presos à posição de equilíbrio $x = 0$ por uma força elástica restauradora e submetido à ação de um campo elétrico oscilante:

$$E_x = E_0 \cos \omega t, \quad (2.177)$$

$$F = -eE_0 \cos \omega t. \quad (2.178)$$

O movimento será dado por

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) - \frac{eE_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \beta)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (2.179)$$

O termo em que estamos interessados agora é o segundo, que é independente das condições iniciais e oscila com a freqüência do campo elétrico. Expandindo-se o segundo termo, obtém-se

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{eE_0}{m} \frac{\sin \beta \cos \omega t}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} - \frac{eE_0}{m} \frac{\cos \beta \sin \omega t}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \\
&= -\frac{eE_0 \cos \omega t}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \\
&\quad - \frac{eE_0 \sin \omega t}{m} \frac{2\gamma\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]} \tag{2.180}
\end{aligned}$$

O primeiro termo representa uma oscilação de x , em fase com a força aplicada em freqüências baixas, e 180° fora de fase em freqüências altas. O segundo termo representa uma oscilação de x que está 90° fora de fase com a força aplicada, quando a velocidade \dot{x} correspondente a este termo estiver em fase com a força aplicada. Logo, o segundo termo corresponde à absorção de energia da força aplicada. O segundo termo contém um fator γ , sendo, portanto, pequeno, se $\gamma \ll \omega_0$, exceto próximo à ressonância. Imaginando-se um meio dielétrico constituído de elétrons ligados por forças elásticas a posições de equilíbrio, então o primeiro termo na Eq. (2.180) representará uma polarização proporcional ao campo elétrico oscilante aplicado, enquanto o segundo termo representará uma absorção de energia do campo elétrico. Próxima à freqüência de ressonância, o meio dielétrico absorverá energia e será opaco à radiação eletromagnética. Acima da freqüência de ressonância, o deslocamento dos elétrons está fora de fase com a força elétrica aplicada. A constante dielétrica e o índice de refração serão menores do que um. No caso de freqüências muito altas, o primeiro termo da Eq. (2.180) tende a se igualar ao último termo da Eq. (2.18), e os elétrons se comportam como se estivessem livres. Abaixo da freqüência de ressonância, a polarização elétrica estará em fase com o campo elétrico e, consequentemente, a constante dielétrica e o índice de refração serão maiores que um.

Calculando-se a constante dielétrica a partir do primeiro termo da Eq. (2.180), da mesma maneira que para um elétron livre [veja Eqs. (2.20) a (2.26)], achamos, para N elétrons, por unidade de volume:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \tag{2.181}$$

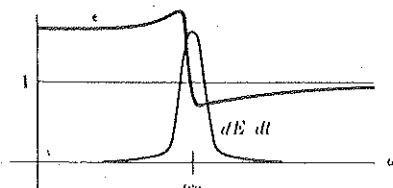


Fig. 2.7 Constante dielétrica e absorção de energia para um meio que contém osciladores harmônicos.

O índice de refração para as ondas eletromagnéticas ($\mu = \mu_0$) é

$$\begin{aligned}
n &= \frac{c}{v} = \left(\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0} \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \tag{2.182}
\end{aligned}$$

Para freqüências muito altas ou muito baixas, a Eq. (2.181) torna-se

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 1 + \frac{Ne^2}{m\omega_0^2}, \quad \omega \ll \omega_0, \tag{2.183}$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 1 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}, \quad \omega \gg \omega_0. \tag{2.184}$$

A taxa média de absorção de energia por unidade de volume é dada pela Eq. (2.169):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{Ne^2 E_0^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \tag{2.185}$$

A constante dielétrica e a absorção de energia como função da freqüência são mostradas na Fig. 2.7. Logo, a constante dielétrica é constante e maior do que um, no caso de freqüências baixas, cresce quando se aproxima da freqüência de ressonância, decresce para valores menores do que um na região de "dispersão anômala", onde existe forte absorção de radiação eletromagnética, crescendo e aproximando-se de um quando a freqüência é alta. O índice de refração apresenta comportamento similar. Este é o comportamento apresentado por todas as formas de matéria. Vidro, por exemplo, tem uma constante dielétrica constante em baixas freqüências, na região de freqüências da luz visível, o índice de refração cresce com ela, tornando-se opaco em uma certa banda na região do ultravioleta. Os raios X são transmitidos com um índice de refração pouco menor do que um. Pode-se obter um modelo mais realista de um meio transmissor supondo-se que várias freqüências ressonantes diferentes correspondem a elétrons ligados com vários valores de constantes elásticas de molas k . Com este modelo, torna-se possível explicar a maioria das características das curvas experimentais da variação de E ou n em função da freqüência. Além de concordância nos aspectos qualitativos, obtém-se, a partir das fórmulas (2.181) a (2.185), resultados que concordam quantitativamente com os experimentais, caso as constantes N , ω_0 e γ sejam escolhidas apropriadamente para cada material. Da mesma maneira, a forma das linhas de absorção nos espectros de gases satisfazem a fórmula (2.173). O sucesso desta teoria foi uma das razões de se ter adotado até o ano 1913 o "modelo do pudim" para o átomo. Considerava-se, então, que os elétrons estavam imersos em um pudim carregado positivamente e que oscilavam como osciladores harmônicos. A experiência de Rutherford, em 1913, forçou os físicos a adotarem o modelo "planetário" para o átomo, modelo que não explicava, nem mesmo qualitativamente, as propriedades ópticas e eletromagnéticas da matéria até o advento da Mecânica Quântica. O resultado do tratamento usando-se Mecânica Quântica é que, no caso da interação da radiação com a

matéria, o modelo simples de osciladores fornece essencialmente o mesmo resultado correto, quando as constantes são escolhidas apropriadamente.¹⁰

Considere-se, agora, uma força aplicada $F(t)$, que só é grande durante um período curto de tempo δt , sendo igual a zero ou desprezível em qualquer outro tempo. Tal força é denominada *impulso*, e corresponde a um empurrão instantâneo. Suponha que o oscilador esteja inicialmente em repouso em $x = 0$, e que o intervalo de tempo δt seja tão curto que a massa x se desloca numa distância desprezível, durante o tempo em que a força atua. De acordo com a Eq. (2.4), o momento linear imediatamente após a aplicação da força será igual ao impulso gerado pela força:

$$mv_0 = p_0 = \int F dt, \quad (2.186)$$

onde v_0 é a velocidade imediatamente após o impulso, e a integração é realizada no intervalo δt durante o qual a força atua. Após o impulso, a força aplicada é igual a zero, e o oscilador deve mover-se de acordo com a Eq. (2.133), caso o amortecimento seja menor do que o amortecimento crítico. Supondo-se que δt seja tão pequeno que o oscilador não se move apreciavelmente durante este tempo, então escolhe-se $\theta = -(\pi/2) - \omega_1 t_0$, tal que $x = 0$ em $t = t_0$, onde t_0 é o instante em que ocorre o impulso:

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin [\omega_1(t - t_0)]. \quad (2.187)$$

A velocidade em $t = t_0$ é

$$v_0 = \omega_1 A e^{-\gamma t_0}. \quad (2.188)$$

Então,

$$A = \frac{v_0}{\omega_1} e^{\gamma t_0}. \quad (2.189)$$

Quando um impulso P_0 é aplicado em $t = t_0$ a um oscilador em repouso, a solução é a seguinte:

$$x = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ \frac{P_0}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin [\omega_1(t - t_0)], & t > t_0. \end{cases} \quad (2.190)$$

Nas soluções acima, o intervalo de tempo curto δt é desprezado enquanto a força atua.

Verifica-se que o resultado obtido para uma força do tipo impulso depende sómente do impulso total p_0 , sendo independente da forma particular da função $F(t)$, admitindo-se que $F(t)$ só não é desprezível durante um intervalo de tempo muito curto, δt . Algumas das formas de $F(t)$ possíveis e que possuem esta propriedade estão listadas a seguir:

¹⁰ Veja John C. Slater, *Quantum theory of matter*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1951, p. 378.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ p_0/\delta t, & t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t, \\ 0, & t > t_0 + \delta t, \end{cases} \quad (2.191)$$

$$F(t) = \frac{p_0 \delta t}{\pi} \frac{1}{(t - t_0)^2 + (\delta t)^2}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.192)$$

$$F(t) = \frac{p_0}{\delta t \sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(t - t_0)^2}{(\delta t)^2} \right], \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.193)$$

O leitor poderá verificar que cada uma dessas funções são desprezíveis, a não ser num intervalo da ordem de δt em torno de t_0 , e que o impulso total que cada uma delas gera é p_0 . A solução exata da Eq. (2.91) com $F(t)$, dada por qualquer uma das expressões acima, tem que se reduzir à Eq. (2.190) quando $\delta t \rightarrow 0$ (veja Probl. 55).

2.11 PRINCIPIO DE SUPERPOSIÇÃO. OSCILADOR HARMÔNICO COM FORÇA APPLICADA ARBITRARIAMENTE

Uma das propriedades importantes do oscilador harmônico é que o seu deslocamento $x(t)$, quando sujeito a uma força aplicada $F(t)$, que pode ser considerada como a soma de duas ou mais forças $F_1(t)$, $F_2(t)$, ..., é a soma dos deslocamentos $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., que ele teria se cada uma das forças $F_n(t)$ agisse separadamente. Este princípio se aplica a pequenas vibrações mecânicas, vibrações elétricas, ondas sonoras, ondas eletromagnéticas e a todos os fenômenos físicos governados por equações diferenciais lineares. O princípio é expressado no teorema que segue.

Teorema 4. Considere que o conjunto (finito ou infinito)¹¹ de funções $x_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, seja solução das equações

$$m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = F_n(t), \quad (2.194)$$

e

$$F(t) = \sum_n F_n(t). \quad (2.195)$$

Logo a função

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (2.196)$$

satisfaz a equação

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t). \quad (2.197)$$

Para demonstrar este teorema, substitui-se a Eq. (2.196) no primeiro membro da Eq. (2.197):

¹¹ Quando o conjunto de funções é infinito, existem certas restrições matemáticas das quais não é preciso se tratar aqui.

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= m \sum_n \ddot{x}_n + b \sum_n \dot{x}_n + k \sum_n x_n \\
&= \sum_n (m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n) \\
&= \sum_n F_n(t) \\
&= F(t).
\end{aligned}$$

Este teorema permite a determinação da solução da Eq. (2.197) sempre que a força $F(t)$ puder ser escrita como uma soma de forças $F_n(t)$ para as quais seja possível obterem-se as soluções das Eqs. (2.194) correspondentes. Em particular, sempre que $F(t)$ puder ser escrita como a soma de termos que oscilam senoidalmente:

$$F(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \quad (2.198)$$

uma solução particular da Eq. (2.197), considerando-se o Teorema 4 e a Eq. (2.163), será

$$x = \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{1}{[(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2]^{1/2}} \sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n), \quad (2.199)$$

$$\beta_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega_n^2}{2\gamma\omega_n}.$$

A solução geral será então

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{\sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n)}{[(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2]^{1/2}}, \quad (2.200)$$

onde A e θ devem, como se faz usualmente, ser escolhidas para que a solução (2.200) satisfaça as condições iniciais.

Podem-se escrever as Eqs. (2.198) e (2.199) de forma diferente:

$$A_n = C_n \cos \theta_n, \quad B_n = -C_n \sin \theta_n. \quad (2.201)$$

Então,

$$F(t) = \sum_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (2.202)$$

e

$$x = \sum_n \frac{A_n \sin(\omega_n t + \beta_n) - B_n \cos(\omega_n t + \beta_n)}{m[(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2]^{1/2}}. \quad (2.203)$$

Um caso importante desta espécie é o de uma força periódica $F(t)$, isto é, uma força tal que

$$F(t+T) = F(t), \quad (2.204)$$

onde T é o período. Para qualquer função contínua $F(t)$ que satisfaça a Eq. (2.204) (e, na realidade, mesmo para funções somente seccionalmente contínuas), é possível mostrar que $F(t)$ pode ser sempre escrita como a soma de funções senoidais:

$$F(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right), \quad (2.205)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\
B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \quad (2.206)$$

Este resultado permite, pelo menos em princípio, resolver o problema de um oscilador forçado, em relação a qualquer força que varie periodicamente. A soma na Eq. (2.205) é denominada *série de Fourier*.¹² O cálculo real para solucionar por este método é em geral muito trabalhoso, particularmente a determinação das constantes A , θ da Eq. (2.200) que satisfazem as condições iniciais. Entretanto, o fato de se saber que a solução existe é geralmente útil por si só. Note que a parte transiente da solução, que depende das condições iniciais, eventualmente decrescerá até zero se o oscilador for amortecido, e, após um período longo de tempo, restará somente a solução estacionária (2.199). Quando qualquer uma das freqüências $2\pi n/T$ coincide com a freqüência natural ω_0 do oscilador, então o termo correspondente nas séries das Eqs. (2.199) ou (2.203) será relativamente maior do que os termos restantes. Logo, uma força que não oscile senoidalmente, com freqüência igual à metade da freqüência ω_0 , pode fazer com que o oscilador execute uma oscilação aproximadamente senoidal com a sua freqüência natural ω_0 .

A generalização do teorema das séries de Fourier, Eqs. (2.205) ou (2.206), aplicável a forças não periódicas, é o teorema da integral de Fourier, que permite representar qualquer função contínua (ou seccionalmente contínua) $F(t)$, sujeita a certas limitações, como uma superposição de forças que oscilam harmonicamente. Por meio das séries e integrais de Fourier, pode-se resolver a Eq. (2.197) para quase todas as forças $F(t)$ fisicamente razoáveis. Este assunto não continuará a ser discutido; para terminar, basta dizer que os métodos relativos a séries de Fourier e de integrais de Fourier têm importante valor prático na solução de problemas sobre vibração, e esta grande importância em Física, de certo, baseia-se no fato de, em princípio, tal solução existir. Mui-

¹² Para demonstração dos enunciados acima e de discussão mais completa das séries de Fourier, consulte Dunham Jackson, *Fourier series and orthogonal polynomials*. Menasha, Wisconsin, George Banta Pub. Co., 1941 (Cap. 1).

tos resultados importantes podem, então, ser deduzidos sem que realmente se precise calcular as séries ou as integrais.

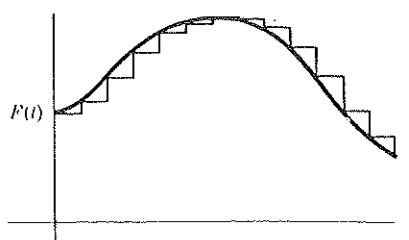


Fig. 2.8 Representação de uma força como a soma de impulsos. Curva espessa: $F(t)$. Curva fina: $\sum_n F_n(t)$.

Um método de solução conhecido como método de Green baseia-se na solução (2.190) para forças do tipo impulso. Pode-se pensar em qualquer força $F(t)$ como a soma de uma série de impulsos, cada uma agindo durante um intervalo curto de tempo δt e gerando um impulso $F(t)\delta t$:

$$F(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(t), \quad (2.207)$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_n, \\ F(t_n), & \text{se } t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ 0, & \text{se } t > t_{n+1}. \end{cases} \quad (2.208)$$

Quando $\delta t \rightarrow 0$, a soma de todas as forças de impulso $F_n(t)$ convergirá para $F(t)$. (Veja Fig. 2.8.) De acordo com o Teorema 4 e a Eq. (2.190), a solução da Eq. (2.197) para uma força dada pela Eq. (2.207) é

$$x(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{n_0} \frac{F(t_n) \delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin [\omega_1(t-t_n)], \quad (2.209)$$

onde $t_{n_0} \leq t < t_{n_0+1}$. Deixando-se $\delta t \rightarrow 0$ e fazendo $t_n = t'$, a Eq. (2.209) torna-se

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin [\omega_1(t-t')] dt'. \quad (2.210)$$

A função

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & \text{se } t' > t, \\ \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m\omega_1} \sin [\omega_1(t-t')], & \text{se } t' \leq t, \end{cases} \quad (2.211)$$

é denominada *função de Green* para a Eq. (2.197). Em termos da função de Green,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt'. \quad (2.212)$$

Se a força $F(t)$ é igual a zero para $t < t_0$, então a solução (2.210) será $x(t) = 0$ para $t < t_0$. Esta solução já estava ajustada às condições iniciais: o oscilador em repouso antes da aplicação da força. Para qualquer outra condição inicial, um transiente dado pela Eq. (2.133), com os valores apropriados de A e θ , deve ser somado à solução anterior. O valor da solução (2.210) é grande no estudo do comportamento transitório de sistemas mecânicos ou elétricos, quando submetidos à ação de um número variado de tipos de forças.

PROBLEMAS

1. a) A taxa máxima de consumo de combustível de um motor a jato ao desenvolver uma impulsão (força) é de $1,492 \times 10^4$ N. Sabendo-se que ele opera com impulsão máxima durante o levantamento de vôo, calcule a potência (em cavalos-vapor) gerada pelo motor do avião quando a velocidade do avião é 10 m/s, 50 m/s e 150 m/s (1 cavalo-vapor = 746 watts).

b) Um motor de pistões, ao alcançar sua taxa máxima de consumo de combustível, desenvolve uma potência constante de 500 HP. Calcule a força que ele aplica sobre o avião durante o levantamento de vôo, quando a velocidade é igual a 10 m/s, 50 m/s e 150 m/s.

2. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força F . Em $t = 0$, sua velocidade é igual a zero. Use o Teorema do Momento Linear para determinar a velocidade em qualquer tempo t posterior. Calcule a energia da partícula em qualquer tempo posterior, usando as Eqs. (2.7) e (2.8) e verifique se os resultados concordam.

3. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força dada pela Eq. (2.192). (Nessa equação, δt é um intervalo de tempo pequeno e fixo.) Determine o impulso total gerado pela força durante o tempo $-\infty < t < \infty$. Se sua velocidade inicial (em $t \rightarrow -\infty$) for v_0 , qual a velocidade final (em $t \rightarrow \infty$)? Use o Teorema do Momento Linear.

4. Um próton de alta velocidade e carga elétrica e desloca-se a velocidade constante v_0 sobre uma linha reta próxima a um elétron de massa m e carga $-e$, inicialmente em repouso. O elétron encontra-se à distância a da trajetória do próton.

a) Suponha que o próton passe pelo elétron tão rapidamente que este não tenha tempo suficiente para deslocar-se a uma distância apreciável até que o próton esteja muito longe. Mostre que a componente de força em direção perpendicular à linha sobre a qual o próton se desloca é

$$F = \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}, \quad (\text{unidades MKS})$$

onde $t = 0$, quando o próton alcança a distância de maior aproximação do elétron.

b) Calcule o impulso gerado por esta força.

c) Usando estes resultados, calcule (aproximadamente) o momento linear final e a energia cinética final do elétron.

e) Mostre que a condição para que a suposição original no item (a) seja válida é $(e^2/4\pi\epsilon_0) \ll \frac{1}{2}mv_0^2$.

5. Uma partícula de massa m em repouso em $t = 0$ está submetida à força $F(t) = F_0 \sin^2 \omega t$.

a) Esboce a forma que se deve esperar para $v(t)$ e $x(t)$, para vários períodos de oscilação da força.

b) Determine $v(t)$ e $x(t)$ e compare com o seu esboço anterior.

6. Uma partícula de massa m e velocidade inicial v_0 está sujeita a uma força $F(t)$ que começa em $t = 0$, como a mostrada na Fig. 2.9.

a) Faça um esboço mostrando $F(t)$ e a força esperada de $v(t)$ e $x(t)$.

b) Ache uma função simples $F(t)$ que tenha esta forma, e determine $x(t)$ e $v(t)$.

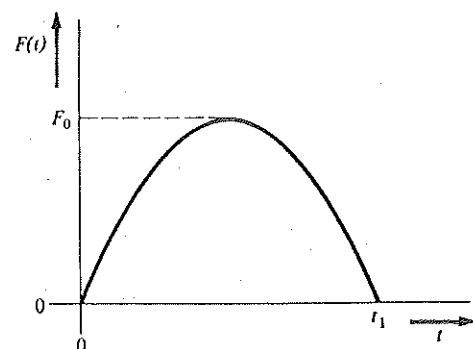


Fig. 2.9 Força apresentada no Probl. 6.

7. Uma partícula, cuja velocidade original seja v_0 , está sujeita à força dada pela Eq. (2.191).

a) Determine $v(t)$ e $x(t)$.

b) Mostre que, quando $\delta t \rightarrow 0$, o movimento se aproxima de um movimento a velocidade constante que muda abruptamente sua velocidade em $t = t_0$ de uma quantidade de p_0/m . (δt é um intervalo de tempo fixo.)

8. Um microfone, constituído de um diafragma de massa m e área A , está suspenso de forma a poder mover-se livremente em direção perpendicular ao diafragma. Uma on-

da sonora causa um impacto sobre o diafragma fazendo com que a pressão em sua face frontal seja

$$p = p_0 + p' \sin \omega t.$$

Suponha que a pressão na face posterior permaneça constante e igual à pressão atmosférica p_0 . Desprezando todas as outras forças, com exceção daquela devida à diferença de pressão através do diafragma, determine o seu movimento. Num microfone real existe uma força restauradora que age sobre o diafragma que o impede de se deslocar para muito longe. Como se desprezou esta força aqui, nada o impedirá de deslocar-se, sem parar, a velocidade constante. Evite esta dificuldade escolhendo a velocidade inicial de tal forma que o movimento seja puramente oscilatório. Se a voltagem de saída do microfone for proporcional à pressão do som p' e independente de ω , como deverá depender da amplitude e da freqüência do movimento do diafragma?

9. Um cabo-de-guerra é seguro por dois grupos de cinco homens, cada um. Cada homem pesa 70 kg e pode puxar o cabo inicialmente com uma força de 100 N. Inicialmente os dois grupos estão compensados, mas quando os homens cansam, a força com que cada um puxa o cabo decresce de acordo com a relação

$$F = (100 \text{ N}) e^{-t/\tau},$$

onde o tempo médio para atingir o cansaço é de 10 s para um grupo e 20 s para o outro. Determine o movimento. Suponha que nenhum dos homens solte o cabo ($g = 9,8 \text{ m/s}^{-2}$). Qual a velocidade final dos dois times? Qual das suposições é responsável por este resultado não razoável?

10. Uma partícula inicialmente em repouso está sujeita, começando em $t = 0$, a uma força

$$F = F_0 e^{-it} \cos(\omega t + \theta).$$

a) Determine o seu movimento.

b) Como a velocidade final depende de θ e de ω ? [Sugestão. Os cálculos algébricos serão simplificados escrevendo-se $\cos(\omega t + \theta)$ em termos de funções exponenciais complexas.]

11. Um barco cuja velocidade inicial é v_0 é desacelerado por uma força de atrito $F = -bv^2$.

$$F = -bv^2.$$

a) Determine o seu movimento.

b) Determine o tempo e a distância necessária para parar o barco.

12. Um barco é desacelerado por uma força $F(v)$. Sua velocidade decresce de acordo com a fórmula

$$v = C(t - t_1)^2,$$

onde C é uma constante e t_1 é o tempo que ele leva para parar. Determine a força $F(v)$.

13. Um motor a jato desenvolve uma impulsão constante máxima F_0 , sendo usado para impulsionar um avião cuja força de atrito é proporcional ao quadrado da velocidade. Se o avião iniciar seu movimento em $t = 0$ a velocidade desprezível e acelerar com a impulsão máxima, determine a sua velocidade $v(t)$.

14. Suponha que o motor de um avião de massa m impulsionado a hélice fornece uma potência constante P à sua aceleração máxima. Determine a força $F(v)$. Desprezando o atrito, use o método discutido na Seç. 2.4 para determinar a velocidade e a posição do avião, quando ele é acelerado ao longo da pista, partindo do repouso em $t = 0$. Verifique os resultados obtidos para a velocidade, usando o teorema da energia. Em que aspectos as suposições usadas neste problema não são realistas em relação à Física? Em que aspectos as respostas mudariam se fossem adotadas suposições mais realistas?

15. O motor de um carro de corrida de massa m fornece uma potência constante P , em sua aceleração máxima. Supondo que o atrito seja proporcional à velocidade, ache uma expressão para $v(t)$, quando o carro é acelerado, a partir do repouso, com a potência máxima. A sua solução comporta-se corretamente quando $t \rightarrow \infty$?

16. a) Um corpo de massa m desliza sobre uma superfície horizontal áspera. O coeficiente de atrito estático é μ_s e o coeficiente de atrito de deslizamento, μ . Determine uma função analítica, $F(v)$, para representar a força de atrito, que tenha o valor constante apropriado, em velocidades apreciáveis, e reduz-se ao valor estático em velocidades muito baixas.

b) Ache o movimento sob a ação da força que você determinou, no caso de o corpo partir com velocidade v_0 .

17. Determine $v(t)$ e $x(t)$ para uma partícula de massa m que inicia o seu movimento em $x_0 = 0$ a velocidade v_0 e submetido à ação de uma força dada pela Eq. (2.31) com $n \neq 1$. Determine o tempo necessário para a partícula parar, a distância percorrida até parar, verificando os comentários apresentados no último parágrafo da Seç. 2.4.

18. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força

$$F = -kx + kx^3/a^2$$

onde k e a são constantes.

a) Determine $V(x)$ e discuta os possíveis tipos de movimento que possam ocorrer.

b) Mostre que se $E = \frac{1}{4}ka^2$, a integral na Eq. (2.46) pode ser resolvida por métodos elementares. Determine $x(t)$ para este caso, escolhendo x_0 e t_0 de maneira conveniente. Mostre que os seus resultados concordam com a discussão qualitativa do item (a) para esta energia.

19. Uma partícula de massa m é repelida da origem por uma força inversamente proporcional ao cubo de sua distância à origem. Escreva e resolva a equação do movimen-

to, considerando que a partícula está inicialmente em repouso a uma distância x_0 da origem.

20. Uma massa m está conectada à origem por meio de uma mola de constante k , cujo comprimento, quando relaxada, é igual a 1. A força restauradora é aproximadamente proporcional à distância em que a mola foi esticada ou comprimida, admitindo-se que não seja esticada ou comprimida demais. Entretanto, quando a mola é comprimida demais, a força cresce rapidamente, de tal forma que é impossível comprimí-la até um tamanho menor do que a metade do seu comprimento, quando em repouso. Quando a mola é esticada num tamanho maior do que duas vezes o seu comprimento, quando relaxada, ela começa a enfraquecer, e a força restauradora torna-se igual a zero quando esticada em comprimentos muito grandes.

a) Determine uma função força $F(x)$ que represente este comportamento. (Uma mola real deforma-se, se esticada demais, de tal maneira que F se torna função da sua história anterior, mas você deve supor que F depende somente de x .)

b) Determine $V(x)$ e descreva os movimentos que podem ocorrer.

21. Uma partícula de massa m acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é

$$V = ax^2 - bx^3.$$

a) Determine a força.

b) A partícula parte da origem $x = 0$ com velocidade v_0 . Mostre que, se $|v_0| < v_c$, onde v_c é uma certa velocidade crítica, a partícula permanecerá confinada à região próxima da origem. Determine v_c .

22. Uma partícula alfa de um núcleo acha-se presa por um potencial cuja forma é mostrada na Fig. 2.10.

a) Descreva os possíveis tipos de movimento.

b) Escreva uma função $V(x)$ que tenha esta forma geral e tenha os valores $-V_0$ e V_1 em $x = 0$ e $x = \pm x_1$, determinando a força correspondente.

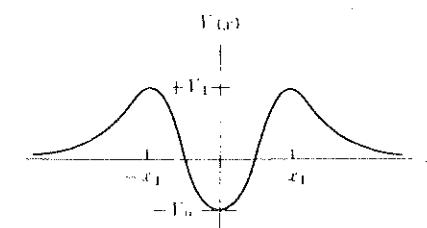


Fig. 2.10

23. Uma partícula está sujeita à ação da força

$$F = -kx + \frac{a}{x^3}.$$

a) Determine o potencial $V(x)$, descreva a natureza das soluções e determine a solução $x(t)$.

b) Você pode dar uma interpretação simples do movimento quando $E^2 \gg ka$?

24. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de uma força dada por

$$F = B \left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{28a^5}{x^5} + \frac{27a^8}{x^8} \right).$$

A partícula desloca-se somente ao longo do eixo dos x positivos.

a) Determine e esboce a energia potencial. (B e a são positivos.)

b) Descreva os tipos de movimento que podem ocorrer. Localize todas as posições de equilíbrio e determine a freqüência para pequenas oscilações, em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

c) Uma partícula inicia seu movimento em $x = 3a/2$ com uma velocidade $v = -v_0$, onde v_0 é positivo. Qual o menor valor de v_0 para o qual a partícula eventualmente pode escapar para uma distância muito grande? Descreva o movimento neste caso. Qual é a velocidade máxima que a partícula terá? Qual a sua velocidade em um ponto muito afastado do ponto de partida?

25. A energia potencial para a força existente entre dois átomos, numa molécula diatômica, tem a seguinte forma aproximada:

$$V(x) = -\frac{a}{x^b} + \frac{b}{x^{12}},$$

onde x é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas.

a) Determine a força.

b) Supondo-se que um dos átomos seja muito pesado e permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os movimentos possíveis.

c) Determine a distância de equilíbrio e o período para pequenas oscilações, em torno da posição de equilíbrio, se a massa do átomo mais leve for m .

26. Ache a solução para o movimento de um corpo sujeito à ação de uma força linear repulsiva $F = kx$. Mostre que este tipo de movimento é o esperado em torno de um ponto de equilíbrio instável.

27. Uma partícula de massa m move-se num poço de potencial dado por

$$V(x) = -\frac{V_0a^2(a^2 + x^2)}{8a^4 + x^4}.$$

a) Esquematize $V(x)$ e $F(x)$.

b) Discuta os movimentos que podem ocorrer. Localize todos os pontos de equilíbrio e determine a freqüência para pequenas oscilações em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

c) Uma partícula inicia o seu movimento a uma grande distância do poço de potencial com velocidade v_0 , em direção ao poço. Quando passa pelo ponto $x = a$, sofre uma colisão com outra partícula, durante a qual ela perde uma fração α de sua energia cinética. Qual deve ser o valor de α para que a partícula permaneça presa no poço após a colisão? Qual o valor de α para que a partícula seja aprisionada num dos lados do poço de potencial? Determine os pontos de retorno do novo movimento se $\alpha = 1$.

28. Resolva a Eq. (2.65) usando cada um dos três métodos discutidos nas Seçs. 2.3, 2.4 e 2.5.

29. Derive as soluções (2.74) e (2.75) para um corpo em queda livre sujeito à ação de uma força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade.

30. Um corpo de massa m sai do repouso impulsionada por um meio que exerce sobre ele um atrito de arrastamento (força) $be^{\alpha|v|}$.

a) Determine sua velocidade $v(t)$.

b) Qual a velocidade terminal?

c) Expanda o resultado obtido, em série de potências de t , mantendo termos até t^2 .

d) Por que a solução não concorda com a Eq. (1.28), mesmo no caso de pequenos intervalos de tempo t ?

31. Um projétil é disparado verticalmente para cima com velocidade v_0 . Determine seu movimento, admitindo a existência de um atrito de arrastamento proporcional ao quadrado da velocidade (g constante).

32. Derive equações análogas às Eqs. (2.85) e (2.86) para o movimento de um corpo cuja velocidade é maior do que a de escape. [Sugestão. Faça $\sinh \beta = (Ex/mMG)^{1/2}$.]

33. Determine o movimento de um corpo projetado da Terra, na vertical, a velocidade igual à velocidade de escape. Despreze a resistência do ar.

34. A partir da igualdade $e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$, obtenha as fórmulas para $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ em termos de $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

35. Escreva $\cos \theta$ de acordo com a fórmula (2.122) e derive a seguinte relação

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta.$$

36. Determine as soluções gerais das equações

$$a) m\ddot{x} + b\dot{x} - kx = 0,$$

$$b) m\ddot{x} - b\dot{x} + kx = 0.$$

Interprete fisicamente estas equações e suas soluções, supondo que elas sejam as equações de movimento de uma partícula.

37. Mostre que quando $\omega_0^2 - \gamma^2$ é muito pequeno, a solução subamortecida (2.133) é igual à solução criticamente amortecida (2.146), para um pequeno intervalo de tempo. Qual a relação entre as constantes C_1 , C_2 e A , θ ? Este resultado sugere como alguém pode descobrir as soluções adicionais (2.143) no caso crítico.

38. Um vagão de carga pesando 10^4 kg rola livremente e chega ao final de sua linha à velocidade de 2 m/s . No final, existe um batente que consiste numa mola com $k = 1,6 \times 10^4 \text{ kg/s}^2$. O vagão comprime a mola. Considerando que a força de atrito seja proporcional à velocidade, determine a constante de amortecimento b_c para o amortecimento crítico. Esboce o deslocamento $x(t)$ e determine a distância máxima em que a mola é comprimida (para $b = b_c$). Mostre que, se $b \geq b_c$, o vagão parará, mas se $b \leq b_c$, o vagão será lançado de volta e se deslocará em sentido contrário sobre os trilhos. (Note que o vagão não se encontra preso à mola. Durante o tempo em que ele está em contato com a mola, ele se move de acordo com a equação de um oscilador harmônico, mas, após perder o contato, ele se moverá sobre os trilhos em sentido contrário ao inicial.)

39. Uma massa submetida a uma força restauradora linear $-kx$ e a um amortecimento $-bx$ desloca-se a uma distância x_0 da posição de equilíbrio, sendo largada com velocidade inicial igual a zero. Determine os movimentos para os casos de subamortecimento, amortecimento crítico e superamortecimento.

40. Resolva o Probl. 39 para o caso em que a massa parte de sua posição de equilíbrio a velocidade v_0 . Esboce o movimento para os três casos.

41. Resolva o Probl. 39 para o caso em que a massa sofre um deslocamento inicial x_0 e uma velocidade inicial v_0 orientada na direção do ponto de equilíbrio. Mostre que se $|v_0| > |\gamma_1 x_0|$, a massa ultrapassará a posição de equilíbrio, nos casos de amortecimento crítico e superamortecimento, de modo que os comentários feitos no final da Seç. 2.9 não se aplicam a este caso. Esboce os movimentos para este caso.

42. Deseja-se construir uma balança de banheiro cuja deflexão da plataforma tem $2,5\text{ cm}$ quando pesa um homem 91 kg . Se o movimento for criticamente amortecido, determine a constante k da mola que deve ser usada e a constante de amortecimento b . Mostre que o movimento será superamortecido para uma pessoa mais leve. Se um homem de 91 kg subir na balança, qual a força máxima para cima que a plataforma da balança exercerá sobre os pés dele, enquanto a plataforma voltar para a posição de repouso?

43. Uma massa de $1\,000\text{ kg}$ cai de uma altura de 10 m sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se desenhar uma mola e um amortecedor sobre os quais a platafor-

ma será montada, de tal forma que ela possa atingir uma nova posição de equilíbrio $0,2\text{ m}$ abaixo da posição original tão depressa quanto possível, depois de sofrer o impacto, porém sem ultrapassá-la.

a) Determine a constante k da mola e a constante de amortecimento b do amortecedor. Certifique-se que a solução $x(t)$ encontrada satisfaz as condições iniciais corretas e que não ultrapasse a posição de equilíbrio.

b) Determine, até dois algarismos significativos, o tempo necessário para que a plataforma chegue a 1 mm de sua posição final.

44. Uma força $F_0 e^{-at}$ age sobre um oscilador harmônico de massa m , a constante da mola k e a constante de amortecimento b . Determine uma solução particular da equação do movimento, partindo da suposição de que existe uma solução com a mesma dependência do tempo que a força aplicada.

45. a) Determine o movimento de um oscilador harmônico amortecido, sujeito à força constante F_0 , "adivinhando" uma solução estacionária da equação não-homogênea (2.91) e acrescentando uma solução da equação homogênea.

b) Resolva o mesmo problema fazendo a substituição $x' = x - a$, e escolhendo a constante a de forma a permitir a redução da equação em x' à equação homogênea (2.90). Mostre, em seguida, que o efeito da aplicação de uma força constante é meramente deslocar a posição de equilíbrio sem afetar a natureza das oscilações.

46. Um oscilador harmônico subamortecido é submetido à ação de uma força aplicada

$$F = F_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta).$$

Determine uma solução particular expressando F como parte real de uma função exponencial complexa e procurando uma solução para x que tenha a mesma dependência exponencial do tempo.

47. Um oscilador harmônico sem amortecimento ($b = 0$), inicialmente em repouso, é submetido, começando em $t = 0$, a uma força $F_0 \sin \omega t$. Determine o deslocamento $x(t)$.

48. Um oscilador harmônico sem amortecimento ($b = 0$) é submetido à ação de uma força $F_0 \cos \omega t$. Mostre que se $\omega = \omega_0$, não existirá solução estacionária. Determine uma solução particular, admitindo inicialmente uma solução para $\omega = \omega_0 + \epsilon$, e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$. [Sugestão. Se o leitor iniciar com a solução do estado estacionário e fizer $\epsilon \rightarrow 0$, ela divergirá. Tente começar com uma solução que satisfaça a condição inicial $x_0 = 0$, de forma que ela não divirja em $t = 0$.]

49. Um oscilador harmônico amortecido de massa m e constante de mola k é submetido à ação de uma força $F_0 \cos \omega t$. Se em $t = 0$, $x = x_0$ e $v = v_0$, qual é $x(t)$?

50. A força $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$ age sobre um oscilador a partir de $t = 0$.

- Quais os valores iniciais de x e v , de modo que não exista transiente.
- Se, ao contrário, $x_0 = v_0 = 0$, determine a amplitude A e a fase θ do transiente em termos de F_0 , θ_0 .

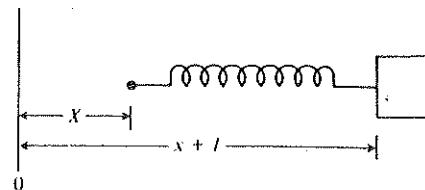


Fig. 2.11

51. Uma massa m é atada a uma mola com constante de força k e comprimento relaxado l , como é mostrado na Fig. 2.11. A extremidade esquerda da mola não é fixa e oscila com amplitude a , freqüência ω , de forma que $X = a \sin \omega t$, onde X é medido a partir de um ponto de referência fixo, 0. Escreva a equação do movimento e mostre que é equivalente à Eq. (2.144) com uma força aplicada $ka \sin \omega t$, sendo o atrito dado pela Eq. (2.31). Mostre que, se o atrito é originado por um amortecedor ligado entre as extremidades da mola, de forma que a força de amortecimento seja $-b(\dot{x} - \dot{X})$, então a equação do movimento terá uma força aplicada adicional $\omega ba \cos \omega t$.

52. Um automóvel pesando uma tonelada (incluindo passageiros, mas excluindo rodas e tudo mais abaixo das molas) desce uma polegada para cada 100 kg adicionais de passageiros. Ele se desloca a 36 km/h sobre uma estrada com ondulações senoidais, que apresenta uma distância de 30 cm entre duas elevações e uma amplitude de 5 cm (altura das elevações e dos vales em relação ao nível médio da estrada). Determine a amplitude de oscilações do automóvel, supondo que ele se move verticalmente como um oscilador harmônico simples sem amortecimento (sem amortecedores). (Despreze a massa das rodas e das molas.) Se fossem instalados amortecedores, o carro oscilaria mais ou menos? (Use os resultados do Probl. 51.)

53. Um oscilador harmônico, sem amortecimento, de massa m , freqüência natural ω_0 , está inicialmente em repouso e é submetido em $t = 0$ a uma impulsão de forma a partir de $x_0 = 0$ com velocidade inicial v_0 e a oscilar livremente até $t = 3\pi/2\omega_0$. A partir deste tempo, uma força $F = B \cos(\omega t + \theta)$ é aplicada. Determine o seu deslocamento.

54. Determine o deslocamento de uma massa submetida à ação de uma força restauradora $-kx$ e a uma força de amortecimento $(\pm)\mu mg$ devido ao atrito de deslizamento existente entre superfícies secas. Mostre que as oscilações são isócronas (período independente da amplitude) com a amplitude de oscilação decrescendo de $2\mu g/\omega_0^2$ durante cada meio ciclo até que a massa atinja o repouso. [Sugestão. Use o

resultado do Probl. 45. Quando a força tem uma forma algébrica diferente, em tempos diferentes, durante o movimento, como neste caso, onde o sinal da força de amortecimento tem de ser escolhido de forma a que a força seja sempre oposta à velocidade, é necessário resolver a equação de movimento separadamente, para cada intervalo de tempo, durante o qual se deve usar uma expressão particular para força, escolhendo as condições iniciais para cada intervalo de tempo, a posição e a velocidade finais do intervalo de tempo anterior.]

55. Um oscilador harmônico sem amortecimento ($\gamma = 0$), inicialmente em repouso, é submetido à ação de uma força dada pela Eq. (2.191).

- Determine $x(t)$.
- No caso de um p_0 fixo, para que valor de δt a amplitude de oscilação final é máxima?
- Mostre que quando $\delta t \rightarrow 0$, a sua solução se aproxima da fornecida pela Eq. (2.190).

56. Encontre uma solução análoga à Eq. (2.190) para um oscilador criticamente amortecido, submetido a um impulso p_0 , aplicado em $t = t_0$.

57. a) Determine, usando o princípio de superposição, o movimento de um oscilador subamortecido [$\gamma = (1/3)\omega_0$] inicialmente em repouso e submetido, após $t = 0$, à ação da força

$$F = A \sin \omega_0 t + B \sin 3\omega_0 t,$$

onde ω_0 é a freqüência natural do oscilador.

b) Qual deve ser a razão entre B e A para que as oscilações forçadas com freqüência $3\omega_0$ tenham a mesma amplitude que as oscilações cuja freqüência é ω_0 ?

58. A força $F_0(1 - e^{-at})$ age sobre um oscilador harmônico que está em repouso em $t = 0$. A massa é m , a constante da mola é $k = 4ma^2$ e $b = ma$. Determine o movimento. Esboce $x(t)$.

*59. Resolva o Probl. 58 para o caso em que $k = ma^2$ e $b = 2ma$.¹³

60. Determine, pelo método da série de Fourier, a solução estacionária para um oscilador harmônico sujeito à força

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } nT < t \leq (n + \frac{1}{2})T, \\ F_0, & \text{se } (n + \frac{1}{2})T < t \leq (n + 1)T, \end{cases}$$

onde n é um inteiro e $T = 6\pi/\omega_0$, onde ω_0 é a freqüência de ressonância do oscilador. Mostre que, se $\gamma \ll \omega_0$, o movimento é aproximadamente senoidal com período $T/3$.

¹³ Usa-se um asterisco, como foi explicado no Prefácio, para indicar problemas particularmente difíceis.

61. Determine, usando a série de Fourier, o estado estacionário de um oscilador harmônico sem amortecimento, sujeito à ação de uma força que tem a forma de uma onda senoidal retificada:

$$F(t) = F_0 |\operatorname{sen} \omega_0 t|,$$

onde ω_0 é a freqüência natural do oscilador.

62. Resolva o Probl. 58 usando o método de Green (2.210).

63. Um oscilador subamortecido, inicialmente em repouso, recebe, em $t = 0$, a ação da força dada pela Eq. (2.191). Determine o seu movimento, usando o método de Green (2.210).

64. Usando o resultado do Probl. 56, determine, pelo método de Green, o movimento de um oscilador criticamente amortecido, inicialmente em repouso e submetido à ação de uma força $F(t)$.

CAPÍTULO 3

MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM DUAS OU TRÊS DIMENSÕES

3.1 ÁLGEBRA VETORIAL

O estudo dos movimentos em duas ou três dimensões torna-se muito mais simples quando se introduz o conceito de vetor. Define-se geometricamente vetor como uma grandeza física, caracterizada por um módulo e uma direção no espaço. Exemplos de grandezas vetoriais são a velocidade, a força e a posição em relação a uma origem fixa. Esquematicamente, representa-se um vetor por meio de uma seta, cujos comprimento e direção representam o módulo e a direção. Neste livro, representa-se vetor por uma letra em grifo negrito. A mesma letra em grifo representa o módulo do vetor (veja Fig. 3.1), que também é representado por barras verticais envolvendo o símbolo vetorial:

$$A = |A|. \quad (3.1)$$

Dois vetores são iguais quando têm o mesmo módulo e a mesma direção; o conceito de vetor não faz nenhuma referência a qualquer localização particular.¹



Fig. 3.1 Um vetor A e o seu módulo $|A|$.

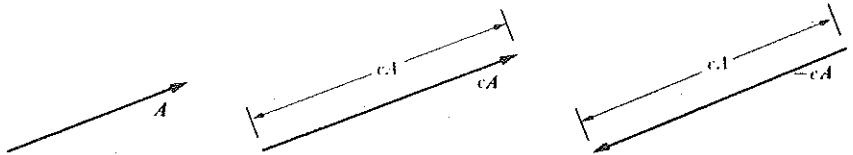


Fig. 3.2 Definição de multiplicação de vetor por escalar ($c > 0$).

¹ Muitas vezes classificam-se os vetores em "livres", aqueles que não se localizam no espaço; "deslizantes", os que podem estar localizados em qualquer ponto ao longo de uma linha; e "fixos", os que devem estar localizados num ponto definido do espaço. Aqui, distinguem-se os vetores apenas pelo módulo e direção, de forma que dois vetores podem ser considerados iguais se tiverem o mesmo módulo e a mesma direção, independente de sua posição no espaço. No caso de uma grandeza vetorial, como força, pode ser necessário especificar o vetor não somente por seu módulo e sua direção, mas também pelo "ponto" em que ele for aplicado.

Qualquer grandeza representada por um número comum (positivo ou negativo) denomina-se freqüentemente “escalar”, para distingui-la de vetor. Define-se o produto de um vetor A e de um escalar positivo c como um vetor cA na mesma direção de A e módulo $|c|A$. Se c for negativo, define-se cA como tendo módulo $|c|A$ e direção oposta a A (veja Fig. 3.2). Segue-se desta definição que

$$|cA| = |c| |A|. \quad (3.2)$$

É também fácil mostrar, com base nesta definição, que a multiplicação por um escalar é associativa, com o seguinte significado:

$$(cd)A = c(dA). \quad (3.3)$$

Às vezes é conveniente escrever o escalar à direita do vetor, definindo-se Ac como representando o mesmo vetor cA :

$$Ac = cA. \quad (3.4)$$

A soma $(A + B)$ de dois vetores A e B é definida como o vetor que se estende da extremidade inferior de A à ponta de B , quando A é desenhado com sua ponta na extremidade inferior de B , como é mostrado na Fig. 3.3. Esta definição é equivalente à conhecida regra do paralelogramo, mas seu uso é mais conveniente, podendo-se facilmente estendê-la à soma de um número qualquer de vetores, como é mostrado na Fig. 3.4.

Com base na definição dada na Fig. 3.3, pode-se imediatamente provar que a soma de vetores é comutativa e associativa:

$$A + B = B + A, \quad (3.5)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C). \quad (3.6)$$

De acordo com a Eq. (3.6), pode-se omitir os parênteses ao escrever uma soma de vetores, porque não importa a ordem em que eles são somados. Das definições dadas pelas Figs. 3.2 e 3.3, pode-se também demonstrar as seguintes leis da distributividade:

$$c(A + B) = cA + cB, \quad (3.7)$$

$$(c + d)A = cA + dA. \quad (3.8)$$

Estas afirmativas podem ser provadas pelos diagramas que representem os membros de cada uma das equações, de acordo com as definições apresentadas acima. Por exemplo,

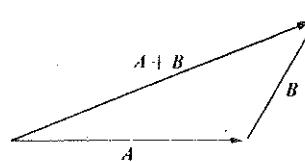


Fig. 3.3 Definição de adição de dois vetores.

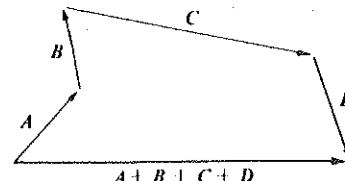


Fig. 3.4 Adição de vários vetores.

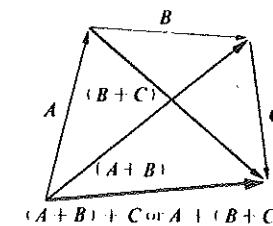


Fig. 3.5 Demonstração da Eq. (3.6).

o diagrama na Fig. 3.5 torna evidente que o resultado da adição de C com $(A + B)$ é o mesmo da adição de $(B + C)$ com A .

De acordo com as Eqs. (3.3) a (3.8), a soma e o produto definidos até aqui seguem a maioria das propriedades algébricas dos números comuns, o que justifica chamá-las somas e produtos. Logo, não é necessário guardar estes resultados na memória, somente lembrar que se pode manipular estas somas e produtos como se manipulam os números na Álgebra comum, apenas tendo a preocupação de lembrar que o produto definido pela Fig. 3.2 pode ser obtido somente entre um escalar e um vetor, que o resultado será um vetor e que a soma definida pela Fig. 3.3 pode ser obtida somente entre dois vetores, sendo o resultado um vetor.

Um vetor pode ser representado algebricamente por seus *componentes*, ou *projeções*, ao longo de um sistema de eixos coordenados, baixando perpendiculares das extremidades do vetor sobre os eixos coordenados, como se vê na Fig. 3.6. Logo, os componentes do vetor ao longo do eixo são definidos como o comprimento do segmento cortado no eixo por estas perpendiculares. O componente é positivo, ou negativo, se a projeção da ponta estiver na direção positiva, ou negativa, da projeção da outra extremidade do vetor ao longo do eixo coordenado. Os componentes de um vetor A

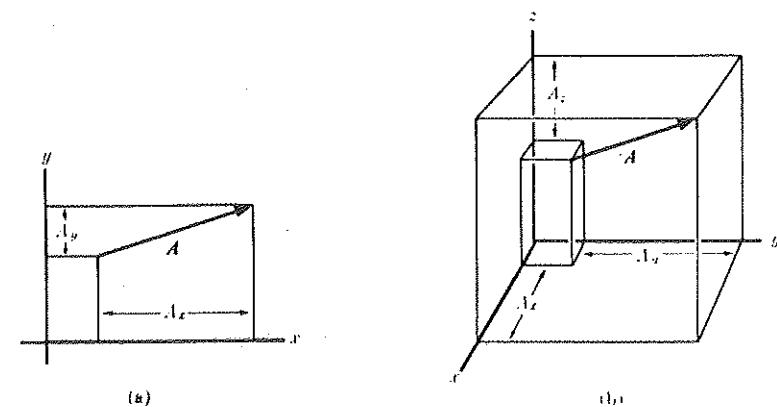


Fig. 3.6 (a) Componentes de um vetor no plano. (b) Componentes de um vetor no espaço.

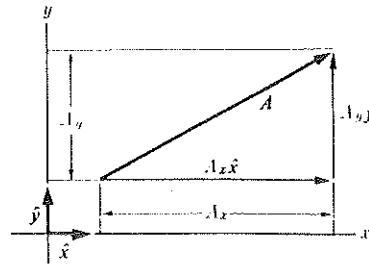


Fig. 3.7 Demonstração gráfica da fórmula $A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$.

ao longo dos eixos dos x , y e z serão escritos como A_x , A_y e A_z . A notação (A_x, A_y, A_z) será usada às vezes para representar o vetor A :

$$A = (A_x, A_y, A_z). \quad (3.9)$$

Definindo-se os vetores unitários \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} , ao longo dos eixos dos x , y e z , respectivamente, pode-se, então, escrever qualquer vetor como a soma dos produtos dos seus componentes por \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} .²

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}. \quad (3.10)$$

A validade desta fórmula pode ser verificada desenhando-se um diagrama em que os três vetores do segundo membro, que são paralelos aos três eixos, são somados para se obter A . A Fig. 3.7 mostra esta construção para o caso de duas dimensões.

Há duas maneiras equivalentes para se definir vetor: geometricamente, como uma grandeza com módulo e uma direção no espaço, ou algebricamente, como o conjunto de três números (A_x, A_y, A_z) conhecidos como componentes.³ As operações de adição e multiplicação por um escalar, já definidas geometricamente nas Fig. 3.2 e 3.3 em termos de comprimento e direção dos vetores envolvidos, podem também ser definidas algebricamente como operações sobre os componentes dos vetores. Assim cA é um vetor cujos componentes são os componentes de A , multiplicados por c :

$$cA = (cA_x, cA_y, cA_z), \quad (3.11)$$

e $(A + B)$ é um vetor cujos componentes são obtidos pela soma dos componentes de A e B correspondentes:

$$A + B = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z). \quad (3.12)$$

² Um circunflexo sobre uma letra em negrito indica vetores unitários.

³ Estas duas maneiras de definir um vetor não são exatamente equivalentes, como se considera aqui. Para defini-lo algebricamente, é necessário escolher um sistema de coordenadas, enquanto a definição geométrica não se refere a nenhum sistema de eixos, em particular. Esta discordância pode ser remediada fazendo-se com que a definição algébrica também seja independente de qualquer sistema de eixos, em particular, isto é, estudando-se como os componentes variam quando se mudam os eixos e definindo o vetor algebricamente como o conjunto de três grandes que se transformam de determinada maneira quando os eixos mudam. No que se refere a este capítulo, este refinamento não é de interesse.

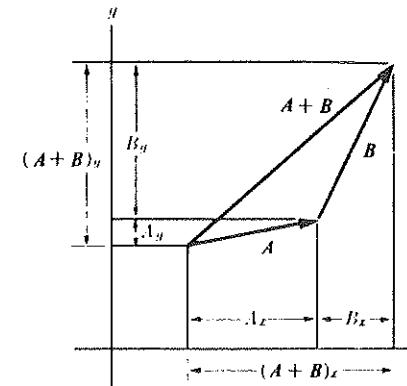


Fig. 3.8 Demonstração da equivalência das definições algébrica e geométrica de adição de vetores.

A equivalência entre as definições (3.11) e (3.12) e as definições geométricas correspondentes podem ser demonstradas desenhandose diagramas apropriados. A Fig. 3.8 constitui uma prova da Eq. (3.12) para o caso bidimensional. Todos os vetores são desenhados na Fig. 3.8 de tal forma que todos os componentes são positivos; para demonstração completa, diagramas similares são úteis em casos onde um ou ambos os componentes de qualquer um dos vetores sejam negativos. O módulo de um vetor pode ser definido algebricamente como segue:

$$|A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}, \quad (3.13)$$

onde somente a raiz positiva deve ser considerada.

Provas algébricas para as Eqs. (3.2), (3.3), (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8) podem ser baseadas nas definições (3.11), (3.12) e (3.13). Por exemplo, para provar a Eq. (3.7), demonstrase que cada componente do primeiro membro concorda com os componentes do segundo membro. Assim, para o componente x , a demonstração será:

$$\begin{aligned} [c(A + B)]_x &= c(A + B)_x && [\text{pela Eq. (3.11)}] \\ &= c(A_x + B_x) && [\text{pela Eq. (3.12)}] \\ &= cA_x + cB_x \\ &= (cA)_x + (cB)_x && [\text{pela Eq. (3.11)}] \\ &= (cA + cB)_x. && [\text{pela Eq. (3.12)}] \end{aligned}$$

Como todos os componentes são tratados da mesma maneira nas definições (3.11), (3.12), (3.13), a mesma demonstração será válida para os componentes x e y , concluindo-se, então, que os vetores do primeiro e do segundo membro da Eq. (3.7) são iguais.

Em vista da equivalência das definições geométrica e algébrica das operações com vetores, é desnecessário, em caso de aplicações geométricas, fornecer ambas as provas — algébrica e geométrica — para cada fórmula da Álgebra Vetorial. Será suficiente em-

pregar a mais fácil. No entanto, existem casos importantes em Física em que é preciso considerar conjuntos de grandezas que se comportam algebricamente como componentes de vetores, embora elas não possam ser interpretadas geometricamente como grandezas com módulo e direção no espaço comum. Para que se possam aplicar as regras inerentes à Álgebra Vetorial nesses casos, é importante saber que é fácil demonstrar todas essas regras por meio de simples definições algébricas das operações com vetores. O método geométrico tem a vantagem de permitir a visualização do significado das várias notações vetoriais e das fórmulas. O método algébrico simplifica certas demonstrações e, ainda, amplia o conceito matemático de vetor, incluindo muitos casos em que o significado geométrico comum não é mantido.

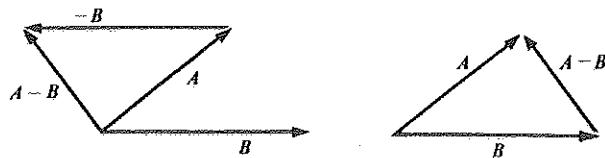


Fig. 3.9 Dois métodos para subtração de vetores.

Pode-se definir a subtração de vetores em termos da adição e da multiplicação por -1 :

$$A - B = A + (-B) = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z). \quad (3.14)$$

A diferença $A - B$ pode ser encontrada geometricamente de acordo com qualquer um dos dois esquemas mostrados na Fig. 3.9. Pode-se demonstrar que a subtração de vetores possui todas as propriedades algébricas que, por analogia, também se espera da subtração de números.

É útil definir um *produto escalar* ($A \cdot B$) de dois vetores A e B como o produto de seus módulos multiplicado pelo co-seno do ângulo por eles formado (Fig. 3.10):

$$A \cdot B = AB \cos \theta. \quad (3.15)$$

Produto escalar é um número escalar, também chamado *produto ponto* ou *produto interno*, podendo ser definido como o produto do módulo de qualquer um dos vetores multiplicado pela projeção do outro sobre ele. Um exemplo de sua utilização é a expressão para o trabalho realizado quando uma força F age durante um deslocamento s não necessariamente paralelo a ela:

$$W = Fs \cos \theta = F \cdot s.$$

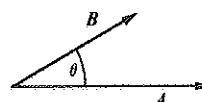


Fig. 3.10 Ângulo entre dois vetores.

Pode-se chamar $A \cdot B$ de produto porque ele possui propriedades algébricas que podem ser demonstradas facilmente através das definições geométricas (3.15).⁴

$$(cA) \cdot B = A \cdot (cB) = c(A \cdot B), \quad (3.16)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (3.17)$$

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad (3.18)$$

$$A \cdot A = A^2. \quad (3.19)$$

Estas equações significam que é possível tratar algebricamente o produto escalar da mesma forma que se calcula um produto na Álgebra comum, desde que o leitor se lembre que os dois fatores devem ser vetores e o resultado do produto um escalar. Os seguintes resultados também são consequência da definição (3.15), onde \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são os vetores unitários ao longo dos três eixos coordenados:

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{x} &= \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \\ \hat{x} \cdot \hat{y} &= \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$A \cdot B = AB, (-AB), \quad \text{quando } A \text{ é paralelo (antiparalelo) a } B \quad (3.21)$$

$$A \cdot B = 0, \quad \text{Quando } A \text{ é perpendicular a } B. \quad (3.22)$$

Note que, de acordo com a Eq. (3.22), o produto escalar de dois vetores será igual a zero, se eles forem perpendiculares, mesmo que nenhum dos dois vetores tenha módulo nulo.

O produto escalar também pode ser definido algebricamente em termos dos componentes:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (3.23)$$

Para provar que a Eq. (3.23) é equivalente à definição geométrica (3.15), escreve-se A e B na forma dada pela Eq. (3.10), usando-se as Eqs. (3.16), (3.17), (3.18) e (3.20), obtidas a partir da Eq. (3.15):

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\hat{x} A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} A_z) \cdot (\hat{x} B_x + \hat{y} B_y + \hat{z} B_z) \\ &= (\hat{x} \cdot \hat{x}) A_x B_x + (\hat{x} \cdot \hat{y}) A_x B_y + (\hat{x} \cdot \hat{z}) A_x B_z + (\hat{y} \cdot \hat{x}) A_y B_x + (\hat{y} \cdot \hat{y}) A_y B_y + (\hat{y} \cdot \hat{z}) A_y B_z \\ &\quad + (\hat{z} \cdot \hat{x}) A_z B_x + (\hat{z} \cdot \hat{y}) A_z B_y + (\hat{z} \cdot \hat{z}) A_z B_z \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \end{aligned}$$

⁴ Note que a Eq. (3.15) é uma definição geométrica, mesmo considerando que ela é expressa em forma de equação, porque se refere apenas aos módulos e direções de A e B e não aos seus componentes, ao longo de um sistema particular de eixos. Da mesma forma, a demonstração geométrica pode utilizar manipulações algébricas, desde que não se refira a componentes ao longo de eixos coordenados.



Este resultado prova a relação dada pela Eq. (3.23). As propriedades (3.16) a (3.20) podem ser demonstradas facilmente a partir da definição algébrica (3.23) e também a partir da definição geométrica (3.15). As Eqs. (3.21) e (3.22) podem ser consideradas definições algébricas de *paralelo* e *perpendicular*.

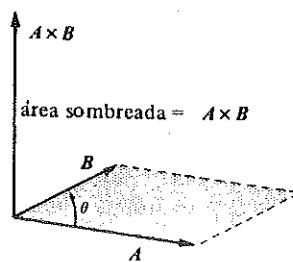


Fig. 3.11 Definição de produto vetorial.

Outro produto que precisa ser definido é *produto vetorial*, também chamado *produto-cruz* ou *produto externo*. O produto-cruz ($A \times B$) de A e B é definido como um vetor perpendicular ao plano de A e B e cujo módulo é a área do paralelogramo de lados A e B . O sentido e a direção de ($A \times B$) são definidos como a direção da progressão de um parafuso de rosca direita quando gira de A para B (veja Fig. 3.11). O módulo de ($A \times B$), em termos do ângulo θ formado pelos dois vetores, é dado por

$$|A \times B| = AB \sin \theta. \quad (3.24)$$

Note que o produto escalar de dois vetores tanto pode ser um escalar como um número, enquanto o produto vetorial é um novo vetor. O produto vetorial tem as seguintes propriedades algébricas, que podem ser demonstradas pela definição dada na Fig. 3.11.⁵

$$A \times B = -B \times A, \quad (3.25)$$

$$(cA) \times B = A \times (cB) = c(A \times B), \quad (3.26)$$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C), \quad (3.27)$$

$$A \times A = 0, \quad (3.28)$$

$$A \times B = 0, \quad \text{quando } A \text{ é paralelo a } B \quad (3.29)$$

$$|A \times B| = AB, \quad \text{quando } A \text{ é perpendicular a } B \quad (3.30)$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0,$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}. \quad (3.31)$$

⁵ O 0 representa, aqui, o vetor de módulo zero, às vezes chamado *vetor nulo*, por não ter direção particular no espaço. Ele tem as seguintes propriedades:

$$A + 0 = A, \quad A \cdot 0 = 0, \quad A \times 0 = 0, \quad A - A = 0, \quad 0 = (0, 0, 0).$$

Logo, o produto-cruz pode ser tratado algebricamente como um comum, exceto pelo fato de que a ordem de multiplicação não deve ser mudada, que os dois fatores sejam vetores e que o resultado seja um vetor. Mudando-se a ordem dos fatores num produto vetorial o sinal também é trocado. Este é o primeiro desvio inesperado entre as regras da Álgebra Vetorial e as da Álgebra comum. O leitor deve então memorizar a Eq. (3.25). As equações (3.29) e (3.30), como as análogas, (3.21) e (3.22), também devem ser memorizadas. (Cabe também lembrar que todas as definições geométricas e algébricas devem ser memorizadas.) Quando um produto vetorial é repetido, como, por exemplo, ($A \times B$) \times ($C \times D$), os parênteses não podem ser omitidos ou sua distribuição modificada, porque o resultado obtido, caso a multiplicação seja efetuada em ordem diferente, não é, em geral, o mesmo. Veja, por exemplo, as Eqs. (3.35) e (3.36). Note que, de acordo com a Eq. (3.29), o produto vetorial de dois vetores pode ser nulo, mesmo que nenhum deles seja um vetor nulo.⁶

Pelas Eqs. (3.25) a (3.31), usando-se a Eq. (3.10) para representar A e B demonstra-se que a definição geométrica (Fig. 3.11) é equivalente à seguinte definição algébrica do produto vetorial:

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x). \quad (3.32)$$

podendo-se também escrever $A \times B$ como um determinante:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (3.33)$$

A expansão do lado direito da Eq. (3.33), de acordo com as regras ordinárias para os determinantes, resulta na Eq. (3.32). Novamente as propriedades (3.25) a (3.31) seguem-se também das definições algébricas (3.32).

As seguintes identidades úteis podem ser demonstradas:

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C, \quad (3.34)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \quad (3.35)$$

$$(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C), \quad (3.36)$$

$$\hat{x} \cdot (\hat{y} \times \hat{z}) = 1. \quad (3.37)$$

As três primeiras destas relações devem ser memorizadas. A Eq. (3.34) permite trocar-se o ponto e a cruz no produto misto. Demonstra-se que a grandeza $A \cdot (B \times C)$ pode ser o volume do paralelepípedo cujas arestas são A, B, C , com sinal positivo ou negativo, dependendo de A, B, C terem ou não a mesma orientação relativa de $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, isto é, dependendo do fato de um parafuso de rosca direita que gire de A para B avançar ao longo de C em direção positiva ou negativa. Os produtos de três vetores dados pelas

⁶ O leitor que tenha inclinação para Matemática deve estar interessado em saber se não existe alguma maneira de definir o produto vetorial em três dimensões sem desistir de algumas regras da Álgebra clássica.

fórmulas (3.35) e (3.36) são fáceis de memorizar, caso se observe que o termo positivo à direita, em ambos os casos, é igual ao vetor do meio (B) multiplicado pelo produto escalar ($A \cdot C$) dos outros dois vetores, enquanto o termo negativo é o outro vetor dentro dos parênteses multiplicado pelo produto escalar dos outros dois.

Como exemplo da utilização do produto vetorial, a relação para a força exercida por um campo magnético de indução B sobre uma carga elétrica q (esu) pode ser expressada como

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde c é a velocidade da luz e v , a velocidade da carga. Esta equação fornece corretamente o valor e a direção da força. O leitor, por certo, lembra-se que o estudo da electricidade e do magnetismo é cheio de regras sobre direção da mão direita e da mão esquerda. As grandezas vetoriais, cujas direções são determinadas por regras da mão direita e da mão esquerda, são em geral expressadas por meio de produtos vetoriais.

3.2 APLICAÇÕES A UM CONJUNTO DE FORÇAS QUE ATUAM SOBRE UMA PARTÍCULA

De acordo com os princípios estabelecidos na Seç. 1.3, se um conjunto de forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ age sobre uma partícula, a força total \mathbf{F} , que determina a sua aceleração, deve ser obtida tomando-se a soma vetorial das forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n. \quad (3.38)$$

As forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ freqüentemente são consideradas forças *componentes*, e \mathbf{F} , sua *resultante*. O termo *componente* é usado aqui com um sentido mais geral do que na seção precedente, onde os componentes de um vetor foram definidos como projeções do vetor sobre um sistema de eixos coordenados. Quando o termo *componente* é usado com o significado de um dos vetores de um conjunto cuja soma é \mathbf{F} , usa-se o termo *componente (vetorial)*. Em geral, a menos que indicado, o termo *componente* de um vetor \mathbf{F} numa certa direção significa a projeção perpendicular do vetor \mathbf{F} sobre uma linha naquela direção. Simbolicamente, o componente de \mathbf{F} na direção do vetor unitário \hat{n} é

$$F_n = \hat{n} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.39)$$

Com este sentido, o componente de \mathbf{F} não é um vetor, mas um número. Os componentes de \mathbf{F} ao longo dos eixos x, y e z são os componentes no sentido atribuído pela Eq. (3.39) nas direções $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

Conhecendo-se as forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ determina-se graficamente sua soma, ao se desenhar com cuidado um diagrama em escala, de acordo com a definição da Fig. 3.3 ou 3.4, mas a determinação da soma pode ser analítica, desde que se construa, a grosso modo, um gráfico do diagrama de soma e se use a Trigonometria para calcular

o módulo e a direção do vetor \mathbf{F} . Ao se somar, por exemplo, dois vetores, o resultado pode ser encontrado segundo as leis dos co-senos e dos senos. Na Fig. 3.12, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ e θ são conhecidos, e o módulo e a direção da soma \mathbf{F} são calculados de

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \theta, \quad (3.40)$$

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin \theta}. \quad (3.41)$$

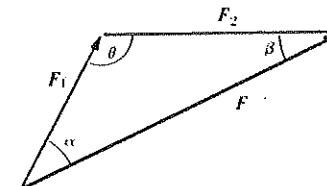


Fig. 3.12 Soma de duas forças.

Note que se pode obter a primeira destas equações quadrando-se — o que significa efetuar o produto escalar — a equação

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (3.42)$$

Efetuando o produto escalar de cada membro desta equação entre si, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} &= F^2 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_2 \\ &= F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

(Note que θ , na Fig. 3.12, é o suplemento do ângulo entre \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 conforme definido na Fig. 3.10). Esta técnica pode ser aplicada na determinação direta do módulo da resultante da soma de um número qualquer de vetores em termos de seus módulos e do ângulo que eles formam, elevando-se ao quadrado a Eq. (3.38) e separando o segundo membro, de acordo com as leis da Álgebra Vetorial, em uma soma de quadrados e produtos escalares das forças componentes. O ângulo formado por \mathbf{F} e qualquer uma das forças componentes pode ser obtido, efetuando-se o produto vetorial ou o produto escalar do vetor componente com a Eq. (3.38). Por exemplo, no caso da soma de duas forças, efetua-se o produto vetorial de \mathbf{F}_1 com a Eq. (3.42):

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2.$$

Determina-se o módulo de cada membro, usando as Eqs. (3.28) e (3.24):

$$F_1 F \sin \alpha = F_1 F_2 \sin \theta, \quad \text{ou} \quad \frac{F}{\sin \theta} = \frac{F_2}{\sin \alpha}.$$

Quando a soma envolve mais do que dois vetores, geralmente é mais simples efetuar o produto do componente vetorial com cada um dos membros da Eq. (3.38).

A soma vetorial na Eq. (3.38) também pode ser efetuada somando-se separadamente os componentes de $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ ao longo de qualquer sistema de eixos conveniente:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx}, \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny}, \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Quando se quer determinar a soma de um grande número de vetores, este será certamente o método mais rápido. O leitor deve usar a sua engenhosidade combinando e modificando estes métodos para adaptá-los ao problema que tem de ser resolvido. Obviamente, se for preciso somar um conjunto de vetores que contenha um grupo de vetores paralelos, será mais simples somar inicialmente estes vetores paralelos antes de tentar aplicar os métodos apresentados no parágrafo anterior.

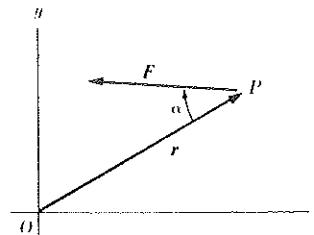


Fig. 3.13 Força F agindo no ponto P .

Como acontece no caso de várias forças que agem sobre uma partícula e que podem ser somadas vetorialmente para se obter a força total, é possível, inversamente, decompor a força total, ou qualquer outra força individual, na soma de forças componentes vetoriais, cuja ação individual se faça sentir sobre a partícula. Assim, no problema discutido na Seç. 1.7 (Fig. 1.4), a força de reação F exercida pelo plano sobre o bloco é decomposta no componente normal N e no componente de atrito f . O efeito da força F sobre o movimento do bloco é equivalente ao efeito das forças N e f agindo juntas. Quando se quer decompor uma força F na soma de forças componentes (vetoriais), em duas ou três direções perpendiculares, tomam-se as projeções perpendiculares de F nestas direções, como na Fig. 3.6. O módulo dos componentes vetoriais de F , ao longo do sistema de direções perpendiculares, são os componentes comuns de F nestas direções com significado dado pela Eq. (3.39).

Se uma força F no plano xy agir sobre uma partícula no ponto P , define-se *torque*, ou *momento*, da força F em relação à origem O (Fig. 3.13) como o produto da distância \overline{OP} e o componente de F perpendicular a r :

$$N_O = rF \sin \alpha. \quad (3.44)$$

O momento N_O da força F em relação à origem O é definido como positivo quando F age em sentido contrário ao movimento dos ponteiros dos relógios em torno de O (Fig. 3.13), e negativo quando F age no sentido do movimento dos ponteiros dos relógios.

Define-se, de maneira similar, o momento em relação a qualquer grandeza vetorial localizada no ponto P . O conceito de momento é útil no estudo da mecânica das partículas e dos corpos rígidos. As propriedades geométricas e algébricas dos torques serão estudadas em detalhe no Cap. 5. Note que o torque pode ser definido em termos do produto vetorial:

$$N_O = \pm |r \times F|, \quad (3.45)$$

onde os sinais + ou - são usados se o vetor $r \times F$ apontar na direção positiva ou negativa ao longo do eixo dos z , respectivamente.

Generaliza-se a definição de torque apresentada acima para o caso tridimensional, considerando o torque ou momento de uma força F , agindo no ponto P , em relação

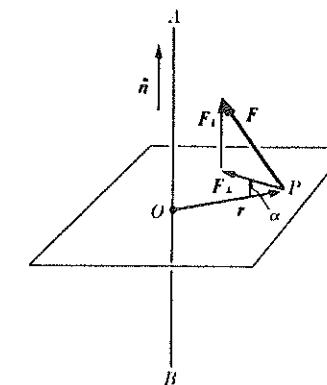


Fig. 3.14 Momento de uma força em relação ao eixo, no espaço.

ao eixo \overline{AB} (Fig. 3.14). Seja \hat{n} um vetor unitário na direção de \overline{AB} . Tomem-se os componentes vetoriais de F perpendicular e paralela a \overline{AB} :

$$F = F_{\parallel} + F_{\perp}, \quad (3.46)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= \hat{n}(\hat{n} \cdot F), \\ F_{\perp} &= F - F_{\parallel}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Defina-se, agora, o momento de F em relação ao eixo \overline{AB} como o momento, já definido pela Eq. (3.44) ou (3.45), da força F_{\perp} , no plano que passa pelo ponto P e perpendicular a \overline{AB} , em relação ao ponto O de interação do eixo \overline{AB} com o plano:

$$N_{AB} = \pm rF_{\perp} \sin \alpha = \pm |r \times F_{\perp}|, \quad (3.48)$$

onde se usa o sinal + ou o -, dependendo de $r \times F_{\perp}$ apontar na mesma direção ou na direção oposta a \hat{n} . De acordo com esta definição, uma força como F_{\parallel} paralela a \overline{AB} não terá torque ou momento em relação a \overline{AB} . Como $r \times F_{\parallel}$ é perpendicular a n ,

$$\begin{aligned}
n \cdot (r \times F) &= \hat{n} \cdot [r \times (F_{\parallel} + F_{\perp})] \\
&= \hat{n} \cdot (r \times F_{\parallel}) + n \cdot (r \times F_{\perp}) \\
&= \hat{n} \cdot (r \times F_{\perp}) \\
&= \pm |r \times F_{\perp}|.
\end{aligned}$$

Define-se N_{AB} de um modo mais esmerado, da seguinte forma:

$$N_{AB} = \hat{n} \cdot (r \times F). \quad (3.49)$$

Esta definição inclui automaticamente o sinal apropriado, não requerendo decomposição de F em F_{\parallel} e F_{\perp} . Além do mais, r pode ser desenhado para P , a partir de qualquer ponto sobre o eixo \overline{AB} , porque o componente de r paralelo a AB como o componente de F paralelo a \overline{AB} resultam em um componente do produto vetorial perpendicular a \hat{n} que desaparece quando se efetua o produto escalar.

A Eq. (3.49) sugere a definição de *vetor torque* ou *vetor momento*, em relação ao ponto O , de uma força F que atue no ponto P , da seguinte forma:

$$N_O = r \times F, \quad (3.50)$$

onde r é o vetor de O a P . O vetor torque N_O tem, de acordo com a Eq. (3.49), a propriedade de que seu componente, em qualquer direção, seja o torque, com o significado definido acima, da força F em relação ao eixo que passe por O e que aponte naquela direção. Daqui em diante, torque significará usualmente o vetor torque definido pela Eq. (3.50). Torque em relação ao eixo \overline{AB} com o significado definido anteriormente será chamado componente do torque ao longo de \overline{AB} . Pode-se definir o vetor momento de qualquer vetor localizado no ponto P , em relação ao ponto O , por meio de uma equação análoga à Eq. (3.50).

3.3 DIFERENCIACÃO E INTEGRAÇÃO DE VETORES

Um vetor A pode ser função de uma grandeza escalar, digamos t , tal que, a cada valor de t seja possível associar um vetor $A(t)$, ou algebraicamente falando, com o significado de que os componentes possam ser funções de t :

$$A = A(t) = [A_x(t), A_y(t), A_z(t)]. \quad (3.51)$$

O exemplo mais comum é o de vetores que são funções do tempo; como, por exemplo, a velocidade de uma partícula em movimento é função do tempo: $v(t)$. Também podem ocorrer outros tipos de dependência, por exemplo, na Eq. (3.76), o vetor \hat{r} é função do ângulo θ . Pode-se definir a derivada do vetor A em relação a t analogamente à definição da derivada de uma função escalar (veja Fig. 3.15):

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (3.52)$$

(A divisão por Δt na relação acima significa multiplicação por $1/\Delta t$.) Pode-se, ainda, definir a derivada de um vetor algebraicamente em termos de seus componentes:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right) = \hat{x} \frac{dA_x}{dt} + \hat{y} \frac{dA_y}{dt} + \hat{z} \frac{dA_z}{dt}. \quad (3.53)$$

Por exemplo, se $v(t)$ é o vetor velocidade de uma partícula, sua aceleração vetorial a será

$$a = dv/dt.$$

Encontram-se exemplos de cálculo da derivada de vetores baseado nas definições (3.52) e (3.53) nas Seç. 3.4 e 3.5.

As seguintes propriedades da diferenciação de vetores podem ser demonstradas por meio de cálculos diretos, usando-se a definição algébrica (3.53), ou a partir da definição (3.52), de maneira que as propriedades análogas sejam demonstradas para uma função escalar:

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}, \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dt}(fA) = \frac{df}{dt} A + f \frac{dA}{dt}, \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt}, \quad (3.56)$$

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}. \quad (3.57)$$

Estes resultados mostram que a diferenciação das somas e dos produtos de vetores obedecem às mesmas regras algébricas da diferenciação das somas e dos produtos de funções do Cálculo Diferencial comum, entretanto com exceção de que a ordem dos fatores no produto vetorial deve ser mantida [Eq. (3.57)]. Para provar a Eq. (3.55), por exemplo, a partir da definição (3.53), demonstra-se por simples cálculo direto que os componentes correspondentes, em ambos os lados da equação, são iguais, utilizando-se as definições e propriedades das operações vetoriais introduzidas na seção anterior. No caso do componente x , a demonstração é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d}{dt} (fA) \right]_x &= \frac{d}{dt} (fA)_x && [\text{pela Eq. (3.53)}] \\
 &= \frac{d}{dt} (fA_x) && [\text{pela Eq. (3.11)}] \\
 &= \frac{df}{dt} A_x + f \frac{dA_x}{dt} && [\text{regra-padrão do Cálculo Diferencial comum}] \\
 &= \frac{df}{dt} A_x + f \left(\frac{dA}{dt} \right)_x && [\text{pela Eq. (3.53)}] \\
 &= \left(\frac{df}{dt} A \right)_x + \left(f \frac{dA}{dt} \right)_x && [\text{pela Eq. (3.11)}] \\
 &= \left(\frac{df}{dt} A + f \frac{dA}{dt} \right)_x. && [\text{pela Eq. (3.12)}]
 \end{aligned}$$

Outro exemplo: para demonstrar a Eq. (3.56) a partir da definição (3.52), procede-se da mesma maneira que na demonstração do teorema correspondente ao produto de funções escalares comuns. Usa-se o símbolo Δ para representar o acréscimo do valor de qualquer função entre t e $t + \Delta t$; o acréscimo ΔA de um vetor A é definido na

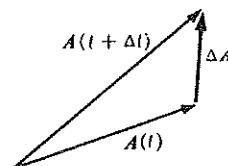


Fig. 3.15 Acréscimo de um vetor $\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$.

Fig. 3.5. Usando-se esta definição de Δ e as regras da Álgebra Vetorial dadas na seção anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta(A \cdot B)}{\Delta t} &= \frac{(A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B) - A \cdot B}{\Delta t} \\
 &= \frac{(\Delta A) \cdot B + A \cdot (\Delta B) + (\Delta A) \cdot (\Delta B)}{\Delta t} \\
 &= \frac{(\Delta A) \cdot B}{\Delta t} + \frac{A \cdot (\Delta B)}{\Delta t} + \frac{(\Delta A) \cdot (\Delta B)}{\Delta t} \\
 &= \frac{\Delta A}{\Delta t} \cdot B + A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} + \frac{(\Delta A) \cdot (\Delta B)}{\Delta t}. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$, o primeiro membro da Eq. (3.58) se aproxima do primeiro membro da Eq. (3.56) e os dois termos do segundo membro da Eq. (3.58) aproximam-se dos dois termos do segundo membro da Eq. (3.56), enquanto o último termo do segundo membro da Eq. (3.58) se anula. A justificativa rigorosa deste processo de limite é exatamente similar à necessária ao procedimento correspondente usado no Cálculo Diferencial comum.

No que se refere aos movimentos no espaço tridimensional, encontram-se freqüentemente grandezas escalares e vetoriais com um valor definido em cada ponto do espaço. Tais grandezas são funções das coordenadas espaciais, usualmente x , y e z , podendo, ainda, ser consideradas como funções do vetor posição r da origem ao ponto x , y , z (Fig. 3.16). Pode-se distinguir funções escalares de ponto

$$u(r) = u(x, y, z)$$

e funções vetoriais de ponto

$$A(r) = A(x, y, z) = [A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)].$$

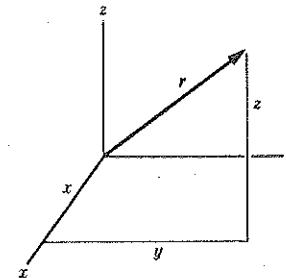


Fig. 3.16 O vetor posição r do ponto (x, y, z) .

Um exemplo de função escalar de ponto é a energia potencial $V(x, y, z)$ de uma partícula que se desloca em três dimensões e de função vetorial de ponto é a intensidade de campo elétrico $E(x, y, z)$. Funções escalares e vetoriais de ponto freqüentemente são funções do tempo t além do ponto x , y , z do espaço.

Em relação a uma dada curva C , no espaço, e a uma função vetorial A definida em pontos sobre esta curva, pode-se considerar a integral de linha de A ao longo de C :

$$\int_C A \cdot dr.$$

Para definir a integral da linha, imagine a curva C subdividida em segmentos pequenos; representando-se um desses segmentos por um vetor dr na direção do segmento e de comprimento igual ao comprimento do segmento, então a curva consistirá numa sucessão de vetores dr de uma a outra extremidade. Agora, para cada segmento, tem-se o produto $A \cdot dr$, onde A é o valor da função vetorial na posição de cada segmento considerado. A integral de linha acima é definida como o limite da soma dos produtos $A \cdot dr$, quando o número de segmentos cresce sem limite, enquanto o módulo $|dr|$ de cada

segmento se aproxima de zero. Por exemplo, o trabalho realizado por uma força F — que pode variar de ponto a ponto — sobre uma partícula que se desloca ao longo da curva C é

$$W = \int_C F \cdot dr.$$

Esta é uma generalização — no caso de a força ser variável e a curva arbitrária C — da fórmula

$$W = F \cdot s,$$

para uma força constante sobre um corpo que se move ao longo de um segmento de reta s . A razão de se usar o símbolo dr para representar um segmento de curva é que, se r for o vetor posição a partir da origem até um ponto sobre a curva, então dr será o acréscimo em r (veja Fig. 3.15) de um extremo a outro do segmento correspondente. Escrevendo-se r na forma

$$r = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z, \quad (3.59)$$

então

$$dr = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz, \quad (3.60)$$

onde dx , dy , dz são as diferenças nas coordenadas dos dois extremos do segmento. Se s for a distância medida ao longo da curva, a partir de algum ponto fixo, pode-se expressar a integral de linha como uma integral comum sobre as coordenadas s :

$$\int_C A \cdot dr = \int A \cos \theta ds, \quad (3.61)$$

onde θ é o ângulo formado por A e a tangente à curva em cada ponto (veja Fig. 3.17). Esta fórmula pode ser usada no cálculo da integral, caso A e $\cos \theta$ sejam conhecidos como funções de s . Pode-se também escrever a integral, usando-se a Eq. (3.60), como

$$\int_C A \cdot dr = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \quad (3.62)$$

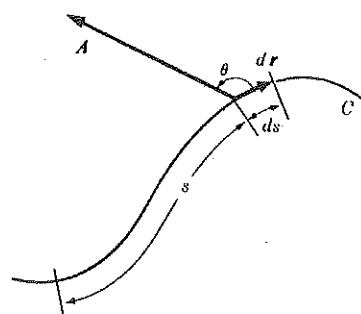


Fig. 3.17 Elementos envolvidos na integral de linha.

Uma das maneiras mais convenientes de representar uma curva no espaço é fornecendo as três coordenadas (x, y, z) ou, de modo equivalente, o vetor posição r , como fun-

ções de um parâmetro s de um valor definido em cada ponto da curva. O parâmetro s freqüentemente, embora não necessariamente, é a distância medida ao longo da curva, a partir de algum ponto de referência, como na Fig. 3.17 e na Eq. (3.61). O parâmetro s pode também ser o tempo no qual uma partícula em movimento chega a cada ponto da curva. Conhecidos $A(r)$ e $r(s)$, então a integral de linha é calculada a partir da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \int_C A \cdot dr &= \int \left(A \cdot \frac{dr}{ds} \right) ds \\ &= \int \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds. \end{aligned} \quad (3.63)$$

O segundo membro desta equação é uma integral comum sobre a variável s .

Como exemplo do cálculo de uma integral de linha: para se determinar o trabalho realizado, sobre uma partícula em movimento semicircular de raio a em torno da origem, no plano xy , por uma força que a atrai na direção do ponto $(x = a, y = 0)$ e proporcional à distância entre a partícula e o ponto $(a, 0)$, usa-se a notação indicada na Fig. 3.18, podendo-se escrever as seguintes relações:

$$\beta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha), \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$D^2 = 2a^2(1 - \cos \alpha), \quad D = 2a \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$F = -kD, \quad F = kD = 2ka \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$s = a(\pi - \alpha).$$

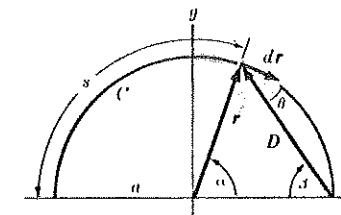


Fig. 3.18

Estas relações auxiliam a determinação do trabalho realizado, quando se usa a Eq. (3.61):

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{s=0}^{\pi} F \cos \theta \, ds \\
&= - \int_{\alpha=\pi}^0 2ka^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \\
&= 2ka^2
\end{aligned}$$

Para resolver a mesma integral a partir da Eq. (3.63), expressam-se r e \mathbf{F} ao longo da curva como funções do parâmetro α :

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \sin \alpha,$$

$$F_x = kD \cos \beta = 2ka \sin^2 \frac{\alpha}{2} = ka(1 - \cos \alpha),$$

$$F_y = -kD \sin \beta = -2ka \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = -ka \sin \alpha.$$

O trabalho será então, de acordo com a Eq. (3.63),

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{\alpha=\pi}^0 \left(F_x \frac{dx}{d\alpha} + F_y \frac{dy}{d\alpha} \right) d\alpha \\
&= \int_{\pi}^0 [-ka^2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha - ka^2 \sin \alpha \cos \alpha] d\alpha \\
&= ka^2 \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha \\
&= 2ka^2.
\end{aligned}$$

3.4 CINEMÁTICA NO PLANO

Cinemática é a ciência que descreve os possíveis movimentos de um sistema mecânico, sem se preocupar com as leis da Dinâmica determinantes do movimento ocorrido na realidade. No estudo da Cinemática sobre uma partícula no plano, utilizam-se os métodos que descrevem a posição da partícula e o caminho por ela percorrido, e os métodos que determinam os vários componentes de sua velocidade e de sua aceleração.

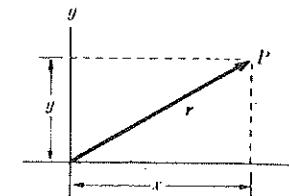


Fig. 3.19 Vetor posição e as coordenadas retangulares de um ponto P num plano.

O método mais simples para se localizar uma partícula num plano é escolher dois eixos perpendiculares, especificando qualquer posição através de suas coordenadas retangulares, x , y , em relação a estes eixos (Fig. 3.19). De modo equivalente, pode-se especificar o vetor posição $\mathbf{r} = (x, y)$ da partícula, em relação à origem. Localiza-se a posição especificando (de qualquer maneira conveniente) o vetor \mathbf{r} ; depois, é preciso somente especificar em complemento a origem O do vetor. No caso de se especificarem as coordenadas x , y , então os eixos coordenados, em relação aos quais são medidos x e y , também devem sê-lo.

Depois de escolhido o sistema de coordenadas, descreve-se o percurso da partícula no plano. Uma curva no plano xy pode ser especificada considerando-se y como função de x ao longo da curva, ou vice-versa:

$$y = y(x), \quad (3.64)$$

ou

$$x = x(y). \quad (3.65)$$

As fórmulas (3.64) e (3.65), no entanto, não são convenientes em muitos casos, por exemplo, quando a curva se cruza com ela própria. Pode-se também especificar a curva fornecendo uma relação entre x e y ,

$$f(x, y) = 0, \quad (3.66)$$

de tal modo que ela consiste nos pontos cujas coordenadas satisfazem esta relação. Um exemplo é a equação de um círculo:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Uma das maneiras mais convenientes para se representar uma curva é em termos de um parâmetro s :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (3.67)$$

ou

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

O parâmetro s tem um único valor em cada ponto da curva. Quando s varia, o ponto $[x(s), y(s)]$ desenha a curva. O parâmetro s pode, por exemplo, ser a distância medida

ao longo da curva a partir de um ponto fixo. A equação do círculo pode ser expressada, em termos de um parâmetro θ , na seguinte forma:

$$x = a \cos \theta,$$

$$y = a \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelo eixo dos x e o raio a até o ponto (x, y) sobre a circunferência. Em termos da distância s medida ao longo da circunferência:

$$x = a \cos \frac{s}{a},$$

$$y = a \sin \frac{s}{a}.$$

Nos problemas de Mecânica, o parâmetro é usualmente o tempo, mas, neste caso, as Eqs. (3.67) não só especificam o percurso da partícula, como também a taxa com a qual atravessa o percurso. Se a partícula move-se com velocidade constante v em torno do círculo, sua posição em qualquer tempo t pode ser dada por

$$x = a \cos \frac{vt}{a},$$

$$y = a \sin \frac{vt}{a}.$$

Se a partícula se move ao longo do percurso dado pela Eq. (3.67), pode-se especificar o seu deslocamento fornecendo $s(t)$, ou especificando diretamente

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (3.68)$$

ou

$$r = r(t). \quad (3.69)$$

A velocidade e a aceleração e seus componentes são dados por

$$v = \frac{dr}{dt} = \hat{x} \frac{dx}{dt} + \hat{y} \frac{dy}{dt}, \quad (3.70)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \hat{x} \frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y} \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (3.71)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

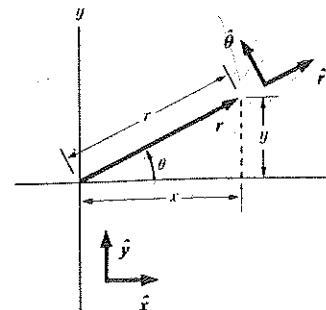


Fig. 3.20 Coordenadas polares no plano.

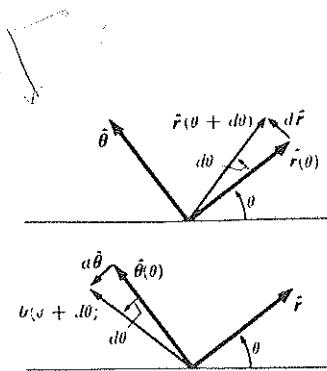


Fig. 3.21 Acréscimos nos vetores \hat{r} e $\hat{\theta}$.

As coordenadas polares mostradas na Fig. 3.20 são convenientes em muitos problemas. As coordenadas r e θ relacionam-se com x , y pelas seguintes equações:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (3.72)$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (3.73)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos^{-1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Os vetores unitários \hat{r} , $\hat{\theta}$, na direção de r e θ crescentes, respectivamente, são definidos como se vê na Fig. 3.21. Os vetores \hat{r} , $\hat{\theta}$ são funções do ângulo θ , estando relacionados a \hat{x} , \hat{y} por:

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta, \quad (3.74)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta.$$

As Eqs. (3.74) podem ser obtidas por observação da Fig. (3.20). Derivando, obtém-se as importantes fórmulas

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}. \quad (3.75)$$

As fórmulas (3.75) podem também ser obtidas pela análise da Fig. 3.21 (lembrando-se que $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$). O vetor posição r é expressado muito simplificadamente em termos de coordenadas polares:

$$r = r\hat{r}(\theta). \quad (3.76)$$

Pode-se descrever o movimento da partícula em coordenadas polares especificando-se $r(t)$, $\theta(t)$ e determinando o vetor posição $r(t)$. O vetor velocidade será

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (3.77)$$

Logo, obtém-se os componentes da velocidade nas direções \hat{r} e $\hat{\theta}$:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}. \quad (3.78)$$

O vetor aceleração será

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dv}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}\frac{d\theta}{dt} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Os componentes da aceleração são

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \quad (3.80)$$

O termo $r\dot{\theta}^2 = v_\theta^2/r$ é denominado *aceleração centrípeta* e origina-se no movimento na direção θ . Se $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, a trajetória será uma circunferência, e $a_r = -v_\theta^2/r$. O leitor já deve conhecer este resultado da Física Elementar. O termo $2\dot{r}\dot{\theta}$ é muitas vezes chamado de *aceleração de Coriolis*.

3.5 CINEMÁTICA EM TRÊS DIMENSÕES

A apresentação da seção anterior, com respeito à Cinemática em duas dimensões, utilizando-se coordenadas retangulares, pode ser estendida imediatamente ao caso tridimensional. Especifica-se, neste caso, um ponto por suas coordenadas x , y e z , em relação ao sistema escolhido de eixos retangulares, no espaço, ou pelo vetor posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$, em relação à origem escolhida. Uma trajetória no espaço pode ter a forma de duas equações em x , y e z :

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0. \quad (3.81)$$

Cada equação representa uma superfície e a trajetória será a interseção das duas superfícies. A trajetória também pode ser representada parametricamente:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (3.82)$$

A velocidade e a aceleração são novamente dadas por

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y + \hat{z}v_z, \quad (3.83)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (3.84)$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \hat{x}a_x + \hat{y}a_y + \hat{z}a_z, \quad (3.85)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (3.86)$$

Muitos outros sistemas de coordenadas além do cartesiano são úteis para problemas específicos. Talvez as mais usadas sejam as coordenadas polares esféricas e as polares cilíndricas. As coordenadas polares cilíndricas (ρ, φ, z) são definidas como se vê na Fig. 3.22, ou pelas equações

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (3.87)$$

e, inversamente,

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos^{-1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad (3.88)$$

$$z = z.$$

Um sistema de vetores unitários $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ e \hat{z} , nas direções de crescimento de ρ , φ e z , respectivamente, é mostrado

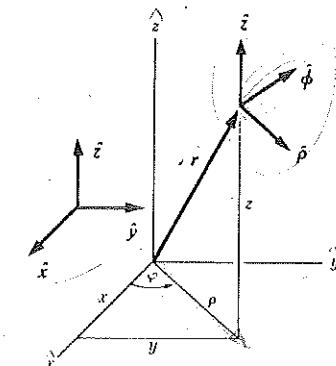


Fig. 3.22 Coordenadas polares cilíndricas.

na Fig. 3.22. \hat{z} é constante, mas $\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}$ são funções de φ , como no caso de coordenadas polares no plano:

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi, \quad (3.89)$$

e, da mesma forma,

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} = \hat{\phi}, \quad \frac{d\hat{\phi}}{d\phi} = -\hat{\rho}. \quad (3.90)$$

O vetor posição r pode ser expressado em coordenadas cilíndricas na forma

$$r = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}. \quad (3.91)$$

Derivando em relação ao tempo, obtém-se para a velocidade e a aceleração, com o auxílio da Eq. (3.90):

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}, \quad (3.92)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z}. \quad (3.93)$$

Como \hat{z} , $\hat{\phi}$ e $\hat{\rho}$ formam um conjunto de vetores unitários mutuamente perpendiculares, qualquer vetor A pode ser expressado em termos de seus componentes ao longo de \hat{z} , $\hat{\phi}$ e $\hat{\rho}$:

$$A = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}. \quad (3.94)$$

É necessário notar que, como $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$ são funções de ϕ , o conjunto de componentes (A_ρ, A_ϕ, A_z) refere-se, em geral, a um ponto específico no espaço, no qual se localiza o vetor A ou, pelo menos, a um valor específico da coordenada ϕ . Logo os componentes do vetor em coordenadas cilíndricas e, de fato, em todos de sistemas de coordenadas curvilíneas, dependem não somente do próprio vetor, mas também de sua localização no espaço. Se A for função de um parâmetro, digamos t , então, é possível calcular sua derivada pela simples derivação da Eq. (3.94), devendo-se ter o cuidado de levar em conta as variações de $\hat{\rho}$ e $\hat{\phi}$, caso a localização do vetor também variar com t (por exemplo, se A for a força que atua sobre a partícula em movimento):

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_\rho}{dt} - A_\phi \frac{d\phi}{dt} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{dA_\phi}{dt} + A_\rho \frac{d\phi}{dt} \right) \hat{\phi} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z}. \quad (3.95)$$

As relações (3.92) e (3.93) são casos especiais da Eq. (3.95). A relação para dA/dt também poderia ter sido obtida, no caso de coordenadas polares em duas dimensões considerado na seção anterior. Na realidade, seria exatamente análoga à Eq. (3.95), excetuando-se o fato de que o último termo não existiria.

As coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) são definidas de acordo com a Fig. 3.23 ou pelas equações

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (3.96)$$

É fácil obter as expressões para x e y , observando-se que $\rho = r \sin \theta$ e usando-se a Eq. (3.87); a relação para z torna-se evidente quando se observa o diagrama. Inversamente,

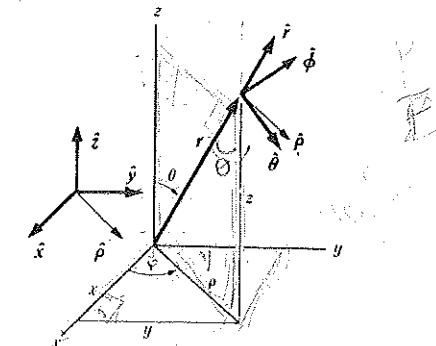


Fig. 3.23 Coordenadas polares esféricas.

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}, \\ \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Os vetores unitários \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$, apropriados para as coordenadas esféricas, são indicados na Fig. 3.23, onde $\hat{\phi}$ é o mesmo vetor usado nas coordenadas cilíndricas. O vetor unitário $\hat{\rho}$ é também útil para se obterem as relações envolvendo \hat{r} e $\hat{\theta}$. Note que todos, \hat{z} , $\hat{\rho}$, \hat{r} e $\hat{\theta}$, pertencem ao plano vertical. Da figura e da Eq. (3.89), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{z} \cos \theta + \hat{\rho} \sin \theta = \hat{z} \cos \theta + \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi, \\ \hat{\theta} &= -\hat{z} \sin \theta + \hat{\rho} \cos \theta = -\hat{z} \sin \theta + \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi, \\ \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Derivando-se estas fórmulas ou, o que é mais fácil, verificando-se o diagrama (como na Fig. 3.21), nota-se que as variações de θ , com ϕ e r fixados, correspondem a rotações no plano \hat{z} , \hat{r} , $\hat{\rho}$ e $\hat{\theta}$, enquanto as variações de ϕ , com θ e r fixados, correspondem a rotações em torno do eixo dos z . Encontra-se, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta}, & \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \sin \theta, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r}, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} &= \hat{\phi} \cos \theta, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} &= -\hat{\rho} = -\hat{r} \sin \theta - \hat{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Em coordenadas esféricas, o vetor posição é simplesmente

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}(\theta, \varphi). \quad (3.100)$$

Derivando-se em relação ao tempo e usando as Eqs. (3.99), obtém-se a velocidade e a aceleração:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + (r\dot{\varphi} \sin \theta)\hat{\varphi}, \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta)\hat{\theta} \\ &+ (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)\hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Novamente, $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ formam um conjunto de vetores unitários mutuamente perpendiculares, sendo que qualquer vetor A pode ser representado em termos de seus componentes esféricos:

$$A = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}. \quad (3.103)$$

Novamente aqui os componentes dependem não somente de A mas também da sua localização. Se A e sua localização forem funções de t , então

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta \frac{d\theta}{dt} - A_\varphi \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left(\frac{dA_\theta}{dt} + A_r \frac{d\theta}{dt} - A_\varphi \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\theta} \\ &+ \left(\frac{dA_\varphi}{dt} + A_r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} + A_\theta \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

3.6 ELEMENTOS DE ANÁLISE VETORIAL

Uma função escalar $u(x, y, z)$ tem três derivadas, que podem ser consideradas como componentes de uma função de ponto vetorial denominada *gradiente* de u :

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.105)$$

Pode-se também definir geometricamente $\text{grad } u$ como um vetor cuja direção é aquela em que u cresce mais rapidamente e cujo módulo é a *derivada direcional* de u , isto é, a taxa de crescimento de u por unidade de distância naquela direção. O fato de que esta definição geométrica é equivalente à definição algébrica (3.105) pode ser visto, tomando-se a diferencial u :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (3.106)$$

A equação (3.106) tem a forma de um produto escalar do $\text{grad } u$ pelo vetor dr , cujos componentes são dx , dy e dz :

$$du = dr \cdot \text{grad } u. \quad (3.107)$$

Geometricamente, du é a variação de u , quando há deslocação do ponto $r = (x, y, z)$ para um ponto próximo $r + dr = (x + dx, y + dy, z + dz)$. Pela Eq. (3.15):

$$du = |dr| |\text{grad } u| \cos \theta, \quad (3.108)$$

onde θ é o ângulo entre dr e $\text{grad } u$. Logo, a uma distância pequena fixa $|dr|$ do ponto r , a variação de u será um máximo quando dr tiver a mesma direção do $\text{grad } u$; então:

$$|\text{grad } u| = \frac{du}{|dr|}.$$

Este resultado confirma a descrição geométrica do $\text{grad } u$ apresentada acima. Outra definição geométrica do $\text{grad } u$ é que ele é um vetor tal que a variação em u , para uma pequena variação de posição dr , é dada pela Eq. (3.107).

O segundo membro da Eq. (3.105) pode ser considerado de maneira puramente simbólica, como o “produto” de um “vetor”:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.109)$$

pela função escalar u :

$$\text{grad } u = \nabla u. \quad (3.110)$$

O símbolo ∇ é denominado delta. ∇ não é um vetor no sentido geométrico, mas uma operação sobre uma função u que resulta no vetor ∇u , embora, algebricamente, ∇ tenha propriedades aproximadamente idênticas às de um vetor. O motivo desta distinção é que os símbolos de derivação ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$), embora possuam propriedades algébricas similares às dos números comuns, diferem destes no caso em que agem sobre um produto de funções:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u, \quad (3.111)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}(au) = a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.112)$$

admitindo-se que a seja constante. Entretanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.113)$$

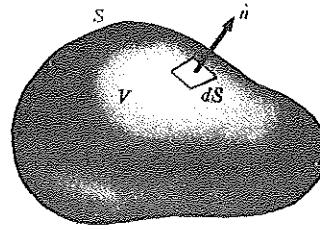


Fig. 3.24 Volume V limitado por uma superfície S .

Neste aspecto, os operadores de derivação diferem algebricamente dos números comuns. Se $\partial/\partial x$ fosse um número, $\partial/\partial x(uv)$ seria igual a $u(\partial/\partial x)v$ ou a $v(\partial/\partial x)u$. Logo, pode-se dizer que $\partial/\partial x$ se comporta algebricamente como um número, exceto quando opera um produto: neste caso, o resultado será uma soma de termos em que cada fator é derivado separadamente, como é mostrado na Eq. (3.113). Uma consideração semelhante pode ser feita para o símbolo ∇ . Ele se comporta algebricamente como um vetor, a menos que opere sobre um produto, pois, neste caso, deve ser tratado como uma derivação. Esta regra permite escrever grande número de identidades, que envolvem o símbolo ∇ , baseadas nas identidades vetoriais. Neste livro, estas relações são pouco utilizadas, razão pela qual não são apresentadas aqui.⁷

O produto escalar de ∇ pode ser formado por uma função de ponto vetorial $A(x, y, z)$ e denomina-se *divergência* de A :

$$\operatorname{div} A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3.114)$$

O significado geométrico da $\operatorname{div} A$ é fornecido pelo Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss:

$$\iiint_V \nabla \cdot A \, dV = \iint_S \hat{n} \cdot A \, dS, \quad (3.115)$$

onde V é um dado volume, S é a superfície que limita o volume V , e \hat{n} é o vetor unitário perpendicular à superfície S , apontando para fora do volume em cada ponto de S (Fig. 3.24). Logo $\hat{n} \cdot A$ é o componente de A normal a S , e a Eq. (3.115) diz que a “quantidade total de $\nabla \cdot A$ dentro do volume V ” é igual ao “fluxo total de A através da superfície S ”. Se v representar a velocidade de um fluido em movimento, em qualquer ponto no espaço, então

$$\iiint_V \nabla \cdot v \, dV$$

representa o volume de fluido que escoa, por segundo, pela superfície S . Se o fluido for incompressível, então, de acordo com a Eq. (3.115),

$$\iint_S \hat{n} \cdot v \, dS$$

⁷ Para tratamento mais completo de Análise Vetorial, consulte H. B. Phillips, *Vector analysis*, New York, John Wiley & Sons, 1933.

representará o volume total de fluido que está sendo produzido, por segundo, dentro do volume V . Então $\nabla \cdot v$ será positivo no caso de fontes das quais o fluido escoa, e negativo, no de “sumidouros” para dentro dos quais ele escoa. Omite-se a demonstração do Teorema de Gauss, Eq. (3.115), pois sua demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Análise Vetorial.⁸

Pode-se também formar um produto vetorial de ∇ por uma função de ponto vetorial $A(x, y, z)$, denominado *rotacional* de A :

$$\operatorname{rot} A = \nabla \times A = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (3.116)$$

O significado geométrico do rotacional é dado pelo Teorema de Stokes:

$$\iint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times A) \, dS = \int_C A \cdot dr, \quad (3.117)$$

onde S é qualquer superfície no espaço, \hat{n} é o vetor unitário normal a S e C é a curva que limita S . dr é tomado na direção em que um homem que caminhe sobre C mantenha a mão esquerda para dentro da curva e a cabeça na direção de \hat{n} (veja Fig. 3.25). De acordo com a Eq. (3.117), o rotacional de A em qualquer ponto é a medida da extensão da circulação da função vetorial A em torno daquele ponto. Um bom exemplo é o campo magnético em torno de um fio pelo qual passa uma corrente elétrica, onde o rotacional da intensidade de campo magnético é proporcional à densidade de corrente. Omite-se também a demonstração do Teorema de Stokes [Eq. (3.117)].⁹

O leitor não se deve preocupar com a necessidade de memorizar estes conceitos, pois a compreensão de conceitos matemáticos novos, como os apresentados, faz-se lentamente à medida que eles vão sendo utilizados. As definições foram mencionadas para serem usadas no futuro. Não se espera que alguém se familiarize com eles antes de aprender a usá-los em problemas da Física.¹⁰

O vetor simbólico ∇ pode também ser expressado em coordenadas cilíndricas, em termos de seus componentes, ao longo de $\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$ (veja Fig. 3.22). Note que se $u = u(\rho, \varphi, z)$,

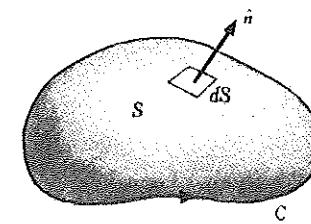


Fig. 3.25 Superfície S limitada pela curva C .

⁸ Veja, por exemplo, Phillips, *op. cit.*, Cap. 3, Seç. 32.

⁹ Para a demonstração consulte Phillips, *op. cit.*, Cap. 3, Seç. 29.

¹⁰ O restante desta seção pode ser omitido na primeira leitura.

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad (3.118)$$

e, das Eqs. (3.91) e (3.90),

$$dr = \hat{\rho} d\rho + \hat{\varphi} \rho d\varphi + \hat{z} dz, \quad (3.119)$$

um resultado cujo significado geométrico se tornará evidente com o auxílio da Fig. 3.22. Assim, escrevendo-se

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.120)$$

tem-se, lembrando-se que $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$, \hat{z} formam um conjunto de vetores unitários mutuamente perpendiculares,

$$du = dr \cdot \nabla u, \quad (3.121)$$

como é necessário pela definição geométrica de $\nabla u = \text{grad } u$. [Veja os comentários que seguem a Eq. (3.107).] Uma fórmula para ∇ poderia ter sido obtida também para o caso de coordenadas polares em duas dimensões e seria exatamente análoga à Eq. (3.120), exceto que o termo em z não estaria presente. Ao aplicar-se o símbolo ∇ a expressões que envolvem vetores dados em coordenadas cilíndricas [Eq. (3.94)], deve ser lembrado que os vetores unitários $\hat{\rho}$ e $\hat{\varphi}$ são funções de φ e sujeitos à derivação quando ocorrem após $\partial/\partial\varphi$.

Pode-se também determinar o vetor ∇ em coordenadas esféricas (Fig. 3.23), notando-se que

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (3.122)$$

e

$$dr = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi. \quad (3.123)$$

Logo,

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.124)$$

para que a Eq. (3.121) se torne válida. Novamente, deve-se tomar cuidado, ao trabalhar com a Eq. (3.124), pois a dependência de \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ de θ e φ deve ser sempre lembrada. Por exemplo, a divergência de uma função vetorial A expressada em coordenadas esféricas [Eq. (3.103)] será

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \hat{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r \tan \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

(No cálculo acima, usou-se o fato de que \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ formam um conjunto de vetores unitários mutuamente perpendiculares.)

3.7 TEOREMAS DO MOMENTO LINEAR E DA ENERGIA

A segunda lei de Newton (Cap. 1), formulada para duas ou três dimensões, leva à equação vetorial

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (3.125)$$

Em duas dimensões, esta equação é equivalente a duas equações para os componentes; em três dimensões, a três, que, em coordenadas cartesianas, são

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (3.126)$$

Nesta seção, demonstram-se, usando a Eq. (3.125), alguns teoremas para o movimento em duas ou três dimensões, que são os análogos vetoriais dos teoremas demonstrados na Seç. 2.1 para o movimento em uma dimensão.

O vetor momento linear p de uma partícula deve ser definido de acordo com a Eq. (1.10), como segue:

$$p = mv. \quad (3.127)$$

As Eqs. (3.125) e (3.126) podem, então, ser escritas como

$$\frac{d}{dt} (mv) = \frac{dp}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \quad (3.128)$$

ou, na forma de componentes,

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \quad (3.129)$$

Multiplicando-se por dt e integrando de t_1 a t_2 obtém-se a variação do momento linear entre t_1 e t_2 :

$$p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt. \quad (3.130)$$

A integral à direita é o impulso fornecido pela força, e é um vetor cujos componentes são as integrais correspondentes dos componentes de F . Na forma de componentes:

$$\begin{aligned} p_{x_2} - p_{x_1} &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \\ p_{y_2} - p_{y_1} &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \\ p_{z_2} - p_{z_1} &= \int_{t_1}^{t_2} F_z dt. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Para que se possa obter uma equação para a taxa de variação da energia cinética, procede-se como na Seç. 2.1, multiplicando as Eqs. (3.126) por v_x , v_y e v_z respectivamente, para se obter

$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv_x^2) = F_x v_x, \quad \frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv_y^2) = F_y v_y, \quad \frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv_z^2) = F_z v_z. \quad (3.132)$$

Somando estas equações,

$$\frac{d}{dt} [\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)] = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z,$$

ou

$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv^2) = \frac{dT}{dt} = F \cdot v. \quad (3.133)$$

Esta equação também pode ser deduzida a partir da equação vetorial (3.125), tomando-se o produto escalar por v de cada um dos membros, e lembrando que

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(v \cdot v) = \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} = 2v \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Então, pela Eq. (3.132),

$$F \cdot v = mv \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv^2).$$

Multiplicando-se a Eq. (3.133) por dt e integrando, obtém-se a forma integrada do teorema da energia:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot v dt. \quad (3.134)$$

Como $v dt = dr$, se F for conhecida como função de r , pode-se escrever o membro à direita da Eq. (3.134) como integral de linha:

$$T_2 - T_1 = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr, \quad (3.135)$$

onde a integral deve ser tomada ao longo do percurso seguido pela partícula entre os pontos r_1 e r_2 .

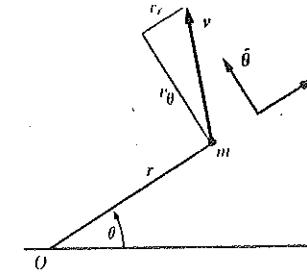


Fig. 3.26 Componentes da velocidade no plano.

A integral à direita, nas Eqs. (3.134) e (3.135), é o trabalho realizado sobre a partícula pela força entre os tempos t_1 e t_2 . Observe como a notação vetorial evidencia a analogia entre os casos uni, bi e tridimensionais dos teoremas do momento linear e da energia.

3.8 TEOREMAS DO MOMENTO ANGULAR NO PLANO E VETORIAL

Se uma partícula se mover no plano, seu momento angular L_O , em relação a um ponto O , será definido como o momento do seu vetor momento linear em relação ao ponto O , isto é, como o produto de sua distância ao ponto O vezes o componente do momento linear perpendicular à linha que liga a partícula ao ponto O . O índice $_O$ será omitido usualmente, exceto quando forem discutidos momentos relacionados a mais de uma origem; entretanto, deve ser lembrado que o momento angular, como o torque, associa-se sempre a uma origem particular, em relação à qual os momentos são considerados. O momento angular L é considerado positivo quando a partícula move-se no sentido anti-horário em relação a O . Ele é expressado mais facilmente em termos de coordenadas polares tendo O como origem. Considere uma partícula de massa m . Então, seu momento será mv , e o componente do momento linear perpendicular ao raio vetor em relação a O será mv_θ (Fig. 3.26), de forma que, pela Eq. (3.78),

$$L = rmv_\theta = mr^2\dot{\theta}. \quad (3.136)$$

Escrevendo-se a força em termos de seus componentes polares,

$$F = \hat{r}F_r + \hat{\theta}F_\theta. \quad (3.137)$$

então, em coordenadas polares planas, a equação de movimento, (3.125), torna-se, com auxílio da Eq. (3.80),

$$ma_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r. \quad (3.138)$$

$$ma_\theta = mr\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} = F_\theta. \quad (3.139)$$

Verifica-se agora que

$$\frac{dL}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}.$$

Logo, multiplicando a Eq. (3.139) por r , tem-se

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta = N. \quad (3.140)$$

A grandeza rF_θ é o torque exercido pela força F em relação à origem O . Integrando a Eq. (3.140), obtém-se a forma integrada do teorema do momento angular para o movimento no plano:

$$L_2 - L_1 = mr^2\dot{\theta}_2 - mr^2\dot{\theta}_1 = \int_{t_1}^{t_2} rF_\theta dt. \quad (3.141)$$

Pode-se generalizar a definição de momento angular para aplicá-lo ao movimento tridimensional, definindo o momento angular de uma partícula em relação a um eixo no espaço como o momento de seu momento linear em relação a este eixo, da mesma maneira que se definiu na Seç. 3.2 o momento de uma força em relação a um eixo. A demonstração é mais facilmente realizada em coordenadas cilíndricas, sendo o eixo z aquele em relação ao qual os momentos são calculados. A generalização dos teoremas (3.140) e (3.141) para estes casos é, então, facilmente demonstrada em analogia com a demonstração apresentada acima. Deixamo-la como exercício.

Como generalização final do conceito de momento angular, define-se o vetor momento angular L_O em relação ao ponto O como o vetor momento do vetor momento linear p em relação a um eixo naquela direção e passando por O :

$$L_O = r \times p = m(r \times v), \quad (3.142)$$

onde o vetor r é tomado a partir do ponto O considerado como origem até a posição da partícula de massa m . Omite-se novamente o índice $_O$ quando não houver necessidade. O componente do vetor L em qualquer direção é o momento do vetor momento linear p em relação a um eixo naquela direção e passando por O .

Tomando-se o produto vetorial de r com ambos os membros da equação vetorial do movimento Eq. (3.125), obtém-se

$$r \times \left(m \frac{dv}{dt} \right) = r \times F. \quad (3.143)$$

Pelas regras da Álgebra Vetorial e do Cálculo Vetorial,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} [r \times (mv)] \\ &= r \times \frac{d}{dt}(mv) + \frac{dr}{dt} \times (mv) \\ &= r \times \frac{d}{dt}(mv) + v \times (mv) \\ &= r \times \left(m \frac{dv}{dt} \right). \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na Eq. (3.143):

$$dL/dt = r \times F = N. \quad (3.144)$$

A taxa de variação do vetor momento angular de uma partícula, em relação ao tempo, é igual ao vetor torque que age sobre ela. A forma integral do teorema do momento angular é

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} N dt. \quad (3.145)$$

Os teoremas do momento angular no plano e do momento angular em relação a um eixo podem ser obtidos a partir do teorema do momento angular vetorial, tomando-se os componentes nas direções apropriadas.

3.9 DISCUSSÃO DO PROBLEMA GERAL DO MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES

Dada a força F como função $F(v, r, t)$ da posição, da velocidade e do tempo, a equação de movimento (3.126) torna-se um conjunto de três (ou, em duas dimensões, de duas) equações diferenciais de segunda ordem simultâneas:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Se a posição $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e a velocidade $v_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ forem conhecidas em qualquer instante t_0 , as Eqs. (3.146) fornecem d^2r/dt^2 e, a partir de r, \dot{r}, \ddot{r} , no tempo t , pode-se determinar r, \dot{r} para pequenos intervalos de tempo posteriores ou anteriores a $t + dt$, estendendo-se, assim, as funções r, \dot{r} e \ddot{r} para o passado e o futuro com o auxílio das Eqs. (3.146). Pode-se tornar este argumento matematicamente rigoroso, levando-o ao desenvolvimento de um teorema que garanta a existência de uma única solução para estas equações, sejam quais forem a posição e a velocidade dadas no instante inicial t_0 . Note-se que a solução geral das Eqs. (3.146) envolve seis constantes “arbitrarias” $x_0, y_0, z_0, v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}$. Ao invés destas constantes, poder-se-ia especificar outras seis grandezas determinadas. (Em duas dimensões, são duas equações diferenciais de segunda ordem e quatro constantes iniciais.)

Em geral, a resolução das três equações simultâneas (3.146) será muito mais difícil do que a da equação simples (2.9) para o movimento unidimensional. A razão para a dificuldade ser maior é que, em geral, todas as variáveis x, y e z e suas derivadas aparecem nas três equações, tornando o problema tão difícil quanto uma equação diferencial de sexta ordem. [Na realidade, pode-se mostrar que o sistema de Eqs. (3.146)

é equivalente a uma equação de sexta ordem.] Se em cada componente da força aparecerem somente a coordenada correspondente e suas derivadas,

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(\dot{x}, x, t), \\ F_y &= F_y(\dot{y}, y, t), \\ F_z &= F_z(\dot{z}, z, t), \end{aligned} \quad (3.147)$$

então as três equações (3.146) serão independentes entre si. Pode-se resolvê-las separadamente para determinar $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ como três problemas independentes em movimentos unidimensionais. O exemplo mais importante deste caso é provavelmente aquele em que a força só é dada como função do tempo:

$$F = F(t) = [F_x(t), F_y(t), F_z(t)]. \quad (3.148)$$

Pode-se resolver cada equação do movimento, em x , y e z , separadamente utilizando-se o método descrito na Seç. 2.3. O caso de uma força de atrito proporcional à velocidade também é um exemplo do tipo (3.147). Outros casos também poderão ocorrer como, por exemplo, o oscilador harmônico tridimensional (como uma bola de beisebol num tubo cheio de gelatina, ou um átomo numa rede cristalina), para a qual a força será dada por

$$\begin{aligned} F_x &= -k_x x, \\ F_y &= -k_y y, \\ F_z &= -k_z z, \end{aligned} \quad (3.149)$$

quando se escolhem os eixos apropriadamente. O problema agora divide-se em três sobre osciladores harmônicos lineares nas direções x , y e z . Na maioria dos casos, entretanto, a sorte não é tão grande e a Eq. (3.147) não é válida. Existem métodos especiais de resolução de alguns tipos de problemas bi e tridimensionais, sendo que alguns deles são apresentados neste capítulo. Os problemas que não podem ser resolvidos por estes métodos, pelo menos em princípio, são por métodos numéricos de integração de conjuntos de equações, como as Eqs. (3.146), objetivando-se soluções aproximadas até o grau de precisão desejado. Tais métodos são mais enfadonhos no caso tridimensional do que no unidimensional e, em geral, têm pouca utilização na prática, a menos que se disponha de um computador.

Quando se tenta estender a idéia de energia potencial a duas ou três dimensões, vê-se que, caso a força seja dada como $F(r)$, uma única função de r não é suficiente para garantir a existência de uma função energia potencial $V(r)$. No caso unidimensional, verifica-se que caso a força seja somente função da posição, a função energia potencial pode ser sempre definida pela Eq. (2.41). Na realidade, a razão é que numa só dimensão, uma partícula que se desloca de x para x_2 e retorna para x_1 deve retornar pelo mesmo caminho, de forma que se a força só for função da posição, o trabalho realizado sobre a partícula durante o seu retorno deve ser igual ao trabalho despendido contra a força, quando vai de x_1 para x_2 . Em três dimensões, uma partícula pode deslocar-se de r_1 para r_2 e retornar por um caminho diferente, de forma que, mesmo que F

seja função de r , a partícula estará sob a ação de uma força diferente em sua viagem de volta e nem sempre o trabalho realizado é o mesmo. Na Seç. 3.12 será formulado um critério de determinação da existência da energia potencial $V(r)$.

Quando $V(r)$ existe, o teorema da conservação de energia ainda é válido, e a energia total ($T + V$) é uma constante do movimento. No entanto, enquanto numa dimensão a integral da energia é sempre suficiente para permitir a resolução do problema, pelo menos em princípio (Seç. 2.5), o mesmo não se dá quando são duas e três dimensões. Sendo x a única coordenada, então, conhecida a relação ($T + V = E$) entre x e \dot{x} , pode-se obter $\dot{x} = f(x)$ e reduzir o problema à solução de uma única integral. Mas com coordenadas x , y , z , uma relação entre x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} não é bastante. Em geral, são precisas cinco dessas relações, para que se possa eliminar, por exemplo, x , y , \dot{x} e \dot{y} , e determinar $\dot{z} = f(z)$. No caso bidimensional, são necessárias três relações entre x , y , \dot{x} , \dot{y} , para solucionar o problema por este método. Para se achar quatro ou mais relações como a integral da energia, a partir das Eqs. (3.146) (ou mais duas no caso bidimensional), é impossível na maioria dos casos. Na realidade, tais relações usualmente não existem. Frequentemente, entretanto, podem-se determinar outras grandezas (por exemplo, o momento angular) que são constantes do movimento e, assim, obter mais uma ou duas relações entre x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , as quais, em muitos casos, serão suficientes para possibilitar que se encontre a relação para o problema. Exemplos destes casos serão apresentados mais tarde.

3.10 O OSCILADOR HARMÔNICO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES

Nesta e na próxima seção, são considerados alguns problemas em que a força tem a forma dada nas Eqs. (3.147); assim, as equações do movimento podem ser separadas em equações independentes das variáveis x , y e z . Isto, matematicamente, corresponde a três problemas separados, sendo cada um deles do tipo considerado no Cap. 2. O único aspecto novo é a interpretação das três soluções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ que representam um movimento no espaço tridimensional.

Considera-se, em primeiro lugar, a solução resumida do problema do oscilador harmônico tridimensional, sem amortecimento, cujas equações do movimento são

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x x, \\ m\ddot{y} &= -k_y y, \\ m\ddot{z} &= -k_z z. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Pode-se construir um modelo aproximado, suspendendo uma massa entre três conjuntos de molas perpendiculares entre si (Fig. 3.27). A solução destas equações já é conhecida desde a Seç. 2.8:

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega_x t + \theta_x), & \omega_x^2 &= k_x/m, \\ y &= A_y \cos(\omega_y t + \theta_y), & \omega_y^2 &= k_y/m, \\ z &= A_z \cos(\omega_z t + \theta_z), & \omega_z^2 &= k_z/m. \end{aligned} \quad (3.151)$$

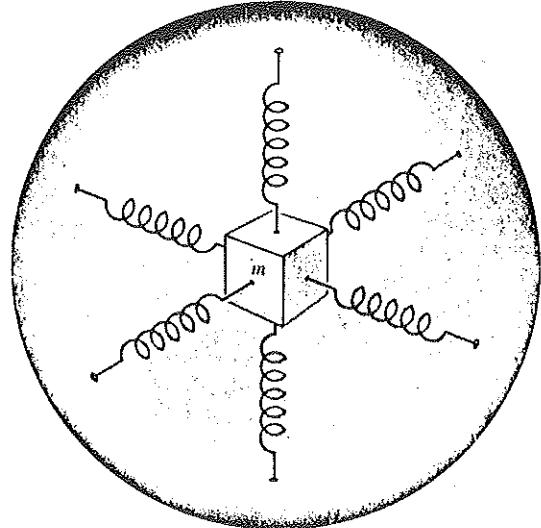


Fig. 3.27 Modelo de um oscilador harmônico tridimensional.

As seis constantes ($A_x, A_y, A_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$) dependem dos valores iniciais $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ e \dot{z}_0 . Cada coordenada oscila independentemente com movimento harmônico simples, cujas freqüências dependem dos coeficientes das forças restauradoras correspondentes e da massa. O movimento resultante da partícula ocorre dentro de uma caixa retangular de dimensões $2A_x \times 2A_y \times 2A_z$ em torno da origem. Se as freqüências angulares ω_x, ω_y e ω_z forem comensuráveis, isto é, se para um conjunto de números inteiros (n_x, n_y, n_z),

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}, \quad (3.152)$$

então a trajetória da massa m no espaço será fechada, e o movimento será periódico. Se (n_x, n_y, n_z) forem escolhidos de forma que não exista fator íntimo comum, então o período do movimento será

$$\tau = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z}. \quad (3.153)$$

Durante o período, a coordenada x executa n_x oscilações, a coordenada y executa n_y oscilações e a coordenada z , n_z oscilações, de forma que a partícula retorna ao fim do período à posição e à velocidade iniciais. No caso de duas dimensões, se a trajetória da partícula for desenhada visando-se a várias combinações das freqüências ω_x e ω_y e várias fases θ_x e θ_y , obtém-se várias figuras interessantes e bonitas. Tais figuras são chamadas *figuras de Lissajous* (Fig. 3.28) e podem ser obtidas mecanicamente por meio de um mecanismo construído para movimentar um lápis ou outro objeto que escreva de

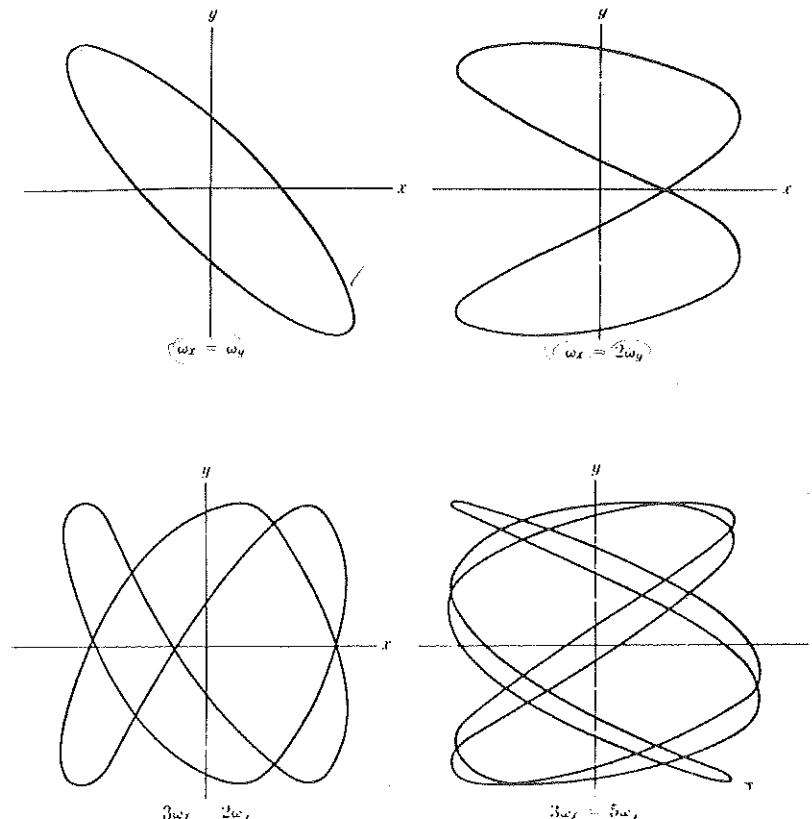


Fig. 3.28 Figuras de Lissajous.

acordo com as Eqs. (3.151). Figuras similares também podem ser obtidas eletricamente em um osciloscópio de raios catódicos que executa varreduras horizontais e verticais com as voltagens oscilando apropriadamente. Se as freqüências ω_x, ω_y e ω_z forem incomensuráveis, de forma que a Eq. (3.152) não seja satisfeita para qualquer conjunto de números inteiros, o movimento não será periódico, e a trajetória da partícula percorrerá toda a caixa de dimensões $2A_x \times 2A_y \times 2A_z$, isto é, a partícula chegará, eventualmente, próximo a todos os pontos na caixa. A discussão acima pode ser estendida sem problemas para o caso de oscilações amortecidas e forçadas em duas ou três dimensões.

Se as três constantes k_x, k_y e k_z forem todas iguais, o oscilador é chamado de *isotrópico*, isto é, igual em todas as direções. Neste caso, as três freqüências, ω_x, ω_y e ω_z , serão iguais e o movimento, periódico, cada coordenada executando um ciclo de oscilação durante um período. Pode-se demonstrar que a trajetória será uma elipse, uma linha reta, ou uma circunferência, dependendo das amplitudes e das fases ($A_x, A_y, A_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$).

3.11 PROJETIS

Um dos problemas importantes na história da Ciência da Mecânica é a determinação do movimento de um projétil. Um projétil que se desprenda sob a ação da gravidade, próximo à superfície da Terra, desprezada a resistência do ar, mover-se-á de acordo com a equação

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -mg\hat{z}, \quad (3.154)$$

onde o eixo dos z é tomado na direção vertical. Na forma de componentes:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (3.155)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad (3.156)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg. \quad (3.157)$$

As soluções destas equações são

$$x = x_0 + v_{x_0}t, \quad (3.158)$$

$$y = y_0 + v_{y_0}t, \quad (3.159)$$

$$z = z_0 + v_{z_0}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (3.160)$$

ou, na forma vetorial,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{z}. \quad (3.161)$$

Suponha que o projétil inicie seu movimento a partir da origem $(0, 0, 0)$ com velocidade inicial no plano xz , de forma que $v_{y_0} = 0$. Esta não é uma limitação do movimento do projétil, mas simplesmente corresponde a uma escolha conveniente do sistema de coordenadas. As Eqs. (3.158), (3.159) e (3.160) tornam-se então

$$x = v_{x_0}t, \quad (3.162)$$

$$y = 0, \quad (3.163)$$

$$z = v_{z_0}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3.164)$$

Estas equações descrevem de forma completa o movimento do projétil. Tirando-se o valor de t da primeira equação e substituindo na terceira, obtém-se uma equação da trajetória do projétil no plano xz :

$$z = \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} x - \frac{g}{2v_{x_0}^2} x^2. \quad (3.165)$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(x - \frac{v_{z_0}v_{x_0}}{g} \right)^2 = -2 \frac{v_{x_0}^2}{g} \left(z - \frac{v_{z_0}^2}{2g} \right). \quad (3.166)$$

que é a equação de uma parábola, com concavidade para baixo, cuja altitude máxima ocorre em

$$z_m = \frac{v_{z_0}^2}{2g} \quad (3.167)$$

e cruza o plano horizontal em $z = 0$ na origem e no ponto

$$x_m = 2 \frac{v_{z_0}v_{x_0}}{g}. \quad (3.168)$$

Se a superfície da Terra fosse horizontal, x_m seria o alcance do projétil.

Levar-se-á, no entanto, em conta a resistência do ar e supor-se-á que exista uma força de atrito proporcional à velocidade:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -mg\hat{z} - b \frac{dr}{dt}. \quad (3.169)$$

Na forma de componentes, supor-se-á que o movimento ocorra no plano xz .

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -b \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg - b \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Entretanto, deve-se chamar a atenção para o fato de que a resistência do ar contra o movimento do projétil é na realidade uma função complicada da velocidade; logo, as soluções obtidas serão apenas aproximadas, embora indiquem os aspectos gerais do movimento. Se o projétil partir da origem em $t = 0$, as soluções das Eqs. (3.170) são (veja Seç. 2.4 e 2.6)

$$v_x = v_{x_0} e^{-bt/m}, \quad (3.171)$$

$$x = \frac{mv_{x_0}}{b} (1 - e^{-bt/m}), \quad (3.172)$$

$$v_z = \left(\frac{mg}{b} + v_{z_0} \right) e^{-bt/m} - \frac{mg}{b}, \quad (3.173)$$

$$z = \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{mv_{z_0}}{b} \right) (1 - e^{-bt/m}) - \frac{mg}{b} t. \quad (3.174)$$

Explicitando t da Eq. (3.172) e substituindo na Eq. (3.174), obtém-se a seguinte equação para a trajetória:

$$z = \left(\frac{mg}{bv_{x_0}} + \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} \right) x - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{mv_{x_0}}{mv_{x_0} - bx} \right). \quad (3.175)$$

Quando a resistência do ar (ou as distâncias) for pequena, quando $(bx)/(mv_{x_0}) \ll 1$, pode-se expandir a equação acima em potências de $(bx)/(mv_{x_0})$, obtendo-se

$$z = \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_0}^2} x^2 - \frac{1}{3} \frac{bg}{mv_{x_0}^3} x^3 - \dots \quad (3.176)$$

Logo, a trajetória se inicia como uma parábola, mas quando os valores de x são grandes (considerando-se v_{x_0} positivo), z decresce mais rapidamente do que no caso de uma parábola. O fato de os dois primeiros termos concordarem com a Eq. (3.165) e de o sinal do terceiro termo ser claramente correto é um bom teste para se saber se a Álgebra levou à Eq. (3.176); a expansão em série de potências de um parâmetro pequeno é uma maneira simples e útil de verificar um resultado e, além do mais, oferece freqüentemente uma simples fórmula aproximada e de fácil interpretação. De acordo com a Eq. (3.175), quando x se aproxima do valor $(mv_{x_0})/b$, z se aproxima de menos infinito, isto é, a trajetória termina como uma queda vertical em $x = (mv_{x_0})/b$. A partir da Eq. (3.173), verifica-se que a queda vertical no final da trajetória ocorre quando a velocidade terminal é $-mg/b$. (O projétil pode, entretanto, retornar à Terra antes de atingir esta parte da trajetória.)

Se fizermos $z = 0$ na Eq. (3.176), ela tem, além da solução trivial $x = 0$, uma outra para o alcance x_m que pode ser obtida por meio de aproximações sucessivas. Primeiramente, reescreve-se a equação na seguinte forma:

$$x_m = \frac{2v_{x_0}v_{z_0}}{g} - \frac{2}{3} \frac{b}{v_{x_0}} x_m^2 - \dots \quad (3.177)$$

Desprezando-se o segundo termo, obtém-se a primeira aproximação, que concorda com a Eq. (3.168). Substitui-se esta solução no segundo termo da Eq. (3.177), obtendo-se a segunda aproximação:

$$\begin{aligned} x_m &\doteq \frac{2v_{x_0}v_{z_0}}{g}, \\ x_m &\doteq \frac{2v_{x_0}v_{z_0}}{g} - \frac{8}{3} \frac{bv_{z_0}^2 v_{x_0}}{mg^2}. \end{aligned} \quad (3.178)$$

O segundo termo fornece a correção de primeira ordem para o alcance devido à resistência do ar, e os dois primeiros, uma boa aproximação quando o efeito da resistência do ar é pequeno. Termos de ordens mais altas podem ser calculados repetindo-se o processo de substituição de soluções aproximadas na Eq. (3.177). Assim, obtém-se termos sucessivos para x_m como uma série de potências de b . O caso oposto extremo, quando a resistência do ar é importantíssima para a determinação do alcance (Fig. 3.29),

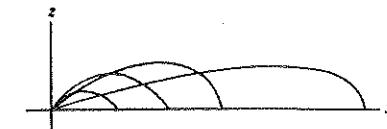


Fig. 3.29 Trajetórias para o alcance máximo dos projétils com várias velocidades de disparo.

ocorre quando a queda vertical em $x = (mv_{x_0})/b$ se inicia acima do plano horizontal $z = 0$. O alcance é, então, aproximadamente,

$$x_m \doteq \frac{mv_{x_0}}{b}, \quad \left(\frac{bv_{z_0}}{mg} \gg 1 \right). \quad (3.179)$$

Pode-se tratar (aproximadamente) do problema do efeito do vento sobre o projétil, supondo-se que a força de resistência do ar seja proporcional à velocidade relativa do projétil em relação ao ar:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -mg\hat{z} - b \left(\frac{dr}{dt} - v_w \right), \quad (3.180)$$

onde v_w é a velocidade do vento. Se v_w for constante, o termo $b v_w$ na Eq. (3.180) comporta-se como uma força constante somada a $-mg\hat{z}$, e o problema por ser facilmente resolvido pelo método acima, exceto pelo fato de haver possibilidade de existirem forças constantes adicionadas às forças de atrito em todas as três direções, x , y e z .

A resistência do ar ao projétil decresce com a altitude e, consequentemente, a melhor forma para a equação de movimento para um projétil que alcança grandes altitudes é

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -mg\hat{z} - b e^{-zh} \frac{dr}{dt}, \quad (3.181)$$

onde h é a altura (digamos, oito quilômetros) na qual a resistência do ar decresce para um valor $1/e$ do seu valor na superfície terrestre. Na forma de componentes,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -b\dot{x}e^{-zh}, & m\ddot{y} &= -b\dot{y}e^{-zh}, \\ m\ddot{z} &= -mg - b\dot{z}e^{-zh}. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Esta equação é muito mais difícil de ser resolvida. Como z aparece nas equações para x e y , deve-se resolver primeiramente a equação em z e obter $z(t)$ para substituir nas outras duas. A equação em z não pertence a nenhum dos tipos discutidos no Cap. 2. A importância deste problema foi observada durante a I Guerra Mundial, quando se descobriu accidentalmente que caso se colocasse um canhão formando um ângulo de elevação maior do que aquele que se acreditava anteriormente fornecer o máximo alcance resultava em grande aumento do alcance do projétil. A razão disto é que a redução da resistência do ar, a altitudes de vários quilômetros, excede a perda no componente horizontal da velocidade de disparo resultante da inclinação da curva.

3.12 ENERGIA POTENCIAL

Se a força F atuante sobre uma partícula é função de sua posição $r = (x, y, z)$, então o trabalho que ela executa quando a partícula se desloca de r_1 para r_2 é dado pela integral de linha

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr.$$

A sugestão é tentar definir a energia potencial $V(r) = V(x, y, z)$, em analogia com a Eq. (2.41) para o movimento em uma dimensão, como o trabalho realizado pela força sobre a partícula quando ela se desloca de r para qualquer ponto de referência r_s escolhido arbitrariamente:

$$V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) \cdot dr. \quad (3.183)$$

Esta definição implica, no entanto, que a função $V(r)$ deve ser somente função das coordenadas (x, y, z) do ponto r (e do ponto de referência r_s , que se considerará fixo), enquanto, em geral, a integral à direita depende do caminho de integração de r_s para r . Somente no caso de a integral à direita ser independente do caminho de integração a definição será legítima.

Suponha que a função força $F(x, y, z)$ é tal que a integral de linha na Eq. (3.183) seja independente do caminho de integração de r_s a qualquer ponto r . Então, o valor da integral dependerá somente de r (e de r_s), e a Eq. (3.183) definirá a função energia potencial $V(r)$. A variação de V quando a partícula se desloca de r para $r + dr$ é o trabalho realizado pela força F com o sinal negativo:

$$dV = -F \cdot dr. \quad (3.184)$$

Comparando a Eq. (3.184) com a definição geométrica [Eq. (3.107)] de gradiente, verifica-se que

$$\begin{aligned} -F &= \text{grad } V, \\ F &= -\nabla V. \end{aligned} \quad (3.185)$$

A Eq. (3.185) pode ser considerada como a solução da Eq. (3.183) para F em termos de V . Na forma de componentes, tem-se

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.186)$$

Desejando-se descobrir que condições devem ser satisfeitas pela função $F(r)$ para que a integral na Eq. (3.183) seja independente do caminho, nota-se que, como a Eq. (3.28) pode ser demonstrada a partir da definição algébrica de produto vetorial, ela deve ser válida também para o símbolo vetorial ∇ :

$$\nabla \times \nabla V = 0. \quad (3.187)$$

Aplicando $(\nabla \times \nabla)$ à função V , tem-se

$$\nabla \times \nabla V = \text{rot} (\text{grad } V) = 0. \quad (3.188)$$

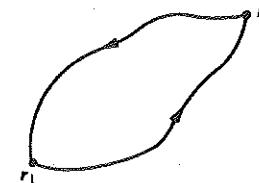


Fig. 3.30 Dois caminhos entre r_1 e r_2 , formando um caminho fechado.

A Eq. (3.188) pode ser verificada facilmente por cálculo direto. A partir das Eqs. (3.188) e (3.185), tem-se

$$\nabla \times F = \text{rot } F = 0. \quad (3.189)$$

Como a Eq. (3.189) foi deduzida admitindo-se que a função potencial existe, ela representará uma condição necessária que deve ser satisfeita pela função força $F(x, y, z)$ antes que a função potencial possa ser definida. Demonstra-se que a Eq. (3.189) também é uma condição suficiente para a existência de um potencial através do Teorema de Stokes, Eq. (3.117), considerando-se qualquer caminho fechado C no espaço, como o trabalho realizado pela força $F(r)$ quando a partícula se desloca ao longo deste caminho:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times F) dS, \quad (3.190)$$

onde S é a superfície no espaço, limitada pela curva fechada C . Admitindo-se que a Eq. (3.189) seja válida, a integral da direita é igual a zero e, para qualquer caminho fechado C , tem-se

$$\int_C F \cdot dr = 0. \quad (3.191)$$

Mas se o trabalho realizado pela força F , ao longo de qualquer caminho fechado, for zero, então o trabalho realizado para se ir de r_1 para r_2 será independente do caminho seguido. Considere dois caminhos entre r_1 e r_2 e o caminho fechado C obtido quando se vai de r_1 para r_2 por um caminho e se retorna pelo outro (Fig. 3.30). Como o trabalho realizado no deslocamento da partícula ao longo de C é igual a zero, o trabalho no deslocamento de r_1 para r_2 deve ser igual e oposto ao do deslocamento de retorno, logo o trabalho realizado no deslocamento de r_1 para r_2 por qualquer um dos caminhos é o mesmo. Aplicando-se este argumento à integral à direita na Eq. (3.183), verifica-se que o resultado é independente do caminho de integração entre r_s e r e que, portanto, a integral só é uma função $V(r)$ do limite superior, quando o limite inferior r_s é conhecido. Então, a Eq. (3.189) inclui ambas as condições, necessária e suficiente, para a existência de uma função potencial $V(r)$ quando a força é dada como função da posição $F(r)$.

Quando o rotacional de F é zero, pode-se expressar o trabalho realizado pela força, quando a partícula se desloca de r_1 para r_2 , como a diferença entre os valores da energia potencial destes pontos

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr &= \int_{r_1}^{r_s} F \cdot dr + \int_{r_s}^{r_2} F \cdot dr \\ &= V(r_1) - V(r_2). \end{aligned} \quad (3.192)$$

Combinando-se a Eq. (3.192) com o teorema da energia (3.135), tem-se, para quaisquer tempos t_1 e t_2

$$T_1 + V(r_1) = T_2 + V(r_2). \quad (3.193)$$

Assim, a energia total ($T + V$) é outra vez constante, obtendo-se uma integral da energia para o movimento em três dimensões:

$$T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = E. \quad (3.194)$$

Uma força que só seja função da posição e cujo rotacional se anule é dita *conservativa*, porque ela conduz ao teorema de conservação da energia cinética mais potencial [Eq. (3.194)].

Em alguns casos, pode ser função da posição e do tempo $F(r, t)$. Se para qualquer tempo t , o rotacional de $F(r, t)$ for nulo, então a função energia potencial $V(r, t)$ pode ser definida como

$$V(r, t) = - \int_{r_s}^r F(r, t) \cdot dr, \quad (3.195)$$

tendo-se, para qualquer tempo t tal que $\nabla \times F(r, t) = 0$,

$$F(r, t) = -\nabla V(r, t). \quad (3.196)$$

Entretanto, a Lei de Conservação de Energia não pode ser demonstrada, porque a Eq. (3.192) não terá mais validade, não sendo mais verdade que a variação da energia potencial seja igual ao trabalho realizado sobre a partícula com sinal negativo, porque a integral que define a energia potencial no tempo t é obtida com a função força naquele tempo, enquanto a integral que define o trabalho é calculada usando-se, em cada ponto, a função força para o instante em que a partícula passa por esse ponto. Conseqüentemente, a energia $T + V$ não é constante quando F e V são funções do tempo. Esta força não é considerada conservativa.

Quando as forças que agem sobre a partícula são conservativas, a Eq. (3.194) permite o cálculo de sua velocidade como função de sua posição. A energia E é fixada pelas condições iniciais do movimento. Nem a Eq. (3.194) nem a (2.44) informam sobre a direção do movimento. Esta falta de conhecimento da direção é muito mais séria no caso de duas e três dimensões, onde há uma infinidade de direções possíveis, do que quando se trata de uma dimensão, onde existem somente duas direções opostas em que a partícula pode mover-se. Em uma dimensão, só há uma trajetória possível; em duas ou três dimensões, sendo muitas as possibilidades, se a trajetória da partícula não for conhecida, a Eq. (3.194) sozinha dirá muito pouco sobre o movimento, apenas que ele pode ocorrer na região onde $V(x, y, z) \leq E$. Como exemplo, a energia potencial de um elétron no campo elétrico de atração de dois prótons (molécula de hidrogênio ionizada H_2^+) é

$$V = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}, \text{ (esu)} \quad (3.197)$$

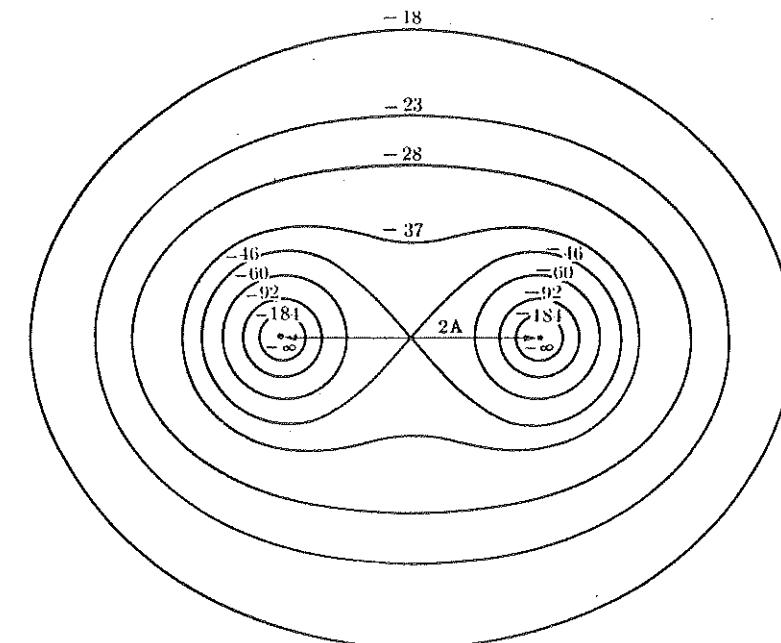


Fig. 3.31 Energia potencial de um elétron no campo elétrico de dois prótons separados por uma distância $2A$. (Energia potencial em unidades de 10^{-12} erg.)

onde r_1 e r_2 são as distâncias dos elétrons aos prótons. A função $V(x, y)$ (para o movimento no plano x, y) é diagramada na Fig. 3.31 como um mapa de contornos, onde os prótons se encontram nos pontos $y = 0, x = \pm 1A$, e as curvas de energia potencial constante são as energias potenciais correspondentes em unidades de 10^{-12} erg. Enquanto $E < -46 \times 10^{-12}$ erg, o elétron estará confinado numa região em torno de um próton ou do outro, esperando-se que seu movimento seja uma oscilação em torno do centro de atração ou uma órbita em torno deste centro, dependendo das condições iniciais. (Estes comentários sobre os movimentos possíveis requerem algum conhecimento ou experiência de Física para completar o que se pode dizer sobre a integral da energia sozinha.) Para $0 > E > -46 \times 10^{-12}$ erg, o elétron estará confinado a uma região que inclui os dois prótons, sendo possível uma variedade de movimentos. Para $E > 0$, o elétron não estará confinado na região finita no plano. Para $E \ll -46 \times 10^{-12}$ erg, o elétron estará confinado numa região onde as equípotenciais são aproximadamente circunferências em torno de um próton; seu movimento seria praticamente o mesmo se outro próton não estivesse presente. Para $E < 0$, mas $|E| \ll 46 \times 10^{-12}$ erg, o elétron pode girar numa órbita longe dos centros de atração, e seu movimento será aproximadamente o de um elétron ligado a um único centro de atração de carga $2e$; as curvas equípotenciais longe dos centros de atração também se aproximam da circunferência.

Dada uma função energia potencial $V(x, y, z)$, a Eq. (3.186) permite o cálculo de componentes da força que correspondem em qualquer ponto. Inversamente, dada

uma força $\mathbf{F}(x, y, z)$, pode-se calcular seu rotacional para saber se a função energia potencial existe. Se todos os componentes do rotacional de \mathbf{F} forem iguais a zero em qualquer região do espaço, então, dentro destas regiões, \mathbf{F} pode ser representada em termos de uma função energia potencial como $-\nabla V$. A energia potencial deve ser calculada a partir da Eq. (3.183). Além do mais, como $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, o resultado é independente do caminho de integração, podendo-se calcular a integral ao longo de um caminho conveniente. Como exemplo, considerem-se as duas seguintes funções força:

$$\begin{aligned} \text{a) } F_x &= axy, & F_y &= -az^2, & F_z &= -ax^2, \\ \text{b) } F_x &= ay(y^2 - 3z^2), & F_y &= 3ax(y^2 - z^2), & F_z &= -6axyz, \end{aligned}$$

onde a é uma constante. Calcula-se o rotacional em cada caso:

$$\begin{aligned} \text{a) } \nabla \times \mathbf{F} &= \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= (2az)\hat{x} + (2ax)\hat{y} - (ax)\hat{z}, \end{aligned}$$

$$\text{b) } \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

No caso (a), não existe energia potencial. No caso (b), existe uma função energia potencial que precisa ser determinada. Fazendo-se $r_s = 0$, isto é, tomando-se o potencial igual a zero na origem, como os componentes da força são dados em função de x, y e z , o caminho mais simples de integração de $(0, 0, 0)$ a (x_0, y_0, z_0) , ao longo do qual a integral será calculada na Eq. (3.183), é aquele que segue linhas paralelas aos eixos coordenados, como, por exemplo, o mostrado na Fig. 3.32:

$$V(x_0, y_0, z_0) = - \int_{(0, 0, 0)}^{(x_0, y_0, z_0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ao longo de C_1 , tem-se

$$y = z = 0, \quad F_x = F_y = F_z = 0, \quad d\mathbf{r} = \hat{x} dx.$$

Então,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{x_0} F_x dx = 0.$$

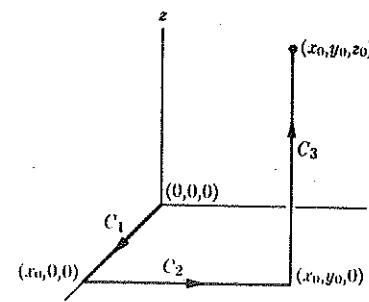


Fig. 3.32 Um caminho de integração de $(0, 0, 0)$ a (x_0, y_0, z_0) .

Ao longo de C_2 ,

$$x = x_0, \quad z = 0,$$

$$F_x = ay^3, \quad F_y = 3ax_0y^2, \quad F_z = 0 \\ d\mathbf{r} = \hat{y} dy.$$

Então,

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{y_0} F_y dy = ax_0y_0^3.$$

Ao longo de C_3 ,

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

$$F_x = ay_0(y_0^2 - 3z^2), \quad F_y = 3ax_0(y_0^2 - z^2), \quad F_z = -6axy_0z, \\ d\mathbf{r} = \hat{z} dz.$$

Então,

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{z_0} F_z dz = -3ax_0y_0z_0^2.$$

Logo, a energia potencial, eliminando-se o índice zero, será

$$V(x, y, z) = -axy^3 + 3axyz^2.$$

Verifica-se facilmente que o gradiente desta função é a força dada no item (b). Na realidade, a maneira de determinar a energia potencial, que, em geral, é mais rápida do que a apresentada acima, é simplesmente tentar achar uma função cujo gradiente forneça a força requerida.

Um exemplo importante de uma força conservativa é a força central, uma força dirigida sempre para um centro fixado O , cujo módulo só é função da distância entre a partícula e a origem O . Em coordenadas esféricas, tendo O como origem,

$$\mathbf{F} = \hat{r} F(r). \quad (3.198)$$

Os componentes cartesianos de uma força são (como $\hat{r} = \mathbf{r}/r$)

$$F_x = \frac{x}{r} F(r),$$

$$F_y = \frac{y}{r} F(r), \quad [r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}], \quad (3.199)$$

$$F_z = \frac{z}{r} F(r).$$

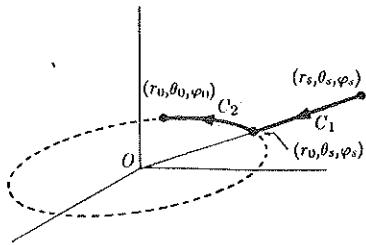


Fig. 3.33 Caminho de integração para uma força central.

É possível demonstrar por cálculo direto que o rotacional desta força é igual a zero, não dependendo da forma da função $F(r)$. Por exemplo, determina-se

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right),$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right).$$

Logo, o componente z do rotacional de F se anula e, da mesma forma, os outros dois componentes também se anulam. Para calcular-se a energia potencial, escolhe-se um ponto de referência r_s e integra-se de r_s a r_0 ao longo de um caminho (Fig. 3.33) seguindo um raio (C_1) a partir de r_s cujas coordenadas são $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ até o ponto $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$; depois, ao longo do circuito (C_2) de raio r_0 , em torno da origem, até o ponto $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Ao longo de C_1 ,

$$dr = \hat{r} dr,$$

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_s}^{r_0} \mathbf{F}(r) dr.$$

Ao longo de C_2 ,

$$dr = \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi,$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} V(r_0) &= - \int_{r_s}^{r_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{r_s}^{r_0} \mathbf{F}(r) dr. \end{aligned}$$

A energia potencial só é função de r

$$V(r) = V(r) = - \int_{r_s}^r \mathbf{F}(r) dr. \quad (3.200)$$

3.13 MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA CENTRAL

Força central é a da forma dada pela Eq. (3.198). Fisicamente, esta força representa ou uma atração [se $F(r) < 0$] ou uma repulsão [se $F(r) > 0$] na direção de um ponto fixo localizado na origem $r = 0$. Na maioria dos casos em que duas partículas interagem, a força existente entre elas é (pelo menos em princípio) central; isto é, se uma das partículas estiver localizada na origem, a força que age sobre a outra é dada pela Eq. (3.198). Exemplos de forças centrais de atração são a gravitacional ao agir sobre um planeta devido ao Sol, ou a atração elétrica ao agir sobre um elétron devido ao núcleo do átomo. A força entre um próton ou uma partícula alfa e outros núcleos é uma central de repulsão. Nos casos mais importantes, a força $F(r)$ é inversamente proporcional a r^2 , caso que será tratado na próxima seção. Outras formas da função $F(r)$ ocorrem ocasionalmente; por exemplo, em alguns problemas que envolvem a estrutura e as interações do núcleo, átomos complexos e moléculas. Nesta seção, apresenta-se o método geral de resolver o problema de uma partícula cujo movimento se dá sob a ação de uma força central.

Como em todos os exemplos citados acima, nenhuma das duas partículas se acha presa realmente a uma posição fixa, este problema, assim como a maioria dos de Física, representa uma idealização do problema real, válido quando uma das partículas pode ser considerada praticamente em repouso na origem, que é o caso de uma das partículas ser muito mais pesada que a outra. Como as forças que atuam sobre as duas partículas têm o mesmo módulo, de acordo com a terceira lei de Newton, a aceleração da mais pesada será muito menor do que a aceleração da partícula mais leve. Ver-se-á mais tarde, na Seç. 4.7, que, com apenas uma pequena modificação, o problema pode ser encaminhado para uma solução exata, no caso de movimento de duas partículas que interagem, mesmo que as suas massas sejam iguais.

Pode-se notar que o vetor momento angular da partícula sob ação de uma força central é constante, porque o torque é

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} \times \hat{r}) \mathbf{F}(r) = 0. \quad (3.201)$$

Logo, pela Eq. (3.144),

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \quad (3.202)$$

Como consequência, o momento angular em torno de qualquer eixo que passe pelo centro de força é constante. O conceito de momento angular é importante porque um grande número de forças físicas são centrais.

Para determinar-se o movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, mostra-se primeiramente que o percurso da partícula fica num plano que contém o centro da força. Para demonstrá-lo, considere-se que a posição \mathbf{r}_0 e a velocidade \mathbf{v}_0 sejam conhecidas em qualquer instante inicial t_0 , escolha-se o eixo x , ao longo da posição inicial \mathbf{r}_0 da partícula, e o eixo z perpendicular à velocidade inicial \mathbf{v}_0 . Então, inicialmente, tem-se:

$$x_0 = |\mathbf{r}_0|, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad (3.203)$$

$$v_{x_0} = \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad v_{y_0} = \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{y}}, \quad v_{z_0} = 0. \quad (3.204)$$

As equações do movimento em coordenadas retangulares são, com o auxílio das Eqs. (3.199),

$$m\ddot{x} = \frac{x}{r} F(r), \quad m\ddot{y} = \frac{y}{r} F(r), \quad m\ddot{z} = \frac{z}{r} F(r). \quad (3.205)$$

Uma solução da equação em z que satisfaz as condições iniciais para z_0 e v_{z_0} é

$$z(t) = 0. \quad (3.206)$$

Logo, o movimento ocorrerá inteiramente no plano xy . Pode-se verificar recorrendo-se à Física que se a força sobre a partícula dirigir-se sempre para a origem, a partícula nunca poderá adquirir qualquer componente de velocidade fora do plano em que a partícula se move inicialmente. Pode-se também pensar neste resultado como numa consequência da conservação do momento angular. Pela Eq. (3.202), o vetor $L = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ será constante; logo \mathbf{r} e \mathbf{v} devem sempre permanecer num plano fixo perpendicular a L .

Reduz-se assim o problema para aquele num plano com duas equações diferenciais e quatro condições iniciais que devem ser satisfeitas. Escolhendo-se as coordenadas polares r e θ no plano do movimento, as equações do movimento, na direção r e θ , de acordo com as Eqs. (3.80) e (3.198), são

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r), \quad (3.207)$$

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0. \quad (3.208)$$

Multiplicando-se a Eq. (3.208) por r , como se fez em relação ao Teorema do Momento Angular (no plano), tem-se

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0. \quad (3.209)$$

Esta equação expressa a conservação do momento angular em relação à origem, sendo também consequência da Eq. (3.202). É possível integrá-la para fornecer a integral do momento angular das equações do movimento:

$$mr^2\dot{\theta} = L = \text{constante} \quad (3.210)$$

A constante L deve ser calculada a partir das condições iniciais. Outra integral que pode ser obtida das Eqs. (3.207) e (3.208), considerando-se que a força é conservativa, é

$$T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = E, \quad (3.211)$$

onde $V(r)$ é dado pela Eq. (3.200) e E é a constante da energia, obtida a partir das condições iniciais. Substituindo-se $\dot{\theta}$ na equação acima e usando a Eq. (3.210), a energia torna-se

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E. \quad (3.212)$$

Explicitando \dot{r} :

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)^{1/2}. \quad (3.213)$$

Logo

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t. \quad (3.214)$$

A solução desta integral permite que se obtenha $r(t)$, podendo-se ainda obter $\theta(t)$ a partir da Eq. (3.210):

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt. \quad (3.215)$$

Assim, chega-se às soluções das Eqs. (3.207) e (3.208) em termos das quatro constantes, L , E , r_0 , θ_0 , as quais podem ser obtidas quando se conhecem a posição e a velocidade iniciais no plano.

Pode ser notado que este tratamento baseado na Eq. (3.212) é análogo ao usado no problema unidimensional baseado na integral da energia [Eq. (2.44)]. Aqui, a coordenada r toma o lugar de x , e o termo contendo $\dot{\theta}$ na energia cinética, quando $\dot{\theta}$ é eliminado com auxílio da Eq. (3.210), funciona como um adicional somado à energia potencial. Pode-se levar esta analogia mais longe usando a Eq. (3.210) e substituindo na Eq. (3.207):

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r). \quad (3.216)$$

Transpondo-se o termo $-L^2/mr^3$ para o segundo membro, obtém-se

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (3.217)$$

Esta equação tem exatamente a forma da equação de movimento em uma dimensão, para o caso de uma partícula sob ação de uma força real $F(r)$ mais uma "força centrífuga" L^2/mr^3 . A força centrífuga não é realmente uma força e, sim, parte do produto da massa pela aceleração da partícula, transportada para o segundo membro da equação a fim de reduzir a equação em r a uma força idêntica à do movimento unidimensional. Pode-se chamá-la de "força fictícia". Tratando-se da Eq. (3.217) como de um problema de movimento unidimensional, a "energia potencial" efetiva correspondente à "força" à direita é

$$V'(r) = - \int F(r) dr - \int \frac{L^2}{mr^3} dr$$

$$= V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad \text{A energia potencial é constante}$$
A energia potencial é constante
(3.218)

O segundo termo em V' é a "energia potencial" associada à "força centrífuga". A integral da energia resultante é exatamente a Eq. (3.212). A razão pela qual foi possível obter uma solução completa baseada somente em duas integrais, ou constantes de movimento (L e E), é que as equações de movimento não contêm a coordenada θ , de forma que a constância de L é suficiente para permitir a eliminação completa de θ na Eq. (3.207) e reduzir o problema a um outro equivalente sobre o movimento unidimensional.

A integral na Eq. (3.214) é, às vezes, muito difícil de ser calculada na prática, e a da equação resultante é difícil de obter $r(t)$, sendo, às vezes, mais fácil determinar a trajetória da partícula no espaço para, depois, calcular o seu movimento como função do tempo. Pode-se descrever a trajetória da partícula conhecendo-se $r(\theta)$. A equação resultante torna-se mais simples fazendo-se a seguinte substituição

$$u = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{u}. \quad (3.219)$$

Assim, usando-se a Eq. (3.210), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} \\ &= -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}, \end{aligned} \quad (3.220)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (3.221)$$

Substituindo r e \ddot{r} na Eq. (3.217) e multiplicando por $-m/(L^2 u^2)$, obtém-se uma equação diferencial para a trajetória ou órbita em termos de $u(\theta)$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3.222)$$

No caso em que $L = 0$, a Eq. (3.222) diverge, mas se pode verificar a partir da Eq. (3.210) que, neste caso, $\dot{\theta}$ é constante, e a trajetória é uma linha reta que passa pela origem.

Mesmo em casos em que é difícil obter soluções explícitas das Eqs. (3.214) e (3.215), ou da Eq. (3.222), pode-se colher informações qualitativas sobre o movimento em r a partir do potencial efetivo V' , dado pela Eq. (3.218), exatamente como no caso unidimensional discutido na Seç. 2.5. O gráfico de $V'(r)$ ajuda a decidir, para o caso de qualquer energia total E , se o movimento em r é periódico ou não-periódico, podendo-se localizar os pontos de retorno e descrevendo a grosso modo como a velocidade

\dot{r} varia durante o movimento. Se $V'(r)$ tiver um ponto de mínimo em r_0 , então, para energias um pouco maiores do que $V'(r_0)$, r pode executar oscilações harmônicas aproximadamente pequenas em torno de r_0 com freqüência angular dada por

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 V'}{dr^2} \right)_{r_0}. \quad (3.223)$$

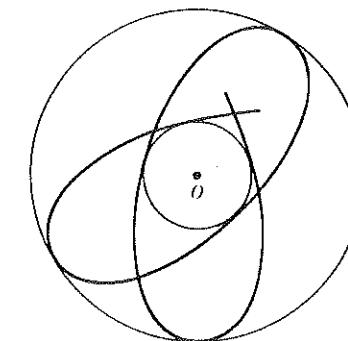


Fig. 3.34 Uma órbita limitada e não-periódica.

[Veja a discussão na Seç. 2.7 concernente à Eq. (2.57).] Deve-se lembrar, sempre, que a partícula, ao mesmo tempo, move-se em torno do centro de força com uma velocidade angular dada por

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \quad (3.224)$$

A taxa de revolução decresce quando r cresce. Em casos em que o movimento em r é periódico, $\dot{\theta} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, e a partícula pode ou não executar uma ou mais revoluções completas enquanto se move para $r = \infty$, dependendo da rapidez com que r cresce. Quando o movimento em r é periódico, o período do movimento em r não é, em geral, o mesmo que o período de revolução, de maneira que a órbita nem sempre é fechada, embora esteja confinada a uma região finita do espaço (veja Fig. 3.34). Se a razão entre o período do movimento em r e o período de revolução for um número racional, a órbita será fechada, mas se esta razão for um número inteiro, a órbita será uma curva fechada simples cujo período se relaciona à área da órbita. A demonstração disto é como segue. A área varrida pelo raio da origem até a partícula, quando esta se move formando um pequeno ângulo $d\theta$, é aproximadamente (Fig. 3.35)

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (3.225)$$

Logo, a taxa com que a área é varrida pelo raio, de acordo com a Eq. (3.210), é

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m}. \quad (3.226)$$

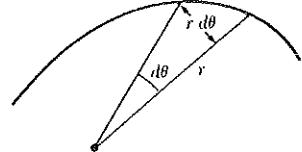


Fig. 3.35 Área varrida pelo raio vetor.

Este resultado é verdadeiro para qualquer partícula que se move sob a ação de uma força central. Se o movimento for periódico, então, integrando-se para um período completo τ do movimento, a área da órbita será

$$S = \frac{L\tau}{2m}. \quad (3.227)$$

Se a órbita for conhecida, o período de revolução pode ser calculado por esta fórmula.

3.14 FORÇA CENTRAL INVERSAMENTE PROPORCIONAL AO QUADRADO DA DISTÂNCIA

O problema mais importante sobre movimento em três dimensões é o de uma massa cujo movimento se faz sob a ação de uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância ao seu centro:

$$\mathbf{F} = \frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.228)$$

para o qual a energia potencial é

$$V(r) = \frac{K}{r}, \quad (3.229)$$

onde o ponto de referência r_s é tomado no infinito para evitar um termo adicional constante em $V(r)$. Como exemplo, a força gravitacional (Seç. 1.5) entre duas massas m_1 e m_2 , separadas pela distância r , é dada pela Eq. (3.228) como

$$K = -Gm_1m_2, \quad G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ dina-g}^{-2}\text{-cm}^2, \quad (3.230)$$

onde K é negativo, porque a força gravitacional é atrativa. Outro exemplo é a força eletrostática entre duas cargas q_1 e q_2 , separadas pela distância r , que é dada pela Eq. (3.228) como

$$K = q_1q_2, \quad (3.231)$$

onde as cargas são dadas em unidades eletrostáticas e a força, em dinas. A força eletrostática é repulsiva quando q_1 e q_2 têm o mesmo sinal, e atrativa em caso contrário. Historicamente, os primeiros problemas em que se aplicou a Mecânica Newtoniana eram aqueles que envolviam o movimento dos planetas sob a ação da atração gravita-

cional do Sol e o movimento dos satélites em torno dos planetas. O sucesso da teoria na descrição destes movimentos é responsável por sua aceitação inicial.

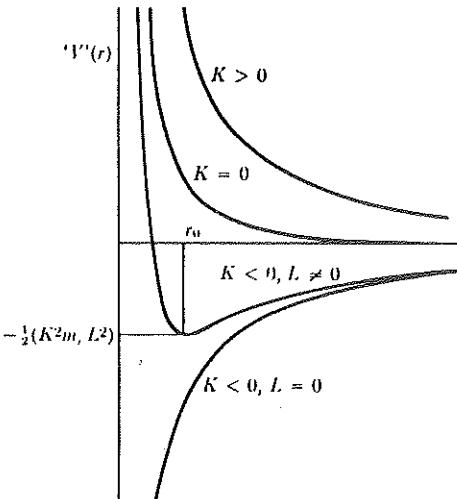


Fig. 3.36 Potencial efetivo para uma força central proporcional ao quadrado da distância.

Determina-se primeiramente a natureza das órbitas dadas pelas forças que seguem a lei do inverso do quadrado. Na Fig. 3.36, é apresentado um gráfico para o potencial efetivo

$$V(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (3.232)$$

Quando a força é repulsiva ($K > 0$), não haverá movimento periódico em r , só sendo possível energias totais positivas E , e a partícula vem de $r = \infty$ até um ponto de retorno, voltando para o infinito. Para uma dada energia e um dado momento angular, o ponto de retorno ocorre nos maiores valores de r do que em $K = 0$ (não existe força), para o qual a órbita será uma linha reta. Quando a força é atrativa ($K < 0$) com $L \neq 0$, o movimento também será ilimitado se $E > 0$ mas, neste caso, o ponto de retorno ocorrerá num valor de r menor do que para $K = 0$. Logo, as órbitas são as indicadas na Fig. 3.37. As linhas mais finas na Fig. 3.37 representam os raios dos pontos de retorno ou a distância do periélio medida a partir do ponto de maior aproximação da partícula ao ponto de atração ou repulsão. Para $K < 0$ e $-\frac{1}{2}K^2m/L^2 < E < 0$, a coordenada r oscila entre dois pontos de retorno. Para $E = -\frac{1}{2}K^2m/L^2$, a partícula se move em um círculo de raio $r_0 = L^2/(-Km)$. Os cálculos mostram (veja Probl. 44 no final deste capítulo) que o período para pequenas oscilações de r é o mesmo que o período de re-

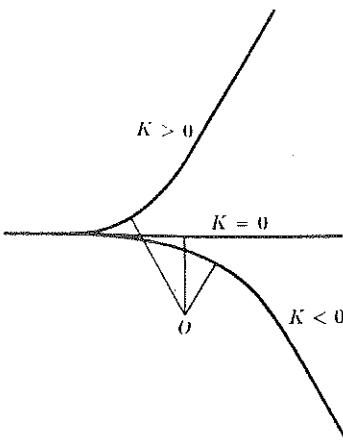


Fig. 3.37 Esboço das órbitas não limitadas da lei do inverso do quadrado.

volução. Logo para E aproximadamente igual a $-\frac{1}{2} K^2 m/L^2$, a órbita é uma curva fechada com a origem deslocada levemente do centro (pelo menos na aproximação de pequenas oscilações). Mostrar-se-á mais tarde que a órbita é, na realidade, uma elipse para todos os valores negativos de E , se $L \neq 0$. Se $L = 0$, o problema se reduz ao movimento numa dimensão de um corpo em queda livre, já discutido na Sec. 2.6.

Calcular as integrais nas Eqs. (3.124) e (3.125) para a força da lei do inverso do quadrado é muito trabalhoso, porém todas as informações essenciais sobre o movimento podem ser obtidas mais simplesmente, a partir da Eq. (3.222) para a órbita. A Eq. (3.222) para a órbita torna-se, neste caso,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mK}{L^2}. \quad (3.233)$$

Esta equação tem a mesma forma que a de um oscilador harmônico (de freqüência unitária) submetida a uma força constante, onde θ aparece no lugar de t . A equação é homogênea e a sua solução geral é

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0, \quad (3.234)$$

$$u = A \cos(\theta - \theta_0), \quad (3.235)$$

onde A e θ_0 são constantes arbitrárias. Uma solução óbvia da equação não-homogênea (3.233) é a constante

$$u = -\frac{mK}{L^2}. \quad (3.236)$$

Logo, a solução geral da Eq. (3.233) é

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0). \quad (3.237)$$

Esta é a equação de uma seção cônica (elipse, parábola ou hipérbole) com o foco em $r = 0$, como será mostrado a seguir. A constante θ_0 determina a orientação da órbita no plano. A constante A , que pode ser considerada positiva (pois θ_0 é arbitrário), determina os pontos de retorno do movimento em r , dados por

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} + A, \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} - A. \quad (3.238)$$

Se $A > -mK/L^2$ (condição necessária se $K > 0$), existe somente um ponto de retorno, r_1 , pois r não pode ser negativo. Não se pode ter $A < mK/L^2$, pois r não poderia ser positivo para nenhum valor de θ . Para um dado E , os pontos de retorno são soluções da equação

$$V(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E. \quad (3.239)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= -\frac{mK}{L^2} + \left[\left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{1/2}, \\ \frac{1}{r_2} &= -\frac{mK}{L^2} - \left[\left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.240)$$

Comparando a Eq. (3.238) com a Eq. (3.240), verifica-se que o valor de A , em termos da energia e do momento angular, é dado por

$$A^2 = \frac{m^2 K^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}. \quad (3.241)$$

A órbita é, então, determinada em termos das condições iniciais.

Uma elipse é definida como a curva desenhada por uma partícula que se move de tal maneira que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos F e F' é constante.¹¹ Os pontos F e F' são denominados *focos* da elipse. Usando-se a notação indicada na Fig. 3.38, tem-se

$$r' + r = 2a, \quad (3.242)$$

¹¹ Tratamento detalhado sobre seções cônicas é encontrado em W. F. Osgood and W. C. Graustein, *Plane and solid analytic geometry*, New York, Macmillan, 1938 (Caps. 6, 7, 8 e 10).

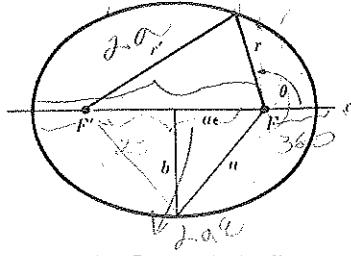


Fig. 3.38 Geometria da elipse.

onde a é a metade do diâmetro maior (eixo maior) da elipse. Em termos de coordenadas polares com centro no foco F e com o eixo dos x negativo passando pelo foco F' , a lei dos co-senos fornece

$$r'^2 = r^2 + 4a^2\epsilon^2 + 4ra\epsilon \cos \theta, \quad (3.243)$$

onde $a\epsilon$ é a distância a partir do centro da elipse até o foco; ϵ é denominada *excentricidade* da elipse. Se $\epsilon = 0$, os focos coincidem e a elipse torna-se uma circunferência. Quando $\epsilon \rightarrow 1$, a elipse degenera-se em uma parábola ou num segmento de reta, dependendo de o foco F' se deslocar para o infinito ou permanecer em distância finita de F . Substituindo r' da Eq. (3.242), acha-se

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cos \theta} \quad (3.244)$$

Esta é a equação de uma elipse em coordenadas polares com a origem num foco. Sendo b a metade do diâmetro menor (eixo menor), a partir da Fig. 3.38, tem-se

$$b = a(1-\epsilon^2)^{1/2}. \quad (3.245)$$

A área da elipse pode ser obtida de maneira direta por integração:

$$S = \pi ab. \quad (3.246)$$

A hipérbole é definida como a curva descrita por uma partícula que se move de tal maneira que a diferença entre as distâncias da partícula aos focos fixos F, F' é constante (Fig. 3.39). A hipérbole tem dois ramos definidos por

$$\begin{aligned} r' - r &= 2a && (\text{ramo +}), \\ r' - r &= -2a && (\text{ramo -}). \end{aligned} \quad (3.247)$$

Chama-se o ramo que envolve F de ramo + (ramo à esquerda na figura), e o ramo externo a F , de ramo - (ramo à direita na figura). A Eq. (3.243) é válida também para a hipérbole, mas a excentricidade ϵ é maior do que um. A equação da hipérbole em coordenadas polares torna-se:

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (3.248)$$

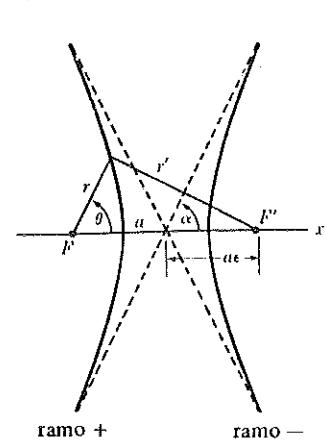


Fig. 3.39 Geometria da hipérbole.

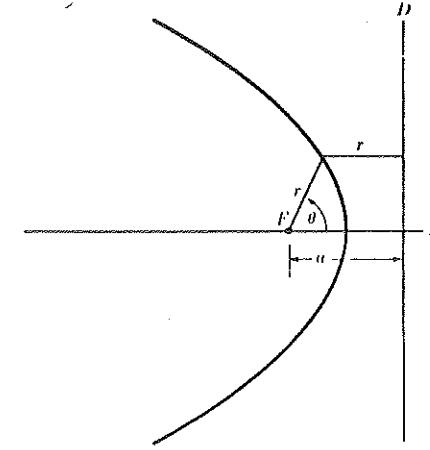


Fig. 3.40 Geometria da parábola.

(O sinal + refere-se ao ramo +, o sinal - ao ramo -.) As assíntotas da hipérbole (linhas tracejadas na Fig. 3.39) fazem um ângulo α com o eixo que passa pelos focos, onde α é o valor de θ para o qual r é infinito:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.249)$$

Parábola é uma curva descrita por uma partícula que se move de tal maneira que a sua distância a uma linha D fixa (a *diretriz*) é igual à sua distância a um foco fixo F . A partir da Fig. 3.40, tem-se

$$r = \frac{a}{1 + \cos \theta}, \quad (3.250)$$

onde a é a distância do foco F à diretriz D .

Podem-se escrever as equações para todas as três cônicas na seguinte forma-padrão:

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta, \quad (3.251)$$

onde A é positivo e B e A são dados como segue:

$B > A$, elipse:

$$B = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}, \quad A = \frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}; \quad (3.252)$$

$B = A$, parábola:

$$B = \frac{1}{a}, \quad A = \frac{1}{a}; \quad (3.253)$$

$0 < B < A$, hipérbole, ramo +:

$$B = \frac{1}{a(\varepsilon^2 - 1)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2 - 1)}; \quad (3.254)$$

$-A < B < 0$, hipérbole, ramo -:

$$B = -\frac{1}{a(\varepsilon^2 - 1)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (3.255)$$

O caso de $B < -A$ não pode ocorrer nunca, pois r não seria positivo para nenhum valor de θ . Permitindo-se que exista uma orientação arbitrária da curva em relação ao eixo x , então a Eq. (3.251) torna-se

$$\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta - \theta_0), \quad (3.256)$$

onde θ_0 é o ângulo entre o eixo x e a linha que parte da origem até o periélio (ponto de maior aproximação da curva à origem). Pode-se notar que em todos os casos

$$\epsilon = \frac{A}{|B|}. \quad (3.257)$$

Para a elipse ou a hipérbole,

$$a = \left| \frac{B}{A^2 - B^2} \right|. \quad (3.258)$$

A Eq. (3.237) para a órbita de uma partícula sob ação de uma força que segue a lei do inverso do quadrado tem a forma da Eq. (3.256) para uma seção cônica, com [usando a Eq. (3.241)]

$$\begin{aligned} B &= -\frac{mK}{L^2}, \\ A &= \left(B^2 + \frac{2mE}{L^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.259)$$

A excentricidade da órbita, pela Eq. (3.257), é

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{mK^2} \right)^{1/2}. \quad (3.260)$$

Para uma força atrativa ($K < 0$), a órbita é uma elipse, parábola ou hipérbole, dependendo se $E < 0$, $E = 0$, ou $E > 0$; se for uma hipérbole, será o ramo +. Para uma força repulsiva ($K > 0$), deve-se ter $E > 0$, e a órbita só pode ser o ramo - de uma hipérbole. Este resultado concorda com a discussão qualitativa preliminar. Para órbitas elípticas e hiperbólicas, o semi-eixo maior a é dado por

$$a = \left| \frac{K}{2E} \right|. \quad (3.261)$$

É curioso que esta relação não envolva a excentricidade ou o momento angular; a energia E depende somente do semi-eixo maior, e vice-versa. As Eqs. (3.260) e (3.261) podem ser obtidas diretamente a partir da Eq. (3.239) para os pontos de retorno do deslocamento em r . Obtendo-se r desta equação, os pontos de retorno serão os seguintes:

$$r_{1,2} = \frac{K}{2E} \pm \left[\left(\frac{K}{2E} \right)^2 + \frac{L^2}{2mE} \right]^{1/2}. \quad (3.262)$$

Os raios máximo e mínimo da elipse são:

$$r_{1,2} = a(1 \pm \epsilon), \quad (3.263)$$

e o raio mínimo da hipérbole é

$$r_1 = a(\epsilon \mp 1), \quad (3.264)$$

onde o sinal superior refere-se ao ramo + e o sinal inferior ao ramo -. Comparando as Eqs. (3.263) e (3.264) com a Eq. (3.262), pode-se retirar os valores de a e ϵ . Assim, sabendo-se que a trajetória é uma elipse ou uma hipérbole, é possível determinar o seu tamanho e a sua forma a partir da Eq. (3.239), que foi obtida simplesmente a partir do método da energia, sem necessitar de uma solução exata da equação da órbita. Este é um ponto importante a ser lembrado.

3.15 ÓRBITAS ELÍPTICAS. O PROBLEMA DE KEPLER

No início do século XVII, antes de Newton descobrir as leis do movimento, Kepler enunciou três leis para descrever o movimento dos planetas. Deduziu-as a partir de longas e acuradas observações do movimento dos planetas realizadas por Tycho Brahe:

1. Os planetas movem-se em elipses sendo o Sol um dos focos.
2. O raio vetor do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
3. O quadrado do período de revolução é proporcional ao cubo do semi-eixo maior.

A segunda lei expressa-se pela Eq. (3.226) e é consequência da conservação do momento angular; ela demonstra que a força sobre o planeta é dirigida para o Sol. A primeira lei segue-se, como foi mostrado, do fato de a força ser inversamente proporcional ao quadrado da distância. A terceira lei deriva-se do fato de a força gravitacional ser proporcional à massa do planeta, como se demonstrará a seguir.

No caso de uma órbita elíptica, pode-se determinar o período do movimento a partir das Eqs. (3.227) e (3.246):

$$\tau = \frac{2m}{L} \pi ab = \frac{2m}{L} \pi a^2 (1 - \epsilon^2)^{1/2} = \left(\frac{\pi^2 K^2 m}{2|E|^3} \right)^{1/2}, \quad (3.265)$$

ou, usando a Eq. (3.261),

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \left| \frac{m}{K} \right|. \quad (3.266)$$

No caso de um corpo pequeno, de massa m , que se move sob a ação da atração gravitacional [Eq. (3.230)] de um corpo maior, de massa M , esta relação torna-se

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3 \quad (3.267)$$

O coeficiente de a^3 é agora uma constante para todos os planetas, o que está de acordo com a terceira lei de Kepler. A Eq. (3.267) permite “pesar” o Sol, desde que o valor de G seja conhecido, o que acontece medindo-se o valor do período e do eixo maior de qualquer órbita planetária. Isto já foi feito no Cap. 1, Probl. 11, no caso de uma órbita circular. A Eq. (3.267) mostra agora que o resultado se aplica também a órbitas elípticas, se o raio for substituído pelo semi-eixo maior.

Demonstra-se, assim, que as leis de Kepler podem ser obtidas a partir das leis de movimento de Newton e da lei da gravitação. O problema inverso, isto é, deduzir as leis de força a partir das leis de Kepler e da lei de movimento, é fácil e muito importante historicamente, pois foi desta maneira que Newton deduziu a lei da gravitação. Deve-se esperar que os movimentos dos planetas apresentem pequenos desvios das leis de Kepler, em vista do fato de o problema de força central, resolvido na última seção, representar uma idealização do problema real. Em primeiro lugar, como foi evidenciado na Seç. 3.13, admite-se que o Sol permanece estacionário, enquanto, na realidade, ele deve deslocar-se levemente devido à atração dos planetas que giram em seu redor. Este efeito é muito pequeno, mesmo no caso dos planetas maiores, e pode ser corrigido por métodos que serão explicados posteriormente, na Seç. 4.7. Em segundo lugar, um dado planeta, digamos a Terra, é atraído pela força gravitacional dos outros planetas, assim como pelo Sol. Como as massas, mesmo dos planetas mais pesados, são uma pequena porcentagem da massa solar, estas produzirão desvios, pequenos porém mensuráveis, das leis de Kepler. Os desvios esperados podem ser calculados, e eles concordam com observações astronômicas muito precisas. Na realidade, os planetas Netuno e Plutão foram descobertos a partir dos efeitos causados na órbita de outros planetas. Observações do planeta Urano, realizadas durante aproximadamente sessenta anos após a sua descoberta em 1781, mostraram desvios inexplicáveis da órbita prevista, mesmo depois que as correções visando aos efeitos gravitacionais causados por outros planetas conhecidos foram introduzidas. Através de análise matemática cuidadosa e elaborada dos dados, Adams e Leverrier foram capazes de demonstrar que os desvios poderiam ser obtidos, caso se admitisse a existência de um planeta desconhecido, mais afastado do que Urano. Assim, eles calcularam a posição do planeta desconhecido e lá estava Netuno no lugar previsto.

As órbitas dos cometas, que ocasionalmente se movem em torno do Sol para depois saírem, são, pelo menos em alguns casos, elipses muito alongadas. Não é conhecido até o presente se algum dos cometas vem de regiões localizadas além do sistema solar e se, nestes casos, eles teriam, pelo menos inicialmente, órbitas parabólicas ou hiperbólicas. Mesmo os cometas cujas órbitas são comprovadamente elípticas têm períodos muito irregulares devido à perturbação introduzida pela força gravitacional dos planetas maiores aos quais eles passam ocasionalmente próximos. Entre os perío-

dos em que passam próximo aos planetas maiores, os cometas seguem trajetórias muito aproximadas das obtidas com a Eq. (3.256), mas após cada uma dessas aproximações seu movimento perturba-se de tal maneira que as constantes A , B e θ_0 acusam valores diferentes dos apresentados anteriormente.

Como foi observado na Seç. 3.13, espera-se que as órbitas limitadas, oriundas de uma força central atrativa $F(r)$, não sejam fechadas (Fig. 3.34). Órbitas fechadas (com exceção das circulares) são obtidas quando o período de oscilações radiais é igual, ou é um múltiplo racional, ao período de revolução. Somente em certas formas especiais da função $F(r)$, das quais a lei do inverso do quadrado é uma, as órbitas são fechadas. Qualquer mudança ocorrida na lei do inverso do quadrado; uma mudança no expoente de r ou a adição a $E(r)$ de um termo não inversamente proporcional a r^2 , levará a órbitas que não são fechadas, como é de esperar. Entretanto, se a mudança for muito pequena, as órbitas serão aproximadamente elípticas. O período de revolução será, nesse caso, pouco maior ou pouco menor do que o período das oscilações radiais, e a órbita terá aproximadamente a forma de uma elipse, cujo eixo maior gira vagarosamente em torno do centro de força. Na realidade, observou-se uma pequena precessão do eixo maior da órbita do planeta Mercúrio, com velocidade angular de 41 segundos de arco por século, além de perturbações atribuídas aos efeitos gravitacionais dos outros planetas. Pensou-se, anteriormente, que este resultado poderia ser obtido considerando-se os efeitos gravitacionais causados por poeiras no sistema solar, mas pode-se demonstrar que a quantidade de poeira é muito pequena para produzir tal efeito. Atualmente, acredita-se que o efeito se deve a pequenas correções introduzidas na Teoria do Movimento Planetário, de Newton, requeridas pela Teoria da Relatividade.¹²

O problema do movimento dos elétrons em torno do núcleo de um átomo deveria ser semelhante ao dos planetas em torno do Sol, se a Mecânica Newtoniana fosse aplicável. Na realidade, o movimento dos elétrons deve ser calculado a partir das leis da Mecânica Quântica. Antes da descoberta dessa ciência, Bohr foi capaz de fornecer uma descrição razoável do comportamento dos átomos, admitindo que eles giram em torno de um núcleo, com certas órbitas selecionadas especialmente entre aquelas dadas pela Mecânica Newtoniana. A teoria de Bohr também é útil como uma representação a grosso modo da estrutura atômica.¹³

3.16 ÓRBITAS HIPERBÓLICAS. O PROBLEMA DE RUTHERFORD. SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO

O interesse causado pelas órbitas hiperbólicas relaciona-se ao movimento das partículas que giram em torno do Sol e que possam vir do ou escapar para o espaço exterior, assim como à possível colisão de duas partículas carregadas. Se uma partícula leve, de carga q_1 , se aproximar de uma outra pesada, de carga q_2 e em repouso, a

¹² A. Einstein and L. Infeld, *The evolution of physics*. New York, Simon and Schuster, 1938, p. 253. Para análise matemática, consulte R. C. Tolman, *Relativity, thermodynamics, and cosmology*. Oxford University Press, 1934, Seç. 83.

¹³ M. Born, *Atomic physics*, tr. por John Dougall. New York, Stechert, 1936, Cap. 5.

partícula leve seguirá uma trajetória hiperbólica ao passar pela pesada, de acordo com os resultados obtidos na Seç. 3.14. No caso de colisão de partículas atômicas, a região em que a trajetória se afasta de uma assíntota para outra é muito pequena (uns poucos ångströns ou menos), e o que se observa é o ângulo de desflexão $\Theta = \pi - 2\alpha$ (Fig. 3.41) entre as trajetórias da partícula incidente antes e depois da colisão. A Fig. 3.41 foi desenhada para o caso de um centro de força repulsivo situado em F . Pelas Eqs. (3.249) e (3.260), tem-se

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \operatorname{cotg} \alpha = (e^2 - 1)^{-1/2} = \left(\frac{mK^2}{2EL^2} \right)^{1/2}. \quad (3.268)$$

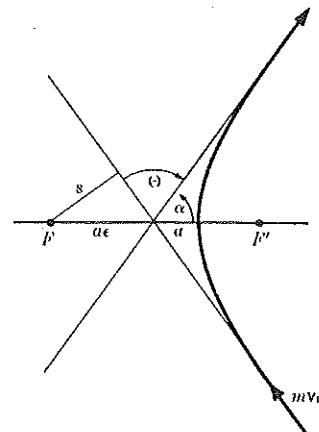


Fig. 3.41 Órbita hiperbólica.

Considere-se que a partícula tenha velocidade inicial v_0 e que viaje numa direção que, se não for desviada, passará a uma distância s do centro de força (F). A distância s é denominada *parâmetro de impacto* para a colisão. Pode-se calcular imediatamente a energia e o momento angular em termos da velocidade e do parâmetro de impacto:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (3.269)$$

$$L = mv_0s. \quad (3.270)$$

Substituindo na Eq. (3.268), teremos para o ângulo de espalhamento Θ :

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \frac{K}{msv_0^2}. \quad (3.271)$$

Se uma partícula leve de carga positiva q_1 colide com uma partícula pesada de carga positiva q_2 , logo, pela Eq. (3.231),

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = \frac{q_1 q_2}{msv_0^2}. \quad (3.272)$$

Em experiências de espalhamento típicas, um feixe de partículas carregadas pode de ser lançado numa direção definida através de uma folha fina. Muitas das partículas emergem da folha em direções diferentes da incidente, depois de serem defletidas ou espalhadas num ângulo Θ pela colisão com as partículas da folha. Para colocar a Eq. (3.272) na forma que possa ser comparada com a experiência, é preciso eliminar o parâmetro de impacto s , que não pode ser determinado experimentalmente. Na experiência, pode-se observar a fração das partículas incidentes que são espalhadas em vários ângulos Θ . O resultado expressa-se comumente em termos da *seção de choque*, que é definida da seguinte maneira: se N partículas incidentes colidirem com uma folha fina contendo n centros de espalhamento por unidade de área, o número médio de partículas dN espalhadas entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$ é dado em termos da seção de choque $d\sigma$ pela relação

$$\frac{dN}{N} = n d\sigma. \quad (3.273)$$

$d\sigma$ é denominada seção de choque para espalhamento entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$, podendo ser considerada como a área efetiva, que envolve o centro de espalhamento que a partícula incidente deve atingir para ser espalhada entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$.

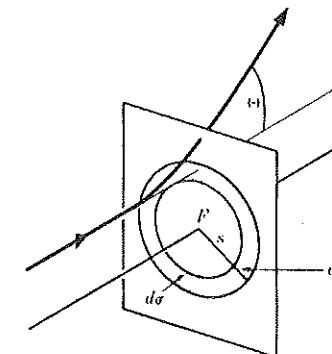


Fig. 3.42 Seção de choque de espalhamento.

Existindo uma “área-alvo” $d\sigma$, em torno de cada centro de espalhamento, então a área-alvo total, em unidade de área, será $n d\sigma$. Se N partículas colidirem, por unidade de área, o número médio que colidirá com a área-alvo será $Nn d\sigma$, e isto, de acordo com a Eq. (3.273), é exatamente dN , o número de partículas espalhadas entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$.

Considere-se agora uma partícula incidente aproximando-se de um centro de espalhamento F como mostrado nas Figs. 3.41 e 3.42. Se o parâmetro de impacto estiver entre s e $s + ds$, a partícula será espalhada num ângulo entre Θ e $\Theta + d\Theta$, onde Θ é dado pela Eq. (3.272), e $d\Theta$, pela diferencial da Eq. (3.272):

$$\frac{1}{2 \cos^2(\Theta/2)} d\Theta = -\frac{q_1 q_2}{ms^2 v_0^2} ds. \quad (3.274)$$

A área do anel em torno de F , de raio interior igual a s e raio exterior igual a $s + ds$, no qual a partícula deve colidir para ser espalhada num ângulo entre Θ e $\Theta + d\Theta$, é

$$d\sigma = 2\pi s ds. \quad (3.275)$$

Substituindo, na equação acima, s da Eq. (3.272) e ds da Eq. (3.274) (omitindo o sinal negativo), obtém-se

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \Theta}{\sin^4(\Theta/2)} d\Theta. \quad (3.276)$$

Esta fórmula pode ser comparada com $d\sigma$, determinado experimentalmente com o dado pela Eq. (3.273). A fórmula (3.276) foi deduzida por Rutherford e usada na interpretação da sua experiência de espalhamento de partículas alfa por folhas finas de metal. Ele mostrou que a fórmula concorda com a experiência, quando $q_1 = 2e$ (carga da partícula alfa)¹⁴ e $q_2 = Ze$ (carga do núcleo atômico), se a distância do periélio ($a + a\epsilon$, na Fig. 3.41) for maior do que cerca de 10^{-12} cm, o que mostra que a carga positiva do átomo deve concentrar-se na região de raio menor do que 10^{-12} cm. Este resultado deu origem à teoria nuclear do átomo. A distância do periélio pode ser calculada a partir da fórmula (3.262) ou segundo as leis de conservação da energia e do momento angular, sendo dada por

$$r_1 = \frac{q_1 q_2}{2E} \left[1 + \left(1 + \frac{2EL^2}{mq_1^2 q_2^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.277)$$

A menor distância de periélio para partículas incidentes com uma dada energia ocorre quando $L = 0$ ($s = 0$) tendo o valor

$$r_{1\min} = \frac{q_1 q_2}{E}. \quad (3.278)$$

Logo, no caso de existir uma variação da Lei de Força, de Coulomb, quando a partícula resvala ou penetra no núcleo, ela deve manifestar-se, primeiramente, como um desvio da lei de Rutherford [Eq. (3.276)] para grandes ângulos de espalhamento Θ e, em segundo lugar, quando a energia E é suficientemente grande, tal que

$$E > \frac{q_1 q_2}{r_0}, \quad (3.279)$$

onde r_0 é o raio do núcleo. A primeira medida do raio nuclear foi realizada desta maneira por Rutherford, que obteve um valor da ordem de 10^{-12} cm.

O cálculo da seção de choque mostrado acima só é estritamente correto quando a partícula alfa atinge um núcleo muito mais pesado do que ela, pois considera-se que

o centro de espalhamento permaneça fixo. Esta restrição pode ser removida por métodos que serão discutidos na Seç. 4.8. As partículas alfa colidem também com os elétrons, mas estes são tão leves que não poderão desviar apreciavelmente a partícula alfa. A colisão de uma partícula com um núcleo deve ser tratada na realidade por métodos inerentes à Mecânica Quântica. O conceito de trajetória definida com um parâmetro de impacto s definido não é válido na Mecânica Quântica, mas o conceito de seção de choque ainda o é, como se deveria esperar, pois ela foi definida em termos de grandezas determinadas experimentalmente. O resultado final para a seção de choque de espalhamento será o mesmo que o da fórmula (3.276).¹⁵ É uma coincidência afortunada, na história da Física, que a Mecânica Clássica forneça o resultado correto para este problema.

3.17 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

As leis determinantes de campos elétricos e magnéticos devido a várias distribuições das cargas e correntes elétricas são assuntos relacionados à Teoria Eletromagnética. A determinação dos movimentos das partículas carregadas sob a ação de forças elétricas e magnéticas conhecidas é um problema da Mecânica. A força elétrica exercida sobre uma partícula de carga q , localizada no ponto r , é

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(r), \quad (3.280)$$

Onde $\mathbf{E}(r)$ é a intensidade de campo elétrico no ponto r . A intensidade do campo elétrico pode ser função do tempo, como também da posição no espaço. A força exercida por um campo magnético sobre uma partícula carregada, localizada no ponto r , depende da velocidade v da partícula, e é dada em função da indução magnética $\mathbf{B}(r)$ pela equação¹⁶

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(r), \quad (3.281)$$

onde $C = 3 \times 10^{10}$ cm/s é a velocidade da luz, e todas as grandezas são dadas em unidades gaussianas, isto é, q em unidades eletrostáticas, \mathbf{B} em unidades eletromagnéticas (Gauss) e \mathbf{v} e \mathbf{F} , em unidades CGS. No SI, as equações tornam-se

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(r). \quad (3.282)$$

A Eq. (3.280) é válida tanto no sistema gaussiano quanto no SI. Aqui a discussão será baseada na Eq. (3.281) (unidades gaussianas), mas o resultado é facilmente transformado para o SI pela simples omissão de c sempre que ocorrer. A força eletromagnética

¹⁵ D. Bohm, *Quantum theory*, New York, Prentice-Hall, 1951, p. 537.

¹⁶ G. P. Harnwell, *Principles of electricity and electromagnetism*, 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1949, p. 302.

¹⁴ Aqui e representa o valor da carga eletrônica.

total que age sobre uma partícula devido à intensidade de campo elétrico E e a indução magnética B é

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.283)$$

Quando uma carga elétrica se move próximo ao pólo norte de um magneto, este exerce uma força sobre a carga dada pela Eq. (3.281); e pela terceira lei de Newton a carga deve exercer uma força igual e oposta sobre o magneto. Este é na realidade o caso pelo menos quando a velocidade da partícula é pequena em comparação com a velocidade da luz se o campo magnético devido à carga em movimento for calculado e a força sobre o magneto, computada. No entanto, como a indução magnética B é dirigida radialmente para fora do pólo, e a força F é perpendicular a B , as forças sobre a carga e sobre o pólo não têm a direção da linha que os liga, como no caso de uma força central. A terceira lei de Newton é, às vezes, enunciada em forma "forte", pela qual a ação e a reação não são somente iguais e opostas mas dirigem-se ao longo da linha que liga as duas partículas. No caso de forças magnéticas, esta lei só é válida na forma "fraca", na qual nada se diz a respeito da direção das forças, exceto que elas são opostas, o que é verdadeiro, não somente para forças entre magnetos e cargas em movimento, mas também para forças magnéticas, exercidas por cargas em movimento umas sobre as outras.

Se o campo magnético for constante no tempo, então se pode demonstrar que a intensidade de campo elétrico satisfaz a equação

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.284)$$

A demonstração desta afirmativa pertence à Teoria do Eletromagnetismo, não precisando ser considerada.¹⁷ Nota-se, entretanto, que isto implica, no que se refere a campos eletrostáticos, que a força elétrica sobre uma partícula é conservativa. Pode-se, então, definir um potencial elétrico

$$\phi(r) = - \int_{r_s}^r \mathbf{E} \cdot dr, \quad (3.285)$$

tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (3.286)$$

Como \mathbf{E} é a força por unidade de carga, ϕ será a energia potencial por unidade de carga associada à força elétrica:

$$V(r) = q\phi(r). \quad (3.287)$$

Além do mais, como a força magnética é perpendicular à velocidade, não poderá realizar trabalho sobre a partícula carregada. Conseqüentemente, a Lei de Conservação de Energia é válida para partículas em campo eletromagnético estático:

$$T + q\phi = E, \quad (3.288)$$

onde E é uma constante.

¹⁷ Harnwell, *op. cit.*, p. 340.

Há grande variedade de problemas de interesse prático e teórico sobre movimento de partículas carregadas nos campos elétricos e magnéticos. Em geral, é preciso escolher os métodos de cálculos visando a cada tipo de problema. Serão discutidos agora dois problemas especiais, interessantes pelos resultados obtidos e pelos métodos empregados.

Primeiramente, considere-se o movimento de uma partícula de massa m , carga q , em campo magnético constante e uniforme. Escolhe-se o eixo z na direção do campo, de forma que

$$\mathbf{B}(r, t) = B\hat{\mathbf{z}}, \quad (3.289)$$

onde B é uma constante. As equações do movimento, considerando-se a Eq. (3.281), são, então,

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (3.290)$$

De acordo com a última equação, sendo o componente z da velocidade constante, considerar-se-á o caso em que $v_z = 0$ e o movimento ocorrerá inteiramente no plano xy . As duas primeiras equações não são difíceis de resolver, mas pode-se evitar resolvê-las diretamente, fazendo-se uso da integral da energia, que neste caso é

$$\frac{1}{2}mv^2 = E. \quad (3.291)$$

A força é dada por

$$\mathbf{F} = \frac{qB}{c}\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.292)$$

$$\mathbf{F} = \frac{qBv}{c}\hat{\mathbf{z}}. \quad (3.293)$$

A força e, conseqüentemente, a aceleração têm módulo constante e são perpendiculares à velocidade. Uma partícula em movimento a velocidade constante v e aceleração constante a , perpendicular à direção do deslocamento, move-se em círculo de raio r dado pela Eq. (3.80).

$$a = r\theta^2 = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}. \quad (3.294)$$

Substituindo-se na equação anterior o valor de F dado pela Eq. (3.293) e explicitando r :

$$r = \frac{cmv}{qB}. \quad (3.295)$$

O produto Br é, portanto, proporcional ao momento linear e inversamente proporcional à carga.

Este resultado tem muitas aplicações práticas: se uma câmara de bolha é colocada num campo magnético uniforme, pode-se medir o momento linear da partícula

medindo-se o raio de curvatura de sua trajetória. O mesmo princípio é usado em um espetrômetro de raios beta para medir o momento linear de um elétron rápido pela curvatura da sua trajetória no campo magnético. Em espetrômetros de massa, a partícula é acelerada numa diferença de potencial elétrico conhecido, de tal forma que, usando a Eq. (3.238), sua energia cinética será dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 = q(\phi_0 - \phi_1). \quad (3.296)$$

A partícula passa, em seguida, através de um campo magnético uniforme B . Conhecido q e medidos r , B e $(\phi_0 - \phi_1)$, é possível eliminar v entre as Eqs. (3.295) e (3.296) e determinar a massa:

$$m = \frac{qB^2r^2}{2c^2(\phi_0 - \phi_1)}. \quad (3.297)$$

Existem muitas variações desta idéia básica. A experiência histórica de J. J. Thomson, que demonstrou a existência do elétron, foi essencialmente deste tipo. Naquela época, Thomson conseguiu mostrar que a trajetória seguida pelos raios catódicos é igual às seguidas por um feixe de partículas carregadas, todas com a mesma razão q/m .

No ciclotron, as partículas carregadas deslocam-se em círculos em campo magnético uniforme, recebendo um acréscimo de energia duplo por revolução, ao passar através de um campo elétrico oscilante. O raio r dos círculos aumenta de acordo com a Eq. (3.295), até que o raio máximo seja alcançado e no qual as partículas emergem formando um feixe de energia definida que pode ser determinada pela Eq. (3.295). A freqüência ν do campo elétrico alternado deve ser a mesma que a freqüência ν de revolução das partículas, que é dada por

$$\nu = 2\pi rv. \quad (3.298)$$

Combinando esta equação com a Eq. (3.295), tem-se

$$v = \frac{qB}{2\pi mc}. \quad (3.299)$$

Então sendo B constante, v será independente de r . Este é o princípio fundamental no qual se baseia a operação do ciclotron.¹⁸

No betatron, os elétrons deslocam-se em círculos, aumentando-se o campo magnético dentro do círculo. Como B varia com o tempo, $\nabla \times E$ não é mais igual a zero; a variação de fluxo magnético induz uma voltagem em torno do círculo de modo que o campo elétrico realiza uma quantidade de trabalho efetivo sobre o elétron, enquanto eles se deslocam em círculos. O betatron é desenhado de maneira que o aumento de B na órbita do elétron seja proporcional ao aumento de mv e que r permaneça constante.

¹⁸ De acordo com a Teoria da Relatividade, a massa de uma partícula aumenta com a velocidade, no caso de velocidades próximas à da luz, e, consequentemente, o ciclotron não pode acelerar partículas a tais velocidades, a menos que se reduza ν ou se aumente B , quando a velocidade da partícula aumentar. [Mesmo assim, a Eq. (3.295) ainda será válida segundo a Teoria da Relatividade.]

Finalmente, considere-se uma partícula de massa m , carga q , em movimento num campo elétrico constante e uniforme E e sofrendo uma indução magnética constante e uniforme B . Novamente escolhe-se o eixo z na direção de B , tomando-se o eixo y de forma que E seja paralelo ao plano yz :

$$B = B\hat{z}, \quad E = E_y\hat{y} + E_z\hat{z}, \quad (3.300)$$

onde B , E_y e E_z são constantes. As equações do movimento, segundo a Eq. (3.283), são

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y}, \quad (3.301)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x} + qE_y, \quad (3.302)$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \quad (3.303)$$

O componente z do movimento é uniformemente acelerado:

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2. \quad (3.304)$$

Para resolver as equações em x e y , deriva-se a Eq. (3.301) em relação ao tempo e substitui-se na Eq. (3.302) com o objetivo de eliminar \ddot{y} ,

$$\frac{m^2 c}{qB} \ddot{x} = -\frac{qB}{c} \dot{x} + qE_y. \quad (3.305)$$

Fazendo as substituições:

$$\omega = \frac{qB}{mc}, \quad (3.306)$$

$$a = \frac{qE_y}{m}, \quad (3.307)$$

pode-se escrever Eq. (3.305) na forma

$$\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} + \omega^2 \dot{x} = a\omega. \quad (3.308)$$

Esta equação tem a mesma forma que a equação para um oscilador harmônico, cuja freqüência angular seja ω , submetido à ação de uma “força” constante $a\omega$, com a exceção que \dot{x} aparece no lugar da coordenada. O problema correspondente do oscilador foi considerado no Cap. 2, Probl. 45. A solução neste caso será

$$\dot{x} = \frac{a}{\omega} + A_x \cos(\omega t + \theta_x), \quad (3.309)$$

onde A_x e θ_x são constantes arbitrárias a serem determinadas. Eliminando-se \dot{x} das Eqs. (3.301) e (3.302), com procedimento similar ao anterior, obtém-se a solução para \dot{y} :

$$\dot{y} = A_y \cos(\omega t + \theta_y). \quad (3.310)$$

Obtém-se x e y integrando as Eqs. (3.309) e (3.310):

$$x = C_x + \frac{at}{\omega} + \frac{A_x}{\omega} \sin(\omega t + \theta_x), \quad (3.311)$$

$$y = C_y + \frac{A_y}{\omega} \sin(\omega t + \theta_y). \quad (3.312)$$

Agora surge uma dificuldade, pois são seis constantes $A_x, A_y, \theta_x, \theta_y, C_x$ e C_y para serem determinadas, e somente quatro valores x_0, y_0, \dot{x}_0 e \dot{y}_0 para determiná-las. A dificuldade é que as soluções (3.311) e (3.312) foram obtidas pela derivação das equações originais e, derivando-se uma equação, podem-se encontrar novas soluções que não satisfazem a equação original. Considere, por exemplo, a equação muito simples

$$x = 3.$$

Derivavando, obtém-se

$$\dot{x} = 0,$$

cuja solução é

$$x = C.$$

Somente para um determinado valor da constante C a equação original será satisfeita. Substituindo as Eqs. (3.311) e (3.312) ou, de modo equivalente, as Eqs. (3.309) e (3.310) nas Eqs. (3.301) e (3.302) originais e usando-se as Eqs. (3.306) e (3.307), obtém-se:

$$-\frac{qB}{c} A_x \sin(\omega t + \theta_x) = \frac{qB}{c} A_y \cos(\omega t + \theta_y), \quad (3.313)$$

$$-\frac{qB}{c} A_y \sin(\omega t + \theta_y) = -\frac{qB}{c} A_x \cos(\omega t + \theta_x). \quad (3.314)$$

Estas duas equações serão válidas somente se A_x, A_y, θ_x e θ_y foram escolhidos de forma que

$$A_x = A_y, \quad (3.315)$$

$$\sin(\omega t + \theta_x) = -\cos(\omega t + \theta_y), \quad (3.316)$$

$$\cos(\omega t + \theta_x) = \sin(\omega t + \theta_y). \quad (3.317)$$

As duas últimas equações serão satisfeitas se

$$\theta_y = \theta_x + \frac{\pi}{2}. \quad (3.318)$$

Fazendo

$$A_x = A_y = \omega A, \quad (3.319)$$

$$\theta_x = 0, \quad (3.320)$$

$$\theta_y = \theta + \frac{\pi}{2}. \quad (3.321)$$

As Eqs. (3.311) e (3.312) se tornarão então

$$x = C_x + A \sin(\omega t + \theta) + \frac{at}{\omega}, \quad (3.322)$$

$$y = C_y + A \cos(\omega t + \theta). \quad (3.323)$$

Agora, existem somente as quatro constantes A, θ, C_x e C_y para serem determinadas a partir dos valores iniciais x_0, y_0, \dot{x}_0 e \dot{y}_0 . O movimento na direção z é dado pela Eq. (3.304). Se $E_y = 0$, o movimento será em círculo de raio A com velocidade angular ω em torno do ponto (C_x, C_y) , que é o movimento considerado no exemplo anterior. O efeito de E_y é adicionar uma translação uniforme na direção x deste movimento circular uniforme! A trajetória resultante será uma ciclóide no plano xy tendo voltas, pontas ou ondas, dependendo das condições iniciais e do valor de E_y (Fig. 3.43). Este problema é de interesse no projeto de magnetrons. A translação tem velocidade

$$v_D = a/\omega = E_y c/B.$$

$$v_D = cE \times B/B^2. \quad (3.324)$$

Esta velocidade de deriva de uma partícula carregada em campos elétricos e magnéticos cruzados tem importância fundamental na Teoria dos Plasmas.

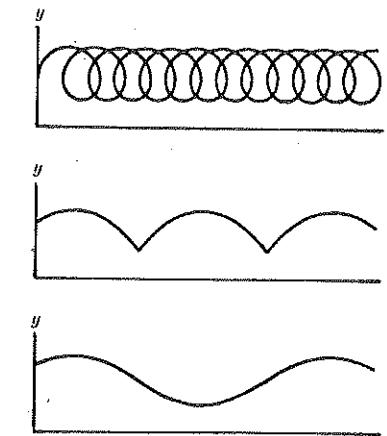


Fig. 3.43 Órbitas no plano xy de uma partícula carregada, submetida à ação de um campo magnético na direção z e de um campo elétrico na direção y .

PROBLEMAS

- Demonstre, usando as definições geométricas das operações de Álgebra Vetorial, as seguintes equações (em muitos casos um diagrama é suficiente): (a) Eq. (3.7), (b) Eq. (3.17), (c) Eq. (3.26), (d) Eq. (3.27), *(e) Eq. (3.35).
- Demonstre, usando as definições algébricas das operações de Álgebra Vetorial, em termos dos componentes, as seguintes equações: (a) Eq. (3.8), (b) Eq. (3.17), (c) Eq. (3.27), (d) Eq. (3.34), (e) Eq. (3.35).
- Deduza a Eq. (3.32) por cálculo direto, usando a Eq. (3.10) para representar A e B , e utilizando as Eqs. (3.25) até (3.31).
- a) Demonstre que $A \cdot (B \times C)$ é o volume de um paralelepípedo, cujas arestas, A , B , C , têm sinal positivo ou negativo, de acordo com um parafuso de rosca direita: se girar de A para B e avançar ao longo de C na direção positiva e com sinal negativo se avançar na direção negativa. A , B e C são três vetores quaisquer que não pertencem ao plano.
b) Use este resultado para demonstrar geometricamente a Eq. (3.34). Mostre que o primeiro e o segundo membros da Eq. (3.34) são iguais em sinal e em módulo.
- Demonstre as seguintes desigualdades, dando, para cada uma, uma demonstração geométrica e outra algébrica (em termos de componentes):
 - $|A + B| \leq |A| + |B|$.
 - $|A \cdot B| \leq |A| |B|$.
 - $|A \times B| \leq |A| |B|$.
- a) Obtenha uma fórmula análoga à Eq. (3.40) para o módulo da soma de três forças F_1 , F_2 e F_3 , em termos de F_1 , F_2 e F_3 e dos ângulos θ_{12} , θ_{23} e θ_{31} entre pares de forças. [Use as sugestões que seguem a Eq. (3.40).]
b) Obtenha uma fórmula, em relação às mesmas grandezas, para o ângulo α_1 , entre a força total e a força componente F_1 .
- Demonstre as Eqs. (3.54) e (3.55), a partir da definição (3.52), para diferenciar vetores.
- Demonstre as Eqs. (3.56) e (3.57), a partir da definição algébrica (3.53), para diferenciar vetores.
- Forneça definições convenientes, análogas às Eqs. (3.52) e (3.53), para obter a integral de uma função vetorial $A(t)$ em relação ao escalar t :

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t) dt.$$

Escreva um conjunto de equações idênticas às Eqs. (3.54) a (3.57), expressando as propriedades algébricas que se deve esperar para tal integral. Demonstre na base de uma ou de outra definição que

$$\frac{d}{dt} \int_0^t A(t) dt = A(t).$$

- Um triângulo isósceles, ABC , reto, de 45° , tem uma hipotenusa AB de comprimento $4a$. Uma partícula é submetida a uma força que a atrai para o ponto O localizado sobre a hipotenusa, à distância a do ponto A . O módulo da força é igual a k/r^2 , onde r é a distância da partícula ao ponto O . Calcule o trabalho realizado por esta força quando a partícula se move de A para C e para B ao longo dos dois catetos do triângulo. Faça os cálculos usando os dois métodos, um baseado na Eq. (3.61) e o outro baseado na Eq. (3.63).

- Uma partícula desloca-se em torno de um semicírculo de raio R , a partir da extremidade A do diâmetro para a outra extremidade B . Ela é atraída em direção ao ponto de partida A por uma força proporcional à sua distância de A . Quando a partícula está em B , a força na direção de A é igual a F_0 . Calcule o trabalho realizado contra esta força, quando a partícula se move em torno do semicírculo de A para B .

- Uma partícula é submetida à ação de uma força cujos componentes são:

$$\begin{aligned} F_x &= ax^3 + bxy^2 + cz, \\ F_y &= ay^3 + bx^2y, \\ F_z &= cx. \end{aligned}$$

Calcule o trabalho realizado por esta força, quando a partícula se move ao longo de uma linha reta a partir da origem até o ponto (x_0, y_0, z_0) .

- a) Uma partícula no plano xy é atraída para a origem por uma força $F = k/y$, inversamente proporcional à sua distância do eixo x . Calcule o trabalho realizado pela força quando a partícula se desloca do ponto $x = 0, y = a$ para o ponto $x = 2a, y = 0$, ao longo do caminho que segue os lados de um retângulo e que consiste num segmento paralelo ao eixo x de $x = 0, y = a$ até $x = 2a, y = a$ e num segmento vertical a partir do último ponto até o eixo x .

b) Calcule o trabalho realizado pela mesma força, quando a partícula se move ao longo de uma elipse de semi-eixos a e $2a$. [Sugestão. Faça $x = 2a \sin \theta, y = a \cos \theta$.]

- Determine o componente r e θ de da/dt em coordenadas polares planas, onde a é a aceleração da partícula.

- Determine os componentes de d^2A/dt^2 em coordenadas polares cilíndricas, sendo o vetor A uma função de t e estando localizado em ponto móvel.

- Determine os componentes de d^2r/dt^3 em coordenadas esféricas.

- *17. a) As coordenadas parabólicas planas f e h são definidas em termos das coordenadas cartesianas x e y pelas equações

$$x = f - h, \quad y = 2(fh)^{1/2},$$

onde f e h são sempre positivos. Determine f e h em termos de x e y . Considere os vetores unitários \hat{f} e \hat{h} definidos na direção de crescimento de f e h , respectivamente, isto é, \hat{f} é um vetor unitário na direção em que um ponto se deslocaria caso a coordenada f crescesse ligeiramente, enquanto a coordenada h permanecesse constante. Mostre que \hat{f} e \hat{h} são perpendiculares entre si em cada ponto. [Sugestão. $\hat{f} = (\hat{x} dx + \hat{y} dy) / [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}$, quando $df > 0$, $dh = 0$. Por quê?]

b) Mostre que \hat{f} e \hat{h} são funções de f e h e determine suas derivadas em relação a f e h . Mostre que $r = f^{1/2}(f+h)^{1/2}\hat{f} + h^{1/2}(f+h)^{1/2}\hat{h}$. Determine os componentes da velocidade e da aceleração em coordenadas parabólicas.

18. Uma partícula desloca-se ao longo da parábola

$$y^2 = 4f_0^2 - 4f_0x,$$

onde f_0 é uma constante. Sua velocidade v também é constante. Determine os componentes de sua velocidade e de sua aceleração em coordenadas retangulares e em coordenadas polares. Mostre que a equação da parábola em coordenadas polares é

$$r \cos^2 \frac{\theta}{2} = f_0.$$

Qual a equação desta parábola em coordenadas parabólicas? (Probl. 17.)

19. Uma partícula desloca-se em velocidade variável ao longo de uma curva arbitrária sobre o plano xy . Deve-se especificar a posição da partícula pela distância s , em que ela se deslocou, a partir de um ponto fixo localizado na curva. Seja $\hat{t}(s)$ um vetor unitário tangente à curva no ponto s , na direção crescente de s . Mostre que

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\hat{v}}{r},$$

onde $\hat{v}(s)$ é um vetor unitário perpendicular à curva, no ponto s , e $r(s)$ é o raio de curvatura no ponto s , definido como a distância da curva ao ponto de interseção de duas normais próximas. Derive, então, as seguintes fórmulas para a velocidade e a aceleração da partícula:

$$\mathbf{v} = \dot{s}\hat{t}, \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{r}\hat{v}.$$

20. Usando as propriedades do símbolo vetorial ∇ , obtenha as seguintes identidades:

$$\text{rot}(\text{rot } A) = \text{grad}(\text{div } A) - \nabla^2 A,$$

$$u \text{ grad } v = \text{grad}(uv) - v \text{ grad } u.$$

Depois escreva o componente x relacionado a cada membro destas equações e mostre por cálculo direto que elas são iguais em cada caso. (Tome cuidado, quando usar a primeira identidade em coordenadas curvilíneas, de levar em conta nos vetores unitários a dependência apropriada das coordenadas.)

21. Calcule $\text{rot } A$ em coordenadas cilíndricas.

22. Se a partícula do Probl. 12 desloca-se em velocidade v , qual é o impulso fornecido pela força?

23. a) Admitindo-se que a partícula do Probl. 11 se desloque em velocidade constante v em torno do semicírculo, determine os componentes retangulares $F_x(t)$ e $F_y(t)$ da força adicional que deve agir sobre a partícula, além da força dada no Probl. 11. Tome o eixo x ao longo do diâmetro AB .

- b) Calcule o impulso fornecido pela força adicional.

24. Uma partícula de massa m desloca-se em velocidade constante v em torno de um círculo de raio r , partindo no instante $t = 0$ de um ponto P colocado sobre o círculo. Determine o momento angular em relação ao ponto P , em qualquer instante t , a força e o torque em relação a P , verificando se o movimento satisfaz o Teorema do Momento Linear (3.140).

25. Uma partícula de massa m move-se de acordo com as equações

$$x = 2at$$

$$y = 3bt$$

$$z = ct$$

$$L = I_{cm} \omega L = mct^2$$

$$x = x_0 + at^2, \quad y = m(2at + 3bt^2 + ct), \quad z = ct$$

$$y = bt^3, \quad (x_0 + at^2 + bt^3 + ct)$$

$$z = ct.$$

Determine o momento angular L em qualquer instante t . Determine a força F e, a partir dela, determine o torque N sobre a partícula. Verifique se o movimento satisfaz o Teorema do Momento Angular (3.144).

26. Dê uma definição apropriada para o momento angular de uma partícula em relação a um eixo no espaço. Tomando o eixo especificado como o eixo z , expresse o momento angular em coordenadas cilíndricas. Se a força sobre a partícula tiver componentes em coordenadas cilíndricas F_z , F_p e F_ϕ , mostre que a taxa de variação do momento angular em relação ao eixo z é igual ao torque em relação a este eixo.

27. Uma partícula de massa m em movimento é localizada por meio de coordenadas esféricas $r(t)$, $\theta(t)$ e $\phi(t)$. Os componentes de uma força sobre a partícula, F_r , F_θ e F_ϕ , são expressas em coordenadas esféricas. Calcule os componentes esféricos do vetor momento angular e do vetor torque em relação à origem, mostrando por cálculo direto que se pode obter a equação

$$\frac{dL}{dt} = N$$

a partir das equações de movimento, de Newton.

28. As soluções mostradas na Fig. 3.28 correspondem às duas primeiras das Eqs. (3.151). Se $\theta_x = 0$ avalie θ_y para o caso em que $\omega_x = 2\omega_y$, como é mostrado na figura. Esboce a figura correspondente para o caso em que $\theta_x = \theta_y$. Esboce uma figura típica para o caso em que $4\omega_x = 3\omega_y$.

29. Determine a correção de ordem mais baixa para a Eq. (3.179), fazendo $x_m = (mv_{x_0}/b)(1 - \delta)$ e resolvendo a Eq. (3.175) para obter δ , admitindo que $\delta \ll 1$ e $bv_{z_0}/mg \gg 1$. [Sugestão. Os cálculos algébricos não são difíceis, mas você deve escolher cuidadosamente quais são os termos mais importantes neste caso-limite.]

30. Determine a altura máxima Z_{\max} alcançada por um projétil, cuja equação de movimento é a Eq. (3.169). Expanda o resultado em uma série de potências de b , mantendo os termos de Z_{\max} até a primeira ordem em b , e compare o termo de ordem mais baixa com a Eq. (3.167).

31. Um projétil é disparado da origem em velocidade inicial igual a $v_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$. A velocidade do vento é $v_w = w\hat{y}$. Resolva as equações de movimento (3.180) e obtenha x , y e z como funções do tempo t . Determine o ponto x_1 e y_1 em que o projétil retornará ao plano horizontal, mantendo somente os termos em b . Mostre que, caso a resistência do ar e a velocidade do vento sejam desprezadas quando se aponta o canhão, apenas a resistência do ar fará com que o projétil caia antes do alvo, numa fração igual a $4bv_{z_0}/3mg$ da distância do alvo, e que o vento provoca um erro adicional na coordenada y de $2bwv_{z_0}^2/(mg^2)$.

32. Obtenha o termo seguinte aos que aparecem nas Eqs. (3.176) e (3.178).

33. Um projétil é disparado da origem num plano xz (o eixo z é vertical) com velocidade inicial v_0 para atingir um alvo no ponto $x = x_0$, $z = 0$.

a) Desprezando a resistência do ar, determine o ângulo de elevação correto para o canhão. Mostre que, em geral, existem dois ângulos que satisfazem esta condição, a não ser que o alvo esteja no ponto de alcance máximo ou além dele.

b) Determine a correção de primeira ordem para o ângulo de elevação devido à resistência do ar.

34. Mostre que as forças indicadas nos Probls. 11 e 12 são conservativas, determinando a energia potencial e utilizando-a para calcular o trabalho realizado em cada um dos casos.

35. Diga quais das seguintes forças são conservativas e determine a energia potencial para as que o forem:

- a) $F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2$, $F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y$, $F_z = 18abxz^2y$.
- b) $F_x = 18abyz^3 - 20bx^3y^2$, $F_y = 18abxz^3 - 10bx^4y$, $F_z = 6abxyz^2$.
- c) $F = \hat{x}F_x(x) + \hat{y}F_y(y) + \hat{z}F_z(z)$.

36. Determine a energia potencial de cada uma das seguintes forças, caso seja conservativa:

- a) $F_x = 2ax(z^3 + y^3)$, $F_y = 2ay(z^3 + y^3) + 3ay^2(x^2 + y^2)$, $F_z = 3az^2(x^2 + y^2)$.
- b) $F_r = ap^2 \cos \varphi$, $F_\theta = ap^2 \sin \varphi$, $F_z = 2az^2$.
- c) $F_r = -2ar \sin \theta \cos \varphi$, $F_\theta = -ar \cos \theta \cos \varphi$, $F_\varphi = ar \sin \theta \sin \varphi$.

37. Determine a energia potencial de cada uma das seguintes forças caso seja conservativa:

- a) $F_x = axe^{-R}$, $F_y = bye^{-R}$, $F_z = cze^{-R}$, onde $R = ax^2 + by^2 + \zeta z^2$.
- b) $F = Af(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})$, onde \mathbf{A} é um vetor constante e $f(s)$ é qualquer função apropriada de $s = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$.
- c) $F = (\mathbf{r} \times \mathbf{A})f(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})$.

38. Uma partícula é atraída em direção ao eixo z por uma força F proporcional ao quadrado de sua distância ao plano xy e inversamente proporcional à sua distância ao eixo z . Some uma força adicional perpendicular a F , de forma a tornar conservativa a força total; determine a energia potencial. Certifique-se que escreveu as expressões para a força e para energia potencial dimensionalmente corretas.

39. Mostre que $F = \hat{r}F(r)$ é uma força conservativa, mostrando por cálculo direto que a integral

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr$$

ao longo de qualquer caminho entre r_1 e r_2 depende somente de r_1 e r_2 . [Sugestão. Expressse F e dr em coordenadas esféricas.]

40. Determine os componentes das forças para as seguintes funções energia potencial:

- a) $V = axy^2z^3$.
- b) $V = \frac{1}{2}kr^2$.
- c) $V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$.

41. Determine a força que age sobre o elétron em um íon da molécula de hidrogênio para o qual o potencial é

$$V = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2},$$

onde r_1 é a distância do elétron ao ponto $y = z = 0$, $x = -a$ e r_2 é a distância do elétron ao ponto $y = z = 0$, $x = a$.

42. Determine a função energia potencial que se anula quando $r \rightarrow \infty$ e que resulta numa força $F = -kr$ quando $r \rightarrow 0$. Determine a força. Verifique, resolvendo as integrais de linha apropriadas, se o trabalho realizado pela força sobre a partícula, quando se desloca de $r = 0$ para $r = r_0$, é o mesmo quando a partícula se desloca em linha reta ou sobre o caminho mostrado na Fig. 3.32.

43. A energia potencial para um oscilador harmônico isotrópico é

$$V = \frac{1}{2}kr^2.$$

Faça um gráfico da energia potencial efetiva para o deslocamento em r , quando uma partícula de massa m se move com esta energia potencial e com momento angular L em relação à origem. Discuta que tipos de movimentos são possíveis, descrevendo-os de maneira tão completa quanto possível sem obter a solução. Determine a freqüência de revolução para o movimento circular e a freqüência radial para pequenas oscilações em torno do movimento circular. Depois, descreva a natureza das órbitas que diferem ligeiramente das órbitas circulares.

44. Determine a freqüência, no caso de pequenas oscilações radiais em torno do movimento circular estacionário, para o potencial efetivo, dado pela Eq. (3.232), de uma força atrativa proporcional ao inverso do quadrado da distância, mostrando que é igual à freqüência de revolução.

45. Determine $r(t)$ e $\theta(t)$ para a órbita da partícula do Probl. 43. Compare com as órbitas encontradas na Seç. 3.10 no caso de oscilador harmônico tridimensional.

46. Uma partícula de massa m move-se sob a ação de uma força central cujo potencial é

$$V(r) = Kr^4, \quad K > 0.$$

Para que energia e momento angular a órbita será um círculo de raio a em torno da origem? Qual é o período deste movimento circular? Deslocando-se ligeiramente a partícula deste movimento circular, qual será o período das pequenas oscilações radiais em torno de $r = a$?

47. De acordo com a Teoria das Forças Nucleares, de Yukawa, a força entre um nêutron e um próton tem o seguinte potencial:

$$V(r) = \frac{Ke^{-ar}}{r}, \quad K < 0.$$

a) Determine a força, comparando-a com a força da lei do inverso do quadrado da distância.

b) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer, caso uma partícula de massa m se desloque sob a ação de tal força.

c) Discuta como este movimento deve diferir do movimento correspondente para uma força proporcional ao quadrado da distância.

d) Determine L e E para o movimento em círculo de raio a .

e) Determine o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.

f) Mostre que as órbitas aproximadamente circulares são quase fechadas quando a é muito pequeno.

48. Resolva a equação orbital (3.222) para o caso em que $F = 0$. Mostre que a sua resposta concorda com a primeira lei de Newton.

49. Ver-se-á, no Cap. 6 (Probl. 7), que a distribuição uniforme de densidade ρ , em torno do Sol, resulta na soma da atração gravitacional desse astro sobre um planeta de massa m a uma força de atração central adicional

$$F' = -mkr,$$

onde

$$k = \frac{4\pi}{3} \rho G.$$

a) Se a massa do Sol for M , determine a velocidade angular de revolução do planeta em órbita circular de raio r_0 ; determine a freqüência angular para pequenas oscilações radiais. A seguir, mostre que se F' for muito menor que a atração devido ao Sol, uma órbita quase circular será aproximadamente uma elipse, cujo eixo maior tem um lento movimento de precessão e cuja velocidade angular é

$$\omega_p = 2\pi\rho \left(\frac{r_0^3 G}{M} \right)^{1/2}.$$

b) O movimento de precessão do eixo se faz na mesma direção, ou em direção oposta, à velocidade angular? Substitua M e o raio da órbita de Mercúrio, e calcule a densidade de poeira necessária para provocar uma precessão de 41 segundos de arco por século.

50. a) Discuta, usando o método do potencial efetivo, os tipos de movimentos que se pode esperar para uma força atrativa central inversamente proporcional ao cubo do raio:

$$F(r) = -\frac{K}{r^3}, \quad K > 0.$$

b) Determine o intervalo de energias e o momento angular para cada tipo de movimento.

c) Resolva a equação orbital (3.222), mostrando que a solução tem uma das formas seguintes:

$$\frac{1}{r} = A \cos [\beta(\theta - \theta_0)], \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} = A \cosh [\beta(\theta - \theta_0)], \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} = A \sinh [\beta(\theta - \theta_0)], \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} = A(\theta - \theta_0), \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} e^{\pm \beta \theta}. \quad (5)$$

d) Para que valores de L e E cada um desses movimentos ocorre? Expressse as constantes A e B em termos de E e L em cada caso.

e) Faça um gráfico da órbita típica de cada um dos tipos acima.

51. a) Discuta os possíveis movimentos para a seguinte força central:

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}$$

Admita que $K > 0$ e considere ambos os sinais para K' .

b) Resolva a equação orbital, mostrando que as órbitas ligadas têm a forma (se $L^2 > -mK'$)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \alpha \theta}$$

c) Mostre que esta é uma elipse que tem movimento de precessão; determine a velocidade angular de precessão e diga se a precessão está na mesma direção ou na direção oposta à velocidade angular orbital.

52. O Sputnik I tinha um perigeu (ponto de maior aproximação da Terra) de 227 km acima da superfície terrestre. Neste ponto, sua velocidade era de 28 710 km/h. Determine a distância (máxima) do apogeu acima da superfície terrestre e o período de revolução. (Suponha que a Terra é uma esfera e despreze a resistência do ar. Você necessita somente saber o valor de g e do raio da Terra para resolver o problema.)

53. O perigeu do Explorer I era de 360 km e o apogeu de 2 549 km acima da superfície terrestre. Determine a sua distância acima da superfície da Terra, quando ele passava sobre um ponto situado a 90° em torno do planeta a partir de seu perigeu.

54. Observa-se um cometa a uma distância de $1,00 \times 10^8$ km do Sol, viajando em direção a ele à velocidade de 51,6 km por segundo, num ângulo de 45° em relação ao raio do Sol. Escreva a equação para a órbita do cometa, em coordenadas polares, com a ori-

gem no Sol e o eixo x passando pela posição em que o cometa foi observado. (A massa solar é $2,00 \times 10^{30}$ kg.)

55. Pode-se mostrar (Cap. 6, Probls. 17 e 21) que a correção na energia potencial de uma massa m , no campo gravitacional terrestre, devido à forma achatada dos pólos da Terra, em coordenadas esféricas, relativa ao eixo polar, é aproximadamente

$$V' = -\frac{\eta m G R^2}{5r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

onde M é a massa da Terra e $2R$, $2R(1 - \eta)$ são os diâmetros equatorial e polar. Calcule a taxa de precessão do perigeu (ponto de maior aproximação) de um satélite da Terra que se move em órbita aproximadamente circular no plano equatorial. Substitua os diâmetros equatorial e polar da Terra e determine a taxa de precessão, em graus por revolução, do satélite a 645 km de distância em relação à Terra.

*56. Calcule o torque sobre um satélite terrestre, devido à correção da energia potencial calculada no Probl. 55. O satélite move-se em órbita circular de raio r , cujo plano está de tal maneira inclinado que a sua normal faz um ângulo α com o eixo polar. Suponha que a órbita seja muito pouco afetada em uma revolução e calcule o torque médio durante uma revolução. Mostre que o efeito de tal torque é fazer com que a normal ao plano tenha um movimento de precessão em torno de um cone de meio ângulo α em torno do eixo polar e determine uma fórmula para a taxa de precessão, em graus por revolução. Calcule esta taxa para um satélite colocado a 645 km acima da Terra, usando valores apropriados para M , η e R .

57. Pode-se mostrar que a órbita dada pela Teoria da Relatividade, especial para partículas de massa m , movendo-se sob a ação de uma energia potencial $V(r)$, é a mesma que a órbita que a partícula seguiria de acordo com a Mecânica Newtoniana, caso a energia potencial fosse igual a

$$V(r) - \frac{[E - V(r)]^2}{2mc^2},$$

onde E é a energia (cinética mais potencial) e c , a velocidade da luz. Discuta a natureza das órbitas para uma força proporcional ao quadrado da distância, de acordo com a Teoria da Relatividade. Mostre, comparando a velocidade angular orbital com a frequência de oscilações radiais para movimentos aproximadamente circulares, que as órbitas aproximadamente circulares, quando a correção relativística é pequena, são elipses, e calcule a velocidade angular de precessão. [Veja a Eq. (14.101).]

58. A distância de periélio (mais próxima) ao Sol do planeta Marte é de $2,06 \times 10^8$ km, e a distância do afélio (máxima) é de $2,485 \times 10^8$ km. Suponha que a Terra se move no mesmo plano em círculo cujo raio tem $1,49 \times 10^8$ km e um período de um ano. A partir destes dados, determine a velocidade de Marte no periélio. Suponha que uma nave espacial Mariner seja lançada de forma que seu periélio esteja na órbita terrestre e o

seu afélio, no periélio de Marte. Determine a velocidade do Mariner relativa a Marte, no ponto onde eles se encontram. Qual deles tem a velocidade mais elevada? Qual deles tem a maior velocidade angular durante o período de vôo?

59. O Mariner 4 deixou a Terra numa órbita cuja distância de periélio ao Sol era aproximadamente a distância da Terra ao Sol ($1,49 \times 10^8$ km), e cuja distância de afélio era aproximadamente a distância entre Marte e o Sol. Com que velocidade relativa à Terra ele partiu? Com que velocidade ele deve deixar a Terra (relativa à Terra) para que escape totalmente da atração gravitacional do Sol? (Não serão necessários dados adicionais para resolver este problema, exceto o tempo correspondente a um ano, admitindo-se que a Terra se move em circunferência.)

60. a) Um satélite deve ser lançado da superfície terrestre. Suponha que a Terra seja uma esfera de raio R e despreze o atrito com a atmosfera. O satélite deve ser lançado num ângulo α com a vertical, à velocidade v_0 , de maneira que a sua velocidade seja horizontal a uma altura h_1 acima da superfície da Terra. O último estágio do foguete aplica, então, um impulso horizontal, fornecendo uma velocidade adicional Δv_1 à velocidade do satélite. A órbita final deve ser uma elipse com perigeu h_1 (ponto de maior aproximação) e apogeu h_2 (ponto mais afastado), medidos a partir da superfície da Terra. Determine a velocidade inicial v_0 necessária e a velocidade adicional Δv_1 , em termos de R , α , h_1 , h_2 e g , a aceleração da gravidade na superfície da Terra.

b) Deduza uma fórmula para a variação δh_1 na altura do perigeu devido a um pequeno erro $\delta\beta$ na direção do impulso final, até a ordem $(\delta\beta)^2$.

61. Dois planetas movem-se num mesmo plano, em circunferência de raios r_1 e r_2 , em torno do Sol. Uma nave espacial deve ser lançada do planeta 1 com velocidade v_1 relativa ao planeta, de maneira a permanecer em órbita do planeta 2. (A velocidade v_1 é a velocidade relativa depois que a nave escapou do campo gravitacional do planeta.) Mostre que v_1 é um mínimo para uma órbita elíptica, cujos periélio e afélio são r_1 e r_2 . Neste caso, determine v_1 e a velocidade relativa v_2 entre a nave espacial e o planeta 2, caso a nave atinja o raio r_2 , no instante apropriado para interceptar o planeta 2. Expressse o seu resultado em termos de r_1 , r_2 e tempo de duração de um ano Y_1 do planeta 1. Procure os valores apropriados de r_1 e r_2 e estime o valor de v_1 para viagens a Vênus e Marte, partindo da Terra.

62. Um foguete acha-se em órbita elíptica em torno da Terra, perigeu r_1 , apogeu r_2 , medidos a partir do centro da Terra. Em certo ponto de sua órbita, o motor é ligado durante um tempo curto para fornecer um acréscimo Δv na velocidade que coloca o foguete em órbita e que permite escapar à velocidade v_0 relativa à Terra. (Despreza qualquer efeito devido ao Sol ou à Lua.) Mostre que Δv é um mínimo, se o impulso for aplicado no perigeu e paralelo à velocidade orbital. Determine Δv para este caso, em termos dos parâmetros da órbita elíptica ϵ e a ; a aceleração g ; a distância R do centro da Terra e a velocidade final v_0 . Você pode explicar, sob as leis da Física, porque Δv será tanto menor quanto maior for ϵ ?

63. Um satélite move-se em torno da Terra em órbita que passa pelos pólos. O instante em que ele cruza cada paralelo de latitude é marcado de tal forma que a função $\theta(t)$ é conhecida. Mostre como se pode determinar o perigeu, o semi-eixo maior e a excentricidade de sua órbita, em termos de $\theta(t)$, e do valor de g na superfície terrestre. Suponha que a Terra seja uma esfera de raio R .

64. Uma partícula de massa m move-se em órbita elíptica de eixo maior igual a $2a$, excentricidade ϵ , de maneira que o raio da partícula em relação ao centro da elipse varre áreas em taxa constante

$$\frac{dS}{dt} = C,$$

e no período τ independente de a e ϵ .

a) Escreva a equação da elipse, em coordenadas polares, com a origem no centro da elipse.

b) Mostre que a força que atua sobre a partícula é uma central; e determine $F(r)$ em termos de m e τ .

65. Mostre que a fórmula (3.276) para a seção de choque de Rutherford também é válida quando uma das cargas é negativa.

66. Uma partícula é refletida na superfície de uma esfera sólida, de raio R , de maneira que as linhas de trajetória de incidência e de reflexão da partícula estejam num plano comum com o raio da esfera que liga o ponto de impacto e formam ângulos iguais com este raio. Determine a seção de choque $d\sigma$ para espalhamento por meio de um ângulo entre Θ e $\Theta + d\Theta$. Integre $d\sigma$ em todos os ângulos e mostre que a seção de choque total é igual πR^2 .

67. Explore a analogia u , $\theta \leftrightarrow x$, t entre as Eqs. (3.222) e (2.39) para obter uma solução da Eq. (3.222) análoga à solução (2.46) da Eq. (2.39). Use a sua solução para mostrar que o ângulo de espalhamento Θ (Fig. 3.42) para uma partícula submetida a uma força central $F(r)$ é dada por

$$\Theta = \pi - 2s \int_0^{u_0} [1 - s^2 u^2 - V(u^{-1})/(\frac{1}{2}mv_0^2)]^{-1/2} du,$$

onde $V(r = u^{-1})$ é a energia potencial

$$V(r) = \int_r^\infty F(r) dr,$$

s é o parâmetro de impacto e u_0 é o valor de u para o qual a grandeza entre colchetes se anula. [Este problema não é difícil, se você lembrar claramente o significado físico e geométrico das diversas grandezas envolvidas em cada passo da solução.]

68. Mostre que a esfera sólida, definida no Probl. 66, pode ser representada como um caso-limite de uma força central onde

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r > R, \\ \infty, & \text{se } r < R, \end{cases}$$

Isto é, mostre que este potencial fornece a lei de reflexão, especificada no Probl. 66. Em seguida, use o resultado do Probl. 67 para resolver o 66.

68. Use o resultado do Probl. 67 para derivar a fórmula (3.276) para a seção de choque de Rutherford.

70. Um foguete, movendo-se com velocidade inicial v_0 , em direção à Lua, tem massa M e raio r_0 . Determine a seção de choque σ necessária para atingir a Lua. Considere-a em repouso e ignore todos os outros corpos.

71. Mostre que para uma força central repulsiva, proporcional ao inverso do raio ao cubo,

$$F(r) = \frac{K}{r^3}, \quad K > 0,$$

as órbitas têm a forma (1) dada no Probl. 50; expresse β , em termos de K , E , L , e a massa m da partícula incidente. Mostre que a seção de choque para espalhamento através de um ângulo entre Θ e $\Theta + d\Theta$, para partículas submetidas a esta força, é

$$d\sigma = \frac{2\pi^3 K}{mv_0^2} \frac{\pi - \Theta}{\Theta^2(2\pi - \Theta)^2} d\Theta.$$

72. Uma partícula de carga q e massa m , em repouso num campo magnético $B = B_0\hat{z}$, é submetida, no instante $t = 0$, a um campo elétrico oscilante

$$E = E_0\hat{x} \sin \omega t.$$

Determine o seu movimento.

73. Resolva o Probl. 72 para o caso em que $\omega = qB_0/mc$.

74. Uma partícula carregada desloca-se num campo elétrico e magnético uniforme e constante. Mostre que introduzindo-se uma nova variável

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} ct,$$

a equação de movimento para \mathbf{r}' é a mesma que para \mathbf{r} exceto que o componente E perpendicular a \mathbf{B} é eliminado.

75. Uma partícula de carga q , em um magnetron cilíndrico, move-se num campo magnético uniforme

$$\mathbf{B} = B\hat{z},$$

e num campo elétrico, dirigido radialmente para fora ou para dentro de um fio central ao longo do eixo z ,

$$E = \frac{a}{\rho} \hat{\rho},$$

onde ρ é a distância ao eixo z , e $\hat{\rho}$ é o vetor unitário dirigido radialmente para fora a partir do eixo z . As constantes a e B podem ser positivas ou negativas.

- a) Escreva as equações do movimento em coordenadas cilíndricas.
- b) Mostre que a grandeza

$$m\rho^2\dot{\phi} + \frac{qB}{2c}\rho^2 = K$$

é uma constante de movimento.

c) Usando este resultado, faça uma análise qualitativa, baseada na integral da energia, dos tipos de movimento que podem ocorrer. Considere todos os casos, incluindo todos os valores de a , B , K e E .

- d) Sob que condições pode ocorrer o movimento circular em torno do eixo?
- e) Qual é a frequência de pequenas oscilações radiais em torno deste movimento circular?

76. Um seletor de velocidades para um feixe de partículas carregadas de massa m e carga q deve ser projetado para selecionar partículas cuja velocidade particular é v_0 . O seletor de velocidades utiliza um campo elétrico uniforme E na direção x e um campo magnético uniforme B na direção y . O feixe emerge de uma fenda estreita, ao longo do eixo y , e desloca-se na direção z . Depois de passar através de um campo cruzado a uma distância l , o feixe passa através de uma segunda fenda paralela à primeira e também no plano yz . Os campos E e B são escolhidos de tal maneira que as partículas, em velocidade apropriada, movem-se paralelamente ao eixo z não experimentando nenhuma força.

a) Se a partícula partir da origem em velocidade v_0 formando um pequeno ângulo em direção z , determine o ponto em que ela chegará no plano $z = l$. Suponha que o ângulo inicial seja suficientemente pequeno para permitir que se desprezem termos de segunda ordem destes ângulos.

b) Qual a melhor escolha entre E e B para que uma fração, a maior possível, das partículas em velocidade v_0 , chegue à segunda fenda, enquanto partículas em outras velocidades passem o mais longe possível da fenda?

c) Se a largura da fenda for h , qual é o desvio máximo δv da velocidade v_0 para que uma partícula, cujo movimento inicial seja ao longo do eixo z , possa ainda atravessar a segunda fenda? Suponha que os valores de E e B sejam os escolhidos no item (b).

CAPÍTULO 4

MOVIMENTO DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

4.1 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR. CENTRO DE MASSA

Neste capítulo, considera-se o comportamento de sistemas mecânicos formados de duas ou mais partículas submetidas a forças *internas*, que as próprias partículas exercem sobre as outras, e a forças *externas* que as partículas sofrem de agentes que não pertencem ao sistema. As partículas são consideradas como massas punctiformes, sendo cada uma delas especificada por sua posição (x, y, z) no espaço, como acontece no caso de uma só partícula, cujo movimento já foi estudado no capítulo anterior.

Considere que o sistema seja formado por N partículas, numeradas $1, 2, \dots, N$, e que suas massas são designadas por m_1, m_2, \dots, m_N . A força total exercida sobre a k -ésima partícula será a soma das forças internas exercidas sobre a partícula k pelas outras $(N - 1)$ pertencentes ao sistema, mais qualquer força externa aplicada sobre k . A soma das forças *internas* exercidas sobre a partícula k denomina-se F_k^i , e a força *externa* total sobre a partícula k , F_k^e . Então, a equação de movimento da k -ésima partícula será

$$m_k \ddot{r}_k = F_k^e + F_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

As N equações, obtidas de acordo com a variação de k nas Eqs. (4.1), ao tomarem os valores $1, \dots, N$ são as equações de movimento do sistema. Como cada uma dessas equações é vetorial, obtém-se, em geral, um conjunto de $3N$ equações diferenciais de segunda ordem, simultâneas, que deve ser resolvido. A solução será um conjunto de funções $r_k(t)$ que especificam o movimento de cada partícula do sistema. A solução dependerá de $6N$ constantes “arbitrárias” que especificam a posição e a velocidade inicial de cada partícula. O problema de obter a solução do conjunto de Eqs. (4.1) é muito difícil, exceto em certos casos especiais, pois não existe um método geral para atacar o problema de N corpos, mesmo quando as forças existentes entre os corpos são centrais. O problema de dois corpos pode ser resolvido como se mostra mais adiante, pois existem alguns teoremas para os casos em que as forças satisfazem certas condições.

Se $p_k = m_k v_k$ for o momento linear da k -ésima partícula, pode-se escrever as Eqs. (4.1) na forma

$$\frac{dp_k}{dt} = F_k^e + F_k^i, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Somando, em relação a todas as partículas, os membros à esquerda e à direita da equação acima, obtém-se

$$\sum_{k=1}^N \frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N F_k^e + \sum_{k=1}^N F_k^i. \quad (4.3)$$

Chamando de P o momento linear total das partículas e de F a força externa total:

$$P = \sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N m_k v_k, \quad (4.4)$$

$$F = \sum_{k=1}^N F_k^e. \quad (4.5)$$

Supondo-se, o que será justificado mais adiante, que a soma das forças ~~externas~~ exercidas sobre todas as partículas seja igual a zero:

$$\sum_{k=1}^N F_k^i = 0. \quad (4.6)$$

Quando as Eqs. (4.4), (4.5) e (4.6) são substituídas na Eq. (4.3), tem-se:

$$\frac{dP}{dt} = F. \quad (4.7)$$

Este é o Teorema do Momento Linear para um sistema de partículas. Ele estabelece que a taxa de variação do momento linear total, com o tempo, é igual à força ~~externa~~ total. O corolário imediato é o Teorema da Conservação do Momento Linear, que estabelece: o momento linear total P é constante, quando não existem forças externas agindo sobre o sistema.

Agora, é preciso justificar a suposição (4.6). A primeira demonstração baseia-se na terceira lei de Newton. Supondo-se que a força F_k^i exercida sobre a partícula k devido a todas as outras partículas possa ser representada como a soma de forças separadas devido a cada uma das outras partículas:

$$F_k^i = \sum_{l \neq k} F_{l \rightarrow k}^i, \quad (4.8)$$

onde $F_{l \rightarrow k}^i$ é a força sobre a partícula k devido à partícula l . De acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida pela partícula l sobre a partícula k é igual e oposta àquela exercida por k sobre l :

$$F_{k \rightarrow l}^i = -F_{l \rightarrow k}^i. \quad (4.9)$$

A Eq. (4.9) expressa a terceira lei de Newton na forma chamada fraca; isto é, ela diz que as forças são iguais e opostas, mas não impõe que sua ação se faça sentir ao longo da linha que liga as duas partículas. Considerando-se a soma da Eq. (4.6), tem-se:

$$\sum_{k=1}^N F_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k} F_{l \rightarrow k}^i. \quad (4.10)$$

A soma à direita refere-se a todas as forças que agem entre todos os pares de partículas do sistema. Como, para cada par de partículas k e l , aparecem as duas forças $F_{k \rightarrow l}^i$ e $F_{l \rightarrow k}^i$ na soma total, e, pela Eq. (4.9), a soma de cada par é igual a zero, a soma total à direita na Eq. (4.10) é nula e a Eq. (4.6), demonstrada.

Logo a terceira lei de Newton, na forma da Eq. (4.9), é suficiente para garantir a conservação do momento linear para um sistema de partículas, e, com este propósito, é que se deduziu a lei. A Lei da Conservação do Momento Linear tem, entretanto, validade mais geral do que a terceira lei de Newton, como se verá mais tarde, pois a demonstração da expressão (4.6) é feita com base um pouco mais fraca do que a da terceira lei de Newton, não sendo preciso admitir que as partículas interagem aos pares. Admite-se somente que as forças internas são tais que não realizarão trabalho, no caso de cada partícula do sistema ser deslocada numa pequena distância δr , a partir de sua posição em qualquer instante determinado. O suposto movimento de todas as partículas do sistema é chamado *deslocamento virtual*. O movimento descrito, quando cada partícula se desloca na mesma pequena distância δr , é chamado *pequena translação virtual* do sistema. Admite-se, então, que, no caso de qualquer pequena translação virtual δr de todo o sistema, as forças internas não realizem trabalho. A partir do ponto de vista geral sobre conservação da energia, esta suposição vai um pouco além do que admitir que o esforço seja homogêneo, pois ao se deslocar o sistema para uma posição ligeiramente diferente no espaço, sem perturbá-lo de outra maneira, o seu estado interno deve permanecer inalterado. Assim, em particular, a distribuição de várias espécies de energia no interior do sistema deverá permanecer a mesma, pois não haverá trabalho realizado pelas forças internas. Esta idéia ajuda a demonstrar a Eq. (4.6). O trabalho realizado pela força F_k^i numa pequena translação virtual δr é

$$\delta W_k = F_k^i \cdot \delta r. \quad (4.11)$$

O trabalho total realizado por todas as forças internas é

$$\delta W = \sum_{k=1}^N \delta W_k = \delta r \cdot \left(\sum_{k=1}^N F_k^i \right), \quad (4.12)$$

onde se fatora δr da soma, pois é o mesmo para todas as partículas. Supondo-se que $\delta W = 0$, tem-se

$$\delta r \cdot \left(\sum_{k=1}^N F_k^i \right) = 0. \quad (4.13)$$

Como a Eq. (4.13) deve ser válida para qualquer δr , obtém-se, então, a Eq. (4.6).

A Eq. (4.7) pode ser colocada de forma mais clara, quando se introduz o conceito de centro de massa de um sistema de partículas. O vetor R que localiza o centro de massa é definido pela equação

$$MR = \sum_{k=1}^N m_k r_k, \quad (4.14)$$

onde M é a massa total:

$$M = \sum_{k=1}^N m_k. \quad (4.15)$$

As coordenadas do centro de massa são dadas pelos componentes da Eq. (4.14):

$$X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k x_k, \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k y_k, \quad Z = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k z_k. \quad (4.16)$$

O momento linear total definido pela Eq. (4.4), em relação ao centro de massa, é

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{r}}_k = M \vec{R}, \quad (4.17)$$

assim a Eq. (4.7) pode ser escrita

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}. \quad (4.18)$$

Esta equação tem a mesma forma que a equação do movimento de uma partícula de massa M , submetida à ação de uma força \vec{F} . Assim [quando a Eq. (4.6) é válida], chega-se ao seguinte teorema importante: *O centro de massa de um sistema de partículas move-se como uma única partícula, cuja massa é a massa total do sistema, submetida a uma força igual à força externa total que age sobre o sistema.*

4.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Agora vai-se calcular a taxa de variação, com o tempo, do momento angular de um sistema de N partículas, relativa ao ponto Q não necessariamente fixo no espaço. O vetor momento angular da partícula k , em relação a um ponto Q , não necessariamente a origem, é definido de acordo com a Eq. (3.142):

$$\vec{L}_{kQ} = m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q), \quad (4.19)$$

onde \vec{r}_Q é o vetor posição de um ponto Q , e $(\vec{r}_k - \vec{r}_Q)$ é o vetor de Q até a partícula k . Note que, em lugar da velocidade $\dot{\vec{r}}_k$, escreve-se a velocidade $(\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)$ relativa ao ponto Q tomado como origem, de tal forma que \vec{L}_{kQ} é o momento angular de m_k calculado como se Q fosse uma origem fixa. Esta é a maneira mais útil de se definir o momento angular em relação a um ponto em movimento. Tomando-se o produto vetorial de $(\vec{r}_k - \vec{r}_Q)$ com a equação de movimento (4.2) para a partícula k , de maneira similar ao que se fez ao deduzir a Eq. (3.144), obtém-se

$$(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \frac{d\vec{p}_k}{dt} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^e + (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i. \quad (4.20)$$

Agora, deriva-se a Eq. (4.19):

$$\frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \frac{d\vec{p}_k}{dt} + m_k (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q) - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q. \quad (4.21)$$

O segundo termo do segundo membro se anula. Logo, usando Eq. (4.20), obtém-se

$$\frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^e + (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q. \quad (4.22)$$

O momento angular total e o torque externo brutal, em relação ao ponto Q , são definidos da seguinte forma:

$$\vec{L}_Q = \sum_{k=1}^N \vec{L}_{kQ}, \quad (4.23)$$

$$\vec{N}_Q = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^e. \quad (4.24)$$

A Eq. (4.22) somada em relação a todas as partículas, usando-se a Eq. (4.14), torna-se

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q + \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i - M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q. \quad (4.25)$$

O último termo se anulará se a aceleração do ponto Q for igual a zero ou estiver orientada ao longo da linha que liga Q ao centro de massa. Esta discussão se restringirá aos momentos angulares em relação a um ponto Q que satisfaz a seguinte condição:

$$(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q = 0. \quad (4.26)$$

As explicações mais importantes serão dadas para os casos em que Q permanece em repouso, ou em que Q é o centro de massa, admitindo-se também que o torque interno total se anule:

$$\sum_{k=1}^N (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i = 0, \quad (4.27)$$

então a Eq. (4.25) torna-se

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q. \quad (4.28)$$

Este é o Teorema do Momento Angular para um sistema de partículas. Um corolário imediato é o Teorema da Conservação do Momento Angular, que estabelece: o momento angular total de um sistema de partículas é constante se não existir torque externo ao sistema.

Para demonstrar a Eq. (4.27), a partir da terceira lei de Newton, é preciso uma versão mais forte desta lei do que a usada na seção precedente, isto é, que a força $\vec{F}_{k \rightarrow l}^i$, além de igual e oposta a $\vec{F}_{l \rightarrow k}^i$, deve agir ao longo da linha que liga as duas partículas, o que significa que duas partículas só podem atrair ou repelir uma à outra. Admite-se, procedendo como na seção anterior, que \vec{F}_k^i seja a soma das forças devida a cada uma das outras partículas:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_k^i &= \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{l \rightarrow k}^i \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} [(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{l \rightarrow k}^i + (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_{k \rightarrow l}^i]. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

No segundo passo, a soma dos torques foi reorganizada como a soma de pares de torques devido a pares de forças, que, de acordo com a terceira lei de Newton, são iguais e opostas [Eq. (4.9)], de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_k^i &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} [(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q) - (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_Q)] \times \mathbf{F}_{l \rightarrow k}^i \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \times \mathbf{F}_{l \rightarrow k}^i. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

A direção do vetor $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)$ é a mesma que a da linha que liga a partícula l à partícula k . Se $\mathbf{F}_{l \rightarrow k}^i$ agir ao longo desta linha, o produto vetorial na Eq. (4.30) será nulo. Assim, admitindo-se a terceira lei de Newton na forma forte, é possível demonstrar a suposição (4.27).

Alternativamente, admitindo-se que nenhum trabalho final seja realizado pelas forças internas numa pequena rotação virtual, em relação a qualquer eixo que passe por Q , pode-se demonstrar que o componente do torque interno total, em qualquer direção, seja igual a zero, justificando, assim, a Eq. (4.27).

Como aplicação da Eq. (4.28), considere-se a ação de um giroscópio ou pião. O giroscópio é um sistema rígido de partículas, simétrico em relação a um eixo e que gira em torno desse eixo. O leitor deve perceber que, quando o giroscópio gira em torno de um eixo fixo, o seu vetor momento angular, em relação ao ponto Q colocado sobre o eixo de rotação, é orientado ao longo do eixo de rotação, como se vê na Fig. 4.1.

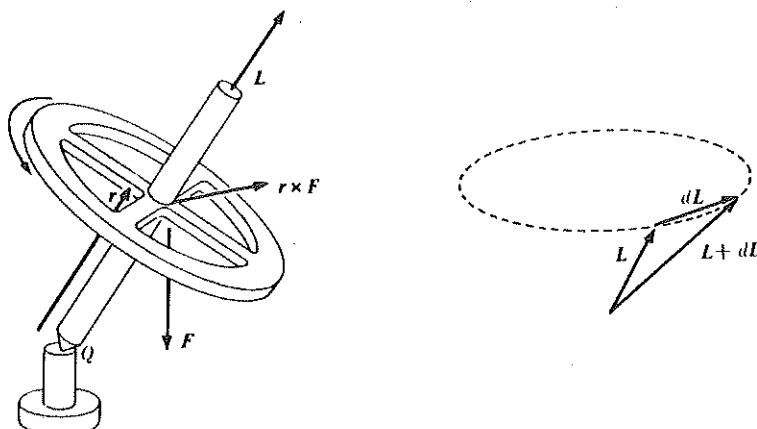


Fig. 4.1 Movimento de um giroscópio simples.

A simetria em relação ao eixo garante que qualquer componente do momento angular L_k da partícula k , que é perpendicular ao eixo, será compensado por um componente igual e oposto devido à partícula diametralmente oposta. Escolhendo-se o ponto Q , onde o eixo do giroscópio repousa no seu suporte, ao se aplicar uma força F para baixo no eixo do giroscópio (por exemplo, a força da gravidade), o torque $(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ devido à f estará orientado na direção perpendicular a \mathbf{r} e a L , como é mostrado na Fig. 4.1. De acordo com a Eq. (4.28) o vetor dL/dt estará na mesma direção, como também se vê na figura, e o vetor L tenderá para um movimento de precessão em torno de um cone sob a ação da força F . Assim, a afirmação de que o vetor L se orienta ao longo do eixo do giroscópio só será estritamente verdadeira, se o giroscópio girar em torno de seu eixo. Se o próprio eixo do giroscópio mudar de direção, então este último movimento contribuirá com um componente adicional para o momento angular. Entretanto, se o giroscópio girar muito rapidamente, o componente do momento angular ao longo do seu eixo será muito maior do que o componente devido ao movimento do seu eixo, e L será aproximadamente paralelo ao eixo do giroscópio. Nesse caso, o eixo do giroscópio também deverá adquirir um movimento de precessão em torno da vertical, permanecendo essencialmente paralelo a L . Analisando-se cuidadosamente os componentes de L fora do eixo, observa-se que, se o eixo do giroscópio estiver numa certa direção estacionária e for largado, ele oscilará ligeiramente para baixo e para cima enquanto adquire um movimento de precessão em torno da vertical. Isto será demonstrado no Cap. 11. Às vezes se diz que o giroscópio não “resiste a qualquer mudança de direção”, porque a taxa de variação de seu momento angular é sempre igual ao torque aplicado, exatamente como a taxa de variação do momento linear é proporcional à força aplicada. Pode-se fazer com que o giroscópio gire em qualquer direção que se queira, desde que se aplique o torque apropriado. A importância do giroscópio como estabilizador direcional resulta do fato de o vetor momento angular L permanecer constante quando não se aplica torque. As variações ocorridas na direção de um giroscópio bem feito são pequenas, porque os torques aplicados são pequenos e L é muito grande, de forma que uma pequena variação dL não produzirá variação apreciável na direção. Além do mais, um giroscópio só muda de direção enquanto for aplicado um torque; se ele se deslocar ligeiramente devido a pequenos torques ocasionais devido à força de atrito de seus eixos, esse deslocamento cessará quando o torque cessar. Uma grande massa montada como um giroscópio só adquirirá velocidades angulares pequenas devido aos torques de atrito, mas se for colocada em movimento ao ser acionada por torques pequenos, continuará a girar e a mudança de posição pode tornar-se eventualmente grande.

4.3 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Em muitos casos, a força total exercida sobre qualquer partícula do sistema só depende da posição das partículas no sistema:

$$F_k = F_k(r_1, r_2, \dots, r_N), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.31)$$

A força externa F_k^e , por exemplo, deve depender da posição r_k da partícula k , e a força interna F_k^i deve depender das posições das outras partículas relativamente à partícula k . Pode acontecer que a função potencial $V(r_1, r_2, \dots, r_N)$ exista, de forma que

$$F_{kx} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial V}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.32)$$

As condições capazes de satisfazer uma função força $F_k(r_1, \dots, r_N)$ para haver uma função potencial V podem ser obtidas analogamente à condição (3.181) para uma partícula. Não é muito fácil obter esse resultado, que, aliás, é de pouco interesse prático, razão pela qual seu desenvolvimento não é apresentado, no entanto, o caso especial em que F_k^i é a soma das forças entre pares de partículas tem grande importância prática, mas só será examinado mais tarde. No caso de existir energia potencial, o Teorema da Conservação da Energia é demonstrado da seguinte maneira: de acordo com a Eq. (4.32), as equações do movimento da k -ésima partícula são

$$m_k \frac{dv_{kx}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad m_k \frac{dv_{ky}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad m_k \frac{dv_{kz}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z_k}. \quad (4.33)$$

Multiplicando-se as Eqs. (4.33) por v_{kx} , v_{ky} e v_{kz} , respectivamente, e somando os resultados, tem-se para cada k :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.34)$$

Esta relação deve ser somada a todos os valores de k :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right) = 0. \quad (4.35)$$

O segundo termo na Eq. (4.35) é dV/dt :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right), \quad (4.36)$$

e o primeiro termo é a derivada em relação ao tempo da energia cinética total

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2. \quad (4.37)$$

Conseqüentemente, a Eq. (4.35) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0. \quad (4.38)$$

Assim, o Teorema da Conservação da Energia é novamente obtido:

$$T + V = E, \quad (4.39)$$

sendo E constante. Se as forças internas derivarem de uma função energia potencial V , como na Eq. (4.32), mas as forças externas não, o teorema da energia torna-se:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = \sum_{k=1}^N F_k^e \cdot v_k. \quad (4.40)$$

Suponha que a força interna exercida sobre qualquer partícula k seja considerada como a soma das forças devida a cada uma das outras partículas, onde a força $F_{l \rightarrow k}^i$ que age sobre k devido a l depende somente da posição relativa $(r_k - r_l)$ da partícula k em relação à partícula l :

$$F_k^i = \sum_{l \neq k} F_{l \rightarrow k}^i(r_k - r_l). \quad (4.41)$$

Pode acontecer que a função vetorial $F_{l \rightarrow k}^i(r_k - r_l)$ é tal que se possa definir uma função energia potencial

$$V_{kl}(r_{kl}) = - \int_{r_s}^{r_{kl}} F_{l \rightarrow k}^i(r_{kl}) \cdot dr_{kl}, \quad (4.42)$$

$$r_{kl} = r_k - r_l. \quad (4.43)$$

Será verdade se $F_{l \rightarrow k}^i$ é uma força conservativa no sentido que lhe foi atribuído no Cap. 3, isto é, se

$$\text{rot } F_{l \rightarrow k}^i = 0, \quad (4.44)$$

onde as derivadas o são em relação x_{kl} , y_{kl} e z_{kl} . As forças gravitacionais e eletrostáticas entre pares de partículas são exemplos de forças conservativas. Se $F_{l \rightarrow k}^i$ for conservativa, de forma que V_{kl} possa ser definida, então¹

$$\begin{aligned} F_{l \rightarrow k}^i &= -\hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_{kl}} - \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_{kl}} - \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_{kl}} \\ &= -\hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_k} - \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_k} - \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_k}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Sendo válida a terceira lei de Newton (forma fraca), então

$$\begin{aligned} F_{k \rightarrow l}^i &= -F_{l \rightarrow k}^i = \hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_{kl}} + \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_{kl}} + \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_{kl}} \\ &= -\hat{x} \frac{\partial V_{kl}}{\partial x_l} - \hat{y} \frac{\partial V_{kl}}{\partial y_l} - \hat{z} \frac{\partial V_{kl}}{\partial z_l}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Logo V_{kl} servirá também como função energia potencial para a força $F_{k \rightarrow l}^i$. Pode-se definir agora a energia potencial interna total V^i para o sistema de partículas como a soma de V_{kl} sobre todos os pares de partículas:

¹ Note que $V(r_{kl}) = V(x_{kl}, y_{kl}, z_{kl}) = V(x_k - x_l, y_k - y_l, z_k - z_l)$, tal que $\partial V / \partial x_k = \partial V / \partial x_{kl} = -\partial V / \partial x_l$ etc.

$$V^i(r_1, \dots, r_N) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} V_{kl}(r_k - r_l). \quad (4.47)$$

A partir das Eqs. (4.41), (4.45) e (4.46), segue-se que as forças internas são dadas por

$$\mathbf{F}_k^i = -\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial V^i}{\partial x_k} - \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial V^i}{\partial y_k} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial V^i}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.48)$$

Em particular, se as forças existentes entre pares de partículas forem centrais, a energia potencial $V_{kl}(r_{kl})$, para cada par de partículas, só dependerá da distância r_{kl} entre elas, e será dada pela Eq. (3.200); logo, as forças internas de um sistema de partículas são conservativas e a Eq. (4.48) é válida, assim como o Teorema da Energia (4.40) será válido para tais sistemas de partículas. No caso de as forças externas também serem conservativas, suas energias potenciais podem ser somadas a V^i e a energia total será constante.

Existindo atrito interno, como é freqüentemente o caso, as forças internas de atrito dependerão das velocidades relativas das partículas, e a Lei da Conservação de Energia Potencial mais Energia Cinética se invalidará.

4.4 ANÁLISE CRÍTICA DAS LEIS DA CONSERVAÇÃO

Os fenômenos para os quais se aplicam as leis da Mecânica podem ser divididos em três classes principais. Primeira, os movimentos dos corpos celestes — estrelas, satélites, planetas — descritos com grande precisão por meio de tais leis. Assim sendo, a teoria, nesse campo, obteve muitos dos seus primeiros e importantes sucessos, como a previsão precisa dos movimentos dos corpos do sistema solar para períodos de milhares de anos. A Teoria da Relatividade prevê, em uns poucos casos, pequenos desvios do movimento previsto classicamente, mas são demasiadamente pequenos para serem observados, exceto no caso da órbita de Mercúrio, onde a Relatividade e as observações são concordes em demonstrar a vagarosa precessão do eixo da órbita elíptica em torno do Sol, em velocidade angular de 0,01 grau por século, e que não pode ser justificada por outros métodos.

O movimento dos corpos terrestres, tanto os de tamanho macroscópico como os microscópicos, constitui a segunda divisão principal do fenômeno. Nesta classe, os movimentos são descritos apropriadamente através da Mecânica Newtoniana, sem ser preciso fazer qualquer correção significativa, mas as leis de força são tão complicadas que, freqüentemente, não são conhecidas com a necessária precisão. Assim, os cálculos magnificamente precisos da mecânica celeste não podem ser reproduzidos aqui.

A terceira classe de fenômenos é constituída pelo movimento das partículas “atômicas”: moléculas, átomos, elétrons, núcleos, prótons, nêutrons etc. As primeiras tentativas para descrição dos movimentos de tais partículas fundamentavam-se na Mecânica Clássica, de modo que muitos desses fenômenos podem ser entendidos e previstos nesta base. Entretanto, os detalhes mais sutis do comportamento das partículas atômicas só podem ser descritos apropriadamente em termos da Mecânica Quântica e,

no caso de velocidades muito altas, da Mecânica Quântica Relativística. Pode-se adicionar uma quarta classe de fenômenos, a relacionada à estrutura intrínseca das partículas elementares (prótons, nêutrons, elétrons etc.), mas mesmo a Mecânica Quântica falha ao descrever tais fenômenos. A Física atualmente empenha-se em descobrir uma nova teoria capaz de defini-los.

A Lei da Conservação do Momento Linear é válida para sistemas de corpos celestes, assim como para corpos de tamanho macroscópico e microscópico. As forças gravitacionais e mecânicas cuja ação se faz sentir entre tais corpos satisfazem a terceira lei de Newton com elevado grau de precisão. O momento linear também é conservado na maioria das interações de partículas de tamanho atômico, exceto quando as velocidades são altas ou as acelerações rápidas. As forças eletrostáticas entre cargas elétricas em repouso satisfazem a terceira lei de Newton, mas quando as cargas acham-se em movimento, seus campos elétricos propagam-se com a velocidade da luz, de forma que, se o movimento relativo de duas cargas for rápido, as forças existentes entre elas podem, ou não, em qualquer instante, ser iguais e opostas. Quando cargas elétricas são aceleradas, elas podem emitir radiação eletromagnética e perder momento no processo. Entretanto, mesmo neste caso, a Lei da Conservação do Momento pode ser preservada, mas apenas no caso de se associar o momento linear ao campo eletromagnético, como acontece com as partículas em movimento. A definição de tal momento linear vai além do limite original da Mecânica Newtoniana.

Os corpos celestiais e os de tamanho macroscópico e microscópico na realidade não são partículas, pois sua estrutura, para muitos propósitos, não pode ser representada adequadamente quando são dadas simplesmente as três coordenadas de posição x , y e z do corpo. Entretanto, o movimento de tais corpos, em problemas em que se pode desprezar sua estrutura, é corretamente representado pela Lei do Movimento de uma partícula,

$$m\ddot{r} = F, \quad (4.49)$$

o que geralmente se justifica considerando-se o corpo macroscópico como um sistema de partículas capaz de satisfazer a terceira lei de Newton. Para tais sistemas, o Teorema do Momento Linear é válido, podendo ser escrito na forma da Eq. (4.18), que tem a mesma forma que a Eq. (4.49). Esta é uma forma muito conveniente de justificar a aplicação da Eq. (4.49) no que concerne a corpos de tamanho macroscópico ou astronômico, desde que não se fique perturbado com o fato de, de acordo com as idéias modernas, não fazer sentido. Caso as partículas componentes do corpo macroscópico sejam consideradas como átomos e moléculas, então, em primeiro lugar, nem sempre a terceira lei de Newton é válida para tais partículas; em segundo lugar, dever-se-ia aplicar a Mecânica Quântica e não a Clássica para descrever o seu movimento. O Teorema do Momento Linear (4.18) pode ser obtido para corpos compostos de átomos, usando-se a Lei do Movimento (4.49), da mesma forma que foi aplicada para corpos macroscópicos e astronômicos, isto é, como um postulado, cuja justificativa baseia-se na experiência ou em resultados de teorias mais profundas. Os teoremas apresentados na Seção 4.1 mostram que este postulado fornece uma firme teoria da Mecânica, considerando-se

que, partindo de corpos que o satisfazem é possível construir-se um corpo composto, que também o satisfará.

A Lei da Conservação do Momento Angular, como foi formulada na Seç. 4.2 para um sistema de partículas, é válida para sistemas de corpos celestes (considerados como partículas) e para sistemas de corpos de tamanho macroscópico desde que os efeitos devido à rotação individual dos corpos possam ser desprezados. Quando as rotações individuais dos corpos contribuem para o movimento, então a Lei da Conservação do Momento Angular será válida, admitindo-se, porém, a inclusão do momento angular associado a tais rotações; neste caso, os corpos não mais serão considerados como partículas do tipo simples, estudado nas seções precedentes, cujos movimentos foram completamente descritos, especificando-se simplesmente a função $r(t)$ para cada partícula. Todo o momento angular do sistema solar é aproximadamente constante, mesmo que o Sol, os planetas e satélites sejam considerados como partículas cujas rotações podem ser desprezadas. As forças da maré, no entanto, convertem alguns momentos angulares rotacionais em momentos angulares orbitais dos planetas e satélites e, assim, o momento angular rotacional deve ser incluído para que a validade da Lei da Conservação do Momento Angular seja precisa. Algumas variações do momento angular ocorrem como consequência do atrito com poeiras e meteoritos interplanetários, mas o efeito é demasiadamente pequeno para ser observado, podendo, de qualquer forma, ser incluído desde que se some ao total o momento angular da matéria interplanetária.

A Lei da Conservação do Momento Angular Total, incluindo rotação, dos corpos astronômicos e terrestres pode ser justificada, considerando-se cada corpo como um sistema de partículas menores cujas forças mútuas satisfazem a terceira lei de Newton (na forma forte). O argumento apresentado na Seç. 4.2 fornece, neste caso, a Lei da Conservação do Momento Angular Total, onde o momento angular de rotação de um corpo aparece como o momento angular orbital comum ($r \times p$) das partículas que o compõem. Este argumento está sujeito à mesma crítica que a aplicada acima no caso do momento linear. Se as "partículas" componentes do corpo são átomos e moléculas, então a terceira lei de Newton nem sempre é válida, particularmente em sua forma forte, quando se aplicam as leis da Mecânica Quântica a estas partículas; além disso, os átomos e moléculas possuem também momento angular de rotação que deve ser levado em conta. Mesmo as partículas elementares – elétrons, prótons, nêutrons etc. – possuem um momento angular de rotação intrínseco, que não está associado ao movimento orbital. Este momento angular é denominado momento angular de *spin*, por analogia ao momento angular de rotação intrínseco de corpos macroscópicos, e deve ser incluído no momento angular total para que a Lei da Conservação seja válida. Assim, nunca se chegará à partícula ideal da Mecânica Newtoniana, descrita somente por sua posição $r(t)$. Fica-se, então, com o dilema: aceitar a Lei da Conservação do Momento Angular como um postulado, ou apelar para sua justificativa através de teorias que transcendem a Mecânica Clássica.

As forças gravitacionais exercidas entre corpos astronômicos são conservativas, de forma que o princípio de conservação da energia mecânica é válido e preciso em relação à Astronomia. Em princípio, existe uma pequena perda de energia mecânica no sistema solar devido ao atrito com as poeiras e meteoritos interplanetários, mas é mui-

to pequeno para produzir qualquer efeito observável no movimento dos planetas, mesmo com o elevado grau com que os eventos astronômicos são previstos e observados. Existe também uma perda gradual, mas mensurável, da energia rotacional dos planetas e dos satélites devido ao atrito das marés. No que concerne a corpos terrestres de tamanho macroscópico e microscópico, o atrito torna-se usualmente um fator importante, mas somente em certos casos especiais em que pode ser desprezado, o princípio da conservação da energia na forma (4.39) ou mesmo na forma (4.40) pode ser aplicado. Entretanto, Joule descobriu que é possível associar energia ao calor de forma que a Lei da Conservação da Energia, no caso de um sistema, pode ser também aplicada à soma da energia cinética mais a energia potencial mais a energia térmica. Considerando-se que o corpo é composto de átomos e moléculas, o seu calor será a energia cinética e potencial do movimento aleatório dos seus átomos e moléculas. Como as forças eletromagnéticas que atuam em cargas em movimento não são conservativas, a energia eletromagnética deve ser associada ao campo eletromagnético para preservar a Lei da Conservação da Energia. Tais extensões do conceito de energia para incluir energia térmica e eletromagnética estão, na verdade, fora do domínio da Mecânica. Quando a definição de energia é convenientemente estendida para incluir não somente a energia cinética, mas a associada aos campos eletromagnéticos e qualquer outro de forças que possam estar agindo, então a Lei da Conservação da Energia será totalmente válida tanto em Física Clássica, como em Relativística ou Quântica.

As Leis da Conservação da Energia, do Momento Linear e do Momento Angular são atualmente os marcos da Física e sua validade, em geral, se faz sentir em todas as teorias. No presente, parece sem sentido tentar provar estes princípios no que concerne a corpos materiais, usando-se a Mecânica Clássica e sugerindo, assim, um modelo desatualizado de que a matéria é composta de partículas newtonianas simples, que exercem forças centrais umas sobre as outras. As Leis da Conservação não são na realidade leis, mas postulados cuja validade é inconsistentemente atribuída em qualquer teoria física. Se, por exemplo, no caso de partículas carregadas, encontrar-se que a energia total, definida como $(T + V)$, não é constante, abandona-se a lei, mas altera-se o seu significado ao se redefinir energia para incluir a energia eletromagnética de maneira a preservar a lei. Prefere-se sempre trabalhar com grandezas que são conservadas e aplicar os nomes "energia total", "momento linear total" e "momento angular total" somente para tais grandezas. A conservação destas grandezas não é, então, um fato físico, mas consequência da determinação em defini-las desta maneira. Na realidade, ela é uma demonstração do fato físico, sobre a qual pode ou não ser verdadeira a afirmação de que tal definição de energia, momento linear ou momento angular possa sempre ser encontrada. Até então, esta afirmativa tem sido verdadeira e, no final da Seç. 9.6, apresenta-se uma justificativa mais aprofundada do assunto.

4.5 FOGUETES, ESTEIRAS E PLANETAS

Existem muitos problemas que podem ser resolvidos pela aplicação apropriada das leis da conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Na solu-

ção de tais problemas, é necessário decidir que leis de conservação são apropriadas. As relacionadas à conservação do momento linear e do momento angular ou os teoremas (4.7) e (4.28), dos quais estas leis são corolários, são sempre aplicáveis a qualquer sistema físico, desde que se leve em conta todas as forças e torques externos e que a aplicação de um ou de outro é conveniente quando são conhecidas as forças ou os torques externos. [A Lei da Conservação da Energia Cinética mais a Potencial é aplicável somente quando não há conversão de energia mecânica a outras formas de energia.] Não se pode usar a Lei da Conservação da Energia quando existe atrito, por exemplo, a menos que exista uma maneira para determinar a quantidade de energia térmica produzida.

As Leis da Conservação da Energia, do Momento Linear e do Momento Angular referem-se sempre a um determinado sistema de partículas. Na aplicação dessas leis, deve-se ter cuidado de escolher o que deve ser incluído no sistema em que a lei está sendo aplicada, e de que todas as energias e momentos do sistema estejam incluídos ao se escrever as equações. Pode-se escolher arbitrariamente o sistema, incluindo ou excluindo as partículas convenientes, mas se qualquer força externa agir sobre todo o sistema de partículas, elas deverão ser levadas em conta.

Um problema típico em que o Teorema do Momento Linear pode ser aplicado é o da esteira: deixa-se cair continuamente material de um reservatório sobre a esteira em movimento. Para determinar a força F necessária para manter a esteira em movimento com velocidade v (Fig. 4.2), considera-se que a taxa com que a massa é deixada cair seja dm/dt . Se m for a massa do material sobre a esteira e M a massa da esteira (que não aparece realmente no problema), o momento linear total do sistema, esteira mais material sobre ela e no reservatório, será

$$P = (m + M)v. \quad (4.50)$$

Suponha que o reservatório esteja em repouso, pois em caso contrário ter-se-ia de incluir o momento linear do reservatório e de seu conteúdo na Eq. (4.50). O Teorema do Momento Linear requer que

$$F = \frac{dP}{dt} = v \frac{dm}{dt}. \quad (4.51)$$

Esta relação fornece a força aplicada na esteira. A potência suprida pela força é

$$Fv = v^2 \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(mv^2) = \frac{d}{dt}[(m+M)v^2], \quad (4.52)$$

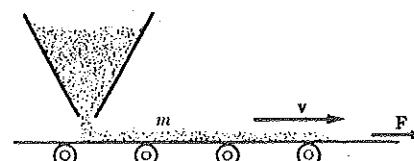


Fig. 4.2 Uma esteira.

que é igual a duas vezes a taxa com que a energia cinética está aumentando, de forma que o Teorema da Conservação da Energia Mecânica (4.40) não se aplica a este caso. Onde está indo a metade em excesso da potência?

A equação do movimento de um foguete também pode ser obtida a partir da Lei da Conservação do Momento Linear. Considere que a massa do foguete em dado instante seja M , sua velocidade seja v em relação a um sistema fixo de coordenadas. Se o material for expelido do motor do foguete em velocidade de exaustão u em relação ao foguete, a velocidade de exaustão relativa a um sistema de coordenadas fixo será $v + u$. Se uma força externa F agir sobre o foguete, então o Teorema do Momento Linear (4.7) será, neste caso:

$$\frac{d}{dt}(Mv) - \frac{dM}{dt}(v + u) = F. \quad (4.53)$$

O primeiro termo é a taxa de variação com o tempo do momento linear do foguete. O segundo termo representa a taxa com que momento está sendo transferido para os gases de exaustão do foguete, onde $-(dM/dt)$ é a taxa com que o combustível está sendo consumido. A Lei da Conservação se aplica a um sistema fixo e definido de partículas. Como o combustível no foguete será transformado em gases de exaustão, deve-se incluir os gases de exaustão ao sistema quando se aplicar a Lei da Conservação do Momento Linear. A equação acima pode, então, ser reescrita como:

$$M \frac{dv}{dt} = u \frac{dM}{dt} + F. \quad (4.54)$$

O primeiro termo do segundo membro é chamado *impulso* do motor do foguete. Como dM/dt é negativo, o impulso será oposto à direção da velocidade dos gases de descarga. A força F pode representar a resistência do ar, ou a força gravitacional, ou qualquer outra força agindo sobre o foguete.

Considere o caso de um motor de foguete preso a um suporte fixo, como, por exemplo, uma "bancada de testes". O primeiro membro da Eq. (4.54) será, então, igual a zero, e a força F exercida pelo suporte:

$$F = -u \frac{dM}{dt}.$$

Para medir a potência do motor do foguete, mede-se a força F necessária para mantê-lo estacionário.

Resolvendo, agora, a Eq. (4.54) para o caso especial em que não há forças externas aplicadas:

$$M \frac{dv}{dt} = u \frac{dM}{dt}. \quad (4.55)$$

Multiplica-se por dt/M e integra-se, admitindo que u seja constante:

$$v - v_0 = -u \ln \frac{M_0}{M}. \quad (4.56)$$

A variação de velocidade em qualquer intervalo de tempo depende somente da velocidade de descarga e da fração de massa descarregada durante aquele intervalo de tempo. Este resultado é independente de qualquer suposição em relação à taxa com que a massa está sendo descarregada.

Os problemas para os quais a Lei da Conservação do Momento Angular é útil são encontrados freqüentemente em Astronomia. O momento angular da galáxia de estrelas, ou do sistema solar, permanece constante durante o curso de seu desenvolvimento, admitindo-se que nenhum material escapa do sistema. O efeito das marés lunares é reduzir gradualmente a rotação terrestre. Enquanto o momento angular de rotação da Terra diminui, o momento angular da Lua deve crescer. O valor do momento angular (orbital) da Lua é

$$L = mr^2\omega, \quad (4.57)$$

onde m é a massa, ω é a velocidade angular e r é o raio da órbita da Lua. Pode-se igualar a massa multiplicada pela aceleração centrípeta à força gravitacional para obter a relação

$$mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}, \quad (4.58)$$

onde M é a massa da Terra. Resolvendo esta equação para ω e substituindo na Eq. (4.57), obtém-se

$$L = (GMm^2r)^{1/2}. \quad (4.59)$$

Logo, enquanto o momento angular da Lua cresce, ela se afasta da Terra. (Na tentativa de determinar a taxa de recessão da Lua, igualando a variação de L à variação do momento angular de rotação da Terra, seria necessário determinar de quanto a diminuição da rotação da Terra por efeito de marés é devido à Lua e de quanto é devido ao Sol. O momento angular da Lua mais o momento angular da Terra não é constante por causa dos efeitos das marés devido ao Sol. O momento angular do sistema Terra/Lua, em relação ao Sol, é aproximadamente constante, com exceção de um pequeno efeito das marés que aparece no Sol devido à Terra.)

4.6 PROBLEMAS SOBRE COLISÃO

Muitas questões a respeito das colisões de partículas podem ser respondidas aplicando-se as leis da conservação. Como são válidas também em Mecânica Quântica,² os resultados obtidos com a sua utilização são válidos para partículas atômicas e subatômicas, assim como para partículas macroscópicas. Na maioria dos problemas sobre colisão, as partículas envolvidas movem-se em velocidade constante, livres da ação de qualquer força, durante algum tempo antes e após a colisão, enquanto durante a colisão

² P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 4th ed. Oxford University Press, 1958, p. 115.

elas se encontram sob a ação das forças que uma exerce sobre as outras. Se essas forças mútuas que agem durante a colisão satisfazem a terceira lei de Newton, então o momento linear total das partículas é o mesmo antes e após a colisão. Se a terceira lei de Newton for válida em sua forma forte, o momento angular também será conservado. Se as forças forem conservativas, a energia cinética será conservada (porque a energia potencial é a mesma antes e após a colisão). Em qualquer caso, as leis da conservação são válidas levando-se em conta toda a energia, todo o momento linear e todo o momento angular, incluindo os associados com qualquer radiação que possa ser emitida e incluindo qualquer energia que seja transformada de energia cinética para outras formas, ou vice-versa.

Considere primeiramente uma colisão entre duas partículas, 1 e 2, em que a energia cinética e o momento linear totais são conservados. Esta colisão é chamada *elástica*. Identificando-se as duas partículas pelos índices 1 e 2 e pelos índices I e F , os valores da energia cinética e momento linear antes e após a colisão, respectivamente, e aplicando as leis da conservação, tem-se:

$$p_{1I} + p_{2I} = p_{1F} + p_{2F}, \quad (4.60)$$

$$T_{1I} + T_{2I} = T_{1F} + T_{2F}. \quad (4.61)$$

A equação (4.61) pode ser reescrita em termos dos momentos e das massas das partículas como:

$$\frac{p_{1I}^2}{2m_1} + \frac{p_{2I}^2}{2m_2} = \frac{p_{1F}^2}{2m_1} + \frac{p_{2F}^2}{2m_2}. \quad (4.62)$$

Para especificar qualquer vetor momento linear p , deve-se especificar três grandezas, que podem ser seus três componentes ao longo de qualquer sistema de coordenadas, ou o módulo e a direção (a última especificada, por exemplo, pelos ângulos esféricos θ e ϕ). Logo, as Eqs. (4.60) e (4.62) representam quatro equações que dependem da razão entre as duas massas e das doze grandezas necessárias para especificar os momentos lineares envolvidos. Se nove dessas quantidades forem conhecidas, resolvem-se as equações para obter as quatro restantes. Em um caso típico, pode-se conhecer as massas, o momento linear inicial das duas partículas e a direção final do movimento de uma das partículas, como, por exemplo, da partícula 1. Determina-se, então, o momento linear final p_{2F} da partícula 2, e o módulo do momento linear final p_{1F} (ou, de maneira equivalente, a energia) da partícula 1. Em muitos casos importantes, a massa de uma das partículas é desconhecida, não podendo ser determinada a partir das Eqs. (4.60) e (4.62), desde que se conheça o bastante sobre os momentos lineares e as energias antes e após a colisão. Note que só as condições iniciais não são suficientes para se determinar o resultado da colisão a partir das Eqs. (4.60) e (4.62); é preciso conhecer alguma coisa sobre o movimento após a colisão. As condições iniciais determinariam sozinhas o resultado da colisão caso se pudessem resolver as equações de movimento do sistema.

Considere a colisão de uma partícula de massa m_1 , momento linear p_{1I} , com uma partícula de massa m_2 em repouso. Este é um caso comum. (Não há, na realidade, perda de generalidade neste problema, pois, como foi dito na Seç. 1.4 e será mostrado

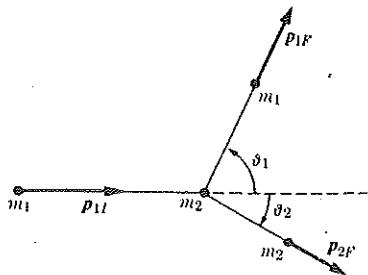


Fig. 4.3 Colisão da partícula m_1 com a partícula m_2 , em repouso.

na Seç. 7.1, se m_2 inicialmente mover-se em velocidade uniforme v_{2I} , as leis de Newton serão igualmente válidas num sistema de coordenadas que se move em velocidade uniforme v_{2I} , onde a partícula de massa m_2 está inicialmente em repouso.) Considere que m_1 seja “espalhada” formando um ângulo ϑ_1 , isto é, considere que ϑ_1 seja o ângulo entre a direção inicial e a final de seu movimento (Fig. 4.3). O momento linear p_{2F} deve pertencer ao mesmo plano que p_{1I} e p_{1F} , pois não existem componentes do momento perpendicular a este plano antes da colisão, e não deverá existir após. Considere-se que p_{2F} faça um ângulo ϑ_2 com a direção de p_{1I} . Escreve-se a Eq. (4.60) em termos dos componentes nas direções paralela e perpendicular a p_{1I} :

$$p_{1I} = p_{1F} \cos \vartheta_1 + p_{2F} \cos \vartheta_2, \quad (4.63)$$

$$0 = p_{1F} \sin \vartheta_1 - p_{2F} \sin \vartheta_2. \quad (4.64)$$

A Eq. (4.62), no presente caso, torna-se:

$$\frac{p_{1I}^2 - p_{1F}^2}{m_1} = \frac{p_{2F}^2}{m_2}. \quad (4.65)$$

Sendo conhecidas duas das seguintes grandezas:

$$(p_{1F}/p_{1I}, p_{2F}/p_{1I}, \vartheta_1, \vartheta_2, m_1/m_2)$$

podem-se determinar as três restantes. Se, por exemplo, as massas, o momento inicial p_{1I} e o ângulo ϑ_1 forem conhecidos, pode-se determinar p_{1F} , p_{2F} , ϑ_2 da seguinte maneira: transpõe-se o primeiro termo do segundo membro para o primeiro nas Eqs. (4.63) e (4.64), elevando-se ao quadrado e, somando membro a membro, elimina-se ϑ_2 :

$$p_{1I}^2 + p_{1F}^2 - 2p_{1I}p_{1F} \cos \vartheta_1 = p_{2F}^2. \quad (4.66)$$

Em seguida, substitui-se este resultado na Eq. (4.65), podendo-se determinar p_{1F} :

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \vartheta_1 \pm \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \vartheta_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right]^{1/2}, \quad (4.67)$$

e também p_{2F} , a partir da Eq. (4.66), e ϑ_2 , a partir da Eq. (4.63). Se $m_1 > m_2$, a quantidade sob o radical é igual a zero quando $\vartheta_1 = \vartheta_m$, onde ϑ_m é dado por

$$\cos^2 \vartheta_m = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad 0 \leq \vartheta_m \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.68)$$

Se $\vartheta_1 > \vartheta_m$ (e $\vartheta_1 \leq \pi$), então p_{1F}/p_{1I} será imaginário ou negativo, mas, como nenhum dos dois casos está de acordo com a Física, ϑ_m representa o ângulo máximo através do qual m_1 pode ser espalhado. Se $m_1 \gg m_2$, este ângulo é muito pequeno, como se observa na prática. Quando $\vartheta_1 < \vartheta_m$, existem dois valores de p_{1F}/p_{1I} , o maior correspondendo a uma colisão de raspão e o menor, à colisão mais próxima de uma frontal; ϑ_2 é diferente para estes dois casos. O caso em que $\vartheta_1 = 0$ pode significar que não houve colisão ($p_{1F} = p_{1I}$) ou uma frontal. No caso de colisão frontal,

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vartheta_2 = 0, \quad \frac{p_{2F}}{p_{1I}} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.69)$$

Se $m_1 = m_2$, as Eqs. (4.67), (4.66) e (4.64) se reduzem a

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \cos \vartheta_1, \quad \frac{p_{2F}}{p_{1I}} = \sin \vartheta_1, \quad \vartheta_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1 \right). \quad (4.70)$$

ϑ_1 variará agora de $\vartheta_1 = 0$, no caso em que não houve colisão, até $\vartheta_1 = \pi/2$, no de colisão frontal na qual todo o momento é transferido para a partícula 2. (Na realidade, ϑ_1 é indefinido quando $p_{1F} = 0$, mas $\vartheta_1 \rightarrow \pi/2$ e $p_{1F} \rightarrow 0$ e a colisão tende a ser frontal.) Se $m_1 \gg m_2$, todos os valores de ϑ_1 entre 0 e π são permitidos, fornecendo um valor positivo para p_{1F}/p_{1I} caso se escolha o sinal positivo na Eq. (4.67). O sinal menos não pode ser escolhido, pois daria valor negativo a p_{1F}/p_{1I} . Se $\vartheta_1 = 0$, então $p_{1F} = p_{1I}$ e, neste caso, não haverá colisão, mas quando $\vartheta_1 = 0$, a colisão é frontal, para a qual

$$\frac{p_{1F}}{p_{1I}} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}, \quad \vartheta_1 = \pi, \quad (4.71)$$

$$\frac{p_{2F}}{p_{1I}} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vartheta_2 = 0.$$

Sendo m_1 desconhecido, mas p_{1I} ou T_{1I} pode ser medido ou calculado, a determinação experimental do momento linear final da partícula 2 (cuja massa é supostamente conhecida) é suficiente para determinar m_1 . Como exemplo, sendo $T_{1I} = p_{1I}^2/2m_1$ conhecido, e T_{2F} medido para uma colisão frontal, m_1 pode ser obtida com auxílio da Eq. (4.69) ou (4.71):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2T_{1I}}{T_{2F}} - 1 \pm \left[\left(\frac{2T_{1I}}{T_{2F}} - 1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (4.72)$$

Assim, determina-se m_1 para um dos dois valores possíveis. Se o resultado da colisão com outra partícula de massa m_2 diferente, ou cujo ângulo de espalhamento seja diferente, for conhecido, pode-se determinar univocamente m_1 . Este método é essencial-

mente o mesmo que Chadwick usou ao estabelecer a existência do nêutron.³ Ele levou partículas neutras desconhecidas, criadas em reação nuclear, a causar impacto sobre matéria que continha vários núcleos de massas conhecidas e mediou as energias de duas espécies de núcleos de massas diferentes, m_2 e m'_2 , projetadas para a frente por colisão frontal. Escrevendo a Eq. (4.72) para ambos os casos, a energia T_{1f} pode ser eliminada, e o valor encontrado para m_1 foi praticamente igual à massa do próton.

Já se viu anteriormente que uma vez conhecidos o momento inicial, as massas das duas partículas envolvidas na colisão e o ângulo de espalhamento ϑ_1 (ou ϑ_2), pode-se calcular, usando as leis da conservação, todas as outras grandezas envolvidas na colisão. Para prever os ângulos de espalhamento, é preciso conhecer, além do momento inicial e das trajetórias iniciais, a Lei da Força entre Partículas, como, por exemplo, a colisão de duas partículas cuja força de interação seja proporcional ao inverso do quadrado da distância, que será tratada na Seç. 4.8. Estas previsões podem ser feitas tanto no caso de colisões de corpos macroscópicos como entre corpos astronômicos sob suposições apropriadas, tais como a Lei das Forças. Para partículas atômicas, que obedecem à Mecânica Quântica, isto não pode ser realizado, embora seja possível prever as probabilidades de espalhamento em vários ângulos ϑ_1 (ou ϑ_2) para dadas condições iniciais, isto é, pode-se prever as seções de choque. Em todos os casos em que a energia é conservada, a relação entre as energias, os momentos lineares e os ângulos de espalhamento apresentados acima são válidos, exceto nos casos em que as velocidades das partículas são comparáveis à da luz. Neste último caso, as Eqs. (4.60), (4.61), (4.63) e (4.64) ainda são válidas, mas devem ser usadas as relações relativísticas entre massa, momento linear e energia no lugar da Eq. (4.62). No Cap. 14, deriva-se a expressão relativística para energia cinética e momento linear:

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1 \right), \quad (4.73)$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \quad (4.74)$$

onde c é a velocidade da luz, v a velocidade e m a massa de repouso da partícula, isto é, a massa quando a partícula se acha em repouso. Estas relações se reduzem às equações clássicas (2.5) e (3.127), quando $v \ll c$. Pode-se deduzir facilmente a seguinte relação útil entre o momento linear e a energia:

$$\frac{p^2}{2m} = T + \frac{T^2}{2mc^2}. \quad (4.75)$$

A menos que v seja aproximadamente igual a c , o segundo termo do segundo membro da Eq. (4.75) será muito menor do que o primeiro, reduzindo-se esta relação à fórmula

³ J. Chadwick, *Nature*, 129, 312, 1932.

clássica. Com o auxílio da Eq. (4.75), as Leis da Conservação podem ser aplicadas a colisões que envolvam velocidades próximas à velocidade da luz.

Os átomos, as moléculas e os núcleos possuem potencial interno e energia cinética associada ao movimento de suas partes, podendo absorver ou liberar energia numa colisão. Tais colisões inelásticas entre partículas atômicas denominam-se *primeira espécie* ou *endoérgicas*, se a energia cinética do movimento de translação for absorvida, e de *segunda espécie*, ou *exoérgicas*, se a energia cinética for liberada no processo. Pode acontecer também que, numa colisão atômica ou nuclear, as partículas, após a colisão, não sejam as mesmas do início, antes da colisão. Por exemplo, um próton pode colidir com um núcleo e ser absorvido, enquanto um nêutron é liberado. Existe grande

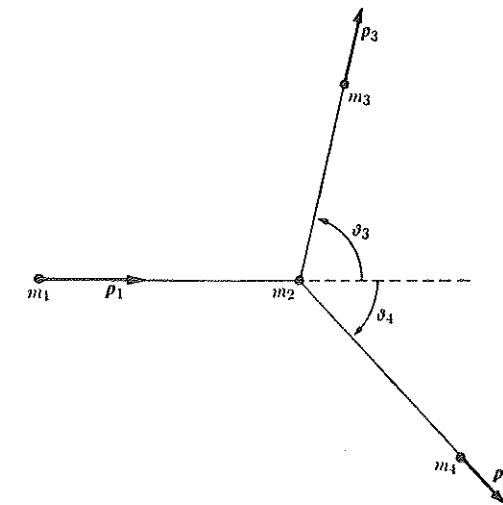


Fig. 4.4 Colisão de m_1 com m_2 em repouso, resultando na produção de m_3 e m_4 .

número de tipos possíveis para tais processos. Duas partículas podem colidir e permanecer juntas formando uma única partícula ou, inversamente, uma única partícula pode subitamente partir-se em duas que se separam. Duas partículas podem colidir e formar duas outras após a colisão, ou, ainda, três ou mais partículas podem ser formadas no processo e separarem-se após a colisão. Em todos estes casos, a Lei da Conservação do Momento Linear continua válida, e a Lei da Conservação da Energia também, levando-se em conta a energia interna dos átomos e das moléculas. Considere agora o caso em que uma partícula de massa m_1 colide com outra de massa m_2 em repouso (Fig. 4.4). As partículas m_3 e m_4 são espalhadas do local da colisão formando ângulos ϑ_3 e ϑ_4 , em relação à direção original do movimento de m_1 . Considere que a energia Q seja produzida no processo ($Q > 0$ para uma colisão exoérgica; $Q = 0$ para uma colisão elástica; $Q < 0$ para uma colisão endoérgica). Então, aplicando as Leis da Conservação do Momento Linear e da Energia, escreve-se

$$p_1 = p_3 \cos \vartheta_3 + p_4 \cos \vartheta_4, \quad (4.76)$$

$$0 = p_3 \sin \vartheta_3 - p_4 \sin \vartheta_4, \quad (4.77)$$

$$T_1 + Q = T_3 + T_4. \quad (4.78)$$

Como a energia cinética pode ser expressa em termos do momento linear, se as massas forem conhecidas, poder-se-á determinar três grandezas quaisquer entre p_1 , p_3 , p_4 , ϑ_3 , ϑ_4 e Q em termos das outras três. Em muitos casos, p_1 é conhecido, p_3 e ϑ_3 são medidos e quer-se calcular Q . Eliminando-se ϑ_4 das Eqs. (4.76) e (4.77), como no exemplo anterior, obtém-se

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 \cos \vartheta_3. \quad (4.79)$$

Este resultado pode ser substituído na Eq. (4.78) para obter-se Q em termos de grandezas conhecidas:

$$Q = T_3 + T_4 - T_1 = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 \cos \vartheta_3}{2m_4} - \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad (4.80)$$

ou

$$Q = T_3 \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - T_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - 2 \left(\frac{m_1 m_3 T_1 T_3}{m_4^2}\right)^{1/2} \cos \vartheta_3. \quad (4.81)$$

Todos os passos seguidos até a substituição de T_1 , T_3 e T_4 são válidos também para partículas que se movem em velocidades da ordem da velocidade da luz. Em altas velocidades, a relação relativística (4.75) entre T e p deve ser usada no último passo. A Eq. (4.81) é útil na obtenção de Q para o caso de uma reação nuclear em que a partícula incidente m_1 , cuja energia é conhecida, colide com um núcleo m_2 , tendo como resultado a emissão de uma partícula m_3 cuja energia e direção do movimento são medidas experimentalmente. A Eq. (4.81) permite a determinação de Q a partir destas quantidades conhecidas, levando-se em conta o ligeiro recuo do núcleo residual m_4 , o que, em geral, é difícil de ser observado diretamente.

As colisões de corpos macroscópicos inertes são sempre inelásticas e endoérgicas e parte da energia cinética é transformada em calor pelas forças de atrito durante o impacto. A energia cinética de translação também pode ser convertida em energia cinética de rotação e vice-versa. (Variações de energia de rotação estão incluídas no fator Q introduzido na análise anterior.) Tais colisões variam desde as aproximadamente elásticas de balas de aço — para as quais se pode aplicar a análise sobre colisões elásticas, desde que não exista rotação envolvida — até as completamente inelásticas, em que os dois corpos permanecem juntos após a colisão. Considere uma colisão completamente inelástica em que uma bala de massa m_1 , velocidade v_1 colide e permanece ligada num objeto de massa m_2 inicialmente em repouso. Considere que a velocidade dos dois após a colisão seja v_2 . A conservação do momento linear implica evidentemente que v_2 tenha a mesma direção de v_1 ; assim

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2. \quad (4.82)$$

A velocidade após a colisão será

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (4.83)$$

A energia cinética não é conservada nesta colisão. A quantidade de energia cinética convertida em calor é

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right). \quad (4.84)$$

Numa colisão frontal de dois corpos em que não existe rotação, Isaac Newton verificou experimentalmente que a razão entre a velocidade relativa depois do impacto e a velocidade antes do impacto é aproximadamente constante para dois corpos quaisquer. Considere dois corpos m_1 e m_2 deslocando-se em velocidades iniciais v_{1I} e v_{2I} , ao longo de eixo x ; eles colidem e voltam ao longo do mesmo eixo em velocidades v_{1F} e v_{2F} . Então, o resultado experimental pode ser expresso pela equação⁴

$$v_{2F} - v_{1F} = e(v_{1I} - v_{2I}), \quad (4.85)$$

onde e denomina-se *coeficiente de restituição* e situa-se entre os valores 0 e 1. Se $e = 1$, a colisão é perfeitamente elástica; se $e = 0$, é completamente inelástica. A conservação do momento linear, em ambos os casos, leva a

$$m_1 v_{1I} + m_2 v_{2I} = m_1 v_{1F} + m_2 v_{2F}. \quad (4.86)$$

As Eqs. (4.85) e (4.86) permitem determinar as velocidades finais v_{1F} e v_{2F} para colisões frontais, quando as velocidades iniciais são conhecidas.

4.7 O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Considera-se, nesta seção, o movimento de um sistema de duas partículas submetidas apenas à ação de forças internas que satisfazem a terceira lei de Newton (forma fraca), não havendo aplicação de forças externas, nem mesmo de forças externas que satisfazem a condições especiais. Este último caso será tratado mais tarde. O problema dos dois corpos pode ser separado em dois outros de uma partícula. O movimento do centro de massa é governado pela Eq. (4.18), cuja forma é idêntica à da equação para o movimento de uma partícula. Além do mais, verifica-se que o movimento de qualquer uma das partículas, tendo a outra como origem, assemelha-se ao de origem fixa, de uma partícula cuja massa é escolhida apropriadamente e submetida à mesma força in-

⁴ Experiências mais recentes mostram que e não é realmente constante, mas depende das velocidades iniciais, do meio em que ocorreria a colisão e da história passada dos corpos. Para uma discussão mais completa com referências adicionais, veja G. Barnes, "Study of collisions", *Am. J. Phys.* 26, 5 (jan. 1958).

terna. Este resultado permite que se apliquem os resultados obtidos na Seç. 3.14, para casos em que não é possível desprezar o movimento do centro de atração.

Considere que as duas partículas têm massas m_1 e m_2 e que estejam submetidas à ação das forças externas F_1^e , F_2^e e das forças internas F_1^i e F_2^i que cada partícula exerce sobre as outras e que satisfazem a terceira lei de Newton:

$$F_1^i = -F_2^i. \quad (4.87)$$

As equações do movimento do sistema são:

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_1^i + F_1^e, \quad (4.88)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = F_2^i + F_2^e. \quad (4.89)$$

Introduz-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.90)$$

$$r = r_1 - r_2. \quad (4.91)$$

A transformação inversa é

$$r_1 = R + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad (4.92)$$

$$r_2 = R - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r, \quad (4.93)$$

onde R é a coordenada do centro de massa e r , a coordenada relativa de m_1 em relação a m_2 (veja Fig. 4.5). Somando-se as Eqs. (4.88) e (4.89) e usando a Eq. (4.87), obtém-se a equação de movimento para R :

$$(m_1 + m_2) \ddot{R} = F_1^e + F_2^e. \quad (4.94)$$

Multiplica-se a Eq. (4.89) por m_1 e, depois, subtrai-se da Eq. (4.88) multiplicada por m_2 . Usando-se a Eq. (4.87), obtém-se a equação do movimento para r :

$$m_1 m_2 \ddot{r} = (m_1 + m_2) F_1^i + m_1 m_2 \left(\frac{F_1^e}{m_1} - \frac{F_2^e}{m_2} \right). \quad (4.95)$$

Admitindo que

$$\frac{F_1^e}{m_1} = \frac{F_2^e}{m_2}, \quad (4.96)$$

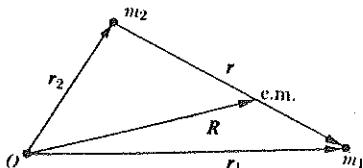


Fig. 4.5 Coordenadas para o problema de dois corpos.

e introduzindo as abreviações

$$M = m_1 + m_2, \quad (4.97)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.98)$$

$$F = F_1^e + F_2^e. \quad (4.99)$$

As Eqs. (4.94) e (4.95) tomarão a forma das equações de movimento de uma partícula:

$$M \ddot{R} = F, \quad (4.100)$$

$$\mu \ddot{r} = F_1^i. \quad (4.101)$$

A Eq. (4.100) já é conhecida para o movimento do centro de massa. A Eq. (4.101) é a equação de movimento para uma partícula de massa μ submetida à ação da força interna F_1^i que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1. Logo, o movimento da partícula 1 visto da partícula 2 é o mesmo que se obteria caso a partícula 2 estivesse fixa e a massa da partícula 1 fosse μ (μ é chamada *massa reduzida*). Quando uma partícula é muito mais pesada do que a outra, μ será ligeiramente menor do que a massa mais leve, mas se as massas forem iguais, μ será igual à metade da massa de uma das partículas. Pode-se, agora, aplicar os resultados obtidos na Seç. 3.14 para qualquer problema de dois corpos em que as duas partículas exercem uma sobre a outra uma força de atração, ou de repulsão, proporcional ao inverso do quadrado da distância, supondo-se que as forças externas sejam iguais a zero ou proporcionais às massas, como é exigido pela Eq. (4.96).

A Eq. (4.96) é satisfeita se as forças externas forem gravitacionais, exercidas por massas cujas distâncias aos dois corpos m_1 e m_2 são muito maiores do que a distância r entre os corpos m_1 e m_2 , como acontece, por exemplo, no movimento do sistema Terra-Lua, que pode ser tratado, com boa aproximação, pelo método descrito nesta seção, porque a distância da Lua à Terra é muito menor do que a entre ambos e o Sol (ou os outros planetas). As partículas atômicas estão submetidas a forças elétricas proporcionais a suas cargas; sendo assim, a Eq. (4.96) só será válida se as forças externas forem nulas. Existem ainda outros casos menos importantes em que as duas partículas têm a mesma razão de carga para massa, estando submetidas a forças externas devido a cargas exteriores distantes. Pode-se evidenciar aqui que, embora as Eqs. (4.88) e (4.89) não sejam as corretas para os movimentos das partículas atômicas, a introdução das coordenadas R e r e a redução do problema dos dois corpos a dois problemas de um só corpo podem ser realizadas, usando-se as leis da Mecânica Quântica, de maneira exatamente análoga ao tratamento clássico mostrado acima, em que se consideram as mesmas suposições sobre as forças.

Vale a pena notar que a energia cinética do sistema de dois corpos pode ser separada em duas partes, cada uma associada a cada um dos problemas de um corpo, obtidos a partir dos problemas dos dois corpos. A velocidade do centro de massa e a velocidade relativa estão, de acordo com as Eqs. (4.90) a (4.93), relacionadas a velocidades das partículas através de

$$V = \dot{R} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.102)$$

$$v = \dot{r} = v_1 - v_2, \quad (4.103)$$

ou

$$v_1 = V + \frac{\mu}{m_1} v, \quad (4.104)$$

$$v_2 = V - \frac{\mu}{m_2} v. \quad (4.105)$$

A energia cinética total é

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2. \end{aligned} \quad (4.106)$$

O momento angular pode, de maneira similar, ser separado em duas partes:

$$\begin{aligned} L &= m_1(r_1 \times v_1) + m_2(r_2 \times v_2) \\ &= M(R \times V) + \mu(r \times v). \end{aligned} \quad (4.107)$$

No entanto, o momento linear total será exatamente

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV. \quad (4.108)$$

Não existe termo em μv no momento linear total.

4.8 COORDENADAS DO CENTRO DE MASSA.

ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD POR UMA PARTÍCULA CARREGADA DE MASSA FINITA

Usando-se os resultados obtidos da seção anterior, pode-se resolver completamente o problema do espalhamento entre dois corpos, caso seja conhecida a força de interação existente entre as duas partículas, obtida pela solução da equação para a coordenada r do movimento de um corpo, embora este resultado não seja muito conveniente para as aplicações. A solução $r(t)$ descreve o movimento da partícula 1 em relação à partícula 2 tomada como origem. Como a partícula 2 também se move ao longo de uma órbita, este resultado não terá forma conveniente para a interpretação do movimento. Seria melhor caso se pudesse descrever o movimento das duas partículas por intermédio das coordenadas $r_1(t)$ e $r_2(t)$ referidas à mesma origem. Em geral, uma das partículas encontra-se inicialmente em repouso; considere que este é o caso para a partícula 2, que é chamada *partícula-alvo*. A partícula 1 aproxima-se do alvo em velocidade v_{1I} , sendo chamada *partícula incidente*. As partículas são localizadas pelos vetores r_1 e r_2 em relação à origem com respeito à qual a partícula-alvo está inicialmente em repouso. As coordenadas r_1 e r_2 são chamadas *coordenadas no sistema do laboratório*.

A transformação das coordenadas R, r para coordenadas do laboratório é mais convenientemente realizada em duas etapas. Introduz-se primeiramente o *sistema de coordenadas do centro de massa*, em relação ao qual as partículas são localizadas pelos vetores r_1^i e r_2^i tendo o centro de massa como origem:

$$r_1^i = r_1 - R, \quad r_2^i = r_2 - R, \quad (4.109)$$

e, inversamente,

$$r_1 = r_1^i + R, \quad r_2 = r_2^i + R. \quad (4.110)$$

A relação entre as coordenadas do centro de massa e a coordenada relativa r é obtida a partir das Eqs. (4.92) e (4.93):

$$\begin{aligned} r_1^i &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{\mu}{m_1} r, \\ r_2^i &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r = -\frac{\mu}{m_2} r. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Os vetores posição das partículas, em relação ao centro de massa, são múltiplos constantes da coordenada relativa r . O centro de massa tem vantagens em relação à partícula 2, quando tomado como origem, porque se move em velocidade uniforme em problemas de colisão, em que se supõe que não existam forças externas atuando sobre o sistema.

No sistema de coordenadas do centro de massa, o momento linear total é igual a zero, e os momentos lineares p_1^i e p_2^i das duas partículas são sempre iguais e opostos. Os ângulos de espalhamento ϑ_1^i e ϑ_2^i , situados entre as duas direções finais do movimento e a direção do movimento da partícula 1, são o suplemento um do outro, como é mostrado na Fig. 4.6.

Vai-se determinar agora a relação entre o ângulo de espalhamento Θ do problema equivalente de um corpo e o ângulo de espalhamento ϑ_1 no sistema de coordenadas do laboratório (Fig. 4.7). A velocidade da partícula incidente no sistema centro de

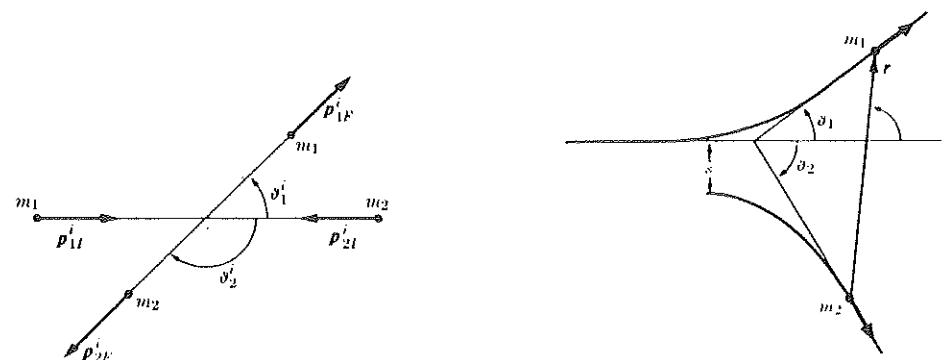


Fig. 4.6 Colisão de duas partículas em coordenadas do centro de massa.

Fig. 4.7 Órbitas para a colisão de dois corpos no sistema do laboratório.

massa está relacionada à velocidade relativa no problema de um só corpo, de acordo com a Eq. (4.111), por

$$v_1^i = \frac{\mu}{m_1} v. \quad (4.112)$$

Como estas duas velocidades são sempre paralelas, o ângulo de espalhamento ϑ_1^i da partícula incidente, em relação ao sistema centro de massa, é igual ao ângulo de espalhamento Θ do problema de um corpo. As velocidades da partícula incidente, nos sistemas centro de massa e laboratório, relacionam-se pela Eq. (4.110):

$$v_1 = v_1^i + V, \quad (4.113)$$

onde a velocidade constante do centro de massa pode ser expressa em termos da velocidade inicial no sistema laboratório pela Eq. (4.102)

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1I} = \frac{\mu}{m_2} v_{1I}. \quad (4.114)$$

A relação expressa pela Eq. (4.113) é mostrada na Fig. 4.8, a partir da qual a relação entre $\vartheta_1^i = \Theta$ e ϑ_1 pode ser determinada:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{v_{1F}^i \sin \Theta}{v_{1F}^i \cos \Theta + V}, \quad (4.115)$$

ou, com a ajuda das Eqs. (4.112) e (4.114),

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + (m_1 v_I / m_2 v_F)}, \quad (4.116)$$

onde v_I e v_F são as velocidades inicial e final. Substitui-se v_I por v_{1I} , pois inicialmente a velocidade relativa é exatamente a velocidade da partícula. Se a colisão for elástica, as velocidades relativas, inicial e final, serão as mesmas e a Eq. (4.116) se reduzirá a:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + (m_1 / m_2)}. \quad (4.117)$$

Uma relação similar pode ser obtida para ϑ_2 .

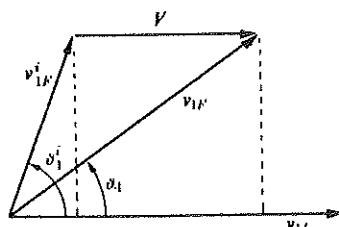


Fig. 4.8 Relação entre as velocidades nos sistemas de coordenadas do laboratório e do centro de massa.

Quando a partícula incidente for muito mais pesada do que a partícula-alvo, então ϑ_1 será muito pequeno, não importando o valor de Θ . Este resultado corresponde ao obtido na Seç. 4.6, que ϑ_1 não pode ser maior do que ϑ_m dado pela Eq. (4.68) se $m_1 > m_2$. Se $m_1 = m_2$, então Eq. (4.117) é resolvida facilmente, podendo-se obter ϑ_1 :

$$\begin{aligned} \tan \vartheta_1 &= \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + 1} = \frac{2 \sin (\Theta/2) \cos (\Theta/2)}{2 \cos^2 (\Theta/2)} = \tan \frac{\Theta}{2}, \\ \vartheta_1 &= \frac{1}{2} \Theta. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Como Θ pode ter qualquer valor entre 0 e π , no sistema centro de massa, sem violar a lei da conservação, o valor máximo de ϑ_1 é neste caso $\pi/2$, de acordo com o resultado correspondente da Seç. 4.6. Se a massa do alvo m_2 for muito maior do que a massa incidente m_1 , então $\tan \vartheta_1 = \tan \Theta$; isto justifica rigorosamente a aplicação, neste caso, da Eq. (3.276) para a seção de choque de Rutherford, deduzida no Cap. 3 para o problema de espalhamento de um corpo sob a ação de uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância.

De acordo com o desenvolvimento acima, a Eq. (3.276) pode ser aplicada ao problema de dois corpos para qualquer razão m_1/m_2 da massa incidente para a massa alvo, mas Θ deve ser interpretado como o ângulo de espalhamento em termos de coordenadas relativas, ou, alternativamente, em termos das coordenadas do centro de massa. Isto é, $d\sigma$ na Eq. (3.276) é a seção de choque, no caso de um processo de espalhamento no qual a velocidade relativa v após a colisão é espalhada entre os ângulos Θ e $\Theta + d\Theta$, em relação à velocidade inicial. Como, em geral, o ângulo de espalhamento ϑ_1 é o medido, deve-se substituir Θ e $d\Theta$ na Eq. (3.276) em termos de ϑ_1 e $d\vartheta_1$ a partir da Eq. (4.117). Isto pode ser realizado mais facilmente no caso em que $m_1 = m_2$, quando, pela Eq. (4.118), a seção de choque de espalhamento [Eq. (3.276)] torna-se

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2 \mu v_0^2} \right)^2 \frac{4 \cos \vartheta_1}{\sin^4 \vartheta_1} 2\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1. \quad (4.119)$$

4.9 O PROBLEMA DE N CORPOS

Seria muito conveniente se houvesse um método geral de resolução do problema de qualquer número de partículas em movimento sob a ação das forças exercidasumas sobre as outras, análogo ao método dado na Seç. 4.7, isto é, reduzindo-se a dois problemas separados de um só corpo. Infelizmente, não existe um método geral para sistemas com mais de duas partículas, o que não significa que tais problemas não possam ser resolvidos. Cálculos extremamente precisos sobre os movimentos dos planetas levam à solução de problemas envolvendo as interações gravitacionais de um número considerável de corpos. No entanto, estas não são soluções gerais das equações do movimento, como o sistema de órbitas, obtido para o caso de dois corpos, mas sim soluções numéricas, obtidas através de cálculos elaborados para condições iniciais especificadas e válidas durante um certo período de tempo. Mesmo o problema de três corpos não admi-

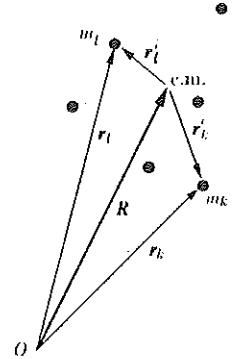


Fig. 4.9 Centro de massa e coordenadas internas de um sistema de partículas.

te redução do problema geral, como, por exemplo, no caso de três problemas de um único corpo, ou de um outro conjunto qualquer de equações que possam ser resolvidas.

Entretanto, pode-se separar parcialmente o problema do movimento de um sistema de partículas em dois problemas: o primeiro, para se descobrir o movimento do centro de massa, e o segundo, para se descobrir o movimento interno do sistema, isto é, o movimento de suas partículas em relação ao centro de massa. Define-se vetor coordenada interna da k -ésima partícula como o vetor que vai do centro de massa até a k -ésima partícula (Fig. 4.9):

$$\mathbf{r}_k^i = \mathbf{r}_k - \mathbf{R}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.120)$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{R} + \mathbf{r}_k^i, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.121)$$

Em vista da definição (4.14) para o centro de massa, as coordenadas internas satisfazem a equação

$$\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k^i = \mathbf{0}. \quad (4.122)$$

A velocidade do centro de massa e a velocidade interna são definidas por:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}, \quad (4.123)$$

$$\mathbf{v}_k^i = \dot{\mathbf{r}}_k^i = \mathbf{v}_k - \mathbf{V}. \quad (4.124)$$

O momento linear interno total de um sistema de partículas (isto é, o momento linear relativo ao centro de massa), de acordo com a Eq. (4.122), se anula:

$$\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^i = \mathbf{0}. \quad (4.125)$$

Em primeiro lugar, mostra-se que tanto a energia cinética total, como o momento linear total e o momento angular total podem ser separados: uma parte dependendo da massa total M e do movimento do centro de massa; e a outra parte interna depen-

dendo somente das coordenadas e das velocidades internas. A energia cinética total do sistema de partículas é

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2. \quad (4.126)$$

Substituindo v_k dado pela Eq. (4.124) e usando-se a Eq. (4.125), pode-se separar T em duas partes:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (V^2 + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}_k^i + \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{v}_k^i) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{v}_k^i + \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}_k^i \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{v}_k^i + \mathbf{V} \cdot \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^i \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^i \cdot \mathbf{v}_k^i. \end{aligned} \quad (4.127)$$

O momento linear total, usando-se as Eqs. (4.124) e (4.125), será

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{V} + \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^i \\ &= M \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

O momento linear interno é zero.

O momento angular total em relação à origem, usando-se as Eqs. (4.121), (4.122), (4.124) e (4.125), será

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{r}_k^i \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \mathbf{v}_k^i + \mathbf{r}_k^i \times \mathbf{v}_k^i) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + \left(\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k^i \right) \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left(\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k^i \right) + \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{r}_k^i \times \mathbf{v}_k^i) \\ &= M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{r}_k^i \times \mathbf{v}_k^i). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Note que o momento angular depende somente das coordenadas e das velocidades internas e é independente da origem em relação à qual \mathbf{L} está sendo calculado (e a partir do qual o vetor \mathbf{R} é desenhado).

A posição da partícula k em relação à partícula l é especificada pelo vetor

$$\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l = \mathbf{r}_k^i - \mathbf{r}_l^i. \quad (4.130)$$

A posição relativa de cada partícula em relação a cada uma das outras depende somente das coordenadas internas \mathbf{r}_k^i e, da mesma forma, as velocidades relativas, de modo que as forças internas F_k^i devem depender somente das coordenadas internas \mathbf{r}_k^i e, possivelmente, das velocidades internas. Se existir uma energia potencial associada às forças externas, deve, da mesma forma, depender somente das coordenadas internas.

Embora as forças, a energia, o momento linear e o momento angular possam, cada um deles, ser separados em duas partes — uma parte associada ao movimento do centro de massa e a outra, interna, dependendo somente das coordenadas e das velocidades internas — deve ser lembrado que o movimento interno e o movimento do centro de massa não são dois problemas completamente separados. O movimento do centro de massa, de acordo com a Eq. (4.18), é um problema separado de um só corpo quando se conhece a força externa F . No entanto, em muitos casos, F dependerá parcialmente do movimento interno do sistema. As equações do movimento interno contêm as forças externas, exceto em casos especiais, e, além disso, dependem também do movimento do centro de massa. Substituindo-se as Eqs. (4.121) nas Eqs. (4.1) e arrumando os termos, tem-se

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k^i = \mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e - m_k \ddot{\mathbf{R}}. \quad (4.131)$$

Existem muitos casos, entretanto, em que um grupo de partículas forma um sistema que aparenta ter sua própria identidade, independente de outras partículas e de outros sistemas de partículas. Um núcleo atômico constituído de nêutrons e prótons é um exemplo, assim como o átomo, construído de núcleos e elétrons, ou uma molécula composta de núcleo e elétrons, ou uma coleção de partículas que constituem uma bola de beisebol. Em todos estes casos, conclui-se que as forças internas são mais fortes do que as externas, e a aceleração $\ddot{\mathbf{R}}$ é pequena, de forma que as equações do movimento interno (4.131) dependem essencialmente das forças internas, e as suas soluções representam somente movimentos internos aproximadamente independentes das forças externas e do movimento como um todo. O sistema visto externamente comporta-se, então, como uma partícula com coordenada vetor R e massa M submetida à ação de uma força (externa) F , mas esta partícula, além de sua energia “orbital”, tem o momento linear e o momento angular associado ao movimento do seu centro de massa, uma energia interna ou intrínseca e um momento angular associado ao movimento interno. A força externa F pode depender do estado do movimento interno do sistema. As partes orbital e intrínseca da energia, do momento linear e do momento angular podem ser identificadas nas Eqs. (4.127), (4.128) e (4.129). O momento angular interno, usualmente chamado *spin*, é independente da posição e da velocidade do centro de massa relativas à origem, em relação ao qual calcula-se o momento angular total. Enquanto as forças externas são pequenas, esta representação aproximada do sistema de muitas partículas por uma só partícula ainda é válida. Sempre que as forças externas forem suficientemente fortes para afetar agradavelmente o movimento inter-

no, a separação em problemas sobre movimentos interno e orbital deixa de ser possível e o sistema começa a perder sua individualidade. Alguns dos problemas centrais da fronteira da teoria física atual relacionam-se com a preocupação de cobrir o intervalo existente entre uma coleção de partículas livres e um sistema com suficiente individualidade para ser tratado como uma única partícula.

4.10 ACOPLAMENTO DE DOIS OSCILADORES HARMÔNICOS

Um tipo de sistema mecânico encontrado comumente é aquele em que há interação entre vários osciladores. Como exemplo típico, considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 4.10, que consiste em duas massas, m_1 e m_2 , ligadas a suportes fixos por meio de molas cujas constantes elásticas são k_1 e k_2 e conectadas entre si por uma terceira mola de constante elástica k_3 . Suponha que as massas só se possam mover ao longo do eixo x ; elas podem, por exemplo, deslizar ao longo de um trilho. Se a mola k_3 não estivesse presente, as duas massas vibrariam independentemente em movimento harmônico simples com freqüências angulares (desprezando-se o amortecimento):

$$\omega_{10}^0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{20}^0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}. \quad (4.132)$$

Para se investigar o efeito do acoplamento destes dois osciladores, por meio da mola k_3 , descreve-se a posição de duas massas, especificando as distâncias x_1 e x_2 em que k_1 e k_2 foram deslocadas de sua posição de equilíbrio, como é mostrado na Fig. 4.10. Por razões de conveniência matemática, as coordenadas x_1 e x_2 são definidas de maneira a medirem as distâncias em que cada uma das molas foi esticada, o que fornece uma simetria das coordenadas com significado físico, que se reflete em simetria algébrica nas equações resultantes diante do fato de que, se os índices 1 e 2 forem trocados, as equações permanecerão as mesmas. Esta simetria faz com que a álgebra e a verificação dos resultados se tornem um pouco mais fáceis. Entretanto, a escolha que se fez tem uma desvantagem: as distâncias x_1 e x_2 não são medidas a partir de uma origem comum e, além do mais, elas são medidas em direções opostas! Logo, na interpretação geométrica dos resultados, é preciso lembrar que a direção positiva de m_1 é para a direita, enquanto a direção positiva de m_2 é para a esquerda. Outras maneiras de definir x_1 e x_2 são igualmente permitidas. Admitir-se-á, por simplicidade, que quando as molas k_1 e k_2 estão relaxadas ($x_1 = x_2 = 0$), a mola k_3 também está. A distância em que

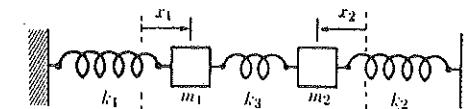


Fig. 4.10 Modelo simples de osciladores harmônicos acoplados. As linhas tracejadas indicam as posições de equilíbrio.

a mola k_3 é comprimida é igual a $(x_1 + x_2)$. As equações do movimento das massas m_1 e m_2 (desprezando-se o atrito) são

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3(x_1 + x_2), \quad (4.133)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3(x_1 + x_2). \quad (4.134)$$

Estas equações são reescritas na forma

$$m_1 \ddot{x}_1 + k'_1 x_1 + k_3 x_2 = 0, \quad (4.135)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k'_2 x_2 + k_3 x_1 = 0, \quad (4.136)$$

onde

$$k'_1 = k_1 + k_3, \quad (4.137)$$

$$k'_2 = k_2 + k_3. \quad (4.138)$$

Assim há duas equações diferenciais lineares de segunda ordem para serem resolvidas simultaneamente. Se não existissem os terceiros termos nas equações acima, elas seriam independentes uma da outra, e as oscilações harmônicas seriam independentes de x_1 e x_2 com freqüências

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad (4.139)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k'_2}{m_2}}. \quad (4.140)$$

Estas são as freqüências com que cada massa vibraria se a outra permanecesse fixa. Logo, o primeiro efeito do acoplamento de molas é simplesmente mudar a freqüência de oscilações independentes de cada massa, devido ao fato de cada massa estar ligada a duas molas ao invés de uma. Os terceiros termos nas Eqs. (4.135) e (4.136) dão origem a um acoplamento entre o movimento das duas massas, de forma que elas não mais se movam independentemente.

Pode-se resolver as Eqs. (4.135) e (4.136), estendendo o método da Seç. 2.8, que pode ser aplicado a qualquer conjunto de equações diferenciais lineares, simultâneas, com coeficientes constantes. Suponha que

$$x_1 = C_1 e^{pt}, \quad (4.141)$$

$$x_2 = C_2 e^{pt}, \quad (4.142)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Note que se considerando a mesma dependência do tempo para ambos, x_1 e x_2 , de forma que o fator e^{pt} se cancele quando se substituem as soluções acima nas Eqs. (4.135) e (4.136):

$$(m_1 p^2 + k'_1)C_1 + k_3 C_2 = 0, \quad (4.143)$$

$$(m_2 p^2 + k'_2)C_2 + k_3 C_1 = 0. \quad (4.144)$$

Agora são duas equações algébricas para as três incógnitas C_1 , C_2 e p . Nota-se que, a partir da Eq. (4.143) ou (4.144), pode-se obter a razão C_2/C_1 :

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{m_1 p^2 + k'_1}{k_3} = -\frac{k_3}{m_2 p^2 + k'_2}. \quad (4.145)$$

Os dois valores C_2/C_1 devem ser iguais, tendo-se uma equação para p :

$$\frac{m_1 p^2 + k'_1}{k_3} = \frac{k_3}{m_2 p^2 + k'_2}, \quad (4.146)$$

que pode ser arranjada como uma equação quadrática em p^2 , denominada *equação secular*:

$$m_1 m_2 p^4 + (m_2 k'_1 + m_1 k'_2)p^2 + (k'_1 k'_2 - k_3^2) = 0, \quad (4.147)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} p^2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{k'_1 + k'_2}{m_1 + m_2} \right) \pm \left[\frac{1}{4} \left(\frac{k'_1 + k'_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - \frac{k'_1 k'_2}{m_1 m_2} + \frac{k_3^2}{m_1 m_2} \right]^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2} (\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2) \pm \left[\frac{1}{4} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)^2 + \frac{k_3^2}{m_1 m_2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

Não é difícil mostrar que a quantidade entre colchetes na equação acima é menor do que o quadrado do primeiro termo, tendo-se assim duas soluções negativas para p^2 . Admitindo-se que $\omega_{10} \geq \omega_{20}$, as soluções para p^2 são

$$\begin{aligned} p^2 &= -\omega_1^2 = -(\omega_{10}^2 + \frac{1}{2}\Delta\omega^2), \\ p^2 &= -\omega_2^2 = -(\omega_{20}^2 - \frac{1}{2}\Delta\omega^2), \end{aligned} \quad (4.149)$$

onde

$$\Delta\omega^2 = (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2) \left[\left(1 + \frac{4\kappa^4}{(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)^2} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (4.150)$$

e fazendo-se

$$\kappa^2 = \frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_2}}, \quad (4.151)$$

onde κ é a constante de acoplamento. Se $\omega_{10} = \omega_{20}$, a Eq. (4.150) se reduz a

$$\Delta\omega^2 = 2\kappa^2. \quad (4.152)$$

As quatro soluções para p são

$$p = \pm i\omega_1, \pm i\omega_2. \quad (4.153)$$

Se $p^2 = -\omega_1^2$, a Eq. (4.145) pode ser escrita como

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{m_1}{k_3} (\omega_1^2 - \omega_{10}^2) = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad (4.154)$$

e se $p^2 = -\omega_2^2$, ela pode ser escrita como

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{m_2}{k_3} (\omega_2^2 - \omega_{20}^2) = -\frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (4.155)$$

Substituindo-se a Eq. (4.153) nas Eqs. (4.141) e (4.142), obtém-se quatro soluções das Eqs. (4.135) e (4.136), admitindo-se que a razão C_2/C_1 seja escolhida de acordo com a Eq. (4.154) ou (4.155). Cada uma destas soluções envolve uma constante arbitrária (C_1 ou C_2). Como as Eqs. (4.135) e (4.136) são lineares, a soma destas quatro soluções será também uma solução e, na realidade, é a solução geral, pois contém quatro constantes arbitrárias (isto é, C_1, C'_1, C_2 e C'_2):

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_1 t} + C'_1 e^{-i\omega_1 t} - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} C_2 e^{i\omega_2 t} - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} C'_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad (4.156)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} C_1 e^{i\omega_1 t} + \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} C'_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t} + C'_2 e^{-i\omega_2 t}. \quad (4.157)$$

Para que x_1 e x_2 se tornem reais, escolhem-se

$$C_1 = \frac{1}{2} A_1 e^{i\theta_1}, \quad C'_1 = \frac{1}{2} A_1 e^{-i\theta_1}, \quad (4.158)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} A_2 e^{i\theta_2}, \quad C'_2 = \frac{1}{2} A_2 e^{-i\theta_2}, \quad (4.159)$$

de tal forma que

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (4.160)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \quad (4.161)$$

Esta é a solução geral envolvendo quatro constantes arbitrárias, A_1, A_2, θ_1 e θ_2 . Pode-se verificar que o movimento de cada coordenada é a superposição de duas vibrações harmônicas com freqüências ω_1 e ω_2 . As freqüências de oscilação são as mesmas para ambas as coordenadas, mas as amplitudes relativas são diferentes, e são dadas pelas Eqs. (4.154) e (4.155).

Se A_1 ou A_2 for igual a zero, aparecerá somente uma freqüência. O movimento resultante é chamado *modo normal de vibração*. O modo normal de freqüência mais alta é dado por

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (4.162)$$

$$x_2 = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad (4.163)$$

$$\omega_1^2 = \omega_{10}^2 + \frac{1}{2} \Delta\omega^2. \quad (4.164)$$

A freqüência de oscilação é maior do que ω_{10} . Consultando a Fig. 4.10, verifica-se que, neste modo de vibração, as duas massas, m_1 e m_2 , estão oscilando fora de fase, isto é, os seus deslocamentos têm direções opostas. O modo de vibração com freqüência mais baixa é dado por

$$x_1 = -\frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (4.165)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (4.166)$$

$$\omega_2^2 = \omega_{20}^2 - \frac{1}{2} \Delta\omega^2. \quad (4.167)$$

Neste modo, as duas massas oscilam em fase com freqüência menor do que ω_{20} . O movimento mais geral do sistema é dado pelas Eqs. (4.160) e (4.161), e é uma superposição dos dois modos normais de vibração.

O resultado do acoplamento é, então, fazer com que ambas as massas participem da oscilação em cada freqüência e aumentar a freqüência mais alta e abaixar a freqüência mais baixa de oscilação. Mesmo quando ambas as freqüências são inicialmente iguais, o acoplamento das duas freqüências de vibração resulta numa mais alta e noutra mais baixa do que a freqüência sem acoplamento. Quando o acoplamento é muito fraco, isto é, quando

$$\kappa^2 \ll \frac{1}{2} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2), \quad (4.168)$$

a Eq. (4.150) torna-se

$$\Delta\omega^2 \doteq \frac{2\kappa^4}{\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2}. \quad (4.169)$$

Para o modo de vibração de freqüência mais alta, a razão entre a amplitude de vibração da massa m_2 e da massa m_1 será então

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\Delta\omega^2}{2\kappa^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \doteq \frac{\kappa^2}{\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \quad (4.170)$$

Logo, a menos que $m_2 \ll m_1$, a massa m_2 oscila com amplitude muito menor do que m_1 . Similarmente, pode-se mostrar que, no caso de modos de vibração de freqüência baixa, m_1 oscila com freqüência muito menor do que m_2 . Quando dois osciladores de freqüências diferentes estão fracamente acoplados entre si, não existem modos normais de vibração do sistema. Em um dos modos, o oscilador de freqüência mais alta oscila com freqüência ligeiramente maior do que sem acoplamento, e o outro oscila fracamente fora de fase com a mesma freqüência. No outro modo, o oscilador de freqüên-

cia mais baixa oscila com uma freqüência ligeiramente menor do que a freqüência sem acoplamento, e o outro oscila fracamente e em fase com a mesma freqüência. Nas freqüências (ou muito próximas) de ressonância, quando as duas freqüências naturais, ω_{10} e ω_{20} , são iguais, a condição para o acoplamento fraco [Eq. (4.168)] não é satisfeita, mesmo no caso de o acoplamento constante ser pequeno. $\Delta\omega^2$ é, então, dado pela Eq. (4.152), e para os dois modos normais de vibração:

$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad (4.171)$$

$$\omega^2 = \omega_{10}^2 + \kappa^2. \quad (4.172)$$

Os dois osciladores oscilam em fase ou fora de fase numa razão entre as amplitudes que depende somente da razão entre as massas, e com uma freqüência mais baixa ou mais alta do que a freqüência sem acoplamento cuja diferença depende da constante de acoplamento.

Um caso especial interessante é o de dois osciladores idênticos ($m_1 = m_2$, $k_1 = k_2$) acoplados entre si. A solução geral (4.160) e (4.161) neste caso será

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (4.173)$$

$$x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad (4.174)$$

onde ω_1 e ω_2 são dados pela Eq. (4.172). Se $A_2 = 0$, o modo normal de vibração de freqüência é alto, e se $A_1 = 0$, o modo normal de freqüência será baixo. Vamos supor que m_2 está inicialmente em repouso em sua posição de equilíbrio, enquanto m_1 desloca-se numa distância A do ponto de equilíbrio e é largado em $t = 0$. As constantes que satisfazem estas condições iniciais são

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 = 0, \\ A_1 &= -A_2 = \frac{1}{2}A, \end{aligned} \quad (4.175)$$

de forma que as Eqs. (4.173) e (4.174) tornam-se

$$x_1 = \frac{1}{2}A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad (4.176)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}A (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \quad (4.177)$$

podendo ser reescritas na seguinte forma

$$x_1 = A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \quad (4.178)$$

$$x_2 = -A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \quad (4.179)$$

Quando o acoplamento é pequeno, ω_1 e ω_2 são aproximadamente iguais, e x_1 e x_2 oscilam rapidamente com freqüência angular igual a $(\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega_1 = \omega_2$, e com uma amplitude que varia senoidalmente com freqüência angular $(\omega_1 - \omega_2)/2$. O movi-

mento de cada oscilador é uma superposição de seus dois modos normais de vibração, que resultam em batimento, onde o batimento da freqüência é a diferença entre as freqüências dos dois modos normais. Este resultado é ilustrado na Fig. 4.11, onde se vêem os gráficos do movimento de x_2 : (a) quando somente o modo normal de alta freqüência é excitado; (b) quando o modo normal de baixa freqüência é excitado e (c) quando somente o oscilador m_1 é inicialmente deslocado. Na Fig. 4.12, são mostrados os gráficos de x_1 e x_2 , dados pelas Eqs. (4.178) e (4.179). Pode-se verificar que os osciladores trocam periodicamente as suas energias, devido ao acoplamento entre eles. A Fig. 4.13 mostra o mesmo movimento quando as molas k_1 e k_2 não são exatamente iguais. Neste caso, o oscilador m_1 não perde toda a sua energia para m_2 durante os batimentos. A Fig. 4.14 mostra que o resultado do aumento do acoplamento é de aumentar a freqüência $\omega_1 - \omega_2$ [Eq. (4.172)].

Quando uma força de atrito age em cada oscilador, a equação de movimento (4.135) e (4.136) torna-se

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k'_1 x_1 + k_3 x_2 = 0, \quad (4.180)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + k'_2 x_2 + k_3 x_1 = 0, \quad (4.181)$$

onde b_1 e b_2 são os coeficientes de atrito respectivos. A substituição de (4.141) e (4.142) conduz a uma equação secular de quarto grau em p :

$$m_1 m_2 p^4 + (m_2 b_1 + m_1 b_2)p^3 + (m_2 k'_1 + m_1 k'_2 + b_1 b_2)p^2$$

$$+ (b_1 k'_2 + b_2 k'_1)p + (k'_1 k'_2 - k_3^2) = 0. \quad (4.182)$$

Esta equação não pode ser resolvida tão facilmente quanto a Eq. (4.147). As quatro raízes para p são, em geral, complexas, tendo a forma (se b_1 e b_2 não forem muito grandes):

$$p = -\gamma_1 \pm i\omega_1, \quad (4.183)$$

$$p = -\gamma_2 \pm i\omega_2.$$

Pode-se demonstrar (embora não facilmente) algebraicamente que as raízes têm esta forma com γ_1 e γ_2 positivos, a partir de um estudo dos coeficientes na Eq. (4.182). Fisicamente, é evidente que as raízes têm a forma (4.183), pois isto leva a oscilações amortecidas, resultado este que deveria ser esperado devido ao atrito. Se b_1 e b_2 forem suficientemente grandes, um, ou ambos, par de raízes complexas pode tornar-se um par de raízes reais e negativas, e o modo ou modos normais correspondentes seriam supersmortecidos. Obtém-se, em geral, uma solução prática da Eq. (4.182) por métodos numéricos, quando se conhecem os valores numéricos das constantes; entretanto uma solução algébrica aproximada também pode ser encontrada quando o amortecimento é muito pequeno.

O problema do movimento de um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados, submetidos a uma força que oscila harmonicamente e exercida numa das massas, pode ser resolvido por métodos similares aos aplicados a um oscilador harmônico simples, obtendo-se uma solução estacionária, na qual ambos oscilam com a freqüência da força aplicada em amplitudes e fases definidas, dependendo de suas massas, das

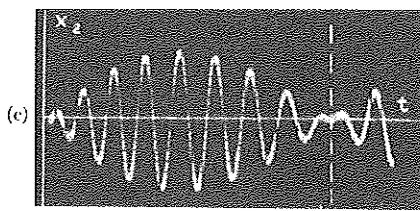
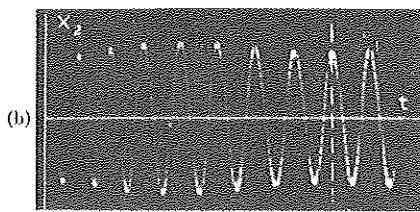
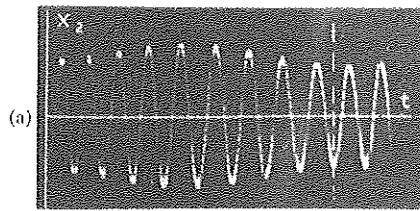


Fig. 4.11 Movimento de osciladores harmônicos acoplados. (a) Modo normal para alta freqüência. (b) Modo normal para baixa freqüência. (c) m_1 deslocado inicialmente.

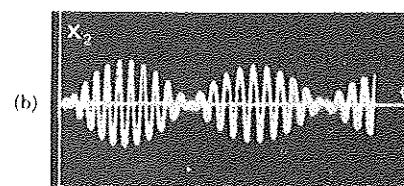
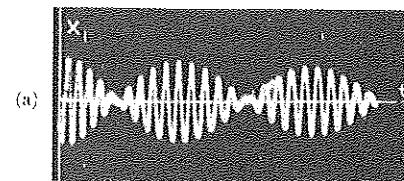


Fig. 4.12 Movimento de dois osciladores idênticos.

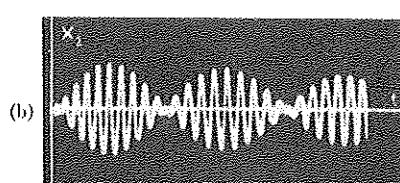
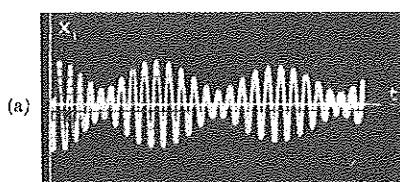


Fig. 4.13 Movimento resultante do acoplamento de osciladores não-identicos.

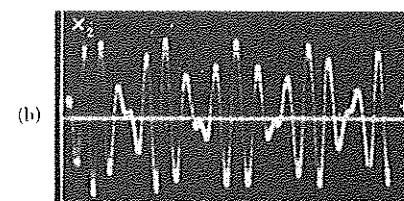
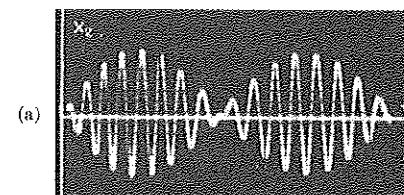


Fig. 4.14 Movimento de dois osciladores acoplados. (a) Acoplamento fraco. (b) Acoplamento forte.

constantes das molas, do amortecimento e da amplitude e da fase da força aplicada. O sistema estará em ressonância com a força aplicada, quando a sua freqüência corresponde a uma das duas freqüências dos modos normais de vibração; então, as massas oscilarão com grandes amplitudes que só serão limitadas pelo amortecimento. A solução geral consiste numa solução estacionária mais a solução do problema sem a força. É possível demonstrar um princípio de superposição de acordo com o qual, no caso de um determinado número de forças agir sobre uma ou ambas as massas, a solução será a soma das soluções obtidas para cada força que age separadamente. Este teorema pode ser usado para tratar o problema de forças arbitrárias agindo sobre as duas massas.

Existem outros tipos possíveis de acoplamento entre os osciladores além do que se faz por meio de molas, já estudado no exemplo acima, como, por exemplo, por meio de forças de atrito. Um exemplo simples seria o caso em que uma das massas desliza sobre a outra, como é mostrado na Fig. 4.15. Admita-se que a força de atrito seja proporcional à velocidade relativa das duas massas. As equações de movimento de m_1 e m_2 serão, então,

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - b(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \quad (4.184)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - b(\dot{x}_2 + \dot{x}_1), \quad (4.185)$$

ou

$$m_1 \ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + k_1 x_1 + b\dot{x}_2 = 0, \quad (4.186)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + k_2 x_2 + b\dot{x}_1 = 0. \quad (4.187)$$

O acoplamento é expresso, nas Eqs. (4.186) e (4.187), por um termo da equação do movimento de cada oscilador que depende da velocidade do outro. Os osciladores também podem ser acoplados por uma massa, como na Fig. 4.16. Deixa-se ao leitor a tarefa de escrever as equações do movimento. (Veja Probl. 40 no final deste capítulo.)

Dois osciladores podem ser acoplados de tal maneira que a força exercida sobre um deles dependa da posição, velocidade, ou aceleração do outro, ou de qualquer combinação destas. Em geral, todos os três tipos de acoplamento ocorrem de alguma forma; uma mola, por exemplo, tem sempre massa, estando sujeita a um tipo de atrito interno. Logo o par de equações mais geral para dois osciladores harmônicos acoplados tem a seguinte forma:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 = 0, \quad (4.188)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0. \quad (4.189)$$

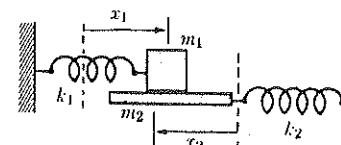


Fig. 4.15 Acoplamento com atrito.

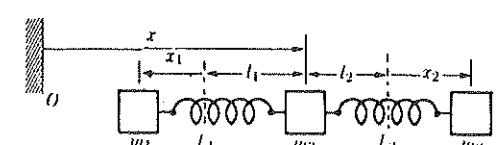


Fig. 4.16 Acoplamento através de uma massa.

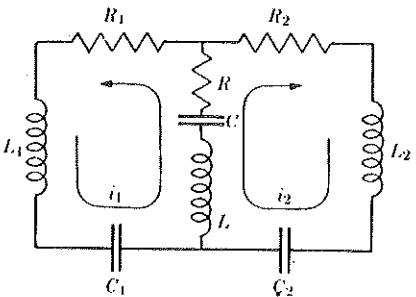


Fig. 4.17 Acoplamento de circuitos oscilantes.

Estas equações podem ser resolvidas pelo método descrito acima, levando a resultados similares. Se as forças de atrito não forem muito grandes, aparecerão dois modos normais de vibração.

As equações da forma (4.188) e (4.189), ou os casos especiais simples considerados nas discussões anteriores, não aparecem somente na teoria do acoplamento de osciladores mecânicos, mas também na teoria de acoplamento de circuitos elétricos. Aplicando-se a segunda lei de Kirchhoff às duas malhas do circuito mostrado na Fig. 4.17, com correntes i_1 e i_2 em cada uma das malhas conforme é indicado na figura, tem-se

$$(L + L_1)\ddot{q}_1 + (R + R_1)\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1}\right)q_1 + L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 = 0, \quad (4.190)$$

e

$$(L + L_2)\ddot{q}_2 + (R + R_2)\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}\right)q_2 + L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}q_1 = 0, \quad (4.191)$$

onde q_1 e q_2 são as cargas acumuladas nos condensadores C_1 e C_2 pelas correntes i_1 e i_2 . Estas equações têm a mesma forma que as Eqs. (4.188) e (4.189) e podem ser resolvidas por métodos similares. Nos circuitos elétricos, o amortecimento, em geral, é grande e, por isso, a solução das equações acima requer um trabalho considerável.

A discussão desta seção pode ser estendida ao caso de um número qualquer de osciladores harmônicos, mecânicos ou elétricos, acoplados, para os quais os resultados são análogos. Os detalhes algébricos tornam-se quase proibitivos, a menos que se usem técnicas matemáticas mais avançadas. Assim sendo, a discussão deste problema será postergada até o Cap. 12.

Todos os problemas de vibração mecânica ou elétrica se reduzem, no caso-limite de vibrações de pequenas amplitudes, aos que envolvem o acoplamento de um ou vários osciladores harmônicos. Problemas sobre molas, membranas, sólidos elásticos e vibrações elétricas e acústicas em linhas de transmissão podem ser reduzidos a problemas sobre acoplamento de osciladores, possuindo, similarmente, modos normais de vibração. O tratamento do comportamento de um átomo, ou de uma molécula, de acordo com a Mecânica Quântica resulta num problema matemático idêntico ao de osciladores harmônicos acoplados, no qual os níveis de energia tomam o lugar dos osciladores, e as influências perturbadoras externas tomam o lugar do mecanismo de acoplamento.

PROBLEMAS

1. Formule e demonstre a Lei da Conservação do Momento Angular, em relação à origem de um sistema de partículas confinadas num plano.

2. Despeja-se água num barril a uma taxa de 60 kg por minuto de uma altura de 5 m. O barril pesa 10 kg e está em repouso sobre a balança. Determine a leitura da balança depois que a água foi despejada no barril durante um minuto.

3. Um pêndulo balístico usado para medir a velocidade de uma bala é construído suspendendo-se um bloco de madeira de massa M por uma corda de comprimento l . O pêndulo encontra-se inicialmente em repouso na vertical. Uma bala de massa m é disparada de encontro ao bloco e se incrusta nele. O pêndulo começa a balançar e se eleva até que a corda faça um ângulo máximo θ com a vertical. Determine a velocidade inicial da bala em termos de M , m , l e θ , aplicando as leis da conservação apropriadas.

4. Uma caixa de massa m cai sobre uma esteira que se move em velocidade constante v_0 . O coeficiente de atrito de deslizamento entre a caixa e a esteira é μ . Em que distância a caixa desliza sobre a esteira, antes que o seu movimento atinja a mesma velocidade da esteira? Que força F deve ser aplicada à esteira para mantê-la em movimento em velocidade constante, depois que a caixa cai sobre ela? Por quanto tempo deve a força ser aplicada? Calcule o impulso fornecido por esta força e verifique se o momento é conservado entre o tempo anterior à queda da caixa sobre a esteira e o tempo em que a caixa inicia seu movimento solidário com a esteira. Calcule o trabalho realizado pela força F para puxar a esteira. Calcule o trabalho dissipado pelo atrito entre a caixa e a esteira. Verifique se a energia fornecida à esteira pela força F é exatamente igual ao acréscimo de energia cinética da caixa mais a energia dissipada pelo atrito.

5. Uma caçamba de massa m_1 é ligada a uma haste de comprimento l e peso desprezível. A haste é fixada a um eixo de maneira que a caçamba possa balançar livremente, formando um arco na vertical de raio l . A uma distância l diretamente abaixo do eixo existe um monte de areia. A caçamba é levantada até que a haste forme um ângulo de 45° com a vertical, sendo então largada. No seu movimento para baixo, a caçamba pega uma massa m_2 de areia. Em que ângulo com a vertical a haste da caçamba se eleva após ter pegado a areia? Este problema deve ser resolvido, considerando-se cuidadosamente as leis da conservação que podem ser aplicadas em cada parte do movimento da caçamba. O atrito deve ser desprezado, exceto no caso necessário para manter a areia na caçamba.

6. a) Um satélite esférico de massa m , raio a , move-se em velocidade v numa atmosfera ténue de densidade p . Determine a força de atrito exercida sobre ele, supondo que a velocidade das moléculas do ar possam ser desprezadas em comparação com v , e que cada molécula que colide com o satélite permaneça presa na sua superfície. O leitor acredita que estas suposições sejam válidas?

b) Se a órbita for circular, a 40 km acima da Terra (raio 6 360 km), onde $\rho = 10^{-11} \text{ kg/m}^{-3}$ e se $a = 1 \text{ m}$, e $m = 100 \text{ kg}$, determine a variação de altitude e a variação no período de revolução em uma semana.

7. Uma nave espacial aproxima-se da superfície da Lua. Supondo-se que um terço de seu peso seja combustível e que a velocidade dos gases de exaustão do motor do foguete seja de 1 500 m/s e que a aceleração da gravidade na superfície lunar seja igual a um sexto da aceleração da gravidade na superfície da Terra, por quanto tempo a nave espacial pode permanecer girando em torno e próximo à superfície da Lua até que o combustível acabe?

8. Um foguete de brinquedo consiste numa garrafa de plástico parcialmente cheia d'água e contendo também ar a uma pressão alta p . A água é ejetada através de um pequeno orifício de área A . Calcule a velocidade de exaustão v , admitindo que as perdas de energia por atrito sejam desprezíveis, de forma que a energia cinética da água que escapa seja igual ao trabalho realizado pela pressão do gás para empurrar a água para fora. Mostre que o empuxo deste motor de foguete é igual a $2pA$. (Suponha que a água abandona o orifício de área A com velocidade v .) No caso de o foguete vazio pesar 500 g, se contiver inicialmente 500 g de água e se $A = 5 \text{ mm}^2$, qual será a pressão necessária para que o foguete possa sustentar-se com a gravidade? Se ele, então, for largado de maneira a ser acelerado para cima, que velocidade máxima atingirá? Que altura ele atingirá aproximadamente? Quais os efeitos desprezados nos cálculos e como cada um deles afeta o resultado final?

*9. Um foguete de dois estágios foi construído com capacidade para acelerar uma carga de 100 kg até uma velocidade de 6 000 m/s em vôo livre no espaço livre (sem força gravitacional). (Num foguete de dois estágios, o primeiro é abandonado quando acaba o combustível, mas antes que o segundo estágio seja ligado.) Suponha que o combustível usado possa atingir uma velocidade de exaustão de 1 500 m/s, e que a estrutura do foguete implica que o seu peso vazio (sem combustível ou carga) pesará 10% a mais do que o combustível que ele pode carregar. Determine a melhor escolha para as massas dos dois estágios, de forma que o peso total no lançamento seja mínimo. Mostre que é impossível se construir um foguete de um estágio que possa realizar este trabalho.

10. Um foguete deve ser lançado verticalmente. Sua massa inicial é M_0 , a velocidade de exaustão $-u$ é constante e a taxa de exaustão $-(dM/dt) = A$ é constante. Depois que a massa total ΔM é consumida, o combustível do foguete acaba.

a) Desprezando-se a resistência do ar e supondo que a aceleração da gravidade g seja constante, escreva e resolva as equações do movimento.

*b) Mostre que se M_0 , u e ΔM forem fixados, então a maior taxa de exaustão A , isto é, a que consome o combustível mais rapidamente, corresponderá à maior altitude máxima atingida pelo foguete.

11. Suponha que toda a massa M do giroscópio mostrado na Fig. 4.1 concentra-se essencialmente na borda do volante de raio R , e que o centro de massa encontra-se no

eixo a uma distância l do ponto de apoio Q . Se o giroscópio girar rapidamente em velocidade angular ω , mostre que a velocidade angular de precessão de seu eixo, num cone que forme um ângulo α com a vertical é aproximadamente

$$\omega_p = gl/(R^2\omega^2).$$

12. Um mergulhador, ao executar um salto de 2 voltas e meia, curva-se com os joelhos e braços numa posição que aumenta a sua velocidade angular. Estime a razão com que ele aumenta a velocidade angular em relação à sua velocidade angular, quando estica o corpo e mantém os braços acima da cabeça. Explique o seu raciocínio.

13. Um planeta esférico e uniforme de raio a gira em torno do Sol em órbita circular de raio r_0 e em torno de seu eixo em velocidade angular ω_0 , normal ao plano da órbita. Devido à elevação das marés pelo Sol, a velocidade angular de rotação está decrescendo. Determine uma fórmula para expressar o raio da órbita r em função da velocidade angular de rotação ω num tempo anterior ou posterior. [O leitor precisará usar as fórmulas (5.9) e (5.91) do Cap. 5.] Aplique as fórmulas obtidas para o caso em que o planeta seja a Terra, desprezando os efeitos da Lua. Estime em que distância a Terra estará do Sol quando o dia tornar-se igual ao ano atual. Se o efeito da Lua fosse levado em conta, a distância seria maior ou menor?

*14. Uma massa m formada de gás e fragmentos envolve uma estrela de massa M . O raio da estrela é desprezível em comparação com as distâncias das partículas do gás e dos fragmentos. O material que envolve a estrela tem inicialmente um momento angular total L , e uma energia cinética e potencial total E . Suponha que $m \ll M$, de tal forma que os campos gravitacionais devido às massas m são desprezíveis em comparação com o campo gravitacional da estrela. Devido ao atrito interno, o material que envolve a estrela perde energia mecânica. Mostre que existe uma energia máxima ΔE que pode ser perdida desta maneira, e que quando perder esta energia, o material deve permanecer num anel circular em torno da estrela (mas não necessariamente distribuído uniformemente). Determine ΔE e o raio do anel. (O leitor deve usar o método dos multiplicadores de Lagrange.)

15. Uma partícula de massa m_1 e energia T_{1I} colide elasticamente com uma partícula de massa m_2 em repouso. Se a massa m_2 deixar o local da colisão em um ângulo θ_2 com a direção original do movimento de m_1 , qual a energia T_{2F} transferida para a partícula m_2 ? Mostre que T_{2F} é um máximo para uma colisão frontal e que, neste caso, a perda de energia da partícula incidente na colisão é

$$T_{1I} - T_{1F} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_{1I}.$$

16. A fotografia de uma câmara de nuvem mostra o traço de uma partícula incidente, em colisão e sendo espalhada num ângulo θ_1 . O traço da partícula-alvo faz um ângulo θ_2 com a direção da partícula incidente. Supondo que a colisão foi elástica e que a partícula-alvo estava inicialmente em repouso, determine a razão m_1/m_2 das duas massas.

(Suponha que as velocidades sejam pequenas, de forma que as expressões para a energia e o momento linear podem ser usadas.)

17. Um próton de massa m_1 colide elasticamente com um núcleo desconhecido numa câmara de bolhas, sendo espalhado num ângulo ϑ_1 . A razão p_{1F}/p_{1I} é determinada a partir da curvatura de seus traços inicial e final. Determine a massa m_2 do núcleo-alvo. Como será possível determinar se a colisão foi realmente elástica?

18. Numa experiência na qual partículas de massa m_1 colidem elasticamente com partículas de massa m_2 , deseja-se colocar um contador em posição onde serão contadas as partículas que perderam metade do seu momento inicial. Em que ângulo ϑ_1 , em relação ao feixe incidente, deve ser colocado o contador? Para que intervalos da razão entre as massas m_1/m_2 este problema é possível?

19. Mostre que uma colisão elástica corresponde a um coeficiente de restituição $e = 1$, isto é, mostre que no caso de uma colisão elástica frontal entre duas partículas, a Eq. (4.85) é válida quando $e = 1$.

20. Calcule a perda de energia $-Q$ para uma colisão frontal entre uma partícula de massa m_1 , em velocidade v_1 , com uma outra de massa m_2 em repouso, se o coeficiente de restituição for e .

21. Uma partícula de massa m_1 e momento linear p_{1I} colide elasticamente com uma outra de massa m_2 e momento linear p_{2I} deslocando-se em direção oposta. Se θ_1 for a direção da massa m_1 após a colisão, em relação à sua trajetória inicial, determine o momento linear final.

22. Determine as correções relativísticas da Eq. (4.81), quando a partícula incidente m_1 e a partícula emitida m_3 se movem em velocidade próxima da velocidade da luz. Suponha que a partícula de recuo m_4 esteja em movimento suficientemente devagar, de forma que a relação clássica entre a energia e o momento possa ser usada em relação a ela.

23. Uma partícula de massa m_1 e momento p_1 colide com uma outra de massa m_2 em repouso. Uma reação ocorre dando como resultado duas partículas de massas m_3 e m_4 , que são emitidas em ângulos θ_3 e θ_4 , em relação à direção original de m_1 . Determine a energia Q produzida na reação em termos das massas, dos ângulos e de p_1 .

24. Uma reação nuclear cujo Q é conhecido ocorre numa placa fotográfica, na qual os traços da partícula incidente m_1 e das duas partículas resultantes m_3 e m_4 podem ser vistos. Determine a energia da partícula incidente, em termos de m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e Q , e os ângulos θ_3 e θ_4 medidos entre o traço da partícula incidente e os dois traços das partículas espalhadas. O que acontecerá se $Q = 0$?

25. Uma bola de bilhar desliza sobre uma mesa sem atrito e colide com uma bola idêntica em repouso. As bolas são espalhadas em ângulos $\pm \vartheta$ em relação à direção original do movimento. Mostre que depois da colisão as bolas devem ter uma energia de rotação igual a $1 - \frac{1}{2} \cos^{-2} \vartheta$ da energia cinética inicial, supondo que não há energia dissipada por atrito.

26. Uma partícula neutra, de momento linear e direção desconhecidos, produz uma reação numa câmara de bolhas, na qual duas partículas carregadas de massas m_3 e m_4 emergem com momentos lineares p_3 e p_4 . O ângulo entre os seus traços é α . Determine a direção e o momento linear da partícula incidente. Se a massa m_1 da partícula incidente for conhecida, determine a energia Q liberada na reação. (Considere velocidades não-relativísticas.)

27. O espalhamento Compton de raios X pode ser interpretado como o resultado de colisões elásticas entre fôtons de raios X e elétrons livres. De acordo com a Teoria Quântica, um fóton de comprimento de onda λ tem uma energia cinética hc/λ e momento linear de módulo h/λ , onde h é a constante de Planck e c é a velocidade da luz. No efeito Compton, um feixe incidente de raios X, cujo comprimento de onda é λ_I e direção conhecida, é espalhado ao passar pela matéria; a radiação, espalhada num ângulo ϑ_1 , em relação à direção do feixe incidente, tem comprimento de onda maior λ_F , que é função do ângulo ϑ_1 . Supondo que a colisão entre o fóton incidente e um elétron de massa m em repouso seja clássica, escreva as equações que expressam a conservação de energia e de momento linear. Use as expressões relativísticas para a energia e o momento linear do elétron. Mostre que a variação no comprimento de onda do raio X é

$$\lambda_F - \lambda_I = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta_1),$$

e que o elétron espalhado aparece num ângulo dado por

$$\tan \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{[1 + (h/\lambda_I mc)](1 - \cos \vartheta_1)}.$$

28. Faça a correção da Eq. (3.267), levando em conta o movimento da massa central M sobre a influência da massa m que gira em torno dela. Um par de estrelas gira, uma em torno da outra, tão próximas que elas aparecem no telescópio como uma única estrela. Determinou-se através de observações espectroscópicas que as duas estrelas têm massas iguais e cada uma gira em círculo com velocidade v e período τ sob a ação da força da outra. Determine a massa de cada uma das estrelas usando a fórmula obtida acima.

29. Uma nave espacial de massa m e velocidade inicial v_0 aproxima-se da Lua e passa por ela. A distância de maior aproximação é R (medida a partir do centro do satélite). A velocidade v_0 é perpendicular à velocidade V da Lua. Mostre que se a nave espacial

passar atrás da Lua, ganhará energia, e calcule o acréscimo em sua energia cinética, quando deixa as vizinhanças da Lua. Suponha que $M \gg m$, onde M é a massa lunar.

30. Uma estrela de massa m e velocidade inicial v_0 aproxima-se de uma segunda estrela de massa $2m$ e em repouso. A primeira estrela desloca-se inicialmente ao longo de uma linha que, se não fosse desviada, passaria a uma distância s da segunda estrela. Determine a velocidade e a direção finais de cada estrela.

31. Mostre que se a partícula incidente for muito mais pesada do que a partícula-alvo ($m_1 \gg m_2$), a seção de choque de Rutherford [Eq. (3.276)] no sistema de coordenadas do laboratório será aproximadamente

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2m_2 v_0^2} \right)^2 \frac{4\gamma^2}{[1 - (1 - \gamma^2 \vartheta_1^2)^{1/2}]^2 [1 - \gamma^2 \vartheta_1^2]^{1/2}} 2\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1$$

se $\gamma \vartheta_1 < 1$, onde $\gamma = m_1/m_2$. Caso contrário, $d\sigma = 0$.

32. Escreva uma expressão análoga à Eq. (4.116) para o ângulo de recuo da partícula-alvo (ϑ_2 na Fig. 4.7), em termos do ângulo de espalhamento Θ do problema equivalente de um só corpo. Mostre que, no caso de uma colisão elástica,

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \Theta).$$

33. Suponha que $m_2 \gg m_1$, e que $\Theta = \vartheta_1 + \delta$, na Eq. (4.117). Encontre uma fórmula para δ em termos de ϑ_1 . Mostre que a correção de primeira ordem para a seção de choque de espalhamento de Rutherford [Eq. (3.276)], devido à massa finita de m_2 , se anula.

34. Uma esfera elástica de raio a colide com uma esfera idêntica em repouso. Suponha que, no sistema de coordenadas do centro de massa, as partículas colidem de tal forma que as velocidades relativas antes e após o choque fazem ângulos iguais com a normal às duas esferas no ponto de contato. Determine a seção de choque para espalhamento da esfera incidente num ângulo θ_1 .

35. Um par de massas, m_1 e m_2 , ligadas por uma mola de constante k , desliza sem atrito ao longo do eixo x . Mostre que o centro de massa se move em velocidade uniforme e que as massas oscilam com freqüência $(k(m_1 + m_2)/m_1 m_2)^{1/2}$.

36. Escreva as equações do movimento representado na Fig. 4.10, supondo que o comprimento de cada mola relaxada seja l e que a distância entre as paredes seja $3l + a$, de tal forma que as molas estejam esticadas, mesmo na posição de equilíbrio. Mostre que as equações podem ser escritas da mesma forma que as Eqs. (4.135) e (4.136).

37. Para os modos normais de vibração dados pelas Eqs. (4.162) e (4.163), determine a força exercida sobre m_1 através da mola de acoplamento; mostre que o movimento

de x_1 satisfaz a equação para um oscilador harmônico simples sujeito a uma força adicional.

38. Na Fig. 4.10, $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2$, $k_2 = 0,9k$ e $k_3 = 0,1k$. A massa m_2 é mantida inicialmente fixa na posição de equilíbrio e a massa m_1 é deslocada numa distância A a partir de sua posição de equilíbrio; e, então, as duas massas são largadas. Determine $x_1(t)$ e $x_2(t)$, mostrando que o seu resultado concorda qualitativamente com a Fig. 4.13.

39. Determine os dois modos normais de vibração para um par de osciladores harmônicos amortecidos, idênticos e acoplados [Eq. (4.180) e (4.181)]. Isto é, $m_1 = m_2$, $b_1 = b_2$ e $k_1 = k_2$. [Sugestão. Se $k_3 = 0$, o leitor certamente achará a solução. Verifique que este ponto é importante na fatoração da equação secular.]

40. Estabeleça as equações de movimento para o sistema mostrado na Fig. 4.16. Os comprimentos relaxados das duas molas são l_1 e l_2 . Separe o problema em dois: um envolvendo o movimento do centro de massa e o outro envolvendo o “movimento interno”, descrito pelas duas coordenadas: x_1 e x_2 . Determine os modos normais de vibração.

41. O sistema de osciladores acoplados, mostrado na Fig. 4.10, é submetido à ação de uma força

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

aplicada à massa m_1 . Estabeleça as equações do movimento e determine a solução estacionária. Faça um gráfico da amplitude e da fase das oscilações de cada oscilador como função de ω .

CAPÍTULO 5

CORPOS RÍGIDOS. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO. ESTÁTICA

5.1 O PROBLEMA DE DINÂMICA RELATIVO AO MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO

Para aplicar os teoremas enunciados no capítulo anterior ao movimento de um corpo rígido, considera-se o corpo rígido como um sistema de muitas partículas, cujas posições relativas permanecem fixas. Pode-se definir corpo rígido como um sistema de partículas em que todas as distâncias existentes entre elas são constantes. As forças que mantêm as partículas em distâncias fixas em relação umas às outras são internas e podem ser imaginadas como exercidas por hastes rígidas, sem peso, ligando todos os pares de partículas. Forças como estas, mantendo certas relações fixas entre as partículas de um sistema, são chamadas *forças de vínculo*, e pode-se considerar que satisfazem a terceira lei de Newton (na forma forte), pois os vínculos *poderiam* ser mantidos por hastes rígidas atadas às partículas por meio de juntas universais sem atrito. Pode-se, então, aplicar os Teoremas da Conservação do Momento Linear e Angular para movimento de corpos rígidos. Para um corpo perfeitamente rígido, o Teorema da Conservação da Energia Mecânica também é válido, pois é fácil demonstrar com o auxílio da terceira lei de Newton que as forças de vínculos não realizam trabalho no movimento rígido do sistema de partículas. O trabalho realizado pela força exercida pela haste em movimento sobre a partícula numa das extremidades é igual e oposto ao trabalho realizado pela força exercida pela haste sobre a partícula na outra extremidade; pois ambas as partículas têm o mesmo componente da velocidade na direção da haste (Fig. 5.1):

$$\begin{aligned} F_{2 \rightarrow 1} \cdot v_1 + F_{1 \rightarrow 2} \cdot v_2 &= F_{2 \rightarrow 1} \cdot v_1 - F_{2 \rightarrow 1} \cdot v_2 \\ &= F_{2 \rightarrow 1} \cdot (v_1 - v_2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

A derivação das equações do movimento de um corpo rígido baseia-se nestas leis da conservação. Nenhum sólido real é perfeitamente rígido, de forma que a teoria do movimento de corpos rígidos aqui apresentada é uma aproximação idealizada do movimento dos corpos reais. Entretanto, na maioria das aplicações, a diferença entre corpos sólidos reais e corpos com rigidez verdadeira não é significativa. Com o mesmo espírito, levanta-se a suposição de que se pode imaginar um corpo rígido ideal como constituído de partículas punctiformes ideais, mantidas a distâncias fixas umas das outras.

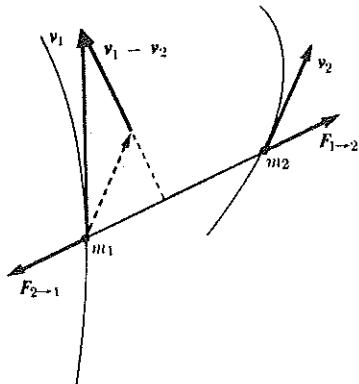


Fig. 5.1 Forças exercidas por duas partículas ligadas por uma haste rígida.

Um corpo sólido de tamanho comum compõe-se de grande número de átomos e moléculas e, para a maioria dos propósitos, é mais conveniente representar sua estrutura especificando a densidade média ρ de massa, por unidade de volume, em cada ponto do corpo. A densidade é definida por

$$\rho = \frac{dM}{dV}, \quad (5.2)$$

onde dM é a massa total do volume dV , que deve ser escolhido suficientemente grande para conter grande número de átomos, enquanto se mantém suficientemente pequeno de maneira que as propriedades do material sejam praticamente uniformes dentro do volume dV . Somentre quando é possível escolher um dV que satisfaça estas duas condições nas vizinhanças de um ponto do corpo é que se pode definir apropriadamente a densidade ρ naquele ponto. A soma de todas as partículas, tal como ocorre na expressão para a massa total, momento linear total etc., deve ser substituída por integrais do volume do corpo. Por exemplo, a massa total é

$$M = \sum_i m_i = \iiint_{\text{(corpo)}} \rho dV. \quad (5.3)$$

Outros exemplos aparecerão nas próximas seções.

Para descrever a posição de um corpo rígido no espaço, são necessárias seis coordenadas, por exemplo, especificam-se as coordenadas (x_1, y_1, z_1) de algum ponto P_1 do corpo. Qualquer outro ponto P_2 situado a uma distância r de P_1 estará sobre uma esfera de raio r com centro em (x_1, y_1, z_1) . Localiza-se P_2 sobre esta esfera com duas coordenadas, por exemplo, os ângulos das coordenadas esféricas θ_2 e φ_2 , em relação a um sistema de eixos cuja origem esteja em (x_1, y_1, z_1) . Qualquer outro ponto P_3 situado a uma distância $a \neq 0$, a partir da linha que liga P_1 e P_2 , deve pertencer a uma circunferência de raio a em torno desta linha. Localiza-se P_3 sobre esta circunferência com uma coordenada. Logo é necessário um total de seis coordenadas para localizar os três pontos P_1 , P_2 e P_3 do corpo; quando se fixam três pontos não-colineares, as posi-

ções de todos os pontos do corpo rígido são também fixadas. Existem muitas maneiras para se escolher seis coordenadas através das quais é possível especificar a posição de um corpo no espaço. Três delas são ordinariamente usadas, como as anteriores, na localização de um ponto do corpo. As três restantes determinam a orientação do corpo em relação a este ponto.

Se o corpo não estiver apoiado num suporte, podendo mover-se livremente em qualquer direção, é conveniente escolher o centro de massa como o ponto que será localizado pelas três coordenadas (X, Y, Z) , ou pelo vetor R . Determina-se, então, o movimento do centro de massa R pelo Teorema do Momento Linear, que pode ser expressado na forma (4.18):

$$M\ddot{R} = F, \quad (5.4)$$

onde M é a massa total e F é a força externa total. A equação para o movimento de rotação em torno do centro de massa é dada pelo Teorema do Momento Angular (4.28):

$$\frac{dL}{dt} = N, \quad (5.5)$$

onde L é o momento angular e N é o torque em relação ao ponto R . Se a força F for independente da orientação do corpo no espaço, como o caso de um corpo que se move em campo gravitacional uniforme, o movimento do centro de massa será independente do movimento de rotação, e a Eq. (5.4) será uma equação independente, que pode ser resolvida pelos métodos apresentados no Cap. 3. Se o torque N for independente da posição R do centro de massa, ou se $R(t)$ for conhecido, permitindo que se calcule N como função do tempo e da orientação do corpo, então é possível a determinação do movimento de rotação em relação ao centro de massa, a partir da Eq. (5.5). No caso mais geral, quando F e N dependem da posição e da orientação do corpo, as Eqs. (5.4) e (5.5) devem ser resolvidas simultaneamente como seis equações acopladas num sistema de coordenadas apropriado; tentar-se-á resolver este caso, agora, embora o leitor seja capaz de estabelecer sozinho as seis equações depois de estudar o Cap. 11.

Se o corpo for compelido, por meio de suportes externos, a girar em torno de um ponto fixo O , então se deve calcular os momentos e os torques em relação a este ponto e resolver a Eq. (5.5) para a rotação em relação a este ponto O . Neste caso, a Eq. (5.4) só serve para determinar as forças de vínculos necessárias para manter o ponto O em repouso.

A dificuldade na aplicação da Eq. (5.5) está na escolha das três coordenadas para descrever a orientação do corpo no espaço. O primeiro pensamento que surge é o de escolher uma posição zero para o corpo, especificando-se qualquer outra orientação que defina os ângulos de rotação φ_x , φ_y e φ_z , em relação a três eixos perpendiculares, necessários para fornecer a orientação do corpo. Embora mesmo pouca experiência com um sólido convença qualquer um de que não existem coordenadas apropriadas deste tipo, considere, por exemplo, a posição especificada por $\varphi_x = 90^\circ$, $\varphi_y = 90^\circ$ e $\varphi_z = 0$. Se o corpo girar 90° em torno do eixo x seguindo-se uma rotação de 90° em torno do eixo y , a posição final encontrada será diferente da posição final resultante de uma rotação de 90° em torno do eixo y seguida de uma rotação de 90° em torno do eixo x .

Conclui-se que não se pode encontrar um sistema simétrico de coordenadas, bastante simples para descrever a orientação do corpo, análogo às coordenadas x , y e z que localiza a posição de um ponto no espaço. Portanto, é melhor deixar para o Cap. 11 o problema relativamente difícil da rotação de um corpo em torno de um ponto. Aqui, sómente se discutirá o problema simples da rotação em relação a um eixo fixo.

5.2 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Para especificar a orientação de um corpo que pode girar livremente em torno de um eixo fixo só é necessária uma coordenada. Considere que o eixo- z seja o fixo; considere também um segmento de reta \overline{OA} no corpo, que corte o eixo e pertença (ou seja paralela) ao plano xy . Fixa-se a posição do corpo especificando o ângulo θ entre a reta \overline{OA} , fixa no corpo, e o eixo- x ; escolhem-se coordenadas cilíndricas para localizar a posição de cada partícula do corpo e, em seguida, calcula-se o momento angular total em relação ao eixo- z (veja Fig. 5.2). Escreve-se r_i em vez de ρ_i para representar a distância da partícula m_i em relação ao eixo z , para evitar confusão com a densidade ρ :

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\phi}_i. \quad (5.6)$$

Seja β_i o ângulo entre a direção da linha \overline{OA} no corpo e a direção do raio da partícula m_i em relação ao eixo z . Logo, para o corpo rígido, β_i é constante, e

$$\phi_i = \theta + \beta_i, \quad (5.7)$$

$$\dot{\phi}_i = \dot{\theta}. \quad (5.8)$$

Substituindo na Eq. (5.6), tem-se

$$\begin{aligned} L &= \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} \\ &= \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \dot{\theta} \\ &= I_z \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2. \quad (5.10)$$

A grandeza I_z é constante para um dado corpo que gira em torno de um dado eixo, e é denominado *momento de inércia* em relação àquele eixo. Pode-se expressar I_z como uma integral sobre o corpo:

$$I_z = \iiint_{\text{corpo}} \rho r^2 dV. \quad (5.11)$$

Às vezes se torna conveniente introduzir o *raio de giro* k_z definido pela equação

$$M k_z^2 = I_z; \quad (5.12)$$

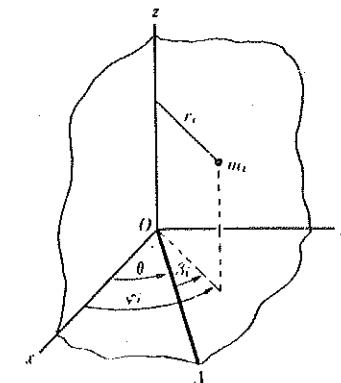


Fig. 5.2 Coordenadas de uma partícula num corpo rígido.

isto é, k_z é um raio tal que se toda a massa do corpo estivesse situada a uma distância k_z do eixo, seu momento de inércia seria I_z .

Por meio da Eq. (5.9), pode-se escrever o componente da Eq. (5.5) ao longo do eixo de rotação na seguinte forma:

$$\frac{dL}{dt} = I_z \ddot{\theta} = N_z, \quad (5.13)$$

onde N_z é o torque externo total em relação ao eixo. A Eq. (5.13) é a de movimento para a rotação de um corpo rígido em relação a um eixo fixo. Ela tem a mesma forma da Eq. (2.1) para o movimento de uma partícula ao longo de uma linha reta. O problema da rotação de um corpo em torno de um eixo fixo é equivalente, portanto, ao tratado no Cap. 2. Todos os métodos e resultados podem ser estendidos diretamente ao problema presente, de acordo com o seguinte esquema de analogia:

Movimento retilíneo

posição:	x
velocidade:	$v = \dot{x}$
aceleração:	$a = \ddot{x}$
força:	F
massa:	m
energia potencial:	

Rotação em torno de um eixo fixo

posição angular:	θ
velocidade angular:	$\omega = \dot{\theta}$
aceleração angular:	$\alpha = \ddot{\theta}$
torque:	N_z
momento de inércia:	I_z
energia potencial:	

$$V(x) = - \int_{x_s}^x F(x) dx$$

$$F(x) = - \frac{dV}{dx}$$

$$\text{energia cinética: } T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\text{momento linear: } p = m \dot{x}$$

$$V(\theta) = - \int_{\theta_s}^{\theta} N_z(\theta) d\theta$$

$$N_z(\theta) = - \frac{dV}{d\theta}$$

$$\text{energia cinética: } T = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

$$\text{momento angular: } L = I_z \dot{\theta}$$

A única diferença matemática entre os dois problemas é que o momento de inércia I_z depende da localização do eixo no corpo, enquanto a massa de um corpo não depende de sua posição ou de seu movimento, o que não afeta o tratamento da rotação em torno de um único eixo fixo.

As energias cinética e potencial de rotação, definidas pelas equações,

$$V(\theta) = - \int_{\theta_0}^{\theta} N_z(\theta') d\theta', \quad (5.14)$$

$$N_z = - \frac{dV}{d\theta}, \quad (5.15)$$

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2, \quad (5.16)$$

não são apenas análogas às grandezas correspondentes, definidas pelas Eqs. (2.41), (2.47) e (2.5) para o movimento linear. De fato, elas são iguais às energias cinética e potencial, definidas nos Caps. 2 e 4, para o sistema de partículas que constitui o corpo rígido. A energia potencial definida pela Eq. (5.14), por exemplo, é o trabalho realizado contra as forças cujo torque é N_z , quando o corpo gira num ângulo $\theta - \theta_0$. A energia cinética definida pela Eq. (5.16) é exatamente a soma das energias cinéticas comuns do movimento das partículas que constituem o corpo. A demonstração desta afirmação é deixada como exercício.

5.3 O PÊNDULO SIMPLES

Como exemplo do tratamento do movimento de rotação, considere o movimento de um pêndulo simples, consistindo numa massa m suspensa num ponto fixo por meio de um fio ou de uma haste rígida e sem peso, de comprimento l . Como o fio suspende a massa m , deve-se supor que ele permanece esticado, de forma que a distância l de m a O permanece constante, por outro lado, não se pode tratar o sistema como se fosse rígido. Considere somente movimentos do pêndulo no plano vertical, para que se possa aplicar a teoria simples do movimento em torno de um eixo fixo que passa por O . Tem-se, então (Fig. 5.3),

$$I_z = ml^2, \quad (5.17)$$

$$N_z = -mgl \operatorname{sen} \theta, \quad (5.18)$$

onde o eixo z passa por O e é perpendicular ao plano em que o pêndulo oscila. O torque é considerado negativo, pois age numa tal direção que tende a diminuir o ângulo θ . Substituindo na equação do movimento (5.13), chega-se a

$$\ddot{\theta} = - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta. \quad (5.19)$$

Esta equação não é fácil de resolver. Se, entretanto, considerar-se somente pequenas oscilações do pêndulo (digamos, $\theta \ll \pi/2$), então $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$, podendo-se escrever

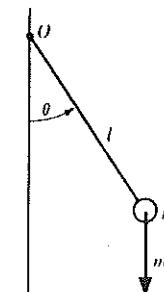


Fig. 5.3 Pêndulo simples.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (5.20)$$

Esta equação tem a mesma forma que a Eq. (2.89) para oscilador harmônico e sua solução é

$$\theta = \kappa \cos(\omega t + \beta), \quad (5.21)$$

onde

$$\omega = \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2}, \quad (5.22)$$

e k e β são constantes arbitrárias que determinam a amplitude e a fase da oscilação. Note que a freqüência de oscilação é independente da amplitude, considerando-se que esta seja suficientemente pequena, de forma que a Eq. (5.20) seja uma boa aproximação. Esta é a base para o uso do pêndulo na regulagem da velocidade de um relógio.

Pode-se tratar do problema do movimento para grandes amplitudes por meio da integral da energia. A energia potencial associada ao torque dado pela Eq. (5.18) é

$$\begin{aligned} V(\theta) &= - \int_{\theta_0}^{\theta} -mgl \operatorname{sen} \theta' d\theta' \\ &= -mgl \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde considera-se, por conveniência, $\theta_0 = \pi/2$. Poder-se-ia escrever $V(\theta)$ imediatamente como a energia potencial gravitacional da massa m , tendo o plano horizontal que passa por O como nível zero da energia potencial. A integral da energia é

$$\frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E. \quad (5.24)$$

Poder-se-ia provar que E é constante a partir da equação de movimento (5.13), mas não é necessário, pois a analogia descrita na seção anterior garante que todos os teoremas para o movimento linear numa dimensão são válidos nas formas análogas para o movimento de rotação em torno do eixo. Um gráfico da energia potencial $V(\theta)$ é mostrado na Fig. 5.4. Pode-se verificar que para $-mgl < E < mgl$, o movimento é oscilató-

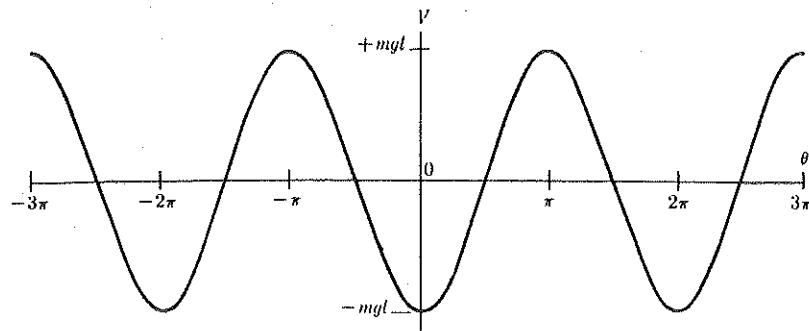


Fig. 5.4 Energia potencial para um pêndulo simples.

rio, tornando-se harmônico simples para E ligeiramente maior do que $-mgl$. Para $E > mgl$, o movimento é não-oscilatório; θ crescerá ou diminuirá sempre, com $\dot{\theta}$ oscilando entre um valor máximo e um mínimo. Fisicamente, quando $E > mgl$, o pêndulo tem suficiente energia para girar em torno de um círculo completo. (Neste caso, é claro que a massa deve estar presa a uma haste rígida em vez de a um fio, a menos que θ seja muito grande.) Este movimento é ainda periódico, pois o pêndulo realiza uma revolução completa cada vez que θ aumenta ou diminui de 2π . Em ambos os casos, a tentativa de resolver a Eq. (5.24) para θ leva à seguinte equação

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(E/mgl + \cos \theta)^{1/2}} = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (5.25)$$

A integral à esquerda deve ser calculada em termos de funções elípticas. O período de movimento pode ser obtido pela resolução da integral entre limites apropriados. Quando o movimento é oscilatório ($E < mgl$), o valor máximo k de θ é dado, de acordo com a Eq. (5.24), por

$$E = -mgl \cos k. \quad (5.26)$$

A Eq. (5.25), neste caso, torna-se

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(\cos \theta - \cos k)^{1/2}} = \left(\frac{2g}{l}\right)^{1/2} t, \quad (5.27)$$

que também pode ser escrita como,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[\sin^2(k/2) - \sin^2(\theta/2)]^{1/2}} = 2\left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (5.28)$$

O ângulo θ oscila entre os limites $\pm k$. Introduzindo-se uma nova variável φ que varia de 0 a 2π , num ciclo completo de oscilação de θ :

$$\sin \varphi = \frac{\sin \theta/2}{\sin k/2} = \frac{1}{a} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (5.29)$$

onde

$$a = \sin \frac{k}{2}. \quad (5.30)$$

Com estas substituições, a Eq. (5.28) pode ser escrita como

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - a^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t, \quad (5.31)$$

onde, por conveniência, considera-se $\theta_0 = 0$. A integral agora tem a forma-padrão das integrais elípticas. Quando a é pequeno, o integrando pode ser expandido numa série de potências em a^2 :

$$\int_0^{\varphi} [1 + \frac{1}{2}a^2 \sin^2 \varphi + \dots] d\varphi = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (5.32)$$

Esta série pode ser integrada termo a termo:

$$\varphi + \frac{1}{8}a^2(2\varphi - \sin 2\varphi) + \dots = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t. \quad (5.33)$$

O período do movimento é obtido fazendo-se $\varphi = 2\pi$:

$$\tau = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{a^2}{4} + \dots\right). \quad (5.34)$$

Assim, quando a amplitude de oscilação se torna grande, o período se torna ligeiramente maior do que para pequenas oscilações, uma previsão que pode ser verificada com facilidade, experimentalmente, montando-se dois pêndulos do mesmo comprimento e fazendo com que oscilem com amplitudes diferentes. A Eq. (5.33) pode ser resolvida aproximadamente para se obter φ , usando-se o método das aproximações sucessivas. O resultado é, em seguida, substituído na Eq. (5.29), da qual se pode obter θ por aproximações sucessivas. O resultado, até a segunda ordem na aproximação, é

$$\theta \doteq \left(k + \frac{k^3}{192}\right) \sin \omega' t + \frac{k^3}{192} \sin 3\omega' t, \quad (5.35)$$

onde

$$\omega' = \frac{2\pi}{\tau} = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{k^2}{16} + \dots\right). \quad (5.36)$$

Desprezando-se os termos em k^2 e k^3 , esta solução concorda com a Eq. (5.21). Para grandes amplitudes em segunda aproximação, a freqüência é ligeiramente mais baixa do que em pequenas amplitudes, e o movimento de θ contém, embora pequeno, um termo do terceiro harmônico.

5.4 O PÊNDULO COMPOSTO

Um corpo rígido suspenso e livre para balançar em torno de um eixo é chamado *pêndulo composto*. Admite-se que o eixo não passa pelo centro de massa, e que se

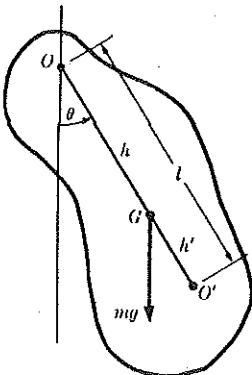


Fig. 5.5 Pêndulo composto.

especifica a posição do corpo pelo ângulo θ , entre a vertical e uma linha perpendicular ao eixo e que passa pelo ponto O , e passando pelo centro de massa G (Fig. 5.5). Para calcular o torque total exercido pela gravidade, antecipa-se um teorema, que será demonstrado mais tarde [Eq. (5.103)]. Ele diz que o torque total da força da gravidade será o mesmo se se considerar que a força gravitacional total esteja aplicada no centro de massa G . Usando as Eqs. (5.12) e (5.13), tem-se

$$Mk_O^2\ddot{\theta} = -Mgh \operatorname{sen} \theta, \quad (5.37)$$

onde h é a distância \overline{OG} . Esta equação é idêntica à Eq. (5.19) para pêndulo simples de comprimento l , fazendo-se

$$l = \frac{k_O^2}{h}. \quad (5.38)$$

O ponto O' situado a uma distância l a partir de O , ao longo da linha que passa pelo centro de massa G , é chamado *centro de oscilação*. Se toda a massa M estivesse concentrada em O' , o movimento do pêndulo seria idêntico ao movimento real, para quaisquer condições iniciais. Se a distância $\overline{O'G}$ for h' , tem-se

$$l = h + h', \quad (5.39)$$

$$hh' = k_O^2 - h^2. \quad (5.40)$$

Na próxima seção, será mostrado [Teorema (5.81)] que o momento de inércia em relação a um eixo é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo, que passa pelo centro de massa G mais Mh^2 , onde h é a distância do eixo a G . Se k_G for o raio de giração em relação a G , tem-se então

$$k_O^2 = k_G^2 + h^2, \quad (5.41)$$

Logo, a Eq. (5.40) torna-se

$$hh' = k_G^2. \quad (5.42)$$

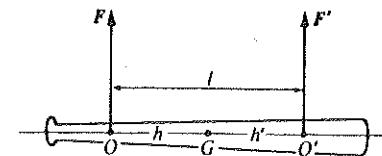


Fig. 5.6 Corpo rígido com eixo fixo em O recebe um impulso em O' .

Como esta equação é simétrica em h e h' , conclui-se que se o corpo fosse suspenso por um eixo paralelo passando por O' , o centro de oscilação estaria em O . A aceleração da gravidade g pode ser determinada acuradamente medindo-se o período de oscilações de um pêndulo e usando a Eq. (5.22). Usando-se o pêndulo composto, o raio de giração tem de ser conhecido, ou o período medido em relação a dois eixos (de preferência O e O'), de forma que o raio de giração possa ser eliminado destas equações.

Um problema relacionado com o ângulo composto é o seguinte: considere um corpo (Fig. 5.6) que pode girar livremente em torno de um eixo fixo que passa por O . Considere que ele recebe um impacto no ponto O' a uma distância l do eixo, e que a direção do impacto é perpendicular à linha $\overline{OO'}$. Escolha O' de maneira que a linha $\overline{OO'}$ passe pelo centro de massa G , sendo h e h' as distâncias \overline{OG} e $\overline{O'G}$. O impulso fornecido no ponto O' pela força F' durante o impacto é

$$J' = \int F' dt. \quad (5.43)$$

No instante do impacto, uma força F deverá, em geral, ser exercida sobre o corpo no ponto O sobre o eixo para manter O fixo. O impulso fornecido ao corpo no ponto O é

$$J = \int F dt. \quad (5.44)$$

Como o interesse aqui é apenas em seu movimento imediatamente após o impacto, desprezam-se todas as forças que atuam sobre os corpos, com exceção dos dois impulsos F e F' . Para determinar o impulso J e, em particular, determinar em que condições $J = 0$, usam-se os Teoremas do Momento Linear e do Momento Angular.

O Teorema do Momento Linear para o componente P' do momento linear do corpo na direção de F' é:

$$\frac{dP'}{dt} = \frac{d}{dt}(Mh\dot{\theta}) = F + F', \quad (5.45)$$

onde $\dot{\theta}$ é a velocidade angular do corpo em relação ao ponto O . A partir deste resultado, tem-se, para o momento linear imediatamente após o impacto,

$$Mh\dot{\theta} = J + J', \quad (5.46)$$

supondo-se que o corpo estava inicialmente em repouso. O Teorema do Momento Angular em relação a O é:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(Mk_O^2\dot{\theta}) = F'l. \quad (5.47)$$

Integrando, tem-se o seguinte resultado para o momento angular imediatamente após o impacto,

$$Mk_O^2\dot{\theta} = J'l. \quad (5.48)$$

Usando uma das Eqs. (5.46) e (5.48) para eliminar $\dot{\theta}$ da outra, obtém-se

$$hl = k_O^2 \left\{ 1 + \frac{J}{J'} \right\}. \quad (5.49)$$

Para determinar J : de acordo com a terceira lei de Newton, um impulso $-J$, igual e oposto, é fornecido pelo corpo ao eixo no ponto O . Para saber em que condições não haverá força impulsiva sobre o eixo no ponto O , no instante do impacto, isto é, $J = 0$:

$$hl = k_O^2. \quad (5.50)$$

Esta equação é idêntica à (5.38) e pode também ser expressa de forma simétrica [Eq. (5.42)]:

$$hh' = k_G^2. \quad (5.51)$$

O ponto O' em que o impacto deve ocorrer para que nenhum impulso seja sentido no ponto O é chamado *centro de percussão* em relação a O . Verifica-se que o centro de percussão é o mesmo que o centro de oscilação em relação a O , e que O é o centro de percussão em relação a O' . Este problema interessa ao rebatedor, no jogo de beisebol, ao tentar rebater a bola com o bastão. Ele deve acertar a bola no centro de percussão (O') em relação às suas mãos (em O). Se ele acertar muito longe do centro de percussão, o impulso será transmitido às suas mãos pelo bastão. Se um corpo em repouso e que pode se mover livremente no espaço recebe um impulso J' no ponto O' , pode-se verificar que o seu movimento inicial deve ser uma rotação em torno do centro de percussão O em relação a O' . Para que ele comece a girar em torno de qualquer outro ponto O , é necessário haver um impulso J no ponto O . Sua velocidade angular inicial $\dot{\theta}$ em torno de O pode ser determinada a partir da Eq. (5.46) (com $J = 0$). Certamente, se o corpo estiver livre, seu centro de massa se moverá com velocidade constante $h\dot{\theta}$ depois de receber o impulso (se a gravidade for desprezada), e girará com velocidade angular $\dot{\theta}$. O ponto O não permanecerá fixo, neste caso, embora a sua velocidade inicial, imediatamente após o impulso, seja igual a zero.

5.5 CÁLCULO DO CENTRO DE MASSA E DO MOMENTO DE INÉRCIA

Na Seç. 4.1, apresentou-se a seguinte definição de centro de massa para um sistema de partículas:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (5.52)$$

Para um corpo sólido, a soma pode ser expressada como integral:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \iiint \rho \mathbf{r} dV, \quad (5.53)$$

ou em forma de componentes,

$$X = \frac{1}{M} \iiint \rho x dV, \quad (5.54)$$

$$Y = \frac{1}{M} \iiint \rho y dV, \quad (5.55)$$

$$Z = \frac{1}{M} \iiint \rho z dV. \quad (5.56)$$

As integrais podem ser limitadas ao volume do sólido, ou estendidas para todo espaço, pois $\rho = 0$ fora do corpo. Estas equações definem o ponto G do corpo cujas coordenadas são (x, y, z) . Prova-se, inicialmente, que o ponto G definido desta maneira é independente da escolha do sistema de coordenadas. Como a Eq. (5.52), ou a (5.53), está em forma vetorial e não faz referência a nenhum sistema particular de eixos, a definição de G não dependerá certamente da escolha particular da direção dos eixos. Deve-se, entretanto, provar que G também é independente da escolha da origem. Considere um sistema de partículas e que a partícula genérica m_i seja localizada pelo vetor \mathbf{r}_i e \mathbf{r}'_i em relação a duas origens O e O' quaisquer. Se \mathbf{a} for o vetor de O a O' , a relação entre \mathbf{r}_i e \mathbf{r}'_i será (Fig. 5.7)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}. \quad (5.57)$$

Os centros de massa G e G' em relação a O e O' são localizados pelos vetores \mathbf{R} e \mathbf{R}' , onde \mathbf{R}' é definido por

$$\mathbf{R}' = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i. \quad (5.58)$$

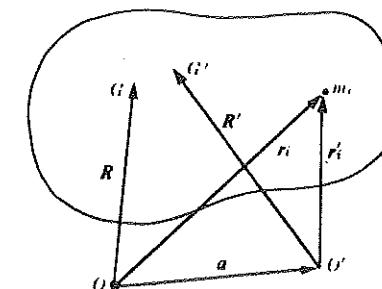


Fig. 5.7 Localização do centro de massa em relação a duas origens diferentes.

Usando a Eq. (5.57), pode-se escrever a Eq. (5.52):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i + \frac{1}{M} M \mathbf{a} \sum_i m_i \\ &= \mathbf{R}' + \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Logo \mathbf{R} e \mathbf{R}' são vetores que localizam o mesmo ponto em relação a O e O' de tal forma que G e G' estão no mesmo ponto.

Teoremas gerais como o anterior podem ser demonstrados para um sistema de partículas ou para um corpo caracterizado por uma densidade ρ . Qualquer que seja o ponto de vista adotado, pode-se dar uma demonstração paralela, desde que se admita o outro ponto de vista.

Evita-se, freqüentemente, maior parte do trabalho envolvido no cálculo da posição do centro de massa, a partir das Eqs. (5.54), (5.55) e (5.56), usando-se alguns teoremas simplificadores, inclusive o teorema demonstrado acima, que permite a livre escolha dos eixos coordenados e da origem. Inicialmente, são os seguintes os teoremas relacionados aos corpos simétricos.

Teorema *Se um corpo for simétrico em relação a um plano, o seu centro de massa estará nesse plano.* (5.60)

Quando se diz que um corpo é simétrico em relação a um plano, significa que, para cada partícula situada num dos lados do plano, existe uma outra partícula de massa igual localizada na sua imagem no espelho, em relação ao plano. Para massas distribuídas continuamente, isto significa que a densidade em cada ponto é igual à densidade no ponto imagem em relação ao plano. Escolhendo-se a origem no plano de simetria e considerando-se que o plano de simetria seja xy , então – para calcular Z usa-se a Eq. (5.56) [ou (5.52)], para cada elemento de volume (ou partícula) em um ponto (x, y, z) acima do plano xy – existe, por simetria, um elemento de volume igual no ponto $(x, y, -z)$ abaixo no plano xy , e as atribuições desses dois elementos para a integral na Eq. (5.56) se cancelarão. Logo $Z = 0$ e o centro de massa estará no plano xy . Este resultado prova o Teorema (5.60), que tem alguns corolários óbvios:

Se um corpo for simétrico em relação a dois planos, o seu centro de massa estará na linha de interseção dos planos. (5.61)

Se um corpo for simétrico em relação a um eixo, o seu centro de massa estará neste eixo. (5.62)

Se um corpo for simétrico em relação a três planos que têm um ponto comum, este ponto será seu centro de massa. (5.63)

Se um corpo tiver simetria esférica em relação a um ponto (isto é, se a densidade depender de sua distância a este ponto), este ponto será seu centro de massa. (5.64)

Estes teoremas permitem, em muitos casos, localizar imediatamente o centro de massa, mas, em outros casos, reduzir o problema ao cálculo de apenas uma ou duas coordenadas do centro de massa. Deve-se sempre procurar as simetrias e usá-las para simplificar o problema. Ocorrerão, certamente, outros casos não incluídos nestes teoremas (por exemplo, o paralelepípedo), onde será evidente que algumas integrais serão iguais ou se cancelarão, e o centro de massa poderá ser determinado sem calculá-las.

Outro teorema que freqüentemente simplifica a localização do centro de massa diz o seguinte: se um corpo for composto de duas ou mais partes cujos centros de massa são conhecidos, então o centro de massa do corpo composto poderá ser calculado, considerando-se suas partes componentes como partículas localizadas nos centros de massa respectivos. Considere um corpo, ou sistema de partículas, composto de n partes de massas M_1, \dots, M_n e que a parte genérica M_k seja composta de N_k partículas de massas m_{kl}, \dots, m_{kN_k} , localizadas nos pontos $\mathbf{r}_{kl}, \dots, \mathbf{r}_{kN_k}$. Logo o centro de massa da parte M_k estará localizado no ponto

$$\mathbf{R}_k = \frac{1}{M_k} \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} \mathbf{r}_{kl}, \quad (5.65)$$

e

$$M_k = \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl}. \quad (5.66)$$

O centro de massa de todo o corpo estará localizado no ponto

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} \mathbf{r}_{kl}, \quad (5.67)$$

onde

$$M = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl}. \quad (5.68)$$

Pela Eq. (5.65), a Eq. (5.67) torna-se

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n M_k \mathbf{R}_k, \quad (5.69)$$

e pela Eq. (5.66), a Eq. (5.68) torna-se

$$M = \sum_{k=1}^n M_k. \quad (5.70)$$

As Eqs. (5.69) e (5.70) são as expressões matemáticas do teorema a ser demonstrado.

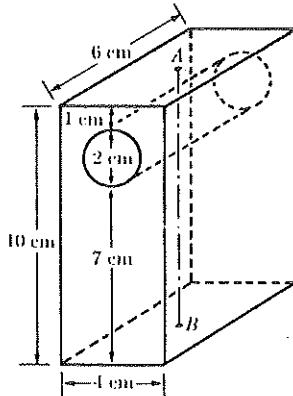


Fig. 5.8

Como exemplo, considere um bloco retangular no qual foi furado um buraco cilíndrico, conforme é mostrado na Fig. 5.8. Através da simetria em relação aos dois planos verticais paralelos às suas faces, pode-se concluir que o centro de massa está na linha vertical \overline{AB} que passa pelos centros das faces superior e inferior. Considere que o centro de massa do bloco esteja a uma distância Z abaixo de A , e que a densidade seja ρ . Se o buraco não existisse, a massa do bloco seria $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times \rho$, e o seu centro de massa estaria no ponto médio de \overline{AB} , a 5 cm de A . A massa do material retirada do bloco para fazer o buraco é $\pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} \times \rho$, e o seu centro de massa, antes de ser removido, estava sobre \overline{AB} e 2 cm abaixo de A . Logo, o Teorema (5.69) apresentado anteriormente permite escrever:

$$(6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times \rho) \times 5 \text{ cm} = (\pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} \times \rho) \times 2 \text{ cm} + 6 \text{ cm} \times (4 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} - \pi \text{ cm}^2) \times \rho \times Z.$$

A solução para Z será

$$Z = \frac{6 \times 4 \times 10 \times 5 - \pi \times 6 \times 2}{6 \times (4 \times 10 - \pi)} \text{ cm.}$$

Como segundo exemplo, determine-se o centro de massa de um hemisfério de raio a . Se a densidade for uniforme e utilizando-se as simetrias, verifica-se que o centro de massa está no eixo tomado como o eixo z . Então, só é preciso calcular a integral da Eq. (5.56), que pode ser resolvida em coordenadas retangulares, cilíndricas ou esféricas (Fig. 5.9).

$$\text{Retangulares: } Z = \frac{1}{M} \int_{z=0}^a \int_{y=-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_{x=-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} \rho z \, dx \, dy \, dz.$$

$$\text{Cilíndricas: } Z = \frac{1}{M} \int_{z=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} \rho z r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

$$\text{Esféricas: } Z = \frac{1}{M} \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\rho r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

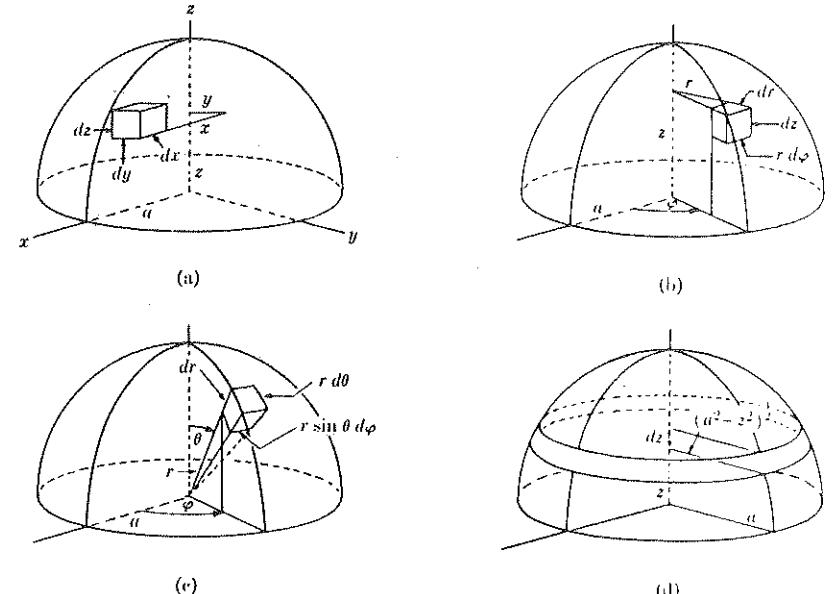


Fig. 5.9 Métodos de integração de um hemisfério.

Qualquer uma dessas expressões pode ser usada na determinação de Z , para qualquer distribuição de densidade. Se ρ for uniforme, pode-se construir o hemisfério a partir de anéis ou discos e economizar uma ou duas integrações. Por exemplo, construindo-se o hemisfério a partir de discos perpendiculares ao eixo z (o que equivale a resolver a integração em r e φ , em coordenadas cilíndricas), pode-se escrever

$$Z = \frac{1}{M} \int_{z=0}^a z \rho \pi (a^2 - z^2) \, dz = \left(\frac{1}{2} \pi a^3 \rho \right) \left(\frac{\pi a^4 \rho}{4} \right) = \frac{3}{8} a, \quad (5.71)$$

onde o integrando é $z\rho$ multiplicado pelo volume de um disco de espessura dz e raio $(a^2 - z^2)^{1/2}$.

Quando a densidade ρ é uniforme, o centro de massa do corpo só depende de sua forma geométrica, e é dado por

$$R = \frac{1}{V} \iiint_V r \, dV. \quad (5.72)$$

O ponto G cuja coordenada R é dada pela Eq. (5.72) chama-se *centróide* do volume V . Substituindo-se o volume V por uma área A ou uma curva C , no espaço, obtém-se as fórmulas para o centróide de uma área ou de uma curva:

$$R = \frac{1}{A} \iint_A r dA, \quad (5.73)$$

$$R = \frac{1}{s} \int_C r ds, \quad (5.74)$$

onde s é o comprimento da curva C . Os seguintes teoremas, desenvolvidos por Pappus, relacionam o centróide de uma área ou de uma curva com o volume ou área varrida, quando esta área ou curva gira em torno de um eixo.

Teorema 1 *Se uma curva plana girar em torno de um eixo situado em seu próprio plano e que a intercepte, a área da superfície de revolução gerada será igual ao comprimento da curva multiplicado pelo comprimento da trajetória percorrida por seu centróide.* (5.75)

Teorema 2 *Se uma área plana girar em torno de um eixo situado em seu próprio plano e que não a intercepte, o volume gerado será igual à área multiplicada pelo comprimento da trajetória percorrida por seu centróide.* (5.76)

A demonstração do Teorema 1 é muito simples, quando se usa a notação indicada na Fig. 5.10:

$$A = \int_C 2\pi y ds = 2\pi \int_C y ds = 2\pi Ys, \quad (5.77)$$

onde Y é a coordenada y do centróide da curva C , e s , o comprimento. A prova do Teorema 2 é similar e será deixada para o leitor. Estes teoremas podem ser usados na determinação de áreas e volumes de figuras simétricas em relação a um eixo, quando os centróides das curvas ou áreas geratrizess forem conhecidas, e vice-versa. Por exemplo, pode-se determinar a posição do centro de massa de uma superfície semicircular de raio a , usando-se o segundo teorema de Pappus. Se o disco girar em torno de seu diâmetro, o volume da esfera gerada, segundo o teorema de Pappus (Fig. 5.11), será

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \left(\frac{\pi a^2}{2}\right)(2\pi Y),$$

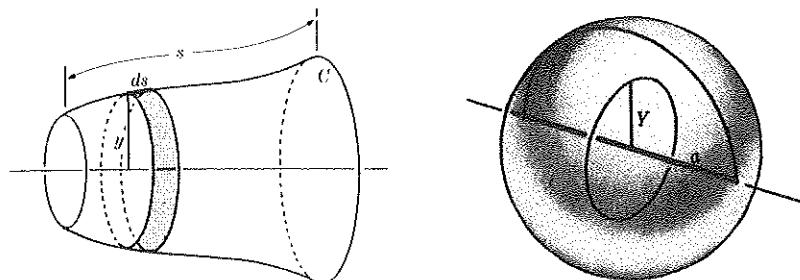


Fig. 5.10 Primeiro teorema de Pappus.

Fig. 5.11 Esfera gerada pela rotação de um semicírculo.

a partir da qual se obtém

$$Y = \frac{4a}{3\pi}. \quad (5.78)$$

O momento de inércia I do corpo em relação a um eixo é definido de acordo com a Eq. (5.10) por:

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (5.79)$$

ou $I = \iiint \rho r^2 dV,$ (5.80)

onde r é a distância de cada ponto ou partícula do corpo a um eixo conhecido. Inicialmente serão demonstrados alguns teoremas que simplificam os cálculos dos momentos de inércia.

Teorema dos eixos paralelos. *O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo centro de massa, mais o momento de inércia em relação ao eixo dado, considerando-se que toda a massa do corpo esteja concentrada no centro de massa.* (5.81)

Para demonstrar este teorema, considere que I_O seja o momento de inércia em relação ao eixo z através do ponto O , e I_G seja o momento de inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo centro de massa G . Considere que \mathbf{r} e \mathbf{r}' sejam os vetores de um ponto qualquer P do corpo, a partir de O e G , respectivamente, e que \mathbf{R} seja o vetor de O a G . Os componentes destes vetores serão denominados (x, y, z) , (x', y', z') e (X, Y, Z) . Então, de acordo com a (Fig. 5.12),

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R},$$

Pode-se verificar que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x' + X)^2 + (y' + Y)^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + X^2 + Y^2 + 2Xx' + 2Yy', \end{aligned}$$

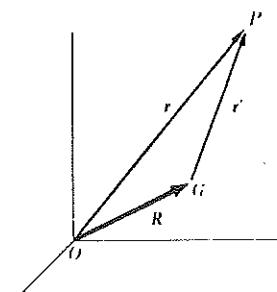


Fig. 5.12 Localização de um ponto P em relação aos pontos O e G .

assim o momento de inércia I_O será

$$\begin{aligned} I_O &= \iiint (x^2 + y^2) \rho dV \\ &= \iiint (x'^2 + y'^2) \rho dV + (X^2 + Y^2) \iiint \rho dV + 2X \iiint x' \rho dV \\ &\quad + 2Y \iiint y' \rho dV. \end{aligned} \quad (5.82)$$

A primeira integral do segundo membro é I_G e a segunda é a massa total do corpo, M . As últimas duas integrais são as mesmas que aparecem nas Eqs. (5.54) e (5.55), e definem as coordenadas x e y do centro de massa em relação a G . Como G é o centro de massa, estas integrais são iguais a zero, tendo-se

$$I_O = I_G + M(X^2 + Y^2). \quad (5.83)$$

Esta é a fórmula matemática do Teorema dos Eixos Paralelos. Conhecido o momento de inércia em relação a um eixo qualquer, e podendo-se localizar o centro de massa, usa-se este teorema na determinação do momento de inércia em relação a qualquer outro eixo paralelo.

Pode-se obter o momento de inércia de um conjunto de corpos em relação a um eixo qualquer, somando-se os momentos de inércia de suas partes em relação ao mesmo eixo, uma afirmação que se torna óbvia a partir da definição de momento de inércia. Este fato pode ser usado da mesma maneira que o resultado análogo obtido para o centro de massa de um conjunto de corpos.

Um corpo cuja massa está concentrada num plano é chamado *lâmina plana*, para o qual é válido o seguinte teorema:

Teorema dos eixos perpendiculares. A soma dos momentos de inércia de uma lâmina plana em relação a dois eixos perpendiculares, no plano da lâmina, é igual ao momento de inércia em relação a um eixo que passa pela interseção e é perpendicular à lâmina. (5.84)

A demonstração deste teorema é muito simples. Considere uma partícula de massa m no plano xy . Os seus momentos de inércia em relação aos eixos x e y são

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2. \quad (5.85)$$

Somando estes resultados, obtém-se o momento de inércia de m em relação ao eixo z :

$$I_x + I_y = m(x^2 + y^2) = I_z. \quad (5.86)$$

Como o momento de inércia de uma lâmina, no plano xy , é a soma dos momentos de inércia das partículas que compõem a lâmina, demonstra-se assim o Teorema (5.84).

Ilustram-se estes teoremas determinando o momento de inércia de um anel circular de raio a e massa M , no plano xy (Fig. 5.13). O momento de inércia em relação ao eixo z , perpendicular ao plano do anel e que passa pelo seu centro, pode ser calculado facilmente e o resultado é:

$$I_z = Ma^2. \quad (5.87)$$

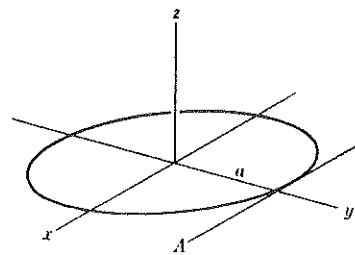


Fig. 5.13 Um anel de raio a .

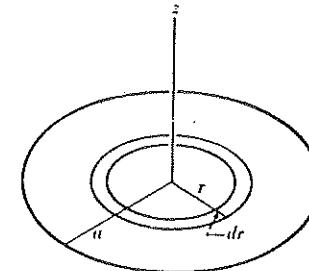


Fig. 5.14 Determinação do momento de inércia de um disco.

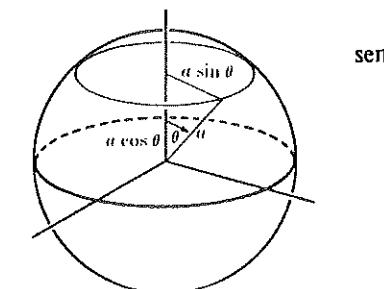


Fig. 5.15 Determinação do momento de inércia de uma esfera sólida.

Os momentos de inércia I_x e I_y são evidentemente iguais; usando-se o Teorema (5.84), tem-se, então,

$$I_x = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{2}Ma^2. \quad (5.88)$$

O momento de inércia em relação ao eixo A tangente ao anel, de acordo com o Teorema dos Eixos Paralelos, é,

$$I_A = I_x + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2. \quad (5.89)$$

O momento de inércia de um corpo sólido pode ser obtido em qualquer sistema de coordenadas apropriado ao problema a ser resolvido. Se o corpo for uniforme e tiver forma simples, seu momento de inércia poderá ser calculado considerando-o construído a partir de barras, anéis, discos etc. Por exemplo, determina-se o momento de inércia de um disco circular em relação a um eixo perpendicular à sua superfície e passando por seu centro considerando-se o disco construído a partir de anéis (Fig. 5.14) e usando-se a Eq. (5.87):

$$I_z = \int_0^a r^2 \rho 2\pi r dr = \frac{\pi a^4 \rho}{2} = \frac{1}{2}Ma^2. \quad (5.90)$$

O momento de inércia de uma esfera sólida pode ser calculado a partir da Eq. (5.90), considerando-se a esfera construída a partir de discos (Fig. 5.15):

$$I = \int_{\pi}^0 \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} (\rho n a^2 \operatorname{sen}^2 \theta) d(a \cos \theta) = \frac{8\pi\rho a^5}{15} = \frac{2}{5} M a^2. \quad (5.91)$$

Um corpo que tenha um pedaço cortado pode ser tratado, considerando-se que o seu momento de inércia seja igual ao momento de inércia do corpo original menos o momento de inércia do pedaço cortado, desde que todos os momentos sejam calculados, logicamente, em relação ao mesmo eixo.

5.6 ESTÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS

As equações do movimento de um corpo rígido são as Eqs. (5.4) e (5.5):

$$M\ddot{R} = \sum_i F_i^e, \quad (5.92)$$

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum_i N_{io}^e. \quad (5.93)$$

A Eq. (5.92) determina o movimento do centro de massa, localizado pelo vetor R , em termos da soma de todas as forças externas exercidas sobre o corpo. A Eq. (5.93) determina o movimento de rotação em relação ao ponto O , que pode ser o centro de massa ou um ponto fixo no espaço, em termos do torque externo total em relação ao ponto O . Assim, conhecendo-se a força externa total exercida sobre o corpo rígido e o torque externo total em relação a um ponto apropriado, o seu movimento estará determinado. Isto não seria verdade se o corpo não fosse rígido, pois, neste caso, ele se deformaria sob a ação das forças externas e a deformação dependeria dos pontos particulares em que as forças foram aplicadas. Como nesta seção e preocupação é somente com as forças externas, omite-se o índice e . Será necessário fornecer apenas o torque total em torno de um ponto O qualquer, pois o torque em relação a qualquer outro ponto O' pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$\sum_i N_{io'} = \sum_i N_{io} + (r_o - r_{o'}) \times \sum_i F_i, \quad (5.94)$$

onde r_o e $r_{o'}$ são vetores desenhados a partir dos pontos O e O' até uma origem conveniente, isto é, o torque total em relação a O' é o torque total em relação a O mais o torque em relação a O' se a força total estiver agindo em O . A demonstração da Eq. (5.94) é muito simples. Considere que r_i seja o vetor da origem ao ponto em que F_i age. Então,

$$\begin{aligned} \sum_i N_{io'} &= \sum_i (r_i - r_{o'}) \times F_i \\ &= \sum_i (r_i - r_o + r_o - r_{o'}) \times F_i \\ &= \sum_i (r_i - r_o) \times F_i + \sum_i (r_o - r_{o'}) \times F_i \\ &= \sum_i N_{io} + (r_o - r_{o'}) \times \sum_i F_i. \end{aligned}$$

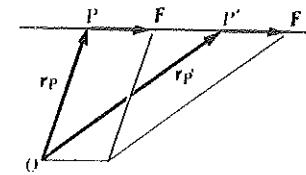


Fig. 5.16 O torque é independente do ponto, ao longo da linha de ação, em que a força age.

Se, em particular, o corpo rígido estiver em repouso, os primeiros membros das Eqs. (5.92) e (5.93) serão iguais a zero, tendo-se

$$\sum_i F_i = 0, \quad (5.95)$$

$$\sum_i N_i = 0. \quad (5.96)$$

As forças e os torques externos devem satisfazer estas condições para que o corpo rígido fique em equilíbrio. Estas condições não são suficientes para garantir que o corpo esteja em repouso, pois ele pode estar em movimento de translação e rotação uniformes, mas se inicialmente estiver em repouso, assim permanecerá se estas condições forem satisfeitas. A condição para que o torque, na Eq. (5.96), seja igual a zero em relação a qualquer ponto, de acordo com a Eq. (5.94), é que a Eq. (5.95) seja válida.

Para se calcular o torque devido à força F , é necessário conhecer além do vetor F (módulo e direção), o ponto P do corpo em que a força age. Mas desenhando-se uma linha através de P e na direção de F , então se F agir em outro ponto qualquer P' desta linha, o seu torque será o mesmo, pois, de acordo com a definição do produto vetorial, pode-se verificar (Fig. 5.16) que

$$r_P \times F = r_{P'} \times F. \quad (5.97)$$

(As áreas dos paralelogramas envolvidos são iguais.) A linha que atravessa P na direção de F chama-se *linha de ação* da força. Para se calcular os torques, é conveniente lembrar que se pode considerar a força como exercida em qualquer ponto da linha de ação. Faz-se, às vezes, uma distinção, em relação a este aspecto, entre vetores "livres" e vetores "deslizantes", em cuja classificação a força é um vetor deslizante. A terminologia pode tornar-se confusa, no entanto, pelo menos no que concerne ao movimento do centro de massa [Eq. (5.92)], a força é um vetor "livre", isto é, pode atuar em qualquer lugar, enquanto no cálculo dos torques a força é um vetor "deslizante"; mas, para um corpo não rígido, cada força deve ser localizada no ponto em que age. A melhor definição é a apresentada na Seç. 3.1, que diz que um vetor é uma grandeza que tem módulo, direção e sentido, sem referência a qualquer localização particular no espaço. Então, no caso da força, para algumas aplicações, é preciso especificar não somente o vetor F , mas também o ponto ou a linha em que a força age.

Um teorema devido a Varignon estabelece que, se $C = A + B$, então o momento de C em relação a um ponto qualquer é igual à soma dos momentos de A e B , se A , B e

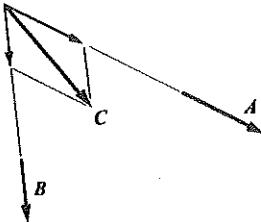


Fig. 5.17 Força C cujo torque é a soma dos torques de A e B .

C agem no mesmo ponto. O teorema é uma consequência imediata da identidade de vetores dada pela Eq. (3.27):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{A} + \mathbf{r} \times \mathbf{B}, \quad \text{se} \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \quad (5.98)$$

Este teorema permite calcular o torque devido a uma força pela adição de seus componentes. Combinando-se o Teorema de Varignon com o resultado do parágrafo precedente, pode-se reduzir o torque devido às duas forças A e B agindo no plano, como é mostrado na Fig. 5.17, ao torque devido a uma única força C , pois ambas, A e B , podem ser consideradas como agindo na interseção das suas linhas de ação; então, a Eq. (5.98) permite somá-las. Poder-se-ia agora somar similarmente C a qualquer terceira força agindo no plano. Este processo pode ser continuado, enquanto as linhas de ação das forças que estão sendo somadas não forem paralelas, estando relacionado a um teorema mais geral (5.111), relativo a forças no plano, que será demonstrado mais adiante.

Como, para corpos rígidos, determina-se o movimento pela força total e pelo torque total, os dois sistemas de forças que agem no corpo serão chamados *equivalentes*, caso tenham a mesma força resultante e o mesmo torque total em torno de qualquer ponto. Segundo a Eq. (5.94), dois sistemas de forças são então equivalentes se tiverem a mesma força total e o mesmo torque total em relação a qualquer ponto. É importante conhecer, para qualquer sistema de forças, o sistema de forças equivalente mais simples.

Se um sistema de forças F_i que age nos pontos r_i for equivalente a uma única força exercida no ponto r , então a força F exercida em r é chamada *resultante* do sistema de forças F_i . Se F for a resultante do sistema de forças F_i , então deve-se ter:

$$F = \sum_i F_i, \quad (5.99)$$

$$(r - r_o) \times F = \sum_i (r_i - r_o) \times F_i, \quad (5.100)$$

onde r_o é um ponto qualquer em relação ao qual os momentos são calculados. De acordo com a Eq. (5.94), se a Eq. (5.99) for válida, e a Eq. (5.100) for válida para qualquer r_o , ela será válida para qualquer ponto r_o . A força $-F$ que age em r é chamada *equilibrante* do sistema; somando-se o equilibrante ao sistema de forças, as condições para o equilíbrio são satisfeitas.

Um exemplo de sistema de forças que tem uma resultante é o sistema de forças gravitacionais exercidas sobre um corpo próximo à superfície da Terra. Para mostrar que a resultante, neste caso, age no centro de massa, considere que a aceleração da gravidade seja g . Então, a força agindo sobre uma partícula m_i é

$$\mathbf{F}_i = m_i g. \quad (5.101)$$

A força total é

$$\mathbf{F} = \sum_i m_i \mathbf{g} = M \mathbf{g}, \quad (5.102)$$

onde M é a massa total. O torque total em relação ao ponto qualquer O , tendo O como origem, é

$$\begin{aligned} \sum_i N_{io} &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) \\ &= \sum_i (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}) \\ &= \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} \\ &= M \mathbf{R} \times \mathbf{g} \\ &= \mathbf{R} \times M \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

onde \mathbf{R} é o vetor de O ao centro de massa. Logo o torque total é dado pela força Mg agindo no centro de massa. Devido a este resultado, o centro de massa também é chamado *centro de gravidade*. Verificar-se-á, no próximo capítulo, que, em geral, este resultado só é válido em campo gravitacional uniforme, isto é, quando g é o mesmo em todos os pontos do corpo. Se o sistema de forças exercidas sobre um corpo rígido tiver uma resultante, as forças poderão ser substituídas por esta resultante na determinação do movimento do corpo.

Um sistema de forças cuja soma é igual a zero é chamado *conjugado*:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (5.104)$$

Um conjugado não tem evidentemente resultante, exceto no caso trivial em que o torque total também seja igual a zero; neste caso, a força resultante é igual a zero. De acordo com as Eqs. (5.94) e (5.104), um conjugado exerce o mesmo torque total em relação a qualquer ponto:

$$\sum_i N_{io} = \sum_i N_{io}. \quad (5.105)$$

Assim, um conjugado caracteriza-se por um vetor único, o torque total, e todos os conjugados com o mesmo torque total são equivalentes. O sistema mais simples equivalente a um dado conjugado, excluindo-se o caso trivial em que o torque total é igual a zero,

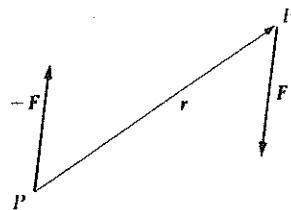


Fig. 5.18 Conjugado simples.

ro, é um par de forças iguais e opostas F e $-F$, agindo nos pontos P e P' , separados por um vetor r (Fig. 5.18) de modo que

$$\sum_i N_{io} = r \times F. \quad (5.106)$$

A Eq. (5.106) estabelece que o momento de um dado conjugado em relação a O é igual ao momento do conjugado $(F, -F)$ em relação a P' ; logo, os dois sistemas são equivalentes, pois não importa o ponto em relação ao qual o momento do conjugado é calculado. Não há meio para se determinar univocamente a força F e os pontos P e P' . Uma vez que somente o produto vetorial $r \times F$ é determinado pela Eq. (5.106), pode-se escolher arbitrariamente P ; pode-se escolher também arbitrariamente o vetor F , entretanto ele deve estar no plano perpendicular ao torque total; pode-se escolher ainda r como qualquer vetor pertencente ao mesmo plano e formando com F um paralelogramo cuja área é o módulo do vetor torque total.

O problema de determinação do sistema mais simples equivalente a um dado sistema de forças pode ser resolvido pelos seguintes teoremas.

Teorema 1 *Qualquer sistema de forças é equivalente a uma força que passa por um ponto arbitrário, mais um conjugado (um ou outro, ou ambos, podem ser iguais a zero).* (5.107)

Para demonstrar este teorema, é preciso mostrar como se determina a força equivalente e o conjugado. Considere que o ponto arbitrário P foi o escolhido, que a soma de todas as forças seja F e que o torque total em relação ao ponto P seja N . Logo, permitindo-se que a força F atue em P e somando um conjugado cujo torque seja igual a N , obtém-se um sistema equivalente ao original. Como o conjugado pode ser composto de duas forças, uma das quais pode agir num ponto arbitrário, pode-se escolher este ponto arbitrário como sendo o ponto P , e somá-lo a F para obter uma só força agindo em P mais a outra força do conjugado. Com isso demonstra-se o teorema.

Teorema 2 *Qualquer sistema de forças pode ser reduzido a um sistema equivalente contendo no máximo duas forças.* (5.108)

O teorema seguinte pode ser demonstrado de duas maneiras:

Teorema 3 *Uma força que não seja nula e um conjugado no mesmo plano (isto é, de modo que o vetor torque do conjugado seja perpendicular à força) têm uma resultante e, inversamente, esta força que não é nula é equivalente a uma força igual passando por um ponto arbitrário, mais um conjugado.* (5.109)

Como um conjugado com torque N é equivalente a um par de forças iguais e opostas, F e $-F$, onde F pode ser escolhida arbitrariamente no plano perpendicular a N , pode-se sempre escolher F igual à força mencionada no teorema. Além disso, pode-se escolher arbitrariamente o ponto de ação de F . Dada uma força não nula F exercida no ponto P e um conjugado, forma-se um conjugado $(F, -F)$ equivalente ao dado conjugado e permitindo que $-F$ atue em P ; F cancelará $-F$ em P e a outra força F do conjugado será a resultante. O inverso pode ser demonstrado por um argumento similar.

O outro método de demonstração é o seguinte: considere que F seja uma força exercida no ponto P e que o torque total do conjugado seja N . Então, o torque do sistema em relação ao ponto P será N . Considere um vetor r qualquer, no plano perpendicular a N , que forma com F um paralelogramo de área N ; considere que P' seja um ponto deslocado de P por um vetor r . Se a força F age em P' , o torque, em relação ao ponto P , será então igual a N e, assim, a força resultante será equivalente à força original F que age em P mais o conjugado. Pode-se combinar os Teoremas 1 e 3 para obter o

Teorema 4 *Qualquer sistema de forças é equivalente a uma força mais um conjugado cujo torque é paralelo à força. (Ou, alternativamente, qualquer sistema de forças é equivalente a um conjugado mais uma força perpendicular ao plano do conjugado.)* (5.110)

Para provar este teorema, usa-se o Teorema 1 para reduzir um sistema qualquer a uma força mais um conjugado, e o Teorema 3, para eliminar qualquer componente do torque do conjugado perpendicular à força. O ponto de aplicação da força, mencionado no Teorema 4, não é mais arbitrário, pois a sua linha de ação será fixada quando se aplicar o Teorema 3. Ou a força ou o conjugado deve ser anulado em casos especiais. No caso de um sistema de forças num plano, todos os torques, em relação a um ponto qualquer no plano, são perpendiculares ao plano. Logo o Teorema 4 reduz-se ao

Teorema 5 *Qualquer sistema de forças num plano tem uma resultante, a menos que seja um conjugado.* (5.111)

Na prática, a redução de um sistema de forças complexo a um sistema mais simples é um problema cuja solução mais simples é usualmente obtida através de aplicação engenhosa de vários teoremas e técnicas mencionadas nesta seção. Um método que funciona sempre e que, freqüentemente, é o mais simples, se o sistema de forças for muito complexo, é seguir o procedimento sugerido pelas demonstrações dos teoremas acima: Determine a força total F , pela adição de vetores, e o torque total N em relação a algum ponto P escolhido convenientemente. Então, a força F exercida em P , mais um conjugado de torque N , formam juntos um sistema equivalente ao

original. Se F for igual a zero, o sistema original reduz-se a um conjugado. Se N for perpendicular a F , então o sistema não terá resultante, o que se poderá verificar por um dos métodos indicados na demonstração do Teorema 3. Se N não for perpendicular a F , nem for igual a zero, então o sistema não terá resultante, e poderá ser reduzido a um sistema de duas forças, como foi feito na demonstração do Teorema 2, ou a uma única força e um conjugado cujo torque é paralelo à força, como foi feito no Teorema 4. Saber qual dessas reduções pode ser considerada a mais simples é somente uma questão de gosto ou de conveniência para os propósitos desejados. Na realidade, para a determinação do movimento de um corpo, a redução mais conveniente é certamente a redução dada pelo Teorema 1; quando se toma o ponto arbitrário como sendo o centro de massa.

5.7 ESTÁTICA DAS ESTRUTURAS

A determinação de forças exercidas sobre vários pontos de uma estrutura sólida é um problema da maior importância em todas as fases da Engenharia Mecânica. Existem duas razões principais para se estudar estas forças. Primeira, o engenheiro deve estar certo de que os materiais e a construção são capazes de suportar as forças exercidas sobre eles, sem quebrar ou comprimir e, freqüentemente, sem sofrer deformações permanentes. Segundo, como não existe material de construção realmente rígido e como eles se deformam elasticamente e, às vezes, plasticamente quando submetidos a determinadas forças, será necessário calcular a grandeza desta deformação e levá-la em conta, se for significativa, no projeto da estrutura. Quando o engenheiro considera a deformação ou a fragmentação de uma estrutura, não poderá, obviamente, tratá-la como um corpo rígido, mas deve interessar-se pelo sistema de forças real, que age sobre e no interior da estrutura. Os teoremas sobre sistemas equivalentes de forças não interessam diretamente na solução de tais problemas, mas freqüentemente são ferramentas úteis para a análise de partes estruturais, que, dentro de uma boa aproximação, podem ser consideradas rígidas ou, mesmo, sugerir outras distribuições equivalentes de forças, capazes de submeter a estrutura a tensões menos críticas porém mantenedoras de seu equilíbrio.

Se a estrutura estiver em repouso, as Eqs. (5.95) e (5.96) podem ser aplicadas em toda ou em qualquer parte dela. Entretanto, deve ser lembrado que as forças e torques que devem ser incluídos na soma são os externos a qualquer parte da estrutura considerada. Se a estrutura estiver em movimento, devem-se aplicar as equações mais gerais, (5.92) e (5.93). Ambos os pares de equações vetoriais representam, em geral, seis equações para os componentes, ou três, se todas as forças estiverem num plano. (Por que três?) Pode acontecer que a estrutura seja construída de maneira que, quando certas forças externas e seus pontos de aplicação são conhecidos, todas as forças e os torques internos agindo em cada parte da estrutura possam ser determinadas pela aplicação apropriada das Eqs. (5.95) e (5.96) (no caso de uma estrutura em repouso). Uma estrutura deste tipo é *estaticamente determinada*. Um exemplo elementar é mostrado na Fig. 5.19 que apresenta um mastro horizontal AB fixado no ponto A de uma parede com uma junta móvel e suportado por um cabo BC . A força W é exercida sobre o mas-

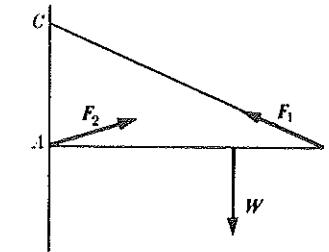


Fig. 5.19 O problema do mastro.

tro, conforme se vê na figura. Quando a força W e as dimensões da estrutura são conhecidas, pode-se aplicar as Eqs. (5.95) e (5.96) e calcular a força F_1 exercida pelo cabo no mastro e a força F_2 agindo sobre a junta. Encontram-se muitos exemplos de estruturas em equilíbrio estático em qualquer livro elementar de Física.

Suponha, agora, que a junta móvel em A , da Fig. 5.19, fosse substituída por uma junta fixa, de forma que o mastro pudesse suportar uma carga mesmo sem o cabo BC , admitindo-se que a junta A não se quebre. Então, dado somente o peso W , é evidentemente impossível determinar a força F_1 exercida pelo cabo; F_1 pode ter qualquer valor entre zero até um valor muito alto, dependendo da resistência do cabo e da tensão aplicada na junta em A . Este tipo de estrutura é *estaticamente indeterminado*. Portanto, uma estrutura estaticamente indeterminada é aquela em que as forças exercidas em suas partes não são completamente determinadas pelas forças externas, mas dependem também da distribuição de tensões dentro da estrutura. Para achar as forças internas de uma estrutura indeterminada, será preciso conhecer as características elásticas de suas partes e a maneira precisa com que estas partes são deformadas. Tais problemas, em geral, são muito mais difíceis do que aqueles que envolvem estruturas determinadas. Há muitos métodos de cálculo de forças internas em estruturas mecânicas que podem ser aplicados em problemas de Engenharia e muitos deles são úteis em grande variedade de problemas de Física.

5.8 TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Quando uma superfície imaginária corta uma parte qualquer de uma estrutura sólida (haste, corda, cabo ou viga), em geral, o material de um lado deste plano exerce uma força no material do outro lado, e vice-versa, de acordo com a terceira lei de Newton. Estas forças internas que agem através de qualquer superfície no interior do sólido são chamadas *tensões*. *Tensão* é, portanto, definida como a força, por unidade de área, exercida, através de uma superfície qualquer, no interior do material. Se, entretanto, o material localizado em cada lado da superfície empurrar o material do outro lado, exercendo uma força perpendicular à superfície, a tensão é chamada *compressão*. Se a força exercida através da superfície for paralela a ela, chama-se *tensão de cisalhamento*. A Fig. 5.20 ilustra estas tensões no caso de uma viga. O vetor denomina-

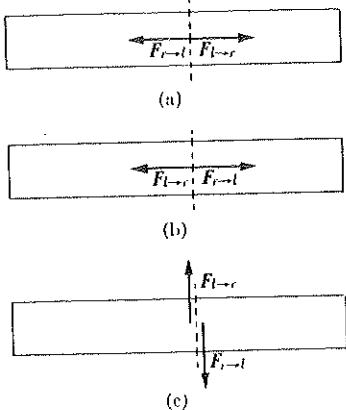


Fig. 5.20 Tensões sobre uma viga: (a) compressão; (b) tração; (c) cisalhamento.

do $F_{l \rightarrow r}$ representa a força exercida pela metade à esquerda da viga sobre a metade à direita, e a força igual e oposta $F_{r \rightarrow l}$ é exercida sobre o material à esquerda pelo material à direita. A tensão que forma um ângulo com a superfície pode ser decomposta em um componente de cisalhamento e um componente de tração ou compressão. No caso mais geral, a tensão pode agir em qualquer direção relativa à superfície, podendo depender da orientação da superfície. A descrição do estado de tensão de um material sólido no caso mais geral é muito complicada e se realiza mais facilmente quando se usam as técnicas matemáticas da Álgebra Tensorial, que será desenvolvida no Cap. 10. Consideram-se aqui somente os casos em que a tensão é uma compressão pura, independente da orientação da superfície, ou nos casos em que somente uma superfície é importante em um ponto qualquer, de tal maneira que um vetor tensão é suficiente para especificar a força, por unidade de área, através da superfície.

Considerando-se um volume pequeno ΔV , de qualquer forma, num material sob tensão, o material dentro do volume estará sob a ação de forças de tensão exercidas através da superfície pelo material que o envolve. Se o material não for perfeitamente rígido, será deformado de tal maneira que o material no volume ΔV poderá adquirir forma e tamanho diferentes daqueles que teria se não houvesse tensões. Esta mudança de forma e tamanho do material sob tensão é chamada *deformação*. A natureza e a extensão da deformação dependem da natureza e do valor das tensões e da natureza do material. Para se definir apropriadamente *deformação*, estabelecendo-se como medi-la, é preciso definir também cada espécie de deformação. A tração, por exemplo, produz aumento de dimensões do material, e a deformação pode ser definida como o acréscimo percentual no comprimento.

Se um fio metálico de comprimento l e área transversal A for esticado até o comprimento $l + \Delta l$ por uma força F , as definições de tensão e deformação são

$$\text{Tensão} = F/A, \quad (5.112)$$

$$\text{Deformação} = \Delta l/l. \quad (5.113)$$

Verifica-se experimentalmente que quando a deformação não é muito grande, a tensão é proporcional à deformação dos materiais sólidos. Esta é a Lei de Hooke, válida para todas as espécies de tensões e as deformações correspondentes, o que se torna também plausível através dos resultados teóricos sugeridos na discussão da Eq. (2.57). Logo, a razão entre a tensão e a deformação é constante para qualquer material, no caso de a tensão não ser muito grande. No caso de aumento de somente uma dimensão devido à tensão, esta razão é denominada *módulo de Young*, podendo ser escrita como

$$Y = \frac{\text{tensão}}{\text{deformação}} = \frac{F/l}{A \Delta l} \quad (5.114)$$

Se uma substância for submetida a um acréscimo de pressão Δp , a deformação resultante será uma variação de volume e a deformação será definida por

$$\text{deformação} = \frac{\Delta V}{V} \quad (5.115)$$

Neste caso, a razão entre a tensão e a deformação denomina-se *módulo volumétrico B*:

$$B = \frac{\text{tensão}}{\text{deformação}} = -\frac{\Delta p V}{\Delta V} \quad (5.116)$$

onde o sinal negativo é para tornar B positivo.

No caso de tensão de cisalhamento, a tensão é definida novamente pela Eq. (5.112), onde F é a força exercida através e paralela à área A . A tensão de cisalhamento resultante consiste no movimento de A paralelo a si próprio numa distância Δl , relativa ao plano paralelo a A situado a uma distância Δx de A (Fig. 5.21). A tensão de cisalhamento é, então, definida por

$$\text{deformação} = \frac{\Delta l}{\Delta x} = \operatorname{tg} \theta, \quad (5.117)$$

onde θ é o ângulo formado pela linha perpendicular a A que gira como resultado da ação da tensão de cisalhamento. A razão entre a tensão e a deformação neste caso é chamada *módulo de cisalhamento n*:

$$n = \frac{\text{tensão}}{\text{deformação}} = \frac{F}{A \operatorname{tg} \theta} \quad (5.118)$$

Um estudo extenso sobre os métodos, de Estática, utilizados na resolução de problemas está fora do alcance deste livro; aqui, nas três seções seguintes, o estudo restringe-se a três tipos especiais de problemas que ilustram a análise de um sistema físico, para determinação de forças que agem sobre suas partes e os efeitos destas forças na deformação do sistema.

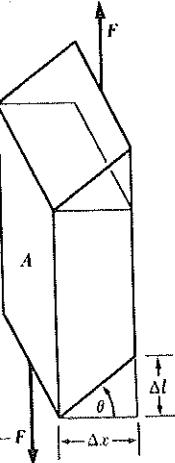


Fig. 5.21 Tensão de cisalhamento.

5.9 EQUILÍBRIO DE FIOS E DE CABOS FLEXÍVEIS

Fio flexível ideal é aquele que não sustenta tensões de compressão ou cisalhamento, nem qualquer momento de envergamento, de forma que a força exercida em qualquer de seus pontos será apenas uma tensão ao longo da tangente ao fio nesse ponto. As correntes e os cabos usados em muitas estruturas podem, na maioria dos propósitos, ser considerados como fios flexíveis ideais.

Considere um problema muito simples em que um fio de peso desprezível está suspenso entre dois pontos, P_0 e P_2 , e a força F age sobre o fio no ponto P_1 (Fig. 5.22). Considere que τ_0 seja a tração no segmento $\overline{P_0P_1}$ e τ_1 a tração no segmento $\overline{P_1P_2}$. Considere que l_0 e l_1 sejam os comprimentos destes segmentos do fio, e l_{02} seja a distância entre P_0 e P_2 . Os ângulos α e β entre os dois segmentos do fio e a linha $\overline{P_0P_2}$ são determinados pela lei dos cosenos:

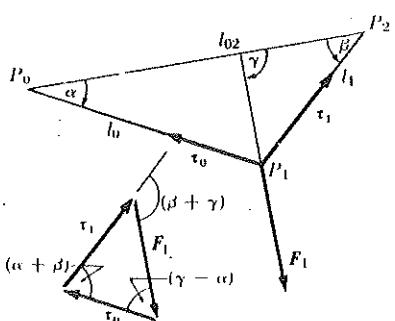


Fig. 5.22 Fio flexível preso em três pontos.

$$\cos \alpha = \frac{l_{02}^2 + l_0^2 - l_1^2}{2l_0 l_{02}}, \quad \cos \beta = \frac{l_{02}^2 + l_1^2 - l_0^2}{2l_1 l_{02}}. \quad (5.119)$$

de tal forma que a posição do ponto P_1 seja independente da força F_1 , admitindo-se que o fio não estique. Como a seção do fio no ponto P_1 está em equilíbrio, o vetor soma das três forças F_1 , τ_0 e τ_1 agindo sobre o fio no ponto P_1 deve-se anular; assim, essas forças devem formar um triângulo, como o indicado na Fig. 5.22. As tensões são, então, determinadas em termos dos ângulos entre a força F_1 e a direção da linha $\overline{P_0P_2}$, pela lei dos senos:

$$\tau_0 = F_1 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \tau_1 = F_1 \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (5.120)$$

Agora, suponha que o fio se estique de acordo com a Lei de Hooke; assim

$$l_0 = l'_0(1 + k\tau_0), \quad l_1 = l'_1(1 + k\tau_1), \quad (5.121)$$

onde l'_0 e l'_1 são os comprimentos dos fios não esticados, e k , uma constante [l/k seria o módulo de Young, Eq. (5.114), multiplicado pela área da seção transversal do fio]. As grandezas desconhecidas τ_0 , τ_1 , l_0 e l_1 podem ser eliminadas nas Eqs. (5.119), substituindo-se seus valores dados pelas Eqs. (5.120). Tem-se, então, duas equações bastante complicadas, que deverão ser resolvidas para se determinarem os ângulos α e β . A solução deve ser obtida por métodos numéricos quando os valores de l'_0 , l'_1 , k , l_{02} , F_1 e γ são conhecidos. Quando α e β forem determinados, τ_0 , τ_1 , l_0 e l_1 poderão ser obtidos a partir das Eqs. (5.120) e (5.121). A maneira de resolver estas equações por aproximações sucessivas é admitir que o fio não estica, assim $l_0 = l'_0$ e $l_1 = l'_1$, e calcular α e β a partir das Eqs. (5.119), e τ_0 , τ_1 a partir das Eqs. (5.120). Usando estes valores de τ_0 e τ_1 , calcula-se, então, l_0 e l_1 a partir das Eqs. (5.121). Os novos valores de l_0 e l_1 podem ser usados nas Eqs. (5.119) para se obterem valores melhores de α e β a partir dos quais valores melhores de τ_0 e τ_1 são também obtidos. Estes valores podem ser usados na determinação de valores ainda melhores de l_0 , l_1 a partir das Eqs. (5.121) e assim sucessivamente. À medida que este processo for repetido, os valores de α , β , τ_0 , τ_1 , l_0 , l_1 , calculados sucessivamente, convergirão para o valor verdadeiro. Se os fios só esticarem um pouco, as primeiras repetições serão suficientes para fornecer um valor muito aproximado do verdadeiro. O método sugerido aqui exemplifica uma classe geral de métodos utilizados na solução de problemas de Física, por aproximações sucessivas. Este é um exemplo dos chamados *métodos de relaxação*, empregados na solução de problemas de Estática.

A seguir, considere um fio submetido à ação de forças distribuídas continuamente ao longo do comprimento do fio. Um ponto sobre o fio será especificado por sua distância s a uma das extremidades do fio. Considere que $f(s)$ seja a força, por unidade de comprimento, no ponto s , isto é, a força sobre um segmento pequeno de comprimento ds é $f ds$. Logo a força total que age sobre o comprimento do fio entre a extremidade $s = 0$ e o ponto s é igual a zero se o fio estiver em equilíbrio:

$$F_0 + \int_0^s f ds + \tau(s) = 0. \quad (5.122)$$

onde F_0 é a força de sustentação na extremidade $s = 0$, e $\tau(s)$ é um vetor cujo valor é a tensão no ponto s , orientada na direção de s crescente. Derivando a Eq. (5.122) em relação a s , obtém-se uma equação diferencial para $\tau(s)$:

$$\frac{d\tau}{ds} = -f. \quad (5.123)$$

A aplicação mais simples e mais importante da Eq. (5.123) é no caso de um fio que tem um peso w , por unidade de comprimento. Se o fio não estiver submetido à ação de outras forças, a não ser nas extremidades, e permanecer pendurado no plano vertical, que será tomado como sendo o plano xy , com o eixo x horizontal e o eixo y vertical. Considere que θ seja o ângulo entre o fio e o eixo x (Fig. 5.23). Logo os componentes horizontal e vertical da Eq. (5.123) tornam-se:

$$\frac{d}{ds}(\tau \sin \theta) = w, \quad (5.124)$$

$$\frac{d}{ds}(\tau \cos \theta) = 0. \quad (5.125)$$

A Eq. (5.125) implica que

$$\tau \cos \theta = C. \quad (5.126)$$

O componente horizontal da tração é constante, como era de esperar, pois as forças externas exercidas sobre o fio são todas verticais, exceto nas extremidades. Dividindo a Eq. (5.124) por C e usando as Eqs. (5.126), elimina-se a tensão:

$$\frac{d \tan \theta}{ds} = \frac{w}{C}. \quad (5.127)$$

Representando-se o fio através de especificação da função $y(x)$, chega-se às seguintes relações:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = y', \quad (5.128)$$

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = dx(1+y'^2)^{1/2}, \quad (5.129)$$

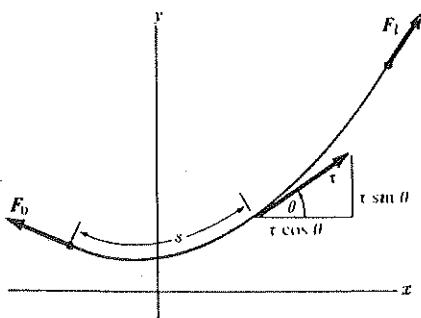


Fig. 5.23 Um fio flexível pendurado pelas extremidades e sob a ação do seu próprio peso.

assim a Eq. (5.127) torna-se

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{w}{C}(1+y'^2)^{1/2}. \quad (5.130)$$

Esta equação pode ser integrada, se w for constante:

$$\int \frac{dy'}{(1+y'^2)^{1/2}} = \int \frac{w}{C} dx, \quad (5.131)$$

$$\operatorname{sen}^{-1} y' = \frac{wx}{C} + \alpha, \quad (5.132)$$

onde α é uma constante. Resolvendo para obter y' , tem-se:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} \left(\frac{wx}{C} + \alpha \right). \quad (5.133)$$

Esta equação pode ser integrada novamente, obtendo-se

$$y = \beta + \frac{C}{w} \cosh \left(\frac{wx}{C} + \alpha \right). \quad (5.134)$$

A curva representada pela Eq. (5.134) denomina-se *catenária* e é a forma de um fio uniforme pendurado por suas extremidades e submetido somente à ação do seu próprio peso. As constantes C , β e α devem ser escolhidas de forma que y tenha o valor apropriado nas extremidades e que seu comprimento total também tenha o valor apropriado. O comprimento total é dado por

$$\begin{aligned} l &= \int ds = \int_{x_0}^{x_l} (1+y'^2)^{1/2} dx = \int_{x_0}^{x_l} \cosh \left(\frac{wx}{C} + \alpha \right) dx \\ &= \frac{C}{w} \left[\operatorname{senh} \left(\frac{wx_l}{C} + \alpha \right) - \operatorname{senh} \left(\frac{wx_0}{C} + \alpha \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.135)$$

5.10 EQUILÍBRIO DE VIGAS SÓLIDAS

Uma viga horizontal, submetida à ação de forças verticais, é um dos exemplos mais simples de uma estrutura submetida à ação de forças de cisalhamento e momentos de flexão. Para simplificar o problema, considere somente o caso em que a viga não esteja sob a ação de tração ou compressão e admita que a viga seja construída e as forças aplicadas de tal maneira que a viga se encoste somente no plano vertical, sem qualquer torção em relação ao seu eixo. Determinam-se primeiramente as tensões dentro da viga a partir do conhecimento das forças externas e, depois, a deformação da viga devido a estas tensões.

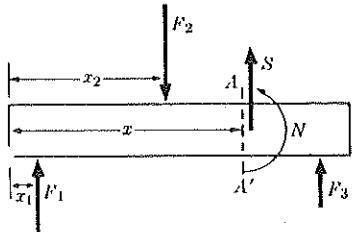


Fig. 5.24 Forças exercidas sobre uma viga.

Os pontos ao longo da viga são localizados por uma coordenada x medida horizontalmente, a partir da extremidade à esquerda da viga (Fig. 5.24). Considere as forças verticais F_1, \dots, F_n agindo nos pontos situados nas distâncias x_1, \dots, x_n , a partir da extremidade à esquerda. Uma força será considerada positiva se estiver orientada para cima. Considere que AA' seja um plano perpendicular à viga, situado a uma distância x qualquer, a partir da extremidade. De acordo com o Teorema 1 (5.107), da Seç. 5.6, o sistema de forças exercidas através do plano AA' pelo material à direita contra o material à esquerda do plano é equivalente a uma força S num ponto qualquer do plano e um conjugado de torque N . (Note que na aplicação do Teorema 1, trata-se o plano AA' como um corpo rígido, isto é, admite-se que a seção transversal AA' não seja distorcida pelas forças que agem sobre ela.) No caso considerado não existe compressão ou tração e todas as forças são verticais, de forma que S é dirigida verticalmente. Define-se *força de cisalhamento* S como a força vertical que age através de AA' , a partir da direita para a esquerda; S é considerada positiva quando está orientada para cima, e negativa quando está orientada para baixo¹. De acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida através de AA' , da esquerda para a direita, é $-S$. Como se admite que não existe torção em relação ao eixo da viga (eixo x), e como todas as forças são verticais, o torque N estará orientado horizontal e perpendicularmente à viga. Define-se *momento fletor* N como o torque exercido através de AA' , da direita para a esquerda, em relação ao eixo horizontal no plano AA' ; N será considerado positivo quando tende a girar o plano AA' na direção contrária ao movimento dos ponteiros do relógio. Como S é vertical, o torque será o mesmo em relação a qualquer eixo horizontal sobre o plano AA' .

Determinam-se a força de cisalhamento S e o momento fletor N aplicando-se as condições de equilíbrio [Eqs. (5.95) e (5.96)] à parte da viga à esquerda do plano AA' . A força total e o torque total, em relação ao eixo horizontal no plano AA' , desprezado o peso da viga, serão,

$$\sum_{x_i < x} F_i + S = 0, \quad (5.136)$$

$$-N_0 - \sum_{x_i < x} (x - x_i)F_i + N = 0, \quad (5.137)$$

¹ A convenção de sinal para S está de acordo com a usada neste livro, onde a direção orientada para cima é considerada positiva. A convenção de sinal para forças de cisalhamento e momento fletor não é uniforme nos textos de Física e Engenharia, sendo preciso ser cuidadoso e informar-se sobre a convenção adotada por cada autor.

onde as somas são tomadas sobre todas as forças agindo à esquerda de AA' e N_0 é o momento fletor, se houver, exercido pela extremidade da viga à esquerda sobre o suporte. O torque N_0 aparecerá somente se a viga estiver enganchada, ou, por outro lado, fixada em seu lado esquerdo. A força exercida pelo gancho ou outro suporte qualquer na extremidade da viga deve ser incluída entre as forças F_i . Se a viga tiver peso w , por unidade de comprimento, este peso deve ser incluído nas equações do equilíbrio:

$$\sum_{x_i < x} F_i - \int_0^x w dx + S = 0, \quad (5.138)$$

$$-N_0 - \sum_{x_i < x} (x - x_i)F_i + \int_0^x (x - x')w dx' + N = 0. \quad (5.139)$$

Portanto, a força de cisalhamento e o momento fletor, numa distância x da extremidade, serão

$$S = - \sum_{x_i < x} F_i + \int_0^x w dx, \quad (5.140)$$

$$N = N_0 + \sum_{x_i < x} (x - x_i)F_i - \int_0^x (x - x')w dx'. \quad (5.141)$$

Existindo outra força adicional qualquer distribuída continuamente ao longo da viga, ela poderá ser incluída em w como um peso adicional, por unidade de comprimento. Se as extremidades da viga estiverem livres, a força de cisalhamento e o momento fletor deverão ser iguais a zero nas extremidades. Fazendo-se $S = N = 0$ na extremidade da viga, à direita, as Eqs. (5.140) e (5.141) podem ser resolvidas para duas das forças exercidas sobre a viga, quando as outras são conhecidas. Se a viga estiver amarrada ou enganchada em uma das extremidades, S e N poderão ter qualquer valor nestes pontos. As Eqs. (5.140) e (5.141) determinam S e N , em qualquer ponto ao longo da viga, quando todas as forças são conhecidas, incluindo-se a força e o torque exercidos pelo gancho, se houver, sobre a extremidade à esquerda. É possível construir gráficos da força de cisalhamento e do momento fletor com funções de x , cujas inclinações, em qualquer ponto, são obtidas tomando-se as derivadas das Eqs. (5.140) e (5.141):

$$\frac{dS}{dx} = w \text{ (exceto em } x_i\text{)}, \quad (5.142)$$

$$\frac{dN}{dx} = \sum_{x_i < x} F_i - \int_0^x w dx' = -S. \quad (5.143)$$

A força de cisalhamento varia de $-F_i$ da esquerda para a direita através do ponto x_i , onde a força F_i age.

Considere, agora, a deformação produzida pelas forças de cisalhamento e momentos fletores, em vigas de seção transversal uniforme, ao longo do seu comprimento.

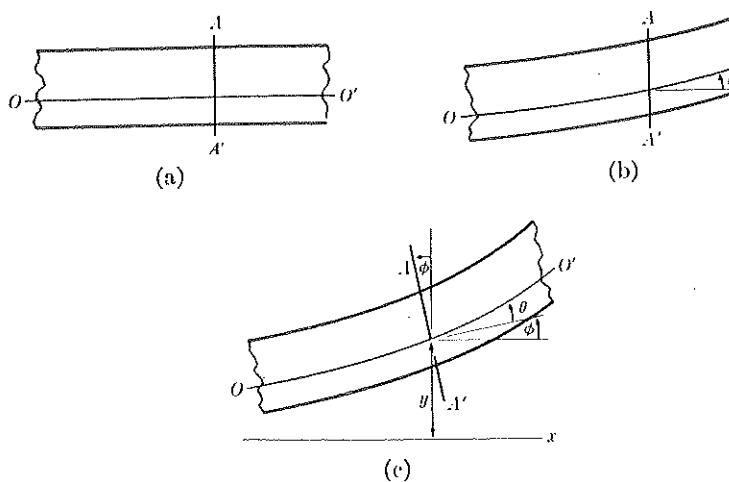


Fig. 5.25 Deformação de uma viga por cisalhamento e flexão: (a) viga não-deformada; (b) viga em cisalhamento; (c) viga fletida e em cisalhamento.

A Fig. 5.25(a) mostra uma viga horizontal, não destorcida, através da qual são desenhadas a linha horizontal \$OO'\$ e um plano vertical \$AA'\$. Na Fig. 5.25(b), a viga tem uma deformação de cisalhamento, cujo efeito é deslizar os planos verticais, uns relativos aos outros, de maneira que a linha \$OO'\$ faça um ângulo \$\theta\$ com a normal ao plano \$AA'\$. De acordo com a Eq. (5.118), o ângulo \$\theta\$ é dado em termos das forças de cisalhamento e do módulo de cisalhamento \$n\$ por:

$$\theta = \frac{S}{nA}, \quad (5.144)$$

onde \$A\$ é a área da seção transversal, fazendo-se a aproximação \$\operatorname{tg} \theta \doteq \theta\$, pois \$\theta\$ é muito pequeno. Na Fig. 5.25(c), mostram-se outros efeitos da flexão de uma viga. O plano \$AA'\$ faz agora um ângulo \$\varphi\$ com a vertical. Supondo-se que a superfície da seção transversal \$AA'\$ permaneça plana e mantenha a sua forma quando a viga está sob tensão, embora isto não possa ser estritamente verdade próximo aos pontos onde as forças são aplicadas, para determinar \$\varphi\$, considere dois planos, \$AA'\$ e \$BB'\$, inicialmente verticais e separados por uma pequena distância \$l\$. Quando o feixe é fletido, \$AA'\$ e \$BB'\$ farão ângulos \$\varphi\$ e \$\varphi + \Delta\varphi\$ com a vertical (Fig. 5.26). Devido à flexão, as fibras da parte externa da curvatura da viga serão esticadas e as da parte interna serão comprimidas. Em algum ponto dentro da viga, haverá uma camada neutra de fibras não esticadas, sobre a qual desenha-se a linha \$OO'\$, de tal forma que fique inteiramente nesta camada neutra. Uma linha neutra \$AA'\$ e \$BB'\$, paralela à \$OO'\$ e a uma distância \$z\$ acima de \$OO'\$, será comprimida para um comprimento \$l - \Delta l\$, onde (veja Fig. 5.26)

$$\Delta l = z \Delta\varphi. \quad (5.145)$$

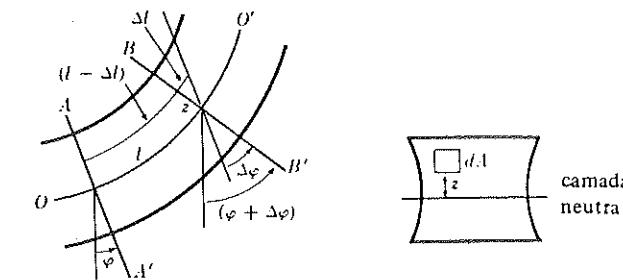


Fig. 5.26 Deformação em uma viga fletida.

A força de compressão \$dF\$ exercida através de um elemento da área \$dA\$ a uma distância \$z\$ acima da camada neutra \$OO'\$ será dada pela Eq. (5.114) em termos do módulo de Young:

$$\frac{dF}{dA} = Y \frac{\Delta l}{l} = Y z \frac{\Delta\varphi}{l}, \quad (5.146)$$

ou, fazendo-se \$l = ds\$, um elemento infinitesimal de comprimento ao longo da linha \$OO'\$,

$$\frac{dF}{dA} = Y z \frac{d\varphi}{ds}. \quad (5.147)$$

Esta equação é importante no desenho de vigas, pois determina a tensão de compressão ou de tração em qualquer distância \$z\$ da camada neutra. A força de compressão total através da área da seção transversal \$A\$ da viga será

$$F = \iint_A dF = Y \frac{d\varphi}{ds} \iint_A z dA. \quad (5.148)$$

Como se supõe que não existe tração nem compressão resultante, \$F = 0\$, então

$$\iint_A z dA = 0. \quad (5.149)$$

Este resultado implica que a camada neutra contém o centróide da área \$A\$ da viga, podendo-se impor que \$OO'\$ seja desenhado através do centróide da área da seção transversal da viga. O momento fletor exercido pelas forças \$dF\$ é

$$\begin{aligned} N &= \iint_A z dF = Y \frac{d\varphi}{ds} \iint_A z^2 dA \\ &= Y k^2 A \frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned} \quad (5.150)$$

onde

$$k^2 = \frac{1}{A} \int_A z^2 dA, \quad (5.151)$$

de forma que k será o raio de giração da área da seção transversal da viga em relação a um eixo horizontal que passa pelo centróide. A equação diferencial para φ será, então

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{N}{Yk^2 A}. \quad (5.152)$$

Considere que a deflexão superior da viga em relação ao eixo x horizontal seja $y(x)$, medida a partir da linha OO' (Fig. 5.25). Logo, pode-se determinar $y(x)$ resolvendo a seguinte equação

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \varphi), \quad (5.153)$$

se θ e φ forem determinados a partir das Eqs. (5.144) e (5.152). Admitindo-se que ambos, θ e φ , sejam ângulos muito pequenos, as Eqs. (5.152) e (5.153) tornam-se

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{N}{Yk^2 A}, \quad (5.154)$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta + \varphi. \quad (5.155)$$

Quando não existem forças F_i concentradas ao longo da viga, pode-se derivar a Eq. (5.155) e usar as Eqs. (5.154), (5.144), (5.142) e (5.143) para obter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{nA} + \frac{N}{Yk^2 A}, \quad (5.156)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{nA} \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{w}{Yk^2 A}. \quad (5.157)$$

Desprezada a flexão, como numa viga curta e espessa, a Eq. (5.156) com $N = 0$ torna-se uma equação diferencial de segunda ordem, que pode ser resolvida para obter-se $y(x)$. Para vigas longas, deve-se usar a Eq. (5.157). Estas equações também servem quando estão presentes cargas concentradas F_i , resolvendo-se as equações para cada segmento da viga entre os pontos onde a força F_i é aplicada e ajustando apropriadamente a solução nestes pontos. A solução em ambos os lados de um ponto x_i , onde a força F_i é aplicada, deve ser escolhida de forma que y , φ e N sejam contínuas em x_i , enquanto S , dN/dx , dy/dx , d^3y/dx^3 crescem pelo ponto x_i em quantidade determinada pelas Eqs. (5.140), (5.143), (5.155) e (5.156). A solução da Eq. (5.156) conterá duas constantes arbitrárias e a da Eq. (5.157) conterá quatro, determinadas pelas condições nas extremidades da viga ou nas extremidades do segmento da viga.

Como exemplo, considere uma viga uniforme de peso W e comprimento L , suspensa numa posição horizontal (isto é, de tal maneira que $\varphi = 0$)² fixa na extremidade à esquerda ($x = 0$) e com uma força $F_1 = -W'$ aplicada à sua extremidade à direita ($x = L$). Neste caso, a Eq. (5.157) torna-se

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{W}{Yk^2 AL}. \quad (5.158)$$

A solução será

$$y = -\frac{Wx^4}{24Yk^2 AL} + \frac{1}{6}C_3x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_1x + C_0. \quad (5.159)$$

Para determinar as constantes C_0 , C_1 , C_2 e C_3 é preciso que na extremidade da viga à esquerda:

$$y = C_0 = 0, \quad (5.160)$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 = \theta = \frac{S}{nA} = -\frac{W + W'}{nA}, \quad (5.161)$$

onde se usam as Eqs. (5.155) e (5.144). Há necessidade de mais duas condições, que podem ser determinadas de várias maneiras, sendo a mais fácil, neste caso, aplicar a Eq. (5.156) e a sua derivada na extremidade esquerda da viga:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_2 = \frac{W}{nAL} - \frac{W'L + \frac{1}{2}WL}{Yk^2 A}, \quad (5.162)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_3 = \frac{1}{Yk^2 A} \frac{dN}{dx} = -\frac{S}{Yk^2 A} = \frac{W' + W}{Yk^2 A}, \quad (5.163)$$

onde se usa a Eq. (5.143). A deflexão da viga no ponto x qualquer será então

$$y = -\frac{L^3}{Yk^2 A} \left[\frac{Wx^2}{4L^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{x}{L} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{W'x^2}{2L^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x}{L} \right) \right] - \frac{L}{nA} \left[\frac{Wx}{L} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{L} \right) + \frac{W'x}{L} \right]. \quad (5.164)$$

A deflexão em $x = L$ será

$$y = -\frac{L^3}{Yk^2 A} \left[\frac{1}{8}W + \frac{1}{3}W' \right] - \frac{L}{nA} \left[\frac{1}{2}W + W' \right]. \quad (5.165)$$

O primeiro termo, em cada equação, é a deflexão devido ao momento fletor, e o segundo devido ao cisalhamento. O primeiro termo é proporcional a L^3 e inversamente proporcional a k^2 . O segundo termo é proporcional a L e independente de k . Assim, a fle-

² A condição $\varphi = 0$ significa que o plano AA' é vertical, isto é, a viga estaria na horizontal se não houvesse deformação por cisalhamento.

xão é mais importante para vigas longas e finas, e o cisalhamento o é para vigas curtas e espessas. A análise feita aqui provavelmente não é muito precisa no que diz respeito a vigas curtas e espessas, porque, como foi evidenciado acima, algumas das suposições podem não ser válidas próximo aos pontos de apoio ou pontos onde as cargas são aplicadas (“próximo” significa relativos às dimensões da seção transversal da viga).

5.11 EQUILÍBRIO DE FLUIDOS

Define-se *fluido* como uma substância que não é capaz de suportar tensão de cisalhamento quando está em equilíbrio. Os líquidos e os gases enquadram-se nesta definição e, mesmo substâncias muito viscosas, como piche, alcatrão, ou a matéria encontrada no interior da Terra, atingem um equilíbrio no qual não existem tensões de cisalhamento, caso sejam deixados sem perturbação durante um tempo suficientemente longo. A tensão F/A , exercida através de uma pequena área qualquer A , num fluido em equilíbrio deve ser normal a A e, em praticamente todos os casos, será uma compressão ao invés de tensão.

Demonstra-se, primeiramente, que a tensão F/A próximo a qualquer ponto do fluido é independente da orientação da superfície A . Considere dadas duas direções quaisquer; constrói-se um pequeno prisma triangular com duas faces iguais, $A_1 = A_2$, perpendiculares às duas direções dadas. A terceira face, A_3 , forma com A_1 e A_2 uma seção transversal que tem a forma de um triângulo isósceles (Fig. 5.27). Considere que F_1 , F_2 e F_3 sejam as forças de tensão perpendiculares às faces A_1 , A_2 e A_3 . Se o fluido no prisma estiver em equilíbrio.

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0. \quad (5.166)$$

Não é preciso incluir as forças nas extremidades das faces do prisma, pois, sendo perpendiculares a F_1 , F_2 e F_3 , devem, portanto, ser somadas separadamente e o resultado será igual a zero. Segue-se, então, da Eq. (5.166) e da maneira que o prisma foi construído, que F_1 , F_2 e F_3 devem formar um triângulo isósceles (Fig. 5.27) e

$$F_1 = F_2. \quad (5.167)$$

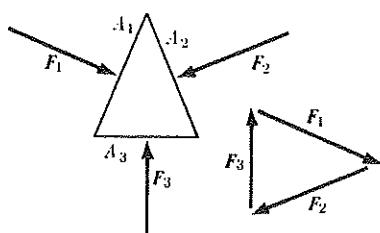


Fig. 5.27 Forças que agem sobre um prisma triangular num fluido.

Como F_1 e F_2 estão orientadas em duas direções quaisquer no fluido e como $A_1 = A_2$, a tensão F/A é a mesma em todas as direções. A tensão no fluido é chamada *pressão* p :

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}. \quad (5.168)$$

Agora, suponha que, além da pressão, o fluido esteja sujeito a uma força externa f por unidade de volume de fluido, isto é, qualquer pequeno volume dV do fluido está sob a ação de uma força $f dV$. Esta força chama-se *força do corpo*; f é a densidade de força do corpo. O exemplo mais comum é a força gravitacional, para a qual

$$f = \rho g, \quad (5.169)$$

onde g é a aceleração devida à gravidade e ρ é a densidade. Em geral, a densidade de força do corpo pode diferir em módulo e direção em diferentes pontos no fluido. No caso usual, quando a força de pressão é dada pela Eq. (5.169), g é constante e f é constante em direção; se ρ for constante, f será constante também em módulo. Considere dois pontos próximos, P_1 e P_2 , no fluido, separados por um vetor dr . Constrói-se um cilindro de comprimento dr e área da seção transversal dA , cujas faces extremas contêm os pontos P_1 e P_2 . Então, o componente da força total na direção de dr que age sobre o fluido no cilindro, considerando-se que o cilindro esteja em equilíbrio, será

$$f \cdot dr dA + p_1 dA - p_2 dA = 0,$$

onde p_1 e p_2 são as pressões em P_1 e P_2 . A diferença de pressão entre os dois pontos separados por uma distância dr será então

$$dp = p_2 - p_1 = f \cdot dr. \quad (5.170)$$

A diferença total de pressão entre os dois pontos, no fluido, localizados pelos vetores r_1 e r_2 será

$$p_2 - p_1 = \int_{r_1}^{r_2} f \cdot dr, \quad (5.171)$$

onde a integral de linha do segundo membro deve ser considerada ao longo de um caminho que vai de r_1 para r_2 dentro do fluido. Se a pressão p_1 em r_1 for conhecida, a Eq. (5.171) permite o cálculo da pressão em outro ponto qualquer r_2 , que pode ser ligado a r_1 por um caminho ao longo do fluido. A diferença de pressão depende sómente das forças do corpo. Assim, qualquer variação da pressão em um ponto do fluido em equilíbrio deve ser acompanhada de uma variação igual em todos os outros pontos, caso as forças do corpo não variem. Este é o princípio de Pascal.

De acordo com a definição geométrica de gradiente (3.107), a Eq. (5.170) pressupõe

$$\mathbf{f} = \nabla p. \quad (5.172)$$

O gradiente de pressão no fluido em equilíbrio deve ser igual à densidade de força do corpo. Este resultado mostra que a força resultante, por unidade de volume, devido à pressão é $-\Delta p$. A pressão p é semelhante à energia potencial, por unidade de volume, considerando-se que o gradiente de p com o sinal negativo representa uma força por

unidade de volume devido à pressão. No entanto, a integral de $p dV$ sobre um volume não representa uma energia potencial exceto em casos muito especiais. A Eq. (5.172) pressupõe que as superfícies de pressão constantes no fluido sejam perpendiculares às forças de pressão em todos os pontos. De acordo com as Eqs. (3.187) e (5.172), a densidade de força f deve satisfazer a equação

$$\nabla \times f = 0. \quad (5.173)$$

Esta é uma condição necessária sobre a força de pressão para haver equilíbrio, sendo também uma condição suficiente para haver possibilidade de equilíbrio. Este resultado pode ser obtido a partir da discussão na Seç. 3.12, para o qual, caso a Eq. (5.173) fosse válida, então seria possível definir a função $p(r)$ pela equação

$$p(r) = p_1 + \int_{r_1}^r f \cdot dr, \quad (5.174)$$

onde p_1 é a pressão no ponto fixo r_1 e a integral pode ser calculada ao longo de um caminho dentro do fluido que vai de r_1 até r . Se a pressão no fluido, em cada ponto r , tivesse o valor $p(r)$ dado pela Eq. (5.174), então a Eq. (5.172) seria válida e a força do corpo f , por unidade de volume, seria, em todos os pontos, equilibrada pela força de pressão $-\Delta p$, por unidade de volume. Logo, a Eq. (5.174) define uma distribuição de pressões de equilíbrio para qualquer força de pressão que satisfaça a Eq. (5.173).

O problema de determinação da pressão em um fluido em equilíbrio, sendo conhecida a densidade de força de pressão $f(r)$, será na realidade matematicamente idêntico ao problema, discutido na Seç. 3.12, de determinação da energia potencial para uma dada função força $F(r)$. Primeiro, verifica-se $\Delta \times f$ igual a zero em todos os pontos do fluido, para, então, certificar-se se o equilíbrio é possível. Em seguida, escolhe-se o ponto r_1 , em que a pressão é conhecida, e usa-se a Eq. (5.174) para determinar a pressão em qualquer outro ponto, resolvendo a integral por um caminho conveniente.

A força do corpo total que age sobre o volume V de um fluido é

$$F_b = \iiint_V f dV. \quad (5.175)$$

A força total devido à pressão sobre a superfície A de V é

$$F_p = - \iint_A \hat{n} p dA, \quad (5.176)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície e orientado para fora do volume em qualquer ponto da superfície. Estas duas forças devem ser iguais e opostas, pois o fluido está em equilíbrio:

$$F_p = -F_b. \quad (5.177)$$

A Eq. (5.176) fornece a força total devido à pressão sobre a superfície do volume V , se V estiver ou não ocupado pelo fluido. Logo conclui-se, a partir da Eq. (5.177), que um corpo imerso num fluido em equilíbrio está sob a ação de uma força F_p devida à pressão, igual e oposta à força F_b que seria exercida pelo volume V se ele estivesse ocupado por um fluido em equilíbrio. Este é o princípio de Arquimedes. Combinando as Eqs. (5.172), (5.175), (5.176) e (5.177), tem-se

$$\iint_A \hat{n} p dA = \iiint_V \nabla p dV. \quad (5.178)$$

Esta equação é semelhante ao Teorema de Divergência, da Gauss [Eq. (3.115)], exceto pelo fato de os integrandos serem $\hat{n} p$ e ∇p ao invés de $\hat{n} \cdot \hat{A}$ e $\nabla \cdot A$. O Teorema de Gauss pode, de fato, ser demonstrado de uma maneira geral muito útil, que permite substituir o fator \hat{n} numa integral de superfície pelo em integral de volume correspondente, sem qualquer restrição sobre a forma do integrando, exceto que ele deve ser escrito de maneira que o símbolo de derivação ∇ opere em todo o integrando³. Com este resultado, a partir das Eqs. (5.175), (5.176) e (5.177), deduz-se a Eq. (5.172):

$$\begin{aligned} F_b + F_p &= \iiint_V f dV - \iint_A \hat{n} p dA \\ &= \iiint_V (f - \nabla p) dV = 0. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Como isto é válido para qualquer volume V , a Eq. (5.172) é obtida.

Até aqui considerou-se somente a pressão, isto é, a tensão no fluido. A deformação produzida pela pressão no interior do fluido será uma variação no volume, por unidade de massa do fluido, ou, de modo equivalente, uma variação na densidade. Se a Lei de Hooke for satisfeita, a variação dV no volume V , produzida por uma pequena variação dp , na pressão, pode ser calculada a partir da Eq. (5.116), caso o módulo volumétrico B seja conhecido:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{B}. \quad (5.180)$$

Se a massa de fluido no volume V for M , então a densidade será

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad (5.181)$$

e a variação na densidade $d\rho$ correspondente à variação infinitesimal dV no volume será dada por

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}, \quad (5.182)$$

de forma que a variação na densidade produzida por uma variação pequena de pressão dp será

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{B}. \quad (5.183)$$

Após uma variação finita de pressão de p_0 para p , a densidade será

³ A demonstração deste teorema pode ser vista em Phillips, *Vector analysis*, New York, John Wiley and Sons, 1933, Cap. III, Seç. 34.

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\int_{p_0}^p \frac{dp}{B}\right). \quad (5.184)$$

Em geral, a densidade de um fluido é determinada pela equação de estado, em termos de pressão e de temperatura. A equação de estado para um gás perfeito é

$$pV = RT, \quad (5.185)$$

onde T é a temperatura absoluta, V o volume em moles e R , a constante universal dos gases:

$$R = 8,314 \times 10^7 \text{ erg-deg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ mol}^{-1} \quad (5.186)$$

Substituindo-se este resultado na Eq. (5.181), obtém-se a densidade em termos de pressão e de temperatura:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}, \quad (5.187)$$

onde M é o peso molecular.

Aplicam-se estes resultados ao caso mais comum, em que a força gravitacional que atua sobre o fluido tem origem no campo gravitacional vertical [Eq. (5.169)]. Aplicando-se a Eq. (5.173) neste caso, tem-se

$$\nabla \times f = \nabla \times (\rho g) = 0. \quad (5.188)$$

Como g é constante, a derivação indicada pelo símbolo ∇ atua somente em p e pode-se deslocar o escalar p de um fator do produto vetorial para outro, obtendo-se

$$(\nabla \rho) \times g = 0, \quad (5.189)$$

isto é, o gradiente da densidade deve ser paralelo ao campo gravitacional. A densidade deve ser constante em qualquer plano horizontal no interior do fluido. A Eq. (5.189) também pode ser derivada a partir da Eq. (5.188), escrevendo-se explicitamente os componentes dos vetores $\nabla \times (pg)$ e $(\nabla p) \times g$ e verificando que eles são iguais⁴. De acordo com a Eq. (5.172), a pressão também é constante em qualquer plano horizontal dentro do fluido. Portanto, a pressão e a densidade só serão funções da altura vertical z no interior do fluido. A partir das Eqs. (5.172) e (5.169), obtém-se uma equação diferencial para a pressão como função de z :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (5.190)$$

Se o fluido for incompressível e ρ uniforme, a solução desta equação será

$$p = p_0 - \rho gz, \quad (5.191)$$

⁴ A Eq. (5.189) é válida também em campo gravitacional não-uniforme, pois $\nabla \times g = 0$, de acordo com a Eq. (6.21).

onde p_0 é a pressão em $z = 0$. Se o fluido for um gás perfeito, p , ou ρ , pode ser eliminado da Eq. (5.190) por meio da Eq. (5.187). Eliminando-se a densidade, tem-se

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} p. \quad (5.192)$$

Por exemplo, admitindo-se que a temperatura e a composição da atmosfera sejam uniformes, pode-se resolver a Eq. (5.192) e obter a pressão atmosférica como função da altitude:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right). \quad (5.193)$$

PROBLEMAS

1. (a) Prove que a energia cinética total de um sistema de partículas que constituem um corpo rígido, conforme foi definido pela Eq. (4.37), é dada corretamente pela Eq. (5.16), quando o corpo gira em torno de um eixo fixo. (b) Prove que a energia potencial dada pela Eq. (5.14) é o trabalho total realizado contra as forças externas, quando o corpo gira de θ_s para θ , se N_z for a soma dos torques em torno do eixo devido às forças externas.

2. Usando o esquema de analogia dado na Seç. 5.2, formule um teorema análogo ao dado pela Eq. (2.8) e demonstre-o a partir da Eq. (5.13).

3. Demonstre, a partir da equação do movimento (5.13) para rotação, que se N_z for somente função de θ , então $T + V$ será uma constante.

4. O balancim de um relógio consiste num anel de massa M , raio a e raios de massa desprezíveis. A mola (cabelo) exerce um torque restaurador $N_z = -k\theta$. Determine o movimento, no caso de o balancim ser deslocado num ângulo θ_0 e tirado do repouso.

5. Um roda de massa M e raio de giro k gira em torno de um eixo horizontal fixo de raio a , que passa por um orifício de raio ligeiramente maior no cubo da roda. O coeficiente de atrito entre as superfícies em contato é μ . Se a roda girar inicialmente em velocidade angular ω_0 , determine o tempo e o número de voltas dadas pela roda até parar.

6. Uma roda de massa M e raio de giro k está montada num eixo horizontal. Uma mola adaptada ao eixo exerce um torque $N = -k\theta$, que tende a restaurar a posição de equilíbrio da roda, $\theta = 0$. Uma massa m é colocada na borda da roda numa distância $2k$ do eixo, num ponto vertical colocado acima dele, quando $\theta = 0$. Descreva os tipos de movimento que podem ocorrer; localize as posições de equilíbrio estável ou instável da roda, se existirem, e determine as freqüências para pequenas oscilações em torno dos pontos de equilíbrio. Considere dois casos: (a) $K > 2mgk/\pi$. (b) $K = 4mgk/\pi$. O que acontece se $K < 4mgk/5\pi$? [Sugestão. Resolva graficamente a equação trigonométrica.]

7. A hélice de um avião de momento de inércia I está sujeita à ação de um torque acelerador

$$N = N_0(1 + \alpha \cos \omega_0 t),$$

e de um torque de atrito devido à resistência do ar:

$$N_f = -b\dot{\theta}.$$

Determine o estado estacionário do movimento.

8. A armadura de um motor pesando 2 kg tem um raio de giração de 5 cm. A sua velocidade sem carga é de 1 500 rpm. Ela foi enrolada de tal maneira que o seu torque é independente da velocidade. Quando atinge a velocidade final, o motor puxa uma corrente de 2 ampères em 110 volts. Admita que a eficiência elétrica seja de 80% e que o atrito seja proporcional ao quadrado da velocidade angular. Determine o tempo necessário para atingir a velocidade de 1 200 rpm após ter sido ligado sem carga.

9. Derive as Eqs. (5.35) e (5.36).

10. Suponha que um pêndulo simples sofra um torque igual a $-mb_1\dot{\theta}$, devido ao atrito com os pontos de sustentação, e uma força de atrito $-b_2v$ sobre o pêndulo devido à resistência do ar, onde v é a velocidade do pêndulo. O pêndulo tem massa m e está suspenso por um fio de comprimento l . Determine o tempo necessário para que a amplitude seja amortecida a $1/e$ de seu valor inicial (pequeno). Como m e l devem ser escolhidos para que o pêndulo oscile durante o tempo mais longo possível? Como m e l devem ser escolhidos para que o pêndulo oscile o maior número de ciclos possível?

11. Uma criança de massa m senta-se num balanço de massa desprezível, cujos cabos tem um comprimento l . Suponha que as dimensões sejam desprezíveis comparadas com l . O pai puxa a criança pelas costas até o cabo fazer um ângulo de um radiano com a vertical e, então, a empurra com uma força $F = mg$ ao longo do arco de círculo até que o cabo esteja na vertical e solta o balanço. (a) Que altura atinge o balanço? (b) Por quanto tempo o pai empurrou o balanço? (Suponha que seja permitido escrever $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ para $\theta < 1$.) Compare com o tempo necessário para o balanço atingir a vertical, caso ele seja largado sem ser empurrado.

12. Um bastão de beisebol mantido em repouso na horizontal é atingido no ponto O' por uma bola que lhe fornece um impulso horizontal J' perpendicular ao bastão. Considere que a posição inicial do bastão é paralela ao eixo y . O centro de massa G do bastão encontra-se inicialmente na origem e o ponto O' a uma distância h' de G . Supondo-se que o bastão seja deixado livre após a colisão da bola, e desprezando-se o efeito da gravidade, calcule e faça gráficos dos movimentos $x(t)$ e $y(t)$ do centro de massa e também do centro de percussão, durante os primeiros momentos após a colisão, por exemplo, até que o bastão tenha girado um quarto de volta. Faça um comentário sobre a diferença entre o movimento inicial do centro de massa e o movimento do centro de percussão.

13. Um pêndulo composto é montado de forma a oscilar em relação a um dos dois eixos paralelos que passam pelos dois pontos O e O' , localizados sobre uma linha que passa pelo centro de massa. As distâncias h e h' , de O e O' ao centro de massa, e os períodos τ e τ' , para vibrações de pequenas amplitudes em torno de eixos que passam por O e O' , são medidos. Os pontos O e O' são escolhidos de forma que cada um deles seja aproximadamente o centro de oscilação em relação ao outro. Se $\tau = \tau'$, ache uma fórmula para g em termos das grandezas medidas. Se $\tau' = \tau(1 + \delta)$ onde $\delta \ll 1$, determine a correção que deve ser somada à fórmula anterior, de maneira a corrigi-la em termos de ordem δ .

14. Prove que, no caso de um corpo ser composto de duas ou mais partes cujos centros de massa são conhecidos, seja possível determinar seu centro de massa, considerando-se as suas partes componentes como partículas localizadas nos centros de massa respectivos. Suponha que cada parte componente k seja descrita por uma densidade de massa $\rho_k(r)$ distribuída continuamente sobre a região ocupada pela parte k .

15. Um disco circular de raio a , localizado no plano xy , tem seu centro na origem. A parte do disco acima do eixo x tem uma densidade σ , por unidade de área, e a metade abaixo do eixo x tem uma densidade 2σ . Determine o centro de massa G e os momentos de inércia, em relação aos eixos x , y e z e a um eixo paralelo que passa por G . Utilize sempre que possível os teoremas simplificadores.

16. a) Determine a fórmula para o momento de inércia de um cone de massa m , altura h e ângulo gerador α , em relação ao seu eixo de simetria e a um eixo que passa pelo cume e é perpendicular ao eixo de simetria. Determine o centro de massa do cone.

- b) Use os resultados do item anterior para determinar o centro de massa do tronco de cone, mostrado na Fig. 5.28, e calcule os momentos de inércia, em relação aos eixos horizontais que passam por cada uma das bases e pelo centro de massa. A massa do tronco de cone é M .

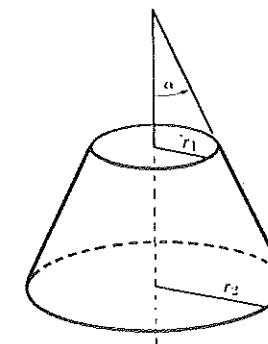


Fig. 5.28 Tronco de cone.

17. Determine os momentos de inércia do bloco mostrado na Fig. 5.8, em relação aos eixos que passam pelo centro de massa e são paralelos a cada uma das três arestas do bloco.

18. Através de uma esfera de massa M e raio R , faz-se um corte plano a uma distância $1/2R$ a partir do centro e descarta-se a parte menor. Determine o centro de massa da parte restante e os momentos de inércia, em relação aos seus eixos de simetria e a um eixo perpendicular que passa pelo centro de massa.

19. Quantos metros de fio de 0,075 cm de diâmetro podem ser enrolados em carretel, como o mostrado na Fig. 5.29?

20. Sabendo-se que o volume de um cone é um terço da área da base multiplicado pela altura, determine, usando o Teorema de Pappus, o centróide de um triângulo cujos catetos sejam a e b .

21. Prove que o Segundo Teorema de Pappus é válido, mesmo que o eixo de revolução intercepte a superfície, admitindo-se como volume a diferença entre os volumes gerados pelas duas partes em que a superfície foi dividida pelo eixo. Qual a generalização correspondente ao Primeiro Teorema?

22. Determine o centro de massa de um arame encurvado na forma de uma semicircunferência de raio a . Determine os três raios de giração em relação aos eixos x , y e z que passam pelo centro de massa, onde z é perpendicular ao plano da semicircunferência e x a divide em partes iguais. Use a sua engenhosidade para reduzir o número de cálculos a um mínimo possível.

23. a) Determine uma fórmula para o raio de giração de uma haste de comprimento l , em relação ao eixo situado na sua extremidade e fazendo um ângulo α com ela.

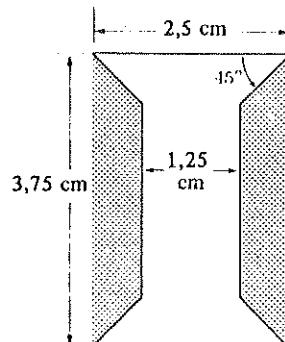


Fig. 5.29 Qual a quantidade de fio que pode ser enrolado neste carretel?

b) Usando este resultado, determine o momento de inércia de uma pirâmide triangular de lados iguais, construída com seis hastes uniformes, em relação ao eixo que passa pelo seu centróide e por um dos seus vértices.

24. Determine o raio de giração de uma lâmina plana em forma de elipse, cujo semi-eixo maior é a e excentricidade e , em relação ao seu eixo maior, ao seu eixo menor e a um eixo perpendicular ao plano que passa por um foco.

25. Forças de 1 kgf, 2 kgf, 3 kgf e 4 kgf agem em uma seqüência no sentido dos ponteiros de um relógio ao longo dos quatro lados de um quadrado de $0,5 \times 0,5\text{ m}^2$. As forças estão orientadas no sentido do movimento dos ponteiros do relógio em torno do quadrado. Determine o equilibrante.

26. Forças de 1,0 N, 1,5 N e 2,5 N são exercidas em seqüência no sentido do movimento dos ponteiros do relógio ao longo dos três lados de um triângulo equilátero. Os lados do triângulo têm comprimento de 1,0 m. Determine a resultante.

27. a) Reduza o sistema de forças que age sobre o cubo mostrado na Fig. 5.30 a uma força equivalente exercida no centro do cubo, mais um conjugado de duas forças exercidas em vértices adjacentes.

b) Reduza o sistema a um outro de duas forças e determine onde estas forças agem.

c) Reduza o sistema a uma única força mais um torque paralelo a ele.

28. Uma pessoa segura uma esfera pesando 500 g entre o polegar e o indicador, em pontos opostos de um diâmetro horizontal. Ata-se uma mola num ponto sobre a superfície da esfera na extremidade de um diâmetro perpendicular à horizontal. A mola é puxada com uma força de 300 g em direção paralela à linha que une o polegar ao indicador. Determine as forças que devem ser exercidas pelo polegar e pelo indicador para manter a esfera estacionária. Existe somente uma resposta? A resposta corresponde a sua intuição física em relação ao problema?

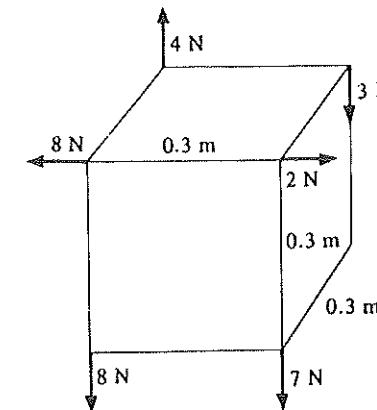


Fig. 5.30 Sistema de forças exercidas sobre um cubo.

29. Um barco a vela navega numa direção que faz um ângulo α com a direção do vento. Suponha que a vela seja uma superfície plana e que é puxada até formar o ângulo β com a quilha do barco. (Se a vela deve pegar o vento, $\beta < \alpha$.) Suponha que a força exercida sobre o barco pelo vento é perpendicular à vela e proporcional ao componente da velocidade do vento perpendicular à vela. Determine o melhor ângulo β para orientar a vela de forma que o componente da força, na direção do deslocamento, seja máximo. Se o piloto desejar atingir um ponto diretamente oposto à direção do vento, velejando para direita e para esquerda com um ângulo α em relação à direção do vento, e se o atrito que limita a velocidade do barco for proporcional à velocidade, qual o melhor ângulo α (admitindo-se que β também seja o melhor) que maximiza o componente da velocidade na direção contrária à do vento? Quantas imprecisões você pode encontrar nas suposições feitas, e que efeitos cada uma delas teria nos ângulos β e α otimizados?

30. Um cabo de 10 m de comprimento é suspenso entre dois pontos separados horizontalmente numa distância de 5 m. Uma massa de 50 kg é pendurada no ponto intermediário do cabo. A área da seção transversal do cabo é 1 cm^2 e $Y = 500 \text{ kg/cm}^2$. Determine a tração no cabo, tomando a sua deformação em primeira aproximação.

31. Um cabo é desenhado especialmente para suspender uma carga W a uma distância l abaixo do ponto de apoio. O cabo deve ser construído com material cujo módulo de Young é Y e peso W por unidade de volume. Visto que o comprimento l do cabo deve ser razoavelmente longo, deseja-se manter seu peso em um mínimo, fazendo a área da seção transversal $A(z)$ do cabo; a altura z acima da extremidade inferior e de tamanho suficiente para sustentar a carga abaixo dela. O material do cabo pode sustentar seguramente uma carga que produza um esticamento de 1%. Determine a função $A(z)$ quando o cabo estiver sustentando a carga W .

32. a) Um cabo é ligado em linha reta entre dois pontos fixos. Aplicando-se uma força W para o lado no centro do cabo, uma força τ consideravelmente grande pode ser aplicada nos pontos de apoio em cada uma de suas extremidades. Determine uma fórmula para τ e função de W , da área A e do módulo de Young Y do cabo, supondo-se que o ângulo em que o cabo é puxado seja pequeno.

b) Mostre que esta suposição é satisfeita se $W = 450 \text{ N}$, $A = 20 \text{ cm}^2$ e $Y = 41\,000 \text{ N cm}^{-2}$. Determine τ .

33. Um cabo de 6 m de comprimento é suspenso entre dois pontos A e B , separados numa distância de 4,5 m. A linha AB faz um ângulo de 30° com a horizontal (B mais alto). Um peso de 900 kg está pendurado em um ponto C a 2,4 m da extremidade do cabo A .

a) Determine a posição do ponto C e a tração no cabo, considerando-se que o cabo não estica.

b) Se o cabo tiver 1,3 cm de diâmetro e módulo de Young de $35,0 \times 10^9 \text{ N m}^2$, determine a posição do ponto C e as trações, levando-se em conta o estiramento do cabo. Calcule duas aproximações sucessivas e estime a precisão do seu resultado.

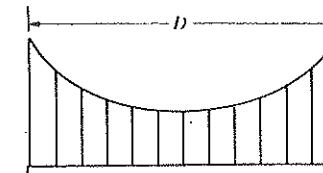


Fig. 5.31 Ponte suspensa.

34. a) Um cabo de comprimento l e peso w , por unidade de comprimento, é suspenso nos pontos $x = \pm a$ sobre o eixo x . O eixo y é vertical. Fazendo-se $y = 0$ em $x = \pm a$ e o comprimento total do cabo l , mostre que $\alpha = 0$ na Eq. (5.134), e escreva as equações que devem ser resolvidas para obter-se β e C .

b) Mostre que o mesmo resultado pode ser obtido para α e C sendo o cabo simétrico em relação ao eixo y e que as forças nas extremidades equilibram o seu peso.

35. Uma ponte de peso W por unidade de comprimento está pendurada por cabos de peso desprezível, como é mostrado na Fig. 5.31. Deseja-se determinar a forma dos cabos de apoio de forma que os cabos verticais, igualmente espaçados, suportem pesos iguais. Suponha que os cabos verticais estejam distribuídos suficientemente próximos para que se possa considerar que o peso w , por unidade de comprimento, esteja distribuído continuamente ao longo do cabo de apoio. O problema difere do problema tratado no texto, onde o fio tinha um peso w por unidade de comprimento, na distância horizontal x . Escreva uma equação diferencial para a forma $y(x)$ do cabo de apoio; obtenha $y(x)$, considerando que as extremidades estejam nos pontos $y = 0$, $x = \pm l/2D$, e que a tração máxima no cabo seja τ_0 .

36. Um cabo de comprimento l e peso w , por unidade de comprimento, é suspenso dos pontos $x = \pm a$ sobre o eixo x . O eixo y é vertical. Um peso W é pendurado no ponto intermediário do cabo. Escreva as equações que permitem determinar β , α e C .

37. Uma viga uniforme de área da seção transversal ($l \times l$) com extremidades cortadas em ângulos retos é feita de material tal que $Y = n$. A viga está apoiada num canal quadrado e horizontal mantendo uma distância livre L para fora do canal. Para que valor de L a deflexão na extremidade da viga é devido igualmente a cisalhamento e encurramento? Para este valor de L , que ângulo faz a face da extremidade com o plano vertical? Que ângulo a superfície superior da viga na extremidade faz com a horizontal? Suponha $W \ll Yl^2$.

38. Uma gangorra é feita com uma prancha de madeira rectangular, cuja área de seção transversal mede $5 \times 30 \text{ cm}^2$, o comprimento é 3 m e pesa 27 kg. O módulo de Young é $10,3425 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. A prancha é equilibrada por intermédio de um apoio estreito em seu centro. Duas crianças pesando 45 kg cada sentam-se a 30 cm das extremidades. Determine a forma da prancha quando se acha equilibrada em posição horizontal estacionária. Despreze o cisalhamento.

39. Um tubo oco de raio interno a e externo b é construído de material cujo módulo de Young é Y , módulo de cisalhamento n e densidade ρ . Uma extensão de comprimento L é fixada em ambas as extremidades. Determine a deflexão no centro do tubo. Determine o acréscimo na deflexão quando se enche o tubo com o fluido de densidade ρ_0 .

40. Os flanges superior e inferior de uma viga em I têm largura a e são conectados por uma junta de comprimento b . A junta e os flanges têm a mesma espessura c , considerada desprezível em relação a a e b e são feitas de material cujo módulo de Young é Y e módulo de cisalhamento n . A viga tem peso W , comprimento L e repousa sobre apoios em ambas as extremidades. Uma carga W' está apoiada no ponto médio da viga. Determine a deflexão da viga em seu ponto médio. Separe a deflexão devida ao cisalhamento e ao encurvamento, em termos devidos ao peso W e à carga W' .

41. Uma vez foi sugerida a construção de uma plataforma espacial permanente, soltando-se um balão piramidal de 100 km de altura e em repouso na superfície da Terra, cheio de gás cuja pressão fosse pouco maior que a atmosférica. A pressão de $7,0 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$ no topo seria adequada para sustentar cargas razoavelmente pesadas. A parte de outras objeções, mostre que esta idéia não é prática calculando-se a pressão do balão no nível do mar, supondo que este esteja cheio de ar a 0°C e que a pressão a 100 km é $7,0 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$.

42. Se o módulo volumétrico da água for B e a pressão atmosférica na superfície do oceano p_0 , determine a pressão como função da profundidade do oceano, levando em conta a compressibilidade da água. Suponha que B seja constante. Use um valor tabulado de B para a água do mar e estime o erro que seria cometido na profundidade de 8 km se a compressibilidade fosse desprezada.

43. Determine a pressão atmosférica como função da altitude, supondo que a temperatura decresce com a altitude e que o decréscimo é proporcional a ela.

44. Existe uma ligeira falha no argumento usado no início da Seç. 5.11 devido ao fato de se desprezarem as possíveis forças dos corpos na Eq. (5.166). Mostre que, mesmo quando as forças dos corpos estão presentes, a tensão, em qualquer ponto de um fluido em equilíbrio, é a mesma em todas as direções. [Sugestão. Considere que o tamanho do prisma encolhe até se tornar igual a zero, mostrando que, neste limite, a força do corpo é desprezível comparada à tensão através da superfície.]

CAPÍTULO 6 GRAVITAÇÃO

6.1 CENTROS DE GRAVIDADE DE CORPOS DE GRANDES DIMENSÕES

O leitor deve estar lembrado da Lei da Gravitação, formulada na Seç. 1.5. Duas partículas quaisquer de massas m_1 e m_2 , separadas por uma distância r , atraem uma à outra com uma força cujo módulo é dado pela Eq. (1.11):

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (6.1)$$

onde

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dina-cm}^2 \cdot \text{g}^{-2}, \quad (6.2)$$

conforme foi determinado pela medida da força existente entre grandes esferas de chumbo, realizada com balanços de torsão extremamente sensíveis. Pode-se escrever a Eq. (6.1) em forma vetorial, para determinação da direção e do módulo das forças atrativas. Logo, a força gravitacional exercida sobre m_2 devido a m_1 é

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (6.3)$$

O vetor $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ dá à força a direção correta, e o seu módulo é dividido por um fator extra $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ que aparece no denominador.

A Lei da Gravitação conforme foi formulada na Eq. (6.3) aplica-se somente às partículas ou a corpos de dimensões desprezíveis, quando comparadas à distância entre eles; caso contrário, a distância $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ não é precisamente definida, nem ficam muito claros os pontos e a direção em que a força age. No caso de corpos de grandes dimensões, deve-se imaginar cada corpo dividido em pedaços, ou elementos, pequenos em comparação com as distâncias existentes entre eles e calcular as forças que agem em cada um dos elementos do corpo devido a cada elemento dos outros corpos.

Considere, agora, um corpo de grandes dimensões e massa M e uma partícula de massa m em um ponto P (Fig. 6.1). Se o corpo de massa M for dividido em pedaços pequenos de massas m_i , cada pedaço será atraído para m por uma força que se chamará \mathbf{F}_i . O sistema de forças \mathbf{F}_i pode ser reduzido, de acordo com o Teorema 1 da Seç. 5.6 (5.107), a uma força aplicada num ponto arbitrário, mais um conjugado. Considere que esta força seja \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (6.4)$$

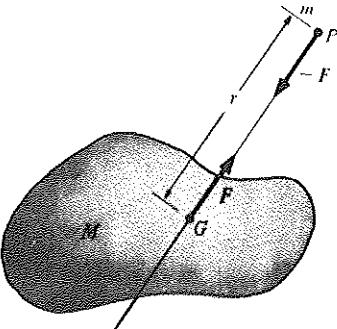


Fig. 6.1 Atração gravitacional entre uma partícula e um corpo de grandes dimensões.

e considere também que o ponto arbitrário seja P . Como nenhuma das forças F_i exerce torque em relação a P , o torque total em relação a P é igual a zero e o conjugado se anula.

O sistema de forças tem, portanto, uma resultante F , exercida ao longo de uma linha que passa pela massa m . A força que age sobre m é $-F$, pois a terceira lei de Newton se aplica a cada uma das forças F_i da Eq. (6.4). Coloca-se sobre a linha de ação de F um ponto G a uma distância r de P , tal que

$$|F| = \frac{GmM}{r^2}. \quad (6.5)$$

Logo, o sistema de forças gravitacionais entre o corpo M e a partícula m é equivalente à força resultante F , que age sobre M e uma força $-F$ que age sobre m , considerando-se que a massa do corpo M esteja concentrada no ponto G . O ponto G denomina-se *centro de gravidade* do corpo M relativo ao ponto P ; G não está, em geral, no centro de massa do corpo M , nem mesmo na linha que liga P ao centro de massa. As partes do corpo mais próximas de P são atraídas mais intensamente do que as partes mais afastadas, enquanto, na determinação do centro de massa, todas as partes do corpo são tratadas da mesma maneira. Além disso, a posição do ponto G dependerá da posição de P . Quando P está muito distante em comparação com as dimensões dos corpos, a aceleração da gravidade devido a m será aproximadamente constante em todo o corpo e, neste caso, como foi mostrado na Seç. 5.6, G coincidirá com o centro de massa. Também, no caso de uma esfera uniforme ou com uma distribuição de massa esfericamente simétrica, será mostrado, na próxima seção, que o centro de gravidade coincide sempre com o centro da esfera. O caráter relativo do conceito de centro de gravidade o torna pouco útil, exceto no caso de uma esfera ou de um corpo em campo gravitacional uniforme.

Para dois corpos de grandes dimensões, não se pode, em geral, definir centros de gravidade únicos, mesmo relativos um ao outro corpo, à exceção de casos especiais, como aqueles em que os corpos estão muito afastados, ou quando um deles é uma esfera. O sistema de forças gravitacionais em um dos dois corpos devido ao outro pode ou não ter uma resultante; se tiver, as duas resultantes são iguais e opostas e agem ao

longo da mesma linha. Embora, mesmo neste caso, não se pode definir os centros de gravidade G_1 e G_2 , dos dois corpos relativos um ao outro, pois a Eq. (6.5) especifica somente a distância $\overline{G_1G_2}$.

Na maioria das vezes, o problema geral de determinação das forças gravitacionais entre corpos recebe melhor tratamento quando se utilizam os conceitos de Teoria do Campo Gravitacional, que será discutida na seção seguinte.

6.2 CAMPO E POTENCIAL GRAVITACIONAIS

A força gravitacional F_m exercida sobre uma partícula de massa m no ponto r , devido a outra partícula m_i no ponto r_i , é um vetor soma das forças devida a cada uma das outras partículas agindo separadamente:

$$F_m = \sum_i \frac{mm_iG(r_i - r)}{|r_i - r|^3}. \quad (6.6)$$

Se, ao invés de massas punctiformes m_i , houver uma massa distribuída continuamente no espaço e cuja densidade é $\rho(r)$, a força sobre uma massa punctiforme m , localizada em r , é

$$F_m = \iiint \frac{mG(r' - r)\rho(r')}{|r' - r|^3} dV'. \quad (6.7)$$

A integral pode ser considerada na região que contém a massa cuja atração está sendo calculada, ou em todo o espaço, considerando-se que $\rho = 0$ fora desta região. Como a força F_m é proporcional a m , pode-se definir a *intensidade de campo gravitacional* (ou simplesmente *campo gravitacional*) $g(r)$, no ponto r do espaço, devido a uma distribuição de massa qualquer, como a força, por unidade de massa, que seria exercida sobre qualquer massa de tamanho reduzido, colocada naquele ponto:

$$g(r) = \frac{F_m}{m}, \quad (6.8)$$

onde F_m é a força que seria exercida sobre a massa punctiforme m no ponto r . Podemos escrever as fórmulas de $g(r)$ para massas punctiformes ou massas distribuídas continuamente:

$$g(r) = \sum_i \frac{m_iG(r_i - r)}{|r_i - r|^3}, \quad (6.9)$$

$$g(r) = \iiint \frac{G(r' - r)\rho(r')}{|r' - r|^3} dV'. \quad (6.10)$$

O campo $g(r)$ tem as dimensões de aceleração e, na realidade, é a aceleração experimentada por uma partícula no ponto r , sobre o qual não age nenhuma força além da gravitacional.

O cálculo do campo gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, a partir da Eq. (6.9) ou (6.10), é difícil, exceto em alguns casos simples, devido parcialmente ao fato de que para se resolverem as somas e as integrais necessita-se da soma de grande número de vetores. Como as forças gravitacionais entre pares de partículas são centrais, elas são conservativas, conforme foi mostrado na Seç. 3.12, pode-se, então, definir a energia potencial para uma partícula de massa m submetida à ação de forças gravitacionais. Para duas partículas, m e m_i , a energia potencial é dada de acordo com as Eqs. (3.229) e (3.230) por:

$$V_{mm_i} = -\frac{Gmm_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (6.11)$$

A energia potencial de uma partícula de massa m no ponto \mathbf{r} devido ao sistema de partículas m_i será, então,

$$V_m(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{-Gmm_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (6.12)$$

Define-se *potencial gravitacional* $G(\mathbf{r})$ no ponto \mathbf{r} como a energia potencial, por unidade de massa, de uma partícula no ponto \mathbf{r} , com o sinal negativo. [Esta escolha de sinal para $G(\mathbf{r})$ é a convencional na Teoria Gravitacional.]

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{V_m(\mathbf{r})}{m}. \quad (6.13)$$

Para um sistema de partículas,

$$G(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{m_i G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (6.14)$$

Se $\rho(\mathbf{r})$ representar uma distribuição contínua de massa, o seu potencial gravitacional será

$$G(\mathbf{r}) = \iiint \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.15)$$

Como o potencial gravitacional é função do ponto, em muitos casos é mais fácil trabalhar com o potencial $G(\mathbf{r})$ do que com o campo $\mathbf{g}(\mathbf{r})$. De acordo com a relação (3.185) entre a força e a energia potencial, pode-se calcular facilmente \mathbf{g} , quando G é conhecido, usando-se a seguinte relação

$$\mathbf{g} = \nabla G. \quad (6.16)$$

A relação inversa será

$$G(\mathbf{r}) = \int_{r_s}^r \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.17)$$

A definição de $G(\mathbf{r})$, assim como a da energia potencial $V(\mathbf{r})$, envolve uma constante arbitrária ou, de modo equivalente, um ponto arbitrário r_s no qual $G = 0$. Usualmente considera-se que r_s esteja a uma distância infinita de todas as massas, conforme foi considerado nas Eqs. (6.14) e (6.15).

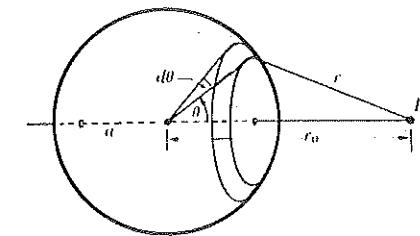


Fig. 6.2 Método para calcular o potencial de esfera oca.

Os conceitos de campo gravitacional e de potencial gravitacional são matematicamente idênticos aos conceitos de campo elétrico e potencial eletrostático, da Eletrostática, excetuando que o sinal negativo da Eq. (6.13) é convencional na Teoria Gravitacional e que todas as massas são positivas e todas as forças gravitacionais, atrativas, de forma que a lei da força tem sinal oposto ao da Eletrostática. A matéria sobre Teoria do Potencial é muito extensa, podendo-se dar aqui apenas um tratamento básico.

Como exemplo da utilização do conceito de potencial, calcula-se o potencial devido a uma esfera oca fina e homogênea de massa M , densidade σ por unidade de área e raio a :

$$M = 4\pi a^2 \sigma. \quad (6.18)$$

O potencial no ponto P é calculado integrando-se em um conjunto de anéis elementares, como é mostrado na Fig. 6.2. O potencial de um anel de raio $a \sin \theta$, largura $a d\theta$, para o qual toda a massa está à mesma distância r de P , será

$$dG = \frac{G\sigma(2\pi a \sin \theta)a d\theta}{r},$$

e o potencial total em P da esfera oca será

$$\begin{aligned} G(P) &= \int_0^\pi \frac{G\sigma(2\pi a \sin \theta)a d\theta}{r} \\ &= \frac{MG}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{1/2}} \\ &= \frac{MG}{2ar_0} [(r_0 + a) - |r_0 - a|]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Há dois casos a considerar, se P estiver fora ou dentro da esfera oca:

$$G(P) = \frac{MG}{r_0}, \quad r_0 \geq a, \quad G(P) = \frac{MG}{a}, \quad r_0 \leq a. \quad (6.20)$$

Logo, fora da esfera, o potencial será o mesmo que se obteria com uma massa punctiforme M colocada no centro da esfera. O campo gravitacional fora da esfera oca será, então, o mesmo que se obteria se a massa da esfera estivesse concentrada em seu centro. A mesma afirmativa será válida para o campo gravitacional exterior a qualquer distribuição de massa esfericamente simétrica, pois o campo total será a soma dos cam-

pos devido às camadas de esferas oca que o constituem. Este resultado prova a afirmativa feita na seção anterior: uma distribuição de massa esfericamente simétrica atrai (e, portanto, é atraída por) outra massa qualquer externa ao seu volume, como se toda a sua massa estivesse no centro. Dentro de uma esfera oca, o potencial é constante e, de acordo com a Eq. (6.16), o campo gravitacional dentro da esfera oca será igual a zero. Assim, um ponto dentro de uma distribuição de massa esfericamente simétrica, numa distância a do seu centro, é atraído como se a massa contida no interior da esfera de raio r estivesse no centro; a massa exterior não exerce força alguma. Seria muito mais difícil provar estes resultados através do cálculo direto das forças gravitacionais, o que pode ser verificado pelo leitor. Newton levou vinte anos para obter a solução. O cálculo da força de atração que a Terra exerce sobre a Lua, descrito na última seção do Cap. 1, foi obtido por Newton vinte anos antes dele publicar a Lei da Gravitação. É provável que ele tenha esperado até que pudesse demonstrar uma suposição implícita naqueles cálculos, a saber, que a Terra atrai qualquer corpo localizado fora do seu volume, como se toda a massa terrestre estivesse concentrada no centro. O fato de um estudante universitário poder resolver em vinte minutos um problema que perturbou Newton durante vinte anos não é a medida de seu talento matemático relativo, mas a medida do grande avanço sofrido pelos métodos matemáticos desde a invenção de Newton.

6.3 EQUAÇÕES DOS CAMPOS GRAVITACIONAIS

A determinação das equações diferenciais resolvidas pelas funções $g(r)$ e $G(r)$ é de interesse geral. A partir da Eq. (6.16), pode-se obter

$$\nabla \times g = 0. \quad (6.21)$$

Quando se escreve esta equação vetorial num sistema de coordenadas qualquer, ela se torna um conjunto de três equações diferenciais relacionadas ao campo gravitacional. Em coordenadas retangulares,

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0. \quad (6.22)$$

Estas equações sozinhas não determinam o campo gravitacional, pois são satisfeitas por qualquer campo gravitacional. Para determinar o campo gravitacional, é preciso uma equação que relate g com a distribuição de matéria.

Ao se estudar o campo gravitacional g devido à massa punctiforme m , considera-se um volume V qualquer, que contenha a massa m e que \hat{n} seja o vetor unitário normal à superfície S que limita o volume V (Fig. 6.3). Calcula-se a seguinte integral de superfície

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot g \, dS. \quad (6.23)$$

O significado físico ou geométrico desta integral pode ser observado introduzindo-se o conceito de linhas de força, desenhada em todos os pontos do espaço na direção de g , e

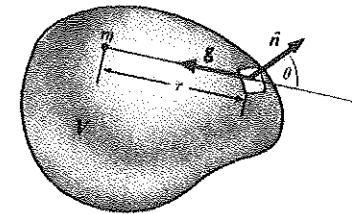


Fig. 6.3 Massa m contida no volume V .

de tal maneira que o número de linhas, por unidade de área, em qualquer ponto, é igual à intensidade do campo gravitacional. Então I será o número de linhas cortando a superfície S e denominada *fluxo* de g através de S . O elemento de ângulo sólido $d\Omega$ compreendido na posição de m por um elemento de superfície dS é definido como a área varrida, sobre uma esfera de raio unitário, por um raio que varre, em torno de m , um elemento de área dS . Esta área é

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}. \quad (6.24)$$

A partir da Fig. 6.3, tem-se a seguinte relação

$$\hat{n} \cdot g = -\frac{mG \cos \theta}{r^2}. \quad (6.25)$$

Substituindo as duas relações acima na integral I [Eq. (6.23)], o resultado será

$$I = \iint_S -mG \, d\Omega = -4\pi mG. \quad (6.26)$$

A integral I é independente da posição de m no interior da superfície S . Este resultado é análogo ao correspondente dado pela Eletrostática, onde existem 4π linhas de força saíndo de cada carga unitária (em esu; existem ϵ_0^{-1} linhas, por unidade de carga, em unidades do SI). Como o campo gravitacional de um número qualquer de massas é a soma dos seus campos individuais, para uma superfície S envolvendo um conjunto de massas m_i , tem-se:

$$I = \iint_S \hat{n} \cdot g \, dS = -\sum_i 4\pi m_i G. \quad (6.27)$$

Para uma distribuição contínua de massa no interior de S , esta equação torna-se

$$\iint_S \hat{n} \cdot g \, dS = -\iiint_V 4\pi G\rho \, dV. \quad (6.28)$$

Aplica-se, agora, o Teorema da Divergência, de Gauss [Eq. (3.115)], ao primeiro membro desta equação:

$$\iint_S \hat{n} \cdot g \, dS = \iiint_V \nabla \cdot g \, dV. \quad (6.29)$$

Subtraindo a Eq. (6.28) da Eq. (6.29), chega-se ao seguinte resultado:

$$\iiint_V (\nabla \cdot g + 4\pi G\rho) \, dV = 0. \quad (6.30)$$

Como a Eq. (6.30) deve ser válida para qualquer volume V e isto só pode ser verdadeiro se o integrando se anular,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho. \quad (6.31)$$

Esta equação em coordenadas cartesianas tem a seguinte forma

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -4\pi G\rho(x, y, z). \quad (6.32)$$

Quando $\rho(x, y, z)$ é conhecido, o conjunto de equações (6.22) e (6.32) permite, como pode ser demonstrado, determinar univocamente o campo gravitacional (g_x, g_y, g_z), adicionando-se a condição limite que $g \rightarrow 0$, quando $|r| \rightarrow \infty$. Substituindo o resultado acima na Eq. (6.16), obtém-se a seguinte equação para o potencial:

$$\nabla^2 G = -4\pi G\rho, \quad (6.33)$$

ou

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -4\pi G\rho. \quad (6.34)$$

Esta equação simples determina $G(x, y, z)$ univocamente, acrescentando-se a condição que $G \rightarrow 0$ quando $|r| \rightarrow \infty$. Este resultado, tirado da Teoria do Potencial, será usado aqui sem demonstração. A solução da Eq. (6.33) é, na realidade, a Eq. (6.15). É mais fácil, muitas vezes, resolver diretamente a equação diferencial parcial (6.34) do que calcular a integral na Eq. (6.15). As Eqs. (6.33), (6.16) e (6.8), juntas, constituem um resumo completo da Teoria da Gravitação, de Newton, da mesma forma que as Eqs. (6.31), (6.21) e (6.8), isto é, todos os resultados da teoria podem ser derivados de um ou do outro conjunto de equações.

A Eq. (6.33) chama-se *equação de Poisson*. As equações desta forma são encontradas freqüentemente na teoria física. Por exemplo, o potencial eletrostático satisfaz uma equação da mesma forma, onde ρ é a densidade de carga elétrica. Se $\rho = 0$, a Eq. (6.33) toma a seguinte forma:

$$\nabla^2 G = 0. \quad (6.35)$$

Esta é a chamada *equação de Laplace*. Uma teoria matemática extensa sobre as Eqs. (6.33) e (6.35) já foi desenvolvida,¹ no entanto uma discussão sobre a Teoria do Potencial está fora dos propósitos deste livro.

PROBLEMAS

1. a) A partir das três leis do movimento, de Newton, e das duas primeiras leis de Kepler sobre o movimento planetário (Seç. 3.15), mostre que a força que age sobre um

¹ O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*. Berlin, Springer, 1929.

planeta orienta-se na direção do Sol, sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância do planeta ao Sol.

b) Use a terceira lei de Kepler para demonstrar que as forças exercidas sobre os planetas são proporcionais a suas massas.

c) Se estes resultados sugerem uma lei universal para a atração entre duas massas quaisquer, use a terceira lei de Newton para mostrar que a força deve ser proporcional a ambas as massas.

2. Duas massas iguais, m , estão separadas por uma distância a . Determine o centro de gravidade das duas em relação ao ponto P localizado sobre a bissetriz perpendicular à linha que une as duas massas e a uma distância y , a partir do ponto médio entre elas. Mostre que quando $y \rightarrow \infty$, o centro de gravidade se aproxima do centro de massa. O que acontece quando $y \rightarrow 0$?

3. Uma massa αM localiza-se em $x = a$, $y = 0$, e uma segunda massa $(1 - \alpha)M$, em $x = 0$, $y = b$, onde $0 < \alpha < 1$. Determine as coordenadas x e y do centro de gravidade das duas massas em relação à origem. Mostre que as relações obtidas para x e y têm os limites apropriados quando $\alpha \rightarrow 0$ ou $b \rightarrow \infty$.

4. a) Determine o campo gravitacional e o potencial gravitacional em um ponto z qualquer do eixo de simetria de um hemisfério sólido, uniforme, de raio a e massa M . O centro do hemisfério está no ponto $z = 0$.

b) Determine o centro de gravidade do hemisfério, em relação a um ponto fora dele e localizado sobre o eixo z . Mostre que quando $z \rightarrow \pm\infty$, o centro de gravidade se aproxima do centro de massa.

5. Supondo que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme, com raio igual a a e massa M , calcule a intensidade do campo gravitacional e o potencial gravitacional em todos os pontos no interior e no exterior da Terra, considerando que $G = 0$ numa distância infinita.

6. Suponha que a densidade de uma estrela só é função do raio r medido a partir do centro da estrela e dado por²

$$\rho = \frac{Ma^2}{2\pi r(r^2 + a^2)^{3/2}}, \quad 0 \leq r < \infty,$$

onde M é a massa da estrela e a , uma constante que determina o tamanho dela. Determine a intensidade do campo gravitacional e o potencial gravitacional como funções de r .

² A expressão para ρ foi escolhida para facilitar a solução do problema e não porque ele possa ter remotamente qualquer relação com as variações de densidades no interior de uma estrela real qualquer.

7. Mostre que se o Sol fosse envolvido por uma nuvem esférica de poeira com densidade uniforme ρ , o campo gravitacional na nuvem de poeira seria

$$g = -\left(\frac{MG}{r^2} + \frac{4\pi}{3}\rho Gr\right)\hat{r},$$

onde M é a massa do Sol e r é um vetor de um ponto qualquer da nuvem de poeira ao centro da estrela.

Nota. Para solucionar os Probls. de 8 a 13 é preciso conhecer a matéria apresentada na Seç. 5.1.1.

8. Supondo-se que o interior da Terra possa ser tratado como um fluido incompressível em equilíbrio, (a) calcule a pressão no interior da Terra como função da distância ao centro; (b) usando os valores apropriados para a massa e o raio terrestre, calcule a pressão no centro em toneladas por polegadas quadradas.

9. Escreva as equações que devem ser resolvidas para se obter a pressão como função do raio em massa de gás M esfericamente simétrica, supondo que o gás obedece à Lei dos Gases Perfeitos e que a temperatura é conhecida como função do raio.

10. a) Suponha que um material comum congelado transforme-se, sob maior pressão do que p_0 , num estado de densidade ρ_1 muito elevada. Um planeta de massa M é construído de material cuja densidade média é ρ_0 no estado normal. Supondo-se densidade uniforme e condições de fluido em equilíbrio, para que massa M_0 e raio r_0 a pressão do centro de massa alcance o valor crítico p_0 ?

b) Se $M > M_0$, o planeta terá um núcleo muito denso, de densidade ρ_1 , envolvido por uma crosta cuja densidade é ρ_0 . Calcule a distribuição de pressão resultante, no interior do planeta, em termos do raio r_1 do núcleo e do raio r_2 do planeta. Mostre que se M for maior do que M_0 , então o raio r_2 do planeta será menor do que r_0 . (Considera-se que a massa de Júpiter esteja muito próxima da massa crítica M_0 , de forma que se o planeta considerado for mais pesado, deverá ser menor.)

11. Determine a pressão e a temperatura em função do raio da estrela do Probl. 6, se a estrela for composta de um gás perfeito de peso atômico A .

12. Determine a densidade e a intensidade de campo gravitacional como funções do raio interno de um planeta pequeno esfericamente simétrico, até a ordem de $(1/B^2)$, supondo que o módulo volumétrico B seja constante. A massa é igual a M e o raio a a [Sugestão. Calcule $g(r)$ supondo a densidade uniforme; determine, então, a pressão resultante $p(r)$ e a densidade $\rho(r)$ até a ordem $(1/B)$. Recalcule $g(r)$ usando o novo $\rho(r)$ e prossiga por aproximações sucessivas até termos de ordem $(1/B^2)$.]

13. Considere uma montanha de raio a e massa M , flutuando em equilíbrio na Terra, e cuja densidade seja igual à metade da densidade terrestre. Suponha que a seja muito menor do que o raio da Terra, de tal forma que a sua superfície possa ser considerada

plana nas vizinhanças da montanha. Se a montanha não estivesse presente, o campo gravitacional na superfície da Terra seria g_0 .

a) Determine a diferença entre g_0 e o valor real de g no topo da montanha.

b) Se, em virtude da erosão, o topo da montanha tornar-se plano no mesmo nível que a superfície vizinha da Terra, e se isto ocorrer num período de tempo curto, em comparação com o tempo necessário para a montanha emergir para o equilíbrio outra vez, determine a diferença entre g_0 e valor real de g na superfície da Terra e no centro da montanha destruída pela erosão.

14. a) Determine o potencial gravitacional e a intensidade de campo devido a uma haste de comprimento l e massa M num ponto a uma distância r do centro da haste numa direção que faz um ângulo θ com a haste. Suponha que $r \gg l$ e faça os cálculos somente até segunda ordem em l/r .

b) Determine o centro de gravidade da haste num ponto específico.

15. a) Calcule o potencial gravitacional de um anel circular uniforme, de raio a e massa M , numa distância r do centro do anel numa direção que faz um ângulo θ com o eixo do anel. Suponha que $r \gg a$ e calcule o potencial até segunda ordem em a/r .

b) Calcule, até a mesma ordem de aproximação, os componentes do campo gravitacional do anel num ponto específico.

16. Um corpo com simetria cilíndrica tem uma densidade $\rho(r, \theta)$ em coordenadas esféricas, a qual se anula para $r > a$. A origem $r = 0$ encontra-se no centro de massa. Obtenha o potencial aproximado num ponto r, θ afastado do corpo ($r \gg a$), expandindo o potencial em uma série de potências de (a/r) e mostre que ele tem a seguinte forma

$$g(r, \theta) = \frac{MG}{r} + \frac{QG}{r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{EG}{r^4} P_3(\cos \theta) + \dots,$$

onde $P_2(\cos \theta)$ e $P_3(\cos \theta)$ são polinômios quadráticos e cúbicos em $\cos \theta$ que não dependem do corpo, e Q e E são constantes que dependem da distribuição de massa. Determine as expressões para P_2 , P_3 , Q e E , e mostre que Q é da ordem de grandeza de Ma^2 e E da ordem de Ma^3 . É conveniente normalizar P_2 de forma que o termo constante seja $-\frac{1}{2}$, e P_3 de forma que o termo linear seja $-\frac{3}{2} \cos \theta$. Os parâmetros Q e E são, então, chamados *momento de quadripolo* e *momento de octopolo* do corpo. (Os polinômios P_2 , P_3 , ... são os polinômios de Legendre, mas não é necessário conhecê-los para resolver este problema.)

17. A Terra tem a forma aproximada de um elipsóide de revolução, achatado nos pólos, cujo diâmetro polar $2a(1 - \eta)$ é ligeiramente menor do que o diâmetro equatorial $2a \cdot (1 + \eta)$ ($\eta = 0,0034$). Para determinar-se até a primeira ordem em η , o efeito causado pelo achatamento nos pólos da Terra sobre o seu campo gravitacional, pode-se substituir sua forma elipsoidal pela de uma esfera de raio R , escolhido de maneira que a esfera tenha o mesmo volume terrestre. O campo gravitacional da Terra será, então, igual ao campo

de uma esfera de raio R uniforme com a massa da Terra, mas o campo de distribuição superficial de massa (positiva ou negativa), representando a massa por unidade de área, que deverá ser somada ou subtraída para formar o elipsóide real.

a) Mostre que a densidade superficial necessária, até primeira ordem em η , é

$$\sigma = \frac{1}{3} \eta a \rho (1 - 3 \cos^2 \theta),$$

onde θ é a co-latitude e ρ é a densidade terrestre (considerada uniforme). Como a massa total somada desta maneira à superfície é igual a zero, seu campo gravitacional representará o efeito da forma achatada dos pólos da Terra.

b) Mostre que a correção resultante para o potencial gravitacional a uma distância muito grande $r \gg a$, a partir do centro da Terra, até a ordem (a^3/r^3) , é

$$\delta G \doteq \frac{1}{5} \eta \frac{M G a^2}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad (r \gg a).$$

18. a) Use o Teorema de Gauss (6.26) para determinar o campo gravitacional dentro e fora de uma esfera oca de raio a , massa M e densidade uniforme.

b) Calcule o potencial gravitacional resultante.

19. a) Determine o campo gravitacional a uma distância x de um plano infinito de densidade σ , por unidade de área.

b) Compare este resultado com o do campo gravitacional próximo à superfície externa de uma esfera oca com a mesma densidade superficial. Que parte do campo é originária da matéria imediatamente adjacente ao ponto e que parte é originária da matéria mais distante?

20. Mostre que as equações para o campo gravitacional (6.21), (6.31) e (6.33) são satisfeitas pela intensidade de campo e potencial que foram determinados no Probl. 5.

*21. a) Mostre que δG determinado no problema 17(b) satisfaz a Eq. (6.35). Este resultado, junto com o fato de δG ter a mesma dependência angular que a densidade de massa que a originou, sugere que a fórmula dada por δG pode na realidade ser válida em todos os pontos fora da Terra.

b) Para demonstrar este resultado, considere a equação de Poisson (6.33) com $\rho = f(r)(1 - 3 \cos^2 \theta)$. Mostre que a solução $G = h(r)(1 - 3 \cos^2 \theta)$ satisfaz a Eq. (6.33) com esta forma de ρ , admitindo que

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{6h}{r^2} = -4\pi G f.$$

c) Demonstre que $h = r^{-3}$ satisfaz esta equação na região onde $f = 0$. Você é capaz de completar a demonstração de que a fórmula para δG , encontrada no Probl. 17(b), é de fato válida em todos os pontos situados fora da Terra?

CAPÍTULO 7 SISTEMAS DE COORDENADAS EM MOVIMENTO

7.1 ORIGEM DO MOVIMENTO DE COORDENADAS

Considere um ponto no espaço localizado pelos vetores r e r^* , em relação a duas origens O e O^* , e que O^* seja localizada por um vetor h em relação a O (Fig. 7.1). Assim, a relação entre as coordenadas r e r' é dada por

$$r = r^* + h, \quad (7.1)$$

$$r^* = r - h. \quad (7.2)$$

Em termos das coordenadas retangulares, com os eixos x^* , y^* e z^* paralelos aos eixos x , y e z , respectivamente, estas equações podem ser escritas

$$x = x^* + h_x, \quad y = y^* + h_y, \quad z = z^* + h_z; \quad (7.3)$$

$$x^* = x - h_x, \quad y^* = y - h_y, \quad z^* = z - h_z. \quad (7.4)$$

Se a origem O^* estiver em movimento em relação à origem O , considerada fixa, a relação entre as velocidades relativas aos dois sistemas é obtida derivando-se a Eq. (7.1):

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} \\ &= v^* + v_h, \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde v e v^* são as velocidades em relação a O e O^* do ponto em movimento, e v_h é a velocidade de O^* em relação a O . Supondo-se que os eixos x^* , y^* e z^* permaneçam paralelos a x , y e z , este deslocamento é chamado *translação* do sistema de coordenadas, com asterisco, em relação ao sistema sem asterisco. Em termos dos componentes, a Eq. (7.5) torna-se a derivada em relação ao tempo da Eq. (7.3). A relação entre as acelerações relativas é

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r^*}{dt^2} + \frac{d^2 h}{dt^2} \\ &= a^* + a_h. \end{aligned} \quad (7.6)$$

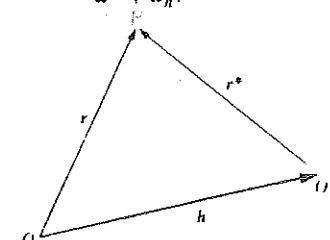


Fig. 7.1 Mudança na origem de coordenadas.

Estas equações também podem ser facilmente escritas em termos de seus componentes retangulares.

As equações do movimento, deduzidas por Newton, são válidas num sistema de coordenadas fixo; assim, para uma partícula de massa m sujeita à ação da força F , tem-se:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (7.7)$$

Usando a Eq. (7.6), pode-se escrever esta equação no sistema de coordenadas com asterisco:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} + m \mathbf{a}_h = \mathbf{F}. \quad (7.8)$$

Se O^* move-se em velocidade constante em relação a O , então $\mathbf{a}_h = 0$ e

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (7.9)$$

Assim, se as equações do movimento, de Newton, são válidas em qualquer sistema de coordenadas, também o serão em qualquer outro sistema de coordenadas que se move em velocidade constante em relação ao primeiro. Este é o Princípio da Relatividade Newtoniana. Este princípio indica, pelo menos no que concerne à Mecânica, que não se pode especificar um único sistema fixo de coordenadas, ou *sistema de referência*, ao qual se supõe que as leis de Newton se referem; especificando-se um desses sistemas, qualquer outro que se move em velocidade constante em relação a ele também servirá. Expressa-se, às vezes, esta propriedade da Eq. (7.7) dizendo que as equações do movimento de Newton permanecem *invariantes* na forma, ou *covariantes*, em relação a translações uniformes do sistema de coordenadas. O conceito de sistema de referência não é exatamente o mesmo que sistema de coordenadas, pois, alterando-se as coordenadas que não envolvem tempo, não se considera esta mudança como do sistema de referência. Um sistema de referência inclui todos os sistemas de coordenadas em repouso em relação a ele. O Princípio da Relatividade (especial) proposto por Einstein assegura que este princípio não é restrito à Mecânica, mas que é válido para todos os fenômenos físicos. A Teoria Especial da Relatividade é o resultado da aplicação deste princípio a todos os tipos de fenômenos, particularmente o eletromagnético. Na realidade, isto só pode ser feito modificando-se ligeiramente as equações do movimento, de Newton, e, de fato, mesmo as Eqs. (7.5) e (7.6) requerem modificações, como se verá no Cap. 13.

Para qualquer deslocamento de O^* , pode-se escrever a Eq. (7.8) na seguinte forma

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}^*}{dt^2} = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_h. \quad (7.10)$$

Esta equação tem a mesma forma que a de movimento (7.7) num sistema de coordenadas fixo, exceto que, em lugar da força F , tem-se $F - m \mathbf{a}_h$, chamado *força fictícia*. Pode-

se tratar o movimento de uma massa m , em relação a um sistema de coordenadas que se move, usando as equações do movimento de Newton, somando-se esta força fictícia à força real em ação. Do ponto de vista da Mecânica Clássica, ela não é na realidade uma força, mas uma parte da massa multiplicada pela aceleração que foi transportada para o outro membro da equação. A diferença essencial é que as forças reais F agindo sobre m dependem das posições e dos movimentos dos outros corpos, enquanto a força fictícia depende da aceleração do sistema de coordenadas com asterisco, em relação ao sistema de coordenadas fixo. Na Teoria Geral da Relatividade, os termos como $-m \mathbf{a}_h$ são considerados como a força F , de modo que as mesmas leis do movimento são válidas em todos os sistemas de coordenadas. Isto só pode, certamente, ser realizado se for possível demonstrar como obter a força $-m \mathbf{a}_h$ das posições e movimentos dos outros corpos. O problema não é tão simples como pode parecer, a partir desta breve apresentação, e para poder ser resolvido será necessário introduzir modificações nas leis do movimento.¹

7.2 ROTAÇÃO DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Consideram-se a seguir os sistemas de coordenadas x, y e z e x^*, y^* e z^* , cujos eixos giram um em relação ao outro, como é mostrado na Fig. 7.2, onde, no presente caso, considera-se haver coincidência na origem dos dois conjuntos. Introduzindo os vetores unitários \hat{x}, \hat{y} e \hat{z} associados aos eixos x, y e z , e os vetores unitários \hat{x}^*, \hat{y}^* e \hat{z}^* associados aos eixos x^*, y^* e z^* , pode-se exprimir o vetor posição \mathbf{r} em termos de seus componentes, ao longo destes sistemas de eixos, como:

$$\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}, \quad (7.11)$$

$$\mathbf{r} = x^* \hat{x}^* + y^* \hat{y}^* + z^* \hat{z}^*. \quad (7.12)$$

Como as origens coincidem, um ponto será representado pelo mesmo vetor \mathbf{r} nos dois sistemas de coordenadas; somente os componentes de \mathbf{r} serão diferentes, ao longo de eixos diferentes. As relações entre os sistemas de coordenadas podem ser obtidas pe-

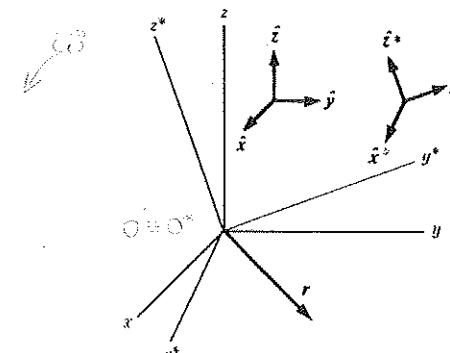


Fig. 7.2 Rotação dos eixos de coordenadas.

¹ P. G. Bergmann, *Introduction to the theory of relativity*. New York, Prentice-Hall, 1946, Part 2.

lo produto escalar entre qualquer um dos vetores unitários, com asterisco ou sem asterisco, e as Eqs. (7.11) e (7.12). Por exemplo, calculando-se $\hat{x} \cdot r$, $\hat{y} \cdot r$ e $\hat{z} \cdot r$, usando ambas as Eqs. (7.11) e (7.12) e igualando-se os resultados, obtém-se

$$\begin{aligned}x &= x^*(\hat{x}^* \cdot \hat{x}) + y^*(\hat{y}^* \cdot \hat{x}) + z^*(\hat{z}^* \cdot \hat{x}), \\y &= x^*(\hat{x}^* \cdot \hat{y}) + y^*(\hat{y}^* \cdot \hat{y}) + z^*(\hat{z}^* \cdot \hat{y}), \\z &= x^*(\hat{x}^* \cdot \hat{z}) + y^*(\hat{y}^* \cdot \hat{z}) + z^*(\hat{z}^* \cdot \hat{z}).\end{aligned}\quad (7.13)$$

O produto escalar ($\hat{x}^* \cdot \hat{x}$) etc. são os co-senós dos ângulos entre os eixos correspondentes. Fórmulas idênticas para x^* , y^* e z^* , em termos de x , y e z , podem ser obtidas facilmente pelo mesmo procedimento. As Eqs. (7.11), (7.12) e (7.13) não dependem do fato de o vetor r ser desenhado a partir da origem. Fórmulas análogas podem ser obtidas em termos dos componentes de um vetor A qualquer em relação aos dois sistemas de eixos. Se o eixo com asterisco girar, os co-senós dos ângulos entre os eixos com asterisco e os eixos sem asterisco são funções do tempo.

A derivada em relação ao tempo de um vetor A qualquer foi definida, de acordo com a Eq. (3.52), por:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (7.14)$$

Ao tentar-se aplicar esta definição para o presente caso, encontram-se dificuldades caso os sistemas de coordenadas estiverem girando um em relação ao outro. Um vetor que é constante num sistema de coordenadas não o será no outro, pois tem movimento de rotação. Esta definição requer a subtração de $A(t)$ de $A(t + \Delta t)$. Durante o intervalo de tempo Δt , o sistema de coordenadas x^* , y^* e z^* girará em relação ao sistema x , y e z , de forma que, no tempo $t + \Delta t$, os dois sistemas não concordarão com a definição de quem será (ou foi) $A(t)$, isto é, qual o vetor que estará na posição que A ocupava no tempo t . Como resultado, a derivada de um vetor será diferente nos dois sistemas de coordenadas. Usa-se d/dt para indicar a derivada em relação ao tempo, no sistema de coordenadas sem asterisco, que se considera fixo, e d^*/dt para indicar a derivada em relação ao tempo no sistema de coordenadas com asterisco que está girando. Esta distinção será feita somente em relação a vetores, pois, não havendo ambigüidade em relação às grandezas numéricas, indicam-se as suas derivadas por d/dt ou por um ponto sobre a grandeza, que terá o mesmo significado em todos os sistemas de coordenadas. Considere o vetor A dado por

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}, \quad (7.15)$$

$$A = A_x^* \hat{x}^* + A_y^* \hat{y}^* + A_z^* \hat{z}^*. \quad (7.16)$$

Pode-se obter a derivada em relação ao tempo de A por derivação da Eq. (7.15), considerando-se \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} como vetores constantes no sistema fixo:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z}. \quad (7.17)$$

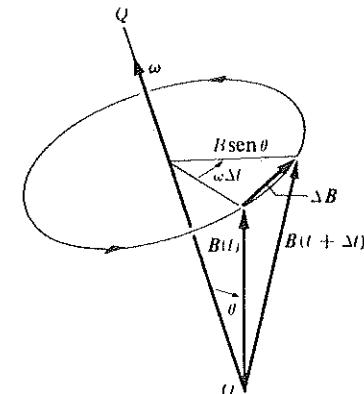


Fig. 7.3 Derivada, em relação ao tempo, de um vetor girante.

Similarmente, as derivadas de A em termos de seus componentes sem asteriscos serão dadas por

$$\frac{d^*A}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^*. \quad (7.18)$$

Podem-se considerar as Eqs. (7.17) e (7.18) como as definições das derivadas de um vetor em relação ao tempo, nos sistemas sem e com asteriscos. Pode-se também obter a fórmula para d/dt nos componentes com asterisco, tomando-se a derivada sem asterisco da Eq. (7.16), lembrando-se sempre que os vetores unitários \hat{x}^* , \hat{y}^* e \hat{z}^* movem-se em relação ao sistema sem asterisco; tem-se, então, a seguinte derivada em relação ao tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^* + A_x^* \frac{d\hat{x}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{y}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{z}^*}{dt}. \quad (7.19)$$

Uma fórmula semelhante pode ser obtida para d^*A/dt em termos de seus componentes sem asterisco.

Suponha, agora, que o sistema de coordenadas com asterisco gire em torno de um OQ , que passa por sua origem, com uma velocidade angular ω (Fig. 7.3). Define-se vetor *velocidade angular* ω como um vetor de módulo ω orientado ao longo do eixo OQ e na direção tomada por um parafuso com rosca direita, que gira com o sistema com asterisco. Considere o vetor B em repouso no sistema com asterisco. Sua derivada no sistema com asterisco é igual a zero, mostrando-se que a sua derivada no sistema sem asteriscos é

$$\frac{dB}{dt} = \omega \times B. \quad (7.20)$$

Para subtrair $B(t)$ de $B(t + \Delta t)$, desenham-se estes vetores com as suas extremidades inferiores em uma origem comum; será conveniente colocar esta origem sobre o eixo de rotação. (A derivada em relação ao tempo depende somente dos componentes de B ao longo dos eixos, e não da posição de B no espaço.) Primeiramente verifica-se, a

partir da Fig. 7.3, que a direção de dB/dt é dada corretamente pela Eq. (7.20), levando-se em conta a definição de produto vetorial [Eq. (3.24) e Fig. 3.11]. O módulo do vetor dB/dt dado pela Eq. (7.20) é

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = |\omega \times B| = \omega B \sin \theta. \quad (7.21)$$

Esta é a fórmula correta, pois, como se pode verificar na Fig. 7.3, quando Δt é pequeno,

$$|\Delta B| = (B \sin \theta)(\omega \Delta t).$$

Quando a Eq. (7.20) é aplicada aos vetores \hat{x}^* , \hat{y}^* e \hat{z}^* e usando-se as Eqs. (7.18) e (7.16), a Eq. (7.19) torna-se igual a

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{d^*A}{dt} + A_x^*(\omega \times \hat{x}^*) + A_y^*(\omega \times \hat{y}^*) + A_z^*(\omega \times \hat{z}^*) \\ &= \frac{d^*A}{dt} + \omega \times A. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Esta é a relação fundamental entre as derivadas em relação ao tempo, para sistemas de coordenadas com movimento de rotação relativo. Deve ser lembrado que a derivada em relação ao tempo de qualquer vetor no sistema de coordenadas sem asterisco é igual à sua derivada no sistema com asterisco, mas a derivada no sistema sem asterisco que o vetor teria se estivesse em repouso no sistema sem asterisco. Aplica-se a Eq. (7.22) mesmo quando o vetor velocidade angular ω varia com o tempo em módulo e direção. Derivando o primeiro e o segundo membros da Eq. (7.22) e aplicando outra vez a Eq. (7.22) a A e d^*A/dt , obtém-se o seguinte resultado para derivada de segunda ordem de um vetor A qualquer:

$$\begin{aligned} \frac{d^2A}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^*A}{dt} \right) + \omega \times \frac{dA}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times A \\ &= \frac{d^{*2}A}{dt^2} + \omega \times \frac{d^*A}{dt} + \omega \times \left(\frac{d^*A}{dt} + \omega \times A \right) + \frac{d\omega}{dt} \times A \\ &= \frac{d^{*2}A}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d^*A}{dt} + \omega \times (\omega \times A) + \frac{d\omega}{dt} \times A. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Como $\omega \times A = 0$ se ω for paralelo a A [Eq. (3.29)], as derivadas nos sistemas com e sem asterisco de um vetor paralelo ao eixo de rotação são iguais, de acordo com a Eq. (7.22). Em particular,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^*\omega}{dt}.$$

Deve-se notar que o vetor ω em ambos os membros desta equação é a velocidade angular do sistema com asterisco em relação ao sistema sem asterisco, embora sua derivada, em relação ao tempo no primeiro membro, seja calculada em relação ao sistema

sem asterisco e, no segundo membro, em relação ao sistema com asterisco. A velocidade angular do sistema sem asterisco em relação ao sistema com asterisco será $-\omega$.

Mostra-se, agora, que as relações obtidas acima para a rotação de um sistema de coordenadas são gerais, pois se aplicam a qualquer movimento dos eixos com asterisco em relação dos eixos sem asterisco. Considere que a taxa de variação dos vetores unitários do sistema com asterisco em relação ao sistema de coordenadas sem asterisco seja dada em termos dos componentes ao longo dos eixos com asterisco por

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}^*}{dt} &= a_{11}\hat{x}^* + a_{12}\hat{y}^* + a_{13}\hat{z}^*, \\ \frac{d\hat{y}^*}{dt} &= a_{21}\hat{x}^* + a_{22}\hat{y}^* + a_{23}\hat{z}^*, \\ \frac{d\hat{z}^*}{dt} &= a_{31}\hat{x}^* + a_{32}\hat{y}^* + a_{33}\hat{z}^*. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Derivando a equação

$$\hat{x}^* \cdot \hat{x}^* = 1, \quad (7.25)$$

obtém-se

$$\frac{d\hat{x}^*}{dt} \cdot \hat{x}^* = 0. \quad (7.26)$$

A partir deste resultado e das equações correspondentes para \hat{y}^* e \hat{z}^* , tem-se

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0. \quad (7.27)$$

Derivando a equação

$$\hat{x}^* \cdot \hat{z}^* = 0, \quad (7.28)$$

obtém-se

$$\frac{d\hat{x}^*}{dt} \cdot \hat{z}^* = -\hat{x}^* \cdot \frac{d\hat{z}^*}{dt}. \quad (7.29)$$

A partir desta equação e das outras equações análogas, obtém-se

$$a_{31} = -a_{13}, \quad a_{12} = -a_{21}, \quad a_{23} = -a_{32}. \quad (7.30)$$

Torna-se claro, a partir das Eqs. (7.27) e (7.30), que se os três coeficientes, a_{12} , a_{23} e a_{31} , forem especificados, os outros seis estarão determinados. Define-se um vetor ω com componentes no sistema de coordenadas x^* , y^* e z^* como

$$\omega_x^* = a_{23}, \quad \omega_y^* = a_{31}, \quad \omega_z^* = a_{12}. \quad (7.31)$$

Até aqui, este resultado é somente uma definição, no entanto, pode-se sempre definir um vetor fornecendo seus componentes em relação a um sistema de coordenadas qualquer. Chama-se este vetor de ω porque, como será demonstrado, ele na realidade é a velocidade angular do sistema de coordenadas com asterisco. As Eqs. (7.24)

podem agora ser reescritas, com auxílio das Eqs. (7.27), (7.30) e (7.31), na seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}^*}{dt} &= \omega \times \hat{x}^*, \\ \frac{d\hat{y}^*}{dt} &= \omega \times \hat{y}^*, \\ \frac{d\hat{z}^*}{dt} &= \omega \times \hat{z}^*. \end{aligned}\quad (7.32)$$

De acordo com a Eq. (7.20), estas derivadas em relação ao tempo de \hat{x}^* , \hat{y}^* e \hat{z}^* são exatamente aquelas que deveriam ser obtidas se os vetores unitários do sistema com asterisco estivessem girando em velocidade angular ω . Logo, não importando como os eixos coordenados com asterisco se movam, pode-se definir, em qualquer instante, o vetor velocidade angular ω , dado pela Eq. (7.31), de forma que a derivada, em relação ao tempo, de qualquer vetor nos sistemas de coordenadas com e sem asterisco, esteja relacionada de acordo com as Eqs. (7.22) e (7.23).

Suponha que o sistema de coordenadas com asterisco se move de forma que a sua origem O^* permaneça fixa na origem O do sistema de coordenadas fixo. Assim, um ponto qualquer no espaço será localizado pelo mesmo vetor posição r em ambos os sistemas de coordenadas [Eqs. (7.11) e (7.12)]. Aplicando-se as Eqs. (7.22) e (7.23) ao vetor posição r , obtém-se as fórmulas para a relação entre as velocidades e as acelerações nos dois sistemas de coordenadas:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^*r}{dt} + \omega \times r, \quad (7.33)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^*2r}{dt^2} + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times \frac{d^*r}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r. \quad (7.34)$$

A fórmula (7.34) denomina-se *Teorema de Coriolis*. O primeiro termo do segundo membro é a aceleração em relação ao sistema com asterisco. O segundo termo denomina-se *aceleração centrípeta* de um ponto em rotação em torno de um eixo (*centrípeta* significa “dirigida para o centro”). Usando a notação apresentada na Fig. 7.4, pode-se verificar facilmente que $\omega \times (\omega \times r)$ aponta na direção perpendicular ao eixo de rotação, e que o módulo é dado por

$$\begin{aligned}|\omega \times (\omega \times r)| &= \omega^2 r \operatorname{sen} \theta \\ &= \frac{v^2}{r \operatorname{sen} \theta}, \end{aligned}\quad (7.35)$$

onde $v = \omega r \operatorname{sen} \theta$ é a velocidade do movimento circular e $(r \operatorname{sen} \theta)$ é a distância da partícula ao eixo. O terceiro termo só estará presente quando o ponto r se mover no sistema com asterisco, e denomina-se *aceleração de Coriolis*. O último termo se anula quando a velocidade angular de rotação é constante em torno do sistema de eixos com asterisco:

$$m \frac{d^*2r}{dt^2} + m\omega \times (\omega \times r) + 2m\omega \times \frac{d^*r}{dt} + m \frac{d\omega}{dt} \times r = F. \quad (7.36)$$

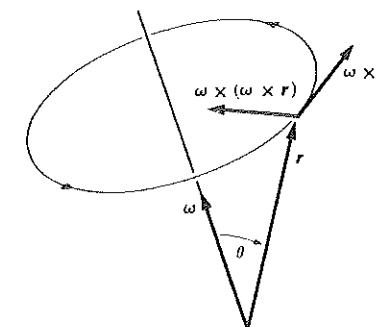


Fig. 7.4 Aceleração centrípeta.

Transpondo o segundo, o terceiro e o quarto termos para o segundo membro, obtém-se uma equação do movimento similar em forma à equação de movimento de Newton:

$$m \frac{d^*2r}{dt^2} = F - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times \frac{d^*r}{dt} - m \frac{d\omega}{dt} \times r. \quad (7.37)$$

Resolução: O segundo termo à direita chama-se *força centrífuga* (*centrífuga* significa “orientada para fora do centro”); e o terceiro termo, *força de Coriolis*. O último termo não tem nome especial e só aparece em casos de rotações não-uniformes. Introduzindo-se as forças fictícias, centrífuga e de Coriolis, as leis de movimento em relação a sistemas de coordenadas com movimento de rotação serão iguais às equações em um referencial fixo. Existe uma grande confusão em relação ao termo “força centrífuga”, que, na realidade, não é uma força, pelo menos na Mecânica Clássica, e não estará presente se se faz referência a um sistema de coordenadas fixo no espaço. Pode-se, entretanto, tratar um sistema de coordenadas com movimento de rotação como se fosse um sistema fixo introduzindo a força centrífuga e a força de Coriolis. Assim, uma partícula que se move em círculo não tem força centrífuga agindo sobre ela, mas somente uma força dirigida para o centro que produz a sua aceleração centrípeta. No entanto, caso se considere um sistema que gira com a partícula, neste sistema a partícula estará em repouso e a força orientada para o centro será contrabalançada pela força centrífuga. Frequentemente é útil adotar-se um sistema de coordenadas com movimento de rotação. Por exemplo, ao estudar-se a ação de uma separadeira de creme de leite, é mais conveniente escolher um sistema de coordenadas em que o líquido esteja em repouso, e usar as leis de difusão do creme, em direção ao eixo sob a ação do campo de forças centrífugas, e, então, tentar transformar o movimento para o ponto de vista de um observador fixo que olhe o líquido em movimento giratório.

Pode-se tratar os sistemas de coordenadas em movimento de translação e rotação simultâneos em relação ao outro, usando-se a Eq. (7.1) para representar a relação existente entre os vetores coordenados r e r^* , em relação às origens O e O^* , não

necessariamente coincidentes. Para obter as Eqs. (7.32), não se faz suposição alguma quanto à origem do sistema de coordenadas com asterisco. Assim sendo, as Eqs. (7.22) e (7.23) também podem ser usadas para representar as derivadas em relação ao tempo de um vetor qualquer, no sistema de coordenadas sem asterisco, em termos de suas derivadas em relação ao tempo no sistema com asterisco. Substituindo-se $d\mathbf{r}^*/dt$ e $d^2\mathbf{r}^*/dt^2$ nas Eqs. (7.5) e (7.6) por suas expressões em termos de derivadas do sistema com asterisco, em relação às coordenadas deste sistema dadas pelas Eqs. (7.33) e (7.34), obtém-se para a posição, a velocidade e a aceleração de um ponto, em relação a sistemas de coordenadas com movimentos de translação e rotação relativos, as seguintes fórmulas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{h}, \quad (7.38)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^* \mathbf{r}^*}{dt} + \omega \times \mathbf{r}^* + \frac{d\mathbf{h}}{dt}, \quad (7.39)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\mathbf{r}^*}{dt^2} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}^*) + 2\omega \times \frac{d^*\mathbf{r}^*}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}^* + \frac{d^2\mathbf{h}}{dt^2}. \quad (7.40)$$

7.3 LEIS DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA

A equação de movimento, em relação a um sistema fixo no espaço, para uma partícula de massa m sujeita à força gravitacional mg e a outras forças não gravitacionais \mathbf{F} é:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + mg. \quad (7.41)$$

Considerando-se o movimento da partícula em relação ao sistema de coordenadas fixo relativo à Terra, que gira em velocidade angular constante ω , e medindo-se o vetor \mathbf{r} a partir do centro da Terra, tem-se, de acordo com a Eq. (7.34):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F} + mg \\ &= m \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} + m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2m\omega \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

a qual pode ser apresentada na seguinte forma:

$$m \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m[g - \omega \times (\omega \times \mathbf{r})] - 2m\omega \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}. \quad (7.43)$$

Esta equação tem a mesma forma que a do movimento de Newton. Combinaram-se os termos de força centrífuga e força gravitacional, porque ambos são proporcionais à

massa da partícula e ambos dependem somente da posição da partícula; em seus efeitos mecânicos estas duas forças são indistinguíveis. Pode-se definir a aceleração gravitacional efetiva g_e em qualquer ponto sobre a superfície terrestre por:

$$g_e(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \quad (7.44)$$

A força gravitacional que se mediou experimentalmente sobre um corpo de massa m , em repouso² na superfície terrestre, é mg_e . Como $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ aponta radialmente para fora do eixo da Terra, g_e , em cada ponto ao norte do equador, apontará ligeiramente para o sul do centro da Terra, como pode ser verificado na Fig. 7.5. Um corpo largado próximo à superfície terrestre começará a cair com aceleração g_e , o fio de um prumo toma a direção de g_e e um líquido atingirá o equilíbrio na forma de um elipsóide achata-do nos pólos. O grau de achatamento é tal que faz com que a superfície da Terra seja perpendicular a g_e em todos os pontos (desprezando-se as irregularidades locais).

A Eq. (7.43) pode, então, ser escrita como

$$m \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + mg_e - 2m\omega \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}. \quad (7.45)$$

A velocidade e a aceleração que aparecem nesta equação não serão afetadas se a origem do sistema de coordenadas for mudada para um ponto conveniente qualquer na superfície terrestre; logo, esta equação se aplica a uma partícula de massa m colocada na superfície da Terra, em relação a um sistema de coordenadas local em repouso também na superfície terrestre. O único termo não familiar é a força de Coriolis, exercida sobre uma partícula em movimento. O leitor deve convencer-se, através de alguns cálculos, de que esta força é comparativamente pequena em velocidades comuns $d^*\mathbf{r}/dt$. Será instrutivo tentar determinar a direção da força de Coriolis para várias direções do movimento em vários pontos da superfície da Terra. A força de Coriolis é da máxima importância no movimento de grandes massas de ar, pois é a responsável pelo fato de, no Hemisfério Norte, os furacões e ciclones girarem em direção sul-leste-norte-oeste. No Hemisfério Norte, a força de Coriolis age de modo a defletir um objeto em movi-

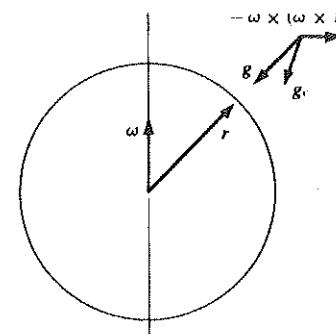


Fig. 7.5 Aceleração da gravidade efetiva, considerando-se a rotação da Terra.

² Um corpo em movimento também está sujeito à força de Coriolis.

mento para a direita. Como o vento sopra para uma zona de baixa pressão, ele é defletido para a direita, de forma que o vento gira no sentido contrário dos ponteiros dos relógios na zona de baixa pressão. Uma massa de ar girando desta maneira terá uma zona de baixa pressão à sua esquerda e uma zona de pressão mais alta à sua direita. Isto é exatamente o que será necessário para contrabalançar a força de Coriolis que o puxa para a direita. Uma massa de ar poderá mover-se permanentemente em uma só direção se existir uma zona de alta pressão, à direita, que contrabalance a força de Coriolis. Reciprocamente, um gradiente de pressão sobre a superfície da Terra tende a desenvolver ventos que se movem perpendicularmente a esta superfície. Os ventos em direção oeste, predominantes nas zonas temperadas do norte, indicam que a pressão atmosférica na direção do equador é maior do que na direção dos pólos, pelo menos próximo à superfície da Terra. Os ventos constantes na direção leste, na zona equatorial, devem-se ao fato de uma massa de ar que se move na direção do equador adquirir velocidade na direção leste devido à força de Coriolis exercida sobre ele. Os ventos constantes são mantidos pelas zonas de alta pressão em ambos os lados da zona equatorial.

7.4 PÊNDULO DE FOUCAULT

Uma aplicação interessante da teoria dos sistemas de coordenadas com movimento de rotação é o do pêndulo de Foucault. O pêndulo de Foucault tem uma massa pendurada em um fio que pode oscilar livremente no plano vertical. O pêndulo, inicialmente, oscila no plano vertical definido, podendo-se observar o movimento de precessão do plano de oscilação em torno do eixo vertical após um período de várias horas. A massa escolhida deve ser bem pesada, o fio muito longo e o suporte aproximadamente sem atrito, para que o pêndulo possa continuar oscilando livremente durante um intervalo de tempo longo. Escolhendo-se a origem do sistema de coordenadas diretamente abaixo do ponto de suspensão, no ponto de equilíbrio da massa m do pêndulo, então o vetor r será aproximadamente horizontal, para pequenas amplitudes de oscilação

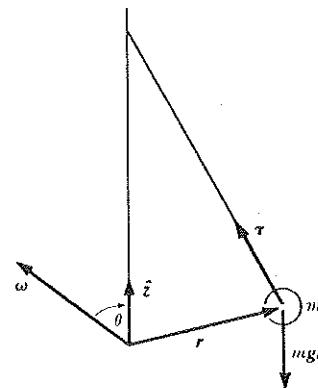


Fig. 7.6 Pêndulo de Foucault.

do pêndulo. No Hemisfério Norte, ω faz um ângulo agudo com a vertical, como é mostrado na Fig. 7.6. Chamando-se a tração do fio de τ , a equação de movimento da massa será como a Eq. (7.45):

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \tau + mg_e - 2m\omega \times \frac{dr}{dt}. \quad (7.46)$$

Se a força de Coriolis não estivesse presente, esta seria a equação do movimento de um pêndulo simples sem se levar em consideração a rotação da Terra. A força de Coriolis é muito pequena, menor do que 0,1% da força gravitacional, considerando-se uma velocidade de 8 km/h ou menor, e seu componente vertical é, portanto, desprezível em comparação com a força gravitacional. (É a força vertical que determina o valor da tração no fio.) Embora o componente horizontal da força de Coriolis seja perpendicular à velocidade dr/dt , e como não existem outras forças nesta direção, quando o pêndulo oscila para trás e para a frente, ela pode modificar a natureza do movimento. Qualquer força cujo componente horizontal seja perpendicular a dr/dt impossibilita o pêndulo de continuar oscilando num plano vertical fixo. Para resolver o problema incluindo o termo de Coriolis, usa-se o resultado experimental como sugestão, tentando-se determinar um novo sistema de coordenadas que giram em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto de suspensão em velocidade angular tal que, neste sistema, os termos de Coriolis, ou, pelo menos, seus componentes horizontais, não existam. Introduz-se um novo sistema de coordenadas girando em torno do eixo vertical em velocidade constante $\hat{z}\Omega$ (em relação à Terra), onde \hat{z} é um vetor unitário vertical; chama-se o sistema de coordenadas com movimento de precessão o sistema de coordenadas linha e indica-se a derivada em relação ao tempo neste sistema pelo símbolo d'/dt . De acordo com as Eqs. (7.33) e (7.34), tem-se:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d'r}{dt} + \Omega \hat{z} \times r, \quad (7.47)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d'^2 r}{dt^2} + \Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times r) + 2\Omega \hat{z} \times \frac{dr}{dt}. \quad (7.48)$$

A Eq. (7.46) torna-se

$$\begin{aligned} m \frac{d'^2 r}{dt^2} &= \tau + mg_e - 2m\omega \times \left(\frac{d'r}{dt} + \Omega \hat{z} \times r \right) \\ &\quad - m\Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times r) - 2m\Omega \hat{z} \times \frac{dr}{dt} \\ &= \tau + mg_e - 2m\Omega \omega \times (\hat{z} \times r) - m\Omega^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times r) \\ &\quad - 2m(\omega + \hat{z}\Omega) \times \frac{dr}{dt}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Com auxílio da Eq. (3.35), expande-se o triplo vetorial, resultando:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \tau + mg_e - m(2\Omega\omega \cdot r + \Omega^2 \hat{z} \cdot r) \hat{z} + m(2\Omega \hat{z} \cdot \omega + \Omega^2) r - 2m(\omega + \hat{z}\Omega) \times \frac{dr}{dt}. \quad (7.50)$$

Cada vetor, no segundo membro da Eq. (7.50), acha-se no plano vertical que contém o pêndulo, exceto o último termo. Como, para pequenas oscilações, d^2r/dt^2 é praticamente horizontal, faz-se com que o último termo esteja também neste plano vertical fazendo $(\omega - \hat{z}\Omega)$ horizontal. Logo, exige-se que

$$\hat{z} \cdot (\omega + \hat{z}\Omega) = 0. \quad (7.51)$$

Esta relação permite determinar Ω :

$$\Omega = -\omega \cos \theta, \quad (7.52)$$

onde ω é a velocidade angular de rotação da Terra, Ω é a velocidade angular do sistema de coordenadas com movimento de precessão em relação à Terra, e θ é o ângulo entre a vertical e o eixo da Terra, como é indicado na Fig. 7.6. A vertical encontra-se ao longo da direção de $-g_e$ e, como esta direção é aproximadamente a mesma de $-g$ (veja Fig. 7.5), θ será praticamente igual à latitude, isto é, o ângulo entre r e ω , na Fig. 7.5. No caso de pequenas oscilações, se Ω for determinada pela Eq. (7.52), o produto vetorial, no último termo da Eq. (7.5), será vertical. Como todos os termos do segundo membro da Eq. (7.50) estão agora no plano vertical que contém o pêndulo, a aceleração d^2r/dt^2 da massa no sistema com movimento de precessão estará sempre na direção do eixo vertical, e se o pêndulo estiver inicialmente oscilando para frente e para trás, ele continuará oscilando para frente e para trás no mesmo plano vertical, no sistema de coordenadas com precessão. Em relação à Terra, o plano do movimento precessa em velocidade angular Ω cujos módulo e sentido são dados pela Eq. (7.52). No Hemisfério Norte, o movimento de precessão se dá no sentido dos ponteiros do relógio com a face para baixo.

Como os últimos três termos do segundo membro da Eq. (7.50) são muito menores que os dois primeiros, o movimento real, no sistema de coordenadas com movimento de precessão, é praticamente o mesmo que seria obtido para um pêndulo colocado na superfície da Terra, sem se considerar o seu movimento de rotação. Mesmo no caso de grandes amplitudes de oscilação, onde a velocidade d^2r/dt^2 tem um componente vertical, um estudo cuidadoso mostrará que o último termo na Eq. (7.50), quando Ω é escolhido de acordo com a Eq. (7.52), não provoca precessão adicional em relação ao sistema de coordenadas com movimento de precessão, mas simplesmente faz com que a oscilação da massa seja realizada num arco que passa ligeiramente a leste da vertical que atravessa o ponto de suspensão. No equador, Ω é igual a zero, e o pêndulo de Foucault não terá movimento de precessão; se o leitor refletir um momento sobre o assunto, talvez encontre as razões físicas que determinam tal fato. No pólo norte ou no pólo sul, $\Omega = \pm \omega$, e o pêndulo oscila simplesmente em plano vertical fixo no espaço, enquanto a Terra gira abaixo dele.

Note que a discussão sobre o pêndulo de Foucault foi razoavelmente completa, pois usou-se o Teorema de Coriolis duas vezes, sem resolver realmente as equações do movimento.

7.5 TEOREMA DE LARMOR

A força de Coriolis na Eq. (7.37) tem a mesma forma que as forças magnéticas exercidas sobre uma partícula carregada (Eq. 3.281), pelo fato de ambas serem obtidas a partir do produto vetorial da velocidade com um vetor representando o campo de força. Na realidade, na Teoria da Relatividade Geral, as forças de Coriolis sobre uma partícula em um sistema de coordenadas com rotação podem ser consideradas como devido ao movimento relativo de outras massas no Universo, de uma maneira mais ou menos análoga ao da força magnética exercida sobre uma partícula carregada, devido ao movimento relativo das outras cargas. Esta similaridade na forma das duas forças sugere que o efeito do campo magnético sobre um sistema de partículas carregadas pode ser cancelado, introduzindo-se um sistema de coordenadas com movimento de rotação apropriado. Esta idéia leva ao Teorema de Larmor, primeiro enunciado e depois demonstrado.

Teorema de Larmor. *Se um sistema de partículas, todas com a mesma razão q/m entre a carga e a massa, sob a ação de suas forças (centrais) mútuas e de uma força central orientada para um centro comum, e se também estiver sob a ação de um campo magnético uniforme e fraco B , os seus movimentos possíveis serão os mesmos que poderiam ser executados sem o campo magnético, superposto a uma precessão lenta de todo o sistema em torno do centro de força com velocidade angular.*

$$\omega = -\frac{q}{2mc} B \text{ (unidades gaussianas).}^3 \quad (7.53)$$

A definição de campo magnético fraco aparecerá na demonstração do teorema. Admite-se que todas as partículas têm a mesma carga q e a mesma massa m , embora se tornará claro que só será necessário supor que a razão q/m seja constante. Na prática, a única aplicação importante do Teorema de Larmor é no estudo dos átomos em campos magnéticos. Neste caso, os elétrons de massa m e carga $q = -e$, sob a ação de sua repulsão eletrostática mútua e da atração do núcleo.

Considere que a força central agindo sobre a k -ésima partícula seja F_k^c e que a soma das forças devida às outras partículas seja F_k^i . Então, as equações do movimento do sistema de partículas, na ausência de um campo magnético, são

$$m \frac{d^2 r_k}{dt^2} = F_k^c + F_k^i, \quad k = 1, \dots, N, \quad (7.54)$$

³ Em unidades do SI, o c deve ser omitido nesta e nas equações subsequentes.

onde N é o número total de partículas. A força F_k^c só depende da distância da partícula k ao centro de força, que será considerado como a origem, e as forças F_k^i só dependem das distâncias entre as partículas. Quando o campo magnético é aplicado, de acordo com a Eq. (3.281), as equações de movimento tornam-se:

$$m \frac{d^2 r_k}{dt^2} = F_k^c + F_k^i + \frac{q}{c} \frac{dr_k}{dt} \times B, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.55)$$

Para eliminar o último termo, introduz-se um sistema de coordenadas com asterisco e com a mesma origem, girando em torno da origem em velocidade angular ω . Usando as Eqs. (7.34), escrevem-se as equações do movimento no sistema de coordenadas com asterisco da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 r_k^*}{dt^2} &= F_k^c + F_k^i - m\omega \times (\omega \times r_k) + \frac{q}{c} (\omega \times r_k) \times B \\ &\quad + \frac{d^2 r_k}{dt^2} \times \left(\frac{qB}{c} + 2m\omega \right). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Pode-se anular o último termo fazendo com que

$$\omega = -\frac{q}{2mc} B. \quad (7.57)$$

A Eq. (7.56) torna-se, então, igual a

$$m \frac{d^2 r_k^*}{dt^2} = F_k^c + F_k^i + \frac{q^2}{4mc^2} B \times (B \times r_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.58)$$

As forças F_k^c e F_k^i dependem somente das distâncias das partículas à origem e suas distâncias mútuas. Estas distâncias serão as mesmas nos sistemas com ou sem asterisco. Logo, desprezando-se o último termo, as Eqs. (7.58) terão exatamente a mesma forma, em termos das coordenadas com asterisco, que as Eqs. (7.54) têm em termos das coordenadas sem asterisco. Consequentemente, as suas soluções serão as mesmas, e o movimento do sistema expressado no sistema de coordenadas com asterisco será o mesmo que o movimento do sistema expressado no sistema de coordenadas sem asterisco na ausência de um campo magnético. Este é o Teorema de Larmor.

A condição para que o campo magnético seja fraco significa que o último termo da Eq. (7.58) deve ser desprezível em comparação com os dois primeiros termos. Note que o termo que se está desprezando é proporcional a B^2 , enquanto o termo da Eq. (7.55) que foi eliminado é proporcional a B . Assim, para campos suficientemente fracos, o primeiro termo pode ser desprezível, mesmo que este último não o seja. O último termo da Eq. (7.58) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{q^2}{4mc^2} B \times (B \times r_k) = m\omega \times (\omega \times r_k). \quad (7.59)$$

Outra maneira de formular a condição de campo magnético fraco é dizendo que a freqüência de Larmor ω , dada pela Eq. (7.57), deve ser pequena em comparação com as freqüências do movimento na ausência de campo magnético.

O leitor que entendeu claramente a demonstração acima deve ser capaz de responder as duas perguntas seguintes. A freqüência de ciclotron, dada pela Eq. (3.299), para o movimento de uma partícula carregada em campo magnético é igual a duas vezes a freqüência de Larmor, dada pela Eq. (7.57). Por que o Teorema de Larmor não se aplica às partículas carregadas em um ciclotron? A Eq. (7.58) pode ser derivada sem qualquer suposição a respeito da origem do sistema de coordenadas com asterisco. Por que é necessário que o eixo de rotação no sistema de coordenadas com asterisco passe pelo centro de forças do sistema de partículas?

7.6 FORMA RESTRITA DO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Como se mencionou na Seç. 4.9, o problema dos três corpos, em que três massas se movem sob a ação de suas forças gravitacionais mútuas, não pode ser resolvido de uma maneira geral. Nesta seção, considera-se o problema simplificado, isto é, o problema restrito dos três corpos, retendo, no entanto, muitos dos aspectos do mais geral. Entre estes aspectos, encontra-se o fato de não existir método geral para resolvê-lo. No problema restrito, são considerados dois corpos de massas M_1 e M_2 girando em círculos sob a ação da atração gravitacional mútua e em torno do centro de massa comum. O terceiro corpo, por ter massa muito pequena m , move-se no campo gravitacional de M_1 e M_2 . Suponha que m seja tão pequeno que a perturbação introduzida no movimento de M_1 e M_2 pode ser desprezada. Simplificando-se o problema ainda mais, suponha que m permaneça no plano em que M_1 e M_2 giram. Assim, o problema se reduz ao de um corpo em que é preciso determinar o movimento de m num campo gravitacional (em movimento) devido aos outros dois corpos. Um exemplo óbvio seria o de um foguete movendo-se nos campos gravitacionais da Terra e da Lua e girando aproximadamente em torno do centro de massa comum.

Se M_1 e M_2 estiverem separados por uma distância a , então, de acordo com o resultado obtido na Seç. 4.7, suas velocidades angulares serão determinadas igualando-se a força gravitacional à massa multiplicada pela aceleração do problema reduzido, no qual M_1 se acha em repouso e M_2 tem massa μ , dada pela Eq. (4.98):

$$\mu\omega^2 a = \frac{M_1 M_2 G}{a^2}, \quad (7.60)$$

logo

$$\omega^2 = \frac{(M_1 + M_2)G}{a^3}. \quad (7.61)$$

O centro de massa divide a distância a em segmentos proporcionais às massas.

Introduz-se, agora, um sistema de coordenadas que giram em velocidade angular ω em relação ao centro de massa de M_1 e M_2 . Neste sistema, M_1 e M_2 estão em repouso. Considera-se que eles estejam sobre o eixo x nos pontos

$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a, \quad x_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} a. \quad (7.62)$$

A velocidade angular ω é tomada ao longo do eixo z . Logo, m se move no plano xy e a sua equação do movimento será

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F_1 + F_2 - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times \frac{dr}{dt}, \quad (7.63)$$

onde F_1 e F_2 são as atrações gravitacionais de M_1 e M_2 sobre m . Em termos de dois componentes, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{M_1 G(x - x_1)}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{M_2 G(x - x_2)}{[(x - x_2)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(M_1 + M_2)Gx}{a^3} + 2\omega \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{M_1 Gy}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{M_2 Gy}{[(x - x_2)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(M_1 + M_2)Gy}{a^3} - 2\omega \dot{x}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Note que se cancela a massa m nesta equações.

Como a força de Coriolis é perpendicular à velocidade, ela não “trabalha” neste sistema de coordenadas em movimento. Além disso, o rotacional da força centrífuga é igual a zero e pode ser obtido da “energia potencial”

$$V_c = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2). \quad (7.65)$$

Portanto, a “energia” total no sistema de coordenadas em movimento é uma constante do movimento

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V, \quad (7.66)$$

onde

$$\begin{aligned} V &= -\frac{mM_1 G}{[(x - x_1)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{mM_2 G}{[(x - x_2)^2 + y^2]^{1/2}} \\ &\quad - \frac{m(M_1 + M_2)G(x^2 + y^2)}{2a^3}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

A equação da energia (7.66) permite fazer algumas asserções em relação às espécies de órbitas que serão possíveis. Para simplificar os cálculos algébricos, introduzem-se as seguintes definições:

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/a, \quad (7.68)$$

$$\xi_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \xi_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \xi_1 - 1. \quad (7.69)$$

Logo, a Eq. (7.67) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} V &= \frac{m(M_1 + M_2)G}{a} \left\{ \frac{\xi_2}{[(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2]^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_1}{[(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2]^{1/2}} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right\}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

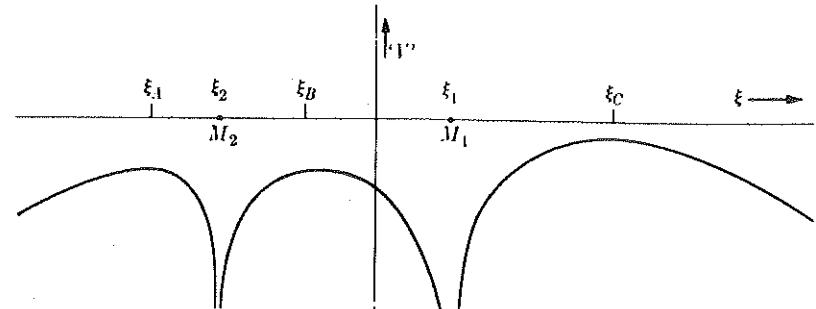


Fig. 7.7 Gráfico de ' V ' ($\xi, 0$).

Para verificar a natureza desta função, procuram-se, inicialmente, os pontos singulares, onde $\partial^2 V / \partial \xi^2$ e $\partial^2 V / \partial \eta^2$ se anulam:

$$\begin{aligned} -\frac{\xi_2(\xi - \xi_1)}{[(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1(\xi - \xi_2)}{[(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2]^{3/2}} - \xi &= 0, \\ -\frac{\xi_2 \eta}{[(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1 \eta}{[(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2]^{3/2}} - \eta &= 0. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Um ponto (x, y) que satisfaz estas condições é um ponto de equilíbrio para a massa m (no sistema de coordenadas em movimento), pois é evidente que as Eqs. (7.64) serão satisfeitas se m estiver em repouso neste ponto. Consideram-se inicialmente os pontos no eixo $\eta = 0$. A segunda equação é, então, satisfeita e a primeira torna-se:

$$-\frac{\xi_2(\xi - \xi_1)}{|\xi - \xi_1|^3} + \frac{\xi_1(\xi - \xi_2)}{|\xi - \xi_2|^3} - \xi = 0. \quad (7.72)$$

A Fig. 7.7 mostra um gráfico da função ' V ', dada pela Eq. (7.70), ao longo do eixo $\eta = 0$. As raízes da Eq. (7.72) são os máximos de ' V ' ($\xi, 0$) mostrado na Fig. 7.7, onde se pode verificar que existem três destas raízes. Chamando-se estas três raízes de ξ_A , ξ_B e ξ_C , como mostradas na figura, cada uma delas é raiz de uma equação de quinta ordem que pode ser derivada da Eq. (7.72). É possível mostrar que $\partial^2 V / \partial \xi \partial \eta = 0$, $\partial^2 V / \partial \xi^2 < 0$, e $\partial^2 V / \partial \eta^2 > 0$ nos pontos A , B e C . Expandindo-se ' V ' em série de Taylor em torno de qualquer um desses pontos e considerando somente os termos quadráticos, verifica-se que as curvas constantes de ' V ' são hipérboles no plano $\xi\eta$ na vizinhança dos pontos A , B e C , como se pode verificar na Fig. 7.8, onde se mostra um gráfico das curvas de ' V ' constantes. Os pontos A , B e C são chamados *pontos de sela* de ' V ', isto é, ' V ' tem pontos locais de máximo ao longo do eixo ξ e um ponto de mínimo ao longo de uma linha perpendicular ao eixo ξ em cada um dos pontos A , B e C . Se $\eta \neq 0$, ele pode ser fatorado da segunda das Eqs. (7.71). Pode-se multiplicar a segunda das Eqs. (7.71) por $(\xi - \xi_1)$ e subtrair da primeira destas equações. Após alguma manipulação e usando a Eq. (7.69), obtém-se

$$(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 = 1, \quad (7.73)$$

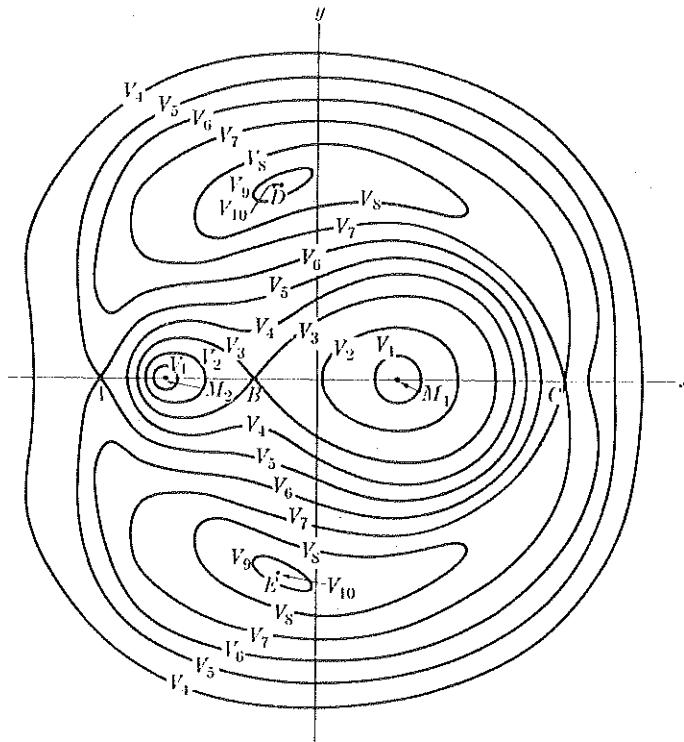


Fig. 7.8 Curvas eqüipotenciais para ' V '(x, y).

e, similarmente,

$$(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2 = 1. \quad (7.74)$$

Estas equações mostram que existem dois pontos singulares, D e E , fora do eixo $\eta = 0$, os quais estão localizados a distâncias unitárias de $(\xi_1, 0)$ e $(\xi_2, 0)$, separados também por uma distância unitária. Expandindo ' V ' em série de Taylor em torno do ponto D , ou de E , pode-se mostrar que as curvas constantes de ' V ' são elipses nas vizinhanças de D , ou de E , e que ' V ' tem máximos em D e E . Conhecendo o comportamento próximo aos pontos singulares, pode-se esboçar o aspecto geral das curvas constantes de ' V ', como é mostrado na Fig. 7.8. As curvas foram numeradas na ordem de ' V ' crescente.

Se este fosse um sistema de coodenadas fixo, poder-se-ia concluir imediatamente que os pontos de equilíbrio, A , B , C , D e E , são todos instáveis, pois a força $-\nabla'V'$ é orientada para fora de cada ponto de equilíbrio quando m se localiza num ponto próximo. No entanto, este argumento não é válido, aqui, porque se despreza a força de Coriolis nas Eqs. (7.64). Expandindo-se o segundo membro das Eqs. (7.64) em potências do deslocamento (por exemplo $x - x_D$, $y - y_D$), em relação a um dos pontos de equilíbrio (por exemplo D), e conservando-se somente termos lineares, determina-se, aproximadamente, o movimento próximo ao ponto de equilíbrio. Se isto for rea-

lizado próximo ao ponto D (ou E), por exemplo, conclui-se que a aproximação linear do movimento próximo ao ponto D é estável, caso uma das massas, M_1 ou M_2 , contenha mais do que 96% da massa total ($M_1 + M_2$). (Verifique o Probl. 18.) Para movimentos muito próximos do ponto D , pode-se esperar que a aproximação linear leve a uma solução válida no caso de tempos muito longos. Quando aqueles movimentos estáveis na aproximação linear são realmente estáveis, isto é, quando a massa permanece próxima ao ponto D durante todo o tempo, era, até 1962, um problema não resolvido pela Mecânica Clássica. Este assunto será discutido novamente no final da Seç. 12.6.⁴

Não é difícil mostrar que, mesmo na aproximação linear, os pontos de equilíbrio A , B e C são instáveis. Se o movimento na aproximação linear também o for, então a solução exata certamente será instável. Isto é, não importa quão próximo a massa m esteja, inicialmente, do ponto de equilíbrio (mas não sobre ele), ela não permanecerá, em geral, próximo a este ponto e se moverá exponencialmente para longe, pelo menos no início. Os termos não lineares desprezados podem eventualmente evitar que o deslocamento ocorra além de uma distância finita do ponto de equilíbrio.

A única afirmativa rigorosa que se pode fazer em relação ao movimento de m , para longos períodos de tempo, são as obtidas a partir da equação da energia (7.66). Dadas a posição e a velocidade iniciais de m , pode-se calcular ' E' . Então, a órbita da massa deve permanecer na região onde ' $V' < E'$ '. Por exemplo, os movimentos que se iniciam nas proximidades de M_1 ou M_2 , com ' $E' < V_3$ ', devem permanecer confinados na região próxima à massa. Os movimentos em que ' $E' > V_5$ ' podem alcançar distâncias arbitrariamente grandes; se realmente alcançarão, não se pode dizer partindo de considerações sobre a energia.

Se pudermos determinar outras constantes do movimento, como por exemplo $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, poderemos resolver o problema por métodos como os usados no Cap. 3 para o problema da força central, onde o momento angular também é constante. Infelizmente, outras constantes como estas não são ainda conhecidas, não parecendo provável a existência de alguma outra que se possa empregar com este propósito. Este problema, entretanto, tem sido estudado intensamente.⁵

Diante desta situação, pode-se voltar para a possibilidade de calcular determinadas órbitas, a partir de condições iniciais já conhecidas, o que pode ser realizado analiticamente, por métodos de aproximação, ou numericamente. Em princípio, pode-se calcular até a precisão desejada e em relação a qualquer período de tempo finito.

No Cap. 12, discute-se um problema especial relacionado com o problema dos três corpos.

⁴ Uma discussão mais completa do problema dos três corpos, em nível mais avançado do que o do presente livro, pode ser encontrada em Aurel Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1947. A demonstração de que o movimento próximo aos pontos D (ou E) é freqüentemente estável para todos os tempos foi apresentada, em 1962, por A. M. Leontovich, e é discutida em J. K. Moser, *Lectures on hamiltonian systems*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., No. 81, 1968.

⁵ Veja por exemplo as citações anteriores: A. Wintner e J. K. Moser.

PROBLEMAS

1. a) Resolva o problema de um corpo em queda livre, introduzindo um sistema de coordenadas cujo movimento de translação tenha aceleração g . Escreva e resolva as equações neste sistema de coordenadas acelerado, fazendo a transformação de volta para o sistema fixo em relação à Terra. (Despreze a rotação terrestre.)
 b) No mesmo sistema de coordenadas acelerado, escreva as equações do movimento da queda de um corpo submetido à ação da resistência do ar proporcional à sua velocidade (em relação ao ar fixo).
2. Uma massa m está ligada por uma mola (constante da mola igual a k) a um suporte que se move para frente e para trás, ao longo do eixo x , com movimento harmônico simples de freqüência ω e amplitude a . Supondo-se que a massa se move somente ao longo do eixo x , escreva e resolva a equação do movimento num sistema de coordenadas cuja origem esteja no ponto de suporte.
3. Generalize a Eq. (5.5) para o caso em que a origem do sistema de coordenadas esteja em movimento, somando um torque fictício devido a uma força fictícia exercida em cada partícula. Expressse os torques fictícios em termos da massa total M , da coordenada R^* do centro de massa e de a_h . Compare o resultado obtido com a Eq. (4.25).
4. Derive uma fórmula para d^3A/dt^3 , em termos das derivadas, no sistema com asterisco, em relação a um sistema de coordenadas com movimento de rotação.
5. Ventos ocidentais sopram de oeste para leste no Hemisfério Norte em velocidade média v . Se a densidade do ar for ρ , qual o gradiente de pressão necessário para manter um fluxo estacionário de ar do oeste para leste com esta velocidade? Faça uma estimativa razoável para v e ρ e estime o gradiente de pressão em $\text{Nm}^{-2} \text{km}^{-1}$. [Você precisará usar a Eq. (5.172).]
6. a) Existem sugestões de que os pássaros podem determinar a sua latitude através da sensação produzida pela força de Coriolis. Calcule a força que um pássaro deve exercer, em voo plano, contra os componentes laterais da força de Coriolis, para que consiga voar em linha reta. Expressse o resultado em função de g , isto é, em termos da razão entre a força de Coriolis e a força gravitacional escrita como função da latitude e direção do voo.
 b) Se a trajetória do voo do pássaro for ligeiramente circular e sua velocidade 48 km/h^{-1} , existirá uma força centrífuga, que se somará à força de Coriolis e introduzirá um erro na latitude estimada. A 45°N de latitude, de quanto a trajetória de voo pode ser encurvada, em graus por km voado, se a latitude for determinada com uma precisão de $\pm 160 \text{ km}$? (Suponha que a força lateral pode ser medida com a precisão que se queira!)
- *7. Um corpo inicialmente em repouso cai de uma altura h acima da superfície da Terra.

a) Calcule a força de Coriolis como função do tempo, supondo, como primeira aproximação, que seu efeito seja desprezível em relação ao movimento, e usando a velocidade de um corpo em queda livre com aceleração g_e . Despreze a resistência do ar e suponha que h seja pequeno de forma que g_e pode ser considerado constante.

b) Agora, como segunda aproximação, calcule o deslocamento do ponto de impacto com o solo resultante do efeito da força de Coriolis calculada no item (a).

*8. Determine a solução do Probl. 7(b), resolvendo a equação do movimento num sistema de coordenadas sem rotação. Quais são as aproximações necessárias para se obter o mesmo resultado do problema anterior?

9. Um avião voa no pólo norte em velocidade de 800 km por hora , seguindo um meridiano de longitude (que gira com a Terra). Determine o ângulo entre a direção de um fio de prumo pendurado no avião, quando ele passa sobre o pólo, e a direção do fio de um prumo pendurado na Terra sobre o pólo.

10. Suponha que a Terra seja uma esfera uniforme de massa M e raio R . Imagine um tubo que vá do pólo norte até o centro do planeta e daí saia radialmente para o equador. O tubo está cheio de um fluido, de forma que o nível esteja na superfície da Terra no pólo norte. Determine o nível do fluido em relação à superfície terrestre no equador. A resposta mudará muito se o tubo for colocado através da superfície da Terra? A resposta mudará usando-se a forma real da Terra? (Você deve conhecer a matéria discutida na Seç. 5.11 para solucionar este problema.)

11. Um giroscópio consiste numa roda de raio a , em que toda a massa está colocada na periferia e gira em velocidade angular $\dot{\theta}$ em relação ao seu eixo, que é horizontal e está fixo em relação à superfície terrestre. Escolha um sistema de coordenadas em repouso em relação à Terra de modo que o eixo z coincida com o eixo do giroscópio e que a origem esteja localizada no centro da roda. A velocidade angular ω da Terra no plano xz faz um ângulo α com o eixo do giroscópio.

Determine os componentes x , y e z do torque N em relação à origem, devido à força de Coriolis, no sistema de coordenadas x , y e z , que age sobre a massa m da periferia da roda do giroscópio, cujas coordenadas polares no plano xy são r e θ . Use este resultado para mostrar que o torque de Coriolis total exercido sobre o giroscópio, se a roda tiver massa M , é

$$N = -\frac{1}{2}jMr^2\omega\dot{\theta}\sin\alpha.$$

Esta equação é a base para a operação do girocompasso.

*12. Uma massa m de um gás perfeito, de peso molecular M , à temperatura T , é colocada num cilindro de raio a e altura h , e é posta a girar rapidamente em velocidade angular ω em torno do eixo do cilindro. Introduzindo um sistema de coordenadas que gire com o gás e aplicando as leis do equilíbrio estático supondo que todas as outras forças do corpo sejam desprezíveis em comparação com a força centrífuga, mostre que

$$p = \frac{RT}{M} \rho_0 \exp\left(\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}\right),$$

onde p é a pressão, r é a distância ao eixo e

$$\rho_0 = \frac{m M \omega^2}{2\pi h R T [\exp(M\omega^2 a^2/2RT) - 1]}.$$

*13. Uma partícula se move no plano xy sob a ação da força

$$F = -kr,$$

orientada na direção da origem. Determine os movimentos possíveis, introduzindo um sistema de coordenadas com rotação em torno do eixo z , velocidade angular ω escolhida de maneira que a força centrífuga cancele a força F . Resolva as equações do movimento neste sistema de coordenadas. Descreva os movimentos resultantes e mostre que o resultado obtido concorda com o do Probl. 45 do Cap. 3.

14. Uma bola de massa m desliza sem atrito num plano horizontal na superfície terrestre. Mostre que seu movimento é semelhante ao da massa de um pêndulo de Foucault, considerando-se que ela permaneça próximo ao ponto de contato. Determine a freqüência de oscilação. Suponha que a Terra seja esférica.

15. A massa de um pêndulo inicia o movimento de tal forma que oscila em círculo. Substituindo este resultado na Eq. (7.46), determine a velocidade angular e mostre que a contribuição devida à força de Coriolis é dada aproximadamente pela Eq. (7.52). Despreze o componente vertical dessa força, depois de demonstrar que, em média, ela é igual a zero para o movimento considerado.

16. Um elétron gira em torno de um próton fixo, numa órbita elíptica cujo semi-eixo maior tem 10^{-8} cm. Se o movimento correspondente ocorre em um campo magnético de 10 000 gauss, mostre que o Teorema de Larmor pode ser aplicado e calcule a velocidade angular de precessão da elipse.

17. Escreva a energia potencial para o último termo da Eq. (7.58). Se o plano da órbita do Probl. 16 for perpendicular a B , e se a órbita for aproximadamente circular, calcule (pelos métodos apresentados no Cap. 3) a taxa de precessão da elipse devido ao último termo da Eq. (7.58), no sistema de coordenadas em movimento de rotação. Esta precessão deve ser somada ou subtraída da precessão calculada no Probl. 16?

18. Determine o valor das três segundas derivadas de ' V ', em relação a ξ e a η para o ponto D da Fig. 7.7. Expanda em série as equações do movimento (7.64), mantendo somente termos lineares em $\xi' = \xi - \xi_0$ e $\eta' = \eta - \eta_0$. Usando o método apresentado na Seç. 4.10, determine a condição sobre M_1 e M_2 para que os modos normais de oscilação sejam estáveis. Se $M_1 > M_2$, qual é o valor mínimo de $M_1/(M_1 + M_2)$?

*19. Demonstre as asserções feitas na Seç. 7.6 em relação às segundas derivadas de ' V ', nos pontos A , B e C na Fig. 7.7. Faça uma expansão em série em torno dos pon-

tos A e B , conservando somente os termos lineares em η e $\xi' = \xi - \xi_{A,B}$. Mostre pelo método da Seç. 4.10 que algumas das soluções são instáveis para qualquer valor das massas. (Você não pode determinar as segundas derivadas explicitamente, mas a demonstração depende somente dos seus sinais.)

*20. a) Escreva a equação do quinto grau que deve ser resolvida para se obter ξ_A , mostrado na Fig. 7.7. Mostre que se $M_2 = 0$, a solução será $\xi_A = -1$.

b) Resolva numericamente a equação para ξ_A e obtenha o resultado com precisão de duas casas decimais para o sistema Terra-Lua.

c) Determine a velocidade mínima de lançamento da superfície da Terra para que seja "energeticamente" possível que o foguete possa escapar do sistema Terra-Lua. Compare com a velocidade de escape da Terra.

21. Dois planetas, cada um deles com massa M e raio R , giram em círculos em torno um do outro, separados por uma distância a , sob a ação de sua atração gravitacional mútua. Determine a velocidade (relativa) mínima com que o foguete deve ser lançado de um planeta para chegar a outro. Mostre que a velocidade do foguete deve ser maior do que seria necessário se o movimento dos planetas fosse desprezado.

22. a) Determine todos os pontos fixos no caso-limite em que $M_2 \rightarrow 0$, fazendo um gráfico semelhante ao da Fig. 7.7 para este caso. Mostre que os resultados da Seç. 7.6, se aplicados a este caso, são coerentes com a solução completa obtida na Seç. 3.14.

b) Mostre, a partir deste exemplo para o qual uma solução completa é conhecida, que a velocidade de lançamento mínima, "energeticamente" possível para que ocorra o escape, calculada no Probl. 18(c), não é necessariamente a verdadeira velocidade de escape mínima.

CAPÍTULO 8

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS MEIOS CONTÍNUOS

Neste capítulo, inicia-se o estudo da Mecânica dos Meios Contínuos: sólidos, fluidos, cordas etc. Em tais problemas, o número de partículas é tão grande que não é prático estudar separadamente o movimento de cada partícula; ao contrário, é melhor considerar que a matéria, continuamente distribuída no espaço, caracteriza-se por sua densidade. Inicialmente devem-se conhecer os conceitos e métodos úteis ao tratamento do problema ao invés de desenvolver, em detalhe, métodos adequados à resolução de problemas práticos. Nas primeiras quatro seções, estudam-se as cordas vibrantes e, para isso, utilizam-se conceitos que são uma generalização direta da Mecânica da Partícula, deixando-se para o restante do capítulo o desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos de maneira não tão relacionada à primeira.

8.1 A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA UMA CORDA VIBRANTE

Esta seção trata do movimento de uma corda de comprimento l , esticada horizontalmente e fixa nas duas extremidades, e deixada vibrar. Para simplificar o problema, admite-se que a corda só vibre no plano vertical e que sua amplitude de vibração seja suficientemente pequena para que cada ponto situado na corda se move apenas na vertical, e de maneira que a tensão τ na corda não varie apreciavelmente durante a vibração.

Identifica-se um ponto sobre a corda fornecendo a sua distância horizontal, x , a partir da extremidade à esquerda (Fig. 8.1). Designa-se a distância em que o ponto x se moveu, a partir da linha reta horizontal que representa a posição de equilíbrio da corda por $u(x)$. Logo, qualquer posição de toda a corda deverá estar especificada quando se conhece a função $u(x)$ para $0 \leq x \leq l$. Este resultado é inteiramente análogo, no caso de um sistema de N partículas, onde se especificam as coordenadas x_i , y_i e z_i , para $i = 1, \dots, N$. No caso da corda, x não é uma coordenada, mas atua como se fosse o índice i , indicando cada ponto da corda. A corda idealizada é contínua, tendo um número infinito de pontos, correspondentes a um número infinito de valores de x entre 0 e l . Para um dado ponto x , $u(x)$ é que assume o papel da coordenada que localiza este ponto, em analogia às coordenadas x_i , y_i e z_i da partícula i . Da mesma for-

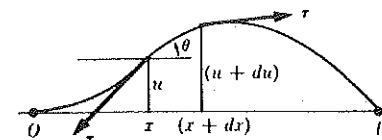


Fig. 8.1 Corda vibrante.

ma que o movimento de um sistema de partículas foi descrito pelas funções $x_i(t)$, $y_i(t)$ e $z_i(t)$, localizando-se a partícula a cada instante, o movimento da corda será descrito por uma função $u(x, t)$, localizando-se cada ponto x da corda em cada instante.

Para obter-se uma equação de movimento para a corda, considera-se um segmento de corda de comprimento dx entre x e $x + dx$. Se a densidade da corda, por unidade de comprimento, for σ , então a massa do segmento será σdx . A velocidade da corda em qualquer ponto será $\partial u / \partial t$ e a inclinação é $\partial u / \partial x$. O componente vertical da tensão exercida da direita para a esquerda através de qualquer ponto da corda é

$$\tau_u = \tau \operatorname{sen} \theta, \quad (8.1)$$

onde θ é o ângulo formado pela corda e a horizontal (Fig. 8.1), supondo-se que θ seja muito pequeno e, neste caso,

$$\tau \operatorname{sen} \theta \doteq \tau \operatorname{tg} \theta = \tau \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.2)$$

A força resultante para cima, dF , devido à tensão, agindo sobre um segmento dx da corda, é a diferença no componente vertical τ_u , entre as duas extremidades do segmento:

$$dF = [\tau_u]_{x+dx} - [\tau_u]_x \\ \doteq \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (8.3)$$

Quando não se limita a pequenas inclinações $\partial u / \partial x$, então um segmento da corda poderá ter também um componente de força resultante da tensão, e o segmento mover-se-á tanto horizontalmente como verticalmente, possibilidade que se quer excluir. Existindo uma força vertical adicional f por unidade de comprimento, agindo ao longo da corda, a equação do movimento do segmento dx será

$$\sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + f dx. \quad (8.4)$$

Para uma corda horizontal, em que forças horizontais atuam somente em suas extremidades, e para pequenas amplitudes de vibração, a tração é constante e a Eq. (8.4) pode ser reescrita como:

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (8.5)$$

A força f pode ser a força gravitacional que age sobre a corda, usualmente desprezível, a menos que a tração seja muito pequena. A força f também pode representar uma força externa aplicada à corda para iniciar a vibração. Considere somente o caso em que $f = 0$; reescreve-se a Eq. (8.5) na seguinte forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (8.6)$$

onde

$$c = \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (8.7)$$

A constante c tem as dimensões de velocidade; verifica-se na Seç. 8.3 que ela é a velocidade com que a onda se desloca na corda.

A Eq. (8.6) é uma equação diferencial parcial para a função $u(x, t)$; e é a expressão matemática da Lei do Movimento, de Newton, aplicada à corda vibrante. As soluções $u(x, t)$ para a Eq. (8.6), para uma dada posição inicial da corda $u_0(x)$ e uma dada velocidade inicial $v_0(x)$ de cada ponto ao longo da corda, são as procuradas agora. Considera-se, então, o instante inicial como $t = 0$, o que significa que se deseja uma solução $u(x, t)$ capaz de satisfazer as seguintes condições iniciais:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (8.8)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = v_0(x).$$

A solução deve satisfazer também as seguintes *condições de contorno*:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (8.9)$$

a qual expressa o fato de que as extremidades da corda são fixas. Considerando-se a natureza do problema físico, espera-se que exista uma solução única $u(x, t)$ para a Eq. (8.6) que satisfaz as Eqs. (8.8) e (8.9), e que esta solução represente o movimento da corda com aquelas condições iniciais. Portanto, deve-se esperar que a teoria matemática das equações diferenciais parciais leve às mesmas conclusões em relação ao número de soluções da Eq. (8.6), e certamente este será o caso.

8.2 MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO PARA UMA CORDA VIBRANTE

Primeiramente, procuram-se soluções para a Eq. (8.6), capazes de satisfazer as condições de contorno (8.9), sem considerar as condições iniciais (8.8). Este problema é análogo ao tratamento que se deu ao oscilador harmônico, quando se procurou, primeiramente, encontrar as soluções de um certo tipo, para, posteriormente, ajustá-las às condições iniciais do problema. O método que será aplicado aqui chama-se método da *separação de variáveis*, um dos poucos métodos gerais para resolução de equações diferenciais conhecidos até o presente. Infelizmente, não se aplica a todos os casos, mas grande parte das equações diferenciais são resolvidas por seu intermédio. Em princípio, qualquer equação diferencial parcial pode ser resolvida por métodos numéricos, mas, em geral, o trabalho é dificílimo, às vezes mesmo em se tratando de modernos computadores automáticos de grande porte.

O método da separação de variáveis consiste em achar soluções da seguinte forma

$$u(x, t) = X(x)\Theta(t), \quad (8.10)$$

Isto é, considera-se que u seja o produto de uma função X dependente somente de x e uma função Θ dependente apenas de t . Então, as derivadas de u serão dadas por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Theta \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (8.11)$$

Se estas expressões forem substituídas na Eq. (8.6), e dividindo-se o resultado por ΘX , então a Eq. (8.6) pode ser reescrita como:

$$\frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (8.12)$$

O primeiro membro só é função de x , e o segundo só é função de t . Conservando-se t fixo e variando x , o segundo membro permanecerá constante, portanto, o primeiro deverá ser independente de x . Similarmente, o segundo membro deverá ser independente de t . Pode-se, então, igualar ambos os membros a uma constante. Baseados em princípios da Física, torna-se claro que esta constante deva ser negativa, pois o segundo membro da Eq. (8.12) é a aceleração da corda dividida pelo deslocamento, e a aceleração deverá ser oposta ao deslocamento; em caso contrário, a corda não retornará à sua posição de equilíbrio. Chamando-se esta constante de $-\omega^2$, logo

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\omega^2, \quad \frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\omega^2. \quad (8.13)$$

A primeira destas equações pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0, \quad (8.14)$$

que se reconhece como a equação de um oscilador harmônico, cuja solução geral, na forma mais apropriada para o presente propósito, é

$$\Theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (8.15)$$

onde A e B são constantes arbitrárias. A segunda das Eqs. (8.13) tem forma similar:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0, \quad (8.16)$$

portanto, uma solução similar:

$$X = C \cos \frac{\omega x}{c} + D \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (8.17)$$

As condições de contorno (8.9) só serão válidas para qualquer tempo t se X satisfizer as seguintes condições:

$$X(0) = C = 0, \quad (8.18)$$

$$X(l) = C \cos \frac{\omega l}{c} + D \sin \frac{\omega l}{c} = 0.$$

A primeira destas equações determina C e a segunda requer que

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0. \quad (8.19)$$

Este resultado só será válido se ω tiver um dos seguintes valores

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.20)$$

No caso de se considerar a constante de separação das Eqs. (8.13) como positivas, as soluções obtidas seriam exponenciais, em lugar da Eq. (8.17), e seria impossível satisfazer as condições de contorno (8.18).

As freqüências $\nu_n = \omega_n / 2\pi$ dadas pela Eq. (8.20) denominam-se *freqüências normais de vibração* da corda. A solução para um dado n é obtida pela substituição das Eqs. (8.15) e (8.17) na Eq. (8.10), usando-se as Eqs. (8.18) e (8.20):

$$u(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} + B \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l}, \quad (8.21)$$

onde $D = 1$. Este é o *modo normal de vibração* da corda, inteiramente análogo aos modos normais de vibração encontrados na Seç. 4.10 para osciladores harmônicos. Cada ponto da corda vibra na mesma freqüência ω_n com uma amplitude que varia senoidalmente ao longo da corda. Ao invés de dois osciladores acoplados, ter-se-á um número infinito de pontos oscilantes e, ao invés de dois modos normais de vibração, obtém-se um número infinito.

A posição e a velocidade iniciais em $t = 0$ do n -ésimo modo normal de vibração, conforme é dado pela Eq. (8.21), serão

$$u_0(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$v_0(x) = \frac{n\pi c B}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.22)$$

Somente para estes casos muito especiais de condições iniciais, a corda vibrará em um dos seus modos normais. Entretanto, é possível encontrar soluções mais gerais somando-se soluções, pois a corda vibrante, da mesma forma que o oscilador harmônico, satisfaz o princípio da superposição. Considere que $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ sejam duas soluções quaisquer das Eq. (8.6) que satisfazem as condições de contorno (8.9). Então, a função

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

também satisfará a equação do movimento e as condições de contorno. Isto pode ser verificado simplesmente substituindo-se $u(x, t)$ nas Eqs. (8.6) e (8.9) e usando o fato de que $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ satisfazem estas equações. Uma solução mais geral das Eqs. (8.6) e (8.9) é obtida somando-se as soluções do tipo (8.21), usando diferentes constantes A e B para cada freqüência normal:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi ct}{l} \right). \quad (8.23)$$

A posição e velocidade iniciais para esta solução são

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (8.24)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c B_n}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Se a Eq. (8.23) fornece ou não uma solução geral para o problema dependerá de, com uma escolha apropriada do conjunto infinito de constantes A_n e B_n , se poder fazer com que as funções $u_0(x)$ e $v_0(x)$ correspondam a quaisquer posição e velocidade iniciais possíveis para a corda. Nossa intuição não é muito clara neste ponto, embora esteja claro que agora há uma grande variedade de funções $u_0(x)$ e $v_0(x)$ possíveis. A resposta é fornecida pelo Teorema da Série, de Fourier, que estabelece que qualquer função contínua $u_0(x)$, no intervalo $(0 < x < l)$, que satisfaça a condição de contorno (8.9), pode ser representada pela soma do segundo membro da Eq. (8.24), se as constantes A_n forem escolhidas apropriadamente.¹ Similarmente, escolhendo-se de maneira apropriada as constantes B_n , qualquer função $v_0(x)$ contínua no intervalo $(0 < x < l)$ poderá ser representada. As expressões para A_n e B_n , neste caso, são

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (8.25)$$

O movimento mais geral da corda vibrante será, portanto, a superposição dos modos normais de vibração da freqüência fundamental $\nu_1 = c/2l$ e seus harmônicos $\nu_n = nc/2l$.

¹ Dunham Jackson, *Fourier series and orthogonal polynomials*. Menasha, Wisconsin, George Banta Publishing Co., 1941. (Cap. 1, Seç. 10.) Mesmo funções com um número finito de descontinuidades podem ser representadas por uma série de Fourier, mas este aspecto não é de muito interesse na aplicação presente.

O Teorema da Série, de Fourier, foi mencionado na Seç. 2.11 de forma ligeiramente diferente. A relação entre as Eqs. (8.24) e (2.205) deve ser feita trocando-se t por x e T por $2l$ na Eq. (2.205). Ambos os termos em seno e co-seno são necessários para representar uma função arbitrária $u_0(x)$ no intervalo $(0 < x < 2l)$, mas somente os termos em seno serão necessários, quando, se deseja representar $u_0(x)$ no intervalo $(0 < x < l)$. [Os termos em co-seno sozinhos serviriam para este intervalo, mas os termos em seno são mais apropriados se $u_0(x)$ se anular em $x = 0$ e $x = l$.]

8.3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS AO LONGO DE UMA CORDA

As Eqs. (8.14) e (8.16) também têm soluções complexas:

$$\Theta = Ae^{\pm i\omega t}, \quad (8.26)$$

$$X = e^{\pm i(\omega/c)x}. \quad (8.27)$$

Logo, a Eq. (8.6) tem soluções complexas da seguinte forma:

$$u(x, t) = Ae^{\pm i(\omega/c)(x \pm ct)}. \quad (8.28)$$

Considerando-se somente as partes reais, ou somando-se os complexos conjugados e dividindo-se por 2 na equação acima, obtém-se as seguintes soluções reais:

$$u(x, t) = A \cos \frac{\omega}{c}(x - ct), \quad (8.29)$$

$$u(x, t) = A \cos \frac{\omega}{c}(x + ct). \quad (8.30)$$

Considerando-se somente as partes imaginárias, ou subtraindo-se os complexos conjugados e dividindo-se por $2i$, podem-se obter soluções similares em que os senos substituem os co-senos. Estas soluções não satisfazem as condições de contorno (8.9), mas têm interesse considerável, pois representam ondas que se deslocam ao longo da corda, como se mostrará a seguir.

Um ponto fixo x sobre a corda oscilará harmonicamente no tempo, de acordo com a solução (8.29), ou (8.30), com amplitude A e freqüência angular ω . Em um instante t qualquer, a corda terá a forma de uma curva senoidal com amplitude A e comprimento de onda λ (distâncias entre máximos sucessivos):

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (8.31)$$

Mostra-se, agora, que esta forma move-se ao longo da corda com velocidade c , para a direita na solução (8.29), e para a esquerda na solução (8.30). Fazendo

$$\xi = x - ct, \quad (8.32)$$

a Eq. (8.29) torna-se

$$u = A \cos \frac{\omega \xi}{c}, \quad (8.33)$$

onde ξ chama-se fase da onda, representada pela função u . Para um valor determinado de ξ , u terá também um valor determinado. Considere um pequeno intervalo de tempo dt para determinar o acréscimo dx necessário para manter um valor constante de ξ :

$$d\xi = dx - c dt = 0. \quad (8.34)$$

Assim, se dx e dt tiverem a razão dada de acordo com a Eq. (8.34),

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (8.35)$$

então o valor de u no ponto $x + dx$ no tempo $t + dt$ será o mesmo valor que tinha no ponto x e no tempo t . Conseqüentemente, a onda se moverá ao longo da corda com velocidade c , dada pela Eq. (8.7). A constante c é a *velocidade de fase* da onda. Similarmente, a velocidade dx/dt para a solução (8.30) é $-c$.

Em geral é conveniente introduzir o *número de onda* k , definido de acordo com a seguinte equação:

$$|k| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (8.36)$$

onde se considera k positivo para uma onda que se desloque para a direita, e negativo para as ondas que se deslocam para a esquerda. Logo, ambas as soluções, (8.29) e (8.30), podem ser escritas na seguinte forma simétrica:

$$u = A \cos(kx - \omega t). \quad (8.37)$$

O número de onda k é medido em radianos, por unidade de comprimento, e, da mesma forma, a freqüência angular ω , em radianos por segundo. A expressão para u na Eq. (8.37) é a parte real da função complexa

$$u = Ae^{ikx - \omega t}. \quad (8.38)$$

Esta forma é freqüentemente usada no estudo do movimento ondulatório.

A possibilidade de superpor soluções da forma (8.29) e (8.30) com várias amplitudes e freqüências, juntamente com o Teorema da Série, de Fourier, sugere uma solução mais geral, da forma:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (8.39)$$

onde $f(\xi)$ e $g(\eta)$ são funções arbitrárias das variáveis $\xi = x - ct$, e $\eta = x + ct$. A Eq. (8.39) representa uma onda de forma arbitrária, que se desloca para a direita com velocidade c , e outra que se desloca para a esquerda. Verifica-se imediatamente que a Eq. (8.39) fornece uma solução da Eq. (8.6) através do cálculo das seguintes derivadas de u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{dg}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{df}{d\xi} + c \frac{dg}{d\eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + c^2 \frac{d^2 g}{d\eta^2}. \end{aligned}$$

Quando estas expressões são substituídas na Eq. (8.6), ela é satisfeita, não importando quais sejam as funções $f(\xi)$ e $g(\eta)$, admitindo-se, certamente, que elas tenham segundas derivadas. A Eq. (8.39) é, na realidade, a solução mais geral da Eq. (8.6), obtida a partir da teoria das equações diferenciais parciais, de acordo com a qual o resultado

de uma equação diferencial parcial de segunda ordem contém duas funções arbitrárias. Demonstra-se este resultado sem recorrer à teoria das equações diferenciais parciais, supondo-se que a corda tenha comprimento infinito, de forma que não existam condições de contorno para preocupar, e supondo-se que a posição e a velocidade iniciais de todos os pontos da corda sejam dados pelas funções $u_0(x)$ e $v_0(x)$. No caso de se aplicar a solução (8.39) para encontrar estas condições iniciais, em $t = 0$,

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x), \quad (8.40)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = \left[-c \frac{df}{d\xi} + c \frac{dg}{d\eta} \right]_{t=0} = v_0(x). \quad (8.41)$$

Em $t = 0$, $\xi = \eta = x$, de forma que a Eq. (8.41) pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dx} [-f(x) + g(x)] = \frac{v_0(x)}{c}, \quad (8.42)$$

a qual pode ser integrada obtendo-se

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx + C. \quad (8.43)$$

Somando e subtraindo as Eqs. (8.40) e (8.43), obtém-se as funções f e g :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx - C \right), \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v_0(x) dx + C \right). \end{aligned} \quad (8.44)$$

A constante C pode ser omitida, pois se cancelará em $u = f + g$. Estas equações são válidas para todos os valores de x , podendo-se substituir x por ξ e η , respectivamente:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2} \left(u_0(\xi) - \frac{1}{c} \int_0^\xi v_0(\xi) d\xi \right), \\ g(\eta) &= \frac{1}{2} \left(u_0(\eta) + \frac{1}{c} \int_0^\eta v_0(\eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Este resultado fornece a solução (8.39) da Eq. (8.6) para quaisquer posição e velocidade iniciais da corda.

Associadas com a onda

$$u = f(x - ct), \quad (8.46)$$

existe um fluxo de energia ao longo da corda, como se demonstra calculando a potência fornecida da esquerda para a direita através de um ponto x qualquer sobre a corda. A potência P é o produto da velocidade para cima do ponto x e a força para cima [veja

Eq. (8.2)] exercida pela metade da corda à esquerda sobre a metade da direita através do ponto x :

$$P = -\tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.47)$$

Se u for dado pela Eq. (8.46), isto é,

$$P = c\tau \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2, \quad (8.48)$$

que é sempre positiva, indicando que o fluxo de potência é sempre da esquerda para a direita para onda dada pela relação (8.46). Para uma onda que se desloca para a esquerda, P será negativo, indicando um fluxo de potência da direita para a esquerda. Para a onda senoidal dada pela Eq. (8.37), a potência será

$$P = k\omega\tau A^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (8.49)$$

e a média em um ciclo será

$$\langle P \rangle_{av} = \frac{1}{2}k\omega\tau A^2. \quad (8.50)$$

Considere, agora, uma corda fixa em $x = 0$ e se estendendo para a esquerda a partir de $x = 0$ até $x = -\infty$. A solução (8.39) deve satisfazer a condição de contorno

$$u(0,t) = f(-ct) + g(ct) = 0, \quad (8.51)$$

para qualquer tempo t , de forma que as funções $f(\xi)$ e $g(\eta)$ devem ser tais que

$$f(\xi) = -g(\eta) \quad \text{sempre que } \xi = -\eta. \quad (8.52)$$

Os valores iniciais $u_0(x)$ e $v_0(x)$, agora, serão obtidos somente para valores negativos de x , e as Eqs. (8.45) definirão $f(\xi)$ e $g(\eta)$ apenas para valores negativos de ξ e η . Os valores de $f(\xi)$ e $g(\eta)$ para valores positivos de ξ e η podem ser obtidos a partir da Eq. (8.52):

$$f(\xi) = -g(-\xi), \quad g(\eta) = -f(-\eta). \quad (8.53)$$

Considere uma onda representada por $f(x - ct)$ e deslocando-se na direção da extremidade $x = 0$. Uma fase particular ξ_0 , para a qual a amplitude da onda é $f(\xi_0)$, estará no tempo t_0 no ponto

$$x_0 = \xi_0 + ct_0. \quad (8.54)$$

Suponha que ξ_0 e t_0 sejam escolhidos de forma que x_0 seja negativo. Em um tempo posterior t_1 , a fase ξ_0 estará no ponto

$$x_1 = \xi_0 + ct_1 = x_0 + c(t_1 - t_0). \quad (8.55)$$

Em $t_1 = t_0 - (x_0/c)$ e $x_1 = 0$, a fase ξ_0 atinge a extremidade da corda. Em tempos posteriores, x_1 será positivo e $f(x_1 - ct_1)$ não terá nenhum significado físico, pois a

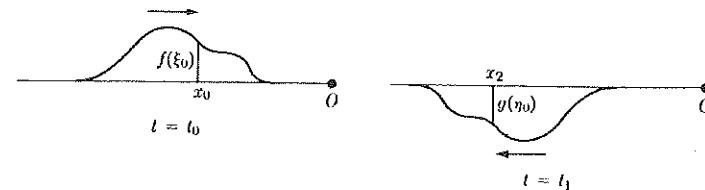


Fig. 8.2 Onda refletida em $x = 0$.

corda não se estende para valores positivos de x . Considere, agora, a fase η_0 , da onda $g(x + ct)$ deslocando-se para a esquerda, definida por

$$\eta_0 = x + ct = -\xi_0. \quad (8.56)$$

A amplitude da onda $g(\eta_0)$, que se desloca para esquerda para a fase η_0 , está relacionada à amplitude do $f(\xi_0)$, que se desloca para direita para a fase ξ_0 correspondente através da Eq. (8.53); logo,

$$g(\eta_0) = -f(\xi_0). \quad (8.57)$$

No tempo t_1 , a fase η_0 estará no ponto

$$x_2 = \eta_0 - ct_1 = -x_0 - c(t_1 - t_0). \quad (8.58)$$

Se $t_1 > t_0 - (x_0/c)$, x_2 será negativo e $g(\eta_0)$ representará uma onda de mesma forma e de amplitude oposta a $f(\xi_0)$, deslocando-se para esquerda. Logo, a onda $f(x - ct)$ será refletida fora de fase no ponto $x = 0$ e se tornará uma onda de mesma forma e amplitude oposta que se desloca para a esquerda (veja a Fig. 8.2). O deslocamento total da onda durante o intervalo de tempo $(t_1 - t_0)$, de $x = x_0$ para $x = 0$ e de volta a $x = x_2$, de acordo com a Eq. (8.58), será

$$-x_0 - x_2 = c(t_1 - t_0), \quad (8.59)$$

como era de se esperar.

A solução (8.39) também pode ser ajustada a uma corda de comprimento finito e fixa em $x = 0$ e $x = l$. Neste caso, a posição e a velocidade iniciais, $u_0(x)$ e $v_0(x)$, só serão conhecidas para $(0 \leq x \leq l)$. As funções $f(\xi)$ e $g(\eta)$ serão, então, definidas pela Eq. (8.45) somente para $(0 \leq \xi \leq l, 0 \leq \eta \leq l)$. Definindo-se $f(\xi)$ e $g(\eta)$ para valores negativos ξ e η , de acordo com a Eq. (8.53), em termos de seus valores para valores positivos ξ e η , então a condição de contorno (8.51) será satisfeita em $x = 0$. Usando-se um argumento similar ao que foi apresentado para a Eq. (8.53), demonstrase que a condição de contorno (8.9) para $x = l$ será satisfeita se, para todos os valores de ξ e η , as seguintes igualdades forem válidas,

$$\begin{aligned} f(\xi + l) &= -g(l - \xi), \\ g(\eta + l) &= -f(l - \eta). \end{aligned} \quad (8.60)$$

Através das Eqs. (8.53) e (8.60), determinam-se $f(\xi)$ e $g(\eta)$ para todos os valores de ξ e η , uma vez que seus valores são conhecidos [de acordo com as Eqs. (8.45)] para $0 \leq \xi \leq l, 0 \leq \eta \leq l$. Assim, encontra-se uma solução para a corda vibrante do compri-

mento l , em termos de ondas que se deslocam em direções opostas e refletidas continuamente em $x = 0$ e $x = l$. Esta solução é equivalente à dada pelas Eqs. (8.23) e (8.25), em termos de ondas senoidais estacionárias.

8.4 A CORDA COMO CASO-LIMITE DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

Nas três primeiras seções deste capítulo, considerou-se uma corda idealizada, caracterizada por uma massa distribuída continuamente, de densidade σ e tensão τ . Uma corda real, no entanto, é constituída de partículas (átomos e moléculas); assim, o tratamento desse problema como uma massa contínua é válido devido ao grande número de partículas da corda, mas em se tratando de uma corda real, o desenvolvimento que leve em conta os átomos individuais é impossível de ser realizado, porém, nesta seção, vai-se considerar o modelo idealizado de uma corda constituída de um número finito de partículas, cada uma delas com massa m . A Fig. 8.3 mostra esta corda idealizada, na qual a força atrativa τ age entre partículas adjacentes ao longo da linha que as une. As forças entre as partículas são tais que, em equilíbrio, a corda estará na horizontal, com as partículas separadas igualmente numa distância h . O comprimento da corda é $(N+1)h$, com $N+2$ partículas, e as duas partículas das extremidades fixadas no eixo x . As N partículas que se podem mover livremente são numeradas $1, 2, \dots, N$ e o deslocamento vertical para cima da partícula j em relação à horizontal denomina-se u_j . Considere que as partículas só se possam mover verticalmente e que só são permitidas pequenas vibrações, de tal forma que a inclinação da corda seja sempre pequena. Então, as equações do movimento deste sistema de partículas são

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = \tau \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \tau \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8.61)$$

onde a expressão à direita representa os componentes verticais das forças τ entre a partícula j e as duas partículas adjacentes, supondo-se que as forças τ sejam iguais entre todos pares de partículas. Considere que o número N de partículas seja muito grande, e que o deslocamento da corda seja tal que, em qualquer tempo t , se possa desenhar uma curva suave $u(x, t)$ através das partículas, de forma que

$$u(jh, t) = u_j(t). \quad (8.62)$$

Então, representa-se aproximadamente o sistema de partículas como uma corda contínua de tensão τ e densidade linear

$$\sigma = \frac{m}{h}. \quad (8.63)$$

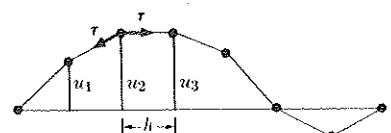


Fig. 8.3 Corda constituída de partículas.

As equações do movimento (8.61) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} = \frac{\tau}{\sigma h} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right). \quad (8.64)$$

Se as partículas estiverem suficientemente próximas, ter-se-á aproximadamente:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} &\doteq \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=(j+1/2)h}, \\ \frac{u_j - u_{j-1}}{h} &\doteq \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=(j-1/2)h}, \end{aligned} \quad (8.65)$$

e, assim,

$$\frac{1}{h} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right) \doteq \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=jh}. \quad (8.66)$$

A função $u(x, t)$, no entanto, quando h é muito pequeno, satisfaz aproximadamente a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.67)$$

que é idêntica à Eq. (8.6) para uma corda contínua.

As soluções das Eqs. (8.61) quando N é muito grande se aproximam das soluções das Eqs. (8.6). Se não for possível resolver analiticamente a Eq. (8.6), por outro lado, pode-se resolvê-la numericamente usando, ao contrário, o processo descrito acima, de forma a reduzir a equação diferencial parcial (8.67) ao conjunto de equações diferenciais ordinárias (8.61), que poderá ser resolvido por métodos numéricos. As soluções das Eqs. (8.61) já têm algum interesse por si próprias. Reescrevendo-se estas equações na seguinte forma:

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \frac{2\tau}{h} u_j - \frac{\tau}{h} (u_{j+1} + u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (8.68)$$

obtém-se as equações para um conjunto de osciladores harmônicos, cada um deles acoplado a dois osciladores adjacentes. Então, o leitor será levado, através do método desenvolvido para o problema dos osciladores acoplados ou considerando os resultados para uma corda contínua, a tentar uma solução da forma

$$u_j = a_j e^{\pm i\omega t}. \quad (8.69)$$

Substituindo esta solução-tentativa nas Eqs. (8.68), calcula-se o fator $e^{\pm i\omega t}$, obtendo-se um conjunto de equações algébricas:

$$\left(\frac{2\tau}{h} - m\omega^2 \right) a_j - \frac{\tau}{h} a_{j+1} - \frac{\tau}{h} a_{j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (8.70)$$

Esta é uma relação de recorrência, que permite obter a_{j+1} em termos de a_j e a_{j-1} . Como $a_0 = 0$, se a_1 é conhecido, determinam-se os demais valores das constantes a_j através da aplicação sucessiva desta equação. Um método mais elegante de solução é aquele em que se nota a analogia entre a relação de recorrência (8.70) e a equação diferencial linear (8.16), e se tenta a solução

$$a_j = Ae^{ipj}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (8.71)$$

Quando este valor é substituído nas Eqs. (8.70), depois de se cancelar o fator Ae^{ipj} , obtém-se

$$\left(\frac{2\tau}{h} - m\omega^2\right) - \frac{\tau}{h}(e^{ip} + e^{-ip}) = 0, \quad (8.72)$$

ou

$$\cos p = 1 - \frac{m\hbar\omega^2}{2\tau}. \quad (8.73)$$

Se ω for menor do que

$$\omega_c = \left(\frac{4\tau}{mh}\right)^{1/2}, \quad (8.74)$$

existirá uma solução real para p . Considere que a solução seja

$$p = kh, \quad 0 \leq kh \leq \pi. \quad (8.75)$$

Logo, outra solução será

$$p = -kh. \quad (8.76)$$

Todas as outras soluções para p diferem dos resultados acima por múltiplos de 2π e, tendo-se em vista a forma da Eq. (8.71), que fornece os mesmos resultados para a_j , é possível restringir a atenção aos valores de p dados pelas Eqs. (8.75) e (8.76).

Substituindo-se a Eq. (8.71) na Eq. (8.69) e usando a Eq. (8.75), obtém-se uma solução para as Eqs. (8.68) da seguinte forma:

$$u_j = Ae^{\pm i(kjh - \omega t)}. \quad (8.77)$$

Como a distância horizontal da partícula j , a partir da extremidade à esquerda da corda, é

$$x_j = jh, \quad (8.78)$$

verifica-se que a solução (8.77) corresponde à anterior (8.38), para a corda contínua, e representa uma onda senoidal de deslocamento. Combinando-se as duas soluções complexas conjugadas (8.77) e usando a Eq. (8.78), chega-se à solução real:

$$u_j = A \cos(kx_j - \omega t), \quad (8.79)$$

que corresponde à Eq. (8.37). Obtém-se, assim, ondas senoidais que se podem deslocar em ambas as direções com a velocidade de [Eq. (8.36)]

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{|p|}, \quad (8.80)$$

onde p é dado pela Eq. (8.73). Se $\omega \ll \omega_c$ [Eq. (8.74)], então p será aproximadamente igual a zero, podendo-se expandir $\cos p$ na Eq. (8.73) em uma série de potências;

$$1 - \frac{p^2}{2} \doteq 1 - \frac{m\hbar\omega^2}{2\tau},$$

$$|p| \doteq \omega \left(\frac{mh}{\tau}\right)^{1/2}, \quad (8.81)$$

e

$$c \doteq \left(\frac{h\tau}{m}\right)^{1/2}, \quad (8.82)$$

que concordam com a Eq. (8.7) para uma corda contínua, considerando-se a Eq. (8.63). Entretanto, para valores muito grandes de ω , a velocidade c é menor do que para a corda contínua e se aproxima de

$$c = \frac{\hbar\omega_c}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{h\tau}{m}\right)^{1/2} \quad (8.83)$$

quando $\omega \rightarrow \omega_c$. ($\omega_c = \infty$ para uma corda contínua para a qual $mh = \sigma h^2 = 0$.) Como a velocidade de fase dada pela Eq. (8.80) depende da freqüência, não se podem superpor soluções senoidais para obter uma solução geral da forma da (8.39). Se uma onda de forma diferente da senoidal deslocar-se ao longo da corda, os componentes senoidais em que ela pode ser decomposta deslocam-se com diferentes velocidades e, consequentemente, a forma da onda varia enquanto ela se move. Este fenômeno chama-se *dispersão*.

Quando $\omega > \omega_c$, a Eq. (8.73) tem somente soluções complexas para p , da seguinte forma

$$p = \pi \pm iy. \quad (8.84)$$

Este resultado conduz a soluções para u_j da forma

$$u_j = (-1)^j A e^{\pm iy} \cos \omega t. \quad (8.85)$$

Neste caso, não haverá propagação da onda, mas somente um decaimento exponencial na amplitude de oscilação, para direita ou para esquerda, a partir de qualquer ponto que se escolha para início da oscilação. O comprimento de onda mínimo [Eq. (8.36)] permitido pela Eq. (8.75) é

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2h. \quad (8.86)$$

É evidente que uma onda cujo comprimento de onda seja menor do que este não teria significado, pois não haveria partículas suficientes em distância menor do que λ_c

para definir o comprimento de onda. Ao comprimento de onda λ_c corresponderá uma freqüência ω_c , para a qual

$$u_j = Ae^{ijk}e^{\pm i\omega_c t} = (-1)^j Ae^{\pm i\omega_c t}. \quad (8.87)$$

As partículas adjacentes simplesmente oscilarão fora de fase com amplitude A .

Podem-se construir soluções que satisfaçam as condições de contorno

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (8.88)$$

somando ou subtraindo soluções da forma (8.77). Combinando-se apropriadamente soluções da forma (8.77), obtém-se as seguintes soluções

$$\begin{aligned} u_j &= A \operatorname{sen} pj \cos \omega t + B \operatorname{sen} pj \operatorname{sen} \omega t + C \cos pj \cos \omega t \\ &\quad + D \cos pj \operatorname{sen} \omega t. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Para satisfazer as condições (8.88), devem-se fazer

$$C = D = 0, \quad (8.90)$$

$$p = \frac{n\pi}{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

onde a limitação $n \leq N$ aparece da limitação sobre p na Eq. (8.75). As freqüências normais de vibração serão agora dadas pela Eq. (8.73):

$$\omega_n = \left[\frac{2\tau}{mh} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N+1} \right) \right]^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (8.91)$$

Se $n \ll N$, pode-se expandir o co-seno em uma série de potências, obtendo-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \omega_n &\doteq \left[\frac{n^2 \pi^2 \tau}{mh(N+1)^2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{n\pi}{l} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2}, \quad [l = (N+1)h], \end{aligned} \quad (8.92)$$

que concorda com a Eq. (8.20) para corda contínua.

Constrói-se um modelo físico muito próximo da corda considerada como o sistema de partículas tratado nesta seção, pendurando-se pesos m em intervalos h ao longo de uma corda esticada. A massa m de cada peso deve ser grande em comparação com o peso de um segmento h da corda.

8.5 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Designando-se por F o componente, orientado para cima, da força devido à tração, exercida da esquerda para a direita através de qualquer ponto de uma corda esti-

cada, e por v o componente, orientado para cima, da velocidade de qualquer ponto da corda, de acordo com a Eq. (8.2), tem-se, então:

$$F = -\tau \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (8.93)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (8.94)$$

De acordo com a Eq. (8.4), se não existirem outras forças sobre a corda,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (8.95)$$

Derivando a Eq. (8.93) em relação a t , e considerando que τ seja constante no tempo, obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\tau \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.96)$$

É fácil interpretar as Eqs. (8.95) e (8.96) em relação à Física. A aceleração da corda será proporcional à diferença da força para cima F nas extremidades de um pequeno segmento da corda. Da mesma forma, como F é proporcional à inclinação, a taxa de variação com o tempo de F será proporcional à diferença nos componentes, orientados para cima, das velocidades, nas extremidades do segmento pequeno da corda. A potência fornecida da esquerda para a direita através de qualquer ponto da corda será

$$P = Fv. \quad (8.97)$$

As Eqs. (8.95) e (8.96) são típicas de uma grande variedade de propagação de ondas de pequenas amplitudes que ocorrem em Física. Existem duas grandezas, neste caso F e v , tais que a taxa de variação com o tempo de uma é proporcional à derivada espacial da outra. Para amplitudes grandes, as equações para a propagação das ondas às vezes se tornam não-lineares, podendo ocorrer efeitos novos, como o aparecimento de ondas de choque, que não são descritas pelas equações já estudadas aqui. Quando existe dispersão, podem ocorrer termos lineares em v e F , ou termos envolvendo derivadas de ordem mais alta do que a primeira. Quando as equações da forma das Eqs. (8.95) e (8.96) são válidas, pode-se obter a equação de onda da forma de (8.6) para uma das duas grandezas. Por exemplo, derivando-se a Eq. (8.95) em relação a t , e a Eq. (8.96) em relação a x , supondo-se que σ e τ sejam constantes, obtém-se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = -\tau \frac{\partial v^2}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

ou

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (8.98)$$

onde

$$c = \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2}. \quad (8.99)$$

Similarmente, pode-se demonstrar que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (8.100)$$

Usualmente escolhe-se uma destas duas grandezas de forma que sejam análogas à força (F) e a outra análoga à velocidade (v) correspondente; então, a potência transmitida será dada por uma equação como a Eq. (8.97). Da mesma forma todas as outras grandezas associadas ao deslocamento da onda satisfazem a equação de onda, como, por exemplo, u , que satisfaz a Eq. (8.6).

Como outro exemplo: as equações para uma onda sonora plana que se desloca na direção x , que será derivada na Seç. 8.10, pode ser escrita na seguinte forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p'}{\partial t} = -B \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8.101)$$

onde p' é a pressão em excesso (acima da atmosférica), v é a velocidade do ar em um ponto qualquer na direção x , ρ é a densidade e B é o módulo volumétrico. O significado físico destas equações é claro, mesmo que não se discuta adicionalmente o movimento de gases. Ambos, p' e v , satisfazem as equações de ondas, derivadas facilmente das Eqs. (8.101):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (8.102)$$

onde

$$c = \left(\frac{B}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (8.103)$$

e a potência transmitida na direção x por unidade de área é

$$P = p'v. \quad (8.104)$$

No caso de uma onda eletromagnética plana que se desloque na direção x e seja polarizada linearmente na direção y , pode-se demonstrar que as equações análogas são (em unidades gaussianas)

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (8.105)$$

onde E_y e B_z são os componentes y e z dos campos elétrico e magnético, e c , a velocidade da luz. Os componentes E_y e B_z satisfazem as equações de onda com velocidade c , e a potência transmitida na direção x , por unidade de área, será

$$P = \frac{E_y B_z}{4\pi c}. \quad (8.106)$$

Como exemplo final, sobre uma linha de transmissão de dois fios, a voltagem E através do fio e a corrente i no fio satisfazem as equações

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x}, \quad \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad (8.107)$$

onde C é a capacidade, por unidade de comprimento, e L é a indutância em série, por unidade de comprimento. Novamente, obtém-se as equações de onda para i e E com a velocidade de onda dada por

$$c = \left(\frac{1}{LC} \right)^{1/2}, \quad (8.108)$$

e outra vez a potência transmitida na direção x será

$$P = Ei. \quad (8.109)$$

Assim, o estudo da propagação de ondas numa corda aplica-se à ampla variedade de problemas de Física, muitos deles de importância prática e teórica muito maior do que a da corda. Em muitos casos, a discussão sobre a corda, como se fosse constituída de um número discreto de partículas, é também de grande interesse. A linha de transmissão elétrica, por exemplo, pode ser considerada um caso-límite de uma série de filtros passa-baixa. Pode-se escrever um circuito elétrico construído com indutâncias em série e capacitâncias em paralelo por meio de um conjunto de equações de forma idêntica às Eqs. (8.61) e obtendo resultados análogos. No caso de ondas sonoras, é-se levado pela analogia a acreditar que, para freqüências altas, quando o comprimento de onda torna-se comparável à distância entre as moléculas, a velocidade da onda começará a depender da freqüência, e que haverá uma freqüência-límite, acima da qual não é possível existir propagação de onda.

8.6 CINEMÁTICA DOS FLUIDOS EM MOVIMENTO

Nesta seção, desenvolvem-se os conceitos de Cinemática de utilidade no estudo do movimento de matéria distribuída continuamente, com referência particular aos fluidos em movimento. Uma das maneiras de se descrever o movimento de um fluido é tentando seguir o movimento de cada um dos pontos do fluido, atribuindo as coordenadas x , y e z a cada partícula do fluido e especificando estas coordenadas em função do tempo. Por exemplo, especifica-se uma dada partícula do fluido através das coordenadas x_0 , y_0 e z_0 no instante inicial $t = t_0$. Então, descreve-se o movimento do fluido através das funções $x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t)$ e $z(x_0, y_0, z_0, t)$ que determinam as coordenadas x , y e z , no instante t , da partícula do fluido que, no instante t_0 , estava em x_0 , y_0 , z_0 . Este procedimento seria a generalização imediata dos conceitos da Mecânica da Partícula e do tratamento anterior da corda vibrante. Este método, devido originalmente a Euler, leva às chamadas "equações de Lagrange" da Mecânica dos Fluidos. Um modo mais conveniente, também devido a Euler, é abandonar a tentativa de especificar a história de cada partícula e, ao invés, especificar a den-

sidade e a velocidade do fluido, em cada ponto do espaço, a cada instante no tempo. Este será o método seguido aqui, pois conduz às “equações eulerianas” da Mecânica dos Fluidos. O movimento dos fluidos será descrito através da especificação da densidade $\rho(x, y, z, t)$ e do vetor velocidade $v(x, y, z, t)$, no ponto x, y, z , no tempo t . Assim, focaliza-se a atenção no que está acontecendo em um determinado ponto no espaço, num instante particular, ao invés de no que está acontecendo com uma determinada partícula do fluido.

Qualquer grandeza que for usada na descrição do estado do fluido, por exemplo, a pressão p , será uma função [$p(x, y, z, t)$] das coordenadas espaciais x, y e z e do tempo t ; isto é, haverá um valor definido da função para cada ponto no espaço e em cada instante. Embora o método de descrição adotado focalize a atenção num ponto no espaço e não numa partícula do fluido, não é possível deixar de seguir as próprias partículas do fluido, pelo menos durante pequenos intervalos de tempo dt , pois é em relação às partículas e não aos pontos do espaço que se aplicam as leis da Mecânica. É preciso, entretanto, dar atenção a duas taxas de variação com o tempo de qualquer grandeza, como, por exemplo, p . A taxa com que a pressão varia com o tempo num ponto fixo no espaço será a derivada parcial em relação ao tempo ($\partial p / \partial t$), que é uma função de x, y, z e t . A taxa de variação da pressão em relação a um ponto que se move juntamente com o fluido será dada pela seguinte derivada total:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (8.110)$$

onde dx/dt e dz/dt são os componentes da velocidade v do fluido. A variação na pressão, dp , que ocorre no intervalo de tempo dt , na posição de uma partícula do fluido que se move de x, y e z para $x + dx, y + dy$ e $z + dz$, durante este intervalo de tempo, será

$$\begin{aligned} dp &= p(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - p(x, y, z, t) \\ &\doteq \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

e se $dt \rightarrow 0$, este resultado leva à Eq. (8.110). Pode-se, então, escrever a Eq. (8.110) nas seguintes formas:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8.111)$$

e

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p, \quad (8.112)$$

onde a segunda expressão é a forma reduzida da primeira, de acordo com as convenções para a utilização do símbolo ∇ . A derivada total dp/dt é também uma função de x, y, z e t . Uma relação similar é válida entre derivadas parciais e derivadas totais de qualquer grandeza, podendo-se escrever, simbolicamente,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (8.113)$$

onde as derivadas total e parcial têm o significado que foi definido anteriormente.

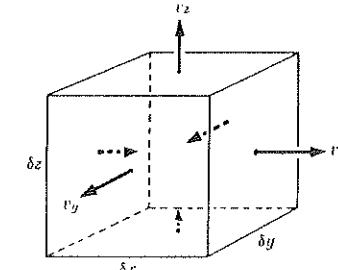


Fig. 8.4 Movimento de um elemento do fluido em expansão.

Considere, agora, um pequeno volume de fluido, δV , admitindo que δV identifique um elemento do volume que se move com o fluido, de forma que contenha sempre as mesmas partículas do fluido. Em geral, o volume δV varia com o tempo e é preciso calcular esta taxa de variação. Admita que δV seja dado na forma de uma caixa retangular de dimensões $\delta x, \delta y$ e δz (Fig. 8.4), então:

$$\delta V \doteq \delta x \delta y \delta z. \quad (8.114)$$

O componente x da velocidade do fluido v_x pode ser diferente nas faces da caixa à esquerda e à direita. Se isto acontecer, δx variará com o tempo a uma taxa igual à diferença entre estas duas velocidades:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x, \\ \text{e, similarmente,} \quad \frac{d}{dt} \delta y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y, \\ \frac{d}{dt} \delta z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (8.115)$$

A taxa de variação com o tempo de δV será então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta V &= \delta y \delta z \frac{d}{dt} \delta x + \delta x \delta z \frac{d}{dt} \delta y + \delta x \delta y \frac{d}{dt} \delta z \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z, \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\frac{d}{dt} \delta V = \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V. \quad (8.116)$$

Esta demonstração não é muito rigorosa, mas dá idéia do significado da divergência $\nabla \cdot v$. A demonstração pode se tornar rigorosa, conservando-se as grandezas que foram desprezadas aqui, como, por exemplo, a dependência de v_x em y e z e demonstrando que se chega à Eq. (8.116) no limite, quando $\delta V \rightarrow 0$. Entretanto, existe um método mais simples de se demonstrar rigorosamente a Eq. (8.116). Considere um volume V de um fluido constituído de elementos de volume δV , tal que

$$V = \sum \delta V. \quad (8.117)$$

Somando-se o primeiro membro da Eq. (8.116), tem-se

$$\sum \frac{d}{dt} \delta V = \frac{d}{dt} \sum \delta V = \frac{dV}{dt}. \quad (8.118)$$

O símbolo da soma neste caso representa na realidade uma integração, pois pretende-se tomar o limite de $\delta V \rightarrow 0$, mas os estágios algébricos na Eq. (8.118) parecerão pouco familiares quando se usa o símbolo de integral. Soma-se, então, o segundo membro da Eq. (8.116), desta vez tomando o limite e usando o símbolo de integral, para poder aplicar o Teorema da Divergência, de Gauss [Eq. (3.115)]:

$$\begin{aligned} \sum \nabla \cdot v \delta V &= \iiint_V \nabla \cdot v dV \\ &= \iint_S \hat{n} \cdot v dS, \end{aligned} \quad (8.119)$$

onde S é a superfície que limita o volume V , e \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície e orientado para fora. Como $\hat{n} \cdot v$ é o componente da velocidade orientada para fora do elemento de superfície dS , o volume adicional de V devido ao movimento de dS será $\hat{n} \cdot v dt dS$ (Fig. 8.5), e assim a última linha na Eq. (8.119) será a expressão apropriada para a taxa de crescimento do volume

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S \hat{n} \cdot v dS. \quad (8.120)$$

Logo, a Eq. (8.116) deve ser a expressão correta para a taxa de crescimento do elemento de volume, pois ele fornece a expressão correta para a taxa de crescimento de qual-

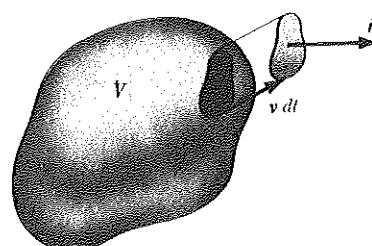


Fig. 8.5 Acréscimo de volume devido ao movimento da superfície.

quer volume V , quando somada em relação a V . Note que a demonstração é independente da forma de δV . Desta forma, obteve-se uma expressão para a taxa de variação com o tempo de um volume V do fluido em movimento:

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_V \nabla \cdot v dV. \quad (8.121)$$

Se o fluido for incompressível, então o volume de cada elemento deve permanecer constante:

$$\frac{d}{dt} \delta V = 0 \quad (8.122)$$

e, consequentemente, de acordo com a Eq. (8.116),

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (8.123)$$

Nenhum fluido é absolutamente incompressível, mas (em muitos casos, pode-se considerar que os líquidos, praticamente, o sejam, como se verificará mais tarde) mesmo a compressibilidade dos gases pode ser muitas vezes desprezada.

A massa de um elemento de um fluido é

$$\delta m = \rho \delta V, \quad (8.124)$$

que permanecerá constante mesmo que o volume e a densidade não permaneçam:

$$\frac{d}{dt} \delta m = \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = 0. \quad (8.125)$$

Derivando esta equação pela Eq. (8.116), obtém-se

$$\delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\delta V}{dt} = \delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v \delta V = 0,$$

ou, quando se divide por δV ,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0. \quad (8.126)$$

Utilizando-se a Eq. (8.113), pode-se reescrever esta equação em termos das derivadas parciais em relação a um ponto fixo no espaço:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v = 0.$$

Os dois últimos termos podem ser combinados, usando-se as propriedades de ∇ como símbolo da derivação, obtendo-se o seguinte resultado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0. \quad (8.127)$$

Esta é a *equação da continuidade* para o movimento de matéria contínua, que estabelece, essencialmente, que a matéria não é criada nem destruída; a massa δm , em qualquer volume δV , que se move com o fluido, permanece constante.

No restante deste capítulo, usam-se muitas vezes as propriedades do símbolo ∇ , já descritas resumidamente na Seç. 3.6. O operador ∇ tem as propriedades algébricas de um vetor e, além disso: quando um produto é envolvido, ele se comporta como um símbolo de diferenciação. A maneira mais simples de executar este tipo de manipulação, quando ∇ opera sobre um produto, é, primeiro, escrever a soma dos produtos em cada um dos quais somente um fator deva ser derivado. Pode-se indicar tal fator simplesmente sublinhando-o. A seguir, manipula-se cada termo de acordo com as regras da Álgebra Vetorial, com exceção de que o fator sublinhado deva aparecer após o símbolo ∇ . Quando o fator sublinhado é o único após o símbolo ∇ , ou quando todos os outros fatores estão separados por parênteses, não será preciso sublinhá-los, pois não haverá ambigüidade em relação ao fator que deverá ser derivado pelos componentes de ∇ . Como exemplo, a relação entre as Eqs. (8.126) e (8.127) tornar-se-á clara através dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho v) &= \nabla \cdot (\underline{\rho} v) + \nabla \cdot (\rho v) \\&= (\nabla \underline{\rho}) \cdot v + \rho \nabla \cdot v \\&= (\nabla \rho) \cdot v + \rho \nabla \cdot v \\&= v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v.\end{aligned}\quad (8.128)$$

Qualquer fórmula obtida desta maneira poderá sempre ser verificada, escrevendo-se ambos os membros em termos dos componentes. O leitor deverá fazê-lo algumas vezes para se convencer destes resultados. No entanto, usualmente é menos trabalhoso usar as propriedades do símbolo ∇ .

Agora, para calcular a taxa de fluxo de massa através da superfície S fixa no espaço, considere que dS seja um elemento de superfície e \hat{n} seja um vetor unitário normal a dS . Quando se constrói um cilindro movendo-se dS numa distância $v dt$ na direção de $-v$, então no intervalo de tempo dt toda a matéria deste cilindro passará através da superfície dS (Fig. 8.6). A quantidade de massa no cilindro será:

$$\rho \hat{n} \cdot v dt dS,$$

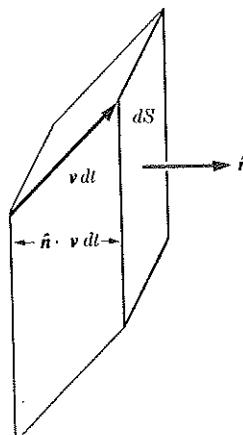


Fig. 8.6 Escoamento de fluido através de um elemento de superfície.

onde $\hat{n} \cdot v dt$ é o deslocamento perpendicular à face dS . A taxa de fluxo de massa através da superfície S será, portanto,

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \rho \hat{n} \cdot v dS = \iint_S \hat{n} \cdot (\rho v) dS. \quad (8.129)$$

Se $\hat{n} \cdot v$ for positivo, o fluxo de massa através de S terá direção \hat{n} ; se $\hat{n} \cdot v$ for negativo, o fluxo de massa terá direção contrária. Verifica-se que ρv , a densidade de momento linear, é também uma corrente de massa, com o significado de que o seu componente em qualquer direção fornece a taxa de fluxo de massa por unidade de área naquela direção. Pode-se, agora, apresentar uma interpretação da Eq. (8.127) através da integração desta relação no volume V , limitado pela superfície S com normal \hat{n} orientada para fora:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho v) dV = 0. \quad (8.130)$$

Como o volume V é considerado fixo, pode-se tirar da integral a derivada em relação ao tempo. Aplicando-se o Teorema da Divergência, de Gauss, na segunda integral, reescreve-se esta equação na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \hat{n} \cdot (\rho v) dS. \quad (8.131)$$

Esta equação estabelece que a taxa com que a massa aumenta dentro de um volume fixo V é igual à taxa negativa do fluxo de massa para fora da superfície. Este resultado evidencia a interpretação física de cada termo da Eq. (8.127). Em particular, é evidente que o segundo termo representa a taxa de fluxo de massa que se afasta de um ponto qualquer. Reciprocamente, iniciando-se com a Eq. (8.131), que é evidente por si própria, e trabalhando-se ao contrário, obtém-se uma demonstração independente da Eq. (8.127).

Equações análogas às Eqs. (8.126), (8.127), (8.129) e (8.131) podem ser aplicadas à densidade, à velocidade e à taxa de fluxo de qualquer grandeza física que seja conservada. Uma equação da forma (8.127) se aplica, por exemplo, ao fluxo de carga elétrica, se ρ for a densidade de carga e ρv a densidade de corrente elétrica.

O rotacional da velocidade, $\nabla \times v$, é um conceito de muita utilidade na descrição do escoamento de fluidos. Para entender o significado, calcula-se a integral do componente normal do rotacional de v através da superfície S limitada por uma curva C . De acordo com o teorema de Stokes (3.117), isto é,

$$\iint_S \hat{n} \cdot (\nabla \times v) dS = \int_C v \cdot dr, \quad (8.132)$$

onde a integral de linha é tomada ao longo de C , no sentido positivo, em relação à normal \hat{n} , como foi definido anteriormente. Se a curva C circundar um vórtice no fluido, de forma que v seja paralelo a dr em torno de C (Fig. 8.7), então a integral de linha no segundo membro será positiva e medirá a taxa com que o fluido está girando ao redor do vórtice. Assim, $\nabla \times v$ é uma espécie de medida da taxa de rotação do fluido por

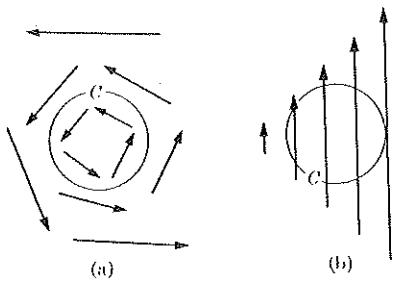


Fig. 8.7 Significado de rotacional de v diferente de zero. (a) Vórtice. (b) Gradiente da velocidade transversa.

unidade de área; daí o nome “rotacional de v ”. O rotacional de v tem um valor diferente de zero nas vizinhanças de um vórtice do fluido, mas também poderá ser diferente de zero, em regiões em que não existe vórtice, isto é, onde o fluido na realidade não circula em torno de um ponto, supondo-se que exista um gradiente da velocidade transversal. A Fig. 8.7 ilustra estes dois casos. Em cada um deles, a integral de linha de v no sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio em torno da circunferência C terá um valor positivo. Se o rotacional de v for igual a zero em todos os pontos do fluido em movimento, o escoamento é *irrotacional*. O escoamento irrotacional é importante, principalmente porque representa problemas matematicamente simples. Se num ponto qualquer $\nabla \times v = 0$, então um elemento do fluido neste ponto não terá velocidade angular resultante em torno do ponto, embora a forma e o tamanho possam variar.

Obtém-se um significado mais preciso do rotacional de v introduzindo um sistema de coordenadas que gire em velocidade angular ω . Se v' é a velocidade do fluido em relação ao sistema com movimento de rotação, então, de acordo com a Eq. (7.33), tem-se

$$v = v' + \omega \times r,$$

onde r é o vetor que vai do eixo de rotação (cuja localização não importa nesta discussão) até um ponto do fluido. O rotacional de v será então

$$\begin{aligned} \nabla \times v &= \nabla \times v' + \nabla \times (\omega \times r) \\ &= \nabla \times v' + \omega \nabla \cdot r - \omega \cdot \nabla r \\ &= \nabla \times v' + 3\omega - \omega \\ &= \nabla \times v' + 2\omega, \end{aligned}$$

onde a segunda linha é obtida a partir da Eq. (3.35) para o produto vetorial triplo, e a terceira linha, através de cálculos diretos dos componentes do segundo e do terceiro termos. Se em algum ponto do fluido,

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times v, \quad (8.133)$$

então neste ponto

$$\nabla \times v' = 0. \quad (8.134)$$

Logo se $\nabla \times v \neq 0$ em um ponto P , então, no sistema de coordenadas que gira com velocidade angular $\omega = 1/2 \nabla \times v$, o escoamento do fluido será irrotacional no ponto P . Pode-se, então, interpretar $1/2 \nabla \times v$ como a velocidade angular do fluido próximo a um ponto qualquer. Se $\nabla \times v$ for constante, então será possível introduzir um sistema de coordenadas girantes em que o escoamento será irrotacional em todos os pontos.

8.7 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA UM FLUIDO IDEAL

No restante deste capítulo, com exceção da última seção, considera-se o movimento de um fluido ideal, isto é, um fluido em que não exista tensão de cisalhamento, mesmo quando estiver em movimento. A tensão dentro de um fluido consiste apenas numa pressão p . Esta restrição é muito maior no caso de fluidos em movimento do que no de fluidos em equilíbrio (Seç. 5.11). Um fluido, por definição, não suporta tensões de cisalhamento quando se encontra em equilíbrio, entretanto todos os fluidos têm viscosidade e, portanto, haverá sempre tensões de cisalhamento entre suas camadas com movimento relativo. Num fluido ideal não haverá viscosidade, e os resultados obtidos para fluidos ideais só serão aplicável quando a viscosidade é desprezível.

Suponha que, além da pressão, o fluido esteja sob a ação de uma densidade de força f por unidade de volume, de forma que a força adicional agindo no volume δV do fluido seja $f \delta V$. Deve-se calcular também a densidade de força devido à pressão. Considere o elemento de volume $\delta V = \delta x \delta y \delta z$, na forma de uma caixa retangular (Fig. 8.8). A força devida à pressão exercida sobre a face esquerda da caixa é $p \delta y \delta z$ e age na direção x . A força devida à pressão exercida sobre a face direita da caixa também é igual a $p \delta y \delta z$ e age na direção oposta. Assim, o componente na direção x da força resultante δF_x exercida sobre a caixa depende da diferença de pressão entre as faces direita e esquerda:

$$\delta F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z. \quad (8.135)$$

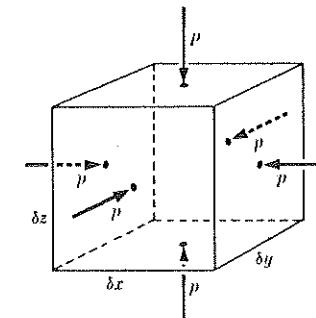


Fig. 8.8 Força devida à pressão exercida sobre um elemento de volume.

Expressões idênticas podem ser obtidas para os componentes da força nas direções y e z . A força total devido à pressão exercida no fluido da caixa será, então,

$$\begin{aligned}\delta F &= \left(-\hat{x} \frac{\partial p}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial p}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \delta V \\ &= -\nabla p \delta V.\end{aligned}\quad (8.136)$$

A densidade de força por unidade de volume devido à pressão será portanto $-\nabla p$. Este resultado foi obtido também na Seç. 5.11 [Eq. (5.172)].

Pode-se escrever, agora, a equação de movimento para um elemento de volume δV do fluido:

$$\rho \delta V \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \delta V - \nabla p \delta V. \quad (8.137)$$

Esta equação é escrita, usualmente, na seguinte forma:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (8.138)$$

Usando-se a equação (8.113), reescreve-se esta expressão, em termos das derivadas, em relação a um ponto fixo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (8.139)$$

onde f/ρ é a força de corpo por unidade de massa. Esta é a equação do movimento de um fluido, de Euler.

Se a densidade ρ depender somente da pressão p , o fluido é chamado *homogêneo*. Esta definição não significa que a densidade seja uniforme, mas um fluido incompressível é homogêneo caso sua densidade seja uniforme. Um fluido compressível de composição química uniforme e temperatura uniforme é homogêneo. Quando o fluido se expande ou se contrai sob a influência das variações de pressão, há um trabalho por ou sobre o fluido e parte deste trabalho pode aparecer na forma de calor. Se a variação de densidade ocorrer suficientemente devagar de forma a haver um tempo adequado para o calor fluir mantendo, porém, a temperatura uniforme através do fluido, este pode ser considerado homogêneo, dentro do significado da definição. A relação entre densidade e pressão é, então, determinada pela equação de estado do fluido ou pelo seu módulo volumétrico isotérmico (Seç. 5.11). Em alguns casos, as variações de densidade ocorrem tão rapidamente que não há tempo apreciável para que o calor flua. Em tais casos, o fluido também pode ser considerado homogêneo, devendo-se usar a relação adiabática entre densidade e pressão ou o módulo volumétrico adiabático. Nos casos entre estes dois extremos, a densidade não dependerá somente da pressão, mas também da temperatura, que, por sua vez, depende da taxa de fluxo de calor entre as partes do fluido com temperaturas diferentes.

Quando o fluido é homogêneo, haverá quatro funções desconhecidas a serem determinadas, em cada ponto do espaço e a cada instante: as três componentes da veloci-

dade \mathbf{v} e a pressão p , havendo, pois, de modo correspondente, quatro equações diferenciais para resolver: os três componentes da equação vetorial do movimento (8.139) e a equação da continuidade (8.127). As únicas outras grandezas que aparecem nestas equações são a força do corpo, que é considerada conhecida, e a densidade ρ , que pode ser expressada como função da pressão. Certamente, as Eqs. (8.127) terão grande número de soluções. Em problemas específicos, é preciso conhecer as condições de contorno da região em que o fluido se move e os valores das funções \mathbf{v} e p em qualquer instante inicial. Nas seções seguintes, os fluidos homogêneos serão estudados. No caso intermediário, mencionado no final do último parágrafo, onde o fluido não é homogêneo, a densidade depende da pressão e da temperatura e há mais uma função desconhecida — a temperatura —, será necessário escrever uma equação adicional determinada pela lei do fluxo de calor. Não se considera este caso aqui, embora ele seja muito importante em muitos problemas.

8.8 LEIS DA CONSERVAÇÃO PARA O MOVIMENTO DOS FLUIDOS

Visto que as leis do movimento dos fluidos são derivadas das leis de movimento, de Newton, é possível generalizar apropriadamente as leis relativas à conservação do momento linear, da energia e do momento angular para o movimento dos fluidos. Anteriormente, já se deu um exemplo de uma lei de conservação para o movimento de um fluido, a saber, a equação da continuidade [Eq. (8.127) ou (8.131)], que expressa a Lei da Conservação da Massa. A massa também é conservada na Mecânica da Partícula, mas o Autor não acha necessário escrever uma equação expressando este fato.

Uma lei da conservação, na Mecânica dos Fluidos, pode ser escrita de muitas formas equivalentes. É instrutivo estudar algumas dessas formas para formar uma idéia mais clara sobre o significado físico das várias expressões matemáticas envolvidas. Considere que ρ seja a densidade de uma grandeza física qualquer: massa, momento linear, energia ou momento angular. Então, a forma mais simples da Lei da Conservação desta grandeza será a Eq. (8.125), que estabelece que quantidade desta grandeza num elemento δV de fluido permanece constante. Se a grandeza em questão estiver sendo produzida em taxa Q por unidade de volume, então a Eq. (8.125) deve ser generalizada:

$$\frac{d}{dt} (\rho \delta V) = Q \delta V. \quad (8.140)$$

Esta relação é freqüentemente chamada Lei da Conservação da Grandeza ρ . Esta terminologia será a utilizada neste livro. A Lei da Conservação fornece um meio de se controlar de onde a grandeza ρ vem e para onde vai. Ela estabelece que esta grandeza aparece no fluido a uma taxa Q por unidade de volume, ou desaparece se Q for negativo. No sentido que foi atribuído ao termo conservação, dado no Cap. 4, esta relação não deveria ser chamada Lei da Conservação, a não ser quando $Q = 0$. Utilizando-se um desenvolvimento exatamente análogo ao que conduziu à Eq. (8.127), pode-se reescrever a Eq. (8.140) como uma equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = Q. \quad (8.141)$$

Esta é provavelmente a forma mais útil da Lei da Conservação. O significado dos termos da Eq. (8.141) aparecerá integrando-se cada termo em relação a um volume V fixo e usando-se o Teorema de Gauss², como se fez para obter a Eq. (8.131):

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \hat{n} \cdot \nabla \rho dS = \iiint_V Q dV. \quad (8.142)$$

De acordo com a discussão que precede a Eq. (8.129), esta equação estabelece que a taxa de crescimento de uma grandeza dentro de V , mais a taxa de fluxo para fora através da superfície S , é igual à taxa de aparecimento devido a fontes dentro de V . Outra forma da Lei da Conservação muito útil pode ser obtida somando-se a Eq. (8.140) em relação a um volume V que se move com o fluido:

$$\sum \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = \frac{d}{dt} \sum \rho \delta V = \sum Q \delta V. \quad (8.143)$$

Tomando-se o limite de $\delta V \rightarrow 0$, as somas tornam-se integrais e, então:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V Q dV. \quad (8.144)$$

A integral de superfície que aparece no primeiro membro da Eq. (8.142) não aparece na Eq. (8.144); como o volume V se move com o fluido, não haverá escoamento através da superfície. Como as Eqs. (8.140), (8.141), (8.142) e (8.144) são todas equivalentes, será suficiente obter a equação da Lei da Conservação para uma delas, pois as outras são obtidas da mesma forma. Usualmente será mais fácil desenvolver uma equação a partir da forma (8.140), começando-se com a do movimento na forma (8.138), ou, então, começar com a Eq. (8.139) e chegar à da conservação na forma (8.141), mas aí o trabalho será maior que usualmente.

Para se obter a equação da Lei da Conservação do Momento Linear, primeiro é preciso concluir que o momento linear em um elemento de volume δV é $\rho v \delta V$. A densidade de momento linear por unidade de volume é portanto ρv , e esta grandeza tomará o lugar de ρ na discussão do capítulo anterior. Para se obter uma equação análoga à Eq. (8.14), começa-se com a equação de movimento na forma (8.138), a qual se refere a um ponto que se move com o fluido, multiplicando-se ambos os membros pelo volume δV de um pequeno elemento do fluido:

$$\rho \delta V \frac{dv}{dt} + \nabla p \delta V = f \delta V. \quad (8.145)$$

Como $\rho \delta V = \delta m$ é constante, pode-se incluí-lo na derivada em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt} (\rho v \delta V) = (f - \nabla p) \delta V. \quad (8.146)$$

² Se ρ for um vetor, como no caso da densidade de momento linear e de momento angular, então deve-se usar a forma generalizada do Teorema de Gauss [mencionado na Seç. 5.11 em relação à Eq. (5.178)].

O momento linear de um elemento do fluido, ao contrário de sua massa, em geral, não é constante. Esta equação estabelece que a taxa de variação com o tempo do momento linear de um elemento de um fluido em movimento é igual à força do corpo mais a força devido à pressão que age sobre ele. A grandeza $f - \nabla p$ toma o lugar Q na discussão geral anterior. A Eq. (8.146) pode ser reescrita em qualquer uma das seguintes formas: (8.141), (8.142) e (8.144). Por exemplo, pode-se escrever na forma da Eq. (8.144):

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV = \iiint_V f dV - \iiint_V \nabla p dV. \quad (8.147)$$

Agora, aplica-se a forma generalizada do Teorema de Gauss [Eq. (5.178)] ao segundo termo do segundo membro, obtendo-se

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV = \iiint_V f dV + \iint_S -\hat{n} p dS, \quad (8.148)$$

onde S é a superfície que limita V .

Esta equação estabelece que a taxa de variação com o tempo do momento linear total, no volume V de um fluido em movimento, é igual à força externa total exercida sobre ele. Este resultado é uma generalização imediata do Teorema do Momento Linear, (4.7), para um sistema de partículas. As forças internas, no caso de fluido, são representadas pela pressão no interior desse fluido. A aplicação do Teorema de Gauss permite eliminar a pressão no interior do volume V , deixando somente a pressão externa sobre a superfície de V . Pergunta-se: como foi possível eliminar as forças internas sem utilizar explicitamente a terceira lei de Newton, pois a Eq. (8.138), que foi o nosso ponto de partida, é uma expressão apenas das duas primeiras leis? A resposta a esta pergunta é que o conceito de pressão já contém implicitamente a terceira lei de Newton, pois a força devido à pressão exercida da esquerda para a direita em qualquer elemento de superfície é igual e oposta à força exercida da direita para esquerda através do mesmo elemento de superfície. Além disso, os pontos de aplicação destas duas forças são os mesmos, e estão sobre o elemento de superfície. Ambas as forças têm necessariamente a mesma linha de ação, não havendo distinção entre as formas fraca e forte da terceira lei de Newton. Espera-se que as pressões internas se cancelam na equação para a taxa de variação com o tempo do momento angular. Aplica-se uma conclusão semelhante às forças devido a qualquer espécie de tensão em fluido ou em sólido; a forma forte da terceira lei de Newton está implicitamente contida no conceito de tensão.

As equações que representam a conservação de momento angular, análogas, tem a termo, às Eqs. (8.140) até (8.144), podem ser obtidas tomando-se o produto vetorial do vetor r com a Eq. (8.138) ou (8.139) e manipulando apropriadamente os termos resultantes. r é o vetor da origem, em relação ao qual os momentos devem ser calculados até um ponto qualquer no fluido ou no espaço. Este desenvolvimento é deixado como exercício. A Lei da Conservação do Momento Angular é responsável pelos vórtices formados quando o fluido escoa por um pequeno orifício no fundo de um tanque. A única força exercida no corpo neste caso é a da gravidade, que não exerce torque em relação ao orifício. Pode-se mostrar que se a pressão for constante, ou de-

pender apenas da profundidade vertical, não existirá componente vertical resultante do torque devido à pressão, através de qualquer superfície fechada. Assim, o momento angular de qualquer parte do fluido permanecerá constante. Se um elemento do fluido não tiver, inicialmente, momento angular quando está relativamente longe do orifício, a sua velocidade angular deverá aumentar numa proporção inversa à sua distância ao orifício, para que o seu momento angular permaneça constante à medida que se aproxima do orifício.

Para se obter a equação da conservação da energia, toma-se o produto vetorial de \mathbf{v} com a Eq. (8.146), tendo-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \delta V \right) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p) \delta V. \quad (8.149)$$

Este é o teorema da energia na forma da Eq. (8.140). Em lugar da densidade ρ , tem-se agora a densidade de energia cinética $\frac{1}{2} \rho v^2$. A taxa de produção de energia cinética, por unidade de volume, será

$$Q = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p). \quad (8.150)$$

Em analogia com o procedimento desenvolvido na Mecânica da Partícula, tenta-se, agora, definir as outras formas de energia de forma a incluir o máximo possível do segundo membro da Eq. (8.149) na derivada em relação ao tempo, que aparece no primeiro membro. Pode-se mostrar a maneira de reescrever o segundo termo do segundo membro usando as Eqs. (8.113) e (8.116):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p \delta V) &= \frac{dp}{dt} \delta V + p \frac{d \delta V}{dt} \\ &= \frac{\partial p}{\partial t} \delta V + \mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V + p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V, \end{aligned} \quad (8.151)$$

de forma que

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla p \delta V = -\frac{d}{dt} (p \delta V) + \frac{\partial p}{\partial t} \delta V + p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V. \quad (8.152)$$

Admita que a força exercida no corpo \mathbf{f} seja a gravitacional:

$$\mathbf{f} = \rho g = \rho \nabla G, \quad (8.153)$$

onde G é o potencial gravitacional [Eq. (6.16)], isto é, a energia potencial negativa, por unidade de massa, devido à gravitação. O primeiro termo à direita na Eq. (8.149) será, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \delta V &= (\mathbf{v} \cdot \nabla G) \rho \delta V = \left(\frac{dG}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t} \right) \rho \delta V \\ &= \frac{d}{dt} (\rho G \delta V) - \rho \frac{\partial G}{\partial t} \delta V, \end{aligned} \quad (8.154)$$

desde que $\rho \delta V = \delta m$ seja constante. Com o auxílio das Eqs. (8.152) e (8.154), a Eq. (8.149) poderá ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p - \rho G \right) \delta V \right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{\partial G}{\partial t} \right) \delta V + p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V. \quad (8.155)$$

A pressão p , neste caso, toma o lugar da densidade da energia potencial cujo gradiente negativo fornece a densidade da força devida à pressão [Eq. (8.136)]. A taxa de variação com o tempo da energia cinética mais a energia potencial gravitacional mais a energia potencial devido à pressão é igual à expressão à direita.

Ordinariamente, o campo gravitacional num ponto fixo no espaço não variará com o tempo (exceto, talvez, nas aplicações do movimento de nuvens de gás em problemas sobre Astronomia). Se a pressão exercida num dado ponto no espaço também for constante, então o primeiro termo do segundo membro se anulará. Qual é o significado do segundo termo? Para um fluido incompressível, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, e o segundo termo também se anulará. Assim, acredita-se que este termo represente a energia associada à compressão ou expansão do elemento do fluido, δV . Para verificar esta hipótese, calcula-se o trabalho realizado quando o elemento de volume δV varia. O trabalho dW realizado pelo elemento do fluido δV , por intermédio da pressão que ele exerce em suas vizinhanças, quando se expande numa quantidade $d \delta V$, será

$$dW = pd \delta V. \quad (8.156)$$

A taxa com que energia é fornecida pela expansão do elemento do fluido, de acordo com a Eq. (8.116), será

$$\frac{dW}{dt} = p \frac{d \delta V}{dt} = p \nabla \cdot \mathbf{v} \delta V, \quad (8.157)$$

que é exatamente o último termo da Eq. (8.155). Até aqui, todas as equações de conservação são válidas para qualquer problema que envolva fluidos ideais, mas quando se trata apenas de fluidos homogêneos, isto é, fluidos cuja densidade depende somente da pressão, pode-se definir a energia potencial associada à expansão e à contração do elemento do fluido δV . Define-se a energia potencial $u \delta m$ do elemento de fluido δV como o trabalho negativo realizado pela pressão exercida nas vizinhanças do fluido, quando há variação desde uma pressão de referência p_0 até uma pressão qualquer p . A energia potencial por unidade de massa, u , será então função de p :

$$u \delta m = - \int_{p_0}^p pd \delta V. \quad (8.158)$$

O volume $\delta V = \delta m / \rho$ será função da pressão, podendo-se reescrever esta relação de várias formas:

$$\begin{aligned} u &= \int_{p_0}^p \frac{p dp}{\rho^2} \\ &= \int_{p_0}^p \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} dp \\ &= \int_{p_0}^p \frac{p}{\rho B} dp, \end{aligned} \quad (8.159)$$

onde, na última relação, se usa a definição de módulo volumétrico [Eq. (5.116)]. A taxa de variação de u com o tempo, de acordo com as Eqs. (8.158) ou (8.159) e (8.116), será

$$\frac{d(u \delta m)}{dt} = -\frac{pd \delta V}{dt} = -p \mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla} \delta V. \quad (8.160)$$

Pode-se incluir agora o último termo do segundo membro da Eq. (8.155) na derivada, em relação ao tempo, no primeiro membro; logo,

$$\frac{d}{dt} [(\frac{1}{2} \rho v^2 + p - \rho G + \rho u) \delta V] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{\partial G}{\partial t} \right) \delta V. \quad (8.161)$$

A interpretação desta equação é clara a partir da discussão anterior. Ela pode ser reescrita na forma de qualquer uma das Eqs. (8.141), (8.142) e (8.144).

Se p e G são constantes em qualquer ponto fixo no espaço, então a energia cinética mais a energia potencial de um elemento do fluido permanecerá constante enquanto ele se desloca. Será conveniente dividir a relação anterior por $\delta m = \rho \delta V$ para eliminar a referência ao elemento de volume e o resultado será,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - G + u \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (8.162)$$

Esta equação é o Teorema de Bernoulli. O termo $\partial G / \partial t$ é quase sempre igual a zero; ele foi mantido simplesmente para tornar claro o significado do termo $(1/\rho)(\partial p / \partial t)$, que tem função similar e nem sempre é igual a zero. Quando ambos os termos do segundo membro são nulos, como no caso do fluxo estacionário, relativo a um ponto que se move juntamente com o fluido,

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - G + u = \text{constante} \quad (8.163)$$

Se u , G e ρ forem constantes, a pressão do fluido em movimento decrescerá quando a velocidade crescer. No caso de fluidos incompressíveis, ρ e u serão necessariamente constantes.

As Leis da Conservação dos Momenos Linear e Angular aplicam-se não somente aos fluidos ideais, mas também, quando formuladas apropriadamente, aos fluidos viscosos e mesmo aos sólidos, considerando-se as observações apresentadas acima em relação à terceira lei de Newton e ao conceito de tensão. A Lei da Conservação da Energia (8.162) não se aplicará, no entanto, aos fluidos viscosos, a menos que a conversão de energia mecânica em energia térmica pelo atrito viscoso seja inclusa na lei, pois a viscosidade se deve ao atrito interno que provoca perda de energia cinética e potencial.

8.9 ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO

Escoamento estacionário é o movimento de um fluido quando todas as grandezas associadas ao fluido — velocidade, densidade, pressão, densidade de força etc. —

são constantes no tempo e em qualquer ponto do espaço. No caso de escoamento estacionário, todas as derivadas parciais, em relação ao tempo, são nulas. A derivada total, em relação ao tempo, que estabelece a taxa de variação com o tempo de uma grandeza em relação a um ponto em movimento com o fluido, em geral, não é igual a zero, mas, de acordo com a Eq. (8.113), será

$$\frac{d}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla}. \quad (8.164)$$

A trajetória seguida por qualquer elemento do fluido, enquanto se desloca, chama-se *linha de corrente*. Linha de corrente é, portanto, uma linha paralela, em cada ponto (x, y, z) , à velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ naquele ponto. O espaço em que o fluido escoa pode ser preenchido com linhas de corrente, de forma que através de cada ponto passe unicamente uma linha de corrente. Introduzindo-se a coordenada s ao longo de uma linha de corrente, que represente a distância medida ao longo da linha, a partir de um determinado ponto fixo, pode-se considerar qualquer grandeza associada ao fluido como função de s ao longo da linha de corrente. O componente do símbolo ∇ ao longo da linha de corrente em qualquer ponto será d/ds , como se pode verificar escolhendo-se um sistema de coordenadas tal que o eixo x esteja orientado ao longo da linha de corrente naquele ponto. A Eq. (8.164) poderá, então, ser reescrita:

$$\frac{d}{dt} = \mathbf{v} \frac{d}{ds}. \quad (8.165)$$

Esta equação torna-se evidente considerando-se o fato de $\mathbf{v} = ds/dt$. Por exemplo, a Eq. (8.162), no caso do escoamento estacionário, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - G + u \right) = 0. \quad (8.166)$$

A grandeza entre parênteses será constante ao longo da linha de corrente.

A equação da continuidade (8.127), no caso de escoamento estacionário, torna-se

$$\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8.167)$$

Integrando-se esta equação num volume fixo V e aplicando-se o Teorema de Gauss, tem-se

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{v}) dS = 0, \quad (8.168)$$

onde S é a superfície fechada que limita V . Esta equação estabelece simplesmente que a massa total que escoa para fora de uma superfície fechada é igual a zero.

Considerando-se todas as linhas de corrente que passam através de uma superfície (aberta) S qualquer, estas linhas formam um tubo, denominado *tubo de escoamento* (Fig. 8.9). As paredes do tubo de escoamento, em qualquer ponto, são paralelas às linhas de corrente, de forma que nenhum fluido entra ou sai dele. A superfície S , que pode ser desenhada perpendicularmente às linhas de corrente num tubo de escoamento, chamam-se *seção transversal* do tubo. Aplicando-se a Eq. (8.168) à superfície fechada, limitada pelas paredes do tubo de escoamento, e às duas seções transversais

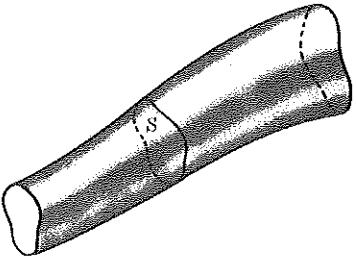


Fig. 8.9 Tubo de escoamento.

S_1 e S_2 , como \hat{n} é perpendicular a v nas paredes do tubo e \hat{n} é paralelo ou antiparalelo a v nas seções transversais:

$$\iint_{S_1} \rho v \, dS - \iint_{S_2} \rho v \, dS = 0, \quad (8.169)$$

ou

$$\iint_S \rho v \, dS = I = \text{constante}, \quad (8.170)$$

onde S é qualquer seção transversal ao longo do tubo de escoamento. A constante I denominava-se *fluxo de massa* através do tubo.

A equação de conservação da energia (8.161), quando reescrita na forma da Eq. (8.141), para o caso de escoamento estacionário, torna-se

$$\nabla \cdot [(\frac{1}{2}\rho v^2 + p - \rho G + \rho u)v] = 0. \quad (8.171)$$

Esta equação tem a mesma forma que a Eq. (8.167), podendo-se concluir, da mesma maneira, que o fluxo de energia é o mesmo através de qualquer seção transversal S do tubo de escoamento.

$$\iint_S (\frac{1}{2}\rho v^2 + p - \rho G + \rho u)v \, dS = \text{constante}. \quad (8.172)$$

Este resultado está muito relacionado à Eq. (8.166).

Se o escoamento além de estacionário também for irrotacional, então

$$\nabla \times v = 0 \quad (8.173)$$

em todos os pontos. Esta equação é análoga em forma à Eq. (3.189) para força conservativa, podendo-se proceder da mesma forma que na Seç. (3.12), a fim de mostrar que no caso de a Eq. (8.173) ser válida, será possível definir uma função potencial da velocidade $\phi(x, y, z)$ pela seguinte equação:

$$\phi(r) = \int_{r_s}^r v \cdot dr, \quad (8.174)$$

onde r_s é um ponto fixo qualquer. A velocidade em qualquer ponto será, então,

$$v = \nabla \phi. \quad (8.175)$$

Substituindo-se este resultado na Eq. (8.167), tem-se uma equação para ϕ :

$$\nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0. \quad (8.176)$$

Nos casos estudados usualmente, pode-se considerar o fluido incompressível, e a equação anterior

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (8.177)$$

Esta equação é idêntica em forma à de Laplace (6.35) para o potencial gravitacional no espaço vazio. Assim, as técnicas da teoria de potencial podem ser usadas nos casos de problemas sobre escoamento irrotacional de fluidos incompressíveis.

8.10 ONDAS SONORAS

Considere um fluido em repouso com pressão p_0 , densidade ρ_0 , em equilíbrio sob a ação de uma força de corpo f_0 , constante no tempo. A Eq. (8.139) torna-se então

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 = \frac{f_0}{\rho_0}. \quad (8.178)$$

Nota-se que esta equação concorda com a Eq. (5.172) deduzida na Seç. 5.11 para fluidos em equilíbrio. Suponha que o fluido seja submetido a uma pequena perturbação, de forma que a pressão e a densidade em qualquer ponto tornam-se

$$p = p_0 + p', \quad (8.179)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (8.180)$$

onde $p' \ll p$ e $\rho' \ll \rho$. Suponha também que a velocidade resultante v e suas derivadas em relação às coordenadas espaciais e ao tempo sejam muito pequenas em todos os pontos. Substituindo-se as Eqs. (8.179) e (8.180) na equação de movimento (8.139), desprezando-se as potências de ordem superior à da primeira das variáveis p' , ρ' , v e suas derivadas e usando a Eq. (8.178), obtém-se

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'. \quad (8.181)$$

Fazendo-se uma substituição idêntica na Eq. (8.127):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot v - v \cdot \nabla \rho_0. \quad (8.182)$$

Considere que a densidade de equilíbrio ρ_0 seja uniforme ou, pelo menos, aproximadamente uniforme, de forma que $\nabla \rho_0$ seja igual a zero ou, pelo menos, pequeno, e que o segundo termo possa ser desprezado.

O acréscimo de pressão p' e o acréscimo de densidade ρ' estão relacionados entre si através do módulo volumétrico, de acordo com a Eq. (5.183):

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{B}. \quad (8.183)$$

Esta equação pode ser usada para se eliminar ρ' ou p' das Eqs. (8.181) e (8.182). Eliminando-se ρ' da Eq. (8.182):

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -B\nabla \cdot v. \quad (8.184)$$

As Eqs. (8.181) e (8.184) são as equações diferenciais fundamentais para as ondas sonoras. A analogia com a forma (8.101) para ondas unidimensionais é aparente. Outra vez, têm-se aqui duas grandezas, p' e v , tais que a derivada em relação ao tempo de qualquer uma delas é proporcional à derivada espacial do outro. De fato, se $v = \dot{x}v_x$ e se v_x e p' forem funções de x , então as Eqs. (8.181) e (8.184) se reduzem às Eqs. (8.101).

Pode-se proceder, em analogia com a discussão da Seç. 8.5, para eliminar v ou p' destas equações. Para eliminar v , toma-se a divergência da Eq. (8.181) e troca-se a ordem de derivação, supondo outra vez que ρ_0 seja aproximadamente uniforme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot v) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p'. \quad (8.185)$$

Deriva-se, agora, a Eq. (8.184) em relação a t e substitui-se o resultado da Eq. (8.185):

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad (8.186)$$

onde

$$c = \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (8.187)$$

Esta é a equação da onda em três dimensões, como será mostrado a seguir. A fórmula (8.187) para a velocidade das ondas sonoras, obtida pela primeira vez por Isaac Newton, aplica-se aos líquidos ou gases. Para gases, Newton supôs que o módulo volumétrico isotérmico $B = p$ deveria ser usado, mas, nesse caso, a Eq. (8.187) não mais concordaria com o valor experimental da velocidade do som. As vibrações sonoras são tão rápidas que podem ser tratadas adiabaticamente, devendo-se usar o módulo volumétrico adiabático $B = \gamma p$, onde γ é a razão entre o calor específico, a pressão constante e o volume constante. A fórmula (8.187) concorda, então, com o valor experimental de c . Eliminando-se p' por um processo similar, obtém-se uma equação de onda para v :

$$\nabla^2 v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (8.188)$$

Quando se deriva a Eq. (8.188), é necessário usar o fato de $\nabla \times (\nabla \times v) = 0$. A partir da Eq. (8.181), pode-se concluir que $\nabla \times v$ será, em qualquer caso, independente do tempo, de tal forma que a parte dependente do tempo em v na onda sonora é irrotacional. [Um pequeno escoamento estacionário poderia ser somado a $\nabla \times v \neq 0$, a onda

sonora, sem violar as Eqs. (8.181) e (8.182). Então, a Eq. (8.188) só seria válida para a parte dependente do tempo da velocidade.]

Para mostrar que a Eq. (8.186) conduz a ondas sonoras que se deslocam em velocidade c , observa-se inicialmente que, se p' só for função de x e t , a Eq. (8.186) torna-se

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (8.189)$$

que tem a mesma forma da equação de onda unidimensional (8.6) e, portanto, tem soluções da forma

$$p' = f(x - ct). \quad (8.190)$$

Esta onda chama-se *onda plana*, onde para um tempo t qualquer a fase $x - ct$ e a pressão p' são constantes ao longo de qualquer plano ($x = \text{constante}$) paralelo ao plano yz . Uma onda plana que se desloque na direção do vetor unitário \hat{n} será dada por

$$p' = f(\hat{n} \cdot r - ct), \quad (8.191)$$

onde r é o vetor posição de qualquer ponto no espaço. Para verificar-se que esta onda está na direção \hat{n} , gira-se o sistema de coordenadas até que o eixo x coincida com esta direção; neste caso, a Eq. (8.191) reduz-se à Eq. (8.190). Os planos $f = \text{constante}$, em qualquer tempo t , são agora perpendiculares a \hat{n} e deslocam-se na direção de \hat{n} com velocidade c . Pode-se verificar, de acordo com o que se observou acima, que a solução (8.191) deve satisfazer a Eq. (8.186), mas também se pode verificar este resultado fazendo o cálculo diretamente, em qualquer sistema de coordenadas:

$$\nabla p' = \frac{df}{d\xi} \nabla \xi = \frac{df}{d\xi} \hat{n}, \quad (8.192)$$

onde

$$\xi = \hat{n} \cdot r - ct, \quad (8.193)$$

e, similarmente,

$$\nabla^2 p' = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \hat{n} \cdot \nabla \xi = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \hat{n} \cdot \hat{n} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad (8.194)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = c^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad (8.195)$$

de forma que a Eq. (8.186) seja satisfeita, não importando a função $f(\xi)$.

A Eq. (8.188) também terá como soluções ondas planas:

$$v = h(\hat{n}' \cdot r - ct), \quad (8.196)$$

que correspondem a ondas que se deslocam na direção \hat{n} com velocidade c , onde h é uma função vetorial de $\xi = \hat{n} \cdot r - ct$. Quando a onda de pressão é conhecida, da forma da Eq. (8.191), corresponderá a uma onda de velocidade cuja forma é a da Eq. (8.196),

e relacionam-se entre si pelas Eqs. (8.181) e (8.182). Calculando-se $\partial v/\partial t$, a partir da Eq. (8.196), e $\nabla p'$, a partir da Eq. (8.191), e substituindo-se na Eq. (8.181), tem-se

$$\frac{dh}{d\xi'} = \frac{\hat{n}}{(B\rho_0)^{1/2}} \frac{df}{d\xi}. \quad (8.197)$$

A Eq. (8.197) deve ser válida em todos os pontos r , em todos os tempos t . O segundo membro desta equação é função de ξ e será constante quando ξ é constante. Consequentemente, o primeiro membro deve ser constante quando ξ é constante e só deve ser função de ξ ; o que significa que $\xi' = \xi$ (ou, pelo menos, que ξ' é função de ξ) e, consequentemente, $\hat{n}' = \hat{n}$. De acordo com a Física, é óbvio que a onda de velocidade deve-se deslocar na mesma direção que a onda de pressão. Pode-se fazer então $\xi' = \xi$, e resolver a Eq. (8.197) para h .

$$h = \frac{\hat{n}}{(B\rho_0)^{1/2}} f, \quad (8.198)$$

onde a constante aditiva é igual a zero, pois ambos, p' e v , são iguais a zero nas regiões onde não existe perturbação. As Eqs. (8.198), (8.196) e (8.190) indicam que, para uma onda sonora plana que se desloque na direção \hat{n} , o acréscimo de pressão e a velocidade relacionam-se pela equação

$$v = \frac{p'}{(B\rho_0)^{1/2}} \hat{n}, \quad (8.199)$$

onde v , neste caso, é a velocidade de uma partícula do fluido, não a velocidade da onda, que é $c\hat{n}$. A velocidade das partículas do fluido se dará ao longo da direção de propagação das ondas sonoras, de tal forma que as ondas sonoras no fluido sejam longitudinais. Isto é consequência do fato dos fluidos não suportarem tensões de cisalhamento, o que não é verdade quando se trata de ondas sonoras em sólidos, que podem ser longitudinais ou transversais.

Uma onda plana oscilando harmonicamente no tempo, com freqüência angular ω , pode ser escrita da seguinte forma:

$$p' = A \cos(k \cdot r - \omega t) = \operatorname{Re} A e^{i(k \cdot r - \omega t)}, \quad (8.200)$$

onde k , o vetor de onda, é dado por

$$k = \frac{\omega}{c} \hat{n}. \quad (8.201)$$

Considerando-se uma superfície perpendicular a \hat{n} que se move para frente e para trás com o fluido enquanto a onda passa, o trabalho realizado pela pressão através desta superfície na direção de \hat{n} , por unidade de área por unidade de tempo, será

$$P = pv. \quad (8.202)$$

Se v oscilar com valor médio igual a zero, então como $p = p_0 - p'$, onde p_0 é constante, a potência média será

$$P_{\text{méd}} = \langle p'v \rangle_{\text{méd}} = \frac{\langle p'^2 \rangle_{\text{méd}}}{(\rho_0 B)^{1/2}}, \quad (8.203)$$

na qual foi usada a Eq. (8.199). Este resultado dá a quantidade de energia, por unidade de área por segundo, deslocando-se na direção \hat{n} .

A equação de onda tridimensional (8.186) tem muitas outras soluções correspondentes a ondas de vários tipos, cujas frentes de onda (superfícies de fase constante) têm forma variada e deslocam-se em várias direções. Como exemplo, considere uma onda esférica, deslocando-se a partir da origem. A taxa de fluxo de energia é proporcional a p'^2 (uma pequena porção de uma onda esférica pode ser considerada uma onda plana); deve-se esperar que o fluxo de energia, por unidade de área, decresça com o inverso do quadrado da distância, de acordo com a Lei da Conservação da Energia. Portanto, p' em qualquer ponto deve ser inversamente proporcional à distância da origem. Logo, deve-se tentar uma onda da forma

$$p' = \frac{1}{r} f(r - ct). \quad (8.204)$$

Esta relação representa uma onda com dependência arbitrária do tempo, cujas frentes de onda, $\xi = r - ct = \text{constante}$, são esferas que se expandem em velocidade c . Pode-se verificar por cálculo direto, usando-se coordenadas retangulares ou coordenadas esféricas com auxílio da Eq. (3.124), que a solução (8.204) satisfaz a equação de onda (8.186).

Pode-se encontrar ligeira dificuldade no desenvolvimento acima, quando se tenta aplicar as expressões do fluxo de energia e do fluxo de massa, obtidas nas duas seções anteriores, para uma onda sonora. A taxa de fluxo de massa, por unidade de área por segundo, de acordo com as Eqs. (8.199), (8.183), será

$$\rho v = \rho_0 \left(1 + \frac{p'}{B} \right) \frac{p'}{(\rho_0 B)^{1/2}} \hat{n}.$$

Poder-se-ia esperar que ρv fosse uma grandeza oscilante, cujo valor médio seria igual a zero, para uma onda sonora, pois não haverá escoamento resultante do fluido. Tomando-se a média da expressão acima, obtém-se

$$\langle \rho v \rangle_{\text{méd}} = \frac{\rho_0^{1/2}}{B^{3/2}} (\langle p'^2 \rangle_{\text{méd}} + B \langle p' \rangle_{\text{méd}}) \hat{n},$$

de forma que existirá um pequeno escoamento do fluido na direção da onda, a não ser que

$$\langle p' \rangle_{\text{méd}} = - \frac{\langle p'^2 \rangle_{\text{méd}}}{B}. \quad (8.205)$$

Se a Eq. (8.205) for válida, de forma que não exista escoamento resultante de fluido, pode-se mostrar, então, que, para termos de segunda ordem de p' e v , a densidade de fluxo de energia dado pela Eq. (8.161), na média, para uma onda sonora, será

$$\left\langle \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p - \rho g + \rho u \right) v \right\rangle_{\text{méd}} = \frac{\langle p'^2 \rangle_{\text{méd}}}{(\rho_0 B)^{1/2}} \hat{n}, \quad (8.206)$$

cujo resultado concorda com a Eq. (8.203). Quando se fazem aproximações nas equações do movimento, deve-se esperar que as soluções satisfaçam as Leis da Conservação somente até o mesmo grau de aproximação. Somando termos de segunda ordem (ou ordens mais altas) como os da relação (8.205) a uma solução de primeira ordem, é certo que se satisfazem as Leis da Conservação até termos de segunda ordem (ou ordens mais altas).

8.11 VIBRAÇÕES NORMAIS DE UM FLUIDO COLOCADO NUMA CAIXA RETANGULAR

O interesse causado pelo problema das vibrações de um fluido confinado numa caixa rígida deve-se não apenas às suas aplicações em problemas de acústica, mas também ao fato de o método poder ser aplicado a problemas que envolvem vibrações eletromagnéticas, vibrações de sólidos elásticos, mecânica ondulatória e todos os fenômenos da Física descritos por equações de onda. Nesta seção, considera-se um fluido confinado numa caixa retangular, cujas dimensões são L_x, L_y, L_z .

Segue-se um procedimento idêntico ao da solução da equação de onda unidimensional, apresentado na Seç. 8.2. Primeiramente, suponha uma solução para a Eq. (8.186) da forma

$$p' = U(x, y, z)\Theta(t). \quad (8.207)$$

A substituição desta solução na Eq. (8.186) conduz à seguinte equação

$$\frac{1}{U} \nabla^2 U = \frac{1}{c^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \quad (8.208)$$

Outra vez, argumenta-se que como o primeiro membro depende somente de x, y e z e o segundo membro, somente de t , ambos os membros devem ser iguais a uma constante, denominada $-\omega^2/c^2$:

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0, \quad (8.209)$$

$$\nabla^2 U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0. \quad (8.210)$$

A solução da Eq. (8.209) pode ser escrita como:

$$\Theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (8.211)$$

ou, alternativamente,

$$\Theta = Ae^{-i\omega t}, \quad (8.212)$$

onde A e B são constantes. A forma (8.212) conduz a ondas de deslocamento da forma da (8.200). Como o interesse, agora, está voltado para o momento com ondas es-

tacionárias, escolhe-se, portanto, a forma (8.211). Para resolver a Eq. (8.210), usa-se outra vez o método da separação de variáveis, supondo que

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (8.213)$$

A substituição desta relação na Eq. (8.210) conduz à seguinte equação

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}. \quad (8.214)$$

Este resultado só será válido para todo x, y e z se cada termo do primeiro membro for constante. Estas constantes são chamadas $-k_x^2, -k_y^2$ e $-k_z^2$, de forma que

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0, \quad (8.215)$$

onde

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (8.216)$$

As soluções das Eqs. (8.215), para as quais se volta o interesse, são

$$\begin{aligned} X &= C_x \cos k_x x + D_x \sin k_x x, \\ Y &= C_y \cos k_y y + D_y \sin k_y y, \\ Z &= C_z \cos k_z z + D_z \sin k_z z. \end{aligned} \quad (8.217)$$

Escolhendo-se exponenciais complexas como soluções para X, Y, Z e Θ , chega-se à solução para uma onda progressiva (8.200), onde k_x, k_y e k_z são os componentes do vetor de onda k .

A seguir, devem-se determinar as condições de contorno apropriadas para serem aplicadas nas paredes da caixa, consideradas como os seis planos $x = 0, x = L_x, y = 0, y = L_y, z = 0$ e $z = L_z$. É evidente que a condição impõe que o componente da velocidade perpendicular à parede seja nulo na parede. Por exemplo, na parede $x = 0$, v_x deve-se anular. De acordo com a Eq. (8.181),

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (8.218)$$

Substituindo-se o valor de p' , dado pelas Eqs. (8.207), (8.211) e (8.217), tem-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{k_x Y Z}{\rho_0} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) (-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x). \quad (8.219)$$

Integrando-se esta relação,

$$v_x = -\frac{k_x Y Z}{\omega \rho_0} (A \sin \omega t - B \cos \omega t) (-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x) \quad (8.220)$$

mais uma função de x, y e z que se anula, pois o que se procura são soluções oscilantes. Para assegurar que v_x se anula em $x = 0$, deve-se fazer $D_x = 0$, isto é, escolher a solu-

ção em co-seno para X na Eq. (8.217). Isto significa que a pressão p' deve oscilar com amplitude máxima na parede. Talvez isto seja óbvio, de acordo com a Física, e esta condição poderia ter sido usada no lugar de $v_x = 0$, que, no entanto, parece ser mais evidente. O componente da velocidade perpendicular à parede deve ter um nodo na parede, e a pressão deve ter um antinodo. Similarmente, a pressão deve ter um antinodo (amplitude de oscilação máxima) na parede $x = L_x$:

$$\cos k_x L_x = \pm 1, \quad (8.221)$$

de tal forma que

$$k_x = \frac{l\pi}{L_x}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (8.222)$$

Aplicando considerações similares às outras quatro paredes, conclui-se que $D_y = D_z = 0$, e

$$\begin{aligned} k_y &= \frac{m\pi}{L_y}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ k_z &= \frac{n\pi}{L_z}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.223)$$

Para cada valor dos três inteiros l, m e n existe um modo normal de vibração do fluido na caixa. As freqüências dos modos normais de vibração são dadas pelas Eqs. (8.216), (8.222) e (8.223):

$$\omega_{lmn} = \pi c \left(\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right)^{1/2}. \quad (8.224)$$

Os três inteiros l, m e n não podem ser todos iguais a zero, pois, neste caso, $\omega = 0$ e não corresponderá à vibração do fluido. Combinando-se estes resultados com as Eqs. (8.217), (8.213), (8.211) e (8.207), obtém-se para o modo normal de vibração caracterizado pelos números l, m, n :

$$p' = (A \cos \omega_{lmn} t + B \sin \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z}, \quad (8.225)$$

onde as constantes C_x, C_y e C_z são suprimidas, por serem supérfluas. As velocidades correspondentes são [veja Eq. (8.220)]

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{l\pi}{L_x \rho_0 \omega_{lmn}} (A \sin \omega_{lmn} t - B \cos \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z}, \\ v_y &= \frac{m\pi}{L_y \rho_0 \omega_{lmn}} (A \sin \omega_{lmn} t - B \cos \omega_{lmn} t) \sin \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{n\pi z}{L_z}, \\ v_z &= \frac{n\pi}{L_z \rho_0 \omega_{lmn}} (A \sin \omega_{lmn} t - B \cos \omega_{lmn} t) \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \sin \frac{n\pi z}{L_z}. \end{aligned} \quad (8.226)$$

Estas quatro equações fornecem uma descrição completa do movimento do fluido para um modo normal de vibração. As paredes $x = 0$ e $x = L_x$ e os $(l-1)$ planos paralelos igualmente espaçados entre eles são nodos de v_x e antinodos para p', v_y e v_z . Uma observação similar se aplica aos planos nodais paralelos às outras paredes.

Pode-se observar que as freqüências normais da vibração, em geral, não se relacionam harmonicamente umas com as outras, como no caso de uma corda vibrante. Se, entretanto, uma das dimensões, por exemplo, L_x , for muito maior do que as outras duas, de forma que a caixa se torne um longo tubo quadrado, então as freqüências mais baixas corresponderão ao caso em que $m = n = 0$, l será um inteiro pequeno e as freqüências estarão relacionadas harmonicamente. Assim, no tubo, as primeiras freqüências normais acima da freqüência mais baixa serão múltiplos da freqüência mais baixa. Este resultado explica por que se conseguem tons musicais num tubo de órgão e numa corda vibrante. O tratamento desta seção se aplica apenas a tubos de órgãos fechados e quadrados, mas o tratamento de tubos circulares fechados não é mais difícil do que o apresentado anteriormente e os aspectos gerais da solução são semelhantes. A análise precisa para tubos com extremidades abertas, no entanto, é mais difícil e a principal dificuldade reside na determinação das condições de contorno nas extremidades abertas. Na realidade, uma das maiores dificuldades é decidir onde é exatamente o limite. Como aproximação grosseira, pode-se supor que o limite seja uma superfície plana na extremidade do tubo, e que esta superfície seja um nodo de pressão. Os resultados, neste caso, serão similares aos de um tubo fechado, exceto pelo fato de, no caso de uma extremidade do tubo longo ser fechada e a outra aberta, as primeiras freqüências acima da freqüência mais baixa serão todas múltiplos ímpares da freqüência mais baixa.

A solução geral das equações para vibrações sonoras numa cavidade retangular pode ser construída, como no caso da corda vibrante, somando-se as soluções para os modos normais na forma da solução (8.225) para todos os modos normais de vibração. Podem-se escolher as constantes A e B , para cada modo de vibração, de forma a satisfazer as condições iniciais, que, neste caso, será a especificação de p' e $\partial p'/\partial t$ (ou p' e v) em todos os pontos da cavidade, num dado instante inicial. Este problema não será analisado aqui. [Na discussão acima, omitiu-se o caso $l = m = n = 0$, que corresponde a um acréscimo de pressão constante p' . Da mesma forma, foram omitidas as soluções de velocidade estacionária $v(x, y, z)$ que não oscilam com o tempo. Estas soluções devem ser incluídas para que se ajustem todas as condições iniciais.]

No caso de cavidades com outras formas simples, como, por exemplo, esferas e cilindros, usa-se também o método de separação das variáveis, empregado no exemplo acima, mas, nestes casos, no lugar das variáveis x, y e z , devem-se usar coordenadas apropriadas a cada uma das formas da superfície de limite, por exemplo, coordenadas esféricas ou cilíndricas. Na maioria dos casos, exceto no de umas poucas formas simples, o método de separação de variáveis não funciona. Métodos aproximados podem ser usados quando a forma se aproxima de uma bem simples, cuja solução já seja conhecida. Por outro lado, os únicos métodos gerais de solução são os numéricos, que podem ser muito trabalhosos. É fácil mostrar, no entanto, que as características gerais dos resultados obtidos no caso de cavidades retangulares são válidas para todas as formas,

isto é, existem modos normais de vibração com freqüências características, e o movimento mais geral é a superposição destes modos normais.

8.12 ONDAS SONORAS EM TUBOS

Um problema de interesse considerável é o da propagação de ondas sonoras em tubos. Considere um tubo cujo eixo esteja na direção z e cuja seção transversal seja retangular e de dimensões L_x e L_y . Este problema é o mesmo que o da seção anterior, exceto pelo fato de não existirem paredes perpendiculares ao eixo z .

O método de solução que será aplicado é idêntico ao anterior, com uma diferença: que as condições de contorno só se aplicarão às quatro paredes $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$. Conseqüentemente, haverá restrições na escolha das funções $X(x)$ e $Y(y)$, exatamente iguais às da seção anterior, de acordo com as Eqs. (8.217), (8.222) e (8.223). Não haverá restrições na escolha da solução da equação em Z [Eq. (8.215)]. Como há interesse em soluções que representem a propagação de ondas ao longo do tubo, será escolhida uma solução na forma exponencial para Z :

$$Z = e^{ik_z z}, \quad (8.227)$$

e a solução exponencial complexa para Θ . A solução para p' , para valores escolhidos dos inteiros l e m , será

$$\begin{aligned} p' &= \operatorname{Re} Ae^{i(k_z z - \omega t)} \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \\ &= A \cos \frac{l\pi x}{L_x} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos (k_z z - \omega t). \end{aligned} \quad (8.228)$$

Este resultado representa uma onda harmônica que se desloca na direção z ao longo do tubo, cuja amplitude varia, na seção transversal, de acordo com os dois primeiros fatores em co-seno. Para cada escolha dos inteiros l e m corresponde o que se chama um *modo de propagação* para o tubo. (A escolha $l = 0, m = 0$ é, neste caso, permitida.) Sendo l e m conhecidos e uma dada freqüência ω , determina-se o número de ondas k_z pelas Eqs. (8.216), (8.222) e (8.223):

$$k_z = \pm \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{l\pi}{L_x} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (8.229)$$

O sinal positivo corresponde a uma onda que se desloca na direção $+z$, e reciprocamente. Para $l = m = 0$, esta relação é idêntica à relação (8.201) para ondas que se deslocam em velocidade c na direção z em fluidos que preenchem o espaço tridimensional. Caso contrário, a onda se deslocará em velocidade

$$c_{lm} = \frac{\omega}{|k_z|} = c \left[1 - \left(\frac{l\pi c}{\omega L_x} \right)^2 - \left(\frac{m\pi c}{\omega L_y} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (8.230)$$

que é maior do que c e depende de ω . Haverá, evidentemente, uma freqüência mínima

$$\omega_{lm} = \left[\left(\frac{l\pi c}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{L_y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8.231)$$

abaixo da qual não haverá propagação dos modos l e m , pois k_z seria imaginário e o expoente na Eq. (8.227), real, de forma que, em lugar de uma propagação de onda, ter-se-ia um decaimento exponencial da amplitude da onda na direção z . Pode-se notar a similaridade deste resultado com o obtido na Seç. 8.4 para cordas discretas, onde, no entanto, havia um limite superior, ao invés de inferior, para a freqüência. Como c_{lm} depende de ω , há novamente o fenômeno de dispersão. Uma onda de forma arbitrária — que pode ser decomposta em componentes que oscilam senoidalmente em diversas freqüências ω — será distorcida enquanto se desloca ao longo do tubo, porque cada componente tem uma velocidade diferente. Os problemas do cálculo da velocidade v do fluido e do fluxo de potência, associados à onda (8.228) são deixados como exercício para o leitor.

Obtém-se resultados similares para outros tubos cujas seções transversais não são retangulares. Aplicam-se métodos e resultados análogos ao problema de propagação de ondas eletromagnéticas ao longo de um guia de ondas, sendo esta mais uma razão do interesse que se tem por este problema.

8.13 VELOCIDADE DE GRUPO

A partir da fórmula (8.230), verifica-se que a velocidade c_{lm} se torna infinita quando a freqüência ω é igual à freqüência de corte ω_{lm} para o modo l, m . Este resultado surpreendente não impressiona tanto quando se nota que c_{lm} é a velocidade em que a forma da onda (8.228) se desloca ao longo do tubo. As partículas do fluido certamente não se deslocam nesta velocidade, como se pode verificar imediatamente (veja Probl. 23). O fato de a pressão, em cada ponto do fluido, oscilar com a freqüência e a fase, de maneira que a forma da onda de pressão se desloque ao longo do tubo em velocidade c_{lm} , não indica a existência de alguma coisa física que se desloque nesta velocidade. É importante conhecer as velocidades em que a onda sonora possa carregar energia e momento linear ao longo do tubo, ou as velocidades de alguma forma de sinal necessárias para se transmitir informações ao longo do tubo. Torna-se claro que a onda harmônica (8.228) que se estende uniformemente na direção z de $-\infty$ até $+\infty$ não poderá transmitir informações, pois ela não muda e para poder transmiti-las deverá mudar de alguma forma. Imagine que a fonte de ondas sonoras numa das extremidades do tubo produza ondas durante um tempo finito, o qual se desloca ao longo do tubo para um receptor na outra extremidade. O pacote de ondas ou grupo de ondas pode transmitir tanto energia como momento linear de uma fonte sonora para o receptor. Pergunta-se agora: em que velocidade tal grupo de ondas se deslocará?

Para evitar complicações algébricas desnecessárias, ignora-se por enquanto a dependência de x e y da pressão e supõe-se simplesmente que as ondas

$$p'(z, t) = A \cos(kz - \omega t), \quad (8.232)$$

possam deslocar-se na direção z onde $\omega(k)$ seja uma função conhecida de k , dada no presente caso pelas Eqs. (8.216) ou (8.229) onde $k = k_z$. A dependência de x e y na Eq. (8.228) se faz através de uma função conhecida que, por sua vez, é independente de z e t e poderá ser introduzida posteriormente. Para se obter uma solução em que a amplitude da onda (8.232) seja de alguma forma modulada, determina-se uma solução que, para $t = 0$, tem a seguinte forma:

$$p'(z, 0) = F(z) \cos kz, \quad (8.233)$$

onde $F(z)$ é uma função confinada em uma região finita, ao longo do eixo z , como é mostrado na Fig. 8.10. Além disso, supõe-se que a função $F(z)$ varia lentamente com z , em comparação com a variação relativamente rápida de $\cos kz$.

Para se poder usar a série de Fourier, suponha que o tubo tenha comprimento finito L mas suficientemente longo para que durante o período de interesse não haja necessidade de pensar nas extremidades. Escreve-se, então, a função $F(z)$ na forma de uma série de Fourier, usando-se o procedimento da Eq. (8.24):

$$F(z) = \sum_n F_n \sin k_n z, \quad (8.234)$$

onde

$$k_n = n\pi/L. \quad (8.235)$$

Se a função $F(z)$ variar lentamente, como foi suposto, então os coeficientes F_n serão iguais a zero, ou desprezíveis, a não ser que $k_n \ll k$. A onda de pressão (8.233) em $t = 0$ pode, então, ser escrita na forma

$$\begin{aligned} p'(z, 0) &= \sum_n F_n \sin k_n z \cos kz \\ &= \sum_n \frac{1}{2} F_n \{ \sin [(k + k_n)z] - \sin [(k - k_n)z] \}. \end{aligned} \quad (8.236)$$

Note, então, que pela superposição de ondas da forma da (8.232), pode-se encontrar a solução desejada com a forma (8.236), em $t = 0$.

$$p'(z, t) = \sum_n \frac{1}{2} F_n \{ \sin [(k + k_n)z - \omega_{n+}t] - \sin [(k - k_n)z - \omega_{n-}t] \}, \quad (8.237)$$

onde

$$\omega_{n+} = \omega(k + k_n), \quad \omega_{n-} = \omega(k - k_n). \quad (8.238)$$

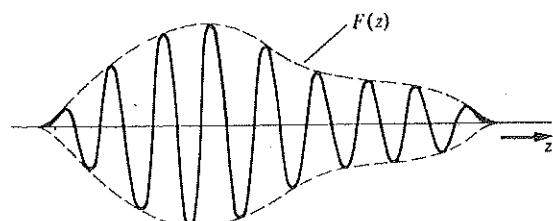


Fig. 8.10 Pacote de ondas da forma $F(z) \cos kz$.

Expandem-se estas funções numa série de potências em k_n :

$$\omega_{n\pm} = \omega(k \pm k_n) = \omega \pm k_n v_g + \dots, \quad (8.239)$$

onde $\omega = \omega(k)$, e usa-se a seguinte abreviação:

$$v_g = d\omega/dk. \quad (8.240)$$

A grandeza v_g tem as dimensões de uma velocidade. Na realidade, verifica-se que é a velocidade com que o grupo de ondas se desloca ao longo do tubo, sendo, portanto, chamada *velocidade de grupo*. Admite-se que k_n seja suficientemente pequeno para que possa ser desprezado, a não ser nos dois primeiros termos da Eq. (8.239). Escreve-se, então,

$$\sin [(k \pm k_n)z - \omega_{n\pm}t] \doteq \sin (kz - \omega t) \cos [k_n(z - v_g t)] \pm \cos (kz - \omega t) \sin [k_n(z - v_g t)].$$

Insere-se este resultado na Eq. (8.237) para obter

$$\begin{aligned} p'(z, t) &\doteq \cos (kz - \omega t) \sum_n F_n \sin [k_n(z - v_g t)] \\ &= F(z - v_g t) \cos (kz - \omega t), \end{aligned} \quad (8.241)$$

onde se usa a Eq. (8.234), obtendo-se, assim, uma solução aproximada, que consiste num pacote de ondas da forma (8.232), modulado por uma função amplitude $F(z - v_g t)$ que se desloca ao longo do tubo em velocidade de grupo v_g . Note que a forma da onda dentro do pacote se desloca em velocidade de fase $c_{lm} = \omega/k$. No caso de ondas sonoras num tubo retangular, a velocidade de grupo dada pelas Eqs. (8.240), (8.216), (8.222) e (8.223) será

$$\begin{aligned} v_g &= ck \left[k^2 + \left(\frac{l\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= c^2 k / \omega = c^2 / c_{lm}. \end{aligned} \quad (8.242)$$

Verifica-se que a velocidade de grupo, neste caso, será sempre menor do que a velocidade de fase c_{lm} , tornando-se igual a zero na freqüência de corte ω_{lm} .

A aproximação que se faz ao desprezar os termos de ordem superior na Eq. (8.239) é válida admitindo-se que a função $F(z)$ varia suficientemente devagar de forma que só serão necessárias ondas senoidais de grande comprimento de onda, na série de Fourier (8.234), para que a função $\omega(k)$ possa ser aproximada por uma linha reta para valores de k no intervalo $\pm k_n$, para qualquer valor de k_n necessário à expansão. Incluindo-se termos de ordens mais altas na Eq. (8.239), então após um período de tempo suficientemente longo o coeficiente de amplitude $F(z - v_g t)$ começará a mudar de forma.

Note que a discussão acima também é importante em relação à corda discreta, discutida na Seç. 8.4, onde foram encontradas soluções ondulatórias, em que a freqüência ω era função de k , dadas pelas Eqs. (8.73) e (8.76). Existem muitos fenômenos físicos em que há ondas cuja velocidade depende da freqüência ou do número de ondas. Em tais casos, podem formar-se pacotes de ondas que se deslocam em velo-

cidade de grupo v_g dada pela Eq. (8.240). A velocidade de grupo será diferente da velocidade de fase $c = \omega/k$, a menos que c seja independente da freqüência ou comprimento de onda, como pode ser verificado facilmente.

8.14 O NÚMERO DE MACH

Suponha que se queira considerar dois problemas sobre escoamento de fluidos com limites geométricos similares, mas cujas dimensões dos limites, ou a velocidade, a densidade, ou compressibilidade do fluido sejam diferentes. Por exemplo: quer-se investigar o escoamento do mesmo fluido em dois tubos da mesma forma mas de tamanhos diferentes; ou, ainda, o escoamento de um fluido em velocidades diferentes através de tubos da mesma forma, ou o escoamento de fluidos de densidades diferentes. Pode-se, ainda, estar preocupado com a relação existente entre o comportamento de um avião e um modelo dele ou com o comportamento de um avião em altitudes diferentes, onde a densidade do ar é diferente. Dois desses problemas, envolvendo contornos de mesma forma, chamam-se problemas *similares*. Sob que condições dois problemas similares terão soluções similares?

Para tornar esta pergunta mais clara, suponha que para cada problema seja possível definir uma distância característica s_0 que determina a escala geométrica do problema. No caso de tubos idênticos, s_0 deverá ser o diâmetro. No caso de um avião, s_0 deverá ser o tamanho da asa. Definem-se, então, as coordenadas adimensionais x' , y' e z' de acordo com as seguintes equações:

$$x' = x/s_0, \quad y' = y/s_0, \quad z' = z/s_0. \quad (8.243)$$

Os contornos dos dois problemas similares terão descrições idênticas em termos das coordenadas adimensionais x' , y' e z' ; somente a distância característica s_0 será diferente. De maneira similar, escolhe-se a velocidade característica v_0 associada ao problema. A velocidade v_0 deve ser a velocidade média de escoamento do fluido no tubo, ou a velocidade do avião em relação ao ar parado não próximo a ele, ou a velocidade máxima de qualquer parte do fluido em relação ao tubo ou em relação ao avião. Em qualquer um dos casos, suponha que v_0 foi escolhida de forma que a velocidade máxima de qualquer parte do fluido não seja muito maior que v_0 . Define-se, agora, uma velocidade adimensional v' e uma coordenada de tempo adimensional t' :

$$v' = v/v_0, \quad (8.244)$$

$$t' = v_0 t/s_0. \quad (8.245)$$

Pode-se, agora, afirmar que dois problemas similares terão soluções similares se as soluções forem idênticas quando expressadas em termos da velocidade adimensional v' como função de x' , y' , z' e t' . A forma do escoamento do fluido será a mesma em ambos os problemas, diferindo somente nas escalas das distâncias e do tempo, determinadas por s_0 e v_0 . É preciso admitir também uma densidade ρ_0 e uma pressão p_0 características. No caso do avião, poderão ser a densidade e a pressão da atmosfera não perturbada; no caso do tubo, a densidade e a pressão médias, ou a densidade e a pres-

são em uma das extremidades do tubo. Define-se um acréscimo p'' da pressão adimensional da seguinte forma:

$$p'' = \frac{p - p_0}{\rho_0 v_0^2}. \quad (8.246)$$

Admite-se que as variações da densidade do fluido sejam suficientemente pequenas de forma que se possa escrever

$$\rho = \rho_0 + \frac{dp}{dp} (p - p_0), \quad (8.247)$$

onde os termos de ordem mais altas na série de Taylor para ρ foram desprezados. Com auxílio da definição (8.246) para p'' e do módulo volumétrico B dado pela Eq. (5.183), a relação acima pode ser reescrita como

$$\rho = \rho_0(1 + M^2 p''), \quad (8.248)$$

onde

$$M = v_0 \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{-1/2} = \frac{v_0}{c}. \quad (8.249)$$

Neste caso, M é a razão entre a velocidade característica v_0 e a velocidade do som c chamado *número de Mach* para o problema.

Com auxílio da Eq. (8.248), pode-se reescrever a equação da continuidade e a equação de movimento em termos das variáveis adimensionais introduzidas pelas Eqs. (8.243) a (8.246). Quando se divide a equação da continuidade (8.127) pela constante $\rho_0 v_0 / s_0$ e separam-se os termos que contêm M , torna-se

$$\nabla' \cdot v' + M^2 \left[\frac{\partial p''}{\partial t'} + \nabla' \cdot (p'' v') \right] = 0, \quad (8.250)$$

onde

$$\nabla' = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (8.251)$$

Quando se divide a equação do movimento (8.139) por v_0^2/s_0 , torna-se, da mesma forma,

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \cdot \nabla' v' + \frac{\nabla' p''}{1 + M^2 p''} = \frac{s_0 f}{v_0^2 \rho}. \quad (8.252)$$

As Eqs. (8.250) e (8.252) representam quatro equações diferenciais que permitem determinar as quatro grandezas p' e v' , sujeitas a condições iniciais e de contorno conhecidas. Se as forças de corpo forem iguais a zero, ou se as forças de corpo, por unidade de massa, f/ρ forem proporcionais a v_0^2/s_0 , então as equações para os dois problemas similares tornam-se idênticas, caso o número de Mach, M , seja igual para os dois pro-

blemas. Desta forma, problemas similares terão soluções similares se eles tiverem o mesmo número de Mach. Resultados de experiências sobre modelos de avião em túneis de vento podem ser extrapolados para aviões de tamanho real voando a velocidades cujos números de Mach sejam correspondentes. Se o número de Mach for muito menor do que um, os termos em M^2 nas Eqs. (8.250) e (8.252) podem ser desprezados, e estas equações se reduzem àquelas para fluido incompressível, como se torna óbvio da Eq. (8.250) ou da (8.248). Portanto, para velocidades do fluido muito menores do que a velocidade do som, mesmo o ar pode ser tratado como fluido incompressível. Por outro lado, para números de Mach próximos ou maiores que um, a compressibilidade torna-se importante mesmo em problemas de escoamento de líquidos. Note que o número de Mach envolve somente a velocidade característica v_0 , e a velocidade do som, que por sua vez depende da densidade característica ρ_0 e da compressibilidade B . Variações no fator de escala da distância, s_0 , não têm efeito na natureza da solução, nem na variação da pressão característica p_0 , exceto quando elas afetam ρ_0 e B .

Deve-se enfatizar que estes resultados só são aplicáveis a fluidos ideais, isto é, quando a viscosidade não é importante, e em problemas em que a densidade do fluido não difere muito da densidade característica ρ_0 . A última condição é razoavelmente satisfeita para líquidos, exceto quando existe cavitacão (formação de bolas de vapor), e para gases, exceto para números de Mach muito grandes.

8.15 VISCOSIDADE

Em muitas aplicações práticas da teoria do escoamento de fluidos, não é permitido desprezar o atrito viscoso, como foi feito na seção anterior. Quando camadas adjacentes de fluido estão-se movendo uma em relação à outra, o movimento é impeditido pela força de cisalhamento que tende a reduzir suas velocidades relativas. Admita que em uma dada região a velocidade do fluido se faça na direção x e que o fluido escoe em camadas paralelas ao plano xz , de tal forma que v_x só seja função de y (Fig. 8.11). Considere que o eixo y positivo esteja orientado para a direita. Então se $\partial v_x / \partial y$ for positivo, o atrito viscoso dará origem a uma força de cisalhamento F_x positiva exercida da direita para a esquerda ao longo da área A paralela ao plano xz . O *coeficiente de viscosidade* η é definido como a razão entre a tensão de cisalhamento e o gradiente de velocidade:

$$\eta = \frac{F_x/A}{\partial v_x / \partial y}. \quad (8.253)$$

Quando a distribuição de velocidade não é deste tipo simples, as tensões devido à viscosidade são mais complicadas. (Consulte a Seç. 10.6.)

Aplicando-se esta definição ao importante caso especial de escoamento estacionário de um fluido através de um tubo de seção transversal circular de raio a , suponha que o escoamento seja lamelar; isto é, admita que o fluido escoe em lâminas, conforme definição anterior. Neste caso, as camadas são cilíndricas, a velocidade em todos os pontos é paralela ao eixo do tubo, que foi escolhido como o eixo z , e a velocidade v_z

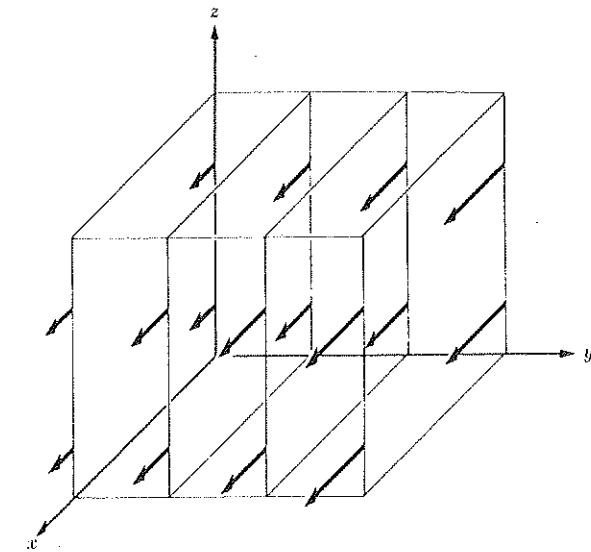


Fig. 8.11 Distribuição de velocidade na definição da viscosidade.

só é função de r , a distância do ponto ao eixo do tubo (veja a Fig. 8.12). Considerando-se um cilindro de raio r e de altura l , sua área será $A = 2\pi rl$, e de acordo com a definição (8.253), a força exercida através da superfície do cilindro pelo líquido do lado de dentro do cilindro será

$$F_z = \eta(2\pi r l) \frac{dv_z}{dr}. \quad (8.254)$$

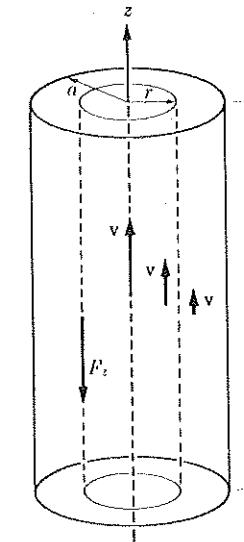


Fig. 8.12 Escoamento lamelar em tubo.

Como o fluido deste cilindro não está acelerado, se não existirem forças de corpo, a força de atrito viscoso deverá ser contrabalançada pela diferença de pressão entre as duas extremidades do cilindro:

$$\Delta p(\pi r^2) + F_z = 0, \quad (8.255)$$

onde Δp é a diferença de pressão entre as duas extremidades do cilindro separadas por uma distância l , admitindo-se que a pressão seja uniforme na seção transversal do tubo. As Eqs. (8.254) e (8.255) poderão ser combinadas, obtendo-se uma equação diferencial para v_z :

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{r \Delta p}{2\eta l}. \quad (8.256)$$

Integrando a equação a partir do eixo do cilindro:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_2} dv_z &= -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^r r dr, \\ v_z &= v_0 - \frac{r^2 \Delta p}{4\eta l}, \end{aligned} \quad (8.257)$$

onde v_0 é a velocidade no eixo do cilindro. Admitindo-se que a velocidade do fluido seja igual a zero nas paredes do tubo:

$$[v_z]_{r=a} = v_0 - \frac{a^2 \Delta p}{4\eta l} = 0, \quad (8.258)$$

embora esta suposição seja discutível. Então

$$v_0 = \frac{a^2 \Delta p}{4\eta l}, \quad (8.259)$$

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\eta l} (a^2 - r^2). \quad (8.260)$$

O fluxo total de fluido através do tubo é

$$I = \iint \rho v_z dS = 2\pi \rho \int_0^a v_z r dr. \quad (8.261)$$

Substituindo na equação acima o resultado da Eq. (8.260) e resolvendo a integral, tem-se

$$\frac{I}{\rho} = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta l}. \quad (8.262)$$

Esta fórmula é chamada *lei de Poiseuille*. Ela fornece uma maneira conveniente e simples de medir η .

Embora as equações gerais do movimento para escoamento viscoso não tenham interesse, pode-se chegar a resultados análogos aos da Seç. 8.14, levando-se em conta

a viscosidade, sem estabelecer realmente as equações para o escoamento viscoso. Suponha, como na Seç. 8.14, que interessem dois problemas similares sobre escoamento de fluido, considerando-se que s_0, v_0, p_0 e ρ_0 sejam a distância, a velocidade, a pressão e a densidade características, que definem a escala em qualquer problema. No entanto, suponha que, neste caso, a viscosidade deva ser levada em conta, de forma que a equação de movimento (8.139) seja aumentada do termo correspondente à força de atrito viscosa. Até o presente não se conhece a forma precisa deste termo, mas de qualquer maneira consistirá em η multiplicado por várias derivadas de vários componentes da velocidade, e dividida por ρ [como a Eq. (8.139) já foi dividida por ρ]. Quando se introduz a velocidade v' e as coordenadas adimensionais x', y', z' e t' , como na Seç. 8.14, e divide-se a equação de movimento por v_0^2/s_0 , obtém-se exatamente a Eq. (8.252), aumentada por um termo que envolve o coeficiente de viscosidade. Como todos os termos na Eq. (8.252) são adimensionais, o de viscosidade também o será, consistindo em derivadas dos componentes de v' , em relação a x', y' e z' , multiplicadas por fatores numéricos e por coeficientes adimensionais consistindo em η multiplicado por alguma combinação de v_0 e s_0 , e dividida por $\rho = \rho_0(1 + M^2 p'')$ [Eq. (8.248)]. As dimensões de η , conforme foram determinadas pela Eq. (8.253), são

$$[\eta] = \frac{\text{massa}}{\text{comprimento} \times \text{tempo}}, \quad (8.263)$$

e somente a combinação de ρ_0, v_0 e s_0 que tem estas dimensões é $\rho_0 v_0 s_0$. Logo o termo de viscosidade será multiplicado pelo coeficiente

$$\frac{1}{R(1 + M^2 p'')}, \quad (8.264)$$

onde R é o *número de Reynolds*, definido por

$$R = \frac{\rho_0 v_0 s_0}{\eta}. \quad (8.265)$$

Conclui-se, agora, que quando a viscosidade é importante, dois problemas similares terão a mesma equação de movimento em função de variáveis adimensionais e, portanto, só terão as mesmas soluções se o número de Reynolds, R , como o número de Mach, M , for o mesmo para ambos. Se o número de Mach for muito pequeno, a compressibilidade não será importante. Se o número de Reynolds for muito grande, a viscosidade poderá ser desprezada. Na realidade, existirá um valor crítico do número de Reynolds para um dado problema, de maneira que a natureza do escoamento seja muito diferente para valores de R maiores do que este valor crítico que para valores de R menores. Para pequenos valores do número de Reynolds, o escoamento será lamelar, quando a viscosidade tender a amortecer qualquer vórtice que possa aparecer. Para números de Reynolds grandes, o escoamento tende a ser turbulento. É o caso em que a viscosidade é pequena, ou a densidade, ou a velocidade ou as dimensões lineares são grandes. Note que o número de Reynolds depende de s_0 , enquanto o de Mach não; assim, a escala de distância de um problema é importante quando os efeitos da viscosidade são levados

em conta. Os efeitos viscosos são mais importantes em pequena do que em grande escala.

Pode-se notar que a expressão (8.265) para o número de Reynolds, juntamente com o fato de que a Eq. (8.139) é dividida por v_0^2/s_0 para se obter uma equação de movimento adimensional, indica que o termo de viscosidade a ser adicionado à Eq. (8.139) tem as dimensões de $(\eta v_0)/(\rho_0 s_0^2)$. Isto, por sua vez, significa que a densidade da força viscosa deve ser igual a η multiplicado por uma soma de segundas derivadas dos componentes da velocidade em relação a x , y e z . Este resultado torna-se evidente a partir da Eq. (8.253), pois, no cálculo da força total exercida sobre um elemento de fluido, as diferenças entre as tensões em faces opostas do elemento serão envolvidas e, assim, a derivada segunda das velocidades em relação a x , y e z aparecerá na expressão para a força. No Cap. 10, discute-se uma expressão para a densidade de força viscosa.

PROBLEMAS

1. Uma corda esticada, de comprimento l , tem na extremidade em $x = l$ um anel de massa desprezível que desliza sem atrito numa haste vertical.

a) Mostre que as condições de contorno nesta extremidade da corda são

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} = 0.$$

b) Se a extremidade em $x = 0$ for fixa, determine os modos normais de vibração.

2. Determine as condições de contorno e os modos normais de vibração para a corda do Probl. 1, considerando agora que o anel de uma das extremidades tem massa finita e igual a m . Qual o significado dos casos-limite $m = 0$ e $m = \infty$? (Despreze o efeito da gravidade.)

3. O ponto intermediário de uma corda esticada e de comprimento l é puxado numa distância $u = l/10$ a partir de sua posição de equilíbrio, de maneira que a corda forme dois catetos de um triângulo isósceles. A corda é, então, largada. Determine uma expressão para o movimento usando o método da série de Fourier.

4. Uma corda de piano de comprimento l , tensão τ e densidade σ , presa nas duas extremidades e inicialmente em repouso, é golpeada a uma distância a de uma das extremidades por um martelo de massa m e velocidade v_0 . Suponha que o martelo repique elasticamente com velocidade $-v_0$, e que a transferência de momento linear só seja efetuada para um pequeno comprimento Δl da corda em torno de $x = a$. Determine o movimento da corda pelo método da série de Fourier, supondo que o tamanho de Δl seja desprezível. Se o tamanho finito de Δl tivesse sido levado em conta, que espécie de efeito esta consideração causaria no resultado? Deseja-se que o sétimo harmônico da freqüência fundamental esteja presente (diz-se ser particularmente desagradável), em que ponto a a corda deve ser batida?

5. Uma corda de comprimento l está presa em $x = l$. A extremidade em $x = 0$ é forçada a mover-se senoidalmente de tal forma que

$$u(0, t) = A \operatorname{sen} \omega t.$$

a) Determine o movimento estacionário da corda; isto é, determine uma solução em que todos os pontos vibrem com a mesma freqüência angular ω .

b) Como se poderia determinar o movimento real se a corda estivesse inicialmente em repouso?

6. Uma força de densidade linear

$$f(x, t) = f_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \omega t,$$

onde n é um inteiro, é aplicada ao longo de uma corda esticada e de comprimento l .

a) Determine o movimento estacionário da corda. [Sugestão. Suponha para $u(x, t)$ uma dependência similar do tempo e do espaço, e substitua na equação do movimento.]

b) Indique a maneira de resolver o problema mais geral de uma força harmônica aplicada.

$$f(x, t) = f_0(x) \cos \omega t,$$

onde $f_0(x)$ é qualquer função que se anula nas extremidades da corda.

7. Suponha que o atrito do ar em torno de uma corda vibrante possa ser representado como uma força exercida por unidade de comprimento proporcional à velocidade da corda. Escreva as equações do movimento da corda, e determine os modos normais de vibração, considerando que a corda está presa em ambas as extremidades.

8. Determine o movimento de uma corda esticada horizontalmente com tensão τ , densidade σ , comprimento l e presa nas duas extremidades, considerando o peso da corda, que, inicialmente, se encontra presa na posição horizontal e reta, sendo, depois, largada. [Sugestão. Determine a solução estacionária e acrescente uma solução transiente apropriada.]

9. Uma corda longa tem, na extremidade à direita, um anel sem massa que desliza numa barra vertical retardada por uma força de atrito proporcional à sua velocidade. Estabeleça as condições de contorno apropriadas e discuta a reflexão da onda nesta extremidade. Como a onda refletida se comportará nos casos-limite de força de atrito muito grande e muito pequena? Para que valores da força de atrito constante não haverá onda refletida?

10. Discuta a reflexão de uma onda que se desloca ao longo de uma corda tendo em uma das extremidades um anel sem massa como no Probl. 1.

11. Determine uma solução para o Probl. 3 através da superposição de ondas $f(x - ct)$ e $g(x + ct)$ de maneira a satisfazer as condições iniciais e de contorno. Esboce a forma da corda nos tempos $t = 0, \frac{1}{4}l/c, \frac{1}{2}l/c$ e l/c .

12. a) Uma longa corda, esticada com tensão τ e densidade σ , é amarrada em $x = 0$ a uma corda de densidade σ_2 . Se a massa do nó for desprezível, mostre que u e $\partial u / \partial x$ devem ser iguais em ambos os lados do nó.

b) Uma onda $A \cos(k_1 x - \omega t)$ deslocando-se para a direita na primeira corda incide na junção. Mostre que para satisfazer as condições de contorno no nó, deve haver uma onda refletida deslocando-se para a esquerda, na primeira corda, e uma onda transmitida deslocando-se para a direita, na segunda corda, ambas com a mesma freqüência da onda incidente. Determine as amplitudes e as fases das ondas transmitidas e refletidas.

c) Verifique o resultado do item (b), calculando a potência nas ondas refletidas e transmitidas e mostre que a soma delas é igual à potência da onda incidente.

13. A partir da Eq. (8.139), obtenha uma equação que expresse a conservação do momento angular de forma análoga à da Eq. (8.141).

14. Obtenha uma equação que expresse a Lei da Conservação do Momento Angular para um fluido de forma análoga à da Eq. (8.140). A partir deste resultado, obtenha equações análogas às Eqs. (8.141), (8.142) e (8.144). Explique o significado físico de cada termo, em cada equação. Mostre que os torques internos devido à pressão podem ser eliminados das formas integradas, e obtenha uma equação análoga à Eq. (8.148).

15. Derive e interprete a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho G + \rho u) dV + \iint_S \hat{n} \cdot v (\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho G + \rho u) dS = - \iint_S (\hat{n} p) \cdot v dS - \iiint_V \rho \frac{\partial G}{\partial t} dV,$$

onde V é um volume fixo, limitado por uma superfície S com normal \hat{n} , e as outras variáveis têm o mesmo significado da Seç. 8.8.

16. a) Uma massa de ar estacionária inicialmente a 45° de latitude norte flui para dentro em direção a um ponto de baixa pressão no seu centro. Mostre que o torque de Coriolis, em torno do ponto de baixa pressão, depende somente do componente radial da velocidade. Portanto, mostre que se os torques devido ao atrito forem desprezados, o momento angular, por unidade de massa, num ponto a uma distância r do centro, dependerá apenas de r e do raio inicial r_0 para o qual o ar é estacionário, mas não depende dos detalhes do movimento.

b) Calcule o componente azimutal da velocidade em torno do ponto de baixa pressão como função do raio inicial e do raio final. Se este fosse um modelo razoável de um furacão, qual seria o raio inicial r_0 se a velocidade do ar a 80 m do centro fosse de 480 m/s?

17. Calcule a energia potencial u , por unidade de massa, como função de p para um gás perfeito de peso molecular M e temperatura T . Para o escoamento isotérmico estacionário deste gás através de um tubo de seção transversal e altura variável acima

da Terra, determine as expressões para a pressão, a densidade e a velocidade do gás como funções da seção transversal S do tubo, da altura h e da pressão p_0 e velocidade v_0 num ponto cuja altura é $h = 0$ no tubo, onde a seção transversal é S_0 . Suponha que p , v e ρ sejam uniformes numa seção transversal do tubo.

18. Resolva o Probl. 17 para um fluido incompressível de densidade ρ_0 .

19. A função $\phi = a/r$, onde a é uma constante e r é a distância a um ponto fixo, satisfaz a equação de Laplace (8.177), exceto para $r = 0$, porque ela tem a mesma forma que o potencial gravitacional de uma massa punctiforme. Se este é um potencial de velocidade, qual será a forma de escoamento a que este potencial conduzirá?

20. a) Verifique através do cálculo direto que a onda esférica (8.204) satisfaz a equação de onda (8.186).

b) Escreva uma expressão análoga para uma onda cilíndrica de dependência arbitrária do tempo, deslocando-se a partir do eixo z , independente de z e com simetria cilíndrica. Faça com que a amplitude dependa da distância ao eixo de forma que ela satisfaça a conservação de energia. Mostre que tal onda satisfaz a equação de onda. (Esta é uma propriedade geral das ondas cilíndricas, as quais não conservam a forma.)

*21. Mostre que o modo normal de vibração dado pelas Eqs. (8.225) e (8.226) pode ser representado como uma superposição de ondas planas harmônicas que se deslocam em direções escolhidas apropriadamente e com fases relacionadas apropriadamente. Mostre que nas vibrações normais de um fluido numa caixa, a velocidade oscila 90° fora de fase, em relação à pressão, em qualquer ponto. Como é possível conciliar este resultado com o fato de numa onda plana a velocidade e a pressão estarem em fase?

22. Determine os modos normais de vibração de um tubo quadrado de órgão tendo uma extremidade aberta e outra fechada, supondo que a extremidade aberta é um nó da pressão.

23. a) Calcule a velocidade v do fluido para a onda dada pela Eq. (8.228).
b) Calcule a taxa média de fluxo de potência através do tubo.

*24. Mostre que a expressão (8.228) para uma onda sonora em um tubo pode ser representada como a superposição de ondas planas que se deslocam em velocidade c nas direções apropriadas, refletindo-se nas paredes. Explique, em termos desta representação, por que existe uma freqüência mínima para qualquer modo, abaixo do qual a onda não se propaga através do tubo neste modo.

25. Se a onda sonora dada pela Eq. (8.228) incidir na extremidade fechada do tubo em $z = 0$, determine a onda refletida, a partir das condições de contorno $v_z = 0$ em $z = 0$.

26. Desenvolva a teoria de propagação de ondas sonoras em tubo circular, usando coordenadas cilíndricas e aplicando o método de separação de variáveis. Desenvolva a teoria até onde puder, mas não precisa resolver a equação para a parte radial da onda; deverá, no entanto, indicar que tipo de soluções se deve esperar.

27. Calcule a velocidade de grupo para a onda (8.79) em uma corda discreta, e compare com a velocidade de fase. Mostre que as duas velocidades são aproximadamente iguais para comprimento de ondas maiores que h .

28. Consserve mais um termo na expansão (8.239) e continue o desenvolvimento da Seç. 8.13 até onde conseguir, mostrando onde está a falha. Mostre que com este termo adicional, o envelope de modulação $F(z - v_g t)$ não pode manter a sua forma à medida que o tempo passa. Estime o tempo após o qual é possível esperar uma variação significativa no envelope de modulação.

29. Um fluido de viscosidade η escoa estacionariamente entre duas paredes planas, paralelas e infinitas, separadas por uma distância l . A velocidade do fluido tem a mesma direção em todos os pontos, e só depende da distância do ponto às paredes. O fluxo total de fluido entre as paredes, em qualquer distância unitária ao longo das paredes perpendiculares à direção do escoamento é I . Determine a distribuição de velocidades e o gradiente de pressão paralelo às paredes, supondo que a pressão só varie na direção do fluxo.

30. Demonstre que a única combinação de ρ_0, v_0 e s_0 que tem as dimensões de viscosidades é $\rho_0 v_0 s_0$.

CAPÍTULO 9 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

9.1 COORDENADAS GENERALIZADAS

A aplicação direta das leis de Newton em sistemas mecânicos resulta num conjunto de equações de movimento, em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas que compõem o sistema. Em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema. Por exemplo, no problema do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, considerado na Seç. 3.13, verificou-se que era conveniente introduzir coordenadas polares na descrição do movimento da partícula no plano. O motivo desta escolha foi porque, neste caso, podia-se expressar a força em coordenadas polares de maneira mais simples. Também no problema dos dois corpos, tratado na Seç. 4.7, verificou-se que era conveniente substituir as coordenadas r_1 e r_2 das duas partículas pelo vetor coordenada R do centro de massa, e o vetor coordenada relativa r que localiza a partícula 1 em relação à partícula 2. Havia duas razões para se escolher estas coordenadas. Primeira, as forças mútuas que as partículas exercem uma sobre as outras, em geral, dependem das coordenadas relativas. Segunda, em muitos casos, há interesse em descrever uma partícula em relação à outra, como no caso do movimento planetário. Em problemas que envolvem muitas partículas, em geral é conveniente escolher um sistema que inclui a coordenada do centro de massa, pois o movimento desse centro é determinado por uma equação relativamente simples, a Eq. (4.18). No Cap. 7, verificou-se que as equações do movimento de uma partícula, em termos de um sistema de coordenadas em movimento, que, às vezes, é mais conveniente do que sistemas de coordenadas fixas, utilizados nas equações do movimento, de Newton, originais.

Os sistemas de coordenadas dos tipos descritos, juntamente com os sistemas de coordenadas cartesianas, serão englobados sob o nome de *coordenadas generalizadas*. Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas no sistema podem ser especificadas. Nos problemas em que é necessário usar coordenadas generalizadas, podem-se escrever as equações do movimento, de Newton, em termos de coordenadas cartesianas e, então, transformá-las em coordenadas generalizadas, como nos problemas estudados nos capítulos anteriores. No entanto, seria desejável e conveniente um método geral que estabelecesse diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas. Além disso, seriam desejáveis também métodos gerais para escrever, e talvez resolver,

as equações do movimento em termos de qualquer sistema de coordenadas. Tal método foi inventado por Lagrange e será o assunto deste capítulo.

Em cada um dos casos mencionados no primeiro parágrafo, o número de coordenadas no sistema introduzido para simplificar o problema era igual ao número de coordenadas cartesianas de todas as partículas envolvidas. Por exemplo, podem-se substituir as duas coordenadas cartesianas x e y de uma partícula que se move num plano por suas coordenadas, r e θ , ou as três coordenadas espaciais, x , y e z , por três coordenadas esféricas ou cilíndricas. É possível, também, substituir as seis coordenadas x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 e z_2 de um par de partículas por três coordenadas X , Y e Z do centro de massa mais as três coordenadas, x , y e z , de uma partícula em relação à outra. É também correto substituir as três coordenadas de uma partícula em relação a um sistema fixo de eixos por três coordenadas em relação a um sistema de eixo em movimento. (Um vetor deve ser considerado como três coordenadas.)

No problema da rotação de um corpo rígido em torno de um eixo (Seç. 5.2), descreveu-se a posição do corpo em termos de uma única coordenada angular θ . Neste caso, pôde-se substituir um grande número de coordenadas cartesianas, três para cada partícula do corpo, por uma única, θ , porque o corpo era rígido e só podia girar em torno de um eixo fixo. Como resultado destes dois fatos, a posição do corpo foi completamente determinada quando a posição angular de qualquer linha de referência no corpo foi especificada. A posição de um corpo rígido livre pode ser especificada por seis coordenadas, três para se localizar seu centro de massa e três para determinar sua orientação no espaço, o que simplifica bastante o problema em comparação com $3N$ coordenadas cartesianas necessárias para localizar as suas N partículas. Um corpo rígido é um exemplo de sistema de partículas submetido a *vínculos*, isto é, condições que restringem os conjuntos de valores das coordenadas. No caso de um corpo rígido, o vínculo é que a distância entre duas partículas quaisquer deve permanecer constante. Se o corpo só puder girar em torno de um eixo fixo, então a distância de cada uma das partículas do corpo em relação ao eixo será fixa. Por esta razão especificando-se apenas a coordenada θ pode-se determinar a posição de cada partícula do corpo. Esta discussão de sistemas que envolvam vínculos é deixada para a Seç. 9.4. Agora e na seção seguinte, estabelece-se a teoria das coordenadas generalizadas, supondo-se que existe o mesmo número de coordenadas generalizadas e coordenadas cartesianas. Verificare-se-á, na Seç. 9.4, que esta teoria também se aplica ao movimento de sistema com vínculos.

Quando se quer falar sobre um sistema físico, descrito por um sistema de coordenadas generalizadas, sem especificar por enquanto quais são estas coordenadas, designa-se usualmente cada coordenada pela letra q com um índice numérico. Um conjunto de n coordenadas generalizadas seria, então, escrito como q_1, q_2, \dots, q_n . Logo, uma partícula que se move num plano poderá ser descrita por duas coordenadas, q_1 e q_2 , que, em casos especiais, podem ser as coordenadas cartesianas x e y , ou as coordenadas polares r e θ , ou qualquer outro par apropriado. Uma partícula que se move no espaço será localizada por três coordenadas, que podem ser as cartesianas x , y e z ou esféricas r , θ e φ , ou as cilíndricas ρ , z e φ , ou, em geral, q_1, q_2 e q_3 .

A configuração de um sistema de N partículas pode ser especificada pelas $3N$ coordenadas cartesianas $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ de suas partículas, ou por qualquer conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} . Como, para cada configuração do sistema, as coordenadas generalizadas devem ter um conjunto definido de valores, e as coordenadas q_1, \dots, q_{3N} serão funções das coordenadas cartesianas e, possivelmente, também do tempo no caso de um sistema de coordenadas em movimento:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots, y_N, z_N; t), \\ q_2 &= q_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t), \\ &\vdots \\ q_{3N} &= q_{3N}(x_1, y_1, \dots, z_N; t). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Como as coordenadas q_1, \dots, q_{3N} especificam a configuração do sistema, deve ser possível expressar as coordenadas cartesianas em termos das coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t), \\ y_1 &= y_1(q_1, \dots, q_{3N}; t), \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, \dots, q_{3N}; t). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Caso as Eqs. (9.1) sejam conhecidas, pode-se obter x_1, y_1, \dots, z_N para determinar as Eqs. (9.2) e vice-versa.

A condição matemática para que esta solução seja (teoricamente) possível é que o determinante jacobiano das Eqs. (9.1) seja diferente de zero em todos os pontos, ou em quase todos os pontos:

$$\frac{\partial(q_1, \dots, q_{3N})}{\partial(x_1, y_1, \dots, z_N)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_N} & \frac{\partial q_2}{\partial z_N} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_N} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9.3)$$

No caso de esta desigualdade não ser válida, então as Eqs. (9.1) não definem um conjunto de coordenadas generalizadas. Praticamente, em todos os casos de interesse, ficará evidente, a partir das definições geométricas das coordenadas generalizadas, se elas são ou não um conjunto legítimo de coordenadas. Logo, não será preciso aplicar o teste acima para o sistema de coordenadas escolhido. [Para demonstrar a condição (9.3), consulte W. F. Osgood, *Advanced calculus*, New York, Macmillan, 1937, p. 129.]

Como exemplo, as Eqs. (3.72) e (3.73) relacionam as coordenadas polares r e θ de uma partícula no plano com as coordenadas cartesianas x e y . Como exemplo de sistema de coordenadas em movimento, considere as coordenadas polares em que o

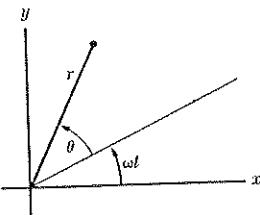


Fig. 9.1 Sistema de coordenadas polares com movimento de rotação.

eixo de referência, a partir do qual se mede θ , gira na direção contrária ao movimento dos ponteiros do relógio em velocidade angular constante ω (Fig. 9.1):

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} - \omega t, \end{aligned} \quad (9.4)$$

e, reciprocamente,

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \omega t), \\ y &= r \sin(\theta + \omega t). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Como exemplo de coordenadas generalizadas para um sistema de partículas, as coordenadas do centro de massa X, Y, Z e as coordenadas relativas x, y e z de duas partículas de massas m_1 e m_2 , de acordo com as definições das Eqs. (4.90) e (4.91), onde X, Y e Z são os componentes de R , e x, y e z são os componentes de r . Como as equações de transformação (4.90) e (4.91) não contêm explicitamente o tempo, considere este sistema como de coordenadas fixo, mesmo que x, y e z sejam coordenadas de m_1 em relação a uma origem em movimento, localizada sobre m_2 . A regra que define as coordenadas X, Y, Z, x, y e z é sempre a mesma.

Quando se descreve um sistema de partículas usando um conjunto de coordenadas generalizadas, q_1, \dots, q_{3N} , derivada em relação ao tempo \dot{q}_k , de uma coordenada q_k qualquer, é denominada *velocidade generalizada* associada a esta coordenada. A velocidade generalizada associada à coordenada cartesiana x_i é exatamente o componente correspondente da velocidade \dot{x}_i , de uma partícula localizada por esta coordenada. A velocidade generalizada associada à coordenada angular θ é a velocidade angular correspondente, $\dot{\theta}$. A velocidade associada à coordenada X do exemplo anterior é \dot{X} , o componente x da velocidade do centro de massa. As velocidades generalizadas podem ser calculadas em termos de coordenadas e velocidades cartesianas e, reciprocamente, pela derivada das Eqs. (9.1) ou (9.2) em relação a t , de acordo com as regras de diferenciação de funções implícitas. Por exemplo, os componentes cartesianos da velocidade podem ser expressados em termos das coordenadas e velocidades generalizadas pela derivação das Eqs. (9.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t}, \\ &\vdots \\ \dot{z}_N &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Como exemplo, a partir das Eqs. (9.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos(\theta + \omega t) - r\dot{\theta} \sin(\theta + \omega t) - r\omega \sin(\theta + \omega t), \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin(\theta + \omega t) + r\dot{\theta} \cos(\theta + \omega t) + r\omega \cos(\theta + \omega t). \end{aligned} \quad (9.7)$$

A energia cinética de um sistema de N partículas, em termos das coordenadas cartesianas, é

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (9.8)$$

Substituindo, na relação acima, os resultados das Eqs. (9.6), obtém-se a energia cinética em termos das coordenadas generalizadas. Trocando-se a ordem das somas, o resultado será

$$T = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{3N} B_k \dot{q}_k + T_0, \quad (9.9)$$

onde

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right), \quad (9.10)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right), \quad (9.11)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (9.12)$$

Os coeficientes A_{kl}, B_k e T_0 são funções das coordenadas q_1, \dots, q_{3N} , e também de t , no caso de sistemas de coordenadas em movimento. Se A_{kl} for igual a zero, exceto quando $k = l$, as coordenadas serão *ortogonais*. Os coeficientes B_k e T_0 são iguais a zero quando t não aparece explicitamente nas Eqs. (9.1), isto é, quando o sistema de coordenadas generalizadas não varia com o tempo. Verifica-se que a energia cinética, em geral, contém três conjuntos de termos:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (9.13)$$

onde T_2 contém termos quadráticos das velocidades generalizadas, T_1 contém termos lineares e T_0 é independente das velocidades. Os termos T_1 e T_0 só aparecem em siste-

mas de coordenadas em movimento; em sistemas de coordenadas fixos, a energia cinética será quadrática nas velocidades generalizadas.

Por exemplo, em coordenadas polares planas [Eqs. (3.72)], a energia cinética será

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2), \end{aligned} \quad (9.14)$$

a qual pode ser obtida por substituição direta nas Eqs. (3.72), ou, como um caso especial da Eq. (9.9), onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Considerando-se o sistema de coordenadas em movimento, definido pelas Eqs. (9.5), por substituição das Eqs. (9.7), ou usando a Eq. (9.9), obtém-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2) + mr^2\omega\dot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Neste caso, há um termo linear em $\dot{\theta}$ e um termo independente de \dot{r} e $\dot{\theta}$. A energia cinética para o sistema de duas partículas também pode ser escrita facilmente em termos de X, Y, Z, x, y e z , definidos pelas Eqs. (4.90) e (4.91).

Ao invés de determinar-se primeiramente a energia cinética em coordenadas cartesianas e, depois, transformá-la em termos de coordenadas generalizadas, como no exemplo acima, em geral é mais rápido escrever a energia cinética diretamente em termos das coordenadas generalizadas, a partir do conhecimento de seu significado geométrico, sendo, então, possível resolver o problema escolhendo-se apropriadamente as coordenadas generalizadas sem escrever explicitamente as equações de transformação (9.1) e (9.2). Por exemplo, é fácil chegar à Eq. (9.14) a partir do significado geométrico das coordenadas r e θ (veja a Fig. 3.20), observando-se que a velocidade linear associada à variação de r é \dot{r} e a associada a θ é $r\dot{\theta}$. Como as direções das velocidades associadas a r e θ são perpendiculares, o quadrado da velocidade total será

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \quad (9.17)$$

a partir da qual se pode obter imediatamente a Eq. (9.14).

Deve-se tomar cuidado ao aplicar este método, caso as velocidades associadas às variações das coordenadas não sejam perpendiculares. Por exemplo, considere um par de eixos coordenados u e w que fazem entre si um ângulo α menor do que 90° , como é mostrado na Fig. 9.2. Considere também que u e w sejam os lados de um paralelogramo formado por estes eixos e por linhas paralelas aos eixos e passam pela massa m , como é mostrado na figura. Considere, ainda, que \hat{u} e \hat{w} sejam vetores unitá-

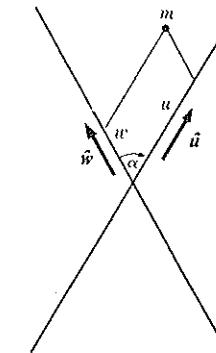


Fig. 9.2 Sistema de coordenadas não-ortogonais.

rios na direção de crescimento de u e w . Usando u e w como coordenadas, a velocidade da massa m será

$$\mathbf{v} = \dot{u}\hat{u} + \dot{w}\hat{w}. \quad (9.18)$$

A energia cinética será

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + m\dot{u}\dot{w} \cos \alpha. \quad (9.19)$$

Este é um exemplo de um conjunto não-ortogonal de coordenadas para o qual aparece na energia cinética o termo cruzado das velocidades. A razão para se usar o termo *ortogonal* (que significa perpendicular) torna-se clara a partir deste exemplo.

Quando os sistemas de mais do que uma partícula são descritos em termos de coordenadas generalizadas, em geral é mais seguro escrever primeiramente a energia cinética em coordenadas cartesianas e transformá-la em seguida em coordenadas generalizadas. Entretanto, em alguns casos, é possível escrever a energia cinética diretamente em coordenadas generalizadas. Por exemplo, quando um corpo rígido gira em torno de um eixo, sabe-se que a energia cinética é igual a $\frac{1}{2}I\omega^2$, onde ω é a velocidade angular em torno do eixo e I é o momento de inércia. Do mesmo modo, pode-se usar o teorema demonstrado na Seç. 4.9 – que a energia cinética de um sistema de partículas é igual à energia cinética associada ao centro de massa mais a energia cinética associada às coordenadas internas [veja a Eq. (4.127)]. Por exemplo, a energia cinética do sistema de duas partículas em termos das coordenadas X, Y, Z, x, y, z , definida de acordo com as Eqs. (4.90) e (4.91), será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (9.20)$$

onde M e μ são dados pelas Eqs. (4.97) e (4.98). Este resultado mostra que o sistema de coordenadas usado é ortogonal. Se a velocidade linear de cada partícula do sistema puder ser escrita diretamente em termos das coordenadas e velocidades generalizadas, então, escreve-se imediatamente a energia cinética.

Observe que os componentes do momento linear da partícula i , de acordo com a Eq. (9.8) serão

$$p_{ix} = m\dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad p_{iy} = m\dot{y}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}, \quad p_{iz} = m\dot{z}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}. \quad (9.21)$$

No caso de uma partícula que se move no plano, as derivadas de T em relação a \dot{r} e $\dot{\theta}$, de acordo com a Eq. (9.8), serão

$$p_r = m\dot{r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \quad (9.22)$$

onde p_r é o componente do momento linear na direção de crescimento de r , e p_θ é o momento angular em relação à origem. Obtém-se resultados similares para coordenadas esféricas e cilíndricas em três dimensões. De fato, não será difícil demonstrar que, para qualquer coordenada q_k que mede um deslocamento linear de uma partícula ou grupo de partículas numa dada direção, o momento linear da partícula ou do grupo de partículas na direção dada será $\partial T / \partial \dot{q}_k$; e que para uma coordenada q_k qualquer, que mede o deslocamento angular de uma partícula ou grupo de partículas em relação a um eixo, os seus momentos angulares em relação ao eixo serão $\partial T / \partial \dot{q}_k$. Isto sugere a definição do *momento generalizado* p_k associado à coordenada q_k por¹

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (9.23)$$

Se q_k é uma distância, p_k é o momento linear correspondente. Se q_k for um ângulo, p_k será o momento angular correspondente. Em outros casos, p_k terá outro significado físico. De acordo com a Eq. (9.9), o momento generalizado p_k será

$$p_k = \sum_{l=1}^{3N} A_{kl}\dot{q}_l + B_k. \quad (9.24)$$

No caso das coordenadas X , Y , Z , x , y e z para o sistema de duas partículas, a definição acima conduz ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} p_X &= M\dot{X}, & p_Y &= M\dot{Y}, & p_Z &= M\dot{Z}, \\ p_x &= \mu\dot{x}, & p_y &= \mu\dot{y}, & p_z &= \mu\dot{z}, \end{aligned} \quad (9.25)$$

onde p_X , p_Y e p_Z são os componentes do momento linear total das duas partículas, e p_x , p_y e p_z são os componentes do momento linear do problema unidimensional

¹ A energia cinética T é definida de acordo com a Eq. (9.9) como função de $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; q_1, \dots, q_{3N}$, e talvez t . As derivadas desta função T em relação a estas variáveis são denotadas por símbolos de derivada parcial. Como $q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ são funções do tempo T para qualquer movimento do sistema, T também é função de t para estes movimentos. A derivada de T em relação ao tempo, no sentido descrito acima, é denotada por d/dt . Os mesmos comentários podem ser aplicados a qualquer outra grandeza que possa ser escrita como função das coordenadas e velocidades e talvez de t , a qual também será função de t apenas para qualquer movimento dado.

equivalente, em função das coordenadas x , y e z , para o qual o problema dos dois corpos foi reduzido na Seç. 4.7. Na próxima seção, verifica-se que a analogia entre o momento generalizado p_k e os componentes cartesianos do momento linear pode ser estendida às equações de movimento em coordenadas generalizadas.

Para definir agora uma força generalizada, será conveniente definir antes as forças em termos do trabalho por elas realizado quando as partículas se movem. Imagine um sistema de partículas nas posições especificadas pelas coordenadas $x_1, y_1, z_1, \dots, z_N$ e sob a ação das forças $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \dots, F_{Nx}$. Se cada partícula do sistema fosse deslocada para uma posição nas vizinhanças, as novas posições seriam especificadas pelas coordenadas $x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1, \dots, z_N + \delta z_N$, o trabalho realizado seria

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i). \quad (9.26)$$

Conhecendo-se as forças, pode-se calcular δW para um conjunto qualquer de pequenos deslocamentos, $\delta x_i, \delta y_i$ e δz_i . Reciprocamente, conhecendo-se, experimentalmente ou teoricamente, o trabalho δW para um conjunto de deslocamentos $\delta x_i, \delta y_i$ e δz_i qualquer, então com auxílio da Eq. (9.26) determinam-se as forças. E para obter as forças será preciso escrever a Eq. (9.26) para $3N$ deslocamentos independentes. O conjunto de acréscimos $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ deve representar quaisquer possíveis deslocamentos pequenos, chamados *deslocamentos virtuais* do sistema, porque não representam necessariamente um movimento real do sistema. Os acréscimos $\delta x_i, \delta y_i$ e δz_i podem ser expressados em termos de coordenadas generalizadas como se segue:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k, \end{aligned} \quad (9.27)$$

onde $\delta q_1, \dots, \delta q_{3N}$ são as diferenças entre as coordenadas generalizadas, associadas a cada um dos dois conjuntos de posições das partículas. No caso de sistemas de coordenadas em movimento, considera-se o tempo como fixo; isto é, expressam-se as variações da posição em termos do sistema de coordenada em um determinado tempo t . Substituindo-se as Eqs. (9.27) na Eq. (9.26), depois de arrumar os termos, tem-se:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k, \quad (9.28)$$

onde

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \quad (9.29)$$

O coeficiente Q_k depende das forças exercidas sobre as partículas, das coordenadas q_1, \dots, q_{3N} e, possivelmente, também do tempo t . Em vista da similaridade na forma das Eqs. (9.26) e (9.28), será natural chamar a quantidade Q_k de *força generalizada* associada à coordenada q_k . Define-se a força generalizada Q_k diretamente, sem referência ao sistema de coordenadas cartesianas, como o coeficiente que determina o trabalho realizado num deslocamento virtual em que somente q_k varia:

$$\delta W_k = Q_k \delta q_k, \quad (9.30)$$

onde δW_k é o trabalho realizado quando o sistema se move, de maneira que q_k aumenta de δq_k e todas as outras coordenadas permanecem constantes. Observe que o trabalho na Eq. (9.26) e, portanto, também na Eq. (9.30) deve ser calculado a partir dos valores das forças para as posições x_1, \dots, z_N , ou q_1, \dots, q_{3N} ; isto é, não se deve levar em conta nenhuma variação das forças durante um deslocamento virtual.

Se as forças F_{1x}, \dots, F_{Nz} derivarem de uma energia potencial $V(x_1, \dots, z_N)$ [Eqs. (4.32)], então

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta V \\ &= -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Escrevendo V em termos de coordenadas generalizadas, então

$$\begin{aligned} \delta W &= -\delta V \\ &= -\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Comparando esta equação com a Eq. (9.28), verifica-se que

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad (9.33)$$

que mostra que também neste sentido a definição de Q_k como força generalizada é natural. A Eq. (9.33) também pode ser verificada através do cálculo direto de $\partial V / \partial q_k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= -Q_k. \end{aligned}$$

Como exemplo, calcule as forças generalizadas associadas com as coordenadas polares r e θ para uma partícula submetida à ação da força

$$F = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y = \hat{r}F_r + \hat{\theta}F_\theta. \quad (9.34)$$

Usando-se a definição (9.29), com auxílio das Eqs. (9.15), tem-se:

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\ &= F_r, \\ Q_\theta &= F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -rF_x \sin \theta + rF_y \cos \theta \\ &= rF_\theta. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Verifica-se que Q_r é o componente da força na direção r e Q_θ é o torque exercido no sentido de crescimento de θ . Usualmente é mais rápido usar a definição (9.30), pois permite contornar totalmente as coordenadas cartesianas. Considerando-se um pequeno deslocamento em que r varia para $r + \delta r$ e θ permanecendo constante, o trabalho será

$$\delta W = F_r \delta r, \quad (9.36)$$

a partir desta relação a primeira das Eqs. (9.35) pode ser obtida. Considerando-se um deslocamento em que r é constante e θ aumenta de $\delta\theta$, o trabalho será

$$\delta W = F_\theta r \delta\theta, \quad (9.37)$$

a partir desta relação a segunda das Eqs. (9.35) pode ser obtida. Em geral, se q_k for uma coordenada que mede a distância em que uma parte do sistema mecânico se deslocou em determinada direção, e se F_k for o componente, nesta direção, da força total que atua sobre esta parte do sistema, então o trabalho realizado quando q_k aumenta de δq_k , todas as outras coordenadas permanecendo constantes, será

$$\delta W = F_k \delta q_k. \quad (9.38)$$

Comparando este resultado com a Eq. (9.30), obtém-se

$$Q_k = F_k. \quad (9.39)$$

Neste caso, a força generalizada Q_k é exatamente a força comum F_k . Se q_k medir a rotação angular de uma parte do sistema em torno de um eixo arbitrário e se N_k for o torque total em relação a este eixo, que atua nesta parte do sistema, então o trabalho realizado quando q_k sofre um acréscimo δq_k será

$$\delta W = N_k \delta q_k. \quad (9.40)$$

Comparando este resultado com a Eq. (9.30), obtém-se

$$Q_k = N_k. \quad (9.41)$$

A força generalizada Q_k associada à coordenada angular q_k é o torque.

9.2 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A analogia que conduziu à definição de momento generalizado e força generalizada faz pensar que as equações do movimento generalizadas podem ser obtidas igualando-se a taxa de variação com o tempo de cada momento p_k à força Q_k correspondente. Para verificar esta suposição, calcula-se a taxa de variação com o tempo de p_k :

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (9.42)$$

Para prosseguir, começa-se com as equações do movimento, de Newton, em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix}, \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy}, \quad [i = 1, \dots, N] \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Portanto, expressa-se T em coordenadas cartesianas [Eq. (9.8)], obtendo, então,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (9.44)$$

onde $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_N$ são dados em função de $q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$; e t de acordo com a Eq. (9.6). Como $\partial x_i / \partial q_k$ e $\partial x_i / \partial t$ são funções apenas de q_1, \dots, q_{3N} ; e t , tomando-se as derivadas das Eqs. (9.6), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \\ \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial y_i}{\partial q_k}, \quad [i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, 3N] \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial z_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Substituindo-se as Eqs. (9.45) na Eq. (9.44) e derivando novamente em relação a t , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_k} \right). \end{aligned} \quad (9.46)$$

De acordo com as equações do movimento, de Newton (9.43), e da definição (9.29), o primeiro termo da Eq. (9.46) torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) &= \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= Q_k. \end{aligned} \quad (9.47)$$

As derivadas que aparecem no último termo da Eq. (9.46) são calculadas da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}, \quad (9.48)$$

onde se usa a Eq. (9.6). Expressões similares podem ser obtidas para y e z . Logo, a última soma na Eq. (9.46) torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \\ = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ = \frac{\partial T}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Então, finalmente, tem-se

$$\frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (9.50)$$

Logo, o que se imaginou inicialmente não estava correto, pois é preciso somar o termo $\partial T / \partial q_k$ à força generalizada Q_k para obter a taxa de variação com o tempo do momento, \dot{p}_k . Para verificar o seu significado, considere a energia cinética de uma partícula em termos das coordenadas polares planas, como dada pela Eq. (9.14). Neste caso,

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad (9.51)$$

e usando-se as Eqs. (9.22) e (9.35), a equação do movimento (9.50) para $q_k = r$ torna-se

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2. \quad (9.52)$$

Comparando-se este resultado com a Eq. (3.207), que resulta da aplicação direta das leis do movimento, de Newton, verifica-se que o termo $\partial T / \partial r$ é parte do termo de massa vezes a aceleração que aparece transposto para o segundo membro da equação. De fato, $\partial T / \partial r$ é a "força centrífuga" que deve ser adicionada para que se possa escrever a equação do movimento para r na forma das equações de Newton para o movimento retilíneo. Caso se tivesse sido originalmente um pouco mais inteligente, saber-se-ia que termos desse tipo deveriam ser considerados. O termo $\partial T / \partial q_k$ poderá ser chamado *força fictícia*, existente sempre que a energia cinética depender da coordena-

da q_k . Este será o caso em que o sistema de coordenada envolva coordenadas “curvilíneas”, isto é, se as velocidades generalizadas constantes $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$ resultarem de movimentos curvilíneos de parte do sistema mecânico. As Eqs. (9.50) são usualmente escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (9.53)$$

e são as equações de Lagrange.

No caso em que existe uma energia potencial, de modo que as forças Q_k são derivadas de funções energia potencial [Eq. (9.33)], pode-se introduzir a função lagrangiana,

$$L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t) = T - V, \quad (9.54)$$

onde T depende de q_1, \dots, q_{3N} e $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}$, mas V só depende de q_1, \dots, q_{3N} (e possivelmente de t), de forma que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}, \quad (9.55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k. \quad (9.56)$$

Assim as Eqs. (9.53), neste caso, podem ser escritas na forma compacta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (9.57)$$

O termo *equações de Lagrange*, às vezes, restringe-se às equações da forma (9.57). Em aproximadamente todos os casos de interesse em Física (embora não em Engenharia), as equações do movimento podem ser escritas na forma da Eq. (9.57), exceto no caso em que existem forças de atrito, mas, em geral, estas forças não aparecem em problemas atômicos e astronômicos.

Como as equações de Lagrange foram obtidas a partir das equações do movimento, de Newton, não representam propriamente uma nova teoria da Física, mas, simplesmente, uma maneira diferente, mas equivalente, de expressar essas mesmas leis. As Eqs. (9.52) e (3.207) ilustram este fato, pois as desenvolvidas pelo método de Lagrange podem ser obtidas, aplicando-se diretamente as leis do movimento, de Newton. Entretanto, nos casos complicados, em geral é mais fácil obter a energia cinética e as forças ou energia potencial em coordenadas generalizadas, e escrever as equações na forma lagrangiana. Particularmente, em problemas que envolvem vínculos, como será verificado na Seç. 9.4, é muito mais fácil resolvê-los pelo método de Lagrange. O valor principal destas equações se faz sentir no aspecto teórico. De acordo com a maneira com que as equações de Lagrange foram derivadas, torna-se evidente que as Eqs. (9.57) ou (9.53) também são válidas em qualquer sistema de coordenadas generalizadas. Verifica-se também por cálculo direto (veja o Probl. 24) que, se as Eqs. (9.57) forem válidas em qualquer sistema de coordenadas para qualquer fun-

ção $L(q_1, \dots, q_{3N}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}; t)$, as equações da mesma forma também serão válidas em qualquer outro sistema de coordenadas. A função lagrangiana L tem o mesmo valor, em qualquer conjunto de posições e velocidades das partículas de um sistema, não importando em que sistema de coordenadas ela seja expressada, mas a forma da função L pode ser diferente em sistemas de coordenadas diferentes. O fato de as equações de Lagrange terem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas é o responsável por sua importância teórica, pois representam uma maneira uniforme de escrever as equações do movimento de um sistema, independente do tipo usado. Elas formam o ponto de partida para formulações mais avançadas da Mecânica. No desenvolvimento da Teoria Geral da Relatividade, em que nem sempre há coordenadas cartesianas, as equações de Lagrange são particularmente importantes.

9.3 EXEMPLOS

Considere inicialmente um sistema de partículas m_1, \dots, m_N , localizadas por coordenadas cartesianas, mostrando que, neste caso, as equações de Lagrange tornam-se as equações do movimento, de Newton. A energia cinética será

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (9.58)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial z_i} = 0, \quad (9.59)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \ddot{x}_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = m_i \ddot{y}_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = m_i \ddot{z}_i. \quad (9.60)$$

A força generalizada associada a cada coordenada cartesiana será exatamente a força comum, como se pode verificar com auxílio da Eq. (9.29) ou comparando a Eq. (9.28) com a Eq. (9.26). Logo, as equações do movimento (9.53) serão

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} &= m_i \ddot{x}_i = F_{ix}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} &= m_i \ddot{y}_i = F_{iy}, \quad [i = 1, \dots, N] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_i} &= m_i \ddot{z}_i = F_{iz}. \end{aligned} \quad (9.61)$$

Para uma partícula que se move no plano, a energia cinética será dada pela Eq. (9.14), e as forças Q_r e Q_θ , pelas Eqs. (9.35). As equações de Lagrange serão

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r, \quad (9.62)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta. \quad (9.63)$$

Estas equações foram obtidas na Seç. 3.13, usando-se métodos elementares.

Considere, agora, um sistema de coordenadas com movimento de rotação definido, de acordo com as Eqs. (9.4) ou (9.5). A energia cinética será dada pela Eq. (9.16), e as forças generalizadas Q_r e Q_θ serão as mesmas que as do exemplo anterior. As equações de Lagrange para este caso serão:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - 2m\omega r\dot{\theta} - m\omega^2 r = F_r, \quad (9.64)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + 2m\omega r\dot{r} = rF_\theta. \quad (9.65)$$

O leitor pode verificar que o terceiro termo, no primeiro membro da Eq. (9.64), é a força de Coriolis, na direção r com o sinal negativo, devido à rotação do sistema de coordenadas, e que o quarto termo é a força centrífuga com sinal negativo. O segundo termo da Eq. (9.65) é o torque da força de Coriolis, na direção θ com o sinal negativo. Logo, as forças fictícias são automaticamente incluídas, quando se escrevem as equações de Lagrange num sistema de coordenadas em movimento. No entanto, pode-se notar que a energia cinética real [Eq. (9.16)] foi usada em relação a um sistema de coordenadas em repouso, expressado, em termos de coordenadas com movimentos de rotação, e não a energia cinética que apareceria no sistema com movimento de rotação, caso se ignorasse o movimento do sistema de coordenadas.

9.4 SISTEMAS SUJEITOS A VÍNCULOS

Uma classe importante de problemas de Mecânica, em que as equações de Lagrange são particularmente úteis, é composta de sistemas submetidos à ação de vínculos.

Um corpo rígido é um bom exemplo de sistema de partículas submetido à ação de vínculos. Vínculo é uma restrição na liberdade do movimento de um sistema de partículas sob uma condição que deve ser satisfeita por suas coordenadas, ou por variações permitidas em suas coordenadas. Por exemplo, um corpo rígido hipotético e muito simples é formado por duas partículas ligadas por uma haste rígida e sem massa, de comprimento l . Estas partículas estão sob a ação de um vínculo que faz com que elas permaneçam sempre separadas por uma distância l . Em termos de suas coordenadas cartesianas, o vínculo será

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = l. \quad (9.66)$$

Usando-se as coordenadas X , Y e Z do centro de massa e as coordenadas esféricas r , θ e φ para localizar a partícula 2 em relação à partícula 1, localizada na origem, o vínculo assume a seguinte forma simples:

$$r = l. \quad (9.67)$$

Logo, só existem cinco coordenadas, X , Y , Z , θ e φ , para determinar. Cada vínculo, que pode ser expressado na forma de uma equação como a Eq. (9.66), permite eliminar uma das coordenadas, escolhendo-se as coordenadas de forma que uma delas possa ser mantida constante por meio de um vínculo. Para corpos rígidos, os vínculos exigem que as distâncias relativas entre todos os pares de partículas permaneçam constantes. Para um corpo que contenha N partículas, existem $\frac{1}{2}N(N - 1)$ pares de partículas. Logo, não será difícil mostrar que é suficiente especificar as distâncias relativas de $3N - 6$ pares, se $N \geq 3$. Assim, pode-se substituir as $3N$ coordenadas cartesianas das N partículas por $3N - 6$ distâncias relativas, 3 coordenadas do centro de massa e 3 coordenadas descrevendo a orientação do corpo. Como todas as $3N - 6$ distâncias relativas são constantes, o problema pode ser reduzido à determinação do movimento em termos de seis coordenadas. Outro exemplo de sistema submetido a vínculos é o problema de uma conta que desliza num fio. O fio encontra-se sobre uma curva no espaço e os vínculos exigem que a posição da conta permaneça sobre a curva. Como as coordenadas dos pontos ao longo da curva satisfazem as duas equações (por exemplo, as equações de duas superfícies que se cortam ao longo da curva), existem dois vínculos, podendo-se localizar a posição da conta com uma única coordenada. (Você pode sugerir uma coordenada apropriada?) Se o fio se movesse, ter-se-ia um vínculo móvel, e a coordenada única seria relativa a um sistema em movimento. Os vínculos que podem ser expressados na forma de uma equação que relaciona as coordenadas chamam-se *holônomos*. Todos os exemplos acima envolvem vínculos holônomos.

Os vínculos também podem ser especificados por restrições nas velocidades, ao invés de coordenadas. Por exemplo, um cilindro de raio a , rolando e deslizando para baixo num plano inclinado, com o seu eixo sempre na horizontal, pode ser caracterizado por duas coordenadas, s e θ , como é mostrado na Fig. 9.3. A coordenada s mede a distância em que o cilindro se moveu sobre o plano, e a coordenada θ é o ângulo que um raio fixo no cilindro girou em relação ao ponto de contato com o plano. Suponha que o cilindro rola sem deslizar. Neste caso, as velocidades \dot{s} e $\dot{\theta}$ devem estar relacionadas pela equação

$$\dot{s} = a\dot{\theta}, \quad (9.68)$$

que pode ter a forma

$$ds = a d\theta. \quad (9.69)$$

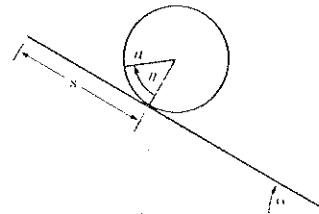


Fig. 9.3 Cilindro rodando para baixo num plano inclinado.

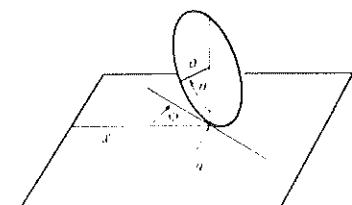


Fig. 9.4 Disco rolando sobre um plano horizontal.

podendo ser integrada:

$$s - a\theta = C, \quad (9.70)$$

onde C é uma constante. Esta equação é do mesmo tipo que a Eq. (9.66) e mostra que o vínculo é holônomo, embora tivesse sido expressado inicialmente em termos das velocidades. Se um vínculo nas velocidades, como a Eq. (9.68), puder ser integrado para fornecer uma relação entre as coordenadas, como a Eq. (9.70), então são holônomos. Entretanto, existem sistemas em que as equações de vínculo não podem ser integradas. Um exemplo é o de um disco de raio a rolando sobre uma mesa horizontal, como é mostrado na Fig. 9.4. Para facilitar, suponha que o disco não pode deslizar e que o diâmetro que toca a mesa está sempre na vertical. Quatro coordenadas serão necessárias para especificar a posição dele. As coordenadas x e y localizam o ponto de contato sobre o plano; o ângulo φ determina a orientação do plano do disco em relação ao eixo x ; e o ângulo θ é o formado por raio fixo no disco e a vertical. Forçando-se o disco a rolar sem deslizar (ele pode girar em torno de um eixo vertical), vê-se que existem duas equações de vínculo. A velocidade do ponto de contato perpendicular ao plano do disco deve ser igual a zero:

$$\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = 0, \quad (9.71)$$

e a velocidade paralela ao plano do disco será

$$\dot{x} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi = a\dot{\theta}, \quad (9.72)$$

Não é possível integrar estas equações para obter duas relações entre as coordenadas x , y , θ e φ . Para verificar isso, pode-se observar que se o disco rolar sem deslizar e se ele girar em torno de um eixo vertical, será possível trazê-lo para um ponto x , y qualquer, formando um ângulo φ qualquer, entre o plano do disco e o eixo x , e havendo um ponto sobre a circunferência do disco em contato com a mesa, isto é, um ângulo θ qualquer. Se o disco estiver em qualquer ponto x , y e se o ponto em contato com a mesa não for o desejado, pode-se rolar o disco em torno de um círculo cuja circunferência tenha o comprimento apropriado, de forma que, quando ele retornar ao ponto x , y , o ponto desejado estará em contato com a mesa. Em seguida, pode-se girar o disco para o ângulo φ desejado. Este resultado mostra que as quatro coordenadas x , y , θ e φ são independentes e que não pode haver nenhuma relação entre elas. Portanto, será impossível integrar as Eqs. (9.71) e (9.72) e, consequentemente, este é um exemplo de vínculo não-holônômico.

O número de maneiras independentes em que um sistema mecânico é capaz de mover-se sem violar os vínculos existentes chama-se número de *graus de liberdade* do sistema. Para ser mais preciso, o número de graus de liberdade é o número de grandezas que devem ser especificadas quando se determinam as velocidades das partículas do sistema, para qualquer movimento que não viole os vínculos. Por exemplo, uma partícula movendo-se no espaço tem três graus de liberdade, mas se estiver vinculada para mover-se ao longo de uma determinada curva, só terá um. Um sistema de N partículas livres tem $3N$ graus de liberdade, um corpo rígido tem seis graus de liberdade (três de translação e três de rotação) e um corpo rígido que gira em torno de um eixo tem

um único grau de liberdade. O disco mostrado na Fig. 9.4 terá quatro graus de liberdade se puder deslizar sobre a mesa, porque, então, será preciso especificar \dot{x} , \dot{y} , $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$. Mas se o disco rolar sem deslizar, só haverá dois graus de liberdade, porque se $\dot{\varphi}$ e qualquer uma das velocidades \dot{x} , \dot{y} e $\dot{\theta}$ forem conhecidas, as duas restantes poderão ser determinadas a partir das Eqs. (9.71) e (9.72). Neste caso, o disco só poderá rolar e rodar em torno de um eixo vertical. Para sistemas holônicos, o número de graus de liberdade será igual ao número mínimo de coordenadas necessárias para especificar a configuração do sistema, quando se eliminam as coordenadas que permanecem constantes. Os vínculos não-holônomos aparecem em problemas em que os corpos rolam sem deslizar, mas não têm grande importância em Física, portanto só se dará atenção a sistemas holônicos.

Para um sistema holônomico de N partículas submetidas a c vínculos independentes, podem-se expressar os vínculos através de correlações que devem ser válidas entre as $3N$ coordenadas cartesianas (incluindo-se, possivelmente, o tempo, caso os vínculos variem com ele):

$$\begin{aligned} h_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_1, \\ h_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_2, \\ &\vdots \\ h_c(x_1, y_1, \dots, z_N; t) &= a_c, \end{aligned} \quad (9.73)$$

onde h_1, \dots, h_c são c funções especificadas. O número de graus de liberdade será

$$f = 3N - c. \quad (9.74)$$

Como as Eqs. (9.73) são independentes, podem-se resolvê-las para c das $3N$ coordenadas cartesianas em termos de outras $3N - c$ coordenadas e das constantes a_1, \dots, a_c . Assim, só é preciso especificar $3N - c$ coordenadas; as restantes poderão ser determinadas a partir das Eqs. (9.73), caso as constantes a_1, \dots, a_c sejam conhecidas. É possível considerar como coordenadas generalizadas estas $3N - c$ coordenadas cartesianas e as c grandezas a_1, \dots, a_c , definidas pelas Eqs. (9.73), e são mantidas constantes pelos vínculos. Pode-se também definir $3N - c$ coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_f , de qualquer maneira conveniente:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, \dots, z_N; t), \\ q_2 &= q_2(x_1, y_1, \dots, z_N; t), \\ &\vdots \\ q_f &= q_f(x_1, y_1, \dots, z_N; t). \end{aligned} \quad (9.75)$$

As Eqs. (9.73) e (9.75) definem um conjunto de $3N$ coordenadas $q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c$, e são análogas às Eqs. (9.1). A partir destas, obtém-se as relações para as coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c; t), \\ y_1 &= y_1(q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c; t), \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c; t). \end{aligned} \quad (9.76)$$

Considere $Q_1, \dots, Q_f, Q_{f+1}, \dots, Q_{f+c}$ como forças generalizadas, correspondentes às coordenadas $q_1, \dots, q_f; a_1, \dots, a_c$. Assim, há um conjunto de equações de Lagrange para as coordenadas com vínculos e outras com coordenadas sem vínculos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, \dots, f, \quad (9.77)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_j} - \frac{\partial T}{\partial a_j} = Q_{f+j}, \quad j = 1, \dots, c; f+c = 3N. \quad (9.78)$$

A importância desta separação em dois grupos de equações está no fato de as forças de vínculo poderem ser escolhidas de forma que não realizem trabalho, a não ser que os vínculos sejam violados, como será mostrado no próximo parágrafo. Se isto for verdade, então, de acordo com a definição (9.30) de força generalizada, as forças de vínculo não contribuem para a força generalizada Q_k , associada a uma coordenada sem vínculo q_k . Como os valores das coordenadas de vínculo a_1, \dots, a_c são mantidas constantes, resolvem-se as Eqs. (9.77) para o movimento do sistema em termos das coordenadas q_1, \dots, q_f , tratando a_1, \dots, a_c como constantes conhecidas, sem, no entanto, conhecer as forças de vínculo. É uma grande vantagem, porque as forças de vínculo dependem do movimento do sistema e não poderão, em geral, ser determinadas até que o movimento o tenha sido. Tudo que, em geral, se sabe sobre as forças de vínculo é que elas têm valores, quaisquer que sejam, necessários para manter os vínculos. Após obter a solução das Eqs. (9.77) e determinar $q_1(t), \dots, q_f(t)$, pode-se, então, caso se deseje, substituir estas funções nas Eqs. (9.78) e calcular as forças de vínculo. Este aspecto pode ter considerável interesse para os engenheiros que querem verificar se os vínculos são suficientemente fortes para resistir a essas forças. As equações de Lagrange reduzem o problema de determinação do movimento de um sistema holônomo qualquer, com f graus de liberdade, a um outro de resolução de f equações diferenciais de segunda ordem (9.77). Quando se fala de coordenadas generalizadas, as coordenadas de vínculo a_1, \dots, a_c podem ou não ser incluídas, de acordo com a conveniência.

Quando uma conta desliza sem atrito por um arame, este só poderá exercer forças de vínculos perpendiculares a ele, de forma que nenhum trabalho seja realizado sobre a conta enquanto ela permanece sobre o arame.² Existindo atrito, separa-se a força exercida sobre a conta num componente perpendicular ao arame que segura a conta, no arame que não realizar nenhum trabalho, e um componente de atrito ao longo do arame que realiza trabalho e, portanto, terá de ser incluído na força generalizada associada ao movimento que se dá ao longo do arame. Se a força de atrito depender da força normal, da mesma forma que no deslizamento em superfícies secas, então não se

² Se o arame estiver em movimento, a força que ele exerce poderá realizar trabalho sobre a conta, mas o deslocamento virtual, em termos dos quais as forças generalizadas foram definidas, deverá ser considerado como se ocorresse em determinado instante de tempo, e para um deslocamento tal que não viola os vínculos, não há trabalho. Então, mesmo no caso de vínculos em movimento, as forças de vínculos não aparecem nas forças generalizadas, associadas às coordenadas sem vínculos.

poderá resolver primeiro as Eqs. (9.77), independentemente das Eqs. (9.78), perdendo-se, neste caso, algumas das vantagens do método de Lagrange. Usam-se, então, primeiramente, as Eqs. (9.78) para determinar as forças normais em termos de $q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$, e, em seguida, substituem-se nos termos de força de atrito das Eqs. (9.77). Mantendo-se duas partículas separadas por uma distância fixa através de uma haste rígida, então, de acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida pela haste sobre uma partícula será igual e oposta à força exercida sobre a outra partícula. Na Seç. 5.1, foi mostrado que a haste não apresentará trabalho sobre o sistema se os vínculos não forem violados, isto é, se a haste não for esticada nem comprimida. Encontram-se situações semelhantes em todos os outros casos; os vínculos devem sempre ser mantidos por forças que não trabalham.

Se as forças Q_1, \dots, Q_f forem obtidas a partir de uma função energia potencial, então é possível definir uma função lagrangiana $L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ que pode, em alguns casos, depender de t , e que também pode depender das constantes a_1, \dots, a_c . Então, as primeiras f equações de Lagrange (9.77) poderão ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (9.79)$$

9.5 EXEMPLOS DE SISTEMAS SUJEITOS A VÍNCULOS

Um sistema mecânico simples que contém vínculos é a máquina de Atwood, mostrada na Fig. 9.5. Os pesos m_1 e m_2 são ligados por uma corda de comprimento l que passa por uma polia. Admita que os pesos só se movem na vertical, de forma a haver apenas um grau de liberdade. Tome como coordenadas a distância x de m_1 ao eixo da polia e l , o comprimento da corda. A coordenada l está vinculada a um valor constante

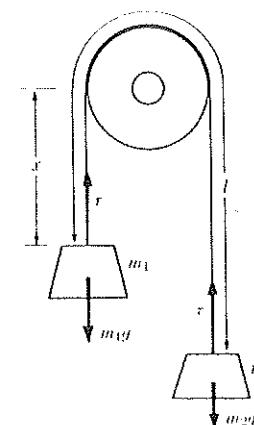


Fig. 9.5 Máquina de Atwood.

tante, e poderia ser deixada de lado desde o início, caso se quisesse determinar apenas o movimento, mas para determinar-se também a tração na corda, deve-se incluir l como uma das coordenadas. A energia será

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{l} - \dot{x})^2. \quad (9.80)$$

As únicas forças agindo sobre m_1 e m_2 são a tração τ na corda e a força de gravidade. O trabalho realizado num deslocamento δx , enquanto l permanece constante, será

$$\begin{aligned}\delta W &= (m_1g - \tau)\delta x - (m_2g - \tau)\delta x \\ &= (m_1 - m_2)g\delta x = Q_x\delta x,\end{aligned} \quad (9.81)$$

de tal forma que

$$Q_x = (m_1 - m_2)g. \quad (9.82)$$

Note que Q_x é independente de τ . O trabalho realizado, quando l sofre um acréscimo δl e x permanece constante, será

$$\delta W = (m_2g - \tau)\delta l = Q_l\delta l, \quad (9.83)$$

de forma que

$$Q_l = m_2g - \tau. \quad (9.84)$$

Note que, para se obter uma equação envolvendo o vínculo τ , deve-se considerar um movimento que viole o vínculo, o que também será verdade para medir a força de acordo com a Física, devendo-se permitir pelo menos um pequeno deslocamento na direção a ela. As equações de Lagrange para este movimento são (pois $\dot{l} = \ddot{l} = 0$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = (m_1 + m_2)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g, \quad (9.85)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial T}{\partial l} = -m_2\ddot{x} = m_2g - \tau. \quad (9.86)$$

A primeira equação deve ser resolvida para obter-se a equação de movimento:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2. \quad (9.87)$$

A segunda equação pode ser usada na determinação da tração τ , necessária para manter o vínculo

$$\tau = m_2(g + \ddot{x}) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (9.88)$$

Neste caso, a tração é independente do tempo e pode ser obtida imediatamente a partir das Eqs. (9.85) e (9.86), embora, na maioria dos casos, as forças de vínculo dependam do movimento e só podem ser determinadas depois que o movimento também o

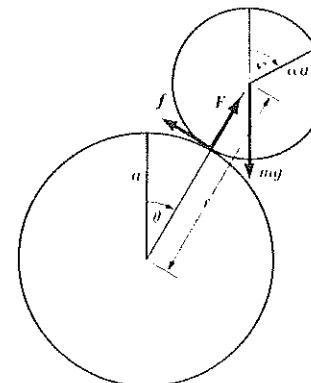


Fig. 9.6 Cilindro rolando sobre outro.

for. As Eqs. (9.85) e (9.86) têm uma interpretação física óbvia e podem ser obtidas imediatamente a partir de considerações elementares, como foi feito na Seç. 1.7.

Um problema de pouca importância prática, mas muito instrutivo, é o do cilindro que rola sobre outro cilindro, como é mostrado na Fig. 9.6. O cilindro de raio a é fixo, mas o cilindro de raio αa rola sobre ele sob a ação da gravidade. Suponha que o atrito estático seja μ , o coeficiente de atrito de deslizamento seja igual a zero³ e que o cilindro parte do repouso com o seu centro verticalmente acima do centro do cilindro fixo. Admita que o eixo do cilindro em movimento permaneça na horizontal durante o deslocamento. Será aconselhável em todos os problemas, e essencialmente neste que está sendo considerado, pensar cuidadosamente sobre o movimento antes de tentar achar uma solução matemática. É evidente que o cilindro não pode rolar em torno de toda circunferência do cilindro fixo, pois a força normal F que é exercida pelo cilindro fixo sobre o cilindro que se movimenta só poderá ser orientada para fora, nunca para dentro. Entretanto, em algum ponto, o cilindro em movimento se desprenderá do que está fixo. O ponto em que o equilíbrio cairá será aquele em que

$$F = 0. \quad (9.89)$$

Além disso, o cilindro não poderá continuar a rolar sem deslizar até o ponto em que perde contato, pois a força de atrito f que evita o deslizamento é limitada pela condição

$$f \leq \mu F, \quad (9.90)$$

e μF se tornará presumivelmente muito pequena para evitar o deslizamento antes do ponto em que a Eq. (9.89) é satisfeita. Logo, o movimento estará dividido em três partes. No princípio, o cilindro rola sem deslizar formando um ângulo θ_1 determinado pela condição

$$f = \mu F. \quad (9.91)$$

³ Isto indica que o cilindro deve mover-se ou rolar sem deslizar, caso o atrito estático seja suficientemente grande, ou deslizar sem atrito. A última suposição foi feita somente para simplificar o problema.

Além do ângulo θ_1 , o cilindro deslizará sem atrito até atingir o ângulo θ_2 , determinado pela Eq. (9.89), perdendo, depois, contato com o cilindro fixo e caindo livremente. Podem-se antecipar algumas dificuldades matemáticas com a parte inicial do movimento, devido ao fato de a posição inicial do cilindro ser de equilíbrio instável. De acordo com a Física, não haverá dificuldade, pois uma ligeira perturbação fará com que o cilindro role, mas matematicamente haverá e é preciso observá-la, visto que a ligeira perturbação não aparecerá nas equações.

Para determinar o movimento para a parte em que o cilindro em movimento rola sem deslizar, só haverá um grau de liberdade e, assim, especifica-se a posição do cilindro por meio do ângulo θ , formado entre a vertical e a linha que liga os centros dos dois cilindros. Para calcular a energia cinética, introduz-se o ângulo auxiliar φ , formado pelo cilindro em movimento girando em torno de seu eixo. A condição para que o cilindro role sem deslizar conduz à equação de vínculo:

$$a\dot{\theta} = \alpha a(\dot{\varphi} - \dot{\theta}), \quad (9.92)$$

que, depois de integrada, torna-se

$$(1 + \alpha)\theta = \alpha\varphi. \quad (9.93)$$

Se o interesse fosse apenas no rolamento do cilindro, poder-se-ia prosseguir e escrever as equações de Lagrange para θ , mas visto que é preciso conhecer as forças de vínculo F e f , será necessário introduzir coordenadas adicionais, que serão mantidas constantes por estas forças de vínculo. A força de atrito f sustenta o vínculo (9.93), e uma coordenada apropriada será

$$\gamma = \theta - \frac{\alpha\varphi}{1 + \alpha}. \quad (9.94)$$

Se o cilindro rolasse sem deslizar, $\gamma = 0$; γ mediria o ângulo de deslizamento ao redor do cilindro fixo. A força normal F manteria a distância r constante entre os centros dos cilindros

$$r = a + \alpha a = (1 + \alpha)a. \quad (9.95)$$

A energia cinética do cilindro que rola é a energia associada ao movimento de seu centro de massa mais a energia de rotação em torno do centro de massa:

$$T = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2. \quad (9.96)$$

Após a substituição de φ , obtido a partir da Eq. (9.94), e como $I = \frac{1}{2}m\alpha^2a^2$ para um cilindro sólido de raio αa , tem-se

$$T = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m(1 + \alpha)^2a^2(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\gamma}\dot{\theta} + \dot{\gamma}^2). \quad (9.97)$$

As equações de vínculo [Eq. (9.95) e $\gamma = 0$] não devem ser usadas até que as equações tenham sido escritas. As forças generalizadas são determinadas mais facilmente com o auxílio da Eq. (9.30):⁴

⁴ Um exercício instrutivo para o leitor: verificar estas fórmulas.

$$Q_\theta = mgr \sen \theta, \quad (9.98)$$

$$Q_r = -fa(1 + \alpha), \quad (9.99)$$

$$Q_\gamma = F - mg \cos \theta. \quad (9.100)$$

As equações de Lagrange para θ , γ e r serão

$$m[r^2 + \frac{1}{2}a^2(1 + \alpha)^2]\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} - \frac{1}{2}ma^2(1 + \alpha)^2\ddot{\gamma} = mgr \sen \theta, \quad (9.101)$$

$$-\frac{1}{2}ma^2(1 + \alpha)^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma^2(1 + \alpha)^2\ddot{\gamma} = -fa(1 + \alpha), \quad (9.102)$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F - mg \cos \theta. \quad (9.103)$$

Pode-se introduzir, agora, os vínculos $\gamma = 0$ e $r = (1 + \alpha)a$, de tal forma que as equações acima tornam-se

$$\frac{3}{2}(1 + \alpha)^2ma^2\ddot{\theta} = (1 + \alpha)mga \sen \theta, \quad (9.104)$$

$$f = \frac{1}{2}(1 + \alpha)ma\dot{\theta}, \quad (9.105)$$

$$F = mg \cos \theta - (1 + \alpha)ma\dot{\theta}^2. \quad (9.106)$$

Caso se ignorassem os termos envolvendo $\dot{\gamma}$ na energia cinética, a equação em θ , que determina o movimento, teria sido obtida corretamente, mas na equação para a força de vínculo f faltaria um termo. Isto acontece quando as coordenadas de vínculo não são ortogonais às coordenadas sem vínculos, por isso o termo cruzado ($\dot{\gamma}\dot{\theta}$) aparecerá na energia cinética. No problema da máquina de Atwood, havia uma situação similar, como pode ter sido observado pelo leitor.

A equação do movimento (9.14) pode ser resolvida pelo método da energia. A energia total, enquanto o cilindro rolar sem deslizar, será

$$\frac{3}{4}(1 + \alpha)^2ma^2\dot{\theta}^2 + (1 + \alpha)mga \cos \theta = E, \quad (9.107)$$

e será constante, como pode ser verificado facilmente com auxílio da Eq. (9.104), pois, como se sabe, a força gravitacional é conservativa e as forças de vínculos não realizam trabalho. Como o cilindro parte do repouso em $\theta = 0$,

$$E = (1 + \alpha)mga. \quad (9.108)$$

Substituindo este resultado na Eq. (9.107), pode-se obter $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = 2\left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2} \sen \frac{\theta}{2}, \quad (9.109)$$

onde

$$\beta = \frac{2}{3(1 + \alpha)}. \quad (9.110)$$

Integra-se, então, a Eq. (9.109) para determinar $\theta(t)$:

$$\int_0^\theta \frac{\frac{1}{2} d\theta}{\sin \theta/2} = \left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2} \int_0^t dt, \quad (9.111)$$

$$\left[\ln \left| \tan \frac{\theta}{4} \right| \right]_0^\theta = \left(\frac{\beta g}{a}\right)^{1/2} t. \quad (9.112)$$

Quando se substitui o limite inferior $\theta = 0$, introduz-se uma dificuldade, pois $\ln 0 = -\infty$! Esta dificuldade era esperada devido ao fato de $\theta = 0$ ser um ponto de equilíbrio, embora instável. Se não existisse perturbação, seria necessário um tempo infinito para o cilindro rolar do ponto de equilíbrio. Suponha, no entanto, que o cilindro saia do equilíbrio sob a ação de uma pequena perturbação, e considere o tempo $t = 0$ como tempo quando o ângulo θ tem um pequeno valor θ_0 . Assim, não haverá dificuldades, tendo-se

$$\tan \frac{\theta}{4} = \left(\tan \frac{\theta_0}{4} \right) \exp \left[\left(\frac{\beta g}{a} \right)^{1/2} t \right]. \quad (9.113)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 2\pi$ e o cilindro rola ao redor do cilindro fixo, se os vínculos continuarem válidos. No entanto, o vínculo de rolamento só será válido enquanto a Eq. (9.90) também o for. Quando se substituem os resultados obtidos nas Eqs. (9.105), (9.106) e (9.109), a Eq. (9.90) torna-se

$$\frac{1}{3}mg \sin \theta \leq \frac{1}{3}\mu mg(7 \cos \theta - 4). \quad (9.114)$$

Para $\theta = 0$, esta relação será certamente válida, de forma que o cilindro não rolará inicialmente, como se supôs. Entretanto, para $\theta = \pi/2$, esta relação certamente não valerá, pois o primeiro membro será positivo e o segundo, negativo. O ângulo θ_1 para o qual começa o deslizamento é determinado pela equação

$$\sin \theta_1 = \mu(7 \cos \theta_1 - 4), \quad (9.115)$$

cuja solução será

$$\cos \theta_1 = \frac{28\mu^2 + [1 + 33\mu^2]^{1/2}}{1 + 49\mu^2}. \quad (9.116)$$

A segunda parte do movimento, durante o qual o cilindro em movimento desliza sem atrito ao redor do cilindro fixo, pode ser determinada através da solução das Eqs. (9.101) e (9.102) para $\theta(t)$ e $\gamma(t)$ com $f = 0$ e com um único vínculo $r = (1 + \alpha)a$, e com os valores iniciais $\theta = \theta_1$ e $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1$, determinados a partir das Eqs. (9.116) e (9.109). A solução pode ser obtida essencialmente sem dificuldades, e o ângulo θ_2 para o qual o cilindro em movimento deixa a superfície do cilindro fixo pode ser determinado a partir das Eqs. (9.106) e (9.89). Estes cálculos serão deixados para o leitor.

9.6 CONSTANTES DO MOVIMENTO E COORDENADAS IGNORÁVEIS

Mencionou-se no Cap. 3 que um método geral para resolver problemas de Dinâmica é procurar as constantes do movimento, isto é, funções das coordenadas e das ve-

locidades que permanecem constantes no tempo. Um caso comum em que tais constantes podem ser encontradas é aquele em que o sistema dinâmico é caracterizado por uma função lagrangiana, na qual não há ocorrência explícita de algumas coordenadas q_k . A equação de Lagrange correspondente, Eq. (9.57), reduz-se, então, a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0. \quad (9.117)$$

Esta equação pode ser integrada imediatamente:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{constante}. \quad (9.118)$$

Logo, quando uma coordenada q_k não aparece explicitamente na função lagrangiana, o momento p_k correspondente será uma constante de movimento. Considera-se a coordenada q_k ignorável e, assim, se q_k puder ser ignorada, pode-se resolver a Eq. (9.118) e obter \dot{q}_k em termos de outras coordenadas e velocidades e do momento constante p_k , e substituir, nas equações de Lagrange restantes, para eliminar \dot{q}_k e reduzir de um o número de variáveis do problema (q_k já estava ausente nas equações, pois foi considerada ignorável.) Depois de determinadas, as demais variáveis podem ser substituídas na Eq. (9.118), podendo-se, assim, determinar \dot{q}_k como função de t ; q_k será, então, obtida por integração. Se todas, menos uma das coordenadas, forem ignoráveis, o problema se tornará unidimensional, podendo ser resolvido pelo método da integral da energia, se L não depender do tempo t explicitamente.

Por exemplo, no caso de forças centrais, a energia potencial só depende da distância r à origem, assim usando-se as coordenadas polares r, θ no plano, V será independente de θ ; como T também é independente de θ , de acordo com a Eq. (9.14) (T depende certamente de $\dot{\theta}$), tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (T - V) = 0, \quad (9.119)$$

e, então,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \ddot{\theta} = p_\theta = \text{constante}, \quad (9.120)$$

resultado que já foi obtido na Seç. 3.13 usando-se um argumento diferente. Verifica-se que a constância de p_θ resulta do fato de o sistema ser simétrico em relação à origem, de forma que L não pode depender de θ .

Quando um sistema está livre da ação de forças externas, então, deslocando-se o sistema como um todo em qualquer direção, sem variar as velocidades e posições relativas das partículas, não haverá variação em T ou V , ou em L . Se X , Y e Z forem as coordenadas retangulares do centro de massa, e se as demais coordenadas forem consideradas em relação ao centro de massa, de forma que uma variação de X corresponde a um deslocamento do sistema como um todo, então

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \quad (9.121)$$

e, portanto, p_x , o momento linear total na direção x , será constante – resultado que foi demonstrado na Seç. 4.1 por um método diferente.

Será interessante verificar como se pode, a partir das equações de Lagrange, demonstrar que a energia é uma constante do movimento. Para determinar uma integral da energia, a partir das equações do movimento na forma lagrangiana, será necessário saber como expressar a energia total em termos da função lagrangiana L . Com esta finalidade, considere o sistema descrito em termos de um sistema de coordenadas fixo, de forma que a energia cinética T será função quadrática homogênea das velocidades generalizadas $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ [isto é, $T_1 = T_0 = 0$ na Eq. (9.13)]. De acordo com o Teorema de Euler⁵, tem-se

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T. \quad (9.122)$$

Logo, se

$$L = T_2 - V, \quad (9.123)$$

onde V só é uma função das coordenadas q_1, \dots, q_f , então, de acordo com a Eq. (9.122)

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = T + V = E. \quad (9.124)$$

Considere, agora, a derivada em relação ao tempo do primeiro membro da Eq. (9.124). Para maior generalidade, permite-se, inicialmente, que L dependa explicitamente de t . No caso anterior, considerou-se que L não dependia explicitamente de t . Entretanto, em muitos casos, o sistema encontra-se sob a ação de forças externas que variam com o tempo e que podem ser derivadas de potências V que variam com o tempo. Um exemplo seria o de um átomo submetido ao campo elétrico externo variável. Nestes casos, as equações de movimento podem ser escritas na forma lagrangiana (9.57) em que a lagrangiana depende explicitamente do tempo t . Também no caso de um sistema de coordenadas em movimento, a lagrangiana pode depender do tempo, mesmo que as forças sejam conservativas. A derivada em relação ao tempo do primeiro membro da Eq. (9.124) será

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) &= \sum_{k=1}^f \left[\ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.125)$$

Se L não depender explicitamente de t , o segundo membro da Eq. (9.125) será igual a zero e

$$\sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{constante}. \quad (9.126)$$

Quando L tem a forma $(T_2 - V)$, como no caso de um sistema de coordenadas estacionário, este será o Teorema da Conservação da Energia. Independentemente da forma de L , a Eq. (9.126) representa uma constante de movimento das equações de Lagrange (9.57), todas as vezes que L não depender explicitamente de t , mas nem sempre a grandeza constante do primeiro membro é a energia total. Observe a analogia existente entre a conservação do momento generalizado p_k , quando L é independente de q_k , e a conservação da energia, quando L é independente de t . Existem diversas maneiras para as quais a relação entre tempo e energia é análoga à relação entre a coordenada e o momento correspondente.

Verifica-se que as leis familiares da conservação da energia, do momento e do momento angular podem ser consideradas como simetrias apresentadas pelos sistemas mecânicos aos quais elas se aplicam; isto é, elas são consequência do fato de a função lagrangiana L , que determina as equações do movimento, ser independente do tempo e da posição e orientação no espaço do sistema como um todo. Este resultado, obtido aqui para a Mecânica Clássica, geralmente é válido em toda a Física. Em Mecânica Quântica e em Teoria da Relatividade, mesmo quando se inclui o campo eletromagnético e outros campos de forças, as leis da conservação estarão associadas às simetrias nas equações fundamentais. Na realidade, deve-se definir energia como a grandeza que é constante porque as leis da Física não variam com o tempo (se na realidade não variarem!).

9.7 OUTROS EXEMPLOS

O pêndulo esférico é um pêndulo simples que pode oscilar em todo o ângulo sólido em torno de um ponto. O movimento da massa do pêndulo restringe-se a uma superfície esférica de raio R . Localizando-se a posição da massa pelas coordenadas esféricas θ e ϕ (Fig. 9.7), pode-se incluir o comprimento R do pêndulo como uma coordenada, caso se deseje determinar a tensão no fio, mas é melhor omiti-la, pois o interesse é determinar somente o movimento. Se a massa oscilar acima da horizontal, supõe-se que, mesmo assim, ela permanecerá sobre a esfera, o que seria verdade se se substituisse o fio por uma haste rígida. Caso contrário, o vínculo desaparecerá sempre que uma tensão de compressão for necessária para mantê-lo, pois o fio só suportará a tração e não a compressão. A velocidade da massa será

$$v = R\dot{\theta}\hat{\theta} + R \sin \theta \dot{\phi}\hat{\phi}. \quad (9.127)$$

Portanto, a energia cinética será

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (9.128)$$

⁵ W. Kaplan, *Advanced calculus*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1952, p. 90, Probl. 9. O leitor não familiarizado com o Teorema de Euler poderá demonstrar facilmente a Eq. (9.122) sozinho, substituindo $T = T_2$ obtido a partir da Eq. (9.9).

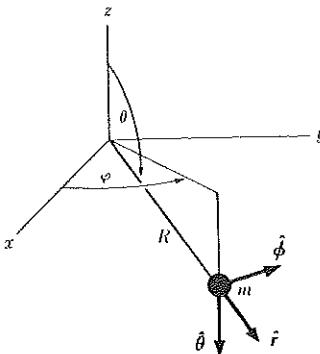


Fig. 9.7 Pêndulo esférico.

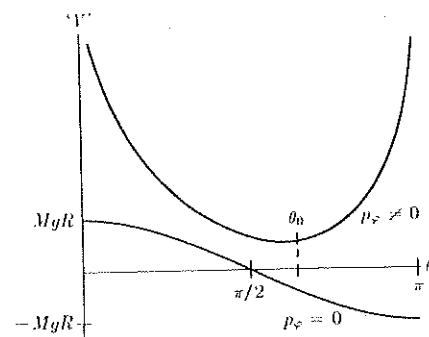


Fig. 9.8 Potencial efetivo ' $V(\theta)$ ' para pêndulo esférico.

A energia potencial devido à gravidade, em relação ao plano horizontal, será

$$V = mgR \cos \theta. \quad (9.129)$$

Portanto, a função lagrangiana será

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - mgR \cos \theta. \quad (9.130)$$

As equações de Lagrange serão

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) - mR^2\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta = 0, \quad (9.131)$$

$$\frac{d}{dt}(mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0. \quad (9.132)$$

A coordenada φ é ignorável e a segunda equação poderá ser integrada diretamente:

$$mR^2\sin^2\theta\dot{\phi} = p_\varphi = \text{constante}. \quad (9.133)$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (9.134)$$

a grandeza

$$\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\phi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mgR \cos \theta \quad (9.135)$$

será constante, de acordo com a Eq. (9.126). A grandeza no segundo membro pode ser reconhecida como a energia total, como era de esperar, pois o sistema usado é de coordenadas fixo.

Denominando-se esta constante de E e substituindo $\dot{\phi}$ dado pela Eq. (9.133), tem-se

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR \cos \theta = E. \quad (9.136)$$

Pode-se introduzir um potencial efetivo ' $V(\theta)$ ' para o movimento de acordo com a seguinte relação

$$V(\theta) = mgR \cos \theta + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta}, \quad (9.137)$$

de tal forma que

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = E - V(\theta). \quad (9.138)$$

Como o primeiro membro não pode ser negativo, o movimento estará limitado aos valores de θ , para os quais ' $V(\theta) \leq E$ '. O potencial efetivo ' $V(\theta)$ ' é mostrado na Fig. 9.8. Verifica-se que para $p_\varphi = 0$, ' $V(\theta)$ ' torna-se a curva do potencial para pêndulo simples, com um mínimo em $\theta = \pi$ e um máximo em $\theta = 0$. Para $E = -mgR$, o pêndulo estará em repouso em $\theta = \pi$. Para $mgR > E > -mgR$, o pêndulo oscilará em torno de $\theta = \pi$. Para $E > mgR$, o pêndulo oscilará fazendo um movimento circular entre os pontos superior e inferior $\theta = 0$ e π . Quando $p_\varphi \neq 0$, o movimento não mais será o de um pêndulo simples, e ' $V(\theta)$ ' terá então um mínimo no ponto θ_0 entre $\pi/2$ e π , tornando-se infinito em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Quanto maior for p_φ , maior será o valor mínimo de ' $V(\theta)$ ' e mais próximo θ_0 estará de $\pi/2$. Se $E = V(\theta_0)$, então θ será constante e igual a θ_0 , e o pêndulo oscilará em círculo, em torno do eixo vertical. Quando $p_\varphi \rightarrow \infty$, o pêndulo oscilará cada vez mais próximo do plano horizontal. Para $E > V(\theta_0)$, θ oscilará entre um máximo e um mínimo, enquanto o pêndulo oscila em torno do eixo vertical. O leitor deve comparar estes resultados usando a sua intuição para a Física ou a sua experiência em relação ao movimento de um pêndulo esférico. A solução da Eq. (9.138) para $\theta(t)$ não pode ser obtida em termos de funções elementares, mas os movimentos circular e aproximadamente circulares podem ser tratados com facilidade. A relação entre p_φ e θ_0 para o movimento circular uniforme do pêndulo em torno do eixo z será

$$\left[\frac{dV}{d\theta} \right]_{\theta_0} = -mgR \sin \theta_0 - \frac{p_\varphi^2 \cos \theta_0}{mR^2 \sin^3 \theta_0} = 0. \quad (9.139)$$

Da equação acima, torna-se evidente que $\theta_0 > \pi/2$, e que $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ quando $p_\varphi \rightarrow \infty$. Substituindo-se na relação anterior o valor de p_φ , dado pela Eq. (9.133), obtém-se uma relação entre $\dot{\phi}$ e θ_0 para um movimento circular uniforme:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{R(-\cos \theta_0)}. \quad (9.140)$$

A energia para um movimento circular uniforme no ângulo θ_0 , usando-se as Eqs. (9.136) e (9.139), e o fato de $\dot{\theta} = 0$, será

$$E_0 = \frac{mgR}{2} \left(\frac{2 - 3 \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \right). \quad (9.141)$$

Para a energia ligeiramente maior do que E_0 e um momento angular p_φ , dado pela Eq. (9.139), as oscilações harmônicas simples são executadas no ângulo θ , em torno do valor θ_0 . Pois fazendo-se

$$k = \left[\frac{d^2'V}{d\theta^2} \right]_{\theta_0} = \frac{mgR}{-\cos \theta_0} (1 + 3 \cos^2 \theta_0), \quad (9.142)$$

para pequenos valores de $\theta - \theta_0$, pode-se expandir ' $V(\theta)$ ' em uma série de Taylor:

$$'V(\theta) \doteq E_0 + \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2. \quad (9.143)$$

Neste caso, a equação da energia (9.138) torna-se

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2 = E - E_0. \quad (9.144)$$

Esta é a energia para um oscilador harmônico com energia $E - E_0$, coordenada $\theta - \theta_0$, massa mR^2 , mola constante k . A freqüência de oscilação em θ é, portanto, dada por

$$\omega^2 = \frac{k}{mR^2} = \frac{g}{R} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{-\cos \theta_0}. \quad (9.145)$$

Esta oscilação em θ estará superposta ao movimento circular em torno do eixo z com velocidade angular $\dot{\phi}$, que é dada pela Eq. (9.133); $\dot{\phi}$ variará ligeiramente enquanto θ oscila, mas permanecerá aproximadamente igual ao valor constante dado pela Eq. (9.140). Será interessante comparar $\dot{\phi}$ e ω :

$$\frac{\dot{\phi}^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \theta_0}. \quad (9.146)$$

Como $\theta_0 > \pi/2$, esta razão é menor que 1, de forma que $\omega > \dot{\phi}$, e o pêndulo oscilará para cima e para baixo enquanto gira em torno de um círculo. Quando $\theta_0 = \pi/2$, $\dot{\phi} = \omega$ e o pêndulo se move num círculo cujo plano é ligeiramente inclinado em relação à horizontal; este caso só ocorre no limite de valores muito grandes de p_ϕ . Quando p_ϕ é muito grande, verifica-se que a ação da gravidade pode ser desprezada e o movimento poderá ocorrer em círculo situado em qualquer plano que contenha a origem. O leitor poderá demonstrar este resultado matematicamente? Próximo de $\theta_0 = 0$, $\omega = 2\dot{\phi}$, então θ oscilará duas vezes em cada revolução e a massa do pêndulo se moverá formando uma elipse cujo centro estará no eixo z. Este movimento corresponde ao do oscilador harmônico bidimensional discutido na Seç. 3.10, com freqüências iguais nas duas direções perpendiculares.

Como último exemplo, considere um sistema em que existem vínculos de movimento. Uma conta de massa m desliza sem atrito em um aro circular de raio a . O aro encontra-se num plano vertical que pode girar em torno do diâmetro vertical em velocidade angular constante, ω . Existe apenas um grau de liberdade e, visto que não há interesse nas forças de vínculos, somente a coordenada θ , que mede o ângulo ao longo do círculo a partir da parte de baixo do diâmetro vertical até a conta (Fig. 9.9), será usada. A energia cinética será então

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta, \quad (9.147)$$

e a energia potencial será

$$V = -mga \cos \theta. \quad (9.148)$$

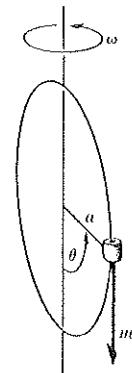


Fig. 9.9 Conta deslizando em um aro com movimento de rotação.

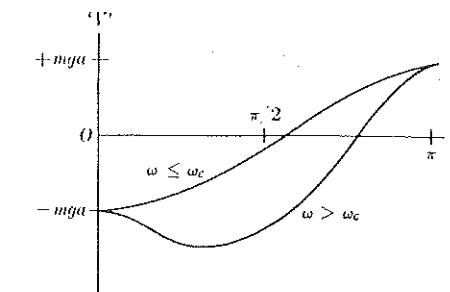


Fig. 9.10 Energia potencial efetiva para o sistema mostrado na Fig. 9.9.

A função lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta. \quad (9.149)$$

A equação de Lagrange para o movimento pode ser facilmente escrita, mas será desnecessário; entretanto nota-se que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

e, portanto, de acordo com a Eq. (9.126), a grandeza

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta = 'E' \quad (9.150)$$

será constante. A constante ' E' ' não é a energia total $T + V$, pois o termo do meio tem o sinal trocado. A energia total não é constante neste caso. (Qual é a força que realiza o trabalho que produz a variação em $T + V$?) Entretanto verifica-se que é possível interpretar a Eq. (9.149) como uma função lagrangiana, em termos de um sistema de coordenadas fixo, onde o termo intermediário será considerado como parte da energia potencial efetiva:

$$'V(\theta) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin^2 \theta - mga \cos \theta. \quad (9.151)$$

De acordo com esta interpretação, a energia será ' E '. O primeiro termo em ' $V(\theta)$ ' é a energia potencial associada à força centrífuga que deve ser adicionada, caso se queira considerar como fixo o sistema com movimento de rotação. Um gráfico do potencial efetivo é mostrado na Fig. 9.10. A forma da curva de potencial dependerá de ω ser maior ou menor do que uma velocidade angular crítica

$$\omega_c = (g/a)^{1/2}. \quad (9.152)$$

Deixa-se para o leitor a demonstração deste resultado e a discussão dos possíveis movimentos da conta nos dois casos.

9.8 FORÇAS ELETROMAGNÉTICAS E POTENCIAIS DEPENDENTES DA VELOCIDADE

Se as forças exercidas sobre um sistema dinâmico dependem das velocidades, às vezes é possível determinar uma função $U(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$ tal que

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f. \quad (9.153)$$

Se esta função U pode ser determinada, então se define uma função lagrangiana

$$L = T - U, \quad (9.154)$$

de tal forma que a equação do movimento (9.53) possa ser escrita na forma (9.57):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (9.155)$$

A função U pode ser chamada *potencial dependente da velocidade*. Existindo também forças deriváveis de potenciais comuns $V(q_1, \dots, q_f)$, V pode ser incluído em U , pois a Eq. (9.153) reduz-se à Eq. (9.33) para os termos que não contêm as velocidades. A função U pode depender explicitamente do tempo t . Se isto não acontecer e se o sistema de coordenada for fixo, então L será independente de t e a grandeza

$$E = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \quad (9.156)$$

será uma constante do movimento, de acordo com a Eq. (9.126). Neste caso, diz-se que as forças são conservativas, mesmo quando dependem da velocidade. Deste resultado, torna-se claro que não será possível expressar as forças de atrito na forma (9.153), pois a energia total não é constante quando existe atrito, a não ser que se inclua a energia térmica, mas a energia térmica não pode ser definida em termos das coordenadas e das velocidades $q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$; portanto, não se pode incluí-la na Eq. (9.156). Não é difícil mostrar que, se as partes de U dependentes da velocidade são lineares na velocidade, como na maioria dos exemplos importantes, a energia E definida pela Eq. (9.156) será exatamente $T + V$, onde V é a energia potencial usual e contém os termos de U independentes das velocidades.

Como exemplo, considere uma partícula de carga q submetida a um campo magnético constante B e sujeita à ação da força (unidades gaussianas):

$$F = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (9.157)$$

ou

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{q}{c} (\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \\ F_y &= \frac{q}{c} (\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \\ F_z &= \frac{q}{c} (\dot{x}B_y - \dot{y}B_x). \end{aligned} \quad (9.158)$$

As Eqs. (9.158) terão a forma (9.153) se

$$U = \frac{q}{c} (z\dot{y}B_x + x\dot{z}B_y + y\dot{x}B_z). \quad (9.159)$$

Na realidade, é possível expressar a força eletromagnética na forma (9.153) para qualquer campo elétrico e magnético. A força eletromagnética agindo sobre uma partícula de carga q é dada pela Eq. (3.283):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (9.160)$$

Da Teoria Eletromagnética,⁶ sabe-se que, para um campo eletromagnético, é possível definir uma função escalar $\phi(x, y, z, t)$ e uma função vetorial $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (9.161)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (9.162)$$

A função ϕ chama-se *potencial escalar* e \mathbf{A} , *potencial vetor*. Se estas expressões forem substituídas na Eq. (9.160), obtém-se

$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (9.163)$$

O último termo pode ser reescrito usando-se a fórmula (3.35) para o triplo produto vetorial:

$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} + \frac{q}{c} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (9.164)$$

[Os componentes de \mathbf{v} ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) são independentes de x, y e z , de tal forma que \mathbf{v} não pode ser derivado pelo operador ∇ .] Os dois termos intermediários podem ser combinados de acordo com a Eq. (8.113):

$$\mathbf{F} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{q}{c} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (9.165)$$

onde $d\mathbf{A}/dt$ é a derivada de \mathbf{A} , em relação ao tempo, calculada na posição da partícula em movimento. Pode-se, agora, verificar através de cálculo direto que a função potencial

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (9.166)$$

quando substituída nas Eqs. (9.153), com $q_1, q_2, q_3 = x, y, z$, produz como resultado os componentes da força \mathbf{F} dada pela Eq. (9.165). Com auxílio do teorema enunciado no Probl. 24, no final deste capítulo, a função lagrangiana $L = T - U$ fornecerá tam-

⁶ Veja, por exemplo, Slater and Frank, *Electromagnetism*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1947, p. 87.

bém as equações do movimento, corretas quando expressadas em termos de um sistema de coordenadas qualquer. Pode-se facilmente mostrar que a energia E definida pela Eq. (9.156) com $L = T - U$ será

$$E = T + q\phi. \quad (9.167)$$

Se A e ϕ forem independentes de t , então L será independente de t em um sistema de coordenadas fixo e a energia E será constante, resultado este que foi demonstrado por métodos mais elementares na Seç. 3.17 [Eq. (3.288)].

Quando existe um potencial dependente da velocidade, define-se usualmente o momento em termos da função lagrangiana, ao invés de em termos da energia cinética:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (9.168)$$

Se o potencial não dependesse da velocidade, então esta definição seria equivalente à Eq. (9.23). Em ambos os casos, é a derivada em relação ao tempo de $\partial L/\partial \dot{q}_k$ que aparece na equação de Lagrange para q_k , e que será constante se q_k for ignorável. No caso de uma partícula submetida a forças eletromagnéticas, os componentes do momento p_x , p_y e p_z , de acordo com as Eqs. (9.168) e (9.166), serão

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x, \\ p_y &= m\dot{y} + \frac{q}{c} A_y, \\ p_z &= m\dot{z} + \frac{q}{c} A_z. \end{aligned} \quad (9.169)$$

O segundo termo do segundo membro das equações acima funciona com potencial de momento.

Assim, torna-se aparente que as forças gravitacionais, forças eletromagnéticas e, na realidade, todas as forças fundamentais, em Física, podem ser expressadas na forma (9.153), desde que se escolha apropriadamente a função potencial U . [As forças de atrito não são consideradas fundamentais neste sentido, porque elas no limite podem ser reduzidas a forças eletromagnéticas entre átomos, podendo, portanto, pelo menos em princípio, ser expressadas na forma (9.153), incluindo-se todas as coordenadas dos átomos e moléculas que compõem o sistema.] Portanto, as equações do movimento de um sistema qualquer de partículas podem sempre ser expressadas em forma lagrangiana (9.155), mesmo quando existem forças dependentes da velocidade. Torna-se aparente que existe algo fundamental na forma das Eqs. (9.155). Uma propriedade importante destas equações, como já foi observado, é que elas permanecerão com a mesma forma, caso se substituam as coordenadas q_1, \dots, q_f , por um novo conjunto qualquer de coordenadas. Isto pode ser verificado através de cálculo direto, entretanto longo e tedioso. Uma visão mais profunda do caráter fundamental das equações de Lagrange será obtida quando se estudar uma formulação mais avançada da Mecânica, uti-

lizando-se o cálculo de variações, mas que não se encontra entre as proposições deste livro.⁷

9.9 EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA UMA CORDA VIBRANTE

O método de Lagrange pode ser estendido também ao movimento de um meio contínuo. Considere somente o exemplo mais simples: a corda vibrante. Usando a notação da Seç. 8.1, pode-se considerar $u(x)$ como um conjunto de coordenadas generalizadas, análogas a q_k . No lugar do índice k , que indica os vários graus de liberdade, há a coordenada de posição x , que indica os vários pontos da corda. O número de graus de liberdade será infinito para uma corda contínua ideal. A generalização do método de Lagrange para se trabalhar com índice contínuo x , que indica os vários graus de liberdade, introduz uma complicação matemática que se deve evitar aqui.⁸ Portanto, usar-se-á a possibilidade de representar a função $u(x)$ como uma série de Fourier.

De acordo com o Teorema da Série, de Fourier, enunciado na Seç. 8.2, se a corda estiver presa nas extremidades $x = 0, l$, pode-se representar sua posição $u(x)$ pela série (8.24):

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}. \quad (9.170)$$

Os coeficientes q_k são dados pela Eq. (8.25):

$$q_k = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.171)$$

Como os coeficientes q_k fornecem uma descrição completa da posição da corda, elas representam um conjunto apropriado de coordenadas generalizadas. Quando a corda vibra, as coordenadas q_k tornam-se funções de t :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}. \quad (9.172)$$

Há, ainda, um número infinito de coordenadas q_k , mas dependem do índice discreto k e podem ser tratadas exatamente como as coordenadas generalizadas, consideradas no início deste capítulo. Como a corda pode, pelo menos em princípio, ser tratada como um número muito grande de partículas e como se pode descrever o sistema por intermédio de qualquer conjunto apropriado de coordenadas generalizadas, necessita-se sómente expressar a função lagrangiana em termos das coordenadas q_k para poder escrever a equação do movimento.

Calcula-se inicialmente a energia cinética, que, evidentemente, é

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (9.173)$$

⁷ Veja, por exemplo, H. Goldstein, *Classical mechanics*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1950, cap. 2.

⁸ Para descrição deste problema, veja H. Goldstein, *op. cit.*, cap. 11.

Derivando-se a Eq. (9.172) em relação a t e elevando ao quadrado, obtém-se

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_k \dot{q}_j \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{l}. \quad (9.174)$$

Multiplica-se a equação por $\frac{1}{2} \sigma dx$ e integra-se de 0 a l termo a termo.⁹ Como

$$\int_0^l \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}l, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad (9.175)$$

o resultado obtido será

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} l \sigma \dot{q}_k^2. \quad (9.176)$$

A seguir, calcula-se a força generalizada Q_k . Se a coordenada q_k sofrer um acréscimo δq_k , enquanto as restantes permanecem fixas, um ponto x sobre a corda mover-se-á para cima a uma distância que, de acordo com a Eq. (9.170), será:

$$\delta u = \delta q_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}. \quad (9.177)$$

A força exercida para cima sobre um elemento dx da corda é dada pela Eq. (8.3). O trabalho realizado será então

$$\delta W = Q_k \delta q_k = \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u dx. \quad (9.178)$$

Substituindo-se em $\partial u / \partial x$ a relação dada pela Eq. (9.170), e δu dado pela Eq. (9.177), na Eq. (9.178), e integrando termo a termo, obtém-se (supondo τ constante):

$$Q_k = -\frac{1}{2} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k. \quad (9.179)$$

As forças Q_k são facilmente obtidas a partir da função energia potencial,

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k^2. \quad (9.180)$$

Será instrutivo determinar V diretamente calculando-se o trabalho realizado contra a tração τ que move a corda de sua posição de equilíbrio para a posição $u(x)$. Ao mesmo tempo, verifica-se que este trabalho será independente de a corda se mover para a posição $u(x)$. Considere que $u(x, t)$ seja a posição da corda em qualquer tempo t , enquanto a corda se mover para $u(x)$. [A função $u(x, t)$ não é necessariamente a solu-

⁹ Para derivar e integrar uma série infinita, termo a termo, e reorganizar a ordem das somas, o que se faz livremente nesta seção, deve-se exigir que a convergência de todas as séries seja uniforme. Este será o caso, se $u(x, t)$ e suas derivadas forem funções contínuas. (Para definição e derivação das condições para manipulação de séries infinitas, consulte um livro de Cálculo Avançado, por exemplo, W. Kaplan, *Advanced calculus*. Reading Mass., Addison-Wesley, 1952, cap. 6.)

ção da equação do movimento, pois se quer considerar uma maneira arbitrária de mover a corda de $u = 0$ para $u = u(x)$.] Em $t = 0$, a corda estará na posição de equilíbrio:

$$u(x, 0) = 0. \quad (9.181)$$

Considere que $t = t_1$ seja o tempo em que a corda atinge a posição final:

$$u(x, t_1) = u(x). \quad (9.182)$$

O trabalho realizado contra o componente vertical da tração [Eq. (8.3)] durante o intervalo de tempo dt será

$$dV = - \int_{x=0}^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx.$$

Integrando-se por partes e lembrando que u e $\partial u / \partial t$ são iguais a 0 em $x = 0, l$:

$$\begin{aligned} dV &= \int_{x=0}^l \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx dt \\ &= dt \frac{\partial}{\partial t} \int_{x=0}^l \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (9.183)$$

O trabalho total realizado será, então,

$$\begin{aligned} V &= \int_{t=0}^{t_1} dV \\ &= \left[\int_0^{t_1} \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t_1} \\ &= \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (9.184)$$

onde na última expressão, $u = u(x)$ corresponde à posição final da corda. O resultado dependerá apenas da posição final da corda — uma demonstração independente de que as forças são conservativas.

O trabalho realizado contra a tração acumula-se como a energia potencial, na corda esticada. Substituindo-se na Eq. (9.184) o resultado obtido na Eq. (9.170), pode-se obter novamente a Eq. (9.180). Na Eq. (8.61), para uma corda de partículas, o segundo membro contém dois termos que representam os componentes verticais da força entre pares de partículas adjacentes. Uma terceira maneira de obter a energia potencial é determinando a função energia potencial entre um par de partículas, que permitirá determinar a força. Será necessário, então, mostrar que, quando esta força é somada a todos os pares de partículas adjacentes, o resultado tenderá para Eq. (9.184) no limite $h \rightarrow 0$.

A função lagrangiana para a corda vibrante pode, agora, ser escrita como

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4} l \sigma \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2} l \tau \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 q_k^2 \right]. \quad (9.185)$$

A equação de Lagrange resultante para q_k é

$$\frac{1}{2}l\sigma\ddot{q}_k + \frac{1}{2}l\tau\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 q_k = 0, \quad (9.186)$$

cuja solução será

$$q_k = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t, \quad (9.187)$$

onde

$$\omega_k = \frac{\pi k}{l} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{1/2} = \frac{\pi k c}{l}. \quad (9.188)$$

Este resultado pode ser substituído na Eq. (9.172), obtendo-se a solução

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \omega_k t + B_k \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \omega_k t \right), \quad (9.189)$$

que concorda com a Eq. (8.23). Se $u = u_0(x)$ e $\partial u / \partial t = v_0(x)$ são conhecidos em $t = 0$, podem-se determinar as constantes A_k, B_k como nas Eqs. (8.25):

$$\begin{aligned} A_k &= q_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \\ B_k &= \dot{q}_k(0) = \frac{2}{\omega_k l} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (9.190)$$

As coordenadas q_k , definidas pelas Eqs. (9.170) e (9.171), são chamadas *coordenadas normais* para a corda vibrante. Cada coordenada representa evidentemente um modo normal de vibração. As coordenadas são também muito úteis no tratamento do caso em que a força $f(x, t)$ é aplicada ao longo da corda (veja o Probl. 26 no final deste capítulo). Matematicamente, as coordenadas normais têm a propriedade de tornar a lagrangiana L uma soma de termos, quando cada um deles envolve somente um grau de liberdade. Assim, em coordenadas normais o problema é subdividido em problemas diferentes, um para cada grau de liberdade.

Certamente, a escolha das coordenadas, no início do problema, foi muito afortunada, pois, como se verificou, são as coordenadas normais. Em geral, isto não acontece. Por exemplo, considere uma corda cuja densidade varia ao longo do comprimento, de acordo com a relação

$$\sigma = \sigma_0 + a \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (9.191)$$

A corda é mais pesada próximo ao centro. Usando-se as mesmas coordenadas q_k definidas pelas Eqs. (9.170) e (9.171) e substituindo as Eqs. (9.191) e (9.172) na Eq. (9.173) e, no lugar da Eq. (9.176), obtém-se (após alguns cálculos),

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} T_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (9.192)$$

onde

$$T_{kj} = \frac{1}{2} l \sigma_0 + \frac{4 l a}{\pi} \frac{k^2}{4 k^2 - 1}, \quad \text{se } k = j,$$

$$T_{kj} = - \frac{4 l a}{\pi} \frac{k j}{[(k+j)^2 - 1][(k-j)^2 - 1]}, \quad \text{se } k \neq j, \quad (9.193)$$

e k e j são ambos pares ou ambos ímpares, caso contrário

$$T_{kj} = 0.$$

Para esta corda, as q_k não evidentemente coordenadas normais. Nas equações de Lagrange, todas as q_k com k par estarão agrupadas, da mesma forma que aquelas em que k seja ímpar. O problema será, então, muito mais difícil e é melhor não tentar resolvê-lo aqui.

9.10 EQUAÇÕES DE HAMILTON

A discussão, nesta seção, restringe-se a sistemas mecânicos que obedecem às equações de Lagrange na forma (9.57). A função lagrangiana L é função das coordenadas q_k , das velocidades \dot{q}_k e, talvez, de t . O estado do sistema mecânico em qualquer tempo, isto é, as posições e as velocidades de todas as partes, estará determinado desde que se conheçam as coordenadas generalizadas q_k, \dot{q}_k . As equações de Lagrange são de segunda ordem, relacionando as acelerações \ddot{q}_k às coordenadas e velocidades. O estado do sistema poderia da mesma forma estar determinado caso se conhecessem as coordenadas q_k e os momentos p_k definidos pela Eq. (9.108):

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (9.194)$$

Estas equações especificam p_k em termos de $q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$. Elas podem, em princípio, ser resolvidas para determinar \dot{q}_k em termos de $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$.

Um exercício interessante é tentar escrever as equações do movimento em termos das coordenadas q_k e dos momentos p_k . Verifica-se, inicialmente, que, usando a definição (9.194) e as equações do movimento (9.57), obtém-se o resultado

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{k=1}^f (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (9.195)$$

Em seguida, define-se uma função $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ através de relação

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L, \quad (9.196)$$

onde se substituem as velocidades \dot{q}_k pelas expressões em termos das coordenadas e momentos. Tem-se, então, de acordo com as Eqs. (9.196) e (9.195), que

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (9.197)$$

A definição (9.196) foi escolhida de tal forma que dH dependerá explicitamente de dp_k , dq_k e dt . Pode-se considerar, com auxílio da Eq. (9.197), que

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f, \quad (9.198)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (9.199)$$

As Eqs. (9.198) são as do movimento procuradas, que expressam \dot{q}_k e \dot{p}_k em termos das coordenadas e momentos.

As Eqs. (9.198) são as de Hamilton para o movimento de um sistema mecânico. A função H , definida pela Eq. (9.196), é chamada *função hamiltoniana*. Verifica-se, a partir da Eq. (9.124), que quando V só é função das coordenadas, num sistema de coordenadas estacionário, H será a energia total expressada em termos das coordenadas e dos momentos. Para um sistema de coordenadas em movimento, onde T é dado pela Eq. (9.13), a hamiltoniana será

$$H = T_2 + V - T_0, \quad (9.200)$$

com T_2 expressado em termos das coordenadas e momentos. De acordo com a Seç. 9.8, H também será a energia total, num sistema de coordenadas estacionário, quando existem forças eletromagnéticas.

Quando L não contém o tempo explicitamente, H também não o conterá de acordo com a Eq. (9.199), como se torna óbvio também da maneira como H foi definido. De acordo com a Eq. (9.125), H será, neste caso, uma constante do movimento, o que poderá ser demonstrado diretamente a partir das Eqs. (9.198), pois é fácil demonstrar que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (9.201)$$

cujo resultado pode ser verificado pelo leitor.

Se uma coordenada qualquer q_k não aparece explicitamente em H , então das Eqs. (9.198) resulta que

$$p_k = \text{constante}, \quad (9.202)$$

em concordância com a Eq. (9.118). Como H não contém q_k , pode-se considerar p_k como uma constante conhecida, e as $2(f-1)$ equações (9.198) para as demais coordenadas e momentos serão, então, as equações de Hamilton para um sistema de $f-1$ graus de liberdade. Logo, os graus de liberdade correspondentes a coordenadas que não aparecem em H simplesmente desaparecem do problema. Esta é a origem do termo “coordenada ignorável”. Depois que se resolvem as demais equações do movimento para as coordenadas e momentos não ignoráveis, qualquer coordenada ignorável será dada, de acordo com as Eqs. (9.198), como integral em relação a t :

$$q_k(t) = q_k(0) + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p_k} dt. \quad (9.203)$$

As equações de Hamilton não passam de uma nova formulação das leis do movimento, de Newton. Em casos simples, elas se reduzem a equações que poderiam ter sido obtidas imediatamente das leis de Newton. No oscilador harmônico, por exemplo, com o deslocamento dado pela coordenada x , o momento será

$$p = m\dot{x}. \quad (9.204)$$

Portanto, a função de Hamilton será

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (9.205)$$

As Eqs. (9.198) tornam-se

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -kx. \quad (9.206)$$

A primeira delas é a definição de p ; a segunda é a equação de movimento de Newton.

Embora, comparativamente, tenham pouco valor quando usadas simplesmente para escrever as equações do movimento de um sistema, as equações de Hamilton são importantes por duas razões. Primeira, elas fornecem um ponto de partida útil para estabelecer as leis da Mecânica Estatística e da Mecânica Quântica. Hamilton desenvolveu originalmente essas equações por uma formulação matemática similar que se havia mostrado útil no estudo da Óptica. Não é surpreendente que as equações hamiltonianas formem o ponto de partida da Mecânica Ondulatória! Segunda, existe um grande número de métodos de solução de problemas de Mecânica, baseados na formulação de Hamilton para as equações de movimento. Torna-se claro da maneira como foram derivadas que as equações de Hamilton (9.198), como as de Lagrange, são válidas para qualquer conjunto de coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_f , associadas aos momentos p_1, \dots, p_f correspondente, definido pela Eq. (9.194). De fato, as equações de Hamilton são válidas para uma classe mais ampla de sistemas de coordenadas obtidas pela definição de novas coordenadas e momentos, como determinadas funções das coordenadas e momentos originais. Essa é a base para utilização das equações de Hamilton na solução de problemas de Mecânica. Uma discussão mais ampla destes tópicos ultrapassa o nível deste livro.¹⁰ Entretanto, na próxima seção, demonstra-se um teorema geral que dá idéia da importância das variáveis p_k e q_k .

¹⁰ Veja H. Goldstein, *op. cit.*, caps. 7, 8 e 9.

9.11 TEOREMA DE LIOUVILLE

Pode-se considerar as coordenadas q_1, \dots, q_f como as de um ponto num espaço f -dimensional, o *espaço da configuração* do sistema mecânico. A cada ponto no espaço da configuração corresponde uma configuração das partes do sistema mecânico. Quando o sistema se move, os pontos q_1, \dots, q_f percorrem uma trajetória no espaço das configurações. Esta trajetória representa a história do sistema. Existem certamente várias trajetórias possíveis passando por cada configuração q_1, \dots, q_f , pois as partes do sistema podem ter quaisquer velocidades $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$.

Desejando-se especificar a configuração e o movimento de um sistema em determinado instante, especificam-se as coordenadas e as velocidades, ou de modo equivalente, as coordenadas e os momentos. O espaço $2f$ -dimensional, cujos pontos são especificados pelas coordenadas e pelos momentos $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ chama-se *espaço das fases* do sistema mecânico. Quando o sistema se move, os pontos de fase $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ determinam uma trajetória no espaço das fases. A velocidade de um ponto da fase é determinada pelas equações de Hamilton (9.198).

Cada ponto da fase representa um estado possível do sistema mecânico. Imagine que cada ponto da fase seja ocupado por uma “partícula” que se move de acordo com as equações do movimento (9.198). Estas partículas descrevem trajetórias que representam todas as histórias possíveis do sistema mecânico. Para cada ponto existirá somente uma trajetória possível, pois se as posições e as velocidades, ou as posições e os momentos, são conhecidos, a solução das equações do movimento será determinada univocamente. O Teorema de Liouville estabelece que as “partículas” da fase movem-se com um fluido incompressível. Mais precisamente, o volume da fase ocupado por um conjunto de “partículas” permanece constante.

Para demonstrar o Teorema de Liouville, usa-se o teorema (8.121) generalizado para um espaço de $2f$ dimensões. Pode-se, alternativamente, generalizar o argumento que conduziu à Eq. (8.116), mas também se usa a generalização do Teorema da Divergência, de Gauss, válido para qualquer número de dimensões. Para um volume no espaço das fases movendo-se com as partículas, tem-se, em ambos os casos:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \cdots \int \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f, \quad (9.207)$$

que é a Eq. (8.121) escrita para o espaço das fases com $2f$ dimensões. Substituindo-se as velocidades obtidas a partir das equações de Hamilton (9.198):

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \cdots \int \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \right) dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f = 0. \quad (9.208)$$

Este é o Teorema de Liouville, devendo-se observar que é válido, mesmo quando H depende explicitamente de t .

No caso de um oscilador harmônico, o espaço das fases é um plano com eixos coordenados x e p . Os pontos de fase movem-se sobre as elipses $H = \text{constante}$, dadas pela Eq. (9.205), e com as velocidades dadas de acordo com a Eq. (9.206). De acordo

com o Teorema de Liouville, o movimento será o de um fluido incompressível bidimensional. Em particular, um conjunto de pontos contido numa região de área A , em qualquer tempo posterior, estará contido em outra região de mesma área A .

O Teorema de Liouville torna as coordenadas e os momentos mais úteis do que as coordenadas e as velocidades na maioria dos casos. Por causa deste teorema, o conceito de espaço das fases é uma ferramenta importante em Mecânica Estatística. Imagine um grande número de sistemas mecânicos idênticos a um outro conhecido, mas com condições iniciais diferentes. Considere que cada sistema seja representado por um ponto no espaço das fases comum; considere também que estes pontos se movem de acordo com as equações de Hamilton. As propriedades estatísticas deste conjunto de sistemas podem ser especificadas em qualquer instante t , conhecendo-se a densidade $\rho(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t)$ no espaço das fases de pontos do sistema por unidade de volume. O Teorema de Liouville significa que a densidade ρ , na vizinhança imediata de qualquer ponto do sistema, deve permanecer constante enquanto o ponto mover-se através do espaço das fases. (Por quê?) Definindo-se o equilíbrio estatístico como uma distribuição em que ρ permanece constante no tempo, em cada ponto fixo no espaço das fases, então torna-se claro que a condição necessária e suficiente para haver equilíbrio é que ρ seja uniforme ao longo das linhas de corrente dos pontos do sistema. (Por quê?)

Nesta seção, apresentou-se somente uma rápida visão do potencial contido pelos métodos hamiltonianos.

PROBLEMAS

1. As coordenadas u e w são definidas em termos das coordenadas polares planas r e θ pelas equações

$$u = \ln(r/a) - \theta \cotg \zeta,$$

$$w = \ln(r/a) + \theta \operatorname{tg} \zeta,$$

onde a e ζ são constantes. Esboce as curvas para u constante e para w constante. Determine a energia cinética para uma partícula de massa m em termos de u , w , \dot{u} e \dot{w} . Determine as expressões para Q_u e Q_w em termos dos componentes polares da força, F_r e F_θ . Determine p_u , p_w . Determine as forças Q_u e Q_w necessárias para fazer a partícula mover-se em velocidade constante ao longo de uma espiral de constante $u = u_0$.

2. Duas massas, m_1 e m_2 , movem-se sob a atração gravitacional mútua em campo gravitacional externo cuja aceleração é g . Escolha coordenadas cartesianas X , Y , Z do centro de massa (considerando que Z seja na direção de g), a distância r entre m_1 e m_2 , e os ângulos polares θ e φ , que especificam a direção da linha que une m_1 a m_2 . Escreva as expressões para a energia cinética, as seis forças Q_x, \dots, Q_φ e os seis momentos. Escreva as seis equações de Lagrange para o movimento.

3. a) Escreva as expressões para a energia cinética de uma partícula de massa m , em termos das coordenadas parabólicas planas f e h , conforme foram definidas no Probl. 17 do Cap. 3. Determine os momentos p_f e p_h .

b) Escreva as equações de Lagrange nestas coordenadas para o caso em que a partícula não esteja submetida a nenhuma força.

4. a) Determine as forças Q_f e Q_h necessárias para fazer com que a partícula do Probl. 3 se move ao longo de uma parábola $f = f_0 = \text{constante}$, com velocidade generalizada constante $\dot{h} = \dot{h}_0$, partindo de $h = 0$ em $t = 0$.

b) Determine as forças F_x e F_y correspondentes em relação a um sistema de coordenadas cartesianas.

5. a) Escreva as equações de Lagrange, em termos das coordenadas esféricas r , θ e φ , para o movimento de uma partícula de massa m , sob a ação de uma força cujos componentes são F_r , F_θ e F_φ .

b) Escreva as equações de Lagrange para o movimento da mesma partícula em um sistema de coordenadas esféricas girando com velocidade angular ω em torno do eixo z .

c) Identifique as forças centrífugas e de Coriolis generalizadas ' Q_r ', ' Q_θ ' e ' Q_φ ', por meio das quais as equações do movimento, no sistema com movimento de rotação, tomam uma forma idêntica às obtidas no sistema fixo. Calcule os componentes esféricos ' F_r ', ' F_θ ' e ' F_φ ' das forças centrífugas e de Coriolis, e mostre que o seu resultado concorda com a expressão derivada no Cap. 7.

6. Escreva a função de Lagrange para o sistema mecânico mostrado na Fig. 4.16, usando as coordenadas x , x_1 e x_2 indicadas na figura. Obtenha as equações do movimento e mostre que elas são equivalentes às equações obtidas diretamente das leis de movimento, de Newton.

7. Escolha as coordenadas apropriadas e escreva a função de Lagrange para o problema dos três corpos restritos. Mostre que ela conduz às equações do movimento obtidas na Seç. 7.6.

8. As massas m e $2m$ acham-se suspensas por uma corda de comprimento l_1 que passa por uma polia. As massas $3m$ e $4m$ também estão suspensas por uma corda de comprimento l_2 que passa por outra polia. Estas duas polias estão penduradas nas extremidades de uma corda de comprimento l_3 , que passa por uma terceira polia fixa. Escreva as equações de Lagrange e determine as acelerações e as trações nas cordas.

9. Um tubo sem massa está preso por uma das extremidades a um suporte articulado. Uma haste uniforme de massa m e comprimento l desliza livremente dentro dele. O eixo, em relação ao qual o tubo gira, é horizontal, de forma que o movimento restringe-se a um plano. Escolha um conjunto apropriado de coordenadas generalizadas, uma para cada grau de liberdade, e escreva as equações de Lagrange.

10. Escreva as equações de Lagrange para uma porta uniforme, cujo eixo de rotação está ligeiramente fora de plumb. Qual será o período para pequenas vibrações?

11. Um pêndulo duplo é formado por uma massa m_2 suspensa por um fio de comprimento l_2 que está preso a uma massa m_1 , que, por sua vez, está pendurada num suporte fixo por intermédio de um fio de comprimento l_1 .

a) Escolha um conjunto apropriado de coordenadas e escreva a função lagrangiana, supondo que o pêndulo duplo oscile no plano vertical.

b) Escreva as equações de Lagrange e mostre que elas se reduzem a equações para um par de osciladores acoplados se o fio permanecer aproximadamente na vertical.

c) Determine as freqüências normais para pequenas vibrações do pêndulo duplo. Descreva a natureza das vibrações correspondentes. Determine os valores-limite para estas vibrações quando $m_1 \gg m_2$ e quando $m_2 \gg m_1$. Mostre que os valores-limite destas vibrações deveriam ser esperados por questões físicas, considerando-se a natureza dos modos normais de vibração quando uma das massas se torna desprezível.

12. Uma escada encontra-se em repouso, encostada a uma parede lisa, e desliza sem atrito com a parede e o chão. Escreva as equações de movimento, supondo que a escada mantém contato com a parede. Se ela estiver, inicialmente, em repouso formando um ângulo α com a horizontal, em que ângulo, se existir, a escada perderá o contato com a parede?

13. A extremidade de uma haste uniforme de massa M está em contato com uma parede vertical; a outra extremidade está em contato com um assoalho horizontal liso. Uma conta de massa m e dimensões desprezíveis desliza sobre a haste. Escolha um conjunto apropriado de coordenadas, monte a função de Lagrange e escreva as equações de Lagrange. A haste move-se em um único plano vertical perpendicular à parede.

14. Um anel de massa M repousa sobre uma superfície horizontal lisa e está fixo, por intermédio de um alfinete, num ponto de sua circunferência, de modo a poder oscilar em torno de um eixo vertical. Um inseto de massa m caminha sobre o anel com velocidade constante.

a) Escreva as equações de movimento, considerando este problema como um sistema com dois graus de liberdade, onde as forças exercidas pelo inseto contra o anel devem ser determinadas a partir da condição de ele se deslocar com velocidade constante.

b) Escreva, agora, as equações do movimento, considerando este problema como um sistema com um grau de liberdade, em que o inseto é obrigado a estar em um ponto determinado em cada instante. Mostre que as duas formulações do problema são equivalentes.

15. A massa m de um pêndulo acha-se presa por um fio de comprimento l a um ponto de sustentação. Este ponto move-se para frente e para trás ao longo de um eixo x horizontal, de acordo com a equação

$$x = a \cos \omega t.$$

Suponha que o pêndulo só oscile no plano vertical que contém o eixo x . Considere que a posição do pêndulo seja descrita por um ângulo θ que o fio faz com uma linha vertical.

a) Escreva a função lagrangiana e escreva a equação de Lagrange.

b) Mostre que, para valores pequenos de θ , a equação de movimento reduz-se à equação de movimento de um oscilador harmônico forçado, e determine os movimentos para o estado estacionário correspondente. De que forma a amplitude de oscilações do estado estacionário depende de m , l , a e ω ?

16. A massa m de um pêndulo está presa por intermédio de um fio de comprimento l a um carro de massa M que se move sem atrito ao longo de um trilho suspenso. O pêndulo oscila no plano horizontal que contém o trilho.

a) Escreva as equações de Lagrange.

b) Mostre que existe uma coordenada ignorável, elimine-a e discuta a natureza do movimento usando o método da energia.

17. Determine a tração exercida num fio para o pêndulo esférico discutido na Seç. 9.7, como função de E , p_φ e θ . Determine, para uma dada E e p_φ , o ângulo θ_1 para o qual o fio não poderá permanecer esticado.

18. Uma partícula de massa m desliza sobre a superfície interna de um cone invertido. A metade do ângulo do cone é igual a α . O ápice do cone está na origem e o seu eixo estende-se verticalmente para cima. A única força exercida sobre a partícula, além da força de vínculo, é a da gravidade.

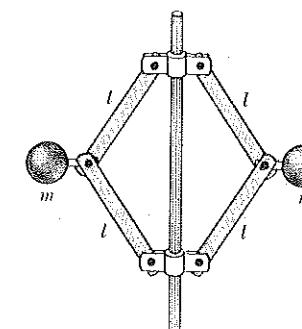
a) Escreva as equações do movimento, usando como coordenadas a distância horizontal ρ da partícula ao eixo e o ângulo φ medido num círculo horizontal ao redor do cone. Mostre que φ é uma coordenada ignorável e discuta o movimento pelo método do potencial efetivo.

b) Para um dado raio ρ_0 , determine a velocidade angular de revolução $\dot{\varphi}_0$ num círculo horizontal, a freqüência angular ω de pequenas oscilações em torno deste movimento circular. Mostre que estas pequenas oscilações são vibrações ou um movimento em forma de espiral para cima e para baixo, dependendo de o ângulo α ser maior ou menor do que o ângulo

$$\alpha_c = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

19. Um estabilizador centrífugo para um motor a vapor é mostrado na Fig. 9.11. Duas bolas, cada uma de massa m , estão ligadas através de quatro braços articulados, cada um de comprimento l , a abraçadeiras localizadas numa haste vertical. A abraçadeira superior está presa à haste, a abraçadeira inferior tem massa M e momento de inércia desprezível, e desliza para cima e para baixo, quando o movimento das bolas é tal que elas se afastam ou se aproximam da haste. O sistema bola-haste gira em velocidade angular constante ω .

a) Escreva a equação de movimento, desprezando o peso dos braços e da haste. Discuta o movimento pelo método da energia.



9.11 Estabilizador centrífugo.

b) Determine o valor da altura z da abraçadeira inferior acima de sua posição mais baixa como função de ω para a rotação estacionária das bolas, e determine a freqüência para pequenas oscilações de z em torno deste valor estacionário.

20. Discuta o movimento do estabilizador, descrito no Probl. 19, para o caso em que a haste não está vinculada para girar com velocidade angular ω , mas pode girar livremente, sem a aplicação de nenhum torque externo.

a) Determine a velocidade angular para uma rotação estacionária a uma dada altura z da abraçadeira.

b) Determine a freqüência para pequenas vibrações em torno deste movimento estacionário.

c) Quais as diferenças entre este movimento e movimento do Probl. 19.

21. Um sistema de coordenadas retangulares com eixos x , y e z gira em velocidade angular uniforme ω , em relação ao eixo z . Uma partícula de massa m desloca-se sob a ação de uma energia potencial $V(x, y, z)$.

a) Escreva as equações de Lagrange para o movimento.

b) Mostre que estas equações podem ser consideradas como as equações do movimento de uma partícula em um sistema de coordenadas fixas, submetido à ação da força $-\nabla V$ e a uma força derivada de um potencial dependente da velocidade U . Determine, então, o potencial dependente da velocidade para as forças centrífuga e de Coriolis.

c) Expresse U em função das coordenadas esféricas r , θ , φ , \dot{r} e $\dot{\varphi}$ e verifique que ele dará origem às forças ' Q_r ', ' Q_θ ' e ' Q_φ ' determinadas no Probl. 5.

22. Mostre que um campo magnético uniforme B , na direção z , pode ser representado em coordenadas cilíndricas (Fig. 3.22) pelo potencial vetor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B\rho\hat{\phi}$$

Escreva a função lagrangiana para uma partícula neste campo. Escreva as equações do movimento. Determine três constantes do movimento. Compare o resultado com o Probl. 75 do Cap. 3.

23. A parte cinética da função lagrangiana para uma partícula de massa m em Mecânica Relativística é

$$L_k = -mc^2[1-(v/c)^2]^{1/2}.$$

Mostre que esta relação fornece a fórmula apropriada (4.75) para os componentes do momento. Mostre que se a função potencial para as forças eletromagnéticas Eq. (9.166) for subtraída desta relação, e se A e ϕ não dependerem explicitamente de t , então $T + q\phi$ será constante, com T dado pela fórmula (4.74).

24. Mostre, por cálculo direto, que se as Eqs. (9.155) forem válidas para algumas funções $L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ e que se introduzir novas coordenadas q_1^, \dots, q_f^* onde

$$q_k = f_k(q_1^*, \dots, q_f^*; t), \quad k = 1, \dots, f,$$

então

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_l^*} - \frac{\partial L^*}{\partial q_l^*} = 0, \quad l = 1, \dots, f,$$

onde $L^*(q_1^*, \dots, q_f^*, \dot{q}_1^*, \dots, \dot{q}_f^*; t) = L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t)$ é obtida através da substituição de $f_k(q_1^*, \dots, q_f^*; t)$ para q_k .

25. Derive a fórmula (9.184), escrevendo a energia potencial que fornece a força entre as partículas para a corda de partículas estudadas na Seç. 8.4, tomando-se o limite $\hbar \rightarrow 0$.

26. Uma corda esticada é submetida à ação de uma força de densidade linear $f(x, t)$. Introduza as coordenadas q_k e determine a expressão para a força generalizada $Q_k(t)$ que age sobre a corda. Use o método de Lagrange para resolver o Probl. 6(a) do Cap. 8.

27. Resolva o Probl. 7 do Cap. 8, usando as coordenadas q_k definidas pelas Eqs. (9.170) e (9.171).

28. Escreva a função hamiltoniana para um pêndulo esférico. Escreva as equações de Hamilton para este movimento e derive a partir delas a Eq. (9.136).

*29. Obtenha uma função hamiltoniana relativística para uma partícula sujeita à ação de forças eletromagnéticas, usando a função de Lagrange dada no Probl. 23. Escreva as equações de Hamilton deste movimento e mostre que elas são equivalentes às equações de Lagrange.

30. Determine a função hamiltoniana $H(q_k, p_k)$ para uma corda vibrante, partindo da Eq. (9.185). Escreva as equações que relacionam o momento p_k com a função $u(x, t)$, que descreve o movimento da corda. Em seguida mostre que $H = T + V$, onde T e V são dados pelas Eqs. (9.173) e (9.184).

31. Escreva a função hamiltoniana para o Probl. 2. Derive as equações de Hamilton. Identifique as coordenadas ignoráveis e mostre que existirão dois problemas separados de um grau de liberdade, e que cada um deles pode (em princípio) ser resolvido pelo método da energia. Quais são as duas funções potenciais correspondentes?

32. A orientação de um feixe de elétrons se dá ao longo do eixo z . Os elétrons estão uniformemente distribuídos na seção transversal do feixe, que é um círculo de raio a_0 ; os componentes transversos do momento (p_x, p_y) estão distribuídos uniformemente em círculo (no espaço dos momentos) de raio p_0 . Supondo que os elétrons sejam focalizados por um sistema de lentes qualquer, de modo que o diâmetro transversal do feixe se torne igual a a_1 , em um determinado ponto ao longo do feixe, determine a distribuição de momento dos elétrons que chegam neste ponto. [Sugestão. Use o Teorema de Liouville.]

33. Um grupo de partículas, todas de mesma massa m , cujas alturas iniciais e momentos verticais localizam-se no quadrado $-a \leq z \leq a, -b \leq p \leq b$, caem livremente sob a ação do campo gravitacional terrestre durante um tempo t . Determine a região do espaço das fases em que estas coordenadas estarão no tempo t , e mostre por cálculo direto que esta será ainda igual a $4ab$.

34. Em um microscópio de elétrons, as partículas espalhadas por um objeto de altura z_0 são focalizadas por uma lente situada a uma distância D_0 do objeto e forma uma imagem de altura z_I a uma distância D_I atrás da lente. A abertura da lente é A . Mostre, por meio de cálculo direto, que a área no plano das fases (z, p_z) ocupado pelos elétrons após serem espalhados pelo objeto (e destinados a passar através da lente) é a mesma área do plano das fases ocupada pelos elétrons que chegam na imagem. Suponha que $z_0 \ll D_0$ e $z_I \ll D_I$.

CAPÍTULO 10

ÁLGEBRA TENSORIAL.

TENSORES DE INÉRCIA E

DE TENSÃO

Neste capítulo, desenvolve-se a Álgebra relacionada às funções vetoriais lineares ou a *tensores*, que, operando como uma ferramenta matemática, é de grande utilidade no tratamento de muitos problemas, particularmente no estudo do movimento geral de um corpo rígido e na formulação do conceito de tensão em sólidos, ou em fluidos viscosos.

10.1 MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

A equação do movimento para a rotação de um corpo rígido é dada pela Eq. (5.5):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (10.1)$$

onde \mathbf{L} é o momento angular e \mathbf{N} , o torque em relação a um ponto P , que pode ser fixo ou ser o centro de massa do corpo. A Seç. 5.2 tratou da rotação de um corpo em relação a um eixo fixo. Para tratar do problema geral da rotação de um corpo em relação a um ponto P , determina-se a relação entre o vetor momento angular \mathbf{L} e o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

Considere um corpo constituído de massas punctiformes m_k , situadas nos pontos \mathbf{r}_k relativos à origem das coordenadas em P . Mostrou-se na Seç. 7.2 que o movimento mais geral de um corpo em torno de um ponto é uma rotação em velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, e que a velocidade \mathbf{v}_k de cada partícula do corpo é dada por

$$\mathbf{v}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k. \quad (10.2)$$

Somando-se o momento angular dado pela Eq. (3.142) para todas as partículas, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k). \end{aligned} \quad (10.3)$$

A Eq. (10.3) expressa \mathbf{L} como função de $\boldsymbol{\omega}$, $L(\boldsymbol{\omega})$. Substituindo-se, na Eq. (10.3), dois vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega}'$ quaisquer e um escalar c qualquer, verifica-se que a função $L(\boldsymbol{\omega})$ satisfaz as seguintes relações:

$$L(c\omega) = cL(\omega), \quad (10.4)$$

$$L(\omega + \omega') = L(\omega) + L(\omega'). \quad (10.5)$$

Uma função vertical $L(\omega)$ com as propriedades (10.4) e (10.5) denomina-se *função vetorial linear*. As funções vetoriais lineares são importantes, pois são comuns em Física e suas propriedades matemáticas são simples.

Para obter-se uma analogia entre a Eq. (10.3) e a Eq. (5.9) para o caso da rotação em torno de um eixo, expande-se o produto vetorial triplo [Eq. (3.35)]:

$$L = \sum_{k=1}^N [m_k r_k^2 \omega - m_k r_k (\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega})]. \quad (10.6)$$

O fator ω é independente de K , podendo-se fatorá-lo com o da soma no primeiro termo. De maneira puramente formal, também se pode fatorar ω da soma no segundo termo:

$$L = \left(\sum_{k=1}^N m_k r_k^2 \right) \omega - \left(\sum_{k=1}^N m_k r_k \mathbf{r}_k \right) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (10.7)$$

O segundo termo não tem nenhum significado, pois a justaposição $\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k$ de dois vetores não foi ainda definida, tentando-se obter, na próxima seção, o significado deste termo.

10.2 ÁLGEBRA TENSORIAL

O *produto da diâada* AB de dois vetores é definido pela seguinte equação, onde C é um vetor qualquer:

$$(AB) \cdot C = A(B \cdot C). \quad (10.8)$$

Expressa-se o segundo membro desta equação em termos dos produtos definidos na Seç. 3.1. O primeiro membro é, por definição, o vetor dado pelo segundo membro. Note que a diâada AB só é definida em termos de seus produtos com um vetor arbitrário C , sendo fácil mostrar, a partir da definição (10.8), que a multiplicação de um vetor por uma diâada é uma operação linear com o seguinte significado:

$$(AB) \cdot (cC) = c[(AB) \cdot C], \quad (10.9)$$

$$(AB) \cdot (C + D) = (AB) \cdot C + (AB) \cdot D. \quad (10.10)$$

Para os vetores finos A e B , a diâada AB define, portanto, uma função vetorial linear $F(C)$:

$$F(C) = (AB) \cdot C. \quad (10.11)$$

A diâada AB é um exemplo de um *operador vetor linear*, isto é, representa uma operação que pode ser efetuada sobre um vetor C qualquer dando origem a um vetor $(AB) \cdot C$, que é função linear de C .

Um operador vetorial linear também é chamado *tensor*¹. Os tensores são representados por letras maiúsculas em negrito e sem serifas, A , B , C etc. Pode-se, por exemplo, considerar que T seja o tensor representado pela diâada AB :

$$\mathbf{T} = AB. \quad (10.12)$$

O significado do tensor T é especificado pela definição,²

$$\mathbf{T} \cdot C = A(B \cdot C), \quad (10.13)$$

que fornece o resultado da aplicação de T a um vetor C . Podem-se formar operadores vetoriais mais gerais, tomando-se a soma de diâadas. A soma de duas diâadas, ou tensores S e T , é definida como se segue:

$$(S + T) \cdot C = S \cdot C + T \cdot C. \quad (10.14)$$

Note que todas as definições de operações algébricas sobre tensores, como a definição acima de $(S + T)$, são formuladas em termos da aplicação dos tensores em um vetor arbitrário C . A soma de uma ou mais diâadas é chamada *diádica*. De acordo com a definição (10.14), a diâdica $(AB + DE)$ operando sobre C resulta no vetor

$$(AB + DE) \cdot C = A(B \cdot C) + D(E \cdot C). \quad (10.15)$$

Pode-se demonstrar facilmente que a soma de dois operadores lineares é um operador linear; portanto, as diâdicas são também operadores vetoriais lineares, tendo-se, então, para uma diâdica ou tensor T ,

$$T \cdot (cC) = c(T \cdot C), \quad (10.16)$$

$$T \cdot (C + D) = T \cdot C + T \cdot D. \quad (10.17)$$

As relações de linearidade (10.16) e (10.17), juntas com a definição (10.14), garantem que o produto de diâdas, soma de tensores, e produto interno de tensores por vetores satisfazem todas as regras algébricas usuais para soma e produtos. Define-se também o produto interno de uma diâda por um vetor à sua esquerda da seguinte maneira,

$$C \cdot (AB) = (C \cdot A)B, \quad (10.18)$$

e, de maneira correspondente, para a soma de diâdas. Note que o produto interno de uma diâda por um vetor não é comutativo;

$$T \cdot C = C \cdot T \quad (10.19)$$

em geral não é válida. Define-se, de maneira óbvia, o produto cT de um tensor por um escalar, com as propriedades algébricas esperadas (veja o Probl. 1).

¹ Mais precisamente, pode-se chamar operador vetorial de tensor de segunda ordem para distinguir os tensores de terceira ordem ou de ordens mais elevadas, obtidas como combinações lineares de tríadas ABC etc. Neste livro, só se dá atenção a tensores de segunda ordem, referidos simplesmente como tensores.

² O resultado da aplicação de um tensor T em um vetor C é freqüentemente representado por TC sem o ponto, mas neste livro usa-se o ponto.

Um tensor muito simples é dado pela diádica.

$$\mathbf{1} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}, \quad (10.20)$$

onde \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} formam um conjunto de vetores unitários perpendiculares ao longo dos eixos x , y e z . Usando-se as definições (10.14) e (10.8), calcula-se o seguinte produto:

$$\mathbf{1} \cdot A = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z = A. \quad (10.21)$$

O tensor $\mathbf{1}$ é chamado *tensor unidade*, podendo ser definido como o operador que, agindo sobre um vetor qualquer, tem como resultado o próprio vetor. Evidentemente $\mathbf{1}$ é um dos casos especiais para o qual

$$\mathbf{1} \cdot A = A \cdot \mathbf{1}. \quad (10.22)$$

Sendo c um escalar qualquer, o produto $c\mathbf{1}$ é chamado *tensor constante*, e tem a propriedade

$$(c\mathbf{1}) \cdot A = A \cdot (c\mathbf{1}) = cA. \quad (10.23)$$

Usando-se as definições acima, escreve-se a Eq. (10.7) na forma

$$L = \mathbf{I} \cdot \omega, \quad (10.24)$$

onde \mathbf{I} é o *tensor de inércia* do corpo rígido, definido por

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^N (m_k r_k^2 \mathbf{1} - m_k r_k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k). \quad (10.25)$$

O tensor de inércia \mathbf{I} é o análogo, para rotações gerais, ao momento de inércia para rotações em torno de um eixo. Note que L e ω , em geral, não são paralelos. Tensor de inércia será estudado com maiores detalhes depois de desenvolvidas as propriedades de tensores.

Escrevendo-se todos os vetores em termos de seus componentes

$$\mathbf{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}, \quad (10.26)$$

torna-se claro, então, através de multiplicação de produtos de diádicas e agrupando-se os termos convenientemente, que qualquer diádica pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{xx} \hat{x}\hat{x} + T_{xy} \hat{x}\hat{y} + T_{xz} \hat{x}\hat{z} \\ &\quad + T_{yx} \hat{y}\hat{x} + T_{yy} \hat{y}\hat{y} + T_{yz} \hat{y}\hat{z} \\ &\quad + T_{zx} \hat{z}\hat{x} + T_{zy} \hat{z}\hat{y} + T_{zz} \hat{z}\hat{z}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Da mesma forma que um vetor A pode ser representado por seus três componentes (A_x , A_y , A_z), uma diádica pode ser especificada através de nove componentes T_{xx} , ..., T_{zz} . Estes componentes podem ser escritos convenientemente em forma de arranjo quadrado ou de matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \quad (10.28)$$

Como exemplo, o leitor pode verificar que os componentes do tensor de inércia (10.25) são

$$I_{xx} = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_{xy} = - \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \quad \text{etc.} \quad (10.29)$$

Para simplificar a representação escrita dos componentes de um tensor, será mais conveniente identificar os eixos coordenados por x_1 , x_2 , x_3 no lugar de usar x , y e z :

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3. \quad (10.30)$$

Podem-se escrever os vetores unitários \hat{e}_i correspondentes:

$$\hat{x} = \hat{e}_1, \quad \hat{y} = \hat{e}_2, \quad \hat{z} = \hat{e}_3. \quad (10.31)$$

As Eqs. (10.26) e (10.27), então, serão escritas

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 C_i \hat{e}_i, \quad (10.32)$$

e

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j. \quad (10.33)$$

Outra vantagem desta notação é permitir generalizar a discussão de vetores e tensores no espaço, de um número qualquer de dimensões, trocando simplesmente o limite das somas.

Usando-se as definições de produto e de soma de diádicas, expressam-se as componentes do vetor $\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}$ em termos dos componentes de \mathbf{T} e \mathbf{C} :

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C})_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} C_j, \quad (10.34)$$

como o leitor pode verificar. Similarmente,

$$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{T})_i = \sum_{j=1}^3 C_j T_{ji}. \quad (10.35)$$

De acordo com a Eq. (10.33), nota-se que,

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \hat{e}_j) = (\hat{e}_i \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{e}_j. \quad (10.36)$$

Pode-se omitir os parênteses, pois não importa a ordem em que as multiplicações são efetuadas.

Para mostrar que uma função vetorial linear qualquer pode ser representada por diádica, considere que $F(C)$ seja função linear de C . Tratar-se-á inicialmente do caso em que C é o vetor unitário \hat{e}_j , considerando, ainda, que T_{ij} sejam os componentes de $F(C)$, neste caso:

$$F(\hat{e}_j) = \sum_{i=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i. \quad (10.37)$$

Assim qualquer vetor C pode ser escrito como

$$C = \sum_{j=1}^3 C_j \hat{e}_j. \quad (10.38)$$

Usando as propriedades lineares de $F(C)$, tem-se, então,

$$\begin{aligned} F(C) &= \sum_{j=1}^3 F(C_j \hat{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 C_j F(\hat{e}_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 C_j T_{ij} \hat{e}_i. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Logo, podem-se expressar os componentes de $F(C)$ em termos dos números T_{ij} :

$$[F(C)]_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} C_j. \quad (10.40)$$

Definindo-se a diádica

$$T = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j, \quad (10.41)$$

verifica-se, a partir das Eqs. (10.40) e (10.34), que

$$F(C) = T \cdot C. \quad (10.42)$$

Portanto, os conceitos de diádica e operador vetorial linear ou tensor são idênticos e equivalentes ao conceito de função vetorial linear, considerando-se que cada função vetorial linear define um determinado tensor ou diádica, e reciprocamente.

Define-se o produto interno de dois tensores da seguinte maneira:

$$(T \cdot S) \cdot C = T \cdot (S \cdot C). \quad (10.43)$$

A aplicação do operador $T \cdot S$ em um vetor qualquer significa que se deve aplicar primeiramente S e depois T . Calcula-se, depois, o produto acima em termos dos componentes, usando a definição (10.43),

$$\begin{aligned} (T \cdot S) \cdot C &= T \cdot \sum_{j,k=1}^3 S_{jk} C_k \hat{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 T_{ij} S_{jk} C_k \hat{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{jk} \right) C_k \right] \hat{e}_i. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Comparando este resultado com a Eq. (10.34), verifica-se que

$$(T \cdot S)_{ik} = \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{jk}. \quad (10.45)$$

A Eq. (10.45) também pode ser obtida calculando-se simplesmente $T \cdot S$ de uma maneira formal, escrevendo o produto interno e o produto de diádicas e agrupando os termos:

$$\begin{aligned} T \cdot S &= \sum_{ijkl=1}^3 T_{ij} S_{kl} \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k \hat{e}_l \\ &= \sum_{ijl=1}^3 T_{ij} S_{jl} \hat{e}_i \hat{e}_l, \end{aligned} \quad (10.46)$$

e este mostra que a definição (10.43) concorda com as regras comuns da Álgebra. Se T e S forem escritos como matrizes de acordo com a Eq. (10.28), então a Eq. (10.45) é a regra matemática para multiplicação de matrizes. Pode-se mostrar de maneira similar que a definição (10.14) indica que a soma de tensores é obtida pela soma das matrizes componentes, de acordo com a regra:

$$(T + S)_{ij} = T_{ij} + S_{ij}. \quad (10.47)$$

As somas e os produtos de tensores obedecem a todas as regras usuais da Álgebra, menos o produto interno, que, em geral, não é comutativo:

$$T + S = S + T, \quad (10.48)$$

$$T \cdot (S + P) = T \cdot S + T \cdot P, \quad (10.49)$$

$$T \cdot (S \cdot P) = (T \cdot S) \cdot P, \quad (10.50)$$

$$1 \cdot T = T \cdot 1 = T, \quad (10.51)$$

e assim por diante, mas

$$T \cdot S \neq S \cdot T, \quad \text{em geral.} \quad (10.52)$$

É útil definir o *transposto* T^t de um tensor T da seguinte maneira:

$$T^t \cdot C = C \cdot T. \quad (10.53)$$

em termos dos componentes,

$$T^t_{ij} = T_{ji}. \quad (10.54)$$

O transposto é freqüentemente escrito como \tilde{T} , mas a notação T^t é preferível por motivos tipográficos. As seguintes propriedades podem ser facilmente demonstradas:

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S})' = \mathbf{T}' + \mathbf{S}', \quad (10.55)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})' = \mathbf{S}' \cdot \mathbf{T}', \quad (10.56)$$

$$(\mathbf{T}')' = \mathbf{T}. \quad (10.57)$$

Diz-se que um tensor é *simétrico* se

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}. \quad (10.58)$$

Por exemplo, o tensor de inércia, dado pela Eq. (10.25), é simétrico. Para um tensor simétrico,

$$T_{ji} = T_{ij}. \quad (10.59)$$

Um tensor simétrico pode ser especificado pelas seis componentes; os três restantes são então determinados pela Eq. (10.59).

Um tensor é *anti-simétrico* se

$$\mathbf{T}' = -\mathbf{T}. \quad (10.60)$$

Os componentes de um tensor anti-simétrico satisfazem a equação

$$T_{ji} = -T_{ij}. \quad (10.61)$$

Evidentemente, todos os três componentes diagonais T_{ii} são iguais a zero, e quando se conhecem três componentes fora da diagonal, os três restantes serão determinados pela Eq. (10.61). Um tensor anti-simétrico só tem três componentes independentes (no espaço tridimensional). Um exemplo é o operador linear, definido por:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C}, \quad (10.62)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor fixo. Comparando a Eq. (10.62) com a Eq. (7.20), verifica-se que o operador \mathbf{T} pode ser interpretado como o gerador da velocidade de qualquer vetor \mathbf{C} , girando em velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Comparando a Eq. (10.62) com a Eq. (10.34), verifica-se que os componentes de \mathbf{T} são:

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{33} = 0, \\ T_{21} &= -T_{12} = \omega_3, \\ T_{32} &= -T_{23} = \omega_1, \\ T_{13} &= -T_{31} = \omega_2. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Tanto um tensor anti-simétrico, como um vetor, têm três componentes independentes, podendo-se, então, associar a cada tensor anti-simétrico \mathbf{T} um vetor $\boldsymbol{\omega}$ (somente no espaço tridimensional!) cujos componentes se relacionam aos componentes de \mathbf{T} através da Eq. (10.63). A operação $\mathbf{T} \cdot$ será então equivalente a $\boldsymbol{\omega} \times$, de acordo com a Eq. (10.62).

Dado um tensor \mathbf{T} , define-se um tensor simétrico e um anti-simétrico por

$$\mathbf{T}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}'), \quad (10.64)$$

$$\mathbf{T}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}'), \quad (10.65)$$

tal que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_a. \quad (10.66)$$

Verificou-se, no parágrafo anterior, que um tensor pode ser representado geometricamente por um certo vetor $\boldsymbol{\omega}$. Na Seç. 10.4, aprender-se-á a representar um tensor simétrico. Como os tensores simétricos e anti-simétricos têm propriedades geométricas diferentes, os encontrados em Física ou são simétricos ou anti-simétricos, mas nunca há uma combinação dos dois. No espaço tridimensional, pode-se evitar a introdução de um tensor anti-simétrico usando-se o vetor associado. Portanto, não é coincidência o fato de os dois principais exemplos de tensores dados neste capítulo — tensor de inércia e tensor de tensão — serem simétricos.

10.3 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Verificou-se, na seção anterior, que o tensor \mathbf{T} pode ser definido geometricamente como um operador vetorial linear através de especificação do resultado da aplicação de \mathbf{T} em qualquer vetor \mathbf{C} . Alternativamente, o tensor pode ser especificado algebraicamente através dos seus componentes T_{ij} . Existe uma discrepância entre as duas definições de tensor, no sentido de a definição algébrica parecer depender da escolha de um determinado sistema de coordenadas. Observou-se, na Seç. 3.1, uma discrepância similar no caso de vetores, mas agora ela será removida, pois se verá como se pode transformar os componentes de vetores e tensores quando há variação no sistema de coordenadas, restringindo-se a discussão a coordenadas retangulares.

Considere dois sistemas de coordenadas, x_1, x_2, x_3 e x'_1, x'_2, x'_3 , tendo a mesma origem. As coordenadas de um ponto, nos dois sistemas, estão relacionadas pelas Eqs. (7.13):

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad (10.67)$$

onde

$$a_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad (10.68)$$

é o co-seno do ângulo entre os eixos x'_i e x'_j . Da mesma forma,

$$x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x'_i. \quad (10.69)$$

As relações entre os componentes no sistema com linha e sem linha de um vetor qualquer

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 C'_i \hat{e}'_i = \sum_{j=1}^3 C_j \hat{e}_j \quad (10.70)$$

podem ser obtidas de maneira similar, tomando-se o produto interno de \hat{e}'_i ou \hat{e}_j pela Eq. (10.70):

$$C'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} C_j, \quad (10.71)$$

$$C_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} C'_i. \quad (10.72)$$

Assim, define-se algebricamente um vetor como um conjunto de três componentes (C_1, C_2, C_3) que se transformam como as coordenadas (x_1, x_2, x_3) quando o sistema varia. Com referência a todos os sistemas de coordenadas, esta definição evita o tratamento preferencial de qualquer sistema de coordenadas particular. Da mesma forma, os componentes com linha e sem linha de um tensor

$$\mathbf{T} = \sum_{i,k=1}^3 T'_{ik} \hat{e}'_i \hat{e}'_k = \sum_{j,l=1}^3 T_{jl} \hat{e}_j \hat{e}_l \quad (10.73)$$

relacionam-se por [veja Eq. (10.36)]

$$T'_{ik} = \hat{e}'_i \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{e}'_k = \sum_{j,l=1}^3 a_{ij} a_{kl} T_{jl}, \quad (10.74)$$

$$T_{jl} = \hat{e}_j \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{e}_l = \sum_{i,k=1}^3 a_{ij} a_{kl} T'_{ik}. \quad (10.75)$$

Um tensor pode ser definido algebricamente como um conjunto de nove componentes (T_{jl}) que se transformam de acordo com a regra dada pelas Eqs. (10.74) e (10.75). Note a distinção existente entre tensor e matriz. O conceito de matriz é puramente algébrico; matrizes são arranjos de números que podem ser somados e multiplicados de acordo com as regras (10.45) e (10.47). O conceito de tensor é geométrico; tensores podem ser representados num determinado sistema de coordenadas por uma matriz, mas esta deverá transformar-se de acordo com uma regra definida quando há variação no sistema.

Os coeficientes a_{ij} , definidos pela Eq. (10.68), são os componentes dos vetores unitários \hat{e}'_i no sistema sem linha e, reciprocamente:

$$\hat{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \hat{e}_j, \quad (10.76)$$

e

$$\hat{e}_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \hat{e}'_i. \quad (10.77)$$

Como \hat{e}'_1, \hat{e}'_2 e \hat{e}'_3 constituem um conjunto de vetores unitários perpendiculares, verifica-se que os números a_{ij} devem satisfazer as equações:

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k = \sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}, \quad (10.78)$$

onde δ_{ik} é a notação resumida para

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k, \\ 1 & \text{se } i = k. \end{cases} \quad (10.79)$$

Existem seis relações (10.78) entre os nove coeficientes a_{ik} . Assim, se três das constantes a_{ij} forem conhecidas, as demais poderão ser determinadas a partir das Eqs. (10.78). Torna-se claro que é preciso conhecer três constantes independentes para localizar os eixos com linha em relação aos eixos sem linha (ou vice-versa). Como o eixo x'_1 pode apontar para qualquer direção, serão necessárias duas coordenadas para localizá-lo. Depois de determinado o eixo x'_1 , a posição do eixo x'_2 , que pode ter qualquer direção em um plano perpendicular a x'_1 , poderá ser especificada por uma única coordenada. Então, a posição do eixo x'_3 estará determinada (exceto pelo sinal), podendo-se escrever relações adicionais entre os a_{ij} usando relações tais como

$$\hat{e}_j \cdot \hat{e}_l = \delta_{jl}, \quad \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2 = \pm \hat{e}'_3, \quad \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \pm 1, \quad \text{etc.} \quad (10.80)$$

Como pelo menos três dos a_{ij} devem ser independentes, torna-se claro que as relações obtidas a partir das Eqs. (10.80) não são independentes, podendo ser obtidas algebricamente a partir das Eqs. (10.78). Uma relação interessante é fornecida a partir de

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1, \quad (10.81)$$

onde o resultado é igual a +1, se a orientação dos sistemas com linha e sem linha for a mesma, de acordo com a regra da mão direita, e será -1 se a orientação for contrária. Assim, o determinante a_{ij} será igual a +1 ou -1 caso a orientação do sistema de coordenadas seja ou não modificada.

Em sistemas orientados de acordo com a mão esquerda, o produto vetorial é definido usando-se a mão esquerda no lugar da mão direita. [Na Eq. (10.81), calcula-se o produto triplo, no primeiro membro, no sistema com linha.] A definição algébrica será a mesma para ambos os casos:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1). \quad (10.82)$$

Esta definição significa que o produto vetorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ de dois vetores ordinários não é um vetor comum, pois a sua direção se inverte quando se troca a orientação do sistema de coordenadas. Um vetor comum cuja direção seja independente do sistema de coordenadas chama-se *vetor polar*. Um vetor cujo sentido depende da orientação do sistema de coordenadas chama-se *vetor axial* ou *pseudovetor*. O vetor velocidade angular ω é um vetor axial, da mesma forma que outro vetor qualquer cujo sentido é definido por uma "regra da mão direita". O vetor associado a um tensor anti-simétrico (comum) é um vetor axial. O produto vetorial $\omega \times C$ de um vetor axial por um vetor polar resulta num vetor polar. Só se faz distinção entre vetores axiais e polares quando se consideram ambos os sistemas de coordenadas, orientados conforme a regra da mão direita e da mão esquerda. Nas aplicações apresentadas neste livro, consideram-se apenas as rotações de sistemas de coordenadas, mas como tais rotações não modificam a orientação do sistema, não se dá atenção a esta distinção.

A transformação definida pelas Eqs. (10.67), (10.71) e (10.74), onde os coeficientes satisfazem a Eq. (10.78), chama-se *ortogonal*. Como o próprio nome indica, uma transformação ortogonal permite transformar-se um conjunto de vetores unitários perpendiculares em outro.

O segundo membro da Eq. (10.71) é formalmente similar ao segundo membro da Eq. (10.34). Este resultado sugere uma interpretação alternativa das Eqs. (10.71). Define-se um tensor \mathbf{A} com componentes

$$A_{ij} = a_{ij}, \quad (10.83)$$

e considera-se o vetor

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{C}. \quad (10.84)$$

Os componentes C'_j de \mathbf{C}' são dados pela Eq. (10.71). Similarmente, de acordo com a Eq. (10.72),

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}'. \quad (10.85)$$

Assim, as Eqs. (10.71) e (10.72) podem ser interpretadas alternativamente como o resultado da atuação dos tensores \mathbf{A} e \mathbf{A}' sobre os vetores \mathbf{C} e \mathbf{C}' , respectivamente. Na interpretação original, C_j e C'_j são os componentes do mesmo vetor \mathbf{C} em dois sistemas de coordenadas diferentes. Na interpretação alternativa, C_j , C'_j são os componentes de dois vetores diferentes \mathbf{C} e \mathbf{C}' no mesmo sistema de coordenadas. Aqui, o interesse inicialmente na primeira interpretação, para a qual estas equações representam uma transformação de coordenadas. No entanto, a última interpretação muitas vezes é útil quando se trata de derivação de determinadas propriedades algébricas das Eqs. (10.71) e (10.72), que são certamente independentes da maneira escolhida para interpretá-las. No caso em que os eixos com linha estão fixados em um corpo rígido com movimento de rotação, qualquer uma das interpretações será útil. Se os eixos com linha coincidirem inicialmente com os sem linha, então em qualquer instante posterior poder-se-á interpretar as Eqs. (10.71) e (10.72) como expressões da transformação de um sistema de coordenadas em outro. Alternativamente, pode-se interpretar \mathbf{A} como o tensor que representa a operação de rotação do corpo a partir de sua posição inicial para a atual, isto é, um vetor fixo no corpo e coincidindo inicialmente com \mathbf{C} girará de forma a coincidir com $\mathbf{C}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. Usando-se as Eqs. (10.84) e (10.85) e a definição (10.43) do produto de dois tensores, deduz-se que

$$\mathbf{A}' \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}. \quad (10.86)$$

Logo, de acordo com a Eq. (10.22),

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (10.87)$$

e similarmente

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{1}. \quad (10.88)$$

Um tensor que possui estas propriedades é *ortogonal*. A Eq. (10.87), é claro, equivale às Eqs. (10.78) para os componentes a_{ij} . Na segunda interpretação, as Eqs. (10.74) e (10.75) podem ser escritas como

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}', \quad (10.89)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{A}. \quad (10.90)$$

O tensor ortogonal é o único exemplo de um tensor com significado geométrico, o qual não é nem simétrico nem anti-simétrico; e cujas propriedades de ortogonalidade são definidas pela Eq. (10.87).

Como as diversas operações vetoriais foram definidas sem referência a um sistema de coordenadas, torna-se claro que todas as regras algébricas para calcular somas, produtos, transpostos etc. de vetores e tensores não serão afetadas por uma transformação ortogonal de coordenadas. Assim, por exemplo,

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})'_j = B'_j + C'_j, \quad (10.91)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C})'_j = \sum_{i=1}^3 T'_{ji} C'_i, \quad (10.92)$$

$$(\mathbf{T}')_{ij} = T'_{ji}. \quad (10.93)$$

Verificam-se também diretamente as equações acima e outras similares, usando-se as equações de transformação e as regras de Álgebra Vetorial e Tensorial e será mais fácil se aproveitar-se a segunda interpretação da transformação das equações. Por exemplo, pode-se provar a Eq. (10.93) notando que

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}')' &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{A}' && [\text{de acordo com a Eq. (10.89)}] \\ &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{T})' && [\text{de acordo com as Eqs. (10.56) e (10.57)}] \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{A}']' && [\text{de acordo com as Eqs. (10.56) e (10.57)}] \\ &= (\mathbf{T}')', \text{ Q.E.D.} && [\text{de acordo com a Eq. (10.89)}]. \end{aligned}$$

Qualquer propriedade ou relação entre vetores e tensores expressada na mesma forma algébrica, em todos os sistemas de coordenadas, tem um significado geométrico independente do sistema de coordenadas e é chamada propriedade ou relação *invariante*.

Dado um tensor \mathbf{T} , pode-se definir uma grandeza escalar chamada *traço* de \mathbf{T} como:

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^3 T_{ii}. \quad (10.94)$$

Como esta definição é obtida em termos dos componentes, deve-se mostrar que o traço de \mathbf{T} é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{T}) &= \sum_{i=1}^3 T_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j,l=1}^3 a_{ji} a_{li} T'_{jl} \quad [\text{de acordo com a Eq. (10.75)}] \\
&= \sum_{j,l=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 a_{ji} a_{li} \right] T'_{jl} \quad [\text{rearranjando os termos}] \\
&= \sum_{j,l=1}^3 T'_{jl} \delta_{jl} \quad [\text{de acordo com a Eq. (10.78)}] \\
&= \sum_{j=1}^3 T'_{jj}, \text{ Q.E.D.} \quad [\text{de acordo com a Eq. (10.79)}].
\end{aligned}$$

Outra grandeza escalar invariante, associada a um tensor, é o determinante

$$\det(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}, \quad (10.95)$$

como pode ser verificado de maneira similar por cálculo direto.

Estudar-se-á, agora, o resultado obtido quando se efetuam duas transformações de coordenadas sucessivas. As coordenadas com linha são definidas pela Eq. (10.67), em termos das coordenadas sem linha. Considere que coordenadas com duas linhas sejam definidas por

$$x''_k = \sum_{i=1}^3 a'_{ki} x'_i. \quad (10.96)$$

Substituindo x'_i , dado pela Eq. (10.67), em termos das coordenadas sem linha:

$$\begin{aligned}
x''_k &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a'_{ki} a_{ij} x_j \\
&= \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 a'_{ki} a_{ij} \right] x_j \\
&= \sum_{j=1}^3 a''_{kj} x_j,
\end{aligned} \quad (10.97)$$

onde os coeficientes da transformação $x \rightarrow x''$ são dados por

$$a''_{kj} = \sum_{i=1}^3 a'_{ki} a_{ij}. \quad (10.98)$$

Logo a matriz dos coeficientes a''_{kj} é obtida pela multiplicação das matrizes a'_{ki} e a_{ij} , de acordo com a regra para multiplicação de matrizes. Interpretando-se os coeficientes

da transformação como os componentes dos tensores \mathbf{A} , \mathbf{A}' e \mathbf{A}'' , verifica-se, então, com auxílio das Eqs. (10.98) e da definição (10.45) do produto de dois tensores, que

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}. \quad (10.99)$$

Este resultado também pode ser obtido aplicando-se duas vezes a Eq. (10.84) e obtendo-se, assim, uma maneira alternativa de derivar a Eq. (10.98).

10.4 DIAGONALIZAÇÃO DE UM TENSOR SIMÉTRICO

A matriz de um tensor constante, definido pela Eq. (10.23), em qualquer sistema de coordenadas³ é

$$c\mathbf{1} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \quad (10.100)$$

Um tensor não-constante, num sistema de coordenadas particular, pode ter a seguinte matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}. \quad (10.101)$$

dizendo-se que o tensor \mathbf{T} está em *forma diagonal*. Não se chama \mathbf{T} de tensor diagonal, porque a propriedade (10.101) só se aplica em sistema de coordenadas particular; após mudança de coordenadas [Eq. (10.74)], \mathbf{T} , em geral, não terá mais forma diagonal. Se \mathbf{T} estiver em forma diagonal, então o efeito de sua aplicação sobre um vetor é dado simplesmente por

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C})_i = T_i C_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.102)$$

A importância da forma diagonal reside no seguinte teorema fundamental:

Qualquer tensor simétrico pode ser apresentado em forma diagonal desde que sofra uma transformação ortogonal. Os elementos diagonais serão, então, definidos univocamente, a não ser em sua ordem; os eixos correspondentes também são univocamente definidos exceto pelas degenerescências. (10.103)

Antes de demonstrar este importante teorema, é preciso entender o seu significado. O teorema estabelece que, dado um tensor simétrico \mathbf{T} qualquer, é sempre possível escolher os eixos coordenados de forma que \mathbf{T} seja representado por uma matriz diagonal. Além do mais, essencialmente, isto só pode ser feito de uma única maneira: existe somente uma forma diagonal (10.101) para um dado tensor \mathbf{T} , exceto na ordem

³ Veja o Probl. 10 no final deste capítulo.

em que aparecem os elementos T_1 , T_2 , T_3 , estando cada elemento associado a um único eixo no espaço, exceto pela degenerescência, isto é, exceto quando dois ou três dos elementos da diagonal são iguais. Os eixos \hat{e}_1 , \hat{e}_2 e \hat{e}_3 do sistema de coordenadas em que o tensor tem forma diagonal chamam-se os seus *eixos principais*. Os elementos diagonais T_1 , T_2 e T_3 são chamados *autovalores* ou *valores característicos* de \mathbf{T} . Quando se escreve um elemento do tensor com um único índice, significa que ele é um autovalor.

Qualquer vetor \mathbf{C} paralelo a um eixo principal chama-se um *autovetor* de \mathbf{T} . Um autovetor, de acordo com a Eq. (10.102), tem uma propriedade: a operação de um tensor \mathbf{T} reduz-se à multiplicação pelo autovalor correspondente:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = T_i \mathbf{C}, \quad (10.104)$$

onde T_i é o autovalor associado ao eixo principal \hat{e}_i paralelo a \mathbf{C} .

O Teorema (10.103) permite visualizar um tensor \mathbf{T} como um conjunto de três números relacionados a três direções perpendiculares definidas no espaço. Considerando-se que \mathbf{T} seja aplicado ao conjunto de vetores \mathbf{C} , então a fórmula (10.102) mostra que o efeito será um estiramento ou uma compressão ao longo de cada eixo principal, acompanhados de uma reflexão se T_i for negativo. Na Seç. 10.2, verificou-se que um tensor simétrico pode ser especificado, desde que se conheçam seis componentes T_{ij} num sistema de coordenadas escolhido arbitrariamente. Pode-se verificar, agora, que se pode, alternativamente, especificar \mathbf{T} através de especificação dos eixos principais (para isto serão necessários três números) e dos três autovalores associados.

Quando dois ou três dos autovalores são iguais, diz-se que os autovalores são *duplicamente* ou *triplamente degenerados*. Se os autovalores forem triplicamente degenerados, é evidente que o tensor é constante [Eq. (10.100)] e será diagonal em qualquer sistema de coordenadas. Os eixos principais não serão mais univocamente determinados e qualquer eixo será principal. Todo vetor é um autovetor de um tensor constante. Se apenas dois autovalores forem iguais, por exemplo, $T_1 = T_2$, então considerando-se a rotação dos eixos coordenados no plano $\hat{e}_1\hat{e}_2$, verifica-se que o tensor permanecerá na forma diagonal; os quatro elementos que se referem a este plano se comportam como um tensor constante neste plano. Do mesmo modo, os eixos principais não são univocamente determinados, pois dois deles podem estar em qualquer lugar do plano $\hat{e}_1\hat{e}_2$. O terceiro eixo \hat{e}_3 associado ao autovalor não degenerado T_3 , no entanto, será determinado univocamente. Prova-se que cada eixo no plano $\hat{e}_1\hat{e}_2$ é um eixo principal, considerando-se o efeito de \mathbf{T} sobre um vetor qualquer

$$\mathbf{C} = C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 \quad (10.105)$$

neste plano. Levando em conta a Eq. (10.102), se $T_1 = T_2$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} &= T_1 C_1 \hat{e}_1 + T_2 C_2 \hat{e}_2 \\ &= T_1 \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (10.106)$$

de tal forma que \mathbf{C} é um autovetor de \mathbf{T} . Cada vetor no plano $\hat{e}_1\hat{e}_2$ é um autovetor de \mathbf{T} com autovalor T_1 . Pode-se dizer que existe um plano principal associado com autovalores duplamente degenerados.

Provar-se-á, agora, o Teorema (10.103) demonstrando como os eixos principais podem ser determinados. Considere um tensor simétrico \mathbf{T} , dado em termos dos seus componentes T_{ij} em qualquer sistema de coordenadas, que será chamado sistema de coordenadas inicial. Para determinar o eixo principal, determina-se um autovetor de \mathbf{T} . Considere que \mathbf{C} seja um autovetor e T' o autovalor correspondente. Então, reescreve-se a Eq. (10.104) na seguinte forma

$$(\mathbf{T} - T' \mathbf{I}) \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (10.107)$$

Escrevendo-se esta equação em termos dos componentes, obtém-se

$$\begin{aligned} (T_{11} - T') C_1 + T_{12} C_2 + T_{13} C_3 &= 0, \\ T_{21} C_1 + (T_{22} - T') C_2 + T_{23} C_3 &= 0, \\ T_{31} C_1 + T_{32} C_2 + (T_{33} - T') C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10.108)$$

Estas equações para um vetor \mathbf{C} desconhecido admitem certamente a solução trivial $C = 0$. Escrevendo-se a solução para C_i em termos de determinantes, verifica-se que $C = 0$ será a única solução a não ser que o determinante

$$\begin{vmatrix} T_{11} - T' & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - T' & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - T' \end{vmatrix} = 0 \quad (10.109)$$

e, neste caso, a solução para C_i é indeterminada. Neste caso, pode-se mostrar a partir da Teoria das Equações Lineares⁴ que as Eqs. (10.108) têm também soluções não triviais para C_i . Torna-se claro que as Eqs. (10.108) não podem determinar univocamente os números C_1 , C_2 e C_3 , mas somente razões $C_1 : C_2 : C_3$ entre eles. Isto também se torna claro da Eq. (10.107), a partir da qual se iniciou a análise. Geometricamente, somente a direção de \mathbf{C} é determinada, não sendo possível encontrar o seu módulo (nem o seu sentido). A Eq. (10.109), chamada *equação secular*, representa uma equação cúbica que deve ser resolvida para obterem-se os autovalores T' . Em geral, haverá três raízes, T'_1 , T'_2 e T'_3 . Conhecendo-se qualquer uma delas T'_j , pode-se, então, substituí-la nas Eqs. (10.108) e determinar as razões $C_1 : C_2 : C_3$. Qualquer vetor cujos componentes satisfazem a razão $C_1 : C_2 : C_3$ é um autovetor de \mathbf{T} correspondendo ao autovalor T'_j . Para cada autovalor T'_j , considera-se, então, um vetor unitário \hat{e}'_j ao longo da direção do autovetor correspondente. Os eixos \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 e \hat{e}'_3 serão os eixos principais de \mathbf{T} . Quando as Eqs. (10.108) são resolvidas para os componentes de \hat{e}'_j para um dado T'_j , obtém-se três números a_{ji} ($= C_i$ para $T' = T'_j$), os quais são os componentes de \hat{e}'_j ao longo dos eixos \hat{e}_i do sistema de coordenadas inicial:

$$\hat{e}'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ji} \hat{e}_i. \quad (10.110)$$

⁴ Consulte um livro qualquer de Álgebra para cursos universitários, como por exemplo, Knebelman e Thomas, *Principles of college algebra*. New York, Prentice-Hall, Inc., 1942. (cap. IX, Teorema 10.)

Esta é exatamente a Eq. (10.76); logo, os números a_{ji} são os coeficientes da transformação ortogonal do sistema de coordenadas inicial para os eixos principais. Diz-se que a transformação com os coeficientes a_{ji} *diagonalizam* \mathbf{T} .

Como o leitor deve ter notado, para haver certeza sobre a possibilidade de aplicar-se o desenvolvimento acima, será preciso demonstrar três lemas. Primeiro, que as raízes T' da equação secular (10.109) são reais; caso contrário, não é possível obter soluções reais para as Eqs. (10.108) para C_1 , C_2 e C_3 . Segundo, demonstrar que o vetor \hat{e}'_j , obtido a partir das Eqs. (10.108) para os diferentes autovalores T'_j , são perpendiculares; caso contrário não se obteria um conjunto de vetores unitários perpendiculares. Terceiro, demonstrar que, no caso degenerado, determinam-se dois (ou três) vetores unitários perpendiculares \hat{e}'_j que correspondem a autovalores duplamente (ou triplicamente) degenerados.

Lema 1. *As raízes da equação secular (10.109) para um tensor simétrico são reais.* (10.111)

A Eq. (10.109) é obtida a partir da equação de autovalores (10.104):

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = T' \mathbf{C}, \quad (10.112)$$

Para demonstrar o lema, permite-se que T' seja complexo. Neste caso, deve-se permitir que os componentes C_i do vetor \mathbf{C} também sejam complexos. Um vetor \mathbf{C} com componentes complexos não tem significado geométrico no sentido usual, mas pode-se considerar todas as definições algébricas das diversas operações com vetores como aplicáveis também a vetores com componentes complexos. [Existe uma exceção para estas asserções. O módulo de um vetor complexo não pode ser definido pela Eq. 3.13, mas em lugar dela deve-se adotar a seguinte definição:

$$|A| = (A^* \cdot A)^{1/2}. \quad (10.113)$$

que não será necessária aqui.] Representa-se por \mathbf{C}^* o vetor cujos componentes são os complexos conjugados dos componentes de \mathbf{C} e multiplica-se a Eq. (10.112) por \mathbf{C}^* :

$$\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = T' (\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C}). \quad (10.114)$$

Tomando-se o complexo conjugado desta equação, tem-se

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^* = T'^* (\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{C}), \quad (10.115)$$

desde que \mathbf{T} seja real e tendo em vista a Eq. (3.18). Então, de acordo com a definição (10.53),

$$\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{C}^*. \quad (10.116)$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} \\ &= (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{C}^*) \cdot \mathbf{C} \quad [\text{da Eq. (10.53)}] \\ &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{C}^* \quad [\text{da Eq. (3.18)}]. \end{aligned} \quad (10.117)$$

Para um tensor simétrico, $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$, assim os primeiros membros das Eqs. (10.114) e (10.115) são iguais, e

$$T' = T'^*, \quad (10.118)$$

de tal forma que T' será real.

Lema 2. *Os autovetores de um tensor simétrico correspondentes a autovalores diferentes são perpendiculares.* (10.119)

Para demonstrar este lema, suponha que T'_1 e T'_2 sejam dois autovalores de \mathbf{T} correspondentes aos autovetores C_1 e C_2 :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}_1 = T'_1 \mathbf{C}_1, \quad (10.120)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}_2 = T'_2 \mathbf{C}_2. \quad (10.121)$$

Multiplicando a Eq. (10.120) por C_2 e a Eq. (10.121) por C_1 :

$$C_2 \cdot \mathbf{T} \cdot C_1 = T'_1 (C_2 \cdot C_1), \quad (10.122)$$

$$C_1 \cdot \mathbf{T} \cdot C_2 = T'_2 (C_2 \cdot C_1). \quad (10.123)$$

Como \mathbf{T} é simétrico, os primeiros termos serão iguais [veja a demonstração (10.117) acima], obtendo-se

$$(T'_1 - T'_2)(C_2 \cdot C_1) = 0. \quad (10.124)$$

Se os autovalores T'_1 e T'_2 forem diferentes, os autovetores C_2 e C_1 serão perpendiculares.

Lema 3. *No caso de degenerescência dupla ou tripla, as Eqs. (10.108) têm duas ou três soluções mutuamente perpendiculares para o vetor C .* (10.125)

Para demonstrar (10.125), suponha que $T'_1 = T'_2$. Substitui-se $T' = T'_1$ nas Eqs. (10.108), então, de acordo com o teorema referido na nota 4 da página 457, haverá pelo menos uma solução não trivial para C_1 , C_2 e C_3 . Suponha que \hat{e}'_1 seja um vetor unitário paralelo ao vetor (C_1, C_2, C_3) . Então,

$$\mathbf{T} \cdot \hat{e}'_1 = T'_1 \hat{e}'_1. \quad (10.126)$$

Em seguida, escolhe-se um par qualquer de vetores unitários perpendiculares \hat{e}''_2 , \hat{e}''_3 perpendiculares a \hat{e}'_1 , e usam-se as Eqs. (10.68) e (10.74) para transformar os componentes de \mathbf{T} para o sistema de coordenadas com duas linhas \hat{e}'_1 , \hat{e}''_2 e \hat{e}''_3 . Comparando-se as Eqs. (10.126) e (10.36), verifica-se que

$$T''_{11} = T'_1, \quad T''_{21} = 0, \quad T''_{31} = 0. \quad (10.127)$$

Como \mathbf{T} é simétrico, os seus componentes no sistema duas linhas devem, portanto, ser dados por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & T''_{22} & T''_{23} \\ 0 & T''_{23} & T''_{33} \end{pmatrix}. \quad (10.128)$$

Além disso, a equação secular

$$\begin{vmatrix} T'_1 - T' & 0 & 0 \\ 0 & T''_{22} - T' & T''_{23} \\ 0 & T''_{23} & T''_{33} - T' \end{vmatrix} = 0 \quad (10.129)$$

deve ter as mesmas raízes que a Eq. (10.109). Isto é verdadeiro, pois os primeiros membros de ambas as equações são determinantes do mesmo tensor ($\mathbf{T} - T' \mathbf{1}$), expressado nos sistemas de coordenadas sem linha e duas linhas e, como foi observado no final da Seq. 10.3, o determinante de um tensor tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas. Expandindo-se o determinante (10.129) em termos dos determinantes menores, em relação à primeira linha, obtém-se

$$(T'_1 - T') \begin{vmatrix} T''_{22} - T' & T''_{23} \\ T''_{23} & T''_{33} - T' \end{vmatrix} = 0. \quad (10.130)$$

Como T'_1 é uma raiz dupla ou tripla desta equação, deve existir uma raiz da equação

$$\begin{vmatrix} T''_{22} - T' & T''_{23} \\ T''_{23} & T''_{33} - T' \end{vmatrix} = 0. \quad (10.131)$$

Portanto, as equações

$$(T''_{22} - T'_1)C''_2 + T''_{23}C''_3 = 0, \quad (10.132)$$

$$T''_{23}C''_2 + (T''_{33} - T'_1)C''_3 = 0$$

têm uma solução não-trivial, que define um autovetor $(0, C''_2, C''_3)$ no plano $\hat{e}_2''\hat{e}_3''$ com autovalor T'_1 . Há, portanto, um segundo vetor unitário \hat{e}_2' , paralelo a $(0, C''_2, C''_3)$ e perpendicular a \hat{e}_1'' . Considerando-se terceiro vetor \hat{e}_3' perpendicular a \hat{e}_1', \hat{e}_2' , neste sistema de coordenadas de linha, tem-se

$$\begin{aligned} T'_{11} &= T'_1, & T'_{21} &= 0, & T'_{31} &= 0, \\ T'_{12} &= 0, & T'_{22} &= T'_1, & T'_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (10.133)$$

Logo, \mathbf{T} deve ter os componentes

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & T'_1 & 0 \\ 0 & 0 & T'_3 \end{pmatrix}, \quad (10.134)$$

e \hat{e}_1', \hat{e}_2' e \hat{e}_3' serão os eixos principais. Se T'_1 é uma raiz tripla da Eq. (10.109), será também uma raiz tripla da equação secular

$$\begin{vmatrix} T'_1 - T' & 0 & 0 \\ 0 & T'_1 - T' & 0 \\ 0 & 0 & T'_3 - T' \end{vmatrix} = (T'_1 - T')(T'_1 - T')(T'_3 - T') = 0. \quad (10.135)$$

Portanto, $T'_3 = T'_1$, tendo-se três autovetores perpendiculares correspondendo à raiz tripla $T'_1 = T'_2 = T'_3$.

Os três lemas acima completam a demonstração do Teorema fundamental (10.103).

A Álgebra usada nesta seção pode ser generalizada para espaços vetoriais de qualquer número de dimensões, com resultados análogos quanto à existência de eixos principais de um tensor simétrico.

No final da Seq. 10.3, notou-se que o traço e o determinante de um tensor \mathbf{T} tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas. Pode-se verificar, a partir da Eq. (10.101), que o traço é a soma dos autovalores de \mathbf{T} :

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = T_1 + T_2 + T_3, \quad (10.136)$$

e o determinante é o produto dos autovalores:

$$\det(\mathbf{T}) = T_1 T_2 T_3. \quad (10.137)$$

Pode-se formar uma terceira grandeza escalar invariante, associada a um tensor simétrico através da soma dos produtos de pares de autovalores:

$$M(\mathbf{T}) = T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1. \quad (10.138)$$

Calcula-se $M(\mathbf{T})$, em qualquer sistema de coordenadas, resolvendo a equação secular (10.109) para as três raízes, T_1, T_2 e T_3 , e usando a Eq. (10.138). Pode-se evitar a solução da Eq. (10.109) notando que a soma (10.138) deve ser o coeficiente de T' na Eq. (10.109), que é a soma dos determinantes menores da diagonal do determinante de \mathbf{T} :

$$M(\mathbf{T}) = \begin{vmatrix} T_{11} T_{12} \\ T_{21} T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} T_{23} \\ T_{32} T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} T_{31} \\ T_{13} T_{11} \end{vmatrix}. \quad (10.139)$$

Poder-se-ia também mostrar através de cálculo direto que $M(\mathbf{T})$, dado de acordo com a Eq. (10.139), tem o mesmo valor depois de uma transformação de coordenadas como a dada pela Eq. (10.74).

Para um tensor \mathbf{T} qualquer, o determinante de $(\mathbf{T} - T' \mathbf{1})$ deve ter o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas. Portanto, em particular, as raízes T' da Eq. (10.109) serão as mesmas em todos os sistemas, mesmo para um tensor \mathbf{T} que não é simétrico. Pode-se, ainda, chamar as raízes T' de autovalores de \mathbf{T} . Se \mathbf{T} não for simétrico, um dos valores será real e os outros dois, usualmente, serão um par complexo conjugado. Para os autovalores reais, pode-se determinar um autovetor, mas para os autovalores complexos, nem sempre os autovetores são determinados. (Isto é, a não ser que se admitam vetores com componentes complexos, que só têm significado algébrico. Mesmo assim, os autovetores nem sempre serão ortogonais.) De qualquer forma, as expressões dadas pelas Eqs. (10.136), (10.137), (10.138) e (10.139) serão ainda reais e independentes do sistema de coordenadas.

Como exemplo do procedimento para fazer a diagonalização, diagonalize o tensor

$$\mathbf{T} = AA + BD + DB,$$

que, obviamente, é simétrico. Considere que

$$A = 4ae_1,$$

$$B = 7ae_2 + ae_3,$$

$$D = ae_2 - ae_3.$$

O tensor \mathbf{T} será, então, representado neste sistema de coordenadas pela matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a equação secular (10.109) será

$$\begin{vmatrix} 16a^2 - T' & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 - T' & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 - T' \end{vmatrix} = (16a^2 - T') \times (T'^2 + 12a^2 T' - 64a^4) = 0.$$

As raízes (necessariamente reais) serão

$$T'_1 = 16a^2, \quad T'_2 = 16a^2, \quad T'_3 = -4a^2.$$

As Eqs. (10.108), para a raiz $T' = 16a^2$, duplamente degenerada, serão

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ -2a^2 C_2 - 6a^2 C_3 &= 0, \\ -6a^2 C_2 - 18a^2 C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nota-se, claramente, que C_1 é arbitrário e que as duas últimas equações serão satisfeitas se

$$C_2 = -3C_3.$$

Portanto, qualquer vetor da forma

$$\mathbf{C} = C_1 \hat{\mathbf{e}}_1 - 3C_3 \hat{\mathbf{e}}_2 + C_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

será um autovetor onde C_1 e C_3 são arbitrários. Assim, tem-se uma família de possíveis autovetores que dependem de dois parâmetros, a partir dos quais se pode selecionar como vetores $\hat{\mathbf{e}}'_1$ e $\hat{\mathbf{e}}'_2$, dois vetores unitários perpendiculares quaisquer. Escolhem-se os seguintes

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{e}}_1, \text{ (isto é, } C_1 = 1, C_3 = 0\text{)},$$

$$\hat{\mathbf{e}}'_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{\mathbf{e}}_2 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{\mathbf{e}}_3, \text{ (isto é, } C_1 = 0, C_3 = 1/\sqrt{10}\text{)}.$$

Poder-se-ia ter obtido $\hat{\mathbf{e}}'_1$ a partir da forma de \mathbf{T} . O leitor deve verificar que $\hat{\mathbf{e}}'_1$ e $\hat{\mathbf{e}}'_2$ e, na realidade, qualquer vetor no plano $\hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2$ satisfaz a Eq. (10.104) para $T_i = 16a^2$. Para $T' = -4a^2$, as Eqs. (10.108) tornam-se

$$20a^2 C_1 = 0,$$

$$18a^2 C_2 - 6a^2 C_3 = 0,$$

$$-6a^2 C_2 + 2a^2 C_3 = 0.$$

Neste caso, a família de soluções dependerá somente de um parâmetro

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 3C_2,$$

das quais uma é um vetor unitário (cujo sinal está indeterminado):

$$\hat{\mathbf{e}}'_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{3}{\sqrt{10}} \hat{\mathbf{e}}_3,$$

onde os sinais positivos foram escolhidos de forma que $\hat{\mathbf{e}}'_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_2$ e $\hat{\mathbf{e}}'_3$ formassem um sistema orientado pela mão direita. A orientação pode ser determinada por visualização dos três vetores ou por verificação de que $\hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot (\hat{\mathbf{e}}'_2 \times \hat{\mathbf{e}}'_3) = +1$. O vetor $\hat{\mathbf{e}}'_3$ deve ser perpendicular ao plano $\hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2$ de acordo com o Lema 1. Pode-se verificar que $\hat{\mathbf{e}}'_3$ é um autovetor de \mathbf{T} com autovalor $-4a^2$.

Com auxílio da Eq. (10.76), podem-se escrever os coeficientes da transformação para os eixos principais de \mathbf{T} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

O leitor deve certificar-se que estes coeficientes satisfazem as Eqs. (10.78); que os vetores $\hat{\mathbf{e}}'_j$ se transformam de maneira apropriada a partir das Eqs. (10.71) e (10.72), os quais neste caso são

$$\delta_{jk} = \sum_{i=1}^3 a_{ki} e'_{ji}, \quad e'_{ji} = \sum_{k=1}^3 a_{ki} \delta_{jk},$$

onde e'_{ji} é a i -ésima componente de $\hat{\mathbf{e}}'_j$ no sistema de coordenadas sem linha, e δ_{jk} é o k -ésimo componente de $\hat{\mathbf{e}}'_j$ no sistema de coordenadas linha; e também que \mathbf{T} se transforme, apropriadamente, de acordo com a Eq. (10.74), da forma original para a diagonal.

10.5 O TENSOR DE INÉRCIA

O tensor de inércia de um corpo rígido é dado pela Eq. (10.25). Para um corpo cuja densidade é $\rho(x, y, z)$, reescreve-se o tensor de inércia como

$$\mathbf{I}_o = \iiint \rho(r^2 \mathbf{1} - \mathbf{rr}) dV, \quad (10.140)$$

usando-se o índice “o” para lembrar que o tensor inércia foi calculado em relação a um sistema de eixos com origem em O . Entretanto, daqui para frente este índice será omitido a não ser que a discussão envolva mais do que uma origem. Os componentes da diagonal de I são exatamente os momentos de inércia [Eq. (5.80)] em relação aos três eixos:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint \rho(y^2 + z^2) dV, \\ I_{yy} &= \iiint \rho(z^2 + x^2) dV, \\ I_{zz} &= \iiint \rho(x^2 + y^2) dV. \end{aligned} \quad (10.141)$$

Os componentes fora da diagonal, chamados freqüentemente *produtos de inércia*, são

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\iiint \rho xy dV, \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\iiint \rho yz dV, \\ I_{zx} &= I_{xz} = -\iiint \rho zx dV. \end{aligned} \quad (10.142)$$

Como se pode usar a Eq. (10.74) para calcular os componentes do tensor de inércia em relação a qualquer outro sistema de eixos com origem comum O , verifica-se, a partir das Eqs. (10.74) e (10.141), que o momento de inércia em relação a qualquer eixo que passe por O , em direção determinada pelo vetor unitário \hat{n} , será

$$I_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot I \cdot \hat{n}. \quad (10.143)$$

Em geral, é mais fácil calcular os componentes do tensor de inércia, em relação a um sistema de eixos escolhido convenientemente, e, em seguida, usar a Eq. (10.143), do que calcular $I_{\hat{n}}$ diretamente, se o eixo \hat{n} não for de simetria do corpo. (Como exemplo, veja o Probl. 25.)

Pode-se obter um teorema análogo ao Teorema dos Eixos Paralelos, (5.81), enunciado para o momento de inércia, calculando-se o tensor de inércia I_o em relação a uma origem de coordenadas arbitrária O em termos do tensor de inércia I_G relativo ao centro de massa G . Considere que r e r' sejam os vetores posição de um ponto P qualquer de um corpo, em relação a O e a G , respectivamente, e considere que R seja a coordenada de G em relação a O (Fig. 5.12),

$$r = r' + R. \quad (10.144)$$

De acordo com a definição (10.140), então,

$$\begin{aligned} I_o &= \iiint \rho [(r' + R) \cdot (r' + R) \mathbf{1} - (r' + R)(r' + R)] dV \\ &= \iiint \rho [(r' \cdot r') \mathbf{1} - r' r'] dV + [(R \cdot R) \mathbf{1} - RR] \iiint \rho dV \\ &\quad + 2R [\mathbf{R} \cdot \iiint \rho r' dV] - [\iiint \rho r' dV] R - R \iiint \rho r' dV. \end{aligned} \quad (10.145)$$

Em vista da definição (5.53) de centro de massa, tem-se

$$\iiint \rho r' dV = \mathbf{0}. \quad (10.146)$$

Portanto, a Eq. (10.145) se reduz a

$$I_o = I_G + M(R^2 \mathbf{1} - RR). \quad (10.147)$$

Observe que ambos, o enunciado e a demonstração deste teorema, possuem uma analogia precisa com o Teorema dos Eixos Paralelos (5.83) para o momento de inércia.

Torna-se evidente, de acordo com a definição (10.140), que o tensor de inércia de um corpo composto pode ser obtido através de soma dos tensores de inércia das partes, todos em relação à mesma origem.

Se o corpo girar, os componentes de seu tensor de inércia, em relação a eixos estacionários, variarão com o tempo. Se o corpo for rígido, os componentes em relação a eixos fixos a ele, com certeza, não variarão. Pode-se pensar como se o tensor estivesse girando com o corpo. Se os componentes (constantes) ao longo do eixo fixo forem conhecidos, os componentes (variáveis) ao longo dos eixos estacionários serão então dados pela Eq. (10.89), onde A representa a transformação do tensor de inércia dos eixos do corpo para os eixos do espaço. O conjunto de eixos do corpo mais conveniente para a maioria das aplicações é o conjunto de *eixos principais do corpo*. Os autovalores do tensor de inércia chamam-se *momentos de inércia principais*. No próximo capítulo, aprender-se-á mais sobre o significado dinâmico dos eixos principais, mas aqui já se pode observar que, de acordo com a Eq. (10.24), se o corpo girar em torno de um eixo principal, o momento angular será paralelo à velocidade angular. Pode-se sempre escolher eixos arbitrários, calcular I e, então, usar o método analisado na Seç. 10.4 para determinar os eixos principais. Entretanto, muitas vezes é possível simplificar o problema, escolhendo-se desde o início um sistema de coordeadas em que um ou todos os eixos sejam principais.

Em muitos casos, um corpo tem simetria. Quando isso acontece, verifica-se que alguns dos produtos de inércia (10.142) se anularão, caso os eixos forem escolhidos de maneira conveniente. Por exemplo, pode-se provar o seguinte teorema:

Qualquer plano de simetria de um corpo é perpendicular a um eixo principal. (10.148)

Escolhendo-se o plano yz como o plano de simetria, então

$$\rho(-x, y, z) = \rho(x, y, z). \quad (10.149)$$

É fácil mostrar que devido à Eq. (10.149) as integrais (10.142) para I_{xy} e I_{zx} se anularão. Portanto, o eixo x é principal neste caso. De maneira similar, demonstra-se o seguinte teorema:

Qualquer eixo de simetria de um corpo é um eixo principal. O plano perpendicular a este eixo é principal e correspondente a um momento de inércia principal degenerado. (10.150)

Uma esfera, ou um corpo com simetria esférica tem, evidentemente, um tensor de inércia constante.

Como exemplo, considere a pirâmide triangular reta mostrada na Fig. 10.1. Os

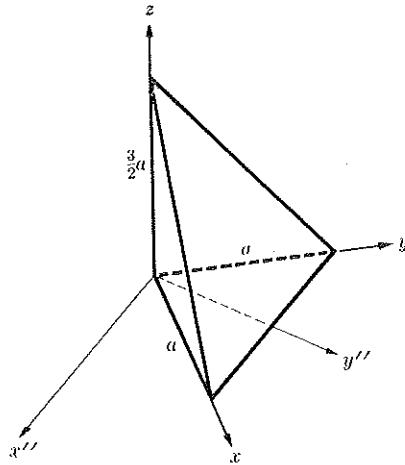


Fig. 10.1 Pirâmide triangular reta.

componentes do tensor de inércia em relação aos eixos (x, y, z) devem ser calculados a partir da seguinte fórmula:

$$I = \int_{z=0}^{\frac{3}{2}a} \int_{y=0}^{a-\frac{3}{2}z} \int_{x=0}^{a-y-\frac{3}{2}z} \rho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dx dy dz,$$

onde cada componente de I é obtido pelo cálculo da integral indicada para os correspondentes componentes da matriz. A densidade ρ é dada em termos da massa M por

$$M = \frac{1}{4} a^3 \rho.$$

Devido à simetria entre x e y , será necessário calcular somente quatro integrais.

$$J_1 = \iiint \rho x^2 dx dy dz = \iiint \rho y^2 dx dy dz = \frac{1}{10} Ma^2,$$

$$J_2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz = \frac{9}{40} Ma^2,$$

$$J_3 = \iiint \rho xy dx dy dz = \frac{1}{20} Ma^2,$$

$$J_4 = \iiint \rho xz dx dy dz = \iiint \rho yz dx dy dz = \frac{3}{40} Ma^2.$$

O tensor de inércia será então dado por

$$I = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 & -J_3 & -J_4 \\ -J_3 & J_1 + J_2 & -J_4 \\ -J_4 & -J_4 & 2J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{40},$$

onde a notação significa que cada elemento da matriz deve ser multiplicado por $Ma^2/40$. Para determinar os eixos principais; por simetria [Teorema (10.148)], o eixo x'' , mostrado na Fig. 10.1, é um eixo principal. Portanto, inicialmente, transforma-se o resultado

do acima para os eixos x'', y'' e z . Os coeficientes da transformação, de acordo com a Eq. (10.68), são

$$\begin{pmatrix} a_{x''x} & a_{x''y} & a_{x''z} \\ a_{y''x} & a_{y''y} & a_{y''z} \\ a_{z''x} & a_{z''y} & a_{z''z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando-se a Eq. (10.74), calculam-se os componentes do tensor de inércia ao longo dos eixos x'', y'' e z :

$$I = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -3\sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{40}.$$

Verifica-se que o eixo x'' , na realidade, é um eixo principal. A equação secular será

$$\begin{vmatrix} 15 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 11 - \lambda & -3\sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad T' = \frac{Ma^2}{40} \lambda,$$

e as raízes serão

$$\lambda_{x'} = 15, \quad \lambda_{y'} = 5, \quad \lambda_{z'} = 14,$$

ou

$$T_{x'} = \frac{3}{8} Ma^2, \quad T_{y'} = \frac{1}{8} Ma^2, \quad T_{z'} = \frac{7}{20} Ma^2.$$

As Eqs. (10.108) podem ser resolvidas para os componentes dos vetores unitários \hat{x}' , \hat{y}' e \hat{z}' em termos de \hat{x}'' , \hat{y}'' e \hat{z} :

$$\hat{x}' = \hat{x}'',$$

$$\hat{y}' = \frac{1}{3}\sqrt{3}\hat{y}'' + \frac{1}{3}\sqrt{6}\hat{z},$$

$$\hat{z}' = -\frac{1}{3}\sqrt{6}\hat{y}'' + \frac{1}{3}\sqrt{3}\hat{z}.$$

A escolha da raiz que deverá ser chamada de λ_y e da que deverá ser chamada λ_z será certamente arbitrária. Aqui considera-se que \hat{x}' , \hat{y}' e \hat{z}' seja um sistema de coordenadas orientado segundo a regra da mão direita.

Um segundo exemplo: determinar o tensor de inércia do objeto mostrado na Fig. 10.2 em relação ao ponto O . O objeto é composto de três discos circulares de massa M e raio a . Por simetria, verifica-se que os eixos principais são x , y e z , indicados na figura. Calcula-se, primeiramente, o tensor de inércia de um disco em torno de seu centro, em relação aos seus eixos principais x' , y' e z' , como mostrado na Fig. 10.3. O momento de inércia $I_{z'}$ é dado pela Eq. (5.90), e os momentos de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ são iguais à metade de $I_{z'}$, de acordo com o Teorema dos Eixos Perpendiculares (5.84).

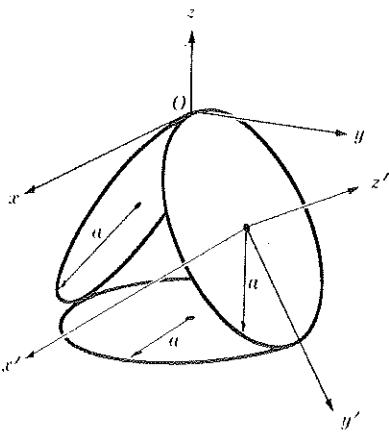


Fig. 10.2 Três discos.

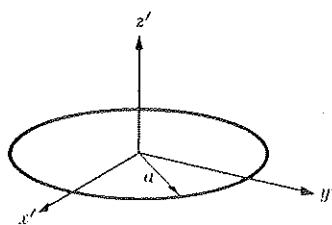


Fig. 10.3 Disco circular e seus eixos principais.

Portanto, pode-se escrever o tensor de inércia de um disco, em relação aos seus eixos principais x' , y' e z' , como

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}. \quad (10.151)$$

Para o disco da base, os eixos principais são paralelos a x , y e z , precisando-se apenas aplicar o Teorema (10.147) para obter o seu tensor de inércia, em relação aos eixos x , y e z , com origem em O :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_o &= \mathbf{I}_G + M(3a^2\mathbf{1} - 3a^2\hat{z}\hat{z}) \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}. \end{aligned}$$

Para o disco da direita, com eixos x' , y' e z' orientados como é mostrado na figura, aplica-se, inicialmente, o Teorema (10.147) para se obter o tensor de inércia em torno de O , em relação aos eixos paralelos a x' , y' e z' :

$$\mathbf{I}_{o(x'y'z')} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}.$$

A transformação dos eixos x' , y' e z' para os eixos x , y e z é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{xx'} & a_{xy'} & a_{xz'} \\ a_{yx'} & a_{yy'} & a_{yz'} \\ a_{zx'} & a_{zy'} & a_{zz'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Usa-se, agora, a Eq. (10.74). Talvez seja mais fácil estudar o processo em duas etapas, de acordo com a Eq. (10.89):⁵

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{o(x'y'z')} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}.$$

Assim

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{o(x'y'z')}) \cdot \mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4} \\ &= \mathbf{I}_{o(xyz)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & \frac{5}{4}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{5}{4}\sqrt{3} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}. \end{aligned}$$

Este método algébrico pode ser interpretado como a determinação de \mathbf{I}_o em relação a um novo conjunto de eixos. Alternativamente, pode-se interpretar \mathbf{A} como um tensor que gira o disco num ângulo de 60° em torno do eixo x ; $\mathbf{I}_{o(x'y'z')}$ será, então, o momento de inércia de um disco cujos eixos principais são paralelos a x , y e z , e a álgebra é o cálculo do efeito da rotação do disco para a sua posição final. O disco da esquerda, da mesma forma, terá o seguinte tensor de inércia

$$\mathbf{I}_{o(xyz)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} & -\frac{5}{4}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{5}{4}\sqrt{3} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}.$$

Os tensores de inércia dos três discos podem ser somados e o resultado será

$$\mathbf{I}_o = \begin{pmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 22\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}.$$

Calculando-se o momento de inércia do objeto mostrado na Fig. 10.2 em relação ao eixo y' que passa por O , de acordo com a Eq. (10.143), tem-se

$$I_{y'} = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{I}_o \cdot \mathbf{\hat{y}'} = 10\frac{1}{2} Ma^2.$$

Poder-se-ia ter usado o Teorema (10.147) para obter I em relação ao centro de gravidade G , o qual está na interseção dos eixos z e z' . Torna-se claro, usando argumentos

⁵ As matrizes podem ser multiplicadas convenientemente de acordo com a regra (10.45), observando-se que o elemento $(T \cdot S)_{ik}$ é obtido pela soma dos produtos de pares de elementos ao longo da linha i em T e abaixo da coluna k em S .

de simetria, que qualquer eixo perpendicular a qualquer um dos discos que passe pelo centro é um eixo principal em relação a G . Isto só será verdade se a degenerescência do tensor de inércia em relação a G for dupla no plano xyz' . O leitor deve verificar este resultado calculando a translação de I_o para o centro de massa G . Poderá notar que os eixos principais dos tensores de inércia de um corpo em relação a dois pontos diferentes O e O' , em geral, não são paralelos, como poderá ser demonstrado através de ensaios com a Eq. (10.47). O Teorema dos Eixos Paralelos não conduz a eixos principais paralelos!

A energia cinética T de um corpo em rotação pode ser expressada convenientemente em termos do tensor de inércia. A partir das Eqs. (10.2) e (10.3) e usando-se as regras da Álgebra Vetorial, tem-se

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\omega \times r_k) \cdot (\omega \times r_k) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \omega \cdot [r_k \times (\omega \times r_k)] \\ &= \frac{1}{2} \omega \cdot L. \end{aligned} \quad (10.152)$$

Portanto, T pode ser escrito na forma

$$T = \frac{1}{2} \omega \cdot I \cdot \omega. \quad (10.153)$$

A Eq. (10.153), escrita em termos dos componentes ao longo de um conjunto qualquer de eixos, será então

$$\frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x = T. \quad (10.154)$$

Esta é a equação de uma família de superfícies quadráticas no espaço dos ω , onde cada uma delas representa o lugar geométrico das velocidades angulares para as quais a energia cinética tem o valor constante T . Escrevendo-se a Eq. (10.153) em termos dos componentes ao longo dos eixos principais x' , y' e z' ,

$$\frac{1}{2} I'_x \omega'_x^2 + \frac{1}{2} I'_y \omega'_y^2 + \frac{1}{2} I'_z \omega'_z^2 = T, \quad (10.155)$$

então, se verifica que estas superfícies são elipsóides, pois os momentos de inércia são necessariamente positivos. Definindo-se um vetor

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}}{(2T)^{1/2}} \omega, \quad (10.156)$$

onde a é uma constante, então a Eq. (10.153) pode ser escrita como

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{r} = a^2. \quad (10.157)$$

Esta é a equação do *elipsóide de inércia*. O fator de escala a foi introduzido por razões dimensionais para que r possa ser um vetor coordenado no espaço comum medido em

unidades de comprimento. É costume fazer $a = 1$, independente da unidade que se esteja usando, por exemplo, $a = 1 \text{ cm-s-erg}^{\frac{1}{2}}$. Neste caso, observa-se que o tamanho do elipsóide (mas não a sua forma) depende da unidade usada.

O elipsóide de inércia de um corpo, como o seu tensor de inércia, depende da origem particular em relação à qual os momentos são calculados. Os seis coeficientes da forma quadrática do primeiro membro da Eq. (10.157) são os componentes do tensor de inércia.

$$I_{xx} x^2 + I_{yy} y^2 + I_{zz} z^2 + 2I_{xy} xy + 2I_{yz} yz + 2I_{zx} zx = a^2, \quad (10.158)$$

desta forma, o tensor de inércia será univocamente caracterizado pelo elipsóide de inércia correspondente. Este resultado mostra que há outra maneira geométrica conveniente de se visualizar o tensor de inércia.

Comparando a Eq. (10.157) com a Eq. (10.143), verifica-se que o raio de qualquer ponto sobre o elipsóide de inércia é

$$r = a I_r^{-1/2}, \quad (10.159)$$

onde I_r é o momento de inércia em relação a um eixo paralelo a r . Em particular, os momentos de inércia principais estão relacionados pelas Eqs. (10.159) aos semi-eixos principais do elipsóide de inércia. Verifica-se, desta forma, que, se existir degenerescência dupla, o elipsóide de inércia será de revolução. Se os momentos principais de inércia forem todos iguais, o elipsóide de inércia tornar-se-á uma esfera.

Para um tensor simétrico qualquer T , pode-se formar uma equação quadrática da forma (10.157) que define uma superfície que caracteriza T univocamente. Os eixos principais de T serão os eixos principais associados à superfície. Se os autovalores de T forem todos positivos, a superfície será um elipsóide. Caso contrário, será um hiperbolóide ou um cilindro. Se todos os valores forem negativos, será preciso substituir por $-a^2$ o segundo membro da equação quadrática para definir uma superfície real.

10.6 O TENSOR DE TENSÃO

Representa-se um elemento de superfície em meio contínuo por um vetor dS , cujo módulo dS é igual à área do elemento e cuja direção é perpendicular ao elemento de superfície. Para especificar o sentido de dS , diferenciam-se os dois lados do elemento de superfície, chamando um de parte de trás e o outro parte da frente. O sentido de dS é, então, de trás para a frente, podendo-se, então, descrever o estado de tensão do meio em qualquer ponto Q especificando a força $P(dS)$ exercida sobre um elemento de superfície dS em Q pela matéria de trás sobre a matéria em frente de dS . É preciso entender, certamente, que o elemento de superfície dS é infinitesimal, isto é, todas as asserções devem estar corretas no limite quando $dS \rightarrow 0$. Para um elemento de superfície suficientemente pequeno, a força P pode depender da área e da orientação do elemento de superfície, mas não de sua forma. Assim, P , na realidade, só é função do vetor

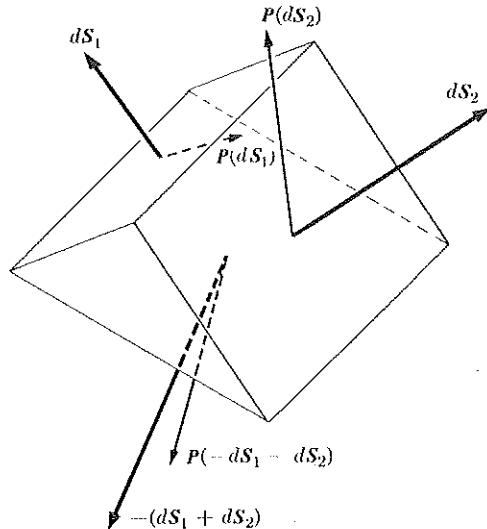


Fig. 10.4 Prisma triangular em meio contínuo.

dS num ponto particular Q localizado no meio. Para mostrar que $P(dS)$ é função linear de dS , representa-se a função $P(dS)$ por um tensor \mathbf{P} , o *tensor de tensão*.⁶

$$\mathbf{P}(dS) = \mathbf{P} \cdot dS. \quad (10.160)$$

Para mostrar que $\mathbf{P}(dS)$ é função vetorial linear, deve-se observar, primeiramente, que se dS for suficientemente pequeno de forma que o estado de tensão do meio não varie no elemento de superfície, então a força P será proporcional à área dS , enquanto a orientação da superfície se mantenha fixa. Então, para uma constante positiva c ,

$$\mathbf{P}(c dS) = c\mathbf{P}(dS). \quad (10.161)$$

Se a direção de dS for invertida, as partes de trás e da frente do elemento de superfície serão trocadas; portanto, de acordo com a terceira lei de Newton, $\mathbf{P}(-dS) = \mathbf{P}(dS)$, logo, a Eq. (10.161) será válida também se c for negativo. Assim, dados dois vetores, dS_1 e dS_2 quaisquer, imagine um prisma triangular no meio, cujos lados sejam dS_1 e dS_2 , como é mostrado na Fig. 10.4. Se as faces das extremidades forem perpendiculares aos lados, então o terceiro lado será $-(dS_1 + dS_2)$, como é mostrado, pois os três vetores dS devem formar um triângulo semelhante ao das faces da extremidade do prisma. Se o comprimento do prisma for muito maior do que as dimensões da seção trans-

versal, podem-se desprezar as forças sobre as faces das extremidades, e a força total exercida pelo prisma será

$$dF = \mathbf{P}(dS_1) + \mathbf{P}(dS_2) + \mathbf{P}(-dS_1 - dS_2). \quad (10.162)$$

Se a densidade do meio for ρ , a aceleração do prisma, de acordo com as Leis do Movimento, de Newton, será dada por:

$$\rho dV \mathbf{a} = dF. \quad (10.163)$$

Então, reduzindo-se todas as dimensões lineares do prisma de um fator α , as áreas dS_i serão multiplicadas por α^2 ; assim, de acordo com a Eq. (10.161), dF será multiplicada por α^2 e dV será multiplicado por α^3 , de forma que

$$\alpha \rho dV \mathbf{a}(\alpha) = dF, \quad (10.164)$$

onde $\mathbf{a}(\alpha)$ será a aceleração de um prisma α vezes menor. Assim, se $\alpha \rightarrow 0$, a aceleração não deverá tornar-se infinita; conclui-se, então que

$$dF = 0, \quad (10.165)$$

a partir deste resultado, e com auxílio das Eqs. (10.162) e (10.161), tem-se

$$\mathbf{P}(dS_1) + \mathbf{P}(dS_2) = \mathbf{P}(dS_1 + dS_2). \quad (10.166)$$

As Eqs. (10.161) e (10.166) mostram que a função $\mathbf{P}(dS)$ é linear. Observe que as Eqs. (10.166) e (10.162) indicam que não haverá força resultante sobre o prisma se a função de tensão $\mathbf{P}(dS)$ for a mesma em todas as faces. Qualquer força resultante só poderá resultar das diferenças entre as funções de tensão em diferentes pontos do meio; tais diferenças se reduzem a zero quando $\alpha \rightarrow 0$.

Considerando-se um prisma quadrado pequeno e que a aceleração angular não deve tornar-se infinita quando o tamanho do prisma tender para zero, pode-se mostrar através de um argumento similar (veja Probl. 32) que \mathbf{P} deverá ser um tensor simétrico. As tensões em cada ponto Q de um meio são determinadas pela especificação de seis componentes do tensor simétrico \mathbf{P} .

Se o meio for um fluido ideal, cuja única tensão seja a pressão p em todas direções, o tensor de tensão será evidentemente

$$\mathbf{P} = p\mathbf{I}. \quad (10.167)$$

Observe que não se demonstrou, no Cap. 8, que em fluido ideal, isto é, naquele que não suporta tensões de cisalhamento, a pressão é a mesma em todas as direções. Só se demonstrou para um fluido em equilíbrio, no Cap. 5, mas tal falta pode ser corrigida agora (veja o Probl. 33).

De acordo com a definição de \mathbf{P} , a força total devida às tensões através de qualquer superfície S é o vetor soma das forças sobre seus elementos:

$$F = \iint_S \mathbf{P} \cdot dS. \quad (10.168)$$

Sendo S uma superfície fechada envolvendo o volume V de um meio, e tomando-se \hat{n}

⁶ O leitor deve estar prevenido para o fato de muitos autores definirem o tensor de tensão com o sinal oposto ao da definição adotada aqui, de forma que a tração seja uma tensão positiva e a pressão, uma tensão negativa. Esta convenção é quase universal em Engenharia, enquanto a definição adotada aqui é mais comum nos trabalhos de Física Teórica.

como o vetor unitário normal à superfície orientado para fora, então a força total exercida sobre o volume V pela matéria fora dela será

$$F = - \iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{P} dS, \quad (10.169)$$

e de acordo com o teorema generalizado, de Gauss [veja a discussão abaixo Eq. (5.178)],

$$F = - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV. \quad (10.170)$$

Como V é qualquer volume do meio, a densidade de força devido à tensão será

$$f_s = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.171)$$

Em concordância com a discussão anterior, verifica-se que esta densidade de força resulta apenas das diferenças na tensão em diferentes pontos do meio. A Eq. (10.171) pode ser derivada também pela soma das forças exercidas num elemento retangular de um volume.

A equação do movimento (8.138) pode, então, ser generalizada para ser aplicada a qualquer meio contínuo

$$\rho \frac{dv}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{P} = f. \quad (10.172)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma (8.139)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{f}{\rho}. \quad (10.173)$$

Esta equação, juntamente com a da continuidade (8.127), determinam o movimento do meio quando a densidade de força f e o tensor de tensão \mathbf{P} forem conhecidos. A tensão \mathbf{P} em qualquer ponto Q pode ser, função da densidade e da temperatura, das posições e das velocidades relativas dos elementos próximos a Q , e talvez também da história anterior do meio, que poderá ser um sólido (elástico ou plástico) ou um fluido (ideal ou viscoso).

A partir das Eqs. (10.172) e (10.173), derivam-se as equações de conservação análogas àquelas derivadas na Seç. 8.8. A equação da conservação de energia análoga à Eq. (8.149) será, por exemplo,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \delta V \right) = v \cdot (f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \delta V. \quad (10.174)$$

Manipulações adicionais da equação da energia, como as realizadas na Seç. 8.8, não poderão ser realizadas da mesma maneira para a Eq. (10.174), devido à diferença existente na forma entre o termo de tensão desta equação e o termo de pressão da Eq. (8.169), como o leitor poderá verificar. As variações de energia associadas às variações do volume e da forma de um elemento do meio contínuo são em geral mais complicadas do que as variações associadas à expansão e à contração de um fluido ideal.

Quando o fluido é viscoso, o tensor de tensão \mathbf{P} dependerá dos gradientes de velocidade no fluido. Este resultado concorda com os argumentos dimensionais apresentados na Seç. 8.15, onde se verifica que o termo $\nabla \cdot \mathbf{P}$ da Eq. (10.172) deve consis-

tir no coeficiente de viscosidade η multiplicado por uma combinação de derivadas segundas dos componentes da velocidade em relação a x , y e z . Se o fluido for isotrópico, como se admitirá a seguir, então a relação entre \mathbf{P} e os gradientes de velocidade não deverão depender da orientação do sistema de coordenadas. Pode-se garantir que isto ocorrerá expressando a relação em forma vetorial, que não se refere explicitamente aos componentes. A díada

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (10.175)$$

tem como componentes as nove derivadas possíveis dos componentes de v em relação a x , y e z . Logo, deve-se tentar relacionar \mathbf{P} a ∇v . A díada (10.175) não é simétrica, mas pode ser separada em uma parte simétrica e outra anti-simétrica, como nas Eqs. (10.64):

$$\nabla v = (\nabla v)_s + (\nabla v)_a, \quad (10.176)$$

$$(\nabla v)_s = \frac{1}{2} \nabla v + \frac{1}{2} (\nabla v)^t, \quad (10.177)$$

$$(\nabla v)_a = \frac{1}{2} \nabla v - \frac{1}{2} (\nabla v)^t. \quad (10.178)$$

A parte anti-simetria está relacionada, como nas Eqs. (10.62) e (10.63), a um vetor

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times v, \quad (10.179)$$

de modo que, para um vetor dr qualquer,

$$(\nabla v)_a \cdot dr = \omega \times dr. \quad (10.180)$$

Se dr for o vetor de um ponto Q a um ponto próximo Q' , verifica-se que o tensor $(\nabla v)_a$ seleciona as partes das diferenças de velocidade entre Q e Q' que correspondem a uma rotação (rígida) do fluido, em torno de Q , com velocidade angular ω . Este resultado concorda com a discussão da Eq. (8.133), que é idêntica à Eq. (8.179). Como não haverá forças viscósas associadas a uma rotação pura do fluido, estas forças deverão ser expressadas em termos do tensor $(\nabla v)_s$.

Como \mathbf{P} também é simétrico, é-se tentado a escrever simplesmente

$$\mathbf{P} = C(\nabla v)_s, \quad (10.181)$$

onde C é uma constante. No caso simples, representado na Fig. 8.11, o único componente de ∇v diferente de zero é $\partial v_x / \partial y$, e as Eqs. (10.181) e (10.177) fornecem, então,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}C\frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}C\frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.182)$$

e a força viscosa, através de $dS = \hat{y} dS$, será

$$dF = \mathbf{P} \cdot dS = \frac{1}{2}C\frac{\partial v_x}{\partial y} dS \hat{x}, \quad (10.183)$$

resultado este que concorda com a Eq. (8.254), caso $C = -2\eta$. O sinal negativo é claramente necessário, pois a força viscosa se opõe ao gradiente de velocidade. No entanto, a Eq. (10.181) não é a relação linear mais geral entre \mathbf{P} e ∇v , que é independente do sistema de coordenadas. Por isso, pode-se, ainda, decompor $(\nabla v)_s$ em um tensor constante e um tensor simétrico de traço nulo da seguinte forma:

$$(\nabla v)_s = (\nabla v)_c + (\nabla v)_{ts}, \quad (10.184)$$

$$(\nabla v)_c = \frac{1}{3}Tr(\nabla v)_s \mathbf{1} = \frac{1}{3}\nabla \cdot v \mathbf{1}, \quad (10.185)$$

$$(\nabla v)_{ts} = (\nabla v)_s - \frac{1}{3}\nabla \cdot v \mathbf{1}. \quad (10.186)$$

Esta decomposição é independente do sistema de coordenadas, pois, como foi mostrado, o traço é uma grandeza escalar invariante. Verifica-se a partir da Eq. (8.116) que o tensor $(\nabla v)_c$ mede a taxa de expansão ou contração do fluido. O tensor $(\nabla v)_{ts}$, com cinco componentes independentes, especifica a maneira pela qual o fluido está sendo cisalhado. Portanto, pode-se escrever livremente

$$\mathbf{P} = -2\eta(\nabla v)_{ts} - \frac{1}{3}\eta'\nabla \cdot v \mathbf{1}, \quad (10.187)$$

com um coeficiente η que caracteriza a resistência viscosa ao cisalhamento, e um coeficiente η' que caracteriza uma resistência viscosa, se houver, à expansão e à contração.

O último termo corresponde a uma pressão uniforme (ou tensão) em todas as direções num dado ponto. O coeficiente η' , além de ser pequeno, não é bem determinado experimentalmente para os fluidos reais. De acordo com a Teoria Cinética dos Gases, η' é igual a zero no caso de um gás ideal. Para a tensão viscosa devida a gradientes de velocidade, dada de acordo com a fórmula (10.187), deve ser somada à pressão hidrostática, se estiver presente, a qual depende da densidade, da temperatura e da composição do fluido. Agrupando-se o último termo da Eq. (10.187) junto com a pressão hidrostática em uma pressão total p , o tensor de tensão completo será

$$\mathbf{P} = p\mathbf{1} - \eta[\nabla v + (\nabla v)^t - \frac{2}{3}\nabla \cdot v \mathbf{1}]. \quad (10.188)$$

O leitor pode verificar facilmente este resultado em termos dos componentes.

A fórmula (10.188) é a expressão mais geral para a tensão em fluidos isotrópicos em que exista pressão hidrostática, mas forças viscósas proporcionais ao gradiente de

velocidade. Imagine que a tensão deva conter também termos não lineares dos gradientes de velocidade, ou mesmo derivadas de ordens mais elevadas da velocidade, mas espera-se que tais termos sejam pequenos em comparação com os lineares. Experimentalmente, as tensões viscósas em fluidos são obtidas acuradamente na maioria dos casos de acordo com a fórmula (10.188).

O tensor ∇v , com nove componentes independentes, foi decomposto em uma soma de três tensores com um, três e cinco componentes independentes, sendo cada um deles uma combinação linear dos componentes de ∇v . Uma decomposição similar será possível para qualquer tensor. O leitor poderá perguntar, então, se é possível qualquer decomposição adicional. Este é um problema da Teoria de Grupo e, sendo assim, este resultado deve ser estabelecido sem demonstração, pois nem tensores anti-simétricos nem simétricos com traço nulo podem sofrer decomposição adicional de maneira independente do sistema de coordenadas. O leitor pode convencer-se que este resultado é plausível através de uma experiência simples.

Considere, agora, um sólido elástico e suponha que, inicialmente, ele esteja em posição livre de deformações. Suponha também que cada ponto do sólido esteja designado por seu vetor posição \mathbf{r} em relação a uma origem conveniente. Agora, suponha que o sólido tenha sido submetido a deformações movendo-se cada ponto \mathbf{r} para uma nova posição dada pelo vetor $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r})$ em relação à mesma origem. Designando-se os componentes de \mathbf{r} por (x, y, z) e de $\boldsymbol{\rho}$ por (ξ, η, ζ) , se $\boldsymbol{\rho}$ fosse independente de \mathbf{r} , o movimento seria um deslocamento uniforme sem deformação. Logo, a tensão em qualquer ponto pode ser especificada pela díada gradiente

$$\nabla \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (10.189)$$

Assim $\nabla \boldsymbol{\rho}$ pode ser composto em uma parte anti-simétrica, correspondente a uma rotação rígida em torno do ponto $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}$, e uma parte simétrica, que descreve a deformação do sólido na vizinhança de cada ponto:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\rho})^t. \quad (10.190)$$

A parte simétrica pode ser, ainda, decomposta em um tensor constante, que descreve uma compressão ou expansão volumétrica, e um tensor simétrico com traço nulo, que descreve o cisalhamento:

$$\mathbf{S}_c = \frac{1}{3}\nabla \cdot \boldsymbol{\rho} \mathbf{1} = \frac{1}{3}\frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} \mathbf{1}, \quad (10.191)$$

$$\mathbf{S}_{st} = \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\rho})^t - \frac{1}{3}\nabla \cdot \boldsymbol{\rho} \mathbf{1}. \quad (10.192)$$

Se o sólido for isotrópico, esta será a decomposição mais geral. Além do mais, se a Lei de Hooke for válida, a tensão deverá ser proporcional à deformação:

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{3}\alpha \nabla \cdot \rho \mathbf{1} - b \mathbf{S}_{st}. \quad (10.193)$$

É evidente que as constantes α e b relacionam-se com o módulo volumétrico e o módulo de cisalhamento.

Para determinar α em termos do módulo volumétrico, imagine uma expansão uniforme do sólido como na definição (5.116) do módulo volumétrico. Suponha que cada dimensão linear do sólido aumente de um fator α . O deslocamento de cada ponto do sólido é dado por

$$\rho = \alpha r,$$

onde a origem de coordenadas foi escolhida num ponto que não se desloca. Para esta espécie de deformação a tensão é uma pressão isotrópica (ou tensão) Δp de forma que se pode escrever, de acordo com a Eq. (10.193),

$$\mathbf{P} = \Delta p \mathbf{1} = -\alpha \rho \mathbf{1}.$$

Como $\Delta V/V = 3\alpha$, neste caso, pode-se obter o valor da constante α :

$$\alpha = -3\Delta p V / \Delta V = 3B, \quad (10.194)$$

onde se usa a definição (5.116) do módulo volumétrico.

Considere, agora, uma tensão de cisalhamento como a mostrada na Fig. 5.21, usada na definição de módulo de cisalhamento. Com o eixo x na direção mostrada na figura e o eixo y na direção do cisalhamento, o único componente diferente de zero de $\nabla \rho$ é $\partial \eta / \partial x = \operatorname{tg} \theta$. Portanto o esforço será dado por

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{st} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta & 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.195)$$

Pode-se verificar, na Fig. 5.21, que o tensor de tensão deve conter o componente $P_{yx} = -F/A$. Como o tensor de tensão deve ser simétrico, deve-se somar também o componente $P_{xy} = -F/A$; torna-se também evidente da Fig. 5.21 que é necessário somar este segundo componente da tensão se o sólido da figura estiver em equilíbrio. Como nenhuma outra tensão está associada a esta deformação particular, o tensor de tensão será

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -F/A & 0 \\ -F/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.196)$$

Comparando-se as Eqs. (10.195) e (10.196) e usando a definição (5.118) do módulo de cisalhamento, verifica-se que

$$b = 2F/A \operatorname{tg} \theta = 2n. \quad (10.197)$$

Se o sólido não for isotrópico, como, por exemplo, um cristal, então a relação entre \mathbf{P} e \mathbf{S} pode depender da escolha dos eixos e, portanto, deve ser escrita:

$$P_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} S_{kl}. \quad (10.198)$$

Como \mathbf{P} e \mathbf{S} têm cada um seis componentes independentes, existem trinta e seis constantes c_{ijkl} . Usando-se o fato de que existe uma energia potencial elástica que é função da deformação, pode ser mostrado que, no caso mais geral, existem vinte e uma constantes independentes c_{ijkl} .

PROBLEMAS

- O produto $c\mathbf{T}$ de um tensor por um escalar foi usado no texto sem ser definido formalmente. Corrija este defeito, apresentando uma definição apropriada e demonstrando que este produto tem as propriedades algébricas adequadas.
- Mostre que a força centrífuga da Eq. (7.37) é função linear do vetor posição \mathbf{r} da partícula e determine uma expressão para o tensor correspondente na forma de uma diáda. Escreva os coeficientes da matriz.
- Defina as derivadas em relação ao tempo $d\mathbf{T}/dt$ e $d'\mathbf{T}/dt$ relativas a um sistema fixo e outro com movimento de rotação, como foi feito no Cap. 7 para as derivadas de vetores. Mostre que

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d'\mathbf{T}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T} - \mathbf{T} \times \boldsymbol{\omega},$$

onde o produto de um vetor por um tensor é definido de maneira óbvia.

- Escreva as relações entre os coeficientes a_{ij} correspondentes às relações (10.80). Escreva outra relação entre os vetores unitários, envolvendo o produto vetorial triplo; escreva as relações correspondentes entre os coeficientes.

- Transforme o tensor

$$\mathbf{T} = AB + BA,$$

onde

$$A = 5\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}, \quad B = 5\hat{y} + 10\hat{z},$$

num sistema de coordenadas que girou de 45° em torno do eixo z , usando a Eq. (10.74). Transforme os vetores A e B , usando a Eq. (10.71), e mostre que os dois resultados concordam.

6. Escreva e demonstre duas relações adicionais, como as mostradas nas Eqs. (10.91) até (10.93), envolvendo propriedades algébricas que são preservadas por uma transformação de coordenadas.

7. Demonstre as Eqs. (10.91) e (10.92).

8. Escreva a matriz para o tensor ortogonal \mathbf{A} que produz a rotação de um ângulo α em torno do eixo z . Decomponha \mathbf{A} em um tensor simétrico e outro anti-simétrico, de acordo com a Eq. (10.66). Qual é a interpretação geométrica desta decomposição?

9. Demonstre que o $\text{Det}(\mathbf{T})$ [Eq. (10.95)] é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas.

10. a) Demonstre que o tensor dado pela fórmula (10.100) tem a propriedade geométrica dada pela Eq. (10.23).

b) Demonstre, usando cálculo direto, que este tensor é representado pela mesma matriz em qualquer sistema de coordenadas.

11. Prove, usando cálculo direto, que a grandeza $M(\mathbf{T})$, definida pela Eq. (10.139), tem o mesmo valor da transformação de coordenadas dada pela relação (10.74).

12. Diagonalize o tensor do Probl. 5. [Isto é, determine os seus autovalores e os eixos principais correspondentes.]

13. Diagonalize o tensor

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

[Sugestão. A equação secular pode ser fatorada; e todas as raízes são números inteiros.]

14. Quais são os eixos principais e os autovalores correspondentes do tensor do Probl. 2? Interprete o problema de acordo com a Física.

15. Demonstre as afirmações feitas no último parágrafo da Seç. 10.4 em relação à transformação do eixo principal determinada na resolução do exemplo.

16. Demonstre que se dois tensores, \mathbf{S} e \mathbf{T} , tiverem um conjunto de eixos principais em comum, então $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$. (A recíproca também é verdadeira.)

17. Demonstre que, se um tensor \mathbf{T} satisfaz uma equação algébrica

$$a_n \mathbf{T}^n + \dots + a_2 \mathbf{T}^2 + a_1 \mathbf{T} + a_0 \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

onde ' \mathbf{T}^n ' significa $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \dots \mathbf{T}$ (n fatores), então seus autovalores devem satisfazer a mesma equação. O tensor nulo $\mathbf{0}$ é definido de maneira óbvia.

18. Use o resultado do Probl. 17 para mostrar que os autovalores do tensor \mathbf{A} , representando uma rotação de 180° em torno de um eixo, podem ser apenas ± 1 . [Sugestão. Considere o resultado obtido aplicando \mathbf{A} duas vezes.] Mostre que os autovalores não podem ser todos iguais a $+1$. Em seguida, mostre que -1 deve ser uma raiz dupla da equação secular. [Sugestão. Use as Eqs. (10.137) e (10.81).] Você pode obter os autovetores correspondentes? Este problema deve ser inteiramente resolvido usando-se argumentos gerais, sem escrever a matriz para \mathbf{A} .

19. Mostre que os autovalores de um tensor ortogonal [Eq. (10.87)] são números complexos (ou reais) de módulo unitário. [Sugestão. Considere que \mathbf{C} seja um autovetor (possivelmente complexo) de \mathbf{T} , e considere a grandeza $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^*)$.] A seguir mostre que um autovalor deve ser ± 1 , e que os outros dois são da forma $\exp(\pm i\alpha)$, para um dado α .

20. Escreva os componentes do tensor ortogonal \mathbf{A} , correspondente à rotação de um ângulo θ em torno do eixo z . Determine os seus autovalores. Determine e interprete os autovetores correspondentes ao autovalor real.

21. Determine os componentes do tensor correspondente à rotação de um ângulo θ em torno do eixo z , seguida de rotação de um ângulo Ψ em torno do eixo y . Determine os seus autovalores. [Sugestão. De acordo com o Probl. 19, um autovalor é ± 1 ; logo, você pode fatorar a equação secular.] Mostre que o resultado indica que esta transformação seja equivalente a uma rotação simples em torno de algum outro eixo. [Você não precisa determinar esse eixo.] Determine o ângulo de rotação, comparando o seu resultado com os autovalores obtidos no Probl. 20.

22. Mostre que os autovalores de um tensor anti-simétrico são puramente imaginários (ou zero). Depois, mostre que um tensor anti-simétrico deve ter um autovalor igual a zero e dois autovalores imaginários conjugados. Determine os autovetores correspondentes ao autovalor igual a zero do tensor (10.62).

23. Determine o tensor de inércia de uma haste reta de comprimento l e massa m , em relação a seu centro. Use este resultado para determinar o tensor de inércia em relação ao centróide de uma pirâmide equilátera, construída com seis hastes uniformes. Mostre que este tensor pode ser obtido imediatamente através de considerações de simetria, fornecendo o resultado do Probl. 23 do Cap. 5.

24. Desloque para o centro de massa G o tensor de inércia calculado em relação à origem para os três discos na Fig. 10.2. Verifique a afirmação feita no texto em relação à degenerescência dupla de I_G .

25. Calcule o momento de inércia de um cone circular reto e sólido em relação a um eixo inclinado que passa pelo ápice e sobre a superfície do cone. [Sugestão. Calcule o tensor de inércia em torno do ápice em relação aos eixos principais, e use a Eq. (10.143).]

26. Formule e demonstre um teorema, o mais geral possível, em relação ao tensor de inércia de uma lâmina plana. O que se pode dizer em relação aos eixos principais e aos momentos de inércia principais?

27. Determine, usando o método que exija o menor trabalho possível, o tensor de inércia de um bloco retangular de massa M e dimensões $a \times b \times c$, em relação aos eixos que passem por seu centro, dos quais o eixo z é paralelo à aresta c e o eixo y é uma diagonal do retângulo $a \times b$.

28. a) Uma esfera uniforme de massa M e raio a tem duas massas punctiformes $\frac{1}{4}M$ e $\frac{1}{8}M$, localizadas sobre a superfície e separadas por uma distância angular de 45° . Determine os eixos principais e os momentos de inércia principais em relação ao centro da esfera.

b) Determine o tensor de inércia em relação aos eixos paralelos que passam pelo centro de massa. Eles também são eixos principais?

29. a) Determine o tensor de inércia de um retângulo plano de massa M e dimensões $a \times b$.

b) Use este resultado para determinar o tensor de inércia, em relação ao centro de massa do castelo de cartas mostrado na Fig. 10.5. Cada carta tem massa M e dimensões $a \times b$ ($a < b$). Use os eixos principais.

30. Determine a equação para o elipsóide de inércia de um bloco retangular de dimensões $l \times w \times h$.

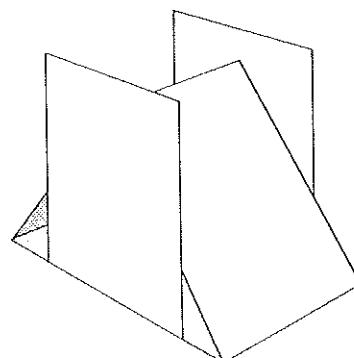


Fig. 10.5 Castelo de cartas.

31. Determine a equação para o elipsóide de inércia de um objeto com a forma elipsóide dada pela seguinte equação:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{w^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1.$$

32. Demonstre que o tensor de tensão \mathbf{P} é simétrico.

33. Prove que, caso não exista cisalhamento em qualquer ponto de um elemento de superfície, então o tensor de tensão \mathbf{P} neste ponto é um tensor constante [Eq. (10.23)].

34. Obtenha a Eq. (10.171), calculando a força resultante sobre um elemento de volume retangular.

35. Obtenha, a partir da Eq. (10.173), a equação

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho vv + \mathbf{P}) = f,$$

que expressa a conservação do momento linear. Mostre a partir desta equação que o tensor de corrente de momento ($\rho vv + \mathbf{P}$) representa o fluxo de momento; interprete em relação à Física os dois termos deste tensor.

36. Derive, a partir da Eq. (10.172), a Lei da Conservação do Momento Angular escrevendo uma fórmula análoga à Eq. (8.148).

37. Escreva as equações do movimento (10.173) em coordenadas cilíndricas para um fluido viscoso em movimento. Use estas equações, acompanhadas de suposições apropriadas, para obter a Lei de Poiseuille (8.252) para um escoamento viscoso e estacionário num tubo. Escreva o tensor de tensão para este caso, em coordenadas cilíndricas, como função de r , z e φ .

38. Escreva os componentes do tensor de tensão \mathbf{P} em fluido viscoso.

39. a) Mostre que a taxa de produção de energia cinética por unidade de volume devido às tensões num meio em movimento é

$$Q = -\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}).$$

b) Mostre que a taxa com que o trabalho é realizado pelas tensões sobre o meio, por unidade de volume, é

$$\frac{dW}{dt} = -\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}).$$

[Sugestão. Calcule o trabalho realizado na superfície de qualquer volume V usando o Teorema de Gauss.]

c) Usando estes resultados, calcule a taxa com que a energia é dissipada por unidade de volume através de tensões de cisalhamento viscoso num fluido em movimento. Escreva o resultado em termos dos componentes.

40. Um sólido isotrópico é submetido a uma tensão que consiste numa tração pura τ , por unidade de área, numa direção. Determine a deformação \mathbf{S} em termos de τ , B e n . Usando este resultado, expresse o módulo de Young Y [Eq. (5.114)] em termos de B e n . [Sugestão. Use considerações de simetria para determinar a forma de \mathbf{S} .].

*41. Determine a relação linear mais geral entre \mathbf{S} e \mathbf{P} para uma substância elástica não-isotrópica, que possui simetria cilíndrica em relação a uma direção específica.

*42. a) Suponha que num sólido elástico não-isotrópico exista uma energia potencial elástica V por unidade, que é função quadrática dos componentes da deformação. Mostre que são necessárias 21 constantes para especificar V .

b) Mostre que se a deformação num sólido em equilíbrio sofrer um acréscimo $\delta \mathbf{S}$, o trabalho realizado, por unidade de volume, contra as tensões (exclusive o trabalho realizado contra forças do corpo) é

$$\delta W = - \sum_{i,j=1}^3 P_{ij} \delta S_{ij}.$$

[Sugestão. Calcule o trabalho realizado sobre o elemento de volume pelas tensões sobre sua superfície, usando o Teorema de Gauss.]

c) Combine os resultados (a) e (b) para mostrar que \mathbf{P} , em geral, é função linear de \mathbf{S} envolvendo 21 constantes independentes.

CAPÍTULO 11

A ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

11.1 MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO NO ESPAÇO

O movimento de um corpo rígido no espaço é determinado pelas Eqs. (5.4) e (5.5):

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (11.1)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (11.2)$$

onde

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}, \quad (11.3)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (11.4)$$

\mathbf{F} e \mathbf{N} são a força total exercida sobre o corpo e o torque total, em relação a um ponto apropriado O , \mathbf{V} é a velocidade do centro de massa e \mathbf{I} e $\boldsymbol{\omega}$ são o tensor de inércia e a velocidade angular em torno do ponto O . Para corpos sem vínculos em movimento no espaço, o ponto O deverá ser tomado como o centro de massa. Se o corpo estiver submetido a vínculos oriundos de forças externas, o ponto O será obrigado a mover-se de determinada maneira, e o leitor poderá obter as equações do movimento apropriadas. (Veja Cap. 7, Probl. 3.)

As Eqs. (11.2) e (11.4) para rotação de corpos rígidos apresentam uma analogia formal com as Eqs. (11.1) e (11.3) para o movimento de massa punctiforme M . No entanto, existem três diferenças que destroem a analogia. Em primeiro lugar, a Eq. (11.4) envolve um tensor \mathbf{I} , enquanto a Eq. (11.3) envolve um escalar M ; assim \mathbf{P} será sempre paralelo a \mathbf{V} , enquanto, em geral, \mathbf{L} não é paralelo a $\boldsymbol{\omega}$. Uma diferença mais séria é o fato de o tensor de inércia \mathbf{I} não ser constante em relação ao sistema de eixos fixos no espaço, variando com o movimento do corpo, enquanto M é constante (na Mecânica Newtoniana). Finalmente, e talvez a diferença mais séria, é o fato de não existir nenhum conjunto simétrico de três coordenadas análogas a X , Y e Z com as quais se possa descrever a orientação do corpo no espaço. O leitor deverá prestar atenção a este aspecto, apresentado na Seç. 5.1, sugerindo-se, mesmo, que releia o último parágrafo daquela seção. Por estes motivos, não se pode resolver o problema de rotação de um corpo rígido por analogia aos métodos apresentados no Cap. 3.

Existem dois métodos gerais de resolução deste problema. Primeiramente, nas Seçs. 11.2 e 11.3, procura-se dar o máximo de informações possíveis a partir das equa-

ções vetoriais (11.2) e (11.4) sem introduzir um sistema de equações para descrever a orientação do corpo. Em seguida, nas Seçs. 11.4 e 11.5, usam-se as equações de Lagrange para determinar o movimento, em termos de um conjunto de coordenadas angulares, conforme foi sugerido por Euler.

11.2 EQUAÇÕES DE EULER PARA O MOVIMENTO DE CORPOS RÍGIDOS

A dificuldade introduzida pela variação \mathbf{I} durante o movimento de rotação do corpo pode ser evitada, escrevendo-se a Eq. (11.2) em relação a um sistema de eixos fixos no corpo; então, de acordo com a Eq. (7.22), a Eq. (11.2) torna-se

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \quad (11.5)$$

Como \mathbf{I} é constante em relação aos eixos do corpo, pode-se usar a relação dada na Eq. (11.4) para obter-se

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (\mathbf{I} \cdot \omega) = \mathbf{N}. \quad (11.6)$$

(Lembre-se que $d'\omega/dt = d\omega/dt$.) Será mais conveniente escolher como eixos do corpo os seus eixos principais $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$. Assim, a Eq. (11.6) torna-se

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= N_3. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Estas são as equações de Euler para o movimento de corpos rígidos. Se um ponto do corpo permanecer fixo, deverá ser considerado a origem dos eixos, e os momentos de inércia e torques deverão ser calculados em relação a este ponto. Se o corpo não tiver nenhum vínculo, o centro de massa deverá ser a origem do sistema de eixos.

Para derivar o Teorema da Energia a partir das equações de Euler, multiplica-se a Eq. (11.6) por ω :

$$\omega \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot \mathbf{N}. \quad (11.8)$$

Como \mathbf{I} é simétrico, onde o primeiro membro pode ser

$$\omega \cdot \mathbf{I} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \mathbf{I} \cdot \omega = \frac{1}{2} \frac{d'}{dt} (\omega \cdot \mathbf{I} \cdot \omega) = \frac{dT}{dt}, \quad (11.9)$$

onde T é dado pela Eq. (10.153). Usa-se aqui o fato de d/dt , d'/dt terem o mesmo significado quando aplicados a uma grandeza escalar. Comparando-se as Eqs. (11.8) e (11.9), obtém-se o Teorema da Energia:

$$\frac{dT}{dt} = \omega \cdot \mathbf{N}, \quad (11.10)$$

em analogia com o Teorema (3.133) para o movimento de partículas.

A partir das Eqs. (11.7), nota-se imediatamente que um corpo não pode girar em velocidade angular ω constante, exceto em torno de seu eixo principal, a não ser quando submetido a torques externos. Se $d\omega/dt = 0$, a Eq. (11.6) torna-se

$$\omega \times (\mathbf{I} \cdot \omega) = \mathbf{N}. \quad (11.11)$$

O primeiro membro será igual a zero somente se $\mathbf{I} \cdot \omega$ for paralelo a ω , isto é, se ω estiver ao longo do eixo principal do corpo. Para uma roda poder girar livremente, sem exercer forças ou torques sobre seus suportes, além de estar estaticamente balanceada, isto é, o centro de massa no eixo de rotação, deverá estar também dinamicamente balanceada, isto é, o eixo de rotação deve ser um eixo principal do tensor de inércia, como qualquer mecânico de automóvel sabe.

Para resolver as Eqs. (11.7) e obter $\omega(t)$, será necessário conhecer os componentes do torque ao longo do eixo principal (girando), uma situação incomum, exceto para o caso em que $N = 0$. Considere, agora, um corpo simétrico que gira livremente, sem aplicação de torque. Considere o eixo $\hat{\mathbf{e}}_3$ como de simetria do corpo de tal forma que $I_1 = I_2$. Logo, a terceira das Eqs. (11.7) será

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0, \quad (11.12)$$

onde $\dot{\omega}_3$ será constante. As duas primeiras equações poderão ser escritas como

$$\dot{\omega}_1 + \beta \omega_3 \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - \beta \omega_3 \omega_1 = 0, \quad (11.13)$$

onde

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \quad (11.14)$$

As Eqs. (11.13) formam um par de equações lineares de primeira ordem, acopladas nas variáveis ω_1 e ω_2 . Suponha que as soluções tenham a forma

$$\omega_1 = A_1 e^{pt}, \quad \omega_2 = A_2 e^{pt}. \quad (11.15)$$

Pode-se verificar facilmente que as relações (11.15) satisfazem as Eqs. (11.13) se

$$p = \pm i\beta\omega_3, \quad (11.16)$$

e

$$A_2 = \mp iA_1. \quad (11.17)$$

Determina-se assim um par de soluções complexas conjugadas:

$$\omega_1 = e^{\pm i\beta\omega_3 t}, \quad \omega_2 = \mp ie^{\pm i\beta\omega_3 t}, \quad (11.18)$$

e estas soluções podem ser superpostas com constantes arbitrárias multiplicativas para formar as seguintes soluções reais:

$$\omega_1 = A \cos(\beta\omega_3 t + \theta), \quad \omega_2 = A \sin(\beta\omega_3 t + \theta). \quad (11.19)$$

Portanto, a precessão do vetor velocidade angular ω será um círculo de raio A em tor-

no do eixo \hat{e}_3 , com velocidade angular $\beta\omega_3$, e terá o mesmo sentido de ω_3 , se $I_3 > I_1$, e no sentido oposto, em caso contrário. O módulo ω será

$$\omega = [\omega_3^2 + A^2]^{1/2}, \quad (11.20)$$

e será constante, resultado este que também poderia ser demonstrado por cálculo direto de $d(\omega^2)/dt$ a partir da Eq. (11.7). As constantes ω_3 , A e θ são determinadas a partir das condições iniciais. Existem três constantes arbitrárias, pois as equações de Euler são três equações diferenciais de primeira ordem. Como corpos rígidos girando sem vínculos têm três graus de liberdade de rotação, dever-se-ia esperar um total de seis constantes arbitrárias para serem determinadas a partir das condições iniciais. Quais são as outras três?

O eixo instantâneo de rotação, determinado pelo vetor ω , descreve um cone no corpo (o *cone do corpo*), enquanto houver precessão em torno do eixo de simetria. O semi-ângulo α_b do cone do corpo é dado por

$$\operatorname{tg} \alpha_b = \frac{A}{\omega_3}. \quad (11.21)$$

Alternativamente, se inicialmente o corpo girar em velocidade angular ω em torno do eixo, fazendo um ângulo α_b com o eixo de simetria, então as constantes ω_3 e A são dadas por

$$A = \omega \operatorname{sen} \alpha_b, \quad \omega_3 = \omega \cos \alpha_b. \quad (11.22)$$

Para determinar o movimento no espaço, é preciso localizar o eixo ω em relação a uma direção fixa no espaço, e para fazê-lo descreve-se passo a passo o movimento relativo aos eixos do espaço, permitindo ao corpo girar em velocidade angular constante em torno de um eixo no cone do corpo, onde a precessão tem velocidade angular $\beta\omega_3$. Será mais fácil localizar ω em relação a L , pois, de acordo com a Eq. (11.2), L será constante se $N = 0$. O ângulo α_s , entre ω e L , será dado por

$$\cos \alpha_s = \frac{\omega \cdot L}{\omega L} = \frac{\omega \cdot \mathbf{I} \cdot \omega}{\omega L} = \frac{2T}{\omega L}. \quad (11.23)$$

De acordo com a Eq. (11.10), T é constante, logo o ângulo α_s também o será. Portanto, o eixo de rotação descreve um cone no espaço, o *cone do espaço*, cujo semi-ângulo é igual a α_s , dado pela Eq. (11.23), e o seu eixo está na direção do vetor momento angular L . A linha de contato entre o cone do espaço e o cone do corpo em qualquer instante será o eixo instantâneo de rotação. Como este eixo está instantaneamente em repouso no corpo, o cone do corpo rola sem deslizar em torno do cone do espaço. Este resultado descreve o movimento por completo (veja Fig. 11.1).

Pode-se expressar α_s em termos das constantes ω e α_b ; então

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\hat{e}_1 \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \hat{e}_2) I_1 + \hat{e}_3 \hat{e}_3 I_3 \\ &= I_1 \mathbf{I} + \hat{e}_3 \hat{e}_3 (I_3 - I_1). \end{aligned} \quad (11.24)$$

Substituindo-se os resultados das Eqs. (11.14), (11.22) e (11.24) nas Eqs. (11.4), (10.153) e (11.23) e fazendo $\omega = \omega \hat{n}$, obtém-se:

$$2T = \omega^2 I_1 [1 + \beta \cos^2 \alpha_b], \quad (11.25)$$

$$\mathbf{L} = \omega I_1 [\hat{n} + \beta \cos \alpha_b \hat{e}_3], \quad (11.26)$$

$$\cos \alpha_s = \frac{1 + \beta \cos^2 \alpha_b}{[1 + (2\beta + \beta^2) \cos^2 \alpha_b]^{1/2}}. \quad (11.27)$$

Note que α_s só depende de α_b e não de ω . Torna-se claro pela Eq. (11.26) que o cone do espaço permanece dentro do cone do corpo, caso $\beta > 0$, e fora dele, se $\beta < 0$ (veja Fig. 11.1). Este resultado ficará claro também se, quando o cone do corpo girar sobre o cone do espaço, a precessão do eixo de rotação for obrigada a tomar sentido dado pela Eq. (11.19). [O leitor deve verificar este resultado, lembrando-se que a Eq. (11.19) descreve o movimento do eixo em relação ao corpo.]

A seguir, considere o caso em que o tensor de inércia não é degenerado. Numeram-se os eixos principais de tal forma que $I_3 > I_2 > I_1$. Foi mostrado acima que o corpo pode girar livremente em torno do eixo principal. Para estudar o caso em que ocorrem pequenos desvios destas rotações estacionárias, observa-se se ω não está ao longo de um eixo principal, porque então não poderá permanecer constante. Suponha que ω permaneça muito próximo de um eixo principal, por exemplo, \hat{e}_3 , de forma que $\omega_3 \gg \omega_1$ e $\omega_3 \gg \omega_2$. Então, se $N = 0$, verifica-se da terceira das Eqs. (11.7) que ω_3 só será constante se os termos de primeira ordem, em ω_1 e ω_2 , forem considerados. As

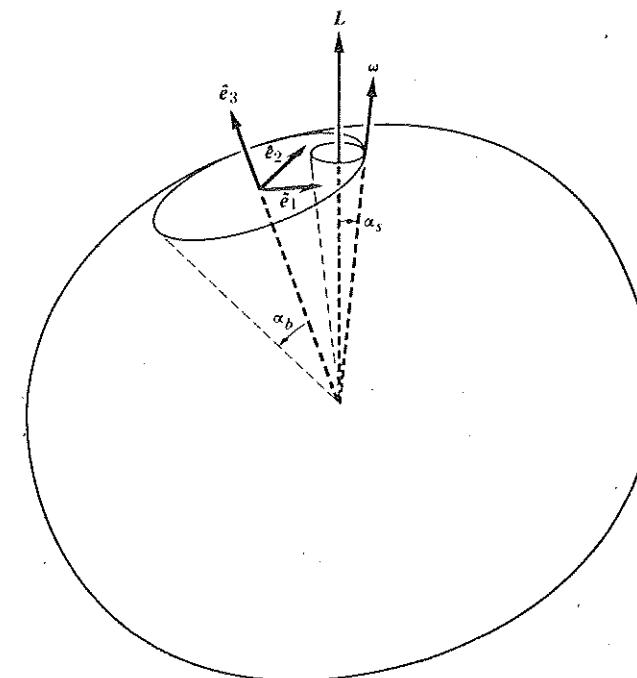


Fig. 11.1 Rotação livre de um corpo simétrico.

duas primeiras equações tornam-se, então, um par de equações lineares acopladas em ω_1 e ω_2 , que se resolvem da mesma forma que no exemplo anterior, obtendo-se

$$\omega_1 = A[I_2(I_3 - I_2)]^{1/2} \cos(\beta\omega_3 t + \theta), \quad (11.28)$$

$$\omega_2 = A[I_1(I_3 - I_1)]^{1/2} \sin(\beta\omega_3 t + \theta),$$

onde A e θ são constantes arbitrárias e

$$\beta = \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \right]^{1/2}. \quad (11.29)$$

Portanto, o vetor ω se move no sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio (olhando-se na direção positiva do eixo \hat{e}_3) formando uma pequena elipse em torno do eixo \hat{e}_3 . De maneira similar, mostra-se que, se ω for aproximadamente paralelo ao eixo \hat{e}_1 , ele se moverá no sentido dos ponteiros de um relógio, formando uma pequena elipse em torno deste eixo, mas se ω for aproximadamente paralelo ao eixo \hat{e}_2 , a solução terá forma exponencial. No último caso, os componentes ω_1 e ω_3 não permanecerão pequenos, e a aproximação ω_2 igual à constante só será válida durante a parte inicial do movimento. Conclui-se, então, que a rotação em torno do eixo de momento de inércia máximo e mínimo é estável, enquanto a rotação em torno do eixo intermediário é instável. É fácil demonstrar este resultado: é só lançar uma raquete de tênis ao ar, tentando fazê-la girar em torno de um eixo principal qualquer. A solução geral das Eqs. (11.7) para ω , quando $N = 0$, também pode ser obtida, pelo menos em princípio. Este problema será resolvido na seção seguinte, por um método diferente.

11.3 SOLUÇÃO DE POINSOT PARA O CASO DE UM CORPO QUE GIRA LIVREMENTE

Não existindo torques, $N = 0$, então as Eqs. (11.2) e (11.10) darão origem a quatro constantes do movimento:

$$L = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{constante}, \quad (11.30)$$

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{constante}. \quad (11.31)$$

Poinsot¹ representou geometricamente o movimento baseado nestas constantes do movimento, utilizando o elipsóide de inércia. Imagine que o elipsóide de inércia (10.157) esteja ligado rigidamente ao corpo e girando com ele. Considerando-se que \mathbf{r} seja o vetor da origem ao ponto onde o eixo de rotação intercepta o elipsóide de inércia em qualquer instante,

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{\omega} \boldsymbol{\omega}, \quad (11.32)$$

então, a comparação entre as Eqs. (11.31) e (10.157) mostra que

$$T = \frac{a^2\omega^2}{2r^2}. \quad (11.33)$$

¹ Peinsot, *Theorie nouvelle de la rotation de corps*, 1834.

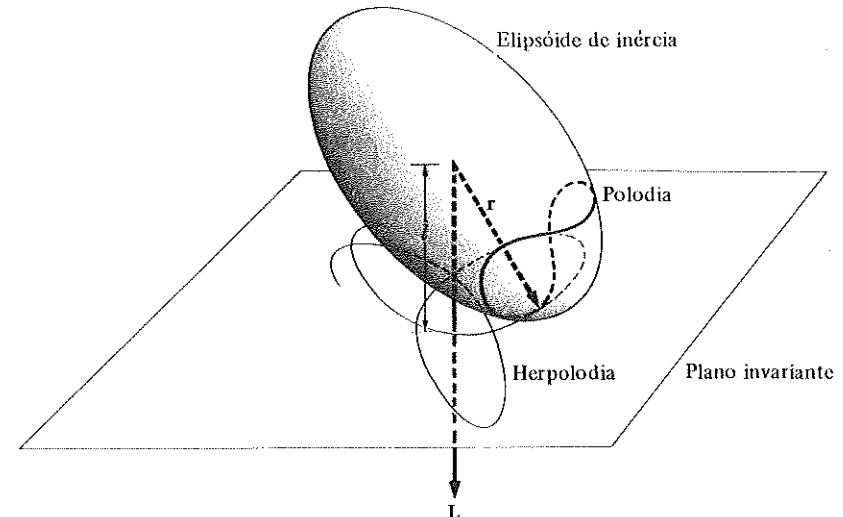


Fig. 11.2 O elipsóide de inércia rola sobre um plano fixo.

A normal ao elipsóide no ponto r é paralela ao vetor

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 2I_1x_1\hat{e}_1 + 2I_2x_2\hat{e}_2 + 2I_3x_3\hat{e}_3 = 2\frac{r}{\omega}\mathbf{L}, \quad (11.34)$$

onde x_1 , x_2 e x_3 são os componentes de \mathbf{r} ao longo dos eixos principais. Portanto, o plano tangente ao elipsóide no ponto r é perpendicular ao vetor constante \mathbf{L} (veja Fig. 11.2). Considere que l seja a distância perpendicular da origem ao seu plano tangente:

$$l = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}}{\mathbf{L}} = \frac{r}{\omega} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\mathbf{L}} = \frac{a(2T)^{1/2}}{L} = \text{constante}. \quad (11.35)$$

Portanto, o plano tangente é fixo no espaço (em relação à origem O) e chama-se *plano invariante* e sua posição é determinada pelas condições iniciais. Além disso, como o ponto de contato entre o elipsóide e o plano permanece no eixo instantâneo de rotação, o elipsóide rola sobre o plano sem deslizar. A velocidade angular, em qualquer instante, tem o valor

$$\omega = \frac{(2T)^{1/2}}{a} r. \quad (11.36)$$

Este resultado descreve completamente o movimento.

Como o momento de inércia rola sobre o plano invariante, estando o seu centro fixo na origem, o ponto de contato descreve uma curva, chamada *polodia*, sobre o elipsóide de inércia, e uma curva, chamada *herpolodia*, traçada sobre o plano invariante (veja Fig. 11.2). A polodia é uma curva fechada sobre o elipsóide de inércia, definida como o lugar geométrico dos pontos r onde os planos tangentes permanecem a uma distância fixa l do centro do elipsóide. Na Fig. 11.3, são mostradas várias polodias sobre um elipsóide de inércia não degenerado. Note que as características topológicas

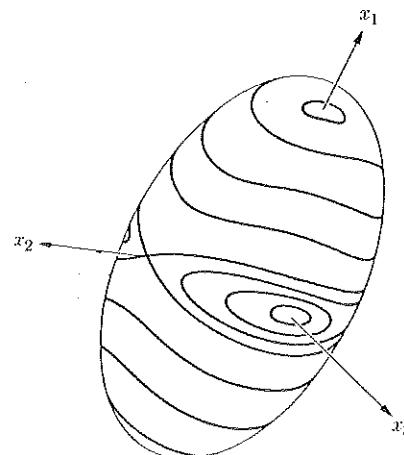


Fig. 11.3 Polodia sobre um elipsóide de inércia não degenerado.

do diagrama concordam com as conclusões apresentadas no final da seção precedente. Em geral, a herpologia não é fechada mas preenche um anel no plano invariante.

No caso de um corpo simétrico, pode-se mostrar (Probl. 7) que as polodias são circunferências em torno do eixo de simetria e as herpolodias são circunferências no plano invariante. Neste caso, de acordo com a Eq. (11.36), r e, portanto, ω (mas não $\omega!$) são constantes durante o movimento. A descrição do movimento, dada por Poincaré neste caso, concorda com a descrição da seção anterior. A polodia e a herpolodia são as interseções dos cones do corpo e do espaço com o elipsóide de inércia e o plano invariante, respectivamente.

11.4 ÂNGULOS DE EULER

Obtiveram-se os resultados, nas Seçs. 11.2 e 11.3, para o movimento de corpos rígidos sem utilização de qualquer sistema de coordenadas para descrever a orientação do corpo. Para continuar a discussão, será necessário introduzir um sistema de coordenadas apropriado. Escolhe-se um sistema de eixos fixos no corpo, os quais, por conveniência, devem ser tomados como eixos principais, com a origem no centro de massa ou num ponto fixo, se existir. Estes eixos serão identificados pelos índices 1, 2 e 3, como se fez anteriormente. Existindo um eixo de simetria, ele será identificado com o número 3; caso contrário, os eixos podem ser numerados em qualquer ordem. São necessárias três coordenadas para especificar a orientação do corpo em relação a sistema de eixos fixos no espaço, x , y e z . Especifica-se a relação entre os dois sistemas de eixos, fornecendo-se os coeficientes da transformação das coordenadas x , y e z para x_1 , x_2 e x_3 . Existem nove coeficientes, mas somente três deles são independentes, como foi visto anteriormente, não sendo conveniente usar três desses coeficientes como coordenadas. Como foi evidenciado na Seç. 5.1, não existem conjuntos simétricos de coordenadas análogas a x , y e z com as quais descreve-se a orientação do corpo. Entre os vá-

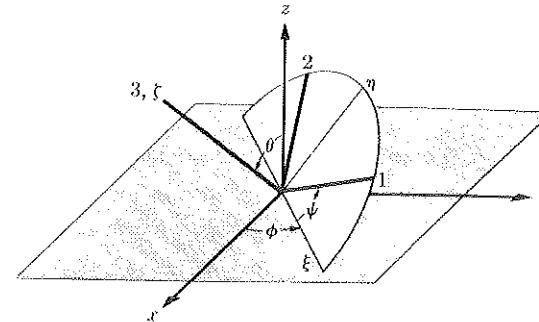


Fig. 11.4 Ângulos de Euler.

rios sistemas de coordenadas que foram introduzidos para este propósito, um dos mais úteis é sugerido por Euler.

Os ângulos de Euler θ , ϕ e ψ , mostrados na Fig. 11.4, são usados na especificação da posição dos eixos do corpo, 1, 2 e 3, em relação aos eixos espaciais x , y e z . Os eixos do corpo 1, 2 e 3 são traçados com linhas espessas e as coordenadas espaciais x , y e z são mais finas. O ângulo θ é o formado entre os eixos 3 e z . Como o eixo 3 foi escolhido para receber tratamento especial, se o corpo tiver um eixo de simetria, ele deverá ser o escolhido como o 3. Da mesma forma, se os torques externos possuírem um eixo de simetria no espaço, este deve ser escolhido como o eixo z . A interseção do plano 1, 2 com o plano x , y chama-se *linha de nodos*, identificada por ξ no diagrama. O ângulo ϕ é medido no plano xy a partir do eixo x até a linha de nodos, como é mostrado. O ângulo ψ é medido no plano 1, 2 a partir da linha de nodos até o eixo 1, na suposição de que ambos os sistemas de eixos, x , y , z e 1, 2, 3, sejam orientados segundo a regra da mão direita. Será conveniente introduzir um terceiro sistema de coordenadas, ξ , η e ζ (orientadas segundo a mão direita), das quais ξ é a linha de nodos, ζ coincide com o eixo 3 do corpo e η está no plano 1, 2.²

Para expressar o vetor velocidade ω em termos dos ângulos de Euler, demonstrase inicialmente que as velocidades angulares podem ser somadas como vetores, no sentido do enunciado do seguinte teorema:

Dado um sistema de coordenadas com linha que gire em velocidade angular ω_1 , em relação a sistema sem linha, e um sistema de coordenadas com asterisco, em velocidade angular ω_2 , em relação ao sistema com linha, a velocidade angular do sistema com asterisco em relação ao sistema sem linha será $\omega_1 + \omega_2$. (11.37)

² O leitor deve estar prevenido que a notação dos ângulos de Euler, assim como a convenção em relação a que eixos eles são escolhidos, e mesmo a utilização de eixos orientados segundo a mão direita, não são padronizadas na literatura, sendo, portanto, necessário observar cuidadosamente como cada autor define estes ângulos. A convenção que se adotou aqui é muito comum, mas não é universal.

Para demonstrar este teorema, considere que A seja um vetor no sistema com asterisco:

$$\frac{d^*A}{dt} = 0. \quad (11.38)$$

Então, de acordo com o Teorema (7.22), a sua velocidade relativa ao sistema com linha será

$$\frac{d'A}{dt} = \omega_2 \times A. \quad (11.39)$$

Aplicando-se outra vez o Teorema (7.22), determina-se a velocidade de A em relação ao sistema sem linha:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \omega_1 \times A = (\omega_1 + \omega_2) \times A. \quad (11.40)$$

Comparando-se finalmente com o Teorema (7.22), observa-se que $(\omega_1 + \omega_2)$ é a velocidade angular do sistema com asterisco em relação a sistema sem linha.

Considere, agora, a Fig. 11.4 e suponha que o corpo se move de tal forma que θ , ϕ e ψ variem com o tempo. Se somente θ variar, enquanto ϕ , ψ permanecem fixos, o corpo girará em torno de uma linha de nodos em velocidade angular $\dot{\theta}\hat{\xi}$. Se somente ϕ variar, o corpo girará em torno do eixo z em velocidade angular $\dot{\phi}\hat{z}$. Se somente ψ variar, o corpo girará em torno de seu eixo 3 em velocidade angular $\dot{\psi}\hat{e}_3$. Considerando-se agora um sistema de coordenadas com linha girando em velocidade angular $\dot{\phi}\hat{z}$ em torno do eixo z , e que o sistema ξ , η e ζ gire com velocidade angular $\dot{\theta}\hat{\xi}$ em relação ao sistema com linhas, então, de acordo com o Teorema (11.37), a velocidade do sistema ξ , η e ζ será $\dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\phi}\hat{z}$. Os eixos 1, 2 e 3 giram em velocidade angular $\dot{\psi}\hat{e}_3$ em relação a ξ , η e ζ ; então, a velocidade angular do corpo será

$$\omega = \dot{\theta}\hat{\xi} + \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\psi}\hat{e}_3. \quad (11.41)$$

Da Fig. 11.4, tiram-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \hat{e}_1 \cos \psi - \hat{e}_2 \sin \psi, \\ \hat{\eta} &= \hat{e}_1 \sin \psi + \hat{e}_2 \cos \psi, \\ \hat{\xi} &= \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (11.42)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \hat{\zeta} \cos \theta + \hat{\eta} \sin \theta \\ &= \hat{e}_1 \sin \theta \sin \psi + \hat{e}_2 \sin \theta \cos \psi + \hat{e}_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Pode-se, portanto, expressar ω em termos de seus componentes ao longo dos eixos principais:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.44)$$

A energia cinética será, então, dada, de acordo com a Eq. (10.153), por

$$T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2. \quad (11.45)$$

A energia cinética é uma expressão complicada que envolve $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$, θ e ψ . Note que θ , ϕ e ψ não são coordenadas ortogonais, isto é, os termos cruzados envolvendo $\dot{\theta}\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}\dot{\phi}$ aparecerão em T . No caso de um corpo simétrico ($I_1 = I_2$), a expressão para T pode ser simplificada e assume a forma:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (11.46)$$

As forças generalizadas Q_θ , Q_ϕ e Q_ψ podem ser facilmente conhecidas como os torques, em relação aos eixos ξ , z e 3 .

Agora já se podem escrever as equações de Lagrange para a rotação de um corpo rígido submetido a torques conhecidos. Se as forças derivarem de uma energia potencial $V(\theta, \phi, \psi)$, então existirá uma constante de movimento. Se V for independente de ϕ , então se verifica a partir da Eq. (11.44) que ϕ é uma coordenada ignorável. Infelizmente, isto não é o suficiente para permitir a obtenção de uma solução geral para o problema. No entanto, para corpos simétricos, se V for independente de ψ também se pode verificar com auxílio da Eq. (11.46) que ambas, ϕ e ψ , são ignoráveis. Têm-se, assim, três constantes de movimento, o suficiente para resolver o problema, caso que será considerado na próxima seção. Há alguns outros casos especiais que podem ser resolvidos,³ mas para o problema geral do movimento de corpos não-simétricos sob a ação de torques externos, como para o de muitos corpos, não existem métodos gerais de solução, exceto por meio de integração numérica das equações do movimento.

11.5 O PIÃO SIMÉTRICO

O pião simétrico, representado na Fig. 11.5, é um corpo para o qual $I_1 = I_2$ e gira em torno de um ponto fixo O no eixo de simetria e a uma distância l do centro de massa G , localizado também no eixo de simetria. As únicas forças externas são as de vínculo exercidas sobre O e a da gravidade. Portanto, de acordo com a Eq. (11.46), a função lagrangiana será

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mg l \cos \theta. \quad (11.47)$$

As coordenadas ψ e ϕ são ignoráveis, tendo-se, portanto, três constantes do movimento

$$\frac{dp_\psi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad (11.48)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad (11.49)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (11.50)$$

³ Veja, por exemplo, E. J. Routh, *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 6. ed., London, Macmillan, 1905.

onde

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \phi \cos \theta), \quad (11.51)$$

$$p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \phi \cos \theta), \quad (11.52)$$

$$E = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \phi \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta. \quad (11.53)$$

Usando as Eqs. (11.51) e (11.52) para eliminar $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ da Eq. (11.53):

$$E = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos \theta. \quad (11.54)$$

Agora, resolve-se o problema pelo método da energia. Fazendo-se

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}, \quad (11.55)$$

$$\mathcal{V}' = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad (11.56)$$

então

$$\dot{\theta} = \left\{ \frac{2}{I_1} [E' - \mathcal{V}'(\theta)] \right\}^{1/2}, \quad (11.57)$$

e $\theta(t)$ é obtido, em princípio, solucionando-se a integral

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{[E' - \mathcal{V}'(\theta)]^{1/2}} = \left(\frac{I_1}{2} \right)^{1/2} t \quad (11.58)$$

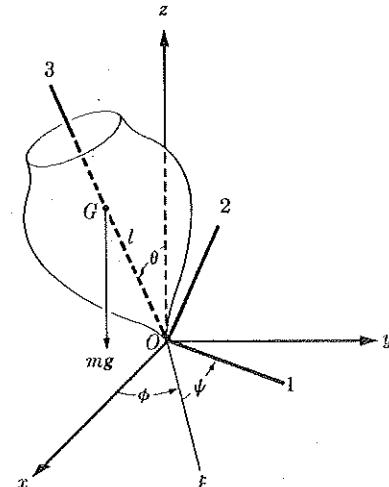


Fig. 11.5 Coordenadas de um pião simétrico.

A constante θ_i é o valor inicial de θ . Uma vez que $\theta(t)$ é conhecido, as Eqs. (11.51) e (11.52) podem ser resolvidas para obter-se $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ que, por sua vez, podem ser integradas para fornecerem $\psi(t)$ e $\phi(t)$.

Comparando-se as Eqs. (11.44) e (11.51), observa-se que

$$p_\psi = I_3 \omega_3, \quad (11.59)$$

de forma que ω_3 será uma constante do movimento. Se $\omega_3 = 0$, então a Eq. (11.56) reduz-se essencialmente à fórmula (9.137) para o pêndulo esférico, como era de esperar. Na Fig. 11.6, está representada ' $\mathcal{V}'(\theta)$ ' como função de θ para $\omega_3 \neq 0$. O 'torque' associado à energia potencial ' $\mathcal{V}'(\theta)$ ' será

$$N = -\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial \theta} = mgl \sin \theta - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)(p_\psi - p_\phi \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta}. \quad (11.60)$$

Observando-se a Eq. (11.60), vê-se que, em geral (se $p_\phi \neq p_\psi$), o 'torque' ' N ' será positivo para $\theta \approx 0$ e negativo para $\theta \approx \pi$, sendo igual a zero entre 0 e π . Logo, ' \mathcal{V}' ' tem um mínimo no ponto θ_0 , como pode ser visto na Fig. 11.6, satisfazendo a equação

$$mgl I_1 \sin^4 \theta_0 - (p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)(p_\psi - p_\phi \cos \theta_0) = 0. \quad (11.61)$$

Se $E' = \mathcal{V}'(\theta_0)$, a precessão do eixo do pião será uniforme no ângulo θ_0 formado com a vertical e em velocidade angular igual a

$$\phi_0 = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta_0}{I_1 \sin^2 \theta_0}. \quad (11.62)$$

Resolvendo-se a Eq. (11.61) para $(p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)$ e usando-se a Eq. (11.59), obtém-se

$$(p_\phi - p_\psi \cos \theta_0) = \frac{1}{2}I_3\omega_3 \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4mgI_1}{I_3^2\omega_3^2} \cos \theta_0 \right)^{1/2} \right]. \quad (11.63)$$

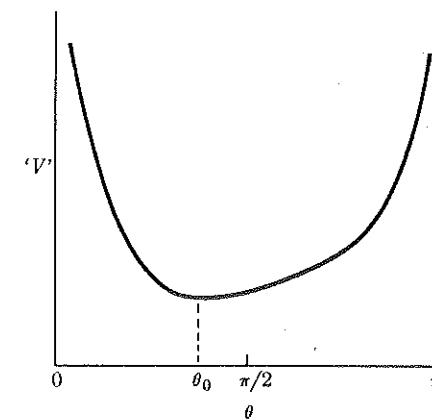


Fig. 11.6 Energia potencial efetiva para um pião simétrico quando $p_\phi \neq p_\psi$.

Verifica-se que se $\theta_0 < \pi/2$, o pião terá uma velocidade angular mínima abaixo da qual não pode haver precessão uniforme em um ângulo θ_0

$$\omega_{\min} = \left(\frac{4mgI_1}{I_3^2} \cos \theta_0 \right)^{1/2}. \quad (11.64)$$

Para $\omega_3 > \omega_{\min}$, existem duas raízes (11.63) e, portanto, dois valores possíveis de $\dot{\phi}_0$, correspondente a uma precessão lenta e a outra rápida, ambas na mesma direção da velocidade angular ω_3 . Para $\omega_3 \gg \omega_{\min}$, as precessões lentas e rápidas ocorrem em velocidades angulares

$$\dot{\phi}_0 = \frac{I_3}{I_1} \frac{\omega_3}{\cos \theta_0}, \quad (11.65)$$

e

$$\dot{\phi}_0 = \frac{mgl}{I_3 \omega_3}. \quad (11.66)$$

É a precessão lenta, que é comumente observada em piões que giram rapidamente. Para $\theta_0 > \pi/2$ (piões que giram com o eixo abaixo da horizontal), existe um valor positivo e outro negativo de $\dot{\phi}_0$. (Para que se reduzem estes movimentos de precessão uniforme quando $\omega_3 \rightarrow 0$?)

Estudando-se a Fig. 11.6, observa-se que o movimento mais geral envolve *nutação* ou oscilação do eixo do pião na direção θ enquanto houver precessão. O eixo oscila entre os ângulos θ_1 e θ_2 , que satisfazem a equação

$$E' = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad (11.67)$$

onde p_ϕ , p_ψ e E' são determinados a partir das condições iniciais. Multiplicando-se a Eq. (11.67) por $\sin^2 \theta$, ela se torna cúbica em $\cos \theta$. Verifica-se, a partir da Fig. 11.6, que devem existir duas raízes reais, $\cos \theta_1$ e $\cos \theta_2$, entre -1 e $+1$. A terceira raiz para $\cos \theta$ deve estar fora do intervalo físico -1 a $+1$. Na realidade, analisando-se a Eq. (11.67), vê-se que a terceira raiz é maior que $+1$. (No caso de precessão uniforme, discutido no parágrafo anterior, as duas raízes físicas coincidem, $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos \theta_0$.) Se inicialmente $\dot{\theta} = 0$, então o valor inicial $\cos \theta_1$ de $\cos \theta$ satisfaz a Eq. (11.67); conhecendo-se uma raiz da equação cúbica, pode-se fatorar a equação e determinar todas as três raízes. Durante a nutação, a velocidade de precessão varia de acordo com a Eq. (11.52):

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (11.68)$$

Se $|p_\phi| < |p_\psi|$, pode-se definir um ângulo θ_3 como se segue:

$$\cos \theta_3 = \frac{p_\phi}{p_\psi}. \quad (11.69)$$

Para $\theta > \theta_3$, $\dot{\phi}$ tem o mesmo sinal que ω_3 , mas para $\theta < \theta_3$, o sinal é oposto. A derivada em relação a θ do segundo membro da Eq. (11.67) será negativa para $\theta = \theta_3$, podendo-se, então, verificar da Fig. 11.6 que $\theta_3 < \theta_2$, onde θ_2 é o maior ângulo que satisfaz a Eq. (11.67). De fato, $\theta_3 < \theta_1$ (ou se $|p_\phi| > |p_\psi|$ e p_ϕ e p_ψ tiverem o mesmo sinal), então $\dot{\phi}$ tem o mesmo sinal que ω_3 durante a nutação, e o eixo do pião descreve uma curva como a mostrada na Fig. 11.7(a). Se $\theta_3 > \theta_1$, $\dot{\phi}$ troca de sinal durante a nutação e o eixo do pião se move como na Fig. 11.7(b). Torna-se claro que se o pião for colocado inicialmente em movimento sobre um plano horizontal com $\dot{\phi}$ tendo sinal oposto a ω_3 , o movimento será necessariamente como o mostrado na Fig. 11.7(b).

Um caso especial ocorre quando o pião, girando em torno de seu eixo em velocidade angular ω_3 , permanece com o seu eixo inicialmente em repouso formando um ângulo θ_1 , sendo, então, largado. Tem-se inicialmente

$$\theta = \theta_1, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \phi = 0, \quad \dot{\phi} = \omega_3. \quad (11.70)$$

Substituindo nas Eqs. (11.51), (11.52) e (11.53),

$$p_\psi = I_3 \omega_3, \quad p_\phi = I_3 \omega_3 \cos \theta_1, \quad E' = mgl \cos \theta_1. \quad (11.71)$$

Neste caso, verifica-se que $\theta_3 = \theta_1$, sendo o movimento mostrado na Fig. 11.7(c). Uma discussão elementar deste caso, baseada na conservação do momento angular, foi apresentada na Seç. 4.2. Na presente discussão, a Eq. (11.56) torna-se

$$V' = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} \left[\frac{(\cos \theta_1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta \right], \quad (11.72)$$

onde

$$\alpha = \frac{2I_1 mgl}{I_3^2 \omega_3^2}. \quad (11.73)$$

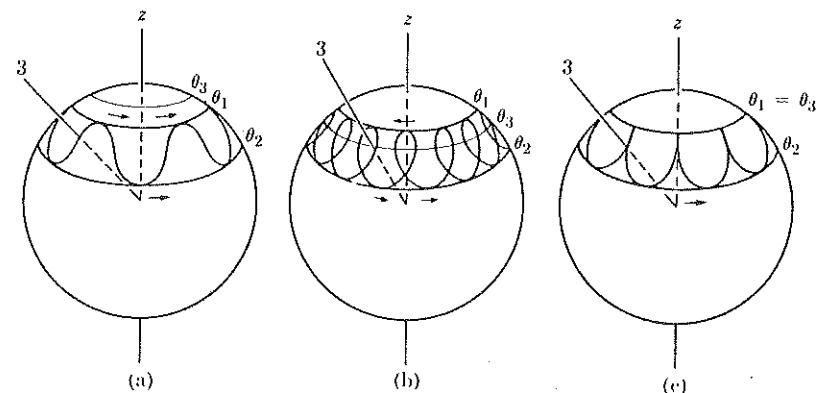


Fig. 11.7 Lugar geométrico do eixo (3) do pião sobre uma esfera unitária.

Os pontos de retorno para a nutação são as raízes da Eq. (11.67), as quais tornam-se neste caso, multiplicando-se por $\sin^2 \theta$,

$$(\cos \theta_1 - \cos \theta)^2 - \alpha(\cos \theta_1 - \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) = 0. \quad (11.74)$$

As raízes são

$$\cos \theta = \cos \theta_1, \quad (11.75)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2\alpha} [1 \pm (1 - 4\alpha \cos \theta_1 + 4\alpha^2)^{1/2}].$$

O ângulo θ_2 é dado pela segunda fórmula, quando se usa o sinal menos na expressão entre os colchetes. O sinal mais fornece a raiz para $\cos \theta$ maior do que +1. Considere o caso de um pião que gira rapidamente, isto é, quando $\alpha \ll 1$. Então,

$$\cos \theta_2 \doteq \cos \theta_1 - \alpha \sin^2 \theta_1. \quad (11.76)$$

O ângulo θ_2 é ligeiramente maior do que θ_1 e a amplitude da nutação é proporcional a α . Fazendo-se

$$\theta_2 = \theta_0 + a, \quad \theta_1 = \theta_0 - a, \quad (11.77)$$

e substituindo-se na Eq. (11.76), obtém-se, até a primeira ordem em a e α ,

$$a \doteq \frac{1}{2}\alpha \sin \theta_1. \quad (11.78)$$

Fazendo, então,

$$\theta = \theta_0 + \delta \doteq \theta_1 + a + \delta, \quad (11.79)$$

e substituindo na Eq. (11.72) que, até segunda ordem em a e δ , torna-se:

$$'V' \doteq V(\theta_0) + \frac{1}{2} \frac{I_3^2}{I_1} \omega_3^2 \delta^2. \quad (11.80)$$

O primeiro termo é constante e o segundo conduz a oscilações harmônicas de δ com uma freqüência

$$\omega_\theta = \frac{I_3}{I_1} \omega_3. \quad (11.81)$$

A nutação é dada por

$$\dot{\phi} \doteq \dot{\theta}_1 + a - a \cos \omega_\theta t. \quad (11.82)$$

Substituindo-se o resultado acima na Eq. (11.68), obtém-se o seguinte resultado para $\dot{\phi}$ até termos de primeira ordem em a :

$$\dot{\phi} \doteq \frac{I_3 \omega_3 a}{I_1 \sin \theta_1} [1 - \cos \omega_\theta t]. \quad (11.83)$$

A velocidade angular média de precessão será

$$\langle \dot{\phi} \rangle_{av} = \frac{I_3 \omega_3 a}{I_1 \sin \theta_1} = \frac{mgl}{I_3 \omega_3}. \quad (11.84)$$

Portanto, a precessão do eixo do pião será muito lenta e a sua nutação, muito rápida e com uma amplitude muito pequena. Na prática, os torques de atrito que foram desprezados em geral amortecem a nutação de maneira muito rápida, deixando somente a precessão uniforme.

Como exemplo final, considere o caso em que o pião gira inicialmente com o seu eixo de simetria na vertical. Neste caso, admitindo-se que o eixo 3 e o eixo z coincidam, a linha de nodos é indeterminada. Pode-se observar, a partir da Fig. 11.4, que se determina o ângulo $\psi + \phi$ como o existente entre o eixo x e o eixo 1, embora ψ e ϕ separadamente sejam indeterminados. Logo, inicialmente

$$p_\psi = I_3(\psi + \phi) = I_3 \omega_3, \quad (11.85)$$

$$p_\phi = I_3(\psi + \phi) = p_\psi. \quad (11.86)$$

Neste caso, a Eq. (11.56) torna-se

$$'V' = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} \left[\frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta \right], \quad (11.87)$$

onde α é dado pela Eq. (11.73). Este é exatamente um caso especial da Eq. (11.72). Na Fig. 11.8, mostra-se a curva para ' V' ', no caso em que $p_\phi = p_\psi$. A forma da curva depende do valor de α . Pode-se ver que no caso de o movimento ser rápido ($\alpha < \frac{1}{2}$), o pião poderá girar estacionariamente em torno do eixo vertical; se perturbado, a nutação será pequena em torno do eixo vertical. Quando o pião gira lentamente ($\alpha > \frac{1}{2}$) não pode girar estacionariamente em torno do eixo vertical, mas a nutação será grande, entre $\theta_1 = 0$ e θ_2 , que é dada pela Eq. (11.75). Neste caso,

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\alpha} - 1. \quad (11.88)$$

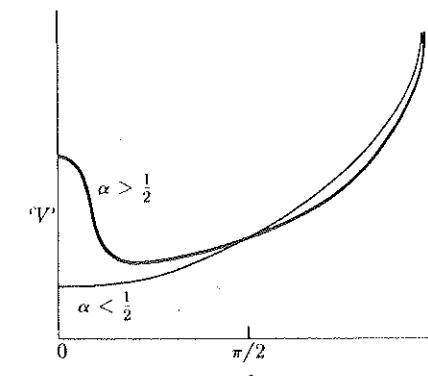


Fig. 11.8 Energia potencial efetiva quando $p_\phi = p_\psi$.

A velocidade angular mínima, abaixo da qual o pião não pode girar estacionariamente em torno do eixo vertical, ocorre quando $\alpha = \frac{1}{2}$, ou, de acordo com a Eq. (11.73),

$$\omega_{\min} = \left[\frac{4mgI_1}{I_3^2} \right]^{1/2}. \quad (11.89)$$

Note que esta fórmula concorda com a Eq. (11.64). Se inicialmente $\omega_3 > \omega_{\min}$, o pião girará com o seu eixo na vertical, mas quando o atrito reduz ω_3 abaixo de ω_{\min} ele começará a oscilar.

Todas as conclusões sobre o comportamento de um pião simétrico, submetido a várias condições iniciais, podem ser verificadas experimentalmente com um pião ou com um giroscópio.

PROBLEMAS

1. Use o resultado do Probl. 3 do Cap. 10, para derivar diretamente a Eq. (11.6) a partir da equação

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = N.$$

2. a) Suponha que a Terra seja um elipsóide de revolução rígido e uniforme; utilize os seus diâmetros equatorial e polar reais e calcule a velocidade angular de precessão do pólo norte sobre a superfície da Terra supondo que o eixo polar (isto é, o eixo de rotação) apresente ligeiro desvio em relação ao eixo de simetria. (Na realidade, observa-se uma precessão irregular aproximadamente deste tipo, com uma amplitude de alguns centímetros e num período de 427 dias.)

- b) Suponha que a Terra seja uma esfera rígida e que uma montanha de massa 10^{-9} vezes a massa terrestre seja adicionada em um ponto situado a 45° do eixo polar. Descreva o movimento do pólo resultante. Quanto tempo levará o pólo para se mover 1 600 km?

- c) Considerando-se a Terra com a forma de um elipsóide rígido, como na parte (a), como a massa da "montanha" deverá ser colocada no equador para que a precessão polar se torne instável?

Na realidade, a Terra não tem densidade uniforme, mas é mais densa próximo a seu centro. O mais importante é que a Terra não é rígida, mas comporta-se como um esferóide elástico, durante intervalos de tempo curtos, podendo deformar-se plasticamente durante períodos longos. Os resultados obtidos neste problema são apenas sugestões e não correspondem ao seu verdadeiro movimento. Por exemplo, o período da precessão observado de 427 dias é mais longo do que seria obtido se a Terra fosse rígida. Quando a deformação plástica é levada em conta, pode resultar num movimento

aleatório apreciável do pólo, mesmo no caso de se considerar a Terra elipsoidal com uma "montanha menor" do que a da parte (c).⁴

3. Mostre que o eixo de rotação de um corpo rígido, simétrico, que gire livremente tem um movimento de precessão no espaço com velocidade angular

$$\omega_n = (2\beta + \beta^2 + \sec^2 \alpha_b)^{1/2} \omega_3,$$

onde a notação é a usada na Seç. 11.2.

4. Mostre que se o único torque exercido sobre um corpo rígido simétrico se fizesse em torno do eixo de simetria, $(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ seria constante, sendo ω_1 e ω_2 componentes da velocidade angular ao longo dos eixos perpendiculares ao de simetria. Se $N_3(t)$ for conhecido, mostre como se pode determinar ω_1 , ω_2 e ω_3 .

5. Um corpo rígido simétrico move-se livremente no espaço e é impulsionado com motores a jato, colocados simetricamente em relação ao eixo 3 do corpo, e fornecendo um torque constante N_3 em torno do eixo de simetria. Determine a solução geral para o vetor velocidade angular como função do tempo, em relação aos eixos do corpo. Descreva como o vetor velocidade angular se move em relação ao corpo.

6. a) Considere uma esfera carregada, cujas massa m e carga e são distribuídas de maneira esfericamente simétrica. Isto é, a densidade de massa e de carga são funções do raio r (mas não necessariamente a mesma função). Mostre que se este corpo girar em um campo magnético uniforme B , o torque sobre ele será

$$N = \frac{eg}{2mc} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (\text{unidades gaussianas}),$$

onde g é uma constante numérica e $g = 1$, se a densidade de massa for em todos os pontos proporcional à densidade de carga.

- b) Escreva uma equação do movimento para o corpo, mostrando que, caso se introduza um sistema de coordenadas com movimento de rotação apropriado, poder-se-á eliminar o torque magnético.

- c) Compare este resultado com o Teorema de Larmor (Cap. 7). Por que neste caso não é necessário levantar suposição sobre a intensidade do campo magnético?

- d) Descreva o movimento. Quais são os pontos do corpo que estão em repouso no sistema de coordenadas com movimento de rotação?

7. Demonstre (sem usar os resultados da Seç. 11.2) que se dois momentos de inércia principais forem iguais, tanto a polodídia como a herpolodídia será círculos.

⁴ Uma excelente discussão resumida sobre a rotação terrestre, tratada como um elipsóide elástico e plástico, poderá ser encontrada em um artigo de D. R. Inglis, *Reviews of Modern Physics*, v. 29, p. 9 (1957).

8. a) Obtenha as equações em termos das coordenadas principais x_1 , x_2 e x_3 , para duas superfícies quadráticas cuja interseção é a polodia. Suas equações podem conter os parâmetros I_1 , I_2 , I_3 e l .

b) Determine a equação para a projeção da polodia sobre um plano coordenado qualquer, mostrando que as polodias são curvas fechadas, em torno dos pólos maior e menor do elipsóide, e curvas hiperbólicas próximo do eixo intermediário, como é mostrado na Fig. 11.3.

c) Determine os raios dos círculos sobre o plano invariante que limita a herpolodia.

9. Determine a matriz (a_{ij}) que transforma os componentes de um vetor dos eixos do espaço para os eixos do corpo. Escreva a_{ij} em termos dos ângulos, de Euler. [Sugestão. Efetue a transformação de três rotações consecutivas de ângulos θ , ϕ e ψ , em torno de eixos convenientes, executando-as na ordem apropriada.]

10. Escreva a função hamiltoniana em termos de θ , ψ , ϕ , p_θ , p_ψ e p_ϕ para um corpo rígido, assimétrico, que gira livremente. Expressse os coeficientes em termos dos parâmetros I_1 , I_3 , ($I_2 - I_1$).

11. Use as equações de Lagrange para tratar a rotação livre de um corpo rígido, assimétrico, próximo de um dos seus eixos principais e mostre que o resultado obtido concorda com o último parágrafo da Seç. 11.2.

12. Escreva as equações de Lagrange para um pião simétrico, para o qual a extremidade do eixo desliza sem atrito sobre uma mesa horizontal lisa. Discuta cuidadosamente as diferenças entre os movimentos, neste caso e naquele em que o eixo do pião gira em torno de um ponto fixo.

13. Um giroscópio, constituído de um disco de raio a e massa M , encontra-se preso rigidamente ao centro de um eixo de comprimento $(3a/2)$ e massa $(2M/7)$, seção transversal desprezível e montado dentro de dois anéis perpendiculares, cada um deles com raio $(3a/2)$ e massa $(M/3)$. O eixo gira sobre pontos de apoio sem atrito na interseção dos anéis. Um desses pontos de interseção gira sem atrito em torno de um ponto fixo O . Escreva a função lagrangiana e discuta os tipos de movimentos que podem ocorrer (sob a ação da gravidade).

14. Discuta a rotação livre de um corpo rígido simétrico, usando o método de Lagrange. Determine a velocidade angular para precessão uniforme e freqüência de pequenas nutações em torno desta precessão uniforme. Descreva o movimento e mostre que os resultados obtidos concordam com as soluções da Seç. 11.2 e do Probl. 3.

15. Um pião consiste num disco de massa M e raio r montado no centro de um eixo cilíndrico de comprimento l , raio a , onde $a \ll l$, e massa desprezível. Uma das extremidades do eixo permanece em repouso sobre a mesa, como se vê na Fig. 11.9. O coefi-

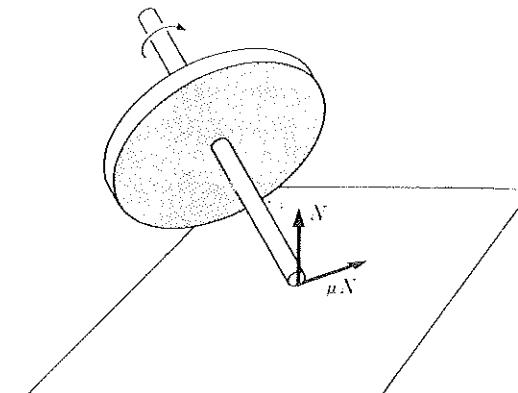


Fig. 11.9 Pião simples.

ciente de atrito de deslizamento é μ . O pião é posto a girar em torno de seu eixo de simetria em velocidade angular ω_{30} muito grande, sendo, depois, largado com o eixo formando um ângulo θ_1 com a vertical. Suponha que ω_3 seja suficientemente grande quando comparado com os outros movimentos do pião, de forma que a extremidade do eixo em contato com a mesa deslize sobre ela em direção perpendicular ao eixo do pião, cujo sentido é determinado por ω_3 . Escreva as equações do movimento do pião. Suponha que a nutação seja suficientemente pequena para ser desprezada, e que o atrito não seja demasiadamente grande, de forma que a precessão do pião seja vagarosamente formando um ângulo θ_0 , que varia lentamente devido ao atrito com a mesa. Mostre que o eixo do pião subirá inicialmente para a posição vertical. Determine aproximadamente o tempo necessário e o número de revoluções completas de precessão durante este tempo. Descreva todo o movimento do pião em relação à mesa durante o processo. Por quanto tempo o pião permanecerá na vertical antes que o seu eixo comece a oscilar?

16. Usando um giroscópio de brinquedo, tome as medidas necessárias para prever a taxa de precessão, quando estiver girando na maior velocidade, se o seu eixo girar em torno de um ponto fixo e fazendo um ângulo de 45° com a vertical. Calcule a amplitude da nutação se o eixo for preso ao formar um ângulo de 45° , sendo solto em seguida. Realize a experiência e compare a taxa de precessão medida com a taxa calculada.

17. Um planeta, em forma de uma esfera uniforme de raio a e massa M , é rodeado no equador por um anel de massa m . O planeta move-se (em um plano) em torno de uma estrela de massa M' . Obtenha a função lagrangiana, usando coordenadas polares r e α , no plano da órbita, e os ângulos θ , ϕ e ψ , em relação aos eixos espaciais, dos quais o eixo z é perpendicular ao plano da órbita, e o eixo x é paralelo ao eixo a partir do qual α é medido. O leitor pode supor que $r \gg a$ e usar o resultado do Probl. 15, Cap. 6. Determine as coordenadas ignoráveis, mostrando que o período de rotação do planeta é constante.

18. Suponha que o planeta do Probl. 17 tenha um movimento de revolução circular de raio r em torno do Sol, embora isto não satisfaça inteiramente as equações do movimento. Suponha que o período de revolução seja curto, em comparação com qualquer precessão do eixo de rotação, de tal forma que, no estudo da rotação seja permitido usar um ângulo α médio. Mostre que a precessão (lenta) uniforme do eixo polar poderá ocorrer, caso a inclinação do eixo forme um ângulo θ_0 em relação à normal ao plano da órbita, e determine a velocidade angular de precessão em termos das massas M , m e M' , dos raios a e r , do ângulo θ_0 e da velocidade angular de rotação. Mostre que se o dia for muito menor do que o ano, a suposição acima sobre o período de revolução e a taxa de precessão é válida. Determine a freqüência de pequenas nutações em torno desta precessão uniforme e mostre que quando o dia é muito menor do que o ano, ela corresponderá à precessão livre, cuja velocidade é fornecida no Probl. 3.

19. Determine as massas M e m necessárias para que os principais momentos de inércia do planeta do Probl. 17 sejam os mesmos dos obtidos para um elipsóide uniforme de massa e forma iguais às da Terra. Mostre que, com as aproximações feitas no Probl. 18, se o Sol e a Lua estiverem no plano orbital terrestre (o que acontece aproximadamente), o efeito de ambos, Sol e Lua, no movimento de rotação da Terra pode ser levado em conta pela simples soma das velocidades angulares de precessão, que seriam causadas por aqueles astros, separadamente. O equador faz um ângulo de $23,5^\circ$ com o plano orbital. Determine o período total de precessão resultante. [O valor medido é de 26 000 anos.]

*20. Escreva as equações de Lagrange para o movimento do corpo rígido do Probl. 5. Desenvolva a solução o máximo que puder. [Use os resultados do Probl. 5 se desejar.] Mostre que se pode obter uma equação diferencial de segunda ordem envolvendo somente θ . O leitor será capaz de obter soluções particulares, ou soluções aproximadas, desta equação para casos especiais? Descreva os movimentos correspondentes. [Note que este problema, até onde possa ser resolvido, fornece o movimento do corpo no espaço, em contraste com o Probl. 5, onde se determina a velocidade angular em relação ao corpo.]

21. Um elétron, em muitos casos, pode ser considerado como uma carga esférica cujo movimento de rotação é idêntico ao considerado no Probl. 6, em que g é aproximadamente igual a 2. Mostre que se g fosse exatamente igual a 2 e se o momento angular de rotação do elétron fosse inicialmente paralelo à sua velocidade linear, então, enquanto o elétron se movesse através de um campo magnético qualquer, seu momento angular de rotação permaneceria sempre paralelo à sua velocidade.

22. Um satélite da Terra é uma esfera oca, de massa igual a 20 kg e diâmetro igual a 1 m. A sua direção é estabilizada por um giroscópio que consiste num disco de 4 kg e de 20 cm de diâmetro, montado num eixo de massa desprezível, cujos pontos de apoio sem atrito localizam-se em pontos opostos do diâmetro da esfera oca. A esfera

inicialmente não gira, mas o giroscópio gira com velocidade angular ω_0 . Um grão de poeira de 1 mg desloca-se perpendicularmente ao eixo do giroscópio com uma velocidade de 3×10^4 m/s e prende-se numa das extremidades do eixo da esfera. Qual deve ser a freqüência de rotação do giroscópio para que o seu eixo permaneça deslocado de 0,1 grau em relação à posição inicial imediatamente após a colisão? Basta obter uma precisão de dois algarismos significativos no resultado.

23. O girocompasso é um corpo rígido, simétrico, montado de tal forma que seu eixo move-se num plano horizontal na superfície terrestre. Escolha um par de coordenadas angulares apropriadas e escreva a função lagrangiana, considerando que o girocompasso esteja num ponto fixo da superfície da Terra, cuja colatitude seja θ_0 . Despreze o atrito. Mostre que o componente da velocidade angular ω_3 , ao longo do eixo de simetria, permanece constante, e que se $\omega_3 > (I_1/I_3)\omega_0 \sin \theta_0$, onde ω_0 é a velocidade angular da Terra, o eixo de simetria oscilará no plano horizontal em torno do eixo norte-sul. Determine a freqüência para pequenas oscilações. Em um girocompasso real, o rotor deve ser impulsionado para compensar os torques devido ao atrito em torno do eixo de simetria, enquanto os torques de atrito no plano horizontal amortecem as oscilações do eixo de simetria, o qual atingirá o repouso na linha norte-sul.

CAPÍTULO 12

TEORIA DAS PEQUENAS VIBRAÇÕES

Um problema importante e freqüentemente encontrado em Física é o da determinação de estabilidade de um determinado movimento de um sistema dinâmico. No caso de ser estável, é preciso determinar o caráter das pequenas vibrações relacionadas ao movimento específico. O problema mais simples desta espécie é o da estabilidade de um ponto em equilíbrio, que será discutido inicialmente. Neste caso, pode-se utilizar a Álgebra Tensorial, desenvolvida no Cap. 10, por proporcionar um método elegante de solução para pequenas oscilações. O problema será mais geral, quando se obtém uma solução particular para as equações do movimento. Pode-se, então, questionar sobre a estabilidade desta solução particular, no sentido de que cada uma delas que parta das condições iniciais suficientemente próximas da solução conhecida permaneça próxima desta. Este problema será discutido na Seç. 12.6, apresentando-se os métodos para solucionar o caso especial do movimento estacionário.

12.1 CONDIÇÕES PARA ESTABILIDADE NAS VIZINHANÇAS DE UMA CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Considere um sistema mecânico descrito pelas coordenadas generalizadas x_1, \dots, x_f , e submetido à ação de forças deriváveis da energia potencial $V(x_1, \dots, x_f)$ independente do tempo. Se o sistema estiver submetido a vínculos, suponha que as coordenadas são escolhidas de forma que x_1, \dots, x_f sejam coordenadas sem vínculo. O sistema de coordenadas deve ser fixo no tempo; portanto, a energia cinética terá a forma

$$T = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} M_{lk} \dot{x}_l \dot{x}_k. \quad (12.1)$$

As equações de Lagrange tornam-se, então,

$$\sum_{l=1}^f \frac{d}{dt} (M_{lk} \dot{x}_l) - \sum_{l,m=1}^f \frac{1}{2} \frac{\partial M_{lm}}{\partial x_k} \dot{x}_l \dot{x}_m + \frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12.2)$$

A solução destas equações será correspondente a uma configuração de equilíbrio, para a qual todas as coordenadas permanecem constantes, caso as equações possam ser resolvidas quando todos os termos dependentes da velocidade são iguais a zero. Portanto, o sistema pode estar em equilíbrio em qualquer configuração para a qual as forças generalizadas se anulam:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12.3)$$

Estas f equações devem ser resolvidas para os pontos de equilíbrio do sistema, se existirem.

A questão da estabilidade é facilmente respondida neste caso. Se $V(x_1, \dots, x_f)$ for mínima para uma configuração de equilíbrio x_1^0, \dots, x_f^0 , em relação a todas as configurações vizinhas $x_1^0 + \delta x_1, \dots, x_f^0 + \delta x_f$, então esta configuração será estável. A energia total

$$E = T + V \quad (12.4)$$

é constante. Considere que

$$E = V(x_1^0, \dots, x_f^0) + \delta E \quad (12.5)$$

seja a energia correspondente às condições iniciais $x_1^0 + \delta x_1^0, \dots, x_f^0 + \delta x_f^0; \dot{x}_1^0, \dots, \dot{x}_f^0$ próxima do equilíbrio. Então, se $\delta x_1^0, \dots, \delta x_f^0; \dot{x}_1^0, \dots, \dot{x}_f^0$ forem suficientemente pequenos, pode-se fazer δE tão pequeno quanto se queira. Como T nunca é negativo, o movimento será restrito, de acordo com a Eq. (12.4), a uma região no espaço das configurações para a qual

$$V(x_1, \dots, x_f) \leq V(x_1^0, \dots, x_f^0) + \delta E. \quad (12.6)$$

Como V tem um mínimo em (x_1^0, \dots, x_f^0) , se δE for suficientemente pequeno, o movimento ficará restrito a uma pequena região nas vizinhanças de x_1^0, \dots, x_f^0 . Além disso, como

$$T \leq \delta E, \quad (12.7)$$

as velocidades $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f$ estarão limitadas a pequenos valores. Portanto, o equilíbrio será estável no sentido de que os movimentos cujas velocidades são pequenas e aproximam-se da configuração de equilíbrio permanecerão próximas a essa configuração.

Reciprocamente, se V não tiver um mínimo nas vizinhanças de x_1^0, \dots, x_f^0 verifica-se ser plausível que o equilíbrio é instável, porque decrescerá em alguma direção afastada de x_1^0, \dots, x_f^0 . V . Escolhendo-se as coordenadas de forma que x_1 , por exemplo, corresponda àquela direção e que x_1 seja ortogonal às outras coordenadas, então a Eq. (12.2) para x_1 será

$$\frac{d}{dt} (M_{11} \dot{x}_1) - \sum_{l,m=1}^f \frac{1}{2} \frac{\partial M_{lm}}{\partial x_1} \dot{x}_l \dot{x}_m = -\frac{\partial V}{\partial x_1}. \quad (12.8)$$

Para velocidades suficientemente pequenas em que os termos quadráticos nas velocidades são desprezíveis, a equação acima torna-se

$$M_{11} \ddot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}. \quad (12.9)$$

Mas à medida que há afastamento do equilíbrio na direção x_1 , $\partial V / \partial x_1$ torna-se negativo e a aceleração de x_1 será positiva em pontos afastados do de equilíbrio. Na Seç. 12.3, demonstra-se de modo mais rigoroso que o equilíbrio será instável se V não tiver um mínimo no ponto.

Existe um teste para mostrar se o ponto é um mínimo e que, às vezes, é muito útil. Se x_1^0, \dots, x_f^0 for uma configuração de equilíbrio para a qual a Eq. (12.3) é válida, então corresponderá a um mínimo de $V(x_1, \dots, x_f)$ em relação às configurações próximas, com a condição de que todos os determinantes na seqüência abaixo sejam positivos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} > 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_f \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_f^2} \end{vmatrix} > 0, \quad (12.10)$$

onde as derivadas são calculadas em x_1^0, \dots, x_f^0 .¹

12.2 EQUAÇÕES LINEARIZADAS DO MOVIMENTO NAS VIZINHANÇAS DE UMA CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIOS

Nesta seção, estudar-se-á o movimento de um sistema nas vizinhanças de uma configuração de equilíbrio. Para isso, escolhem-se as coordenadas de forma que a configuração esteja na origem $x_1 = \dots = x_f = 0$. A energia potencial V deve ser expandida em uma série de Taylor em potências de x_1, \dots, x_f . O termo constante $V(0, \dots, 0)$ pode ser omitido, pois não aparece nas equações do movimento. Os termos lineares também não aparecerão em virtude das Eqs. (12.3). Se o estudo restringir-se a valores pequenos de x_1, \dots, x_f , desprezam-se os termos de terceira e de ordens superiores em x_1, \dots, x_f , de forma que

$$V = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} K_{kl} x_k x_l, \quad (12.11)$$

onde

$$K_{kl} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} \right)_{x_1 = \dots = x_f = 0} \quad (12.12)$$

Como o sistema de coordenadas é estacionário, a energia cinética será

$$T = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} M_{kl} \dot{x}_k \dot{x}_l. \quad (12.13)$$

Em geral, os coeficientes M_{kl} podem ser funções das coordenadas, mas como as velocidades devem ser pequenas, pode-se considerar até segunda ordem em x_1, \dots, x_f ; $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f$ que M_{kl} sejam os valores dos coeficientes em $x_1 = \dots = x_f = 0$.

As Eqs. (12.11) e (12.13) podem ser escritas de maneira sugestiva introduzindo-

¹ W. F. Osgood, *Advanced calculus*, New York, Macmillan, 1925, p. 179.

se no espaço das configurações f -dimensionais um vetor de configuração x com componentes x_1, \dots, x_f :

$$x = (x_1, \dots, x_f). \quad (12.14)$$

Os coeficientes K_{kl} e M_{kl} tornam-se os componentes dos tensores.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{f1} & \cdots & K_{ff} \end{pmatrix}, \quad (12.15)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{f1} & \cdots & M_{ff} \end{pmatrix}.$$

Estes tensores são simétricos ou podem ser considerados como tal, pois, de acordo com a Eq. (12.12),

$$K_{kl} = K_{lk}, \quad (12.16)$$

e na definição da Eq. (12.13) somente a soma $\frac{1}{2}(M_{kl} + M_{lk})$ é definida como o coeficiente de $\dot{x}_k \dot{x}_l = \dot{x}_l \dot{x}_k$, podendo-se, portanto, exigir que

$$M_{kl} = M_{lk}. \quad (12.17)$$

As energias cinética e potencial podem, então, ser:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{x}, \quad (12.18)$$

$$V = \frac{1}{2}x \cdot \mathbf{K} \cdot x. \quad (12.19)$$

As equações de Lagrange (9.79) podem ser:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{x} + \mathbf{K} \cdot x = 0. \quad (12.20)$$

Esta equação é parecida com a Eq. (2.84) para um oscilador harmônico simples. Escrevendo-se a Eq. (12.20) em termos dos componentes, obtém-se uma generalização direta das Eqs. (4.135) e (4.136) para dois osciladores harmônicos acoplados.

A Eq. (12.20) pode ser resolvida pelo mesmo método utilizado para resolver as Eqs. (4.135) e (4.136). Tentar-se-á a seguinte solução:

$$x = \mathbf{C}e^{pt}, \quad (12.21)$$

onde $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_f)$ é um vetor constante, cujos componentes C_1, \dots, C_f podem ser complexos. Substituindo-se na Eq. (12.20) e dividindo-se por e^{pt} :

$$p^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (12.22)$$

Escreve-se este resultado em termos dos componentes e obtém-se

$$\sum_{l=1}^f (p^2 M_{kl} + K_{kl}) C_l = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12.23)$$

Se C_1, \dots, C_f não forem iguais a zero, o determinante dos coeficientes deve ser anulado:

$$\begin{vmatrix} p^2 M_{11} + K_{11} & \cdots & p^2 M_{1f} + K_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^2 M_{f1} + K_{f1} & \cdots & p^2 M_{ff} + K_{ff} \end{vmatrix} = 0. \quad (12.24)$$

Esta é uma equação de ordem f em p^2 cujas f raízes são sempre reais, como se verá na próxima seção. Encontrando-se uma solução positiva para p^2 , pelo menos algumas das raízes p_j serão positivas e algumas de soluções (12.21) crescerão exponencialmente com o tempo. Quando a configuração de equilíbrio corresponder a um mínimo da energia potencial, ficará demonstrado que as soluções são estáveis. Neste caso, as f soluções, $p_j^2 = -\omega_j^2$, fornecerão as f freqüências normais de oscilação. Substitui-se, então, qualquer p_j^2 nas Eqs. (12.23), obtendo-se, a partir delas, os componentes C_{lj} do vetor \mathbf{C}_j (exceto para um fator arbitrário). Chega-se à solução como superposição das vibrações normais, da mesma forma que, na Seç. 4.10, encontrou-se a solução para dois osciladores acoplados. Na próxima seção, usando-se métodos da Álgebra Tensorial, já desenvolvidos no Cap. 10, chegar-se-á à mesma solução.

12.3 MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

Quando as coordenadas x_1, \dots, x_f são ortogonais entre si, o tensor \mathbf{M} terá a forma diagonal:

$$M_{kl} = M_k \delta_{kl}, \quad (12.25)$$

[O símbolo δ_{kl} foi definido na Eq. (10.79).] Se as coordenadas não forem ortogonais, diagonaliza-se \mathbf{M} pelo método discutido na Seç. 10.4, generalizado para f dimensões. (O mesmo método será mostrado para diagonalizar a energia potencial.) Suponha que isto já foi feito e que as coordenadas x_1, \dots, x_f são os componentes de x ao longo dos eixos principais de \mathbf{M} , de forma que a Eq. (12.25) seja válida. (Se x_1, \dots, x_f forem coordenadas retangulares de um conjunto de partículas, M_k será a massa da partícula cuja coordenada é x_k .)

Define-se, agora, um novo vetor y com coordenadas y_1, \dots, y_f dadas por

$$y_k = M_k^{\frac{1}{2}} x_k, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12.26)$$

Note que a configuração do sistema será especificada por um vetor y em novo espaço vetorial relacionado ao espaço x por um estiramento ou compressão ao longo de cada eixo, de acordo com a Eq. (12.26). A energia cinética em termos de y será

$$T = \frac{1}{2}\dot{y} \cdot \dot{y} = \sum_{k=1}^f \frac{1}{2} \dot{y}_k^2. \quad (12.27)$$

Evidentemente, não haverá variação na expressão para a energia cinética caso se gire o sistema de coordenadas y , razão pela qual introduziu-se o vetor y .

A energia potencial será dada por

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} W_{kl} y_k y_l, \quad (12.28)$$

onde

$$W_{kl} = \frac{K_{kl}}{M_k^{1/2} M_l^{1/2}}. \quad (12.29)$$

As equações de movimento serão

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (12.30)$$

O tensor \mathbf{W} será simétrico e, portanto, poderá ser diagonalizado pelo método apresentado na Seç. 10.4. Considere que $\hat{\mathbf{e}}_j$ seja um autovetor de \mathbf{W} correspondente ao autovalor W_j :

$$\mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = W_j \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (12.31)$$

Considere também que a_{lj} sejam os componentes de $\hat{\mathbf{e}}_j$ no sistema de coordenadas y :

$$\hat{\mathbf{e}}_j = (a_{1j}, \dots, a_{fj}), \quad j = 1, \dots, f. \quad (12.32)$$

Escreve-se, então, a Eq. (12.31) em termos dos componentes em forma correspondente às Eqs. (10.108)

$$\sum_{l=1}^f (W_{kl} - W_j \delta_{kl}) a_{lj} = 0, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12.33)$$

Novamente, a condição para existir uma solução diferente de zero será

$$\begin{vmatrix} W_{11} - W_j & W_{12} & \cdots & W_{1f} \\ W_{21} & W_{22} - W_j & \cdots & W_{2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{f1} & W_{f2} & \cdots & W_{ff} - W_j \end{vmatrix} = 0. \quad (12.34)$$

Esta é uma equação de ordem f , que deve ser resolvida para determinarem-se as f raízes de W_j . Note que esta equação torna-se idêntica à Eq. (12.24) fazendo-se $p^2 = -W_j$ e dividindo-se o primeiro membro da Eq. (12.24) por $M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_f$, lembrando que M_{kl} é dado pela Eq. (12.25). Cada raiz W_j deve ser substituída na Eq. (12.33), que, então, poderá ser resolvida para as razões $a_{1j}:a_{2j}:\dots:a_{fj}$. Os a_{lj} podem ser determinados de tal forma que $\hat{\mathbf{e}}_j$ seja um vetor unitário:

$$\sum_{l=1}^f a_{lj}^2 = 1. \quad (12.35)$$

As demonstrações apresentadas na Seç. 10.4 podem ser estendidas para espaços de qualquer número de dimensões, de forma que as raízes W_j sejam reais e, portanto, os

coefficientes a_{lj} também sejam reais. Além disso, os vetores unitários $\hat{\mathbf{e}}_j$ e $\hat{\mathbf{e}}_l$ são ortogonais² quando $W_j \neq W_l$. Portanto,

$$\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_l = \delta_{jl}, \quad (12.36)$$

ou

$$\sum_{l=1}^f a_{lj} a_{ll} = \delta_{jl}. \quad (12.37)$$

No caso de degenerescência, quando duas ou mais raízes W_j são iguais, escolhem-se também os a_{lj} de forma que os $\hat{\mathbf{e}}_j$ correspondentes sejam ortogonais. A situação é precisamente análoga à descrita na Seç. 10.4, exceto que quando $f > 3$ ela não pode ser visualizada geometricamente. A demonstração do lema (10.125) pode ser generalizada para degenerescências múltiplas em espaços de qualquer número de dimensões.

Considere, então, que os componentes do vetor de configuração y ao longo de $\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_f$ sejam q_1, \dots, q_f :

$$y = \sum_{j=1}^f q_j \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (12.38)$$

Em termos dos componentes no sistema de coordenada y original,

$$y_k = \sum_{j=1}^f a_{kj} q_j. \quad (12.39)$$

Reciprocamente, tomando-se o produto interno da Eq. (12.38) por $\hat{\mathbf{e}}_r$ e usando as Eqs. (12.32) e (12.36), obtém-se

$$q_r = \sum_{k=1}^f a_{kr} y_k. \quad (12.40)$$

Estas equações são análogas às Eqs. (10.67) e (10.69).

A energia potencial no sistema de coordenadas q_1, \dots, q_f que diagonaliza \mathbf{W} , é

$$V = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} W_j q_j^2. \quad (12.41)$$

Considere o caso em que V é mínimo na origem $y = 0$. Os autovalores W_1, \dots, W_f devem ser todos positivos; caso contrário, para alguns valores de q_1, \dots, q_f , V pode ser negativo. Se V não fosse um mínimo, alguns dos autovalores W_j poderiam ser negativos. (O caso especial $W_j = 0$ pode ou não corresponder a um mínimo dependendo dos termos de ordem superior que foram desprezados.) Considere que

$$W_j = \omega_j^2. \quad (12.42)$$

² Freqüentemente o termo “ortogonal” é usado no lugar de “perpendicular”, em Álgebra Vetorial Abstrata, quando os vetores só têm significado algébrico e não necessariamente geométrico.

Neste caso, a energia cinética (12.27) será

$$T = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} \dot{q}_j^2. \quad (12.43)$$

Em vista das Eqs. (12.41) e (12.43), as equações de Lagrange se separam em duas: uma para cada coordenada q_j :

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = 0, \quad j = 1, \dots, f. \quad (12.44)$$

As coordenadas q_j chamam-se *coordenadas normais*. A solução da equação acima será

$$q_j = A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t, \quad j = 1, \dots, f, \quad (12.45)$$

onde A_j e B_j são constantes arbitrárias. Escreve-se a solução em termos das coordenadas originais, usando-se as Eqs. (12.26) e (12.39):

$$x_k = M_k^{-1/2} \sum_{j=1}^f a_{kj} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t). \quad (12.46)$$

Os coeficientes são

$$A_j = q_j(0) = \sum_{k=1}^f a_{kj} M_k^{1/2} x_k(0) \quad (12.47)$$

e

$$B_j = \omega_j^{-1} \dot{q}_j(0) = \sum_{k=1}^f \omega_j^{-1} a_{kj} M_k^{1/2} \dot{x}_k(0). \quad (12.48)$$

Portanto, a solução é completa para pequenas vibrações em torno de um ponto de equilíbrio estável.

Quando o número de graus de liberdade é grande, resolver a Eq. (12.34) pode ser uma tarefa muito difícil que, em geral, só pode ser realizada numericamente para coeficientes cujos valores são numéricos. Entretanto, em alguns casos, algumas das raízes podem ser conhecidas antecipadamente (muitas vezes sabe-se que determinadas frequências são iguais a zero) ou, através de considerações de simetria, que são iguais. Qualquer uma dessas informações ajuda a fatoração da Eq. (12.34).

Se V não tiver um mínimo em $x_1 = \dots = x_f = 0$ e alguns dos coeficientes W_j forem negativos, as soluções obtidas serão do tipo exponencial. Isto mostra que, neste caso, o movimento é instável, pois a solução (exceto para condições iniciais) conterá termos que crescem exponencialmente com o tempo, pelo menos enquanto a aproximação linear introduzida nas equações do movimento forem válidas. O caso de alguns dos W_j serem iguais a zero não é discutido em detalhe aqui. Na aproximação linear que está sendo usada, o \dot{q}_j correspondente é constante, e corresponde ao que se chamou de equilíbrio indiferente no Cap. 2. O movimento permanecerá com \dot{q}_j constante até que q_j seja suficientemente grande, de forma que os termos não-lineares em q_j devem ser considerados.

Pode-se notar que, na determinação das coordenadas normais, há uma transformação das coordenadas x_1, \dots, x_f para q_1, \dots, q_f que diagonaliza simultaneamente

os dois tensores M e K , ou mais corretamente, que diagonaliza simultaneamente duas formas quadráticas, T e V . A menos que os dois tensores tenham o mesmo eixo principal, será impossível diagonalizá-los simultaneamente por rotação do sistema de coordenadas. Entretanto, se o sistema puder ser estendido ou comprimido ao longo de um determinado eixo, como na transformação (12.26), então poderá transformar simultaneamente as duas expressões quadráticas para a forma diagonal (admitindo-se que, pelo menos, um deles seja positivo ou negativo). Determina-se inicialmente o eixo principal do primeiro tensor. Através de estiramento ou compressão ao longo dos eixos principais, pode-se reduzi-lo a um tensor constante (com a condição de que todos os autovalores sejam positivos ou negativos). No caso acima, reduz-se M a 1 pela transformação (12.26). Como todos os eixos são principais para um tensor constante, os eixos principais do segundo tensor, modificados de acordo com estiramento das coordenadas, reduzirão ambos os tensores à forma diagonal. Será instrutivo para o leitor encontrar uma interpretação geométrica deste procedimento, para o caso de tensores em duas e três dimensões, representando cada tensor por sua curva ou superfície quádratica, da mesma forma que foi representado na Seç. 10.5 pelo elipsóide de inércia. Quando se trabalha com vetores e tensores no espaço físico, não se considera ordinariamente o estiramento não uniforme dos eixos, porque ele destorce a geometria espacial, mas, no espaço vetorial abstrato, pode-se considerar qualquer transformação conveniente para o propósito algébrico do momento.

12.4 VIBRAÇÕES FORÇADAS, AMORTECIMENTO

Deseja-se determinar o movimento do sistema considerado na seção anterior quando submetido a forças externas determinadas, $F_1(t), \dots, F_f(t)$, exercidas sobre as coordenadas x_1, \dots, x_f . Novamente, restringe-se o estudo a movimentos que permanecem suficientemente próximos de uma configuração de equilíbrio estável, de forma que somente termos lineares em x_1, \dots, x_f precisam ser incluídos nas equações do movimento. Introduzindo-se o vetor

$$\mathbf{F}(t) = (F_1, \dots, F_f), \quad (12.49)$$

pode-se escrever as equações do movimento na forma abreviada

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}(t), \quad (12.50)$$

onde as forças $\mathbf{F}(t)$ são somadas à Eq. (12.20). Note que a Eq. (12.50) pode ser obtida da função lagrangiana

$$L = T - V - V', \quad (12.51)$$

onde T e V são dados pelas Eqs. (12.11) e (12.13), e

$$V' = - \sum_{k=1}^f x_k F_k(t). \quad (12.52)$$

Suponha outra vez que as coordenadas x_1, \dots, x_f são escolhidas de modo que sejam ortogonais entre si. Logo, M será diagonal. Se as coordenadas x_k não forem inicialmente ortogonais, e efetuando-se uma rotação do sistema de coordenadas para os eixos principais de M , então os componentes $F_k(t)$ devem ser submetidos às mesmas transformações que as coordenadas x_k . Como este procedimento foi seguido no caso em que se diagonalizou o tensor K , não será seguido em detalhe para M , admitindo-se simplesmente que já foi realizado e que M é diagonal.

Transforma-se agora para as coordenadas normais determinadas na seção anterior [Eqs. (12.26), (12.39) e (12.40)]:

$$x_k = \sum_{j=1}^f M_k^{-1/2} a_{kj} q_j, \quad (12.53)$$

$$q_j = \sum_{k=1}^f M_k^{1/2} a_{kj} x_k. \quad (12.54)$$

As forças generalizadas $Q_j(t)$ associadas a $F_k(t)$ são obtidas usando-se a Eq. (9.30):

$$Q_j(t) = \sum_{k=1}^f M_k^{-1/2} a_{kj} F_k(t). \quad (12.55)$$

A transformação inversa será

$$F_k(t) = \sum_{j=1}^f M_k^{1/2} a_{kj} Q_j(t). \quad (12.56)$$

O leitor pode verificar as Eqs. (12.55) substituindo as Eqs. (12.53) na Eq. (12.52) e calculando

$$Q_j = -\frac{\partial V'}{\partial q_j}. \quad (12.57)$$

Em termos das coordenadas normais,

$$V' = -\sum_{j=1}^f q_j Q_j(t), \quad (12.58)$$

e as equações de movimento serão

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = Q_j(t), \quad j = 1, \dots, f. \quad (12.59)$$

Cada uma dessas equações é idêntica em forma à Eq. (2.86) para o oscilador harmônico forçado sem amortecimento ($b = 0$). Portanto, os modos normais comportam-se como osciladores forçados independentes, e a solução pode ser obtida por métodos descritos no Cap. 2.

É-se tentado a generalizar os resultados para o caso em que forças de amortecimento lineares também estejam presentes. Escrevem-se, então, facilmente as equações apropriadas. No caso geral, quando as coordenadas não são ortogonais e existe acoplamento com atrito entre as coordenadas, as equações do movimento serão

$$\sum_{l=1}^f (M_{kl} \ddot{x}_l + B_{kl} \dot{x}_l + K_{kl} x_l) = 0, \quad k = 1, \dots, f, \quad (12.60)$$

ou, na forma vetorial,

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0. \quad (12.61)$$

O tensor B será simétrico se as forças de atrito obedecerem à terceira lei de Newton, o que é fácil de ser verificado caso as coordenadas x de partículas ou corpos individuais sejam retangulares. Isto também poderá ser demonstrado se as coordenadas forem ortogonais e designando-se coordenadas diferentes para cada corpo. Uma transformação linear para coordenadas generalizadas preservará a simetria de B .

Infelizmente, como é possível que o leitor se convença através de experiências, em geral não é possível diagonalizar simultaneamente três tensores, M , B e K , com uma transformação linear de coordenadas, mesmo que seja permitido estiramento. Portanto, o método da seção anterior falha neste caso, não existindo coordenadas normais. A situação não melhora mesmo que se suponha que x_1, \dots, x_2 sejam ortogonais, de forma que M seja diagonal, ou mesmo se supondo que não existe atrito de acoplamento, de forma que B seja diagonal. Aplicando-se as transformações (12.53) e (12.54), que diagonalizam T e V , em geral, as coordenadas q_j também estarão acopladas por forças de atrito:

$$\ddot{q}_j + \sum_{r=1}^f b_{jr} \dot{q}_r + \omega_j^2 q_j = 0, \quad (12.62)$$

onde

$$b_{jr} = \sum_{k,l=1}^f M_k^{-1/2} M_l^{-1/2} a_{kj} a_{lr} B_{kl}. \quad (12.63)$$

Note que a matriz b_{jr} não será diagonal, mesmo que B_{kl} o seja. Existe um caso especial que ocorre quando as forças de atrito são proporcionais às massas, de forma que $B = 2\gamma M$. Então, o método da Seç. 12.3 funcionará, pois no sistema de coordenadas y no qual $M \rightarrow 1$, $B \rightarrow 2\gamma I$, e as coordenadas normais q_j ao longo dos eixos principais de W satisfazem as equações:

$$\ddot{q}_j + 2\gamma \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = 0. \quad (12.64)$$

Pode também acontecer que no espaço y , no qual M torna-se igual a 1, os tensores transformados, B e K , têm os mesmos eixos principais, mas isto seria um acontecimento indesejável. Quando as forças de amortecimento são muito pequenas, um método de perturbação similar ao que será desenvolvido na próxima seção pode ser aplicado para encontrar-se uma solução aproximada em termos dos modos normais amortecidos.

Com exceção desses casos especiais, o problema de vibrações amortecidas só pode ser manuseado por substituição direta de soluções-tentativas como as (12.21), nas equações do movimento (12.60). A equação secular análoga à Eq. (12.24) será, então, da ordem $2f$ em p . Cada raiz permite uma solução para o vetor C . Existindo raízes complexas, elas ocorrem em pares conjugados, p e p^* , com vetores conjugados corres-

pondentes C e C^* . As duas soluções (12.21) podem, então, ser combinadas, resultando uma solução real, que, no caso estável, será oscilatória e amortecida, podendo ser chamada um modo normal. Se todas as $2f$ forem combinadas com constantes arbitrárias apropriadas, a solução geral para as Eqs. (12.60) poderá então ser escrita. Torna-se claro, através de argumentos físicos, que se as forças de atrito reduzirem a energia do sistema, as partes reais de todas as raízes p devem ser negativas se $V(x)$ tiver um mínimo em $x = 0$; a demonstração matemática desta afirmativa é um exercício difícil de Álgebra.

Quando existem forças magnéticas e aparece um potencial dependente da velocidade na função lagrangiana, o tratamento acima não poderá ser aplicado e tais casos são tratados pelo método discutido na Seç. 12.6.

12.5 TEORIA DA PERTURBAÇÃO

Pode acontecer que a energia potencial seja dada por

$$V = V^0 + V', \quad (12.65)$$

onde $V^0(x_1, \dots, x_f)$ é uma energia potencial para a qual se pode resolver o problema de pequenas vibrações em torno de um ponto de mínimo $x_1 = \dots = x_f = 0$, sendo $V'(x_1, \dots, x_f)$ muito pequeno para pequenos valores de x_1, \dots, x_f . Chamando-se V^0 a energia potencial não perturbada e V' a perturbação, espera-se que as soluções para a energia potencial V se aproximem das soluções para o problema sem perturbação. Nesta seção, desenvolve-se um método de resolução baseado nesta idéia.

Suponha que V' seja estacionário também em $x_1 = \dots = x_f = 0$, de forma que

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x_k} \right)_{x_1 = \dots = x_f = 0} = 0. \quad (12.66)$$

Se este não for o caso, não será difícil encontrar aproximadamente os valores de x_1^0, \dots, x_f^0 para os quais V seja estacionário. Expandindo-se V em torno do ponto x_1^0, \dots, x_f^0 , os termos lineares de V^0 cancelam os termos lineares V' . Como exercício, o leitor poderá verificar este resultado. A origem das coordenadas deve então ser deslocada ligeiramente para x_1^0, \dots, x_f^0 . Este procedimento alterará ligeiramente os termos quadráticos em V^0 , mas estas pequenas variações podem ser incluídas em V' . No entanto, tem-se, de qualquer maneira, uma expansão de V em torno do ponto de equilíbrio na forma (12.65), com

$$V^0 = \sum_{k,l} \frac{1}{2} K_{kl}^0 x_k x_l, \quad (12.67)$$

$$V' = \sum_{k,l} \frac{1}{2} K'_{kl} x_k x_l, \quad (12.68)$$

onde os coeficientes K'_{kl} são pequenos. O critério exato que deve ser satisfeito para que K'_{kl} possa ser considerado pequeno será desenvolvido à medida que se prossegue.

Primeiro, transformam-se as coordenadas normais q_1^0, \dots, q_f^0 para o problema não perturbado. Tem-se, então,

$$V^0 = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} W_j^0 (q_j^0)^2, \quad (12.69)$$

$$V' = \sum_{j,r} \frac{1}{2} W'_{jr} q_j^0 q_r^0, \quad (12.70)$$

$$W'_{jr} = \sum_{k,l} M_k^{-1/2} M_l^{-1/2} a_{kj} a_{lr} K'_{kl}, \quad (12.71)$$

onde W_j^0 são as raízes do determinante secular (12.34) para o problema não perturbado, admitindo-se outra vez, por simplicidade, que x_1, \dots, x_f sejam coordenadas ortogonais. Os coeficientes W'_{jr} devem ser considerados pequenos. O índice superior “0” lembrará que as variáveis q_j^0 são coordenadas para o problema não perturbado.

As equações do movimento para q_1^0, \dots, q_f^0 são

$$\ddot{q}_j^0 + W_j^0 q_j^0 + \sum_{r=1}^f W'_{jr} q_r^0 = 0, \quad j = 1, \dots, f. \quad (12.72)$$

Verifica-se que os elementos diagonais de W' se somam aos coeficientes de q_j^0 , enquanto os elementos fora da diagonal acoplam os modos normais não perturbados. Espera-se que se W' for pequeno, haverá um modo normal do problema perturbado próximo de cada modo normal do problema não perturbado, isto é, uma solução com freqüência ω_j próxima de $\omega_j^0 = (W_j^0)^{1/2}$ e para a qual q_j^0 é grande, enquanto os $q_r^0, r \neq j$ restantes são pequenos. No entanto, se o tensor W^0 tiver autovalores degenerados, de forma que duas ou mais das freqüências não perturbadas sejam iguais (ou aproximadamente iguais), espera-se que mesmo um acoplamento pode mudar radicalmente o movimento, como no caso de dois osciladores acoplados que foi resolvido no Cap. 4. Esta visão pode ajudar no desenvolvimento de um método de perturbação.

Para determinarem-se os modos normais da oscilação substituindo

$$q_j^0 = C_j e^{pt}, \quad j = 1, \dots, f, \quad (12.73)$$

nas Eqs. (12.72), obtém-se

$$(p^2 + W_j^0) C_j + \sum_{r=1}^f W'_{jr} C_r = 0. \quad (12.74)$$

Admite-se que o modo procurado é aproximadamente igual a um modo não perturbado, como $j = 1$. Portanto, faz-se

$$\begin{aligned} p^2 &= -W_1^0 - W'_1, \\ C_1 &= 1 + C'_1, \\ C_j &= C'_j, \quad j = 2, \dots, f. \end{aligned} \quad (12.75)$$

Se W'_1, C'_1, \dots, C'_f forem iguais a zero, então a Eq. (12.73) representa uma solução do problema não perturbado. Assim, para o problema perturbado, admite-se que W'_1, C'_1, \dots, C'_f

sejam pequenos. Substituindo-se as Eqs. (12.75) nas Eqs. (12.74) e agrupando os termos de segunda ordem no segundo membro:

$$-W'_1 + W'_{11} = -\sum_{r=1}^f W'_{1r}C_r + W'_1C'_1, \quad (12.76)$$

$$(W_j^0 - W_1^0)C_j + W'_{j1} = -\sum_{r=1}^f W'_{jr}C_r + W'_1C'_j, \quad j = 2, \dots, f. \quad (12.77)$$

Quando se desprezam os termos de segunda ordem, obtém-se W'_1 da primeira equação:

$$W'_1 \doteq W'_{11}. \quad (12.78)$$

Portanto,

$$\omega_1^2 = -p^2 \doteq W_1^0 + W'_{11}. \quad (12.79)$$

As Eqs. (12.77), desprezando-se os segundos membros, permitem a determinação dos coeficientes C'_j :

$$C'_j \doteq \frac{W'_{j1}}{W_1^0 - W_j^0}, \quad j = 2, \dots, f. \quad (12.80)$$

O coeficiente C'_1 não é determinado; o que quer dizer que o modo normal (12.73) pode ter uma amplitude (e fase) arbitrária, embora deva ser aproximadamente igual à amplitude (e fase) $C_1^0 = 1$, que foi escolhido nas Eqs. (12.75) para a solução não perturbada. Será conveniente fazer com que C_1, \dots, C_f sejam os coeficientes de um vetor unitário:

$$\sum_{j=1}^f C_j^2 = 1. \quad (12.81)$$

Obtém-se, então, a seguinte equação para C'_1 :

$$C'_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^f (C_j)^2. \quad (12.82)$$

Em primeira ordem

$$C'_1 \doteq 0. \quad (12.83)$$

Substituindo-se nas Eqs. (12.73) e multiplicando por uma constante arbitrária $\frac{1}{2}Ae^{i\theta}$ e superpondo as soluções complexas conjugadas, obtém-se as aproximações de primeira ordem para o modo normal perturbado:

$$q_1^0 \doteq A \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (12.84)$$

$$q_j^0 \doteq \frac{AW'_{j1}}{W_1^0 - W_j^0} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad j = 2, \dots, f,$$

onde ω_1 é dado pela Eq. (12.79). Verifica-se que o efeito de primeira ordem da perturbação é deslocar ω_1^0 através do coeficiente diagonal da perturbação W'_{11} e excitar ligeiramente os outros modos não perturbados com uma amplitude proporcional aos coeficientes de acoplamento da perturbação W'_{j1} e inversamente proporcional às diferenças entre as freqüências normais não perturbadas (elevadas ao quadrado). Este resultado, de acordo com a Física, é razoável.

Pode-se, agora, formular com maior precisão as condições necessárias para considerar W' pequeno. Para obter o resultado acima, admite-se que

$$W'_1 \ll |W_j^0 - W_1^0|, \quad j = 2, \dots, f, \quad (12.85)$$

$$C'_j \ll 1. \quad (12.86)$$

As Eqs. (12.78) e (12.80) mostram que isto será justificado se

$$\begin{aligned} W'_{j1} &\ll |W_j^0 - W_1^0|, \quad j = 2, \dots, f, \\ W'_{11} &\ll |W_j^0 - W_1^0|, \quad j = 2, \dots, f. \end{aligned} \quad (12.87)$$

Esta é a condição de validade das fórmulas (12.79) e (12.84).

Obtém-se as aproximações de primeira ordem dos modos restantes a partir destas fórmulas, trocando-se o índice „1” por qualquer outro.

O leitor esperto notará que a condição (12.87), no coeficiente diagonal W'_{11} , só é necessária porque o último termo nas Eqs. (12.77) é desprezado. As Eqs. (12.77) são facilmente resolvidas para C'_j mesmo que se inclua o último termo do segundo membro, no entanto, caso se deseje, isto permitirá remover a restrição no tamanho dos coeficientes da diagonal, e também se torna óbvio porque sempre se pode incluir qualquer coeficiente diagonal em V^0 [Eq. (12.69)]. As coordenadas normais para o problema não perturbado também são as mesmas; somente as freqüências (elevadas ao quadrado) são alteradas pela soma de termos diagonais adicionais. No entanto, na transformação para coordenadas normais, termos diagonais e fora da diagonal misturam-se; assim, só quando todos os termos em $V'(x_0, \dots, x_f)$ forem pequenos é que os termos fora da diagonal de $V'(q_1^0, \dots, q_f^0)$ também poderão ser pequenos.

É evidente que as condições (12.87) não podem ser satisfeitas existindo uma degenerescência — se, por exemplo, $W_1^0 = W_2^0 = W_3^0$. Neste caso, como foi mencionado anteriormente, espera-se que, mesmo existindo pequeno acoplamento dos modos não perturbados, qualquer modo perturbado com ω^2 aproximadamente igual a W_1^0 mostre uma perturbação apreciável de todos os três modos não perturbados. Portanto, fazendo-se

$$p^2 = -W_1^0 - W', \quad (12.88)$$

admite-se que somente C_4, \dots, C_f sejam pequenos, enquanto C_1, C_2 e C_3 possam ser de ordem 1. Substituindo-se este resultado nas Eqs. (12.74) e transpondo os termos de segunda ordem para os segundos membros:

$$\begin{aligned} (W'_{11} - W')C_1 + W'_{12}C_2 + W'_{13}C_3 &= - \sum_{r=4}^f W'_{1r}C_r, \\ W'_{21}C_1 + (W'_{22} - W')C_2 + W'_{23}C_3 &= - \sum_{r=4}^f W'_{2r}C_r, \\ W'_{31}C_1 + W'_{32}C_2 + (W'_{33} - W')C_3 &= - \sum_{r=4}^f W'_{3r}C_r, \end{aligned} \quad (12.89)$$

e

$$(W_j^0 - W_1^0)C_j + \sum_{r=1}^3 W'_{jr}C_r = - \sum_{r=4}^f W'_{jr}C_r + W'C_j, \quad j = 4, \dots, f. \quad (12.90)$$

Desprezando-se os segundos membros, as Eqs. (12.89) tornam-se um problema de autovalores convencional em três dimensões, para os autovalores W' e associados ao autovetor (C_1, C_2, C_3) . Existirão três soluções correspondentes aos três modos normais perturbados, com freqüências $\omega^2 = W_1^0 + W'$, próximos às freqüências não perturbadas degeneradas. Em geral, as três raízes W' serão diferentes e, assim, os modos perturbados não mais serão degenerados. Os demais coeficientes C_4, \dots, C_f podem ser determinados até aproximações de primeira ordem a partir das Eqs. (12.90), desprezando-se os segundos membros. Pode-se também exigir que C seja um vetor unitário [Eq. (12.81)]. Em analogia com a Eq. (12.83), isto significa que se mantendo apenas termos de primeira ordem o vetor tridimensional (C_1, C_2, C_3) deverá ser um vetor unitário. Os casos de degenerescência dupla ou tripla de qualquer ordem devem ser tratados da mesma maneira. É evidente que se a degenerescência for de ordem superior, será tão difícil resolver as equações de perturbação de primeira ordem [as Eqs. (12.89) com o segundo membro igual a zero] quanto as equações exatas (12.74). Quando $f \geq 4$, poderá haver mais que uma freqüência normal degenerada; neste caso, o método acima pode ser aplicado separadamente para cada grupo de modos não perturbados degenerados para determinar os modos perturbados.

Em casos de quase degenerescência ($W_1^0 \approx W_2^0 \approx W_3^0$), quando as condições 12.87 não são mais válidas para um grupo de modos não perturbados vizinhos, pode-se usar o método do parágrafo anterior. As Eqs. (12.89) são modificadas ligeiramente pela adição de termos pequenos, como, por exemplo, $W_2^0 - W_1^0$, nos coeficientes diagonais. O leitor deverá ser capaz de formular sozinho o procedimento.

Quando a solução aproximada até primeira ordem já foi determinada, os valores aproximados dos coeficientes W'_1 e C'_j podem ser substituídos no segundo membro das equações (12.76), (12.77) [ou Eqs. (12.89), (12.90)]. Resolvem-se, então, as equações resultantes para determinar uma aproximação de segunda ordem. Por exemplo, substituindo-se as Eqs. (12.80) na Eq. (12.76), obtém-se a aproximação de segunda ordem para a correção da freqüência:

$$W'_1 \doteq W'_{11} + \sum_{r=2}^f \frac{(W'_{1r})^2}{W_1^0 - W_r^0}, \quad (12.91)$$

onde se usa o fato de que W' é um tensor simétrico. Pode-se verificar que a variação de segunda ordem na freqüência do modo 1 contém uma contribuição devido ao acoplamento com cada um dos outros modos. Os modos tendem a se repelir mutuamente em segunda ordem; isto é, cada modo de freqüência mais alta ($W_r^0 > W_1^0$) reduz a freqüência do modo 1, e cada modo de freqüência mais baixa o aumenta. Encontra-se mesmo resultado na solução do problema de dois osciladores acoplados, apresentada no Cap. 4. O procedimento pode ser seguido de maneira direta para aproximações sucessivas de ordens mais elevadas, mas é muito mais trabalhoso.

Para qualquer ordem de aproximação, podem-se introduzir as coordenadas q_1, \dots, q_f para o problema não perturbado fazendo

$$q_j^0 = \sum_{r=1}^f C_{jr}q_r, \quad (12.92)$$

onde $C_{jr}, j = 1, \dots, f$ são os coeficientes do r -ésimo modo normal perturbado, determinado para qualquer ordem de aproximação quando se aplica a Teoria da Perturbação. Os vetores $C_r = (C_{1r}, \dots, C_{fr})$ são, para uma dada ordem de aproximação, vetores unitários ortogonais (ou podem ser transformados para), como se verificará a seguir. Portanto, pode-se resolver as Eqs. (12.92) para (até esta ordem de aproximação)

$$q_r = \sum_{j=1}^f C_{jr}q_j^0. \quad (12.93)$$

A partir das Eqs. (12.92) e (12.73), se $p^2 = -W_r^0 - W_r' = -\omega_r^2$ for o valor aproximado da freqüência, verificar-se-á que a solução aproximada para q_r deverá ser dependente do tempo e^{pt} e, então, a solução geral real será

$$q_r \doteq A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t. \quad (12.94)$$

Comparando-se a relação acima e as Eqs. (12.45), observa-se que q_r são coordenadas normais (aproximadas). Portanto a lagrangiana, para uma dada ordem de aproximação, deve ser dada por

$$L \doteq \sum_{r=1}^f (\frac{1}{2}\dot{q}_r^2 - \frac{1}{2}\omega_r^2 q_r^2), \quad (12.95)$$

como se poderá verificar por substituição direta das Eqs. (12.92) nas Eqs. (12.69), (12.70) e (12.43), para qualquer ordem de aproximação de C_{jr} . Alternativamente, pode-se notar que as Eqs. (12.74) são exatamente as obtidas caso se procurasse um autovetor C de $W = W^0 + W'$ correspondente ao autovalor $-p^2$. Logo, as soluções aproximadas obtidas para as Eqs. (12.74) são também soluções aproximadas para o problema de diagonalização de W . Portanto, as Eqs. (12.92) definem as coordenadas normais aproximadas para o movimento perturbado.

12.6 PEQUENAS VIBRAÇÕES EM TORNO DO MOVIMENTO ESTACIONÁRIO

Considere um sistema mecânico descrito pelas coordenadas x_1, \dots, x_f e pela função lagrangiana $L(x_1, \dots, x_f; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f; t)$. Conhecendo-se uma solução $x_1^0(t), \dots, x_f^0(t)$,

podem-se procurar soluções próximas da solução que define as coordenadas novas y_1, \dots, y_f :

$$x_k = x_k^0(t) + y_k, \quad k = 1, \dots, f. \quad (12.96)$$

Substitui-se na lagrangiana L e expande-se em potências de $y_1, \dots, y_f; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_f$. Como $x_1^0(t), \dots, x_f^0(t)$ satisfazem as equações do movimento. O leitor pode verificar facilmente que não aparecem em L termos lineares em $y_1, \dots, y_f; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_f$. Os termos em L independentes de $y_1, \dots, y_f; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_f$ não afetam as equações do movimento e podem ser ignorados. Admitindo-se que $y_1, \dots, y_f; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_f$ sejam pequenos e que se podem desprezar as potências cúbicas ou mais altas de grandezas pequenas, L torna-se uma função quadrática das novas variáveis. Então, as equações do movimento serão lineares em $y_1, \dots, y_f; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_f; \ddot{y}_1, \dots, \ddot{y}_f$. No entanto, os coeficientes nas equações serão, em geral, funções do tempo t , e os métodos desenvolvidos até aqui não são suficientes para resolvê-las. Métodos capazes de resolver tais equações estão fora do nível proposto neste livro. Aqui, só se trata dos casos em que os coeficientes das equações linearizadas são constantes.

Pode-se garantir que os coeficientes serão constantes quando se restringem a *movimentos estacionários*. Suponha que algumas das coordenadas sejam ignoráveis, isto é, não aparecem na função lagrangiana. Admita que L não dependa explicitamente de t . Define-se, então, um movimento estacionário como sendo aquele em que todas as coordenadas ignoráveis são constantes. Esta definição depende evidentemente do sistema de coordenadas escolhido. Talvez seja possível definir o movimento estacionário como aquele em que, em um sistema de coordenadas determinado, todas as coordenadas ignoráveis sejam constantes.

Na Seç. 9.10, verifica-se que as coordenadas ignoráveis são particularmente fáceis de manusear em termos das equações de Hamilton para o movimento. Portanto, introduzindo-se as coordenadas x_1, \dots, x_f e os momentos p_1, \dots, p_f correspondentes, das quais x_{N+1}, \dots, x_f são ignoráveis, a função hamiltoniana será

$$H = H(x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N, p_{N+1}, \dots, p_f). \quad (12.97)$$

Em vista das Eqs. (9.198), todos os momentos p_{N+1}, \dots, p_f são constantes. Portanto, só será preciso trabalhar com $2N$ equações (9.198), as quais para o movimento estacionário se reduzem a

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (12.98)$$

Para valores p_{N+1}^0, \dots, p_f^0 conhecidos, devem-se determinar as soluções, se existirem, destas equações para $x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N$. Qualquer uma dessas soluções $x_1^0, \dots, x_N^0; p_1^0, \dots, p_N^0$ define um movimento estacionário. Todas as coordenadas ignoráveis terão velocidades constantes dadas por

$$\dot{x}_j^0 = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right)_0, \quad j = N+1, \dots, f, \quad (12.99)$$

onde o índice “0” indica que a derivada deve ser calculada em $x_1^0, \dots, x_N^0; p_1^0, \dots, p_N^0$.

Dado um movimento estacionário, escolhe-se a origem do sistema de coordenadas de forma que $x_1^0 = \dots = x_N^0 = p_1^0 = \dots = p_N^0 = 0$. Para determinar os movimentos nas vizinhanças deste movimento estacionário, mantém-se p_{N+1}, \dots, p_f fixos e expande-se H em potências de $x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N$, considerando-o pequeno. Pode-se omitir qualquer termo que não dependa de x_1, \dots, p_N . Os termos lineares não aparecem devido às Eqs. (12.98). Desprezando-se os termos cúbicos de grandezas pequenas, H torna-se uma função quadrática de $x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N$, com coeficientes constantes. Pode acontecer que H seja separável em “energia cinética”, ‘ T ’(p_1, \dots, p_N), e “energia potencial”, ‘ V ’(x_1, \dots, x_N), definidas positivamente, podendo-se, neste caso, aplicar os métodos das seções anteriores. Para aplicar estes métodos, expressa-se a “energia cinética”, ‘ T ’, em termos de $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N$, o que pode ser feito determinando-se p_1, \dots, p_N a partir das equações lineares

$$\dot{x}_k = \frac{\partial 'T'}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (12.100)$$

O problema será, então, reconvertido à forma lagrangiana, com ‘ L ’($x_1, \dots, x_N; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N$) = ‘ T ’ – ‘ V ’. Note que, no entanto, não se pode obter a ‘ L ’ correta apenas substituindo \dot{x}_j^0 dado pela Eq. (12.99) na L original. A transição para a forma hamiltoniana será necessária para eliminar as coordenadas ignoráveis do problema, considerando-se que p_{N+1}, \dots, p_f sejam constantes conhecidas. A “energia potencial” ‘ V ’ conterá termos envolvendo p_{N+1}, \dots, p_f da energia cinética original, e eles aparecerão em ‘ L ’ com o sinal oposto.

Se ‘ V ’(x_1, \dots, x_N) tiver um mínimo em $x_1 = \dots = x_N = 0$, então se x_1, \dots, x_N forem suficientemente pequenos estarão submetidos a oscilações estacionárias. Pode-se, então, dizer que um dado movimento estacionário é estável se para movimentos nas vizinhanças desse movimento (com os mesmos p_{N+1}, \dots, p_f), as coordenadas oscilarem em torno de seus valores estacionários. Estas oscilações podem ser descritas por coordenadas normais, que são determinadas pelo método descrito na Seç. 12.3.

Se o sistema de coordenada usado se mover, ou se existirem forças magnéticas que devam ser descritas por um potencial dependente da velocidade (9.166), ou se, como acontece freqüentemente, as coordenadas ignoráveis não forem ortogonais às coordenadas são ignoráveis, então os termos cruzados $x_k p_l$ ($k, l \leq N$) podem aparecer em H . Assim, em geral, os termos quadráticos em H têm a forma

$$H = \sum_{k,l=1}^N (\frac{1}{2} a_{kl} p_k p_l + b_{kl} x_k p_l + \frac{1}{2} c_{kl} x_k x_l), \quad (12.101)$$

onde se pode supor que

$$a_{lk} = a_{kl}, \quad c_{lk} = c_{kl}. \quad (12.102)$$

Os coeficientes a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} são funções das constantes p_{N+1}, \dots, p_f e dependem do movimento estacionário particular, cuja estabilidade está em questão. Não existe mais separação em energias cinética e potencial, não sendo possível aplicar os métodos das seções anteriores. Pode ser que H , dado de acordo com a Eq. (12.101), seja definido positivamente (ou negativamente) em $x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N$ e, neste caso, pode-se

ter a certeza de que o movimento estacionário é estável. Como $x_1, \dots, p_1, \dots, p_N$ devem permanecer sobre uma superfície de H constante, e se H for definido positivamente, esta superfície será um “elipsóide” no espaço das fases com $2N$ -dimensões.

Neste caso, podem-se estudar as pequenas vibrações em torno do movimento estacionário resolvendo as equações linearizadas, dadas pela função hamiltoniana (12.101):

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= \sum_{l=1}^N (a_{kl}p_l + b_{lk}x_l), \\ \dot{p}_k &= -\sum_{l=1}^N (b_{kl}p_l + c_{kl}x_l), \quad k = 1, \dots, N.\end{aligned}\quad (12.103)$$

Retorna-se à formulação lagrangiana envolvendo N equações de segunda ordem para x_1, \dots, x_N , mas será igualmente fácil resolver diretamente as Eqs. (12.103). Para determinar-se um modo normal para o qual todas as grandezas têm a mesma dependência do tempo:

$$x_k = X_k e^{pt}, \quad p_k = P_k e^{pt}. \quad (12.104)$$

substitui-se este resultado nas Eqs. (12.103), obtendo-se as $2N$ equações lineares:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^N [(b_{lk} - p \delta_{kl})X_l + a_{kl}P_l] &= 0, \\ \sum_{l=1}^N [c_{kl}X_l + (b_{kl} + p \delta_{kl})P_l] &= 0, \quad k = 1, \dots, N.\end{aligned}\quad (12.105)$$

O determinante dos coeficientes deve-se anular:

$$\left| \begin{array}{cccccc} b_{11}-p & b_{21} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ b_{12} & b_{22}-p & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & b_{11}+p & \cdots & b_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & b_{21} & \cdots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & b_{N1} & \cdots & b_{NN}+p \end{array} \right| = 0. \quad (12.106)$$

Pode-se verificar que se p for uma raiz qualquer desta equação, então $-p$ também será. Primeiramente, faz-se $p = -p'$ no determinante. A seguir, trocam-se as N linhas superiores com as N linhas inferiores. O próximo passo será trocar as N colunas da esquerda com as N colunas da direita e, finalmente, as linhas pelas colunas, isto é, executa-se uma rotação em torno do eixo principal. Nenhuma dessas operações modifica o valor do determinante (exceto possivelmente o seu sinal, o que não é relevante). Tem-se, assim, uma equação para p' idêntica à equação original para p , de tal forma que se p for uma raiz, p' também o será. Portanto, verifica-se que quando se expande o determi-

nante (12.106), somente aparecem potências pares de p , tendo-se uma equação algébrica de grau N em p^2 . Se todas as raízes forem negativas, como acontece no caso em que H dado pela Eq. (12.101) é definido positivamente, então todos os modos normais são estáveis. Cada raiz $p^2 = -\omega_j^2$ fornece dois valores $p = i\omega_j$ nas Eqs. (12.105), resolvendo-se para X_{lj} , P_{lj} , que, em geral, são complexos. Existe, na realidade, uma constante arbitrária que pode ser escolhida de qualquer maneira conveniente. As soluções para $p = i\omega_j$ serão X_{lj}^*, P_{lj}^* . Substituindo-se nas Eqs. (12.104), multiplicando-se por uma constante arbitrária $A_j e^{i\theta_j}$ e superpondo-se soluções complexas conjugadas para obter a solução real para o modo normal j :

$$x_k = A_j C_{kj} \cos(\omega_j t + \beta_{kj} + \theta_j), \quad (12.107)$$

onde

$$\begin{aligned}X_{kj} &= \frac{1}{2} C_{kj} e^{i\theta_{kj}}, \\ P_{kj} &= \frac{1}{2} D_{kj} e^{i\gamma_{kj}},\end{aligned}\quad (12.108)$$

e A_j e θ_j são uma amplitude e uma fase arbitrárias. A solução geral será, então, a superposição dos modos normais:

$$\begin{aligned}x_k &= \sum_{j=1}^N A_j C_{kj} \cos(\omega_j t + \beta_{kj} + \theta_j), \\ p_k &= \sum_{j=1}^N A_j D_{kj} \cos(\omega_j t + \gamma_{kj} + \theta_j).\end{aligned}\quad (12.109)$$

Observe que não se podem representar os resultados acima em termos de coordenadas normais q_1, \dots, q_N relacionadas linearmente com x_1, \dots, x_N devido à diferença de fases β_{kj} e γ_{kj} , que aparecem por causa dos termos cruzados de coordenadas e momentos. Se todas as freqüências forem diferentes, é possível determinar uma transformação linear relacionando-se as $2N$ variáveis $x_1, \dots, x_N; p_1, \dots, p_N$ com o conjunto de coordenadas e momentos normais $q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N$, cada uma das quais oscila com a freqüência normal correspondente. Tais transformações pertencem à teoria das transformações canônicas da dinâmica hamiltoniana, e estão além do propósito deste livro.

Se uma raiz p^2 qualquer da Eq. (12.106) for positiva ou complexa, o modo normal correspondente será instável, e as coordenadas e momentos variarão exponencialmente a partir de seus valores estacionários. Uma raiz $p^2 = 0$ corresponderá ao equilíbrio indiferente. Um caso comum em que as raízes $p^2 = 0$ são encontradas é aquele em que as coordenadas ignoráveis devem ser incluídas entre as x_1, \dots, x_N . Se x_j for ignorável e estiver incluída em x_1, \dots, x_N , então p_j será constante e poderá assumir qualquer valor. Considerando-se p_j ligeiramente diferente de p_j^0 , para o movimento estacionário dado inicialmente, existirá um novo movimento estacionário com \dot{x}_j constante e ligeiramente diferente de \dot{x}_j^0 . O novo movimento é dado por

$$x_j = A_j + B_j \dot{x}_j t, \quad \text{para todo } x_k = A_k, \quad (12.110)$$

onde A_k pode ser ligeiramente diferente de x_k^0 . Este movimento corresponde a um modo normal com $p^2 = 0$. Pode acontecer que exista uma coordenada ignorável x_j , mas escolhe-se um sistema de coordenadas no qual x_j não aparece. Uma raiz $p^2 = 0$ da Eq. (12.106) também poderá ocorrer. Como as coordenadas usadas na realidade serão funções das coordenadas ignoráveis (entre outras), no modo normal correspondente, várias ou todas as coordenadas poderão ter velocidades constantes. Isto pode ser obtido por substituição nas equações de movimento (12.103). Em alguns casos, as regras algébricas necessárias para se usar explicitamente uma coordenada ignorável x_j são demasia-das, sendo preferível usar um sistema de coordenadas em que x_j não aparece. Isto aumenta de um o grau da equação secular (12.106), mas como a raiz extra é $p^2 = 0$, sa-be-se que p^2 poderá ser fatorado e a equação resultante terá o mesmo grau de equa-ção que se obteria caso se tivesse ignorado x_j .

O caso de degenerescência, quando existe uma raiz múltipla p^2 , é mais compli-cado para as Eqs. (12.103) do que para as Eqs. (12.20), onde a força é derivável de uma energia potencial dependente apenas de x_1, \dots, x_N . Não se pode agora usar a Teoria da Diagonalização para um tensor simétrico, para mostrar que, no caso de uma raiz múltipla p^2 , as Eqs. (12.105) têm uma multiplicidade correspondente à de solu-ções independentes, como foi feito para as equações análogas (12.23) ou (12.33). Às vezes as Eqs. (12.105) podem ter somente uma solução independente, mesmo quando p^2 é uma raiz múltipla da Eq. (12.106), devendo-se procurar outras formas diferentes para solucionar a (12.104). Os detalhes algébricos³ aqui são ignorados, mas o resulta-do é que quando as Eqs. (12.105) não conduzem a soluções independentes suficientes para X_k e P_k para uma raiz múltipla p^2 , X_k e P_k devem ser substituídos nas Eqs. (12.104) por polinômios de grau $(n - 1)$ em t , onde n é a multiplicidade da raiz p^2 . A expressão resultante deve ser substituída nas Eqs. (12.103), fornecendo $2Nn$ coe-ficientes nos $2N$ polinômios. Estas relações, como pode ser mostrado, resultarão em exa-tamente n coeficientes arbitrários, de tal forma que o número correto de constantes arbitrárias estará disponível. Alternativamente, podem-se alterar ligeiramente, os coe-ficientes na hamiltoniana (12.101), de forma que a degenerescência em p^2 seja removi-da, a solução encontrada e, em seguida, determinadas as suas formas-limite quando os coe-ficientes se aproximam de seus valores originais. (Veja o Probl. 37, Cap. 2.) Quando po-tências de t aparecem nas soluções, torna-se claro que a solução não será estável mesmo quando p^2 for real e negativo, mas representa uma solução cuja amplitude apó-s um longo tempo crescerá em função de alguma potência de t . Logo, a degene-rescência indica geralmente estabilidade no caso das Eqs. (12.103). Verificar-se-á que as raízes múltiplas da Eq. (12.106) ordinariamente marcam o limite entre soluções reais e as complexas de p^2 no sentido de que uma pequena variação em alguns dos coe-ficientes a_{kl} , b_{kl} ou c_{kl} separarão a degenerescência que, por um lado, conduzirá para duas raízes reais de p^2 , enquanto, por outro lado, para duas raízes complexas, depen-

dendo do sentido da variação. A situação é aproximadamente análoga quanto à ma-temática ao problema do oscilador harmônico amortecido, onde uma raiz dupla para p na Eq. (2.125) marca a linha que divide os casos de superamortecimento e sub-amortecimento e conduz a uma solução linear em t . No presente caso, não existe amor-tecimento; e a Eq. (12.106) contém apenas potências pares de p ; se existirem raízes complexas conjugadas para p^2 , então as quatro raízes correspondentes terão a forma $\pm\gamma\pm i\omega$, e algumas das soluções crescerão exponencialmente. Assim, as raízes múltiplas podem determinar o limite entre casos em estáveis e instáveis. No caso das Eqs. (12.20), onde as forças não dependem da velocidade, o limite entre estabilidade e instabilidade ocorre quando algumas das raízes para p^2 são iguais a zero; raízes negativas degene-radas para p^2 correspondem sempre a soluções estáveis.

Além disso, deve-se evidenciar que mesmo quando todas as raízes p^2 forem nega-tivas e distintas, de forma que todas as soluções das Eq. (12.103) forem estáveis, não se pode garantir que as soluções exatas das equações não-lineares resultantes da hamil-toniana completa (12.97) sejam estáveis. Para vibrações em torno de um ponto de equilíbrio, quando as forças são deriváveis de energia potencial, pode-se demonstrar que as soluções estáveis das equações linearizadas são obtidas apenas em torno de um mí-nimo do potencial, e que, neste caso, as soluções são absolutamente estáveis, caso a amplitudde seja suficientemente pequena. Viu-se acima que se a hamiltoniana H for po-sitiva (ou negativa) nas vizinhanças do movimento estacionário, pode-se demonstrar que as soluções também serão estacionárias. Mas todas as soluções das Eqs. (12.103) podem ser estáveis, mesmo quando H não for definido positiva ou negativamente. Nes-tes casos, tudo o que se pode dizer é que, para um tempo tão longo quanto se queira, iniciando-se o movimento com amplitudes suficientemente pequenas, as soluções exa-tas do problema dado pela hamiltoniana (12.97) se aproximarão das soluções do pro-blema linearizado dado pela hamiltoniana (12.101). Isto será verdade porque os termos não-lineares podem ser tão pequenos quanto se queira fazendo-se a amplitude suficien-temente pequena; então, seus efeitos sobre o movimento só poderão ser apreciáveis se integrados para um tempo longo. Contudo, desprezando-se os termos não-lineares, deve-se evitar afirmar que exista estabilidade completa durante todo o tempo. Na rea-lidade, existem casos conhecidos em que as soluções lineares são estáveis, não impor-tando quão próximos do movimento do estado estacionário sejam iniciados, a soluções exata se afastará eventualmente do movimento estacionário por um valor grande. Ob-ter o critério que determina a estabilidade no caso geral talvez seja o problema não re-solvido mais notável da Mecânica Clássica.⁴

12.7 OSCILAÇÕES DE BETATRON EM UM ACELERADOR

Em aceleradores de partículas, por exemplo, ciclotron, betatron ou sincrotron, as partículas carregadas circulam em campo magnético dirigido, mantendo as partícu-

³ Para análise mais aprofundada do problema de pequenas vibrações, veja E. J. Routh, *Dynamics of a system of rigid bodies*, Advanced Part. New York, Dover Publications, 1955, cap. 6. Um tra-tamento menos completo, porém mais elegante, aplicando-se o método matricial pode ser encon-trado em R. Bellman, *Stability theory of differential equations*. New York, McGraw-Hill, 1953.

⁴ Foi mostrado por V. I. Arnold, *Soviet Math.* 2, 247, 1961, que para $N \leq 2$, em que todos os ca-sos, quando as equações lineares (12.103) são estáveis, as equações não-lineares exatas també-m têm soluções estáveis para movimentos suficientemente próximos do movimento estacionário.

las dentro de uma câmara circular de vácuo, enquanto elas são aceleradas. Como as partículas circulam várias vezes enquanto estão sendo aceleradas, é essencial que a órbita seja estável. Como as partículas ganham somente uma pequena quantidade de energia em cada revolução, pode-se estudar primeiramente a estabilidade das órbitas com energia constante, e, então, considerar separadamente o processo de aceleração. No momento, o que interessa é o problema da estabilidade em energia constante E . Admite-se que o campo magnético seja simétrico em relação ao eixo vertical, de forma que se possa escrever, usando coordenadas polares cilíndricas (Fig. 3.22),

$$\mathbf{B}(\rho, \varphi, z) = B_z(\rho, z)\hat{z} + B_\rho(\rho, z)\hat{\rho}. \quad (12.111)$$

O campo magnético em um sincrotron ou betatron também é função do tempo e aumenta de acordo com a energia, mas como se está considerando E uma constante, considerar-se-á B também constante. Suponha que na mediana do plano, $z = 0$, o campo seja inteiramente vertical:

$$\mathbf{B}(\rho, \varphi, 0) = B_{z0}(\rho)\hat{z}. \quad (12.112)$$

Uma partícula de energia apropriada E pode deslocar-se em círculo de raio $\rho = a(E)$, chamada *órbita de equilíbrio*. O interesse agora é na estabilidade desta órbita; isto é, é preciso saber se as partículas próximas desta órbita executam pequenas vibrações em torno dela. Tais vibrações chamam-se *oscilações de betatron*, porque a teoria foi desenvolvida inicialmente para o betatron.

Pode-se considerar que o potencial vetor (Seç. 9.9) para um campo magnético com simetria em torno do eixo z esteja inteiramente na direção φ :

$$\mathbf{A} = A_\varphi(\rho, z)\hat{\varphi}, \quad (12.113)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times \hat{\varphi} A_\varphi(\rho, z) \\ &= \frac{\hat{z}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \hat{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12.114)$$

Verifica-se, a partir da Eq. (12.114), que A é dado por

$$A_\varphi(\rho, z) = \rho^{-1} \int_0^\rho \rho B_z(\rho, z) d\rho, \quad (12.115)$$

uma vez que A_φ deve ser anulado em $\rho = 0$, devido à ambigüidade na direção de $\hat{\varphi}$. Note que $2\pi\rho A_\varphi$ é o fluxo magnético através de um círculo de raio ρ .

A função lagrangiana é dada pelas Eqs. (9.154) e (9.166):

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}\rho\dot{\varphi}A_\varphi(\rho, z), \quad (12.116)$$

onde e e m são a carga e a massa de partícula que será acelerada. Se a velocidade da partícula for comparável à velocidade da luz, isto é, se a energia for comparável ou

maior do que mc^2 , deve-se usar a forma relativística para a lagrangiana (Probl. 23, Cap. 9). Os momentos são

$$\begin{aligned} p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \\ p_\varphi &= mp^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c}\rho A_\varphi, \\ p_z &= m\dot{z}. \end{aligned} \quad (12.117)$$

A função hamiltoniana é dada pela Eq. (9.196) ou (9.200):

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{[p_\varphi - (e/c)\rho A_\varphi]^2}{2mp^2}. \quad (12.118)$$

Verifica-se que φ é ignorável e p_φ pode ser considerado constante. Então, a função hamiltoniana terá a forma

$$H = 'T' + 'V', \quad (12.119)$$

com

$$'T' = \frac{p_\rho^2 + p_z^2}{2m} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2), \quad (12.120)$$

$$'V' = \frac{[p_\varphi - (e/c)\rho A_\varphi]^2}{2mp^2}. \quad (12.121)$$

O problema, então, será um equivalente de equilíbrio estático, sendo os movimentos estacionários as órbitas de equilíbrio dadas pelas soluções para ρ e z das equações

$$\frac{\partial 'V'}{\partial z} = \frac{e}{c}\rho\dot{\varphi}B_\rho = 0, \quad (12.122)$$

$$\frac{\partial 'V'}{\partial \rho} = -\rho\dot{\varphi}\left(m\ddot{\rho} + \frac{e}{c}B_z\right) = 0, \quad (12.123)$$

onde as Eqs. (12.117) e (12.114) são usadas. A primeira equação acima é satisfeita no plano mediano $z = 0$ e, usualmente, em nenhum outro ponto ($\rho\dot{\varphi} \neq 0$). A segunda equação torna-se

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{mc}B_{z0}(\rho), \quad (12.124)$$

que é equivalente à Eq. (3.299). Pode-se resolver a Eq. (12.124) para ρ , conhecido $\dot{\varphi}$ ou, alternativamente, para $\dot{\varphi}$ com $\rho = a$, o raio da órbita de equilíbrio. Note que a energia $\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2$ de uma partícula com movimento estacionário é menor do que a energia total H da partícula cujo movimento é agora objeto de estudo, mas a diferença é de segunda ordem em grandezas pequenas para vibrações em torno do movimento estacio-

nário. De acordo com o desenvolvimento da seção anterior, as duas partículas devem ser escolhidas de forma a terem o mesmo p_φ .

Faz-se, agora,

$$\rho = a + x, \quad (12.125)$$

onde a é o raio da órbita para o movimento estacionário. Em seguida, expande-se em potências de x, z, \dot{x} e \dot{z} , obtendo-se

$$T' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad (12.126)$$

$$V' = \frac{1}{2}m\omega^2(1-n)x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2nz^2, \quad (12.127)$$

onde se fez

$$\omega = \dot{\varphi} = -\frac{eB_{z0}(a)}{mc}, \quad (12.128)$$

$$n = -\left(\frac{a}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right)_{z=0, \rho=a}, \quad (12.129)$$

e onde foram usadas as Eqs. (12.114), (12.117), (12.124) e

$$\frac{\partial B_z}{\partial \rho} = \frac{\partial B_\rho}{\partial z}, \quad (12.130)$$

obtida de acordo com

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (12.131)$$

se não existirem correntes na câmara de vácuo. A grandeza n denomina-se *índice de campo*. O movimento só será estacionário se

$$0 < n < 1. \quad (12.132)$$

Em ciclotron, o campo é aproximadamente constante no centro, de forma que $n \ll 1$; então, cai rapidamente próximo às extremidades externas do ímã. Em betatron ou sincrotron, o valor do campo magnético é constante de n e B cresce em valor enquanto as partículas são aceleradas de forma a manter a constante. Pode-se verificar, a partir da Eq. (12.129), que o valor de n não varia quando B_z cresce, contanto que a forma do campo magnético como função do raio não varie, isto é, contanto que $\partial B_z / \partial z$ cresça proporcionalmente a B_z .

Como as variáveis x e z são separadas em ' T' ' e ' V' ', podem-se escrever facilmente as freqüências de oscilação de betatron. É conveniente expressá-las em termos dos números de oscilações de betatron por revolução, ν_x e ν_z :

$$\nu_x = \frac{\omega_x}{\omega} = (1-n)^{1/2}, \quad (12.133)$$

$$\nu_z = \frac{\omega_z}{\omega} = n^{1/2}.$$

Existindo imperfeições no acelerador, de forma que B_z não seja independente de φ , a diferença entre B_z e seu valor médio dá origem a uma força periódica que age sobre a coordenada x . A perturbação resultante na órbita pode ser tratada resolvendo-se as equações do oscilador harmônico forçado correspondente. Se B_ρ não for igual a zero no plano bissetriz ($z = 0$), é porque há a ação de forças verticais que orientam as oscilações verticais do betatron. Em geral, tais imperfeições também indicam a existência de variações no índice do campo n , de forma que $n = n(\varphi)$ e n torna-se uma função periódica do tempo para o movimento estacionário. Em aceleradores de gradiente alternado, faz-se deliberadamente que o índice de campo n sofra variações periódicas no ângulo azimutal φ . A solução deste problema é demasiadamente complicada para ser incluída neste texto.

12.8 ESTABILIDADE DOS TRÊS CORPOS, DE LAGRANGE

Uma solução particular do problema dos três corpos em movimento sob a ação de suas atrações gravitacionais mútuas foi descoberta por Lagrange. Esta solução é um movimento estacionário em que as três massas permanecem nos vértices de um triângulo equilátero enquanto giram em torno do centro de massa comum. Para investigar-se a estabilidade deste movimento estacionário, considera-se este problema como exemplo de uma classe geral de problemas de Mecânica Celeste relacionados à estabilidade das soluções particulares das equações do movimento. Quando a solução particular é um movimento estacionário, o problema pode ser tratado pelo método discutido na Seç. 12.6.

Aqui, o problema será simplificado, considerando-se apenas os movimentos confinados a um único plano. Neste caso, existirão seis coordenadas, duas para cada partícula. O estudo mostrará a existência de seis coordenadas ignoráveis: duas delas representando uma translação rígida das três partículas, podendo ser consideradas como coordenadas cartesianas do centro de massa; os momentos constantes correspondentes serão os componentes do momento linear total; a terceira coordenada, ignorável, representará uma rotação rígida das três partículas em torno do centro de massa; o momento constante correspondente será o momento angular total. As três coordenadas não ignoráveis restantes especificarão as posições relativas das três partículas em relação uma às outras. Estas devem ser constantes em movimento estacionário; portanto, qualquer movimento estacionário deve ser uma translação e uma rotação rígidas do sistema de três corpos. Podem-se, por exemplo, escolher as coordenadas como na Fig. 12.1. Neste caso, X e Y são as coordenadas do centro de massa, as variações de α , com as coordenadas restantes mantidas fixas, representam uma rotação do sistema inteiro em torno do centro de massa, e r_1, r_2 e θ determinam a forma e o tamanho do triângulo formado pelas massas m_1, m_2 e m_3 . Espera-se encontrar três modos normais de vibração de r_1, r_2, θ em torno dos seus valores estacionários. Caso não se perceba uma coordenada ignorável qualquer, determinar-se-ão somente os movimentos em que esta coordenada é constante. A coordenada ignorável identificar-se-á com a raiz igual a zero ($p^2 = 0$) da equação secular (12.106).

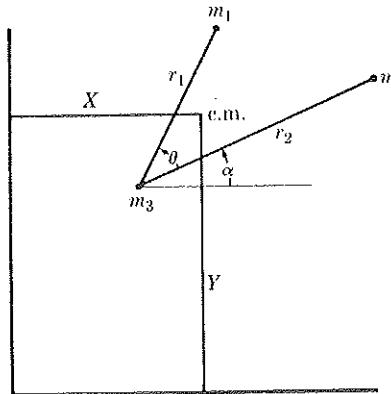


Fig. 12.1 Coordenadas para o problema dos três corpos.

De acordo com a Eq. (4.127), a energia cinética será separada em uma parte dependente de X e Y e uma parte dependente de r_1 , r_2 , θ e α . A energia potencial dependerá somente de r_1 , r_2 e θ . As coordenadas X e Y serão, portanto, ortogonais a r_1 , r_2 , θ e α , e o movimento do centro de massa será separado do problema. A energia do centro de massa

$$T_{\text{c.m.}} = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = \frac{1}{2M}(p_X^2 + p_Y^2), \quad M = m_1 + m_2 + m_3, \quad (12.134)$$

é constante, podendo ser omitida da hamiltoniana. O centro de massa move-se com velocidade constante, podendo-se estudar separadamente o movimento em relação ao centro de massa. É evidente que a coordenada ignorável α não é ortogonal a θ , pois a velocidade angular de m_1 envolve $(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$ e esta aparece elevada ao quadrado na energia cinética. O resultado não é acidental de acordo com a escolha das coordenadas, mas consequência inerente do fato de a rotação do sistema como um todo influenciar o movimento “interno” descrito por r_1 , r_2 e θ .

Será um exercício de aplicação direta de Álgebra: determinar a energia em termos de r_1 , r_2 , θ e α ; determinar p_{r_1} , p_{r_2} , p_θ e p_α ; escrever a hamiltoniana; determinar os movimentos estacionários; e seguir o procedimento da Seç. 12.6 para determinar a equação secular (12.106), uma equação de terceira ordem em p^2 cujas raízes determinam o caráter das pequenas variações do movimento estacionário. No entanto, este procedimento é extremamente tedioso como o leitor pode verificar. É interessante notar que a maneira menos trabalhosa de determinar a solução real do problema é abandonar o formalismo de Hamilton-Lagrange e estabelecer as equações a partir de primeiros princípios. Será preciso ainda encontrar os resultados das considerações gerais acima como guia da solução. A Álgebra será também suficientemente envolvente, de forma que é provável que se cometam erros algébricos. Portanto, será desejável substituir θ e α pelas coordenadas α_1 e α_2 , mostradas na Fig. 12.2, com o objetivo de conseguir uma simetria algébrica entre as partículas m_1 e m_2 . Este procedimento reduz o trabalho algébrico e permite a verificação dos resultados, pois as fórmulas obtidas devem apresentar uma simetria apropriada entre os índices “1” e “2”. Nem α_1 ou

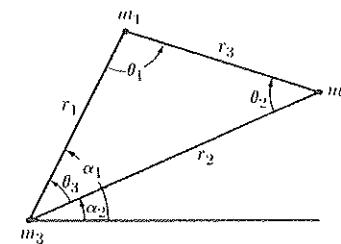


Fig. 12.2 Coordenadas alternativas para o problema dos três corpos.

α_2 , neste caso, são ignoráveis, verificando-se que as coordenadas ignoráveis não mais aparecem explicitamente. Não se poderia, de qualquer forma, usar as propriedades das coordenadas ignoráveis, pois não se vai escrever as equações na forma hamiltoniana. A equação secular será de quarta ordem p^2 , mas se sabe que uma raiz será $p^2 = 0$, podendo ser fatorada. Mostram-se também na Fig. 12.2 várias variáveis auxiliares, r_3 , θ_1 , θ_2 e θ_3 , que serão necessárias mais adiante.

As equações do movimento de m_1 serão apresentadas em termos dos componentes orientados radialmente a partir de m_3 e perpendicular ao raio r_1 . Ao aplicar diretamente as Leis do Movimento, de Newton, é preciso relacionar todas as acelerações a um sistema de coordenadas em repouso. A aceleração de m_1 é a sua aceleração em relação a m_3 mais a aceleração de m_3 . A última aceleração pode ser obtida aplicando-se as Leis do Movimento, de Newton, a m_3 , m_1 e m_2 . A força sobre m_1 é a atração gravitacional de m_2 e m_3 . Portanto, na direção radial, tem-se

$$m_1 \left(\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m_1 G}{r_1^2} + \frac{m_2 G}{r_2^2} \cos \theta_3 \right) = -\frac{m_1 m_3 G}{r_1^2} - \frac{m_1 m_2 G}{r_3^2} \cos \theta_1. \quad (12.135)$$

A equação correspondente para o movimento de m_1 , perpendicular a r_1 , será

$$m_1 \left(r_1 \ddot{\alpha}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\alpha}_1 - \frac{m_2 G}{r_2^2} \sin \theta_3 \right) = -\frac{m_1 m_2 G}{r_3^2} \sin \theta_1. \quad (12.136)$$

Duas equações similares podem ser escritas para m_2 . As quatro equações podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 - r_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{(m_1 + m_3)G}{r_1^2} + \frac{m_2 G}{r_2^2} \cos \theta_3 + \frac{m_2 G}{r_3^2} \cos \theta_1 &= 0, \\ \ddot{r}_2 - r_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{(m_2 + m_3)G}{r_2^2} + \frac{m_1 G}{r_1^2} \cos \theta_3 + \frac{m_1 G}{r_3^2} \cos \theta_2 &= 0, \\ r_1 \ddot{\alpha}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\alpha}_1 - \frac{m_2 G}{r_2^2} \sin \theta_3 + \frac{m_2 G}{r_3^2} \sin \theta_1 &= 0, \\ r_2 \ddot{\alpha}_2 + 2\dot{r}_2 \dot{\alpha}_2 - \frac{m_1 G}{r_1^2} \sin \theta_3 - \frac{m_1 G}{r_3^2} \sin \theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.137)$$

A simetria algébrica entre os índices “1” e “2” é encontrada nas equações acima. (Note que $\theta_3 = \alpha_1 - \alpha_2$ e haverá troca de sinal quando se trocam as partículas entre si.) As variáveis auxiliares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e r_3 podem ser expressadas em termos de r_1, r_2, α_1 e α_2 , usando-se as leis do seno e do co-seno para o triângulo.

Verifica-se, agora, por que é mais fácil usar as leis de Newton diretamente. Pode-se expressar a aceleração de m_3 muito simplesmente em termos das forças gravitacionais sobre m_3 . Na formulação lagrangiana, as equações correspondentes para $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$ (ou α e θ), os termos que representam a aceleração de m_3 têm que ser expressados por meio da Cinemática, isto é, em termos das coordenadas, velocidades e acelerações de m_1 e m_2 , porque elas são obtidas por derivação da energia cinética T em coordenadas generalizadas. Isto é muito complicado e envolve explicitamente a posição do centro de massa em relação a m_1, m_2 e m_3 , que não é necessária na formulação presente. As equações resultantes são equivalentes às Eqs. (12.137), mas sua forma é consideravelmente mais complicada. Uma das razões para a simplicidade das Eqs. (12.137) é, com certeza, o uso das variáveis auxiliares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e r_3 ; na formulação lagrangiana, qualquer uma de tais variáveis auxiliares deve ser derivada em relação a $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2$ para que se possam escrever as equações do movimento.

Primeiro consideram-se os movimentos estacionários. Sabe-se da discussão preliminar que o movimento estacionário pode ser apenas uma rotação rígida em torno do centro de massa (mais uma translação uniforme). Portanto, considerando-se que $r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 sejam constantes,

$$\alpha_2 = \omega t, \quad \alpha_1 = \omega t + \theta_3. \quad (12.138)$$

Substituindo-se as relações acima na última das Eqs. (12.137), obtém-se

$$\frac{1}{r_1^2} \operatorname{sen} \theta_3 = \frac{1}{r_3^2} \operatorname{sen} \theta_2. \quad (12.139)$$

Da lei dos senos,

$$\frac{r_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{r_3}{\operatorname{sen} \theta_3}, \quad (12.140)$$

tem-se, então, a não ser que $\operatorname{sen} \theta_3 = \operatorname{sen} \theta_2 = 0$,

$$r_1^3 = r_3^3. \quad (12.141)$$

Da mesma forma, a partir da terceira das Eqs. (12.137), determina-se que $r_2 = r_3$, a não ser que $\operatorname{sen} \theta_3 = \operatorname{sen} \theta_1 = 0$. Portanto, pode-se fazer

$$r_1 = r_2 = r_3 = a, \quad (12.142)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}.$$

O único movimento estacionário possível, a não ser que as massas estejam sobre uma linha reta, é aquele em que as massas estejam nos vértices de um triângulo equilátero. Verifica-se, ainda, que as duas primeiras das Eqs. (12.137) são satisfeitas. Este será o caso se

$$\omega^2 = \frac{MG}{a^3}, \quad (12.143)$$

onde M é a massa total. Esta é uma solução particular do problema de três corpos obtida por Lagrange. O caso em que as três massas estão sobre uma linha reta será deixado como exercício.

Deseja-se, agora, encontrar as soluções para movimentos nas vizinhanças do movimento estacionário. Faz-se

$$\begin{aligned} r_1 &= a + x_1, & r_2 &= a + x_2, \\ \alpha_1 &= \omega t + \frac{1}{3}\pi + \epsilon_1, & \alpha_2 &= \omega t + \epsilon_2, \end{aligned} \quad (12.144)$$

onde $x_1, x_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ são quatro variáveis novas, consideradas pequenas. Substituem-se estas relações nas Eqs. (12.137) e conservam-se somente os termos lineares. Calcula-se inicialmente

$$\theta_3 = \frac{1}{3}\pi + \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad (12.145)$$

e, conservando somente termos de primeira ordem, a partir da lei dos co-senos, obtém-se

$$r_3^2 = a^2 \left[1 + \frac{x_1 + x_2}{a} + \sqrt{3}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \right]. \quad (12.146)$$

Agora, a partir da lei dos senos,

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{r_2}{r_3} \operatorname{sen} \theta_3; \quad (12.147)$$

assim, conservando termos de primeira ordem,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \frac{x_1 - x_2}{a}, \quad (12.148)$$

e, similärmente,

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \frac{x_1 - x_2}{a}. \quad (12.149)$$

Pode-se notar como verificação que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Pode-se, então, substituir os resultados acima nas Eqs. (12.137), as quais, conservando termos de primeira ordem, tornam-se

$$\ddot{x}_1 - 2a\omega\dot{\epsilon}_1 - \left(\omega^2 + \frac{2m_1 + 2m_3 - \frac{1}{4}m_2}{a^3} G \right) x_1 - \frac{9m_2 G}{4a^3} x_2 - \frac{3\sqrt{3}m_2 G}{4a^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = 0,$$

$$\ddot{x}_2 - 2a\omega\dot{\epsilon}_2 - \left(\omega^2 + \frac{2m_2 + 2m_3 - \frac{1}{4}m_1}{a^3} G \right) x_2 - \frac{9m_1 G}{4a^3} x_1 - \frac{3\sqrt{3}m_1 G}{4a^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = 0,$$

$$a\ddot{\epsilon}_1 + 2\omega\dot{x}_1 - \frac{3\sqrt{3}m_2 G}{4a^3} (x_1 - x_2) - \frac{9m_2 G}{4a^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = 0,$$

$$a\ddot{\epsilon}_2 + 2\omega\dot{x}_2 - \frac{3\sqrt{3}m_1 G}{4a^3} (x_1 - x_2) + \frac{9m_1 G}{4a^2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = 0. \quad (12.150)$$

Note que a segunda e quarta equações podem ser obtidas a partir da primeira e da terceira equações trocando entre si os índices “1” e “2” e invertendo os sinais de α_1 , α_2 e ω ; esta simetria resulta da escolha das coordenadas mostradas na Fig. 12.2.

Um modo normal é determinado fazendo

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 e^{pt}, & x_2 &= X_2 e^{pt}, \\ \epsilon_1 &= E_1 e^{pt}, & \epsilon_2 &= E_2 e^{pt}. \end{aligned} \quad (12.151)$$

Por conveniência, faz-se

$$p = (G/a^3)^{1/2} P. \quad (12.152)$$

Substituindo as Eqs. (12.151) nas Eqs. (12.150) e usando a Eq. (12.143), obtém-se

$$\begin{aligned} \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_2 \right) \frac{X_1}{a} - \frac{9}{4}m_2 \frac{X_2}{a} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 + 2M^{1/2}P \right) E_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 E_2 &= 0, \\ -\frac{9}{4}m_1 \frac{X_1}{a} + \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_1 \right) \frac{X_2}{a} - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 E_1 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 - 2M^{1/2}P \right) E_2 &= 0, \\ \left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) \frac{X_1}{a} + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \frac{X_2}{a} + \left(P^2 - \frac{9}{4}m_2 \right) E_1 + \frac{9}{4}m_2 E_2 &= 0, \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \frac{X_1}{a} + \left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) \frac{X_2}{a} + \frac{9}{4}m_1 E_1 + \left(P^2 - \frac{9}{4}m_1 \right) E_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.153)$$

A equação secular será

$$\begin{vmatrix} \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_2 \right) & \left(-\frac{9}{4}m_2 \right) & -\left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) \\ \left(-\frac{9}{4}m_1 \right) & \left(P^2 - 3M + \frac{9}{4}m_1 \right) & -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) & -\left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) \\ \left(2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_2 \right) & \left(\frac{9}{4}m_2 \right) \\ -\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) & \left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 \right) & \left(\frac{9}{4}m_1 \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_1 \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (12.154)$$

A partir das considerações anteriores, sabe-se que este determinante deve ser uma equação de quarto grau em P^2 , da qual uma raiz é $P^2 = 0$. Este fato, juntamente com as simetrias no conjunto de coeficientes, encorajará o leitor a tentar manipular o determinante acima para simplificar sua expansão e explicitar o fator P^2 . Somando a segunda coluna com a primeira, e a terceira com a quarta, e, em seguida, subtraindo a primeira linha da segunda, e a terceira da quarta:

$$\begin{vmatrix} (P^2 - 3M) & \left(-\frac{9}{4}m_2 \right) & -\left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & -(2M^{1/2}P) \\ 0 & \left[P^2 - 3M + \frac{9}{4}(m_1 + m_2) \right] & \left[2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) \right] & 0 \\ (2M^{1/2}P) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_2 \right) & P^2 \\ 0 & \left[2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) \right] & -\left[P^2 - \frac{9}{4}(m_1 + m_2) \right] & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.155)$$

Fatora-se P da última coluna e, em seguida, multiplica-se a última por $3M_2^{1/2}/2$, e subtrai-se da primeira coluna. Pode-se, então, fatorar P da primeira coluna, para obter

$$\begin{vmatrix} P & \left(-\frac{9}{4}m_2 \right) & -\left(2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & -(2M^{1/2}) \\ P^2 & 0 & \left[P^2 - 3M + \frac{9}{4}(m_1 + m_2) \right] & \left[2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) \right] \\ \left(\frac{1}{2}M^{1/2} \right) & \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 \right) & \left(P^2 - \frac{9}{4}m_2 \right) & P \\ 0 & \left[2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) \right] & -\left[P^2 - \frac{9}{4}(m_1 + m_2) \right] & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.156)$$

O fator P^2 acha-se, agora, em evidência. Para simplificar a expansão do determinante, multiplica-se a terceira linha por $2PM^{-1/2}$ e subtrai-se da primeira linha:

$$\begin{vmatrix} 0 & * & * & -(2M^{1/2} + 2P^2M^{-1/2}) \\ 0 & \left[P^2 - 3M + \frac{9}{4}(m_1 + m_2) \right] & \left[2M^{1/2}P - \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) \right] & 0 \\ \left(\frac{1}{2}M^{1/2} \right) & * & * & * \\ 0 & \left[2M^{1/2}P + \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) \right] & -\left[P^2 - \frac{9}{4}(m_1 + m_2) \right] & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.157)$$

Os asteriscos indicam termos que não precisam ser calculados, pois eles não aparecerão no resultado. Pode-se, agora, expandir em determinantes menores da primeira coluna, e expandir o determinante de terceira ordem resultante em determinantes menores da última coluna, com o seguinte resultado final:

$$P^2(M + P^2)[P^4 + MP^2 + \frac{27}{4}(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)] = 0. \quad (12.158)$$

Note, como verificação algébrica, que as três massas, como deveriam, entram simetricamente nesta equação. É um acidente feliz que um fator adicional apareça explicitamen-

te, de forma que só se precise resolver uma equação quadrática em P^2 . Haverá, finalmente, quatro raízes:

$$P^2 = 0, \quad P^2 = -M, \quad (12.159)$$

$$P^2 = -\frac{1}{2}M \pm \frac{1}{2}[M^2 - 27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)]^{1/2}.$$

Como se sabe, a raiz igual a zero resulta do fato de existir uma coordenada ignorável adicional. A raiz $P^2 = -M$ conduz a um modo oscilatório estacionário e as últimas duas de P^2 serão reais e negativas, contanto que

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 > 27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1). \quad (12.160)$$

Se esta desigualdade for invertida, as últimas duas raízes serão complexas, tendo-se, então, quatro valores complexos de P . Destas raízes, duas dão origem a soluções oscilatórias amortecidas e duas soluções oscilatórias sem amortecimento. No caso intermediário em que os dois membros da desigualdade (12.160) são iguais, pode-se mostrar que a amplitude de oscilação cresce linearmente com o tempo. Logo o movimento lagrangiano dos três corpos será instável quando a condição (12.160) não for satisfeita. Se um dos corpos, por exemplo, m_1 , for muito menor do que os outros dois, o problema se restringirá a três corpos, estudado na Seç. 7.6, e a condição de estabilidade se reduz a

$$(m_2 + m_3)^2 > 27m_2m_3, \quad (12.161)$$

ou, se m_3 for a maior,

$$m_3 > 24.96m_2. \quad (12.162)$$

Se m_3 for o Sol e m_2 , o planeta Júpiter, a condição será satisfeita; assim, desprezando-se os efeitos de todos os outros planetas, existirão movimentos estacionários estáveis para os quais um corpo pequeno gira em torno do Sol com o mesmo período de Júpiter e no vértice de um triângulo equilátero em relação ao Sol e a Júpiter. (Existem duas dessas posições.) Os asteróides de Trojan formam um grupo de corpos com o mesmo período de Júpiter, que aparece nesta posição. Como a Eq. (12.161) também é satisfeita pelo sistema Terra-Lua, o movimento estacionário correspondente de um satélite artificial no sistema Terra-Lua é estacionário. Considerações sobre os movimentos perpendiculares ao plano do movimento estacionário não alteram estas conclusões. No entanto, em vista dos comentários do final da Seç. 12.6, as conclusões sobre estabilidade só serão válidas no caso de períodos de tempo limitados.

Com exercício para o leitor, encontrar a solução das Eqs. (12.153), para determinar a razão entre as variáveis e, consequentemente, a forma da oscilação de cada modo normal (veja o Probl. 30). Para resolver as Eqs. (12.153), pode ser útil submetê-las à mesma série de manipulações que nos levou do determinante (12.154) para o (12.157). Note que somar uma linha de um determinante com outra corresponde à soma das equações correspondentes. Somar duas colunas corresponde a agrupar as variáveis correspondentes, isto é, introduzir uma variável nova que é a soma das duas originais.⁵

⁵ Um tratamento mais extenso e avançado do problema dos três corpos pode ser encontrado em C. L. Siegel, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Berlin, Springer-Verlag, 1956.

PROBLEMAS

- Determine a transformação em coordenadas normais para os dois osciladores acoplados mostrados na Fig. 4.10.
- Resolva o Probl. 40, do Cap. 4, transformando as coordenadas x_1 e x_2 em coordenadas normais usando o método da Seç. 12.3.
- Uma massa m movendo-se no espaço é submetida à ação de uma força cuja energia potencial é
$$V = V_0 \exp [(5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8yz - 26ya - 8za)/a^2],$$
onde as constantes V_0 e a são positivas. Mostre que V tem um ponto de mínimo. Determine as freqüências normais de vibração em torno desse mínimo.
- Uma massa m está pendurada a um suporte fixo por meio de uma mola de constante k , cujo comprimento, quando relaxada, é $l = 2mg/k$. Uma segunda massa é pendurada à primeira por meio de uma mola idêntica. Determine as seis coordenadas normais e as freqüências correspondentes para pequenas vibrações deste sistema em torno da posição de equilíbrio. Cada mola exerce uma força apenas ao longo da linha que liga as suas duas extremidades, mas podem oscilar livremente em qualquer direção na extremidade. Despreze as massas das molas.
- Um íon de massa m e carga q é mantido, por uma força linear atrativa $F = -kr$, num ponto A , onde r é a distância do íon ao ponto. Um íon idêntico está ligado da mesma forma a um segundo ponto B a uma distância l de A . Os dois íons movem-se (no espaço tridimensional) sob a ação desta força e de sua repulsão eletrostática mútua. Determine os modos normais de vibração e escreva a solução mais geral para pequenas vibrações em torno do ponto de equilíbrio.
- A massa m_2 na Fig. 4.10 está sob a ação da força $F_2 = B \sin \omega t$. O sistema está em repouso em $t = 0$. Determine o movimento pelo método das coordenadas normais, usando o resultado do Probl. 1.
- O par de íons do Probl. 5 é submetido a uma onda eletromagnética plano-polarizada que incide perpendicularmente sobre a linha \overline{AB} , cujo campo elétrico $E_0 \cos \omega t$ está orientado a 45° com a linha \overline{AB} . Determine o movimento do estado estacionário.
- A massa no Probl. 3 é submetida à força
$$F_x = F_y = F_z = Be^{-\alpha t}.$$
Determine uma solução particular.

9. Escreva os tensores M , B , K para o Probl. 39 do Cap. 4 e mostre que todos os três podem ser diagonalizados simultaneamente. Resolva o problema pelo método das coordenadas normais.

10. As massas m_1 e m_2 da Fig. 4.10 estão sujeitas às forças de atrito $-\gamma m_1 \dot{x}_1$ e $-\gamma m_2 \dot{x}_2$, respectivamente. Determine a solução geral.

11. Suponha que $V^0(x_1, \dots, x_f)$ tem um mínimo em $x_1 = \dots = x_f = 0$, e que $V'(x_1, \dots, x_f)$ seja pequeno, mas que a Eq. (12.66) não é necessariamente válida. Determine as expressões aproximadas até primeira ordem em V' e suas derivadas em $x_1 = \dots = x_f = 0$, para as coordenadas x_1^0, \dots, x_f^0 do novo ponto de equilíbrio $V = V^0 + V'$. Supondo que a expansão de V^0 em torno de $x_1 = \dots = x_f = 0$ é dada pela Eq. (12.67) (mais termos de ordem superior) e que os termos quadráticos da expansão de V devem ser

$$V = \sum_{k,l} \frac{1}{2} (K_{kl}^0 + K'_{kl}) y_k y_l,$$

onde $y_k = x_k - x_k^0$, determine a expressão aproximada até termos de primeira ordem para os coeficientes K'_{kl} .

12. Determine as aproximações de segunda ordem para os coeficientes C'_j, C'_l os quais são dados até primeira ordem pelas Eqs. (12.80) e (12.83).

13. Determine a aproximação de terceira ordem para a correção da freqüência dada até segunda ordem pela Eq. (12.91).

14. Formule as equações que devem ser resolvidas para se obter uma aproximação de primeira ordem no caso em que as condições (12.87) não são válidas para um grupo de quatro modos nas vizinhanças, isto é, para o caso de quase degenerescência.

15. Um pêndulo triplo é formado por uma massa M suspensa por um fio de comprimento l a um suporte fixo. Uma massa m é pendurada à massa M por um fio de comprimento l , e desta segunda massa uma terceira massa m é pendurada por um terceiro fio de comprimento l . As massas oscilam no plano vertical. Escreva as equações para pequenas vibrações do sistema, usando como coordenadas os ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 que cada fio faz com a vertical. Mostre que se $M \ggg m$, podem-se obter as coordenadas normais desprezando-se os termos de ordem $(m/M)^{1/2}$. Determine as freqüências normais aproximadas até termos de ordem m/M . [Sugestão. Transforme K num tensor constante e diagonalize M .]

16. As quatro massas da Fig. 12.3 movem-se somente ao longo de uma linha reta horizontal sob a ação de quatro molas idênticas cuja constante é k , e uma mola mais fraca cuja constante é $k' \ll k$. Determine, considerando somente termos de primeira ordem em k' , uma solução aproximada para os modos normais de vibração.

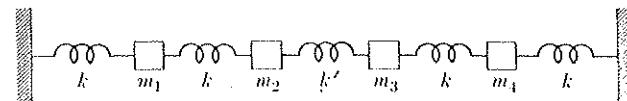


Fig. 12.3 Quatro osciladores harmônicos acoplados.

17. Determine a solução aproximada do Probl. 16 para o caso em que as massas são todas iguais. O resultado aproximado sugere uma maneira de resolver exatamente o problema?

18. Um elipsóide de revolução de massa M , cujos eixos de simetria são iguais a dois terços do diâmetro equatorial, é modificado colocando-se massas iguais a m , $2m$, $3m$, m , $2m$ e $3m$ em seqüência, em torno do seu equador, em pontos cuja separação é de 60° . Duas massas, cada uma igual a $4m$, são colocadas nas extremidades opostas de um diâmetro, que faz um ângulo de 45° com o eixo e na linha longitudinal das massas m . Se $m \ll M$, determine os novos eixos principais, considerando somente termos de ordem m/M . [Sugestão. O método de perturbação desenvolvido na Seç. 12.5 para diagonalizar o tensor W pode ser aplicado para diagonalizar aproximadamente qualquer tensor simétrico $I^0 + I'$ se os autovetores de I^0 são conhecidos e I' é pequeno.]

19. Aplique o método de perturbação para o problema da corda com densidade variável considerado no último parágrafo da Seç. 9.9, supondo que $a \ll \sigma_0$. Determine a freqüência normal mais baixa até segunda ordem em a , e escreva a solução $u(x, t)$ correspondente até primeira ordem em a .

20. Formule um método de perturbação de primeira ordem para resolver as Eqs. (12.60), considerando o atrito como uma pequena perturbação, e supondo conhecida a solução sem atrito. Mostre por que, mesmo em primeira ordem, não se podem introduzir coordenadas normais que incluem os efeitos do atrito.

21. Duas cargas $+Ze$ estão localizadas em pontos fixos, separadas por uma distância $2a$. Um elétron de massa m e carga $-e$ move-se no campo destas cargas. Determine os movimentos estacionários e as pequenas oscilações em torno dos movimentos estacionários.

*22. Duas cargas $+Ze$ e $-Ze$ estão localizadas em pontos fixos $z = a$ e $z = -a$. Um elétron de massa m e carga $-e$ move-se no campo destas cargas. Esboce um gráfico de z versus r , onde r é a distância do eixo z , mostrando os valores de z e r para os quais existem movimentos estacionários. Investigue a estabilidade desses movimentos estacionários.

23. Uma massa m desliza sem atrito sobre uma mesa horizontal lisa. A massa está presa a um fio sem peso, de comprimento total l , que passa por um orifício na mesa. Em

sua extremidade inferior, encontra-se uma massa M que está suspensa embaixo da mesa. Obtenha a função de Hamilton usando as coordenadas polares r e α da massa m em relação ao orifício, e os ângulos esféricos θ e φ da massa M em relação ao orifício. Determine os movimentos estacionários e as freqüências normais para pequenas vibrações em torno de um movimento estacionário.

24. Suponha que as três massas da Fig. 4.16 podem mover-se livremente no plano, mas estão vinculadas a permanecer em linha reta uma em relação à outra. Escolha as suas coordenadas de forma que tantas quanto possível sejam ignoráveis, determine os movimentos estacionários e os modos normais de vibração em torno desses movimentos.

25. Um corpo simétrico é montado em anéis que podem girar livremente sem atrito. Uma mola espiral é ligada a um dos anéis de forma a exercer um torque restaurador $-k\phi$ em torno do eixo z , onde ϕ é um ângulo de Euler. Determine os movimentos estacionários e discuta o caráter das pequenas vibrações em torno desses movimentos.

26. No Probl. 13, do Cap. 11, uma mola espiral é conectada entre o eixo e os anéis, que exercem um torque restaurador $-k\psi'$, onde ψ' é o ângulo de rotação relativo entre o disco e os anéis. O “giroscópio” move-se livremente no espaço sem que forças externas ajam sobre ele. Determine os movimentos estacionários e discuta as pequenas vibrações em torno deles.

27. Duas massas m são ligadas entre si por uma haste rígida e sem peso de comprimento $2l$. Uma das massas é ligada à origem por uma mola de constante k e a outra por uma mola de constante $2k$. O comprimento de ambas as molas quando relaxadas é igual a zero. As massas movem-se num único plano. Use as coordenadas polares r e θ do centro de massa em relação à origem, e o ângulo α que a haste faz com o raio do centro de massa em relação à origem, considerando que $\alpha = 0$ corresponde à situação em que a mola mais forte esteja esticada ao mínimo. Determine os movimentos estacionários e as coordenadas para as quais esses movimentos são estáveis.

*28. No Probl. 23, uma segunda massa m desliza sem atrito sobre a mesa, sendo ligada à primeira por uma haste rígida e sem peso de comprimento a . (Suponha que a montagem seja realizada engenhosamente de forma que a haste e a mola não se embaracem.) Suponha também que $M = 2m$. Use como coordenada adicional o ângulo β entre a haste e a mola. Determine os movimentos estacionários, mostrando os que são estáveis. Determine os modos normais de vibração em relação aos movimentos estacionários estáveis.

29. O potencial vetor devido ao momento de dipolo magnético μ é, em coordenadas esféricas relativas ao eixo do dipolo,

$$A = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} \hat{\phi}.$$

Determine os movimentos de uma partícula carregada movendo-se neste campo e mostre que eles são instáveis.

30. Determine a solução das Eqs. (12.153) para X_1 , X_2 , E_1 e E_2 , quando $P^2 = -M$, e descreva as oscilações correspondentes. [Veja a sugestão no último parágrafo da Seç. 12.8.]

*31. Analise o caso que foi omitido na Seç. 12.8, quando os três corpos, m_1 , m_2 e m_3 , acham-se em linha reta. Mostre que existem três movimentos estacionários possíveis, um para cada massa situada entre as outras duas. [Sugestão. É necessário usar a regra dos sinais de Descartes.] Mostre que os movimentos na vizinhança destes movimentos estacionários são instáveis. Compare os seus resultados com os da Seç. 7.6 e do Probl. 19 do Cap. 7.

32. Determine a solução das Eqs. (12.153) para a raiz dupla $P^2 = -\frac{1}{2}M$, quando a desigualdade (12.160) torna-se uma igualdade. Mostre que, neste caso, as Eqs. (12.150) têm uma segunda solução na qual X_1 , X_2 , E_1 e E_2 são funções lineares de t , digamos $X_1 = X'_1 + X''_1 t$ etc. [Pode-se simplificar um pouco a Álgebra supondo que uma das constantes aditivas seja igual a zero, como, por exemplo, X'_1 . Isto é permitível, pois como X'_1 pode ser sempre igualada a zero subtraindo da segunda solução um múltiplo apropriado da primeira solução, chegar-se-á à solução em que X_1 é constante. A linearidade das equações permite uma superposição linear das soluções.]

33. Determine a solução das Eqs. (12.153) para X_1 , X_2 , E_1 e E_2 para a raiz $P^2 = 0$ e mostre que ela corresponde a um novo movimento estacionário próximo daquele esculhido. Como a solução só tem uma constante arbitrária, deve haver uma solução das Eqs. (12.150) correspondente a $P^2 = 0$. Discuta a sua forma e a verificação por substituição.

*34. Mostre que, se os movimentos dos três corpos de Lagrange fora do plano do movimento estacionário forem levados em conta, pelo menos uma das três coordenadas adicionais será ignorável. Escolha como as duas coordenadas não ignoráveis as distâncias $q_1 = z_1 - z_3$ e $q_2 = z_2 - z_3$ onde z_i é a distância perpendicular de m_i ao plano do movimento estacionário. Estabeleça as equações do movimento generalizadas usando o método apresentado na Seç. 12.8. Obtenha as vibrações normais correspondentes e mostre que o resultado pode ser interpretado como correspondendo simplesmente a uma pequena variação na orientação do plano do movimento estacionário.

CAPÍTULO 13

POSTULADOS BÁSICOS DA TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE

13.1 OS POSTULADOS DA TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE¹

Vimos na Seç. 7.1 que as Leis do Movimento, de Newton, têm a seguinte propriedade: são válidas tanto num sistema de coordenadas, como em qualquer outro cujo movimento se faça em velocidade constante em relação ao primeiro. A equação do movimento tem a mesma forma em ambos os sistemas de coordenadas (com as mesmas forças no segundo membro). O postulado de Einstein da Relatividade Especial afirma que todas as leis da Física devem ter esta mesma propriedade.

Postulado da Relatividade Especial. *Toda lei da Física válida num sistema de coordenadas também deverá sê-lo em qualquer outro que se move em velocidade constante em relação ao primeiro.* (13.1)

Este postulado implica a existência de um conjunto especial de sistemas de coordenadas, movendo-se uniformemente um em relação ao outro e, em qualquer um deles, as leis da Física são válidas. Tais sistemas chamam-se *sistemas de coordenadas inerciais*. Em sistemas de coordenadas acelerados em relação a um sistema inercial, as leis da Física não são necessariamente válidas, pelo menos da mesma forma. O postulado (13.1) deixa para os pesquisadores a determinação dos sistemas de coordenadas inerciais. Dada uma lei física apropriada, por exemplo, a primeira Lei do Movimento, de Newton, a Lei de Inércia, deve-se determinar experimentalmente em que sistema de coordenadas as leis são válidas.

Para a maioria das pessoas, o postulado da Relatividade é intuitivamente atraente. A partir do ponto de vista operacional, grandezas físicas como posição e velocidade devem ser definidas, especificando-se a maneira de medi-las. A posição e a velocidade de um corpo são medidas em relação a algum outro corpo ou em relação a um sistema de coordenadas cuja origem e eixos são localizados tomando-se como referência outros corpos. Então, a posição e a velocidade não têm significado, a não ser quando definidas em relação a outro corpo ou em relação a algum sistema de coordenadas. A partir deste ponto de vista, todos os sistemas devem ser equivalentes. Embora este argumento torne o postulado da Relatividade plausível, não demonstra a sua validade. Na realidade, se uma determinada lei da Física for válida num sistema de coordenadas inerciais e não for válida em outros, este fato proporcionaria um método operacional de distinguir sis-

¹ É de grande utilidade rever as Seçs. 1.4, 7.1 e 7.2 como preparação para o estudo deste capítulo.

temas de coordenadas, da mesma forma que a lei da inércia permite distinguir sistemas de coordenadas inerciais de sistemas acelerados. Poder-se-ia, então, definir velocidade absoluta como a velocidade em relação a um sistema de coordenadas no qual aquela lei particular da Física é válida. Torna-se claro também, admitindo-se que o postulado da Relatividade seja plausível intuitivamente, que um postulado mais geral será igualmente plausível, ou seja, que as leis da Física devem ser as mesmas em todos os sistemas de coordenadas, não importando como eles se movam. Esta idéia nos conduz à Teoria Geral da Relatividade, que é consideravelmente mais difícil matematicamente e que não foi ainda totalmente verificada experimentalmente. Neste capítulo e no próximo, o estudo restringe-se à Teoria Especial da Relatividade, com exceção de alguns comentários na última seção.

Observe que o postulado da Relatividade, como as leis da Termodinâmica, é um princípio geral que se aplica a todas as leis da Física. Deve-se examinar cada lei física proposta ou aceita presentemente para determinar se ela concorda com o postulado. Caso não concorde, é preciso procurar uma modificação apropriada para fazê-la concordar. Einstein, em seu primeiro trabalho,² conseguiu fazer isto com as leis da Mecânica e do Eletromagnetismo. Ele foi levado, como se verá, a várias conclusões surpreendentes, que estavam de acordo com diferentes experiências. A Teoria Especial da Relatividade encontra-se atualmente muito bem fundamentada experimentalmente.

As equações da eletricidade e do magnetismo, formuladas por Maxwell, parecem, à primeira vista, violar o postulado da Relatividade. Em particular, as equações de Maxwell prevêm a existência de ondas eletromagnéticas deslocando-se à velocidade da luz, c . Se é uma lei da Física o ato de a luz deslocar-se em velocidade c em qualquer sistema de coordenadas, então a Eq. (7.5) parece mostrar que esta lei não seria a mesma em um sistema de coordenadas que se movimenta em velocidade constante em relação ao primeiro. Portanto, será preciso tentar modificar a lei de propagação da luz de forma que a velocidade c não seja definida em relação a um sistema de coordenadas, mas em relação à fonte de luz, ou em relação a algum meio no qual a luz se propaga e que exista em todo o espaço. Qualquer uma dessas sugestões exigiria modificações nas equações de Maxwell e, além disso, não estaria de acordo com a experiência. Na realidade, verifica-se experimentalmente que de acordo com a precisão com que a experiência pode ser realizada, a lei de que a velocidade da luz (no vácuo) seja universal c é realmente verdadeira em todos os sistemas de coordenadas. Einstein propôs, em 1905, a Teoria Especial da Relatividade, baseada no postulado da Relatividade (13.1) e no seguinte:

A velocidade da luz é uma constante universal fixa c em relação a qualquer sistema de coordenadas. (13.2)

Entre as experiências que justificam este postulado, encontra-se a de Michelson e Morley,³ sobre a velocidade da luz em relação à Terra, observações da aberraçao na

direção da luz de estrelas e observações da luz de sistemas de duas estrelas com movimento de revolução (veja o Probl. 1). Infelizmente, esta obra não permite a discussão dessas experiências. Para se analisar a base experimental da Teoria da Relatividade, o leitor deve consultar um dos livros populares e excelentes sobre o assunto ou um texto sobre a Teoria da Relatividade. (Consulte a Bibliografia.) Uma das mais diretas verificações do postulado (13.2) é a experiência realizada por Kenedy e Thorndike⁴ para medir a diferença na velocidade da luz em relação à Terra no decurso de um ano. Eles mostram que, com um erro de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, a velocidade é a mesma em dois sistemas que se movam em velocidade relativa igual a $60\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

O postulado (13.2) é essencialmente o enunciado a partir de uma lei particular da Física em relação à propagação da luz, sendo, além disso, consequência das leis mais gerais da eletricidade e do magnetismo formuladas por Maxwell. Einstein selecionou esta lei específica para o seu postulado porque sua existência é crucial, como se verificará na escolha do sistema de coordenadas e na determinação das relações entre sistemas de coordenadas com movimentos relativos. A importância da velocidade da luz c na Teoria da Relatividade vai além de sua função como velocidade de propagação da luz. Poder-se-ia ter formulado o segundo postulado de forma mais geral:

As leis da Física envolvem uma velocidade constante universal c [que, de acordo com o postulado (13.1), deve ser a mesma em todos os sistemas de coordenadas]. (13.2')

O fato de as leis da Física poderem conter uma velocidade, que é a mesma em todos os sistemas de coordenadas, foi descoberto por Einstein. Só pode haver uma velocidade dessas (veja o Probl. 12) e, assim, qualquer lei da Física que se refira a uma velocidade constante universal tem de incluir a velocidade c .

O primeiro passo no desenvolvimento da Teoria da Relatividade é estabelecer definições apropriadas das diversas grandezas que aparecem nas leis da Física — posições, velocidades, tempo, energias etc. Muitas dessas grandezas, como, por exemplo, posição, são definidas em relação a um sistema de coordenadas particular. Evidentemente, desejando-se aplicar o postulado (13.1), é preciso definir as diversas grandezas físicas da mesma maneira em todos os sistemas de coordenadas. A afirmativa de que a velocidade da luz tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas estaria errada ou não teria significado, a não ser que as unidades com que a velocidade é medida sejam definidas da mesma maneira em todos os sistemas de coordenadas. Uma vez que se especifique como cada sistema de coordenadas deve ser escolhido e como as diversas grandezas devam ser medidas em relação a ele, o passo seguinte será a determinação das relações entre as grandezas correspondentes nos diferentes sistemas de coordenadas inerciais. Em Física Clássica, a transformação entre dois sistemas de coordenadas movendo-se um em relação ao outro é dada pelas Eqs. (7.1), (7.5) e (7.6) para as posições, velocidades e acelerações. Como foi observado acima, estas equações de transformação são incompatíveis com o postulado (13.2). Para substituí-las, determi-

² A. Einstein, *Annalen der Physik*, 17 (1905).

³ A. A. Michelson e E. W. Morley, *Amer. J. Science*, 34, 333 (1887).

⁴ R. J. Kennedy e E. M. Thorndike, *Phys. Rev.*, 42, 400 (1932).

na-se, na Seç. 13.5, um conjunto diferente de equações de transformação, as equações de transformação, de Lorentz, que relacionam sistemas iniciais diferentes.

Quando se sabe como transformar as diversas grandezas físicas de um sistema de coordenadas em outro, pode-se verificar se cada uma das leis tem a mesma forma nos diferentes sistemas iniciais. Pode-se verificar que este é o caso para as equações de Maxwell, resultado que não é de todo surpreendente, pois se adotou o postulado (13.2) desde o princípio. Das três leis de Newton, somente a primeira é compatível com as transformações de Lorentz; as outras duas exigem modificações.

Para descobrir como modificar as Leis do Movimento, de Newton, Einstein orientou-se pela observação de que estas leis haviam sido verificadas experimentalmente para todos os casos que envolvessem velocidades pequenas em comparação à da luz. As equações de transformação, de Lorentz, relacionando dois sistemas de coordenadas iniciais, reduzem-se às equações clássicas correspondentes, todas as vezes em que a velocidade relativa dos dois sistemas de coordenadas for desprezível, em comparação à velocidade da luz. Portanto, Einstein impôs que as novas leis da Mecânica Relativística deveriam concordar com as da Mecânica Clássica antiga sempre que as velocidades envolvidas fossem muito menores que c . Um argumento similar foi usado por Niels Bohr em seu trabalho pioneiro sobre a Teoria dos Quanta. Bohr usou um princípio que ele chamou *Princípio da Correspondência*, que pode ser formulado de maneira mais geral:

Princípio da Correspondência. Qualquer teoria nova proposta deve concordar com uma teoria mais antiga na previsão dos fenômenos para os quais a teoria mais antiga fornece a previsão correta. (13.3)

Esta observação aparentemente trivial tem-se mostrado um instrumento poderoso no desenvolvimento das modernas teorias da Física, tendo orientado Einstein no desenvolvimento correto das equações do movimento relativísticas.

Na pesquisa das leis da Mecânica Relativística, a primeira pergunta é: as leis da conservação, em particular a da Conservação do Momento Linear, serão possíveis de maneira a serem compatíveis com os postulados da Relatividade? Descobrir-se-á que este será o caso, com a condição de modificar-se a definição do momento linear de uma partícula de acordo com a Eq. (4.74). Verificar-se-á que a Lei da Conservação do Momento só será compatível com os postulados da Relatividade incluindo-se a Lei da Conservação da Energia. A energia de uma partícula é definida como a energia cinética dada pela Eq. (4.73), mas a energia de repouso mc^2 . Se um corpo tiver massa m , então a fórmula simples mc^2 , de acordo com a Teoria da Relatividade, incluirá todas as espécies de energia – energia térmica, potencial, nuclear etc. – nele contidas. Quando se conhece a definição de momento relativisticamente correta, pode-se tentar generalizar a Lei do Movimento, de Newton, exigindo que a força exercida sobre uma partícula deve ser igual à taxa de variação com o tempo do momento relativístico. O resultado obtido será a Lei do Movimento Relativístico. A lei do movimento implica uma transformação particular para a força quando se muda de um sistema de coordenadas para outro. Será então necessário examinar as várias leis da força e modificá-las, se necessário, de forma que elas concordem com as leis da transformação. Estes serão os assuntos tratados no restante deste capítulo e no próximo.

13.2 O PARADOXO APARENTE RELATIVO À VELOCIDADE DA LUZ

Embora o postulado da Relatividade (13.1) seja intuitivamente atraente, quando combinado com o segundo postulado, parece conduzir a uma série de resultados paradoxais que tornam difícil, em princípio, aceitar a teoria baseada nestes dois postulados. Muitos desses paradoxos relacionam-se a um resultado muito simples, obtido diretamente do segundo postulado e que será estudado nesta seção.

Considere um pulso de luz que parte da origem O , no instante $t = 0$, e que, no instante t , deslocou-se a uma distância x (Fig. 13.1). Suponha que se estabeleça um segundo sistema de coordenadas com asterisco cuja origem O^* se move ao longo do eixo x em velocidade v . Suponha que, em $t = 0$, a origem O^* coincida com O e que, no instante t , deslocou-se a uma distância h , como é mostrado na Fig. 13.1. Pode-se verificar pela figura que

$$x = x^* + h. \quad (13.4)$$

Então, se a velocidade da luz for c em relação a O :

$$x = ct, \quad (13.5)$$

e se

$$h = vt, \quad (13.6)$$

então a velocidade da luz em relação a O^* será evidentemente

$$c^* = x^*/t = c - v. \quad (13.7)$$

Logo $c^* \neq c$, parecendo existir um conflito com o postulado (13.2). Como o argumento que conduziu à Eq. (13.7) depende somente de relações matemáticas e geométricas simples, é difícil perceber por que estaria errada. *Na realidade, neste argumento não há nada errado.* A Eq. (13.7) é válida, tanto na Teoria da Relatividade, como em Física Clássica, contanto que se entenda claramente o significado do símbolo que aparece nesta equação. Note que a Eq. (13.4) supõe implicitamente que todas as três distâncias, x , h e x^* , sejam medidas no mesmo sistema de unidades, e se não o forem, que sejam feitas as correções entre as diferenças de unidade antes de realizar-se a adição. Se estas três grandezas não forem medidas nas mesmas unidades e se não se levar em conta

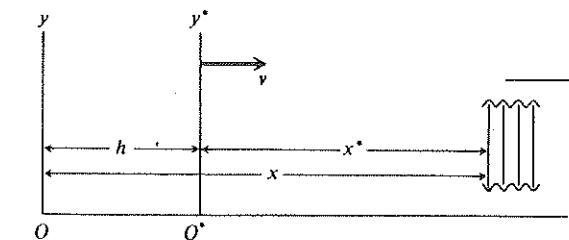


Fig. 13.1 Pulso de luz deslocando-se em velocidade c na direção x , e sua relação com uma origem fixa O e uma origem em movimento O^* .

este fato ao se escrever a equação, então é evidente que ela não seria válida. Do mesmo modo, admite-se que o mesmo intervalo de tempo t , medido nas mesmas unidades, seja usado em todas as três equações (13.5), (13.6) e (13.7). A conclusão, que deverá ser válida em qualquer teoria, é que a Eq. (13.7) fornece a relação entre a velocidade c em relação a O e a velocidade c^* em relação a O^* , que se move em velocidade v em relação a O , contanto que as três velocidades sejam obtidas dividindo-se as distâncias apropriadas pelo mesmo tempo t , onde todas as distâncias são medidas da mesma maneira e nas mesmas unidades. Vê-se que para resolver o paradoxo entre a Eq. (13.7) e o postulado (13.2), deve-se supor que quando um sistema de coordenadas se desloca em relação a outro, a unidade de tempo ou de comprimento, ou ambas, são diferentes nos dois sistemas de coordenadas. Se, por exemplo, a distância x^* for medida em unidades menores do que a distância x , então a velocidade c^* será maior do que $c - v$. Da mesma forma, se o tempo t^* , desde que o pulso de luz parta da origem, for medido nas unidades de tempo mais longas que as do tempo t , então $c^* = x^*/t^*$ será maior do que $c - v$. Uma ou outra, ou ambas as possibilidades devem permitir que c^* seja igual a c .

Em Física Clássica, supõe-se, embora a suposição não seja apresentada explicitamente, que os resultados das medidas não sejam afetados pelo movimento do instrumento de medida, contanto que sejam excluídos os efeitos óbvios, tais como as distorções produzidas por acelerações violentas. Para se aceitar os postulados da Teoria da Relatividade, será preciso, então, abandonar esta suposição, admitindo-se a possibilidade de uma régua em movimento ser mais curta que uma em repouso, ou que o relógio em movimento deve ser mais lento do que um fixo. Se isto for verdade, então a definição operacional de uma grandeza física qualquer deve incluir, além de uma especificação da maneira que deve ser medida, a especificação da velocidade com que o instrumento de medida se movimenta. Usualmente adota-se a convenção de que, a não ser que se declare explicitamente, todas as grandes referidas a um sistema de coordenadas particular são medidas com instrumentos de medida em repouso, em relação a este sistema de coordenadas. Então, entendendo-se x^* como a distância do pulso de luz à origem O^* , medida no sistema de coordenadas com asterisco, ter-se-á, de acordo com o postulado (13.2):

$$c = x/t = x^*/t^*, \quad (13.8)$$

onde x e t são medidas no sistema com asterisco. Na Seç. 13.4, apresentar-se-ão as conclusões obtidas em relação ao comportamento de relógios e réguas em movimento a partir desta afirmação.

Existe outra afirmativa mais sutil envolvida no argumento que conduziu à Eq. (13.7). Como o pulso de luz e as origens O e O^* movem-se um em relação aos outros, as três distâncias, h , x e x^* , da Fig. 13.1 devem ser medidas no mesmo instante t . Na próxima seção, verificar-se-á que só se poderá definir o que se quer dizer por *mesmo instante*, em dois lugares diferentes, em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Dois eventos simultâneos em relação a um sistema de coordenadas não são necessariamente simultâneos em relação a outro sistema. A distância x^* medida no sistema de coordenadas com asterisco poderá, portanto, ser medida não apenas em unidades di-

ferentes, mas também entre pontos diferentes daqueles que seriam usados se todas as medidas fossem realizadas no sistema sem asterisco como se admitiu na determinação da Eq. (13.7).

13.3 SISTEMAS DE COORDENADAS, SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Para estabelecer um sistema de coordenadas, é preciso, primeiramente, especificar a sua origem O , cuja localização deve ser determinada presumivelmente em relação a um objeto ou a eventos identificáveis. Especificam-se, então, três eixos mutuamente perpendiculares, x , y e z , cujas direções também devem ser especificadas em relação a objetos identificáveis. Admite-se que o sistema de coordenadas tenha sido escolhido de forma a ser inercial e considerando-se a Lei da Inércia como válida. A maneira de garantir que o sistema seja inercial é localizar a origem e os eixos em relação aos corpos sobre os quais nenhuma força seja exercida. [Devido à igualdade entre massas gravitacional e inercial, pode ser difícil ou mesmo impossível, em princípio, determinar quando as forças agem sobre o corpo. Neste ponto, deve-se ignorar esta dificuldade, caso se deseje progredir na compreensão da Teoria Especial da Relatividade. Retornar-se-á a este assunto na última seção deste capítulo.]

Após a escolha de uma origem e de um conjunto de eixos para o sistema de coordenadas escolhido, deve-se especificar a maneira de medir as diversas grandezas físicas. De acordo com os postulados, o comportamento dos instrumentos de medida pode depender da maneira com que se movam, sendo, portanto, necessário especificar como se movem os instrumentos usados para medir uma determinada grandeza. Esta especificação deve referir-se apenas ao sistema de coordenadas e talvez aos corpos sobre os quais as medidas estão sendo efetuadas. A não ser que se especifique o contrário, todos os instrumentos de medida deverão estar em repouso em relação ao sistema de coordenadas. No caso da medida de certas propriedades de um determinado objeto, como, por exemplo, a massa, talvez seja conveniente especificar que o instrumento esteja em repouso em relação ao corpo cujas propriedades estão sendo medidas.

Qualquer definição de grandeza física envolve suposições em relação às leis físicas que governam o comportamento dos instrumentos de medida usados. Por exemplo, usa-se a Lei (13.2) para definir a maneira de medir o tempo em qualquer ponto do sistema de coordenadas. Quando um fenômeno físico é descoberto e está em conflito com as leis físicas estabelecidas, será necessário não somente mudar a lei, como também examinar as definições dos vários conceitos e grandes físicas para determinar se eles dependem de suposições que não são mais válidas. Não é possível experimentalmente, ou mesmo teoricamente, especificar explicitamente todas as suposições levantadas para se chegar à definição operacional. Especificam-se somente aquelas que parecem relevantes no estágio particular do desenvolvimento da Física, mas as suposições não levadas em conta podem tornar-se importantes em análises posteriores. Muitas delas têm a ver com os fatores que podem afetar os resultados de determinada medida. Em Mecânica, supõe-se que, com certas exceções óbvias, os resultados de uma medida não dependem (entre outras coisas) da cor ou da história do instrumento de medida, da

fase da Lua no instante em que a medida foi realizada, ou da velocidade do instrumento. A última suposição não é mais aceita na Teoria da Relatividade, mas continua-se a supor que, com certas exceções óbvias, os outros três fatores, e na realidade muitos outros, não afetam os resultados das medidas físicas.

Outro tipo de suposição é que maneiras diferentes de medir a mesma grandeza fornecem o mesmo resultado. Por exemplo, existem muitas maneiras de medir um comprimento, algumas apropriadas para certos casos e outras não. As medidas de comprimento envolvem de certa forma comparação entre o comprimento desconhecido com outro, conhecido, que faça parte do instrumento de medidas e que, de acordo com a suposição, deve estar em repouso em relação ao sistema de coordenadas em que a medida está sendo realizada. O comprimento conhecido é, por sua vez, calibrado a partir de um padrão específico de comprimento unitário. Continua-se a supor, como em Física Clássica, que quando se empregam métodos diferentes para medir a mesma grandeza, eles fornecerão o mesmo resultado, contanto que os instrumentos de medida estejam em repouso um em relação ao outro. Na discussão de uma determinada grandeza mensurável, pode-se, portanto, escolher qualquer método conveniente para o propósito em vista. Em particular, suponha, na análise a seguir, que a distância entre dois pontos fixos quaisquer neste sistema de coordenadas deve ser medida de maneira usual por meio de uma régua. O comprimento de um objeto em movimento requer uma definição mais cuidadosa, que será apresentada subsequentemente. Admita da mesma forma que definições operacionais apropriadas foram ou serão fornecidas para todas as grandeszas físicas com que se trabalhará.

Cada ponto deste sistema de coordenadas deve ser localizado pelas coordenadas x , y e z , que se imaginam medidas por meio de uma régua em repouso no sistema de coordenadas. Qualquer evento físico será localizado no espaço pelas coordenadas x , y e z do ponto onde ele ocorre, e identificado por um tempo t , em que ele ocorre, o qual é medido da maneira descrita a seguir. Suponha que, na origem do sistema de coordenadas, localiza-se um relógio que marca o tempo t , medido a partir de um tempo de referência $t = 0$. Da mesma forma que a origem no espaço pode ser localizada por um objeto identificado e sobre o qual não há ação de forças, a origem do tempo pode ser localizada por um evento que ocorra na origem espacial. Este evento pode ser simplesmente a leitura zero do próprio relógio, se este for conveniente. A qualquer outro evento que ocorra na origem do sistema de coordenadas espaciais deve ser atribuído o tempo t marcado pelo relógio, no momento em que o evento ocorreu.

Existe um número variado de maneiras para se especificar o tempo de um evento que ocorreu em um lugar diferente da origem espacial. Uma delas é supondo que em cada ponto do espaço se localiza um relógio em repouso em relação a um sistema de coordenadas, idênticos ao relógio da origem, e que, pelo menos, trabalhem com a mesma velocidade. Será, então, necessário especificar como estes relógios serão sincronizados. Como até o presente só existe uma lei física, (13.2), será preciso usá-la. Portanto, concorda-se em sincronizar o relógio no ponto (x, y, z) , lendo neste ponto o tempo marcado pelo relógio na origem, isto é, recebendo no ponto (x, y, z) um sinal luminoso enviado pelo relógio na origem em um instante determinado. Corrigue-se a leitura somando o tempo $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}/c$ necessário para o sinal luminoso ir da ori-

gem até o ponto (x, y, z) , e acerta-se o relógio para o tempo correto correspondente. Uma maneira equivalente e alternativa de definir o tempo t de um evento que ocorre no ponto (x, y, z) , que não requer tantos relógios, é a seguinte: observa-se, na origem, um sinal luminoso enviado por um dado evento e anota-se o tempo em que o sinal chega, de acordo com o relógio da origem. Subtrai-se, então, deste tempo o necessário para a luz viajar em velocidade c do ponto (x, y, z) até a origem. O tempo t do dado evento será, então, o tempo corrigido.

Assim, qualquer corpo em movimento pode ser localizado pelas coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, que, em princípio, podem ser medidas de acordo com essas definições. Os componentes da velocidade e da aceleração de um corpo podem então ser definidos na maneira usual, como derivadas dessas funções. A massa de um corpo pode ser medida numa balança ou comparando-se sua aceleração com a de uma massa-padrão, como foi explicado na Seç. 1.3. Em ambos os casos, o aparelho de medida e a massa-padrão deverão estar em repouso ou, pelo menos, aproximadamente em repouso em relação à massa desconhecida.

Para assegurar-se que as grandeszas físicas são definidas da mesma maneira em sistemas de coordenadas iniciais diferentes, deverá haver alguma maneira de comparar as unidades básicas nos dois sistemas. Existem duas maneiras diferentes para definir as unidades fundamentais de medida. No caso do comprimento, por exemplo, em primeiro lugar escolhe-se um objeto físico qualquer cujo comprimento seja definido como unidade-padrão de comprimento. Durante muito tempo o metro foi definido como a distância entre duas marcas de uma barra mantida no Departamento Internacional de Pesos e Medidas, Sèvres, França. Definida a unidade de comprimento desta maneira, depõe-se o problema do que significa um metro num sistema de coordenadas (com asterisco) que se move em relação ao laboratório (sem asterisco) na França. Pode-se resolver o problema solicitando ao laboratório para calibrar um segundo metro-padrão, o que só poderá ser feito se o segundo metro estiver em repouso em relação ao primeiro. O segundo metro-padrão é, então, acelerado até atingir a velocidade apropriada de forma a estar em repouso em relação ao sistema de coordenadas em movimento. Supõe-se que esta aceleração seja realizada suficientemente devagar e cuidadosamente, de forma a não produzir distorções óbvias no segundo metro. Define-se, então, o metro-padrão no sistema de coordenadas com asteriscos.

Uma outra maneira mais satisfatória de comparar padrões de comprimento em dois sistemas iniciais diferentes baseia-se na observação de comprimentos perpendiculares à direção do movimento relativo aos quais podem ser comparados diretamente. Considere dois pontos em repouso no sistema de coordenadas sem asteriscos e separados por uma distância igual a um metro, medida em uma direção perpendicular à direção em que o sistema com asterisco se move. Quando estes dois pontos se movem no sistema de coordenadas com asteriscos, eles descrevem um par de linhas paralelas. A distância entre estas duas linhas é, então, definida como o metro-padrão no sistema de coordenadas com asteriscos. Note que se está supondo que o comprimento da barra de um metro não é afetado pela rotação da barra no espaço, de forma que, caso a barra seja calibrada numa orientação, ela pode ser usada para medir comprimentos em qualquer direção.

Uma segunda maneira de definir a unidade de comprimento é escolhendo-se algum fenômeno físico que possa ser identificado universalmente e definindo o metro em relação a algum comprimento mensurável envolvido neste fenômeno. O metro é atualmente definido como 1 650 763,75 vezes o comprimento de onda de uma raia vermelha particular do espectro de um isótopo particular do criptônio, Kr_{86} . Os átomos de criptônio que emitem a radiação devem estar em repouso no sistema de coordenadas em que está sendo medida a radiação, e o comprimento de onda deve ser medido no vácuo. Esta definição da unidade de comprimento também pode ser aplicada a qualquer sistema de coordenadas, não existindo o problema de comparar as unidades dos dois sistemas.

Admita que qualquer uma das maneiras de identificar unidades nos dois sistemas inerciais fornecem o mesmo resultado. Em particular, obtém-se uma importante relação entre medidas de comprimento em relação a dois sistemas inerciais partindo-se da discussão sobre a comparação de réguas. Os comprimentos perpendiculares à direção do movimento relativo dos dois sistemas podem ser comparados diretamente, como se observou anteriormente. Portanto, *os comprimentos e distâncias perpendiculares à direção do movimento têm os mesmos valores em ambos os sistemas de coordenadas*.

Uma discussão similar pode ser apresentada para as definições de unidades em que outras grandezas físicas são medidas. Uma das maneiras de especificar a unidade de tempo, quando a unidade de distância já foi especificada (ou vice-versa), pode ser pela especificação de um valor preciso da velocidade da luz, deixando a unidade de tempo ser determinada pela comparação entre a velocidade da luz medida com o valor-padrão especificado. Atualmente (1970) é tecnicamente possível medir ambos os intervalos de tempo e distância com maior exatidão do que se pode medir a velocidade da luz, e por esta razão é que a unidade de tempo é definida presentemente em termos do período de revolução da Terra em torno do Sol no ano 1900. Pode-se antecipar que, quando as técnicas de medidas apropriadas forem suficientemente aperfeiçoadas, a unidade de tempo será definida em termos da frequência de uma determinada linha espectral de um átomo particular. Se a mesma linha espectral fosse escolhida para definir o padrão de comportamento, isto implicaria a especificação da velocidade da luz.

Como se verificou anteriormente, o comprimento de um corpo em movimento pode ser medido diretamente se o comprimento a ser medido for perpendicular à direção do movimento. Existem diversas maneiras plausíveis para medir um comprimento paralelo à direção do seu movimento. Suponha duas marcas, A e B , indicando as extremidades do comprimento a ser medido sobre um corpo em movimento. No instante t , marcam-se os pontos A' e B' , fixos no sistema de coordenadas escolhido, ocupados neste instante (simultaneamente) pelas marcas A e B em movimento. A distância $l = \overline{A'B'}$ entre os pontos fixos A' e B' , que podem ser medidos com a régua em repouso, é então definida como o comprimento nesse sistema de coordenadas entre as marcas A e B . Este método pode ser usado para medir o comprimento \overline{AB} em qualquer direção relativa à sua velocidade.

Uma segunda maneira de medir um comprimento paralelo ao seu movimento, caso a velocidade v tenha sido medida anteriormente (como foi definido previamente), é obtida medindo-se o intervalo de tempo t entre a passagem de A e B por um ponto

fixo. O comprimento \overline{AB} serão então $l = vt$. Uma terceira maneira é sugerida no Probl. 4. Suponha que todos esses métodos de medir um comprimento relativo a um dado sistema de coordenadas fornecem o mesmo resultado. Esta suposição é coerente com os postulados da Relatividade (veja os Probls. 4 e 6).

Verifica-se que os corpos em movimento, incluindo instrumentos de medidas em movimento, comportam-se de maneira inesperada se as suas velocidades forem comparáveis à velocidade da luz. No entanto, considerações cinemáticas relacionadas a posições e movimentos de corpos em relação a um único sistema de coordenadas, ou em relação um ao outro, poderão ser feitas de maneira usual, caso todas as distâncias, tempos, velocidades etc. sejam medidos por instrumentos em repouso relativo a um único sistema de coordenadas. Por exemplo, como foi mencionado anteriormente, os argumentos que conduziram à Eq. (13.7) são perfeitamente válidos, contanto que todos os comprimentos e tempos sejam medidos em relação a um único sistema de coordenadas. Quando se deseja relacionar grandezas medidas em sistemas de coordenadas diferentes com movimento relativo rápido, devem-se considerar os efeitos relativísticos.

Um resultado notável, obtido imediatamente das definições acima, é que dois eventos E_1 e E_2 que ocorrem ao mesmo tempo, $t_1 = t_2$, em dois lugares diferentes num sistema de coordenadas inercial, pode ocorrer em tempos diferentes, $t_1^* \neq t_2^*$, num sistema inercial que se move em relação ao primeiro. Talvez este resultado pudesse ter sido antecipado, se lebrássemos de fazer a sincronização de relógios, em cada um dos dois sistemas, usando sinais luminosos e supondo-se que a luz se propaga com a mesma velocidade c em cada um dos sistemas de coordenadas. Seria ainda possível, e mais surpreendente, descobrir situações em que existem dois eventos, E_1 e E_2 , tais que E_1 ocorre antes de E_2 num sistema de coordenadas e ocorre depois de E_2 em outro.

Como exemplo, considere a situação mostrada na Fig. 13.2. Outra vez, há dois sistemas de coordenadas orientados com os seus eixos paralelos e onde o sistema de coordenadas com asterisco move-se em velocidade v ao longo do eixo x . A origem de tempo em ambos os sistemas de coordenadas é escolhida como o tempo em que as origens espaciais O e O^* coincidem. Neste instante, um pulso esférico de luz é emitido das origens coincidentes, propaga-se até um espelho plano paralelo ao plano xy e localizado em $y = Y$, e é refletido. Uma parte da onda esférica refletida retorna à origem O , um evento que se chamará E_1 , e outra parte da onda retorna à origem O^* em movimento que se deslocou para o ponto $x = x_2$. A chegada do pulso refletido a O^* chama-se evento E_2 . O evento representado pela emissão original do pulso de luz ocorre na origem do espaço-tempo $x = y = z = t = 0$ no sistema sem asterisco e também na origem $x^* = y^* = z^* = t^* = 0$ no sistema com asterisco. Inicialmente, olha-se esta sequência de eventos a partir do ponto de vista do sistema de coordenadas sem asterisco [Fig. 13.2(a)], lembrando que permanecendo-se em um único sistema de coordenadas, poderá-se usar considerações cinemáticas comuns baseadas na propagação da luz com velocidade c . A parte da onda que se desloca para o espelho e retorna a O evidentemente chega no tempo

$$t_1 = 2Y/c, \quad (13.9)$$

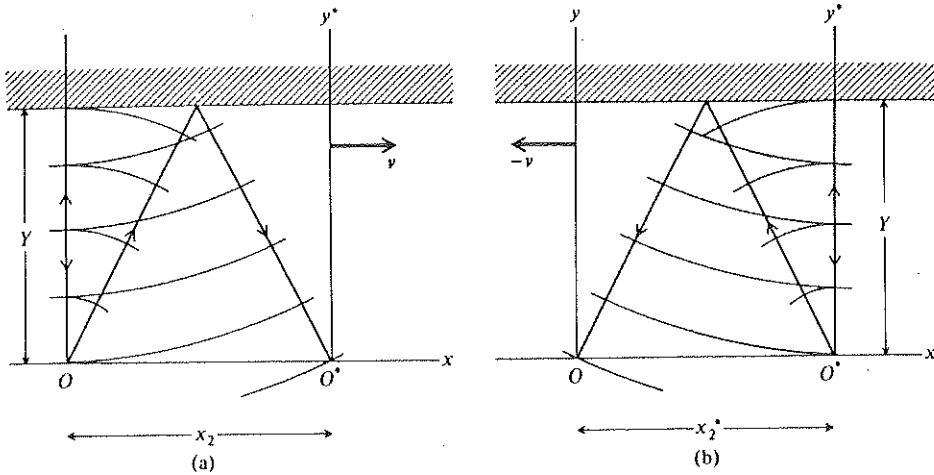


Fig. 13.2 (a) Pulso esférico de luz emitido de uma origem, refletido por um espelho plano em $y = Y$ e retornando a O e O^* , visto no sistema de coordenadas sem asterisco. (b) Os mesmos eventos vistos no sistema de coordenadas com asterisco!

que é o tempo designado para o evento E_1 no sistema de coordenadas sem asterisco. O evento E_2 ocorre no ponto

$$x_2 = vt_2, \quad y_2 = z_2 = 0.$$

A luz que chega a O^* viajou a distância

$$ct_2 = 2[\frac{1}{4}x_2^2 + Y^2]^{1/2}.$$

Substituindo na relação para x_2 , obtém-se:

$$t_2 = \frac{2Y}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (13.10)$$

Assim, no sistema de coordenadas sem asterisco, o evento E_2 ocorre após o evento E_1 , isto é, $t_2 > t_1$.

Considere a mesma seqüência de eventos a partir do ponto de vista do sistema de coordenadas com asterisco como é mostrado na Fig. 13.2(b). A origem sem asterisco, O , agora desloca-se para a esquerda e deseja-se saber se a sua velocidade v medida em O^* será a mesma que a velocidade de O^* medida em O . Se houver dois sistemas inertiais, e se em cada um deles se medir a velocidade v de cada um em relação ao outro, dever-se-á obter a mesma velocidade em ambos os casos. Se não fosse assim, deveria haver maneira experimental de distinguir entre dois sistemas de coordenadas, o que estaria em conflito com o postulado (13.1). A direção da velocidade relativa de cada sistema em relação ao outro dependerá certamente das orientações relativas dos eixos com asterisco e sem asterisco. Se, como no presente caso, os dois sistemas de eixos forem paralelos, e se O^* mover-se na direção positiva em relação a O , ao longo do eixo x , então a velocidade de O^* em relação a O será $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$; e a velocidade de O

em relação a O^* será $v_x^* = -v$, $v_y^* = v_z^* = 0$. Também, como já se mostrou anteriormente, a coordenada $y^* = Y$ do espelho, no sistema de coordenadas com asterisco, será igual à coordenada y do espelho no sistema sem asterisco, pois ambas são medidas perpendicularmente ao movimento. Verifica-se, então, como anteriormente, que o evento E_2 ocorre na origem $x_2^* = y_2^* = z_2^* = 0$ no tempo

$$t_2^* = 2Y/c, \quad (13.11)$$

e o evento E_1 ocorre no ponto $x_1^* = -vt_1^*$, $y_1^* = z_1^* = 0$, no tempo

$$t_1^* = \frac{2Y}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (13.12)$$

Os tempos designados para os dois eventos no sistema de coordenadas com asterisco estão trocados em relação aos tempos designados no sistema sem asterisco, e o evento E_2 ocorre agora antes do evento E_1 no sistema com asterisco!

Este resultado paradoxal é tão contrário ao bom senso que se chega a pensar que a teoria que o prevê deve ser contraditória, ou, pelo menos, conduz a resultados absurdos no que se refere à Física. Examinando-se cuidadosamente a razão desta opinião, verifica-se que isto se deve ao conceito de causalidade: se um evento é a causa de um segundo evento, então, certamente, o primeiro deverá preceder o segundo, em qualquer sistema de coordenadas. No presente caso, o evento E_0 , a emissão do pulso de luz, é em parte a causa dos outros dois eventos, E_1 e E_2 , devendo, portanto, precedê-los, como acontece realmente em ambos os sistemas de coordenadas. Se existisse uma relação causal entre os eventos E_1 e E_2 , então num ou noutro sistema de coordenadas haveria uma contradição em relação ao princípio da causalidade, pois a causa deve preceder o efeito. Se, por exemplo, um sinal de qualquer tipo for emitido da origem O no tempo t_1 , sinalizando a ocorrência do evento E_1 e se este sinal chegar ao ponto O^* no tempo t_2 , haveria uma contradição, porque no sistema de coordenadas com asterisco o sinal seria recebido antes de ser emitido, tornando-se conhecimento da ocorrência do evento E_1 , antes dele ter ocorrido no sistema de coordenadas com asterisco. Conclui-se que se não quisermos abandonar o princípio da causalidade, então deve ser impossível em uma situação como esta, para os eventos E_1 e E_2 , haver uma relação causal direta. Em particular, deve ser impossível qualquer espécie de sinal partir de um evento e chegar ao outro. Os sinais devem ser carregados por alguma espécie de onda, uma onda luminosa ou sonora, por exemplo, podendo também ser levados por algum objeto físico que se desloque de um evento para outro, uma mensagem em uma garrafa, por exemplo. O tempo entre os dois eventos E_1 e E_2 será, em ambos os sistemas de coordenadas,

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= t_1^* - t_2^* = \frac{2Y}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &= (cx_2 - 2vY)/c^2 = (-cx_1^* - 2vY)/c^2. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Este tempo é menor do que o necessário para a luz viajar na distância $x_2 = -x_1^*$ entre os dois eventos. Resultados similares são encontrados em todos os casos em que a or-

dem temporal dos dois eventos pode ser diferente em dois sistemas de coordenadas iniciais diferentes; a diferença de tempo entre os dois eventos é sempre menor do que o tempo necessário para a luz se deslocar numa distância correspondente em ambos os sistemas de coordenadas.

Como é certo que, pelas leis da Física, um objeto pode estar em repouso na origem do sistema de coordenadas, conclui-se, em particular, que a velocidade relativa v de dois sistemas de coordenadas iniciais não poderá exceder a velocidade c . De fato já se deveria ter observado das Eqs. (13.10) que v deve ser menor do que c ou a teoria tornar-se-ia contraditória, pois é certamente verdade que, em relação ao sistema de coordenadas com asterisco, o pulso de luz desloca-se em direção ao espelho e retorna à origem em tempo finito $t_2^* = 2Y/c$, de forma que o evento E_2 ocorre realmente. Devido às peculiaridades do comportamento dos relógios, o tempo t_2 designado para este evento deve ser diferente no sistema de coordenadas sem asterisco, mas o evento realmente ocorre e, portanto, deve ser designado um tempo real t_2 . Conclui-se que a velocidade v deve ser menor do que c .

Esta conclusão da Teoria da Relatividade, que os objetos materiais não se podem deslocar com velocidade maior do que a luz, confirma-se experimentalmente. Os engenheiros levam em conta rotineiramente estas e outras conclusões da teoria quando projetam aceleradores capazes de acelerar partículas subatômicas até altas energias. Um elétron colocado num tubo de raios X de alta voltagem com energia de 500 000 eV movimenta-se em torno de 87% da velocidade da luz. Se a Mecânica Clássica estivesse correta, um elétron com energia 10 vezes maior se deslocaria em velocidade $\sqrt{10}$ vezes maior ou mais do que duas vezes a velocidade da luz. No entanto, a velocidade de um elétron com 5 000 000 eV é igual a 99,88% da velocidade da luz. O fato de todos os elétrons cuja energia situa-se acima de certa de um milhão de eV deslocarem-se aproximadamente com a mesma velocidade simplifica consideravelmente o desenho de aceleradores lineares de elétrons. No acelerador linear de elétrons de duas milhas, na Universidade de Stanford, os elétrons podem ser acelerados até 200 vezes esta energia ou 10^{10} eV e, nesta energia, eles se deslocam somente $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ mais devagar do que a luz.

A dificuldade com a simultaneidade só ocorre quando se tenta comparar o tempo de dois eventos que ocorrem em diferentes lugares do espaço. Se eles ocorrerem no mesmo lugar, ou muito próximos, de forma que o tempo necessário para a luz se propagar de um para o outro seja desprezível, em comparação com os tempos de interesse em uma discussão particular, então a dificuldade com a simultaneidade não aparece. Nesse caso, os eventos que ocorrem no mesmo lugar, ou aproximadamente no mesmo lugar, neste sentido, e ao mesmo tempo, ou aproximadamente no mesmo tempo, em um sistema de coordenadas, são também simultâneos ou aproximadamente simultâneos em qualquer outro sistema de coordenadas. Em particular, pode-se admitir que se um relógio em movimento passasse próximo a um outro relógio fixo, poder-se-ia comparar as suas leituras sem ambigüidade, no momento da ultrapassagem, e poder-se-ia sincronizar os relógios de tal maneira que a leitura seia a mesma neste momento. Da mesma forma, se dois observadores movendo-se relativamente passassem um pelo outro em determinado instante e se, neste instante, os dois observassem o tempo mar-

cado em um relógio distante (observando sinais luminosos ou de rádio emitidos pelo relógio), a leitura que fariam seria igual nesse momento. Eles discordariam, no entanto, sobre o tempo necessário para o sinal luminoso se deslocar do relógio que está distante, pois cada um deles supõe que o sinal luminoso se desloca em velocidade c em relação a ele. Esta linguagem figurada, com referência a observadores que se deslocam relativamente é às vezes conveniente para evidenciar as diferenças entre grandezas físicas em relação a sistemas de coordenadas diferentes. O leitor reconhecerá que tal linguagem não implica qualquer discordância sobre a situação física. Qualquer um, embora possa estar em movimento, tem a liberdade de usar as medidas realizadas por quaisquer instrumentos, e também de usar nos seus cálculos as grandezas medidas em relação a qualquer sistema de coordenadas, contanto que o faça corretamente. Uma dada grandeza pode ter valores diferentes em relação a duas coordenadas de sistemas diferentes, mas todos os observadores devem concordar em relação a tais valores. No exemplo acima, cada um dos observadores deveria calcular a correção para o tempo de deslocamento da luz em relação a um sistema de coordenadas no qual o outro estaria em repouso, e eles certamente concordariam com a correção, a não ser que um deles cometesse um erro.

Se os dois eventos, E_1 e E_2 , forem simultâneos em um sistema de coordenadas sem asterisco, então eles também serão simultâneos em qualquer sistema de coordenadas que se desloque na direção perpendicular à linha que une os dois eventos. Para mostrar este resultado, considere a origem O no ponto médio da linha que une os dois eventos, supondo que a origem O^* se move ao longo da bissetriz perpendicular desta linha, como é mostrado na Fig. 13.3. Um relógio fixo em O e um relógio que se move em O^* registram a chegada dos sinais de luz emitidos pelos dois eventos. Verifica-se por meio de considerações de simetria da situação que em dado momento, e observando-se em ambos os sistemas de coordenadas, os relógios estarão equidistantes dos pontos em que os eventos E_1 e E_2 ocorreram. Se os sinais luminosos emitidos pelos dois eventos chegarem simultaneamente em um dos relógios, eles deverão chegar

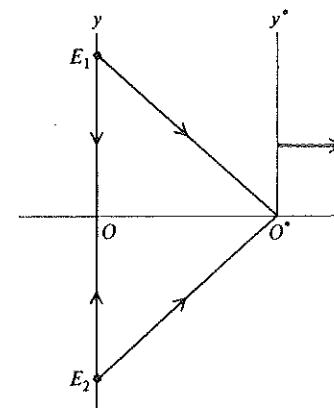


Fig. 13.3 Simultaneidade de dois eventos ocorrendo numa linha perpendicular à direção do movimento.

simultaneamente no outro. Portanto, a mesma correção será subtraída do tempo de chegada à origem no cálculo do tempo em que ambos os eventos, E_1 e E_2 , ocorreram, e será considerado verdadeiro em ambos os sistemas de coordenadas. Logo, se $t_1 = t_2$, também $t_1^* = t_2^*$, embora t_1^* e t_2^* , em geral, não sejam iguais.

Falar da posição de um ponto em movimento no espaço só terá significado especificando-se o tempo a que ele se refere. Desejando-se transformar um sistema de coordenadas em outro sistema de coordenadas cujo movimento se faça em relação ao primeiro, a transformação só se realizará especificando-se, além das coordenadas x , y e z do ponto, o tempo t em que a transformação é realizada. Reciprocamente, aos eventos para os quais é atribuído mesmo tempo em um sistema de coordenadas, são atribuídos tempos diferentes em outro sistema de coordenadas. Isto indica que, sendo preciso transformar a variável de tempo de um sistema de coordenadas em outro, especifica-se não sómente o tempo t mas também o ponto do espaço x , y e z ao qual o tempo se refere. Contanto que a referência seja dada apenas a um único sistema, pode-se falar separadamente de um ponto x , y e z no espaço e do tempo t . Se, entretanto, a referência for a dois ou mais sistemas de coordenadas movendo-se relativamente, ou se se fizerem observações sem referência a um sistema de coordenadas particular, então fala-se não de um ponto no espaço ou um tempo separadamente, mas de um *evento* ocorrendo em determinado ponto, em determinado tempo e que em um sistema de coordenadas particular tem coordenadas (x, y, z, t) . Em geral, é conveniente empregar uma linguagem geométrica e referir-se às quatro variáveis (x, y, z, t) como representantes de um “ponto” no “espaço” de quatro dimensões. Para distinguir um espaço tridimensional comum deste espaço de quatro dimensões, faz-se referência a um “ponto” em quatro dimensões (x, y, z, t) como um *evento*, e ao espaço correspondente como *espaço-tempo*. A utilização desta terminologia geométrica é conveniente, porém seu significado não pode ser mal entendido, como se não existisse distinção entre espaço e tempo. Comprimentos devem ser medidos com uma régua e intervalos de tempo com um relógio, pois são conceitos físicos diferentes porém relacionados; são medidos de maneiras diferentes porém relacionadas. É-se induzido a considerar as quatro variáveis (x, y, z, t) juntas devido ao fato de dois eventos que ocorrem no mesmo lugar, em tempos diferentes, em relação a um sistema de coordenadas, ocorrerem em lugares diferentes, num sistema de coordenadas em movimento e, reciprocamente, dois eventos que ocorrem ao mesmo tempo, em lugares diferentes, num sistema de coordenadas, ocorrem em tempos diferentes num sistema de coordenadas em movimento.

Considere, agora, um evento E_0 cujas coordenadas são (x_0, y_0, z_0, t_0) em um sistema de coordenadas qualquer. Suponha que um sinal luminoso esférico parta deste evento e se desloque através do espaço. Este sinal de luz atingirá um outro ponto (x, y, z) qualquer do espaço no tempo t que, evidentemente, é dado por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0. \quad (13.14)$$

O conjunto de eventos (x, y, z, t) cujas coordenadas satisfazem a Eq. (13.14) estão sobre um cone, *cone de luz*, em relação ao evento E_0 . A Eq. (13.14) também é satisfeita por eventos em que $t < t_0$, os quais estão localizados de tal maneira que um sinal luminoso partindo do evento (x, y, z, t) atingirá o evento E_0 . Porque a lei da propa-

gação da luz é a mesma em todos os sistemas de coordenadas, quando se considera um sistema de coordenadas com asterisco, no qual as coordenadas do evento E_0 são $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, t_0^*)$, neste sistema o *mesmo* cone de luz (13.14) corresponderá a eventos cujas coordenadas satisfazem a equação

$$(x^* - x_0^*)^2 + (y^* - y_0^*)^2 + (z_0 - z_0^*)^2 - c^2(t^* - t_0^*)^2 = 0. \quad (13.15)$$

Verifica-se que a equação para o cone de luz tem a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas, como era de se esperar, pois é possível definir o cone de luz em relação a um evento particular E_0 sem fazer referência a nenhum sistema de coordenadas. O cone de luz consta de duas partes, um *cone de luz do futuro*, que contém todos os eventos que podem ser alcançados por um sinal luminoso que parte do evento E_0 , e um *cone de luz do passado* que consiste em todos os eventos a partir dos quais o sinal luminoso pode atingir o evento E_0 .

Pode-se visualizar mais facilmente a situação, restringindo as considerações ao plano xy . Um sinal de luz que parte do evento E_0 desloca-se em círculo que se expande neste plano. Na Fig. 13.4, os dois eixos coordenados, x e z , foram desenhados num plano horizontal e, na vertical, o eixo dos tempos t , em escala apropriada. Neste diagrama, os eventos no plano $z = z_0$, cujas coordenadas satisfazem a Eq. (13.14), estão sobre o cone mostrado.

Verifica-se que o próprio cone de luz é definido de maneira independente do sistema de coordenadas e contém os mesmos eventos em todos os sistemas de coordenadas. Da mesma forma, o interior do cone consiste no mesmo conjunto de eventos em todos os sistemas de coordenadas, embora tais eventos tenham coordenadas diferentes em sistemas diferentes. Qualquer evento E no interior do cone de luz do futuro terá, em todos os sistemas de coordenadas, a propriedade de poderem ser alcançados a partir de E_0 por um objeto que se desloque em velocidade menor do que c , embora a velocidade particular necessária seja diferente em sistemas de coordenadas diferentes.

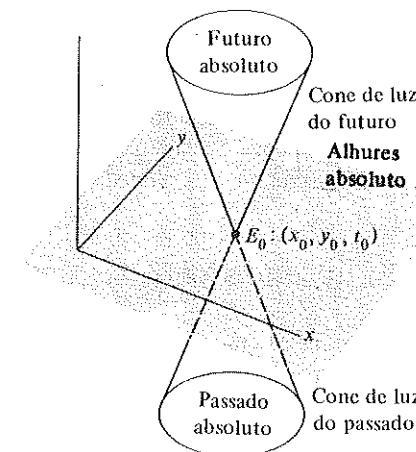


Fig. 13.4 Cone de luz.

Existe um sistema de coordenadas, por exemplo um cuja origem se desloque de E_0 para E , no qual E e E_0 ocorrem no mesmo lugar, porém em tempos diferentes. O interior do cone de luz é freqüentemente chamado de *futuro absoluto* em relação ao evento E_0 ; a palavra “absoluto” significa que este conjunto de eventos seja o mesmo em todos os sistemas de coordenadas, e a palavra “futuro” é usada porque, para cada um dos eventos E , existe um sistema de coordenadas para o qual E e E_0 ocorrem no mesmo lugar com E ocorrendo em tempo posterior a E_0 . Será deixado para o leitor suprir as discussões correspondentes do interior do cone de luz do passado que se chama *passado absoluto* em relação ao evento E_0 .

Um evento E fora do cone de luz em relação a E_0 só poderá ser atingido por um ponto partindo de E_0 e deslocando-se com velocidade maior do que c , se $t > t_0$, e, reciprocamente, se $t < t_0$. Dois eventos deste tipo não se podem comunicar entre si ou afetar a causalidade um do outro; nenhum sinal ou objeto físico pode partir de um deles e atingir o outro. A coleção de eventos fora do cone de luz é às vezes chamada de *alhures absoluto* em relação a E_0 . Já se viu anteriormente que um evento E , que está no alhures absoluto, em relação a E_0 tem a propriedade de em alguns sistemas de coordenadas poder ocorrer antes de E_0 , enquanto em outros pode ocorrer após E_0 . De acordo com a continuidade, pode-se argumentar que existem alguns sistemas de coordenadas em que estes dois eventos ocorrem simultaneamente, mas em lugares diferentes. Mais tarde, quando já se tiverem desenvolvido as equações para as transformações de Lorentz, o leitor será capaz de determinar explicitamente este sistema de coordenadas para um par conhecido de eventos E_0 e E (veja o Probl. 10).

Logo, existem cinco relações diferentes entre dois eventos E e E_0 , tendo um significado independente do sistema de coordenadas. O evento E pode ser absolutamente independente de E_0 , podendo estar no futuro absoluto ou no passado absoluto em relação a E_0 , ou podendo estar no cone de luz do futuro ou no cone de luz do passado em relação a E_0 . Se em qualquer sistema de coordenadas E e E_0 tiverem coordenadas (x, y, z, t) e (x_0, y_0, z_0, t_0) , pode-se testar qual destas relações será válida dependendo de a grandeza

$$S = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 \quad (13.16)$$

ser maior, menor, ou igual a zero e, nos dois últimos casos, se a grandeza $(t - t_0)$ for maior ou menor do que zero. A grandeza S , dada pela Eq. (13.16), é ela própria independente do sistema de coordenadas na qual é calculada (Probl. 11).

13.4 COMPORTAMENTO DE RELÓGIOS E RÉGUAS

Como preparação para derivar as equações de transformação entre dois sistemas de coordenadas que se deslocam relativamente, usa-se inicialmente o postulado (13.2) para determinar o comportamento de relógios e réguas em movimento. Para se obter a nova lei para relógios em movimento, escolhe-se a situação mais simples possível, como é o procedimento geral em Física. Considere dois relógios, um repousando na origem O do sistema de coordenadas sem asterisco, e o outro na origem O^* do siste-

ma de coordenadas cuja velocidade é v ao longo do eixo x . Admita que os dois relógios estejam sincronizados de forma que ambos marquem zero no momento que o relógio em movimento passa pelo relógio fixo. Como se terá de usar a Lei da Propagação da Luz, em ambos os sistemas de coordenadas, será preciso comparar as distâncias relativas para os dois sistemas de coordenadas. As únicas distâncias que sabemos presentemente como comparar em relação aos dois sistemas de coordenadas são as medidas perpendicularmente à direção do movimento. Portanto, escolhe-se o arranjo mostrado na Fig. 13.2 (p. 560). Já se conhecem as Eqs. (13.10) e (13.11) para o tempo de chegada do pulso de luz ao ponto O^* , de acordo com a indicação de dois relógios, a partir das quais conclui-se

$$t_2^* = t_2 [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}. \quad (13.17)$$

Portanto, o relógio em movimento anda mais devagar do que o relógio fixo por um fator de $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$, de acordo com as medidas realizadas no sistema de coordenadas sem asterisco.

Este efeito denomina-se *dilatação do tempo*, podendo ser verificado experimentalmente. As medidas da meia-vida de partículas relativas, por exemplo, os mūons, são consideravelmente mais longas quando as partículas movem-se em velocidades próximas à da luz do que as mesmas partículas em repouso,⁵ e razão entre as vidas médias é dada exatamente por $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$. O efeito Mossbauer⁶ oferece a maneira para medir a freqüência da luz (raios gama) emitida pelos núcleos radiativos com precisão extremamente elevada, melhor do que uma parte em 10^{14} . Esta precisão é adequada para medir variações de freqüências devido a velocidades de $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Assim, pode-se verificar a fórmula (13.17) para relógios que se movem em velocidades bem comuns.

Se um relógio em movimento mudar de velocidade, supondo-se que a aceleração seja suficientemente pequena, de forma a não afetar o relógio, então espera-se, a partir dos argumentos acima, que o relógio em movimento, em qualquer instante, andará mais vagarosamente por um fator $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$, onde v é a velocidade instantânea do relógio. Se t^* for o tempo marcado pelo relógio em movimento e t , o tempo em relação a um sistema de coordenada inercial no qual o relógio se move em velocidade v , então

$$dt^* = dt [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}. \quad (13.18)$$

A relação entre t^* e t deve ser obtida por integração desta equação. Os postulados da Relatividade levam à conclusão de que a taxa de um relógio depende de sua velocidade. Não será necessário supor que a taxa dependa da aceleração. Experimentalmente, a fórmula (13.18) já foi suficientemente bem verificada, mesmo para relógios acelerados. Nenhum efeito da aceleração foi observado, a não ser pelos efeitos óbvios de acelerações violentas, dependentes do mecanismo de relógio envolvido. Pelo lado teóri-

⁵ D. H. Frisch & J. H. Smith, Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ -Mesons, *Amer. J. Phys.*, 31, 342 (1963).

⁶ S. DeBenedetti, The Mossbauer Effect, *Scientific American*, April, 1960, p. 72. Disponível também em separata: Offprint No. 271 from W. H. Freeman and Co., São Francisco.

co, a Teoria da Relatividade fornece um conjunto consistente de leis físicas, admitindo-se que os relógios se comportem de acordo com a fórmula (13.18).

Retornando, agora, aos dois relógios, um em repouso no sistema de coordenadas sem asterisco, e o outro em repouso no sistema de coordenadas com asterisco movendo-se em velocidade v , em relação ao sistema sem asterisco. A partir do Postulado da Relatividade, sabe-se que o relógio sem asterisco deve, da mesma forma, parecer estar andando mais devagar do que o com asterisco, de acordo com as medidas realizadas no sistema de coordenadas com asterisco. Neste sistema, a seqüência de eventos é mostrada na Fig. 13.2(b). As equações correspondentes são (13.9) e (13.12), que levam à conclusão de que, do ponto de vista do sistema de coordenadas com asterisco, o relógio sem asterisco anda mais devagar por um mesmo fator $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$. Quando um relógio move-se em velocidade constante v em relação ao outro, os dois relógios só podem estar próximos ao mesmo ponto no espaço uma vez. Portanto, somente em um instante é possível comparar a leitura dos relógios diretamente. No presente caso, a escolha recai em acertá-los de tal forma que ambos marquem zero neste instante. Como em qualquer outro instante os dois estarão separados por alguma distância, para comparar as suas leituras em qualquer tempo posterior será necessário definir o que se quer dizer com mesmo tempo em dois lugares diferentes. Como já se viu anteriormente, é impossível fazer isto de maneira que seja independente do sistema de coordenadas. No sistema de coordenadas sem asterisco, o relógio na origem marca o tempo t_2 quando o pulso de luz chega em O^* . No entanto, no sistema de coordenadas com asterisco, o evento em O , quando o relógio em O marca t_2 , ocorre após o pulso de luz ter chegado em O^* . Por esta razão é que é possível para relógios em cada um dos sistemas de coordenadas andar mais vagarosamente quando comparados com relógio em outro sistema de coordenadas.

Se o relógio com asterisco tivesse que, em determinado instante, inverter a sua velocidade e retornar a O , poder-se-ia comparar outra vez diretamente as duas leituras, e a conclusão que se tiraria da Eq. (13.18) é que o relógio com asterisco, naquele momento, marcaria um tempo mais curto do que o relógio sem asterisco por um fator, que pode ser obtido através de integração da Eq. (13.18), durante o tempo transcorrido após o último encontro. O fato de o relógio com asterisco marcar um intervalo de tempo mais curto do que o outro entre os seus dois encontros é uma afirmativa que independe de qualquer sistema de coordenadas, pois os dois relógios podem ser comparados diretamente nos dois encontros, mas isto não viola o Postulado da Relatividade, porque o relógio com asterisco foi acelerado e, portanto, não pode servir como origem de um sistema de coordenadas inercial. Embora esta observação remova qualquer inconsistência lógica com o postulado (13.1), deixa uma situação conceitualmente insatisfatória, que será estudada mais cuidadosamente na Seç. 13.6.

Usando-se o resultado acima para determinar o comportamento de uma régua em movimento, ou de qualquer outro corpo rígido em movimento, onde, neste caso, por *corpo rígido* quer-se dizer simplesmente um corpo em que todas as partes se movem com a mesma velocidade, considere que a régua esteja orientada paralelamente ao eixo x e se move em velocidade constante v , paralela ao eixo x . Introduz-se um sistema de

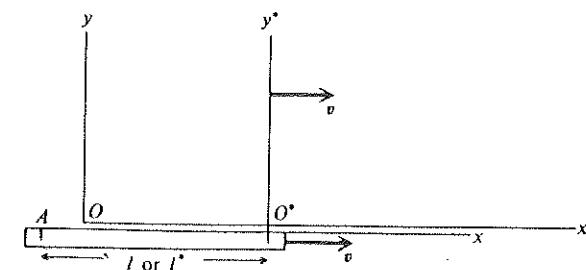


Fig. 13.5 Medida do comprimento de um corpo em movimento.

coordenadas com asterisco, como o mostrado na Fig. 13.5, movendo-se em velocidade v . Dois pontos, O^* e A , são fixados na régua. Deseja-se determinar a distância l^* entre os pontos O^* e A , medidos no sistema de coordenadas em movimento, em termos da distância l entre os mesmos dois pontos medidos no sistema de coordenadas fixo. Mede-se, em ambos os sistemas de coordenadas, o intervalo de tempo entre a passagem de O^* e A pelo relógio na origem O . Como a velocidade de cada sistema de coordenadas em relação ao outro é v , tem-se

$$l = vt, \quad (13.19)$$

$$l^* = vt^*, \quad (13.20)$$

onde se supõe, como se faz usualmente, que os relógios em O e O^* estão sincronizados para marcar zero no momento que as duas origens se cruzam, e onde t e t^* são os tempos medidos quando A passa pela origem O . Como ambos os eventos cujos intervalos de tempo devem ser medidos ocorrem na posição O , não existe ambigüidade no tempo t medido. No entanto, estes dois eventos ocorrem em lugares diferentes no sistema de coordenadas com asterisco, e, portanto, tempo t^* envolve uma correção, quando se usa a Lei da Propagação da Luz, no sistema de coordenadas com asterisco. Portanto, deve-se olhar a situação do ponto de vista do sistema de coordenadas com asterisco, pois é nele que o tempo t^* é medido. Neste sistema de coordenadas, o relógio em O anda mais lentamente por um fator $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$. Portanto, conclui-se da discussão anterior que

$$t = t^* [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}, \quad (13.21)$$

e, consequentemente, que

$$l = l^* [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}. \quad (13.22)$$

O comprimento l da régua é menor por um fator $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ do que o comprimento l' medido no sistema de coordenadas em que a régua está em repouso. O comprimento de qualquer objeto em movimento medido no sistema em que o objeto está em repouso é chamado *comprimento de repouso* do objeto. O comprimento de repouso de qualquer objeto é um conceito absoluto, porque é definido em termos do próprio objeto. Designando-se o comprimento de repouso de um objeto por l_0 ter-se-á a

seguinte relação para o comprimento do objeto em velocidade v em direção paralela ao comprimento

$$l = l_0 [1 - (v^2/c^2)]^{1/2}. \quad (13.23)$$

A contração no comprimento de um corpo rígido em movimento pela Eq. (13.23) chama-se *contração de Lorentz*. Foi pela primeira vez proposta por Fitzgerald, em 1893, e usada, em 1895, por H. A. Lorentz, para explicar o resultado nulo da experiência de Michelson-Morley. Lorentz mostrou que se o instrumento de Michelson sofresse uma contração na direção de seu movimento, de acordo com a Eq. (13.23), então esta contração cancelaria exatamente o efeito do movimento, de tal forma que a luz pareceria ter a mesma velocidade em todas as direções, mesmo em relação ao instrumento em movimento. Einstein evidenciou o seguinte ponto: se a Natureza conspira de maneira a impedir que se determine experimentalmente o movimento absoluto dos instrumentos, então a noção de velocidade absoluta não tem significado. Portanto, ele propôs a adoção do Postulado da Relatividade, a partir do qual, como foi demonstrado, pode-se deduzir a fórmula da contração de Lorentz. Na realidade, Lorentz foi além e demonstrou que se um instrumento for construído de alguma maneira a partir de partículas sobre as quais só atuem forças elétricas que satisfazem as equações de Maxwell, então, como consequência destas equações, o instrumento sofrerá contração de acordo com a fórmula (13.23). Verifica-se que, se os Postulados da Relatividade forem válidos, ele se contrairá de acordo com esta fórmula em qualquer caso, não importando qual seja a lei de força entre as suas partes.

Como estas grandezas ocorrem freqüentemente na Teoria da Relatividade, é conveniente introduzir as seguintes abreviações:

$$\beta = v/c, \quad (13.24)$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (13.25)$$

A velocidade v , neste caso, pode ser a velocidade de qualquer corpo em movimento, mas pode ser a velocidade de um sistema de coordenadas em relação a outro. A Eq. (13.23) pode, então, ser escrita

$$l = l_0/\gamma. \quad (13.26)$$

Se $d\tau$ for um intervalo de tempo registrado por um relógio que se move em velocidade v em relação ao sistema de coordenadas, e se dt for o intervalo de tempo medido neste sistema de coordenadas, ter-se-á, da Eq. (13.18), a seguinte relação

$$dt = \gamma d\tau. \quad (13.27)$$

O tempo que seria registrado por um relógio localizado sobre e se deslocando junto com um corpo em movimento chama-se *tempo próprio* em relação àquele corpo. Esta definição também é independente de qualquer sistema de coordenadas. A relação entre o tempo próprio, em relação a qualquer corpo em movimento, e a coordenada tempo num determinado sistema de coordenadas é obtida por integração da Eq. (13.27), calculando γ a partir da velocidade $v(t)$ do corpo em relação ao sistema de coordenadas.

13.5 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Chega-se, agora, à posição de derivar as relações entre as coordenadas de um evento em dois sistemas de coordenadas iniciais diferentes. Para evitar qualquer complicação desnecessária, admite-se, por conveniência, que os eixos dos sistemas de coordenadas com e sem asterisco sejam paralelos, que os eixos x e x^* coincidam, que as origens O e O^* coincidam em $t = t^* = 0$, e que a direção de movimento seja paralela aos eixos x e x^* , como é mostrado na Fig. 13.6. Considere um evento E que ocorre no ponto (x, y, z) e no tempo t no sistema de coordenadas sem asterisco. Considere que as coordenadas com asterisco deste evento sejam (x^*, y^*, z^*, t^*) . Mostrou-se anteriormente que as coordenadas medidas perpendicularmente à direção do movimento são as mesmas em ambos os sistemas:

$$y^* = y, \quad z^* = z. \quad (13.28)$$

A Fig. 13.6 mostra a situação vista no sistema de coordenadas sem asterisco. Verifica-se que, no tempo t , a distância do plano y^*z^* ao evento E , medida no sistema de coordenadas sem asterisco, é

$$l = x - vt. \quad (13.29)$$

Note que l é também a distância constante entre o plano x^*z^* e um ponto que se move em velocidade v e, portanto, está em repouso no sistema de coordenadas com asterisco e que passa através do evento E . Portanto, de acordo com a Eq. (13.26),

$$x^* = l_0 = \gamma(x - vt). \quad (13.30)$$

Para determinar o tempo t^* designado para o evento E no sistema de coordenadas com asterisco, suponha que o sinal luminoso emitido a partir do evento E chega ao ponto $(0, y^*, z^*)$ sobre o plano y^*z^* . Como o sinal luminoso está-se movendo para a esquerda em velocidade c , e o plano y^*z^* está-se movendo para a direita com velocidade v , suas velocidades relativas no sistema de coordenadas sem asterisco é $v + c$; então, o tempo de chegada do sinal ao plano y^*z^* no sistema de coordenadas sem asterisco será

$$t_1 = t + \frac{x - vt}{v + c}. \quad (13.31)$$

Como os relógios em movimento no ponto $(0, y^*, z^*)$ e O^* permanecem sobre a linha perpendicular à direção de movimento relativo, se estes dois relógios forem sincroniza-

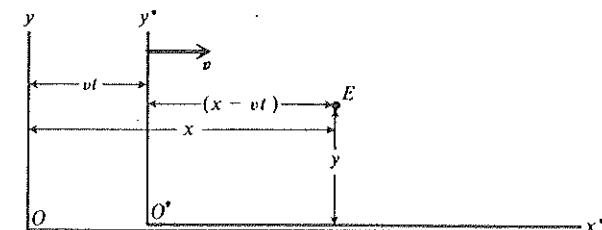


Fig. 13.6 Dois sistemas de coordenadas com movimento relativo.

dos no sistema de coordenadas com asterisco, eles também estarão sincronizados no sistema de coordenadas sem asterisco, embora estejam certamente andando mais devagar e, portanto, não marcam o tempo sem asterisco correto. Portanto, o tempo t_1^* , registrado pelo relógio com asterisco quando o sinal luminoso chega ao ponto $(0, y^*, z^*)$, é o mesmo que o registrado simultaneamente por um relógio na origem O^* , que, de acordo com a Eq. (13.17), é

$$t_1^* = t_1/\gamma. \quad (13.32)$$

Determina-se o tempo t^* corrigindo-se o tempo de deslocamento da luz no sistema de coordenadas com asterisco:

$$t^* = t_1^* - x^*/c. \quad (13.33)$$

Combinando os resultados das três equações anteriores e através de uma manipulação direta, obtém-se o seguinte resultado:

$$t^* = \gamma[t - (vx/c^2)]. \quad (13.34)$$

Grave para referência futura as equações de transformação de Lorentz, Eqs. (13.28), (13.30) e (13.34), relacionando dois sistemas de coordenadas como os mostrados na Fig. 13.6:

$$\begin{aligned} x^* &= \gamma(x - vt), \\ y^* &= y, \\ z^* &= z, \\ t^* &= \gamma[t - (vx/c^2)]. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Estas equações importantes devem ser guardadas na memória, uma tarefa relativamente fácil, desde que se observe a simetria entre a primeira e a última equação, e lembrando que a primeira equação é exatamente a equação clássica corrigida pelo fator de contração de Lorentz, γ .

Dadas as Eqs. (13.35), pode-se construir de maneira direta as equações de transformação entre dois sistemas de coordenadas iniciais quaisquer. Se as origens O e O^* não coincidirem, adicionam-se simplesmente aos segundos membros das quatro Eqs. (13.35) as coordenadas $x_0^*, y_0^*, z_0^*, t_0^*$ no sistema de coordenadas com asterisco do evento $x = y = z = t = 0$ na origem O . Se os eixos dos sistemas sem asterisco e com asterisco não forem paralelos, introduz-se um terceiro sistema de coordenadas, chamado sistema linha, cuja origem coincide com a origem O , e cujos eixos são paralelos aos eixos com asterisco. Como os sistemas de coordenadas com linha e sem linha não se movem um em relação ao outro, a relação entre eles é dada pelas Eqs. (7.13):

$$\begin{aligned} x' &= x(\hat{x} \cdot \hat{x}') + y(\hat{y} \cdot \hat{x}') + z(\hat{z} \cdot \hat{x}'), \\ y' &= x(\hat{x} \cdot \hat{y}') + y(\hat{y} \cdot \hat{y}') + z(\hat{z} \cdot \hat{y}'), \\ z' &= x(\hat{x} \cdot \hat{z}') + y(\hat{y} \cdot \hat{z}') + z(\hat{z} \cdot \hat{z}'), \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (13.36)$$

As coordenadas com asterisco são, então, dadas pelas Eqs. (13.35) com as coordenadas x, y, z e t , substituídas por x', y', z' e t' no segundo membro, onde as últimas variáveis são dadas pelas Eqs. (13.36), e com a adição de x_0^*, y_0^*, z_0^* e t_0^* se as origens O^* e O não coincidirem.

Como se viu anteriormente, a velocidade do sistema de coordenadas sem asterisco em relação ao sistema de coordenadas com asterisco é $-v$. As equações para a transformação inversa, fornecendo x, y, z e t , em termos de x^*, y^*, z^* e t^* , são obtidas a partir das Eqs. (13.35) pela simples remoção dos asteriscos do primeiro membro, colocando-se asteriscos nas variáveis do segundo membro e mudando o sinal de v (veja o Probl. 9).

Deduzem-se as equações de transformação de Lorentz (13.35) a partir dos postulados (13.1) e (13.2). Reciprocamente, dadas as Eqs. (13.35) e as convenções que relacionam a maneira pela qual as coordenadas e o tempo devem ser definidos em qualquer sistema de coordenadas, pode-se mostrar que a Lei da Propagação da Luz é a mesma em todos os sistemas iniciais. Suponha que a luz se propague em velocidade c no sistema de coordenadas com asterisco, e que se conhece a equação de transformação (13.35). Para ser o mais geral possível, considere que o pulso de luz propague-se numa direção que faz um ângulo α com o eixo x . Escolhendo-se apropriadamente os eixos, as equações que descrevem o movimento do pulso de luz são

$$\begin{aligned} x &= ct \cos \alpha, \\ y &= ct \sin \alpha, \\ z &= 0. \end{aligned} \quad (13.37)$$

Substituindo-se estas equações nas Eqs. (13.35), tem-se

$$\begin{aligned} x^* &= \gamma ct(\cos \alpha - \beta), \\ y^* &= ct \sin \alpha, \\ z^* &= 0, \\ t^* &= \gamma t(1 - \beta \cos \alpha). \end{aligned} \quad (13.38)$$

(Lembre-se que $\beta = v/c$.) Resolvendo a última destas equações para t e substituindo nas três primeiras, obtém-se as equações para o movimento do pulso de luz do sistema com asterisco, que devem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^* &= ct^* \cos \alpha^*, \\ y^* &= ct^* \sin \alpha^*, \\ z^* &= 0, \end{aligned} \quad (13.39)$$

onde as seguintes abreviações foram feitas:

$$\begin{aligned} \cos \alpha^* &= (\cos \alpha - \beta)(1 - \beta \cos \alpha), \\ \sin \alpha^* &= \sin \alpha / \gamma(1 - \beta \cos \alpha). \end{aligned} \quad (13.40)$$

As Eqs. (13.40) definem um ângulo real contanto que

$$\cos^2 \alpha^* + \sin^2 \alpha^* = 1. \quad (13.41)$$

A Eq. (13.41) pode ser facilmente verificada substituindo-se os resultados da Eq. (13.40), mostrando-se, portanto, que o pulso de luz também se propaga em velocidade c no sistema de coordenadas, mas num ângulo diferente α^* em relação ao eixo x^* . As equações de transformação de Lorentz garantem que, se a Lei da Propagação da Luz for válida num sistema de coordenadas, será válida em todos os outros. Conseqüentemente, partindo-se das Eqs. (13.35), pode-se deduzir os resultados obtidos na Seç. 13.4.

Agora, já se podem reformular os dois postulados (13.1) e (13.2) mais explicitamente na seguinte forma:

As leis da Física devem ser tais que, no caso de as coordenadas e o tempo serem transformados de acordo com as equações de transformação de Lorentz (13.35), mantêm a mesma forma no novo sistema de coordenadas. (13.42)

O objetivo é verificar se as diversas leis físicas satisfazem este postulado e contrar as modificações apropriadas daquelas que não o satisfazem. Certamente, as leis da Física contêm outras grandezas além das coordenadas e do tempo. Para verificar a sua forma quando o sistema de coordenadas é transformado, será necessário conhecer como estas outras grandezas físicas variam quando o sistema de coordenadas se transforma, o que pode ser feito de duas maneiras: examinando a definição operacional de cada grandeza e tentando determinar como a grandeza se transformará, exigindo que elas tenham a mesma definição operacional em todos os sistemas de coordenadas. Quando as equações para a transformação de todas as grandezas físicas envolvidas forem determinadas, pode-se, então, testar qualquer lei para verificar se satisfaz o Postulado da Relatividade. Alternativamente, pode-se formular a seguinte questão: que leis de transformação devem ser adotadas, para grandezas que não sejam as coordenadas e o tempo, para que o conjunto de leis físicas proposto seja coerente com o Postulado da Relatividade? É certo que as leis de transformação adotadas são compatíveis com a mesma definição operacional de cada grandeza física em todos os sistemas de coordenadas iniciais.

13.6 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Para ilustrar a utilização das equações de transformação de Lorentz, deriva-se a relação para o efeito relativístico, conhecido como Doppler, devido ao movimento da fonte luminosa. Uma fonte deslocando-se em velocidade v emite um sinal eletrromagnético com freqüência (angular) ω^* em relação à fonte. Para determinar a freqüência ω do sinal observada em um ponto estacionário, usam-se um único sistema de coordenadas fixo e a Lei (13.18) para o tempo marcado em um relógio em movimento (veja o Probl. 13). No entanto, para ilustrar o uso das transformações de Lorentz, escreve-se a equação para uma onda luminosa no sistema de coordenadas em que

a fonte de luz se encontra em repouso; então, transforma-se esta equação para o sistema sem asterisco.

Uma onda plana senoidal com freqüência ω^* que se propaga na direção x' em velocidade c terá a forma

$$W = A \cos [(\omega^*/c)(x^* - ct^*) + \theta],$$

como foi mostrado no segundo parágrafo da Seç. 8.3. Pode-se generalizar este resultado para uma onda luminosa que se desloca na direção de um vetor unitário \hat{n}^* definindo o *vetor de onda*

$$k^* = \hat{n}^* \omega^*/c, \quad (13.43)$$

e fazendo

$$W = A \cos (k^* \cdot r^* - \omega^* t^* + \theta), \quad (13.44)$$

onde W é um componente qualquer do campo eletromagnético, e $r^* = (x^*, y^*, z^*)$. O interesse é a fase da onda, isto é, o argumento do co-seno, por conter informações sobre freqüência, velocidade e direção de propagação da onda. A fase pode ser escrita como

$$k^* \cdot r^* - \omega^* t^* + \theta = k_x^* x^* + k_y^* y^* + k_z^* z^* - \omega^* t^* + \theta. \quad (13.45)$$

Substitui-se na relação acima os resultados das equações de transformação de Lorentz (13.35) e agrupam-se separadamente os termos contendo x , y , z e t para obter-se a fase no sistema de coordenadas sem asterisco na seguinte forma:

$$k^* \cdot r^* - \omega^* t^* + \theta = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \theta, \quad (13.46)$$

onde se introduzem as abreviações

$$\begin{aligned} k_x &= \gamma [k_x^* + (v\omega^*/c^2)], \\ k_y &= k_y^*, \\ k_z &= k_z^*, \\ \omega &= \gamma (\omega^* + v k_x^*). \end{aligned} \quad (13.47)$$

Verifica-se, assim, que a fase que descreve a propagação das ondas tem a mesma forma em ambos os sistemas de coordenadas. Mais adiante, verificar-se-á que o vetor de propagação k relaciona-se com a freqüência ω através de uma equação similar à (13.43) e com a mesma velocidade de propagação c , como deveria ser. O leitor notará a similaridade entre as equações de transformação (13.47) para as grandezas k e ω e as equações de transformação (13.35). Este ponto voltará a ser tratado no próximo capítulo.

Suponha, agora, que a onda se propaga, no sistema de coordenadas com asterisco, no plano x^*y^* em direção que faz um ângulo α^* com o eixo x^* , de forma que

$$\begin{aligned} k_x^* &= (\omega^*/c) \cos \alpha^*, \\ k_y^* &= (\omega^*/c) \sin \alpha^*, \\ k_z^* &= 0. \end{aligned} \quad (13.48)$$

Substituindo estas expressões nas Eqs. (13.47):

$$\begin{aligned} k_x &= (\gamma\omega^*/c)(\cos \alpha^* + \beta), \\ k_y &= (\omega^*/c) \operatorname{sen} \alpha^*, \\ k_z &= 0, \\ \omega &= \gamma\omega^*(1 + \beta \cos \alpha^*). \end{aligned} \quad (13.49)$$

Verifica-se que a onda se propaga no sistema de coordenadas com asterisco em direção que faz um ângulo α com o eixo x e que é dada por

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= k_x c / \omega = (\cos \alpha^* + \beta) / (1 + \beta \cos \alpha^*), \\ \operatorname{sen} \alpha &= k_y c / \omega = \operatorname{sen} \alpha^* / \gamma(1 + \beta \cos \alpha^*). \end{aligned} \quad (13.50)$$

Deixa-se para o leitor a verificação da relação $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, de forma que as Eqs. (13.50) definam um ângulo real α . Manipulando a primeira destas equações obtém-se

$$\cos \alpha^* = (\cos \alpha - \beta) / (1 - \beta \cos \alpha). \quad (13.51)$$

A Eq. (13.51) também pode ser obtida a partir da primeira das Eqs. (13.50) pela simples inversão do sinal de β e troca entre α e α^* . Substituindo-se a Eq. (13.51) na última das Eqs. (13.49), obtém-se após algumas operações algébricas:

$$\omega = \omega^*/\gamma(1 - \beta \cos \alpha). \quad (13.52)$$

Esta é a fórmula para o efeito de Doppler relativístico. Fazendo-se $\gamma = 1$, esta será exatamente a fórmula clássica para o efeito de Doppler, quando a fonte se move em velocidade $v = \beta c$ formando um ângulo α com a direção de observação. O fator γ representa o efeito da dilatação do tempo devido ao movimento da fonte de luz. Pode-se observar também que as relações recíprocas das Eqs. (13.52) e a última das Eqs. (13.49) permitiram a obtenção de ω' .

Para obterem-se as leis da transformação de Lorentz para as velocidades, considere uma partícula movendo-se em velocidade u . Escolhe-se como origem a posição da partícula em $t = 0$. A partícula, então, move-se de acordo com as equações

$$\begin{aligned} x &= u_x t, \\ y &= u_y t, \\ z &= u_z t. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Substituindo-se o resultado acima nas Eqs. (13.35):

$$\begin{aligned} x^* &= \gamma(u_x - v)t, \\ y^* &= u_y t, \\ z^* &= u_z t, \\ t^* &= \gamma[1 - (vu_x/c^2)]t. \end{aligned} \quad (13.54)$$

Substituindo-se o resultado da última equação nas três primeiras:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{u_x - v}{1 - (vu_x/c^2)} t^*, \\ y^* &= \frac{u_y}{\gamma[1 - (vu_x/c^2)]} t^*, \\ z^* &= \frac{u_z}{\gamma[1 - (vu_x/c^2)]} t^*, \end{aligned} \quad (13.55)$$

a partir das quais é possível obter os componentes da velocidade no sistema de coordenadas com asterisco:

$$\begin{aligned} u_x^* &= (u_x - v)/[1 - (vu_x/c^2)], \\ u_y^* &= u_y/\gamma[1 - (vu_x/c^2)], \\ u_z^* &= u_z/\gamma[1 - (vu_x/c^2)]. \end{aligned} \quad (13.56)$$

No limite não-relativístico, estas equações se reduzem às fórmulas clássicas. Demonstra-se (veja Probl. 17) que em uma dada velocidade u menor do que c , a velocidade u^* será um máximo quando u está orientada ao longo do eixo u na direção oposta a v e que u^* é sempre menor do que c .

No Seç. 13.4, observou-se que se um relógio em repouso, num sistema de coordenadas inercial, visse passar duas vezes um relógio em movimento, o intervalo de tempo registrado no relógio em movimento seria menor do que o registrado no relógio em repouso. Este resultado, às vezes, é chamado *paradoxo dos gêmeos* e pode ser formulado pictoricamente da seguinte maneira: um astronauta parte em um foguete em alta velocidade para uma viagem, deixando o seu gêmeo idêntico em repouso num sistema inercial. Depois de viajar em alta velocidade por longo tempo, o astronauta chega a um planeta distante, inverte o curso e retorna novamente em alta velocidade para casa. De acordo com a Teoria da Relatividade, ele verificará que o seu irmão gêmeo, que permaneceu em casa, envelheceu mais do que ele durante o tempo em que viajou. Não existe inconsistência lógica neste caso, pois os dois gêmeos não serão mais idênticos, porque já não possuirão a mesma história. O astronauta foi acelerado durante a viagem e não permaneceu em repouso num sistema de coordenadas inercial. Contudo, será instrutivo estudar esta situação com maiores detalhes, do ponto de vista do astronauta e do ponto de vista do gêmeo que ficou em casa (veja a Fig. 13.7). Considere que o gêmeo sedentário esteja em repouso na origem do sistema de coordenadas sem asterisco. O planeta distante também está em repouso neste sistema de coordenadas. Para simplificar cálculos aritméticos, suponha que o astronauta viaje em velocidade igual a $\frac{1}{2}c$ ao longo do eixo x durante 10 anos, chegando ao planeta localizado em $x_1 = 5$ anos-luz. Ele é, então, desacelerado e atinge o repouso em um tempo que considera curto comparado com 10 anos, acelera rapidamente até a velocidade $\frac{1}{2}c$ na direção oposta, retornando a casa 20 anos depois de ter partido, de acordo com o relógio da origem. Então $\beta = 1/2$, $\gamma = 2/\sqrt{3}$. O relógio do astronauta marcará $20\sqrt{3}/2$ anos quando ele retorna à Terra,

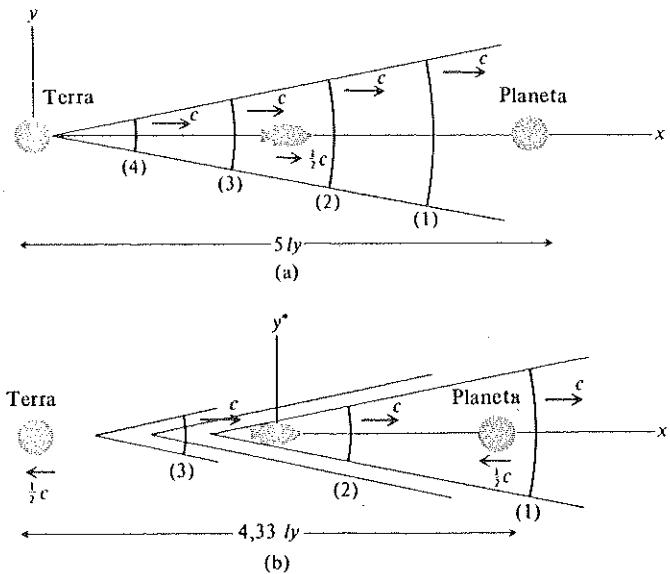


Fig. 13.7 (a) Viagem a um planeta distante, no sistema de coordenadas da Terra, no momento em que o foguete está no meio da viagem. (b) A mesma viagem, no sistema de coordenadas do foguete, no momento em que ultrapassou a metade da viagem. Em ambos os casos, são mostrados sinais de luz enviados da Terra uma vez por ano, identificados entre parênteses com o ano de emissão. (Foguetes e planetas não estão desenhados em escala.)

supondo-se que o relógio não foi danificado no processo de desaceleração e supondo-se que a desaceleração ocorreu em tempo suficientemente curto, de forma que não será necessário pensar na variação na leitura do relógio do astronauta durante este período. Se, a cada ano, sinais de rádio forem enviados da origem, de acordo com o tempo marcado pelo relógio na origem, os sinais alcançarão o astronauta durante a sua viagem numa velocidade $\frac{1}{2}c$, em relação ao astronauta, de acordo com as medidas efetuadas no sistema sem asterisco. Estes sinais anuais serão recebidos pelo astronauta com intervalos de dois anos, de acordo com as medidas efetuadas no sistema de coordenadas sem asterisco, e ele receberá o quinto sinal no ponto de retorno da viagem. Na viagem de retorno, ele receberá os outros quinze sinais em intervalos regulares.

Para descrever, agora, a seqüência de eventos a partir do ponto de vista do astronauta, introduz-se um sistema de coordenadas com asterisco, cuja origem coincide com a do astronauta durante a sua viagem. Neste sistema de coordenadas, de acordo com contração de Lorentz, a distância entre a Terra e o planeta é somente de $5\sqrt{3}/2$ anos-luz. A Terra e o planeta movem-se em velocidade $\frac{1}{2}c$, de forma que, se a Terra deixar o astronauta em $t^* = 0$, o planeta chegará ao astronauta em $t_1^* = 10\sqrt{3}/2$ anos, de acordo com a discussão anterior, no ponto de vista do sistema sem asterisco, conforme registrado no relógio do astronauta. O relógio sem asterisco, que permaneceu na Terra, andará mais lentamente do ponto de vista do sistema com asterisco e, quando o planeta distante chegar ao astronauta, estará marcando um tempo $(10\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) =$

$= 7,5$ anos. O sinal enviado do relógio da Terra ao chegar ao planeta indicará cinco anos; se o astronauta corrigir o seu relógio de acordo com o fato de que o relógio da Terra estará andando mais devagar, ele concluirá que o sinal foi enviado a $t' = 5(2/\sqrt{3})$ anos. Como a Terra estará deslocando-se com a metade da velocidade da luz, ela enviou o sinal dos cinco anos quando estava $5/\sqrt{3}$ anos-luz do foguete do astronauta. Somando-se o tempo $5/\sqrt{3}$ anos-luz para o sinal alcançar o astronauta ao tempo $10/\sqrt{3}$ anos desde a sua emissão, chegar-se-á ao tempo $5/\sqrt{3}$ anos registrado no relógio do astronauta. Portanto, o raciocínio é consistente.

Após a realização destes cálculos, o astronauta desacelerará rapidamente e pousará no planeta. No ponto onde o astronauta se encontra no planeta, nada mudou, exceto que, agora, ele estará em repouso no sistema de coordenadas sem asterisco. O seu relógio ainda marcará $5/\sqrt{3}$ anos (mais um tempo desprezível somado enquanto o foguete era desacelerado). O relógio sem asterisco no planeta marcará 10 anos, exatamente como antes do astronauta parar para aterrissar. O sinal de rádio de 5 anos, emitido da Terra, passará neste instante. Se, no entanto, o astronauta calcular o tempo atual que o relógio da Terra deverá mostrar, sua definição de simultaneidade foi modificada. Ele somará os cinco anos-luz do tempo de viagem da Terra aos cinco anos do sinal recebido da Terra, concluindo que o relógio terrestre bem como o relógio sem asterisco localizado no planeta estarão registrando 10 anos. Isto não significa que ele concluiu que o relógio na Terra subitamente pulou de 7,5 para 10 anos. Tudo estará retornando suavemente para a Terra; significa meramente que a definição de simultaneidade mudou, de forma que ele agora estará vivendo um momento da história diferente da do gêmeo que permaneceu em casa, e que é simultânea com a sua chegada ao planeta.

O leitor deverá apresentar uma discussão similar para a viagem de volta, mostrando que, em sistemas de coordenadas com asteriscos duplos, cuja origem coincide com o astronauta durante a sua viagem de volta, o relógio na Terra também andará mais devagar, por um fator $\sqrt{3}/2$, mas outra vez, devido a uma mudança na definição de simultaneidade, o relógio na Terra estará adiantado em relação ao relógio do astronauta no ponto de vista do sistema com asteriscos duplos quando ele deixa o planeta, de forma que, embora estivesse andando mais devagar, mesmo assim registrará 20 anos quando o astronauta chegar à Terra com o seu relógio registrando $20/\sqrt{3}$ anos.

PROBLEMAS

- Um par de estrelas *A* e *B* gira uma em torno da outra em órbitas circulares com um período *T*. A Terra está no plano da órbita a uma distância *x* do par de estrelas, de forma que as suas órbitas são vistas da borda da Terra. Levante a hipótese de que a luz se desloca em velocidade *c* em relação à fonte que emite luz. Mostre que se este fosse o caso, cada estrela vista da Terra pareceria atravessar o semicírculo no lado mais longe de sua órbita mais rapidamente do que no semicírculo mais próximo. Mostre que se

$$4\pi x/T = c^2 - r^2,$$

onde v é a velocidade da estrela A , então A seria vista simultaneamente em ambos os diâmetros de sua órbita. Verifique se poderá escolher valores razoáveis de v , T e x para os quais esta condição é válida. Nenhum desses efeitos jamais foi observado.

2. Suponha que a luz se desloque em velocidade c com referência a um sistema de coordenadas fixo em relação ao qual a Terra se desloca em velocidade v . Mostre que um pulso de luz indo e vindo ao longo de uma linha paralela a v tem uma dada velocidade média, em relação à Terra, dada por

$$\langle v_{\parallel} \rangle = c[1 - (v^2/c^2)],$$

no sentido de que o tempo necessário para uma viagem de ida e volta entre dois pontos separados por uma distância l na Terra é $2l/\langle v_{\parallel} \rangle$. Determine a velocidade média $\langle v_{\perp} \rangle$ em relação à Terra para uma viagem de ida e volta ao longo de uma linha perpendicular a v . Se $v = 30 \text{ km s}^{-1}$ (velocidade da Terra em sua órbita), determine a razão $\langle v_{\perp} \rangle/\langle v_{\parallel} \rangle$. Esta é a base para a experiência de Michelson-Morley, que mostrou que $\langle v_{\perp} \rangle/\langle v_{\parallel} \rangle = 1$, com precisão de uma parte em 10^9 .

3. Três foguetes, A , C e B , voam em formação em linha reta à velocidade de 45 km s^{-1} em relação à Terra. Os foguetes A e B estão separados por $20\,000 \text{ km}$ (de acordo com medidas efetuadas em um sistema de coordenadas em que a Terra está em repouso), e C a meio caminho entre eles. Todos eles voam na direção da linha de B para A . Para sincronizar os seus relógios, os foguetes A e B emitem sinais de rádio que são recebidos pelo foguete C . Um sinal particular a , emitido de A , é recebido simultaneamente com o sinal b emitido de B . Em relação ao sistema de coordenadas com asterisco no qual os foguetes estão em repouso, os sinais a e b foram, portanto, emitidos simultaneamente de A e de B . (Por simetria, C está equidistante de A e B no sistema com asterisco.)

Mostre que, em relação a um sistema de coordenadas em que a Terra está em repouso, os sinais a e b não foram emitidos simultaneamente de A e B , embora um observador na Terra concordaria que eles foram recebidos simultaneamente em C . Que sinal foi emitido primeiro? Quanto tempo depois foi o outro sinal emitido? (Note que não é necessário conhecer como transformar um sistema de coordenadas em outro para resolver este problema, pois todos os cálculos podem ser realizados em relação à Terra.)

4. Uma régua com extremidade O^* e P^* move-se em velocidade v , paralela a seu comprimento. Um observador, movendo-se com a régua, mede o seu comprimento l^* da seguinte maneira: quando a extremidade O^* passa pela origem O do sistema de coordenadas fixo, um pulso de luz é emitido de O^* e viaja para a outra extremidade P^* onde é refletido num espelho. O pulso retorna para a extremidade O^* no tempo t^* , conforme é registrado num relógio em movimento, de forma que $l^* = 2ct^*$. Se o mesmo pulso de luz for usado para medir o comprimento l da régua, em relação ao sistema de coordenadas fixo, escreva a fórmula para l em termos do tempo t medido até o retorno do pulso para O . Usando a relação (13.21), mostre que este método de medida fornecerá a mesma relação (13.22) entre l e l^* .

5. A Eq. (13.21) foi obtida por um argumento em relação ao sistema de coordenadas com asterisco, com o objetivo de simplificar esse argumento. Mostre que a mesma equação pode ser obtida por um argumento em relação ao sistema de coordenadas sem asterisco. Use o fato de os relógios com asterisco andarem mais devagar por um fator $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ em relação aos relógios sem asterisco, e leve em conta a maneira pela qual o observador com asterisco sincroniza o seu relógio, mas faça todos os cálculos em relação ao sistema de coordenadas sem asterisco.

6. Um objeto A encontra-se em repouso num sistema de coordenadas e tem um comprimento l_A neste sistema. Um objeto B , em repouso em um sistema com asterisco, move-se em relação a A em velocidade v paralela ao comprimento l_A . O comprimento B , no sistema com asterisco, é $l_B^* = l_A$. O comprimento medido de B no sistema sem asteriscos é $l_B = l_B^*/\gamma$ e, da mesma forma, $l_A^* = l_A/\gamma$. Demonstre, em detalhe, como conciliar o paradoxo aparente de que cada objeto é menor do que outro, em sistemas de coordenadas em que o outro está em repouso. Suponha que cada comprimento seja medido pelo método de observação da posição simultânea de suas extremidades em tempo fixo, medindo-se a distância entre os pontos observados. [Sugestão. Mostre que a diferença em simultaneidade entre os dois sistemas de coordenadas justifica exatamente as discrepâncias entre os comprimentos medidos.]

7. Uma caixa pequena de volume dV , movendo-se em velocidade v , contém um relógio que se move juntamente com ela. O relógio marca um intervalo de tempo $d\tau$ entre dois eventos sucessivos que ocorrem dentro da caixa. Considere que dV_0 seja o volume da caixa medido por instrumentos em repouso dentro da caixa. Usando as propriedades de relógios e réguas em movimento, mostre que

$$dV_0 dt = dV dt,$$

onde dt é o intervalo de tempo (no nosso sistema de coordenadas) entre os mesmos dois eventos.

8. Encontre as Eqs. (13.35) para as transformações de Lorentz da seguinte maneira:
a) Suponha que a relação entre as variáveis com asterisco e sem asterisco seja linear:

$$\begin{aligned}x^* &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10}t, \\y^* &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20}t, \\z^* &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30}t, \\t^* &= a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00}t.\end{aligned}$$

Mostre que esta suposição é equivalente à que o espaço e o tempo são homogêneos, isto é, mostre que uma relação não-linear significaria que regiões diferentes no espaço-tempo devam ser transformadas de modo diferente.

b) Determine os coeficientes a_{ij} supondo: (1) que os eixos dos dois sistemas sejam paralelos (e, portanto, coincidem em $t = 0$); (2) que a origem O^* move-se ao longo do eixo x com velocidade v ; (3) que a onda luminosa se desloca em velocidade c em am-

bos os sistemas, isto é, a Eq. (13.15) deve resultar na Eq. (13.14) quando as substituições acima são efetuadas; (4) que se t crescer, t^* crescerá (isto é, $a_{00} > 0$); (5) que os coeficientes da transformação inversa, de x^* para x , devem ser obtidos a partir de a_{ij} substituindo v por $-v$; (6) que qualquer grandeza escalar que apareça nas equações de transformação só pode depender do módulo, e não do sinal de v . [Sugestões e precauções. Se o leitor seguir a rota algébrica mais rápida, deve verificar que será necessário levantar suposições na ordem em que elas são seguidas. Observe que a suposição (1) não significa que no ponto $t = 0$ um ponto tenha as mesmas coordenadas y e y^* no eixo y , mas somente que o ponto está no eixo y^* e que se y crescer y^* também crescerá. Se achar que as suposições (5) e (6) não são necessárias, é porque introduziu alguma outra suposição não justificada.]

9. Resolva as Eqs. (13.35) para x , y , z , t , e mostre que o resultado mantém a mesma forma substituindo-se v por $-v$.

10. Dados dois eventos, E_0 e E , para os quais a grandeza S dada pela Eq. (13.16) é positiva, determine a transformação de Lorentz para um sistema de coordenadas com asterisco no qual E_0 e E ocorrem simultaneamente. Para simplificar os cálculos algébricos, escolha o sistema de coordenadas original, de forma que E_0 esteja na origem e E , no ponto $(x, 0, 0, t)$. Determine a velocidade βc do sistema de coordenadas com asterisco e verifique que S é igual ao quadrado da distância entre os dois eventos no sistema com asterisco.

11. Dados dois eventos, E e E_0 , com coordenadas (x, y, z, t) e (x_0, y_0, z_0, t_0) , efetue uma transformação de Lorentz de acordo com as Eqs. (13.35) e verifique que a grandeza S dada pela Eq. (13.16) é dada pela mesma fórmula no sistema de coordenadas com asterisco. [O leitor poderá usar o resultado do Probl. 9.]

12. Mostre que não pode haver mais do que uma velocidade que seja a mesma em todos os sistemas de coordenadas, isto é, mostre que se tentar postular algum fenômeno que se desloque em velocidade constante universal v diferente de c , não poderá determinar qualquer transformação razoável que tornaria tanto v quanto c os mesmos em todos os sistemas de coordenadas. [Existem muitas maneiras de mostrar isto, algumas muito simples e outras mais complicadas. Tente achar um argumento que o convença.]

13. Derive a fórmula (13.52) para o efeito Doppler relativístico, considerando ω^* como a freqüência de uma fonte de luz em movimento, registrada por um relógio que se move com a fonte. Suponha que o relógio em movimento ande mais devagar de acordo com a Eq. (13.18) em relação a um sistema de coordenadas fixo, e que as ondas de luz emitidas se deslocam em velocidade c no sistema fixo. Calcule a freqüência ω com a qual estas ondas passam por um ponto fixo.

14. Uma régua reta, em repouso num sistema de coordenadas sem asterisco, faz um ângulo α com o eixo x . Um sistema de coordenadas com asterisco com eixos paralelos

move-se em velocidade v ao longo do eixo x . Mostre que a régua também será reta no sistema com asterisco e determine o ângulo α^* que ela faz com o eixo x^* .

15. Dadas as equações de transformação de Lorentz (13.35), encontre a fórmula (13.26) para a contração de Lorentz. [Sugestão. Escreva as coordenadas das extremidades de uma haste de comprimento l num sistema de coordenadas no qual ela esteja em repouso, e a transforme para um sistema de coordenadas em movimento.]

16. Efetue uma segunda transformação de Lorentz do tipo (13.35) para um sistema com asteriscos duplos, movendo-se em velocidade v^* ao longo do eixo x^* , em relação ao sistema com asterisco. Expressse x^{**} , y^{**} , z^{**} e t^{**} em termos de x , y , z e t e mostre que o resultado tem a forma (13.35), com uma velocidade relativa dada pela Eq. (13.56).

17. Mostre que a velocidade u' de uma partícula em relação a um sistema de coordenadas com asterisco é dada, em termos da velocidade v do sistema de coordenadas e da velocidade u da partícula em relação a um sistema de coordenadas sem asterisco, pela equação

$$(u^*)^2 = c^2 \left\{ 1 - \frac{[1-(v^2/c^2)][1-(u^2/c^2)]}{[1-(u \cdot v)/c^2]^2} \right\}.$$

Mostre que para u e v fixos, u^* será máximo quando u está na direção de $-v$, e que $u^* < c$ se $u < c$.

18. Discuta a viagem de volta do astronauta descrita no final da Seç. 13.6. Determine o tempo indicado pelo relógio situado na Terra, quando o astronauta inicia a viagem de volta, em relação a um sistema de coordenadas movendo-se com o astronauta nessa viagem. Some o intervalo de tempo registrado pelo relógio na Terra durante a viagem de volta, corrigido para o movimento da Terra, e mostre que o resultado é de 20 anos.

Mostre que o sinal emitido pela Terra cinco anos após a partida e recebido na viagem em direção ao planeta e o sinal emitido quinze anos depois e recebido na viagem de volta são compatíveis com a fórmula (13.52) para o efeito Doppler relativístico, para uma freqüência de um sinal por ano em relação à Terra.

19. Uma pequena caixa retangular, cujas dimensões são dx , dy e dz , move-se em velocidade u durante um tempo dt . Mostre, usando as Eqs. (13.35), que

$$dxdydzdt = dx^*dy^*dz^*dt^*,$$

onde dx^* , dy^* e dz^* são as dimensões da mesma caixa e dt^* é o intervalo de tempo correspondente, num sistema de coordenadas com asterisco. Considere que as dimensões são suficientemente pequenas, de forma que os termos de ordens mais altas nas derivadas podem ser desprezados. O leitor poderá supor que a caixa permaneça retangular caso uma de suas arestas fique paralela à direção do movimento. [Este problema deve ser resolvido cuidadosamente. Considere que um dos vértices da caixa esteja

na origem em $t = 0$, e que E_1 seja um evento que ocorre no mesmo vértice em um tempo dt posterior. Determine o tempo dt^* de E_1 no sistema com asterisco. (Não esqueça que a caixa está em movimento.) (Sendo dx , dy e dz pequenos, você deve obter o mesmo resultado para dt^*/dt em qualquer vértice da caixa, considerando somente termos de primeira ordem.) Para determinar dx^* , lembre-se que é a distância entre dois eventos ($dx^*, 0, 0, 0$) simultâneos no sistema de coordenadas com asterisco.]

O leitor poderá demonstrar o resultado acima através de um argumento simples usando o resultado do Probl. 7?

20. Uma maneira alternativa de sincronizar relógios seria trazê-los para um ponto comum onde possam ser sincronizados sem ambigüidade e, então, mover os vagarosamente (de forma que a dilatação do tempo seja desprezível) para as suas posições permanentes no sistema de coordenadas. Mostre que este procedimento funciona, analisando, no sistema de coordenadas sem asterisco, a aplicação deste método para sincronizar relógios no sistema de coordenadas com asterisco movendo-se na direção x em velocidade v . Um relógio é trazido para a origem O^* e sincronizado com o relógio com asterisco padrão, de forma a indicar zero em $t^* = 0$. Em seguida, é deslocado em pequena velocidade u^* para uma nova posição no sistema de coordenadas com asterisco. Expressse o intervalo de tempo próprio $d\tau$ para o relógio em movimento, em termos do tempo sem asterisco dt , a velocidade v do sistema com asterisco, e a velocidade de u^* do relógio em relação ao sistema com asterisco. Expanda $d\tau$ em uma série de potências de u^* . Suponha que u^* (mas não v) seja pequeno, mas, por outro lado, uma função arbitrária $u^*(t)$. Mostre que no caso de termos que envolvem ordens maiores do que a primeira potência de u^* poderem ser desprezados, então o relógio em movimento, em qualquer tempo t , indica o tempo com asterisco correto t^* correspondente à sua localização naquele tempo. Observe que o termo linear em u^* fornece exatamente o deslocamento de fase apropriado (em relação ao sistema sem asterisco) entre os relógios com asterisco em localizações diferentes. Qual seria o efeito mantendo-se os termos quadráticos de u^* ? Mostre que o termo linear deve ser mantido mesmo no limite $u^* \rightarrow 0$, no caso de o relógio ter de se deslocar numa distância finita a partir de O^* , mas que termos de ordens mais altas se anulam neste limite.

CAPÍTULO 14

DINÂMICA RELATIVÍSTICA

14.1 ÁLGEBRA VETORIAL NO ESPAÇO-TEMPO

No Cap. 3, desenvolveu-se a Álgebra Vetorial, no espaço tridimensional, um instrumento matemático de grande utilidade no desenvolvimento de equações da Física e em cálculos independentes para qualquer sistema tridimensional de coordenadas. Agora, formula-se uma Álgebra análoga, visando ao espaço-tempo de quatro dimensões, cujos “pontos” são eventos identificados pelas coordenadas (x, y, z, t) , onde estas variáveis se transformam, de acordo com as transformações de Lorentz, quando há transferência para um sistema em movimento. Define-se *4-escalar* ou *escalar universal* como uma grandeza cujo valor não varia quando as coordenadas são transformadas, de acordo com as equações para a transformação de Lorentz. Da mesma forma, define-se *4-vetor* como um conjunto de quatro grandezas que se transformam como diferenças entre as quatro coordenadas de dois eventos, de acordo com a transformação de Lorentz. Esta Álgebra de 4-vetores simplifica enormemente o problema da determinação da forma apropriada para as leis físicas, dando-lhes a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas. Por exemplo, ao se formular uma lei afirmando que dois 4-escalares são iguais, ou que dois 4-vetores são iguais, torna-se evidente, a partir da forma da equação, que ela será a mesma em todos os sistemas de coordenadas.

Será conveniente definir uma variável de tempo que seja medida nas mesmas unidades que as variáveis espaciais. Portanto, as quatro coordenadas de um evento no espaço-tempo são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_0 &= ct, \\ x_1 &= x, \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= z. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Usa-se uma letra grega para indicar um dos quatro índices 0, 1, 2 ou 3. Assim ‘ x_μ ’ simboliza uma das quatro variáveis x_0 , x_1 , x_2 ou x_3 ; às vezes também se usa ‘ x_μ ’ para representar o conjunto de quatro variáveis. Uma letra latina indica qualquer um dos valores 1, 2, 3. Assim ‘ x_i ’ indicará qualquer uma das três coordenadas espaciais.

Dados dois eventos¹ quaisquer, E^1 e E^2 , verifica-se na Seç. 13.3 que a grandeza

$$S^{21} = (x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2 - (x_0^2 - x_0^1)^2, \tag{14.2}$$

¹ Quando se analisam diversos eventos usar-se-á um superíndice para identificar um evento particular, reservando-se o índice para identificar uma das quatro coordenadas.

dada pela Eq. (13.16), será igual a zero no cone de luz, será negativa quando um dos eventos puder ser alcançado por outro por meio de um corpo que se desloca em velocidade menor do que a da luz, e será positiva quando isto não for possível. Se a grandeza S^{21} for igual a zero (ou negativa ou positiva) num sistema inercial, então será igual a zero (ou negativa ou positiva) em qualquer outro sistema inercial. Através de uma simples operação algébrica, pode-se verificar que substituindo as equações de transformação de Lorentz, dadas pelas Eqs. (13.35), a grandeza S^{21} terá, no novo sistema de coordenadas, o mesmo valor em todos os casos. (Veja o Probl. 11, Cap. 13.) A partir da Eq. (14.2), verifica-se se S^{21} permanece inalterado em valor ao se trocar a origem do espaço ou do tempo do sistema de coordenadas. Também é evidente que simplesmente dando nova orientação às coordenadas espaciais, mas mantendo a origem fixa, S^{21} manterá o seu valor. Na realidade, a simples mudança para um novo sistema de eixos faz com que o último termo permaneça separadamente constante e, da mesma forma, a soma dos três primeiros termos permaneça constante. Quando se passa para um sistema de coordenadas em movimento, todos os quatro termos podem variar, mas a soma deles permanece constante. Conclui-se, então, que a grandeza S^{21} tem o mesmo valor em qualquer sistema inercial. As grandes com esta propriedade chamam-se *4-escalar* ou, às vezes, *escalar universal*. Será conveniente introduzir as seguintes abreviações:

$$g_0 = -1, g_1 = g_2 = g_3 = 1. \quad (14.3)$$

Pode-se, agora, escrever a Eq. (14.2) da seguinte maneira abreviada:

$$S^{21} = \sum_{\mu} g_{\mu} (x_{\mu}^2 - x_{\mu}^1)^2. \quad (14.4)$$

O leitor poderá notar a analogia entre a grandeza (14.2), que tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas, e a grandeza

$$(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2,$$

que tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas retangulares de três dimensões que sejam estacionários um em relação ao outro. Nesta analogia, baseia-se o desenvolvimento da Álgebra do Espaço-Tempo.

Alguns autores definem a variável do tempo

$$x_4 = ict, \quad (14.5)$$

no lugar da variável x_0 usada aqui. Como $(x_4)^2 = -(x_0)^2$, formalmente a grandeza S^{21} parecerá exatamente como a grandeza correspondente no espaço tridimensional. Esta identidade formal tende, no entanto, a ofuscar a diferença física entre a coordenada do tempo e as três coordenadas espaciais que, no caso da definição (14.5), é preservada, exigindo que a quarta coordenada seja sempre um imaginário puro, enquanto as outras três coordenadas sejam reais. É preferível adotar aqui a definição (14.1), por causa da seguinte vantagem: todas as quatro coordenadas são reais e a diferença entre as coordenadas do espaço e do tempo é evidenciada pelo sinal menos que aparece na forma (14.2). Embora as coordenadas do espaço e do tempo não sejam fisicamente as

mesmas, elas se relacionam e misturam-se entre si sob a transformação de Lorentz (13.35).

A mudança variável de um sistema de coordenadas inercial para qualquer outro sistema de coordenadas inercial com asterisco pode ser escrita sob a forma

$$x_{\mu}^* = x_{\mu}^{*O} + \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad (14.6)$$

onde as quatro grandes x_{μ}^{*O} são as coordenadas da origem sem asterisco O no sistema de coordenadas com asterisco, e os coeficientes $a_{\mu\nu}$ dependem da orientação dos eixos com asterisco em relação aos eixos sem asterisco e do movimento relativo aos dois sistemas de coordenadas. Se os eixos sem e com asterisco forem paralelos e se a origem O^* mover-se em velocidade v ao longo do eixo x , então estes coeficientes serão dados pelas Eqs. (13.35):

$$a_{\mu\nu} = \begin{matrix} \mu \\ \downarrow \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.7)$$

Se o sistema de coordenadas com asterisco estiver em repouso em relação ao sistema de coordenadas sem asterisco, mas os eixos com asterisco não forem paralelos aos eixos sem asterisco, então os coeficientes $a_{\mu\nu}$ serão dados pelas Eqs. (7.13):

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_3 \\ 0 & \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 \\ 0 & \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 & \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (14.8)$$

Efetuando-se agora uma transformação para o terceiro sistema inercial (com linha), de acordo com as equações

$$x'_{\lambda} = x'^{O*}_{\lambda} + \sum_{\mu} a'_{\lambda\mu} x_{\mu}^*, \quad (14.9)$$

pode-se verificar facilmente que se substituindo no resultado acima as Eqs. (14.6), obter-se-á a relação entre os sistemas de coordenadas com linha e sem asterisco na seguinte forma:

$$x'_{\lambda} = x'^{O*}_{\lambda} + \sum_{\nu} a'_{\lambda\nu} x_{\nu}, \quad (14.10)$$

onde

$$x'^{O*}_{\lambda} = x'^{O*}_{\lambda} + \sum_{\mu} a'_{\lambda\mu} x_{\mu}^{*O}, \quad (14.11)$$

e

$$a'_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} a'_{\lambda\nu} a_{\mu\nu}. \quad (14.12)$$

O leitor poderá notar que a Eq. (14.12) é exatamente a regra de multiplicação de matrizes 4×4 . Pela aplicação de transformações sucessivas das formas especiais (14.7) e (14.8), obter-se-á a relação (14.6) entre dois sistemas de coordenadas iniciais quaisquer, independente da localização de suas origens ou da orientação dos eixos, ou de suas velocidades relativas. Será conveniente referir-se à transformação (14.6) como uma “transformação de Lorentz” e assim definir uma transformação de Lorentz como qualquer transformação entre dois sistemas de coordenadas iniciais.² No entanto, restringir-nos-emos a sistemas de coordenadas espaciais retangulares, pelo menos quando for preciso trabalhar com transformações entre sistemas de referência, em movimento. Na solução de um problema particular de um único sistema de referência, podem-se usar livremente sistemas de coordenadas espaciais curvilíneas, se for conveniente.

Os coeficientes $a_{\mu\nu}$ dependem da velocidade do sistema de coordenadas com asterisco em relação ao sistema sem asterisco (que se pode especificar dando seus três componentes) e da orientação dos eixos coordenados com asterisco em relação aos eixos sem asterisco (que requerem três ângulos para sua especificação). Como eles dependem de seis parâmetros, nem todos os dezesseis coeficientes $a_{\mu\nu}$ podem ser independentes, esperando-se que devam existir dez relações entre eles. Não é difícil mostrar (veja o Probl. 2) que se o escalar S^{21} [Eq. (14.4)] tiver o mesmo valor nos sistemas de coordenadas com e sem asterisco, para dois eventos E^1 e E^2 quaisquer, então as dez seguintes relações devem ser válidas:

$$\sum_\mu g_\mu a_{\mu\nu} a_{\nu\lambda} = g_\nu \delta_{\nu\lambda} = \begin{cases} g_\nu & \text{se } \nu = \lambda, \\ 0 & \text{se } \nu \neq \lambda. \end{cases} \quad (14.13)$$

O leitor que estudou o Cap. 10 notará a analogia entre as Eqs. (14.13) e Eqs. (10.78), que é válida entre os coeficientes a_{ij} da transformação (10.69) entre dois sistemas de coordenadas tridimensionais.

Os coeficientes $a_{\mu\nu}^{-1}$ para a transformação inversa (14.6),

$$x_\nu = x_\nu^{O*} + \sum_\mu a_{\nu\mu}^{-1} x_\mu^*, \quad (14.14)$$

são dados por

$$a_{\nu\mu}^{-1} = g_\mu g_\nu a_{\mu\nu}. \quad (14.15)$$

Para verificar este resultado, observe que a partir das Eqs. (14.13), como $(g_o)^2 = 1$, tem-se

$$\sum_\lambda g_\lambda^{-1} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

² O nome *transformação de Lorentz* freqüentemente restringe-se a transformações em que há coincidência entre as origens O e O^* . O maior grupo de transformações que permite a escolha de novas origens chama-se grupo de Poincaré. Embora para discussões gerais considerem-se quaisquer dois sistemas de coordenadas iniciais, em exemplos específicos é comum o uso apenas do caso especial (13.35), que é o formulado explicitamente por Lorentz, embora de forma mais ou menos transparente. (H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light, *Proc. Acad. Sci., Amsterdam*, 6, 1904.) A Álgebra dos 4 vetores foi introduzida em 1905 e desenvolvida mais tarde por Minkowski, em 1908.

Comparando esta equação com a Eq. (14.12), verifica-se que os coeficientes $a_{\mu\nu}^{-1}$, na realidade, são os coeficientes da transformação inversa (14.14).

Define-se 4-escalar como uma grandeza física qualquer, cujo valor não é modificado por uma transformação de Lorentz. Um 4-escalar típico é a grandeza S^{21} , definida pela Eq. (14.4). Define-se 4-vetor como um conjunto de quatro grandes A_μ que se transformam, sob a transformação de Lorentz (14.6), de acordo com a regra

$$A_\mu^* = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu. \quad (14.16)$$

Um 4-vetor típico é o conjunto de diferenças entre as coordenadas $(x_\mu^2 - x_\mu^1)$ entre dois eventos E^1 e E^2 . Torna-se evidente, a partir da Eq. (14.6), que este 4-vetor, que se pode chamar o 4-vetor deslocamento entre dois eventos, transforma-se de acordo com a Eq. (14.16). No caso especial em que os eixos com e sem asterisco são paralelos e quando a velocidade é ao longo do eixo x , a regra de transformação de um 4-vetor será

$$\begin{aligned} A_0^* &= \gamma(A_0 - \beta A_1), \\ A_1^* &= \gamma(A_1 - \beta A_0), \\ A_2^* &= A_2, \\ A_3^* &= A_3. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Quando há uma transformação entre dois sistemas de coordenadas que estão em repouso relativo, o componente A_0 não varia (ele é um 3-escalar) e os componentes A_1, A_2, A_3 se transformam como um 3-vetor comum. Assim, verifica-se que, enquanto não se mudar para um sistema de referência em movimento, um 4-vetor consiste num escalar mais três componentes de um vetor no espaço tridimensional comum. No entanto, quando se transforma um 4-vetor para um sistema de coordenadas em movimento, a parte 3-escalar A_0 mistura-se com a parte 3-vetorial, devendo-se, então, considerar as quatro grandes A_μ como componentes de uma única entidade, o 4-vetor.

O leitor observará que se A_μ e B_μ são 4-vetores, também o será o conjunto de quatro grandes obtidas pela multiplicação dos componentes de um vetor por um escalar ou pela soma dos componentes dois a dois:

$$cA_\mu \text{ será um 4-vetor se } A_\mu \text{ for, e se } c \text{ for um 4-escalar} \quad (14.18)$$

e

$$A_\mu + B_\mu \text{ será um 4-vetor se } A_\mu, B_\mu \text{ também forem} \quad (14.19)$$

Dados dois 4-vetores, A_μ, B_μ , pode-se demonstrar, usando as equações de transformação (14.16) e (14.13), que a grandeza

$$\begin{aligned} (A_\mu, B_\mu) &= \sum_\mu g_\mu A_\mu B_\mu, \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 - A_0 B_0, \end{aligned} \quad (14.20)$$

é um 4-escalar. Seu valor não varia sob uma transformação de Lorentz. A demonstração deste resultado será deixada para o leitor (veja Probl. 3). A recíproca também é verdadeira (veja o Probl. 4).

Dadas quatro grandezas A_μ que se transformam, de acordo com uma regra determinada, em mudança de sistemas de coordenadas, se o produto (A_μ, B_μ) for um 4-escalar para qualquer 4-vetor escolhido arbitrariamente, então A_μ será um 4-vetor. (14.21)

A grandeza (14.20) evidentemente atuará de maneira análoga ao produto escalar de dois vetores na Álgebra Vetorial em três dimensões. Pode-se chamá-lo produto 4-escalar de dois 4-vetores. Note, no entanto, que não se define o produto de um 4-vetor por ele mesmo ($A_\mu A_\mu$) como positivo, como no produto correspondente na Álgebra Vetorial em três dimensões.

Não é possível definir para um 4-vetor o análogo do produto vetorial, como o leitor poderá verificar imediatamente com um pouco de trabalho. Na realidade, o análogo do produto vetorial (3.32) nem mesmo tem o número correto de componentes para ser um 4-vetor.³

Não é comum introduzir uma notação especial para um 4-vetor como se fez para vetores no espaço tridimensional. Designa-se simplesmente um 4-vetor escrevendo seus componentes como ' A_μ '.

Se para dois eventos, E^1 e E^2 , conhecidos, o escalar S^{21} , definido pela Eq. (14.2), for positivo, diz-se que o intervalo entre os dois eventos é do *tipo espaço*, definindo-se a *distância própria* entre os dois eventos pela equação

$$\sigma^{21} = (S^{21})^{1/2}. \quad (14.22)$$

A distância própria σ^{21} é evidentemente um 4-escalar neste caso, podendo ser definida de maneira absoluta como a distância entre dois eventos, medida por uma régua em repouso, num sistema de coordenadas que se move de tal maneira que os dois eventos ocorrem simultaneamente.

Se para dois eventos, E^1 e E^2 , o escalar S^{21} for negativo, diz-se que o intervalo entre os dois eventos é do *tipo tempo*. Neste caso, define-se um 4-escalar da seguinte maneira:

$$\tau^{21} = (-S^{21})^{1/2}/c. \quad (14.23)$$

A grandeza τ^{21} será chamada *intervalo de tempo próprio* entre os dois eventos, e será considerada positiva se o evento 2 for posterior ao 1, e negativa se o evento 2 preceder o 1. Define-se o escalar τ^{21} de maneira independente à do sistema de coordenadas, como o intervalo de tempo indicado em um relógio que se desloca em velocidade cons-

tante apropriada, de tal forma que parta do evento E^1 e chegue ao evento E^2 (ou vice-versa).

Como se estudou no capítulo anterior, os componentes da velocidade dx_i/dt de uma partícula em movimento transformam-se, sob uma transformação de Lorentz, de acordo com as Eqs. (13.56). Torna-se evidente destas equações que não se pode somar um 3-escalar u_0 à 3-velocidade u_i para formar um 4-vetor. Poder-se-á, no entanto, construir um 4-vetor relacionado aproximadamente à velocidade, da seguinte maneira: consideram-se dois eventos, próximos na história de uma partícula em movimento que tem coordenadas x_μ e $x_\mu + dx_\mu$. As diferenças entre as coordenadas dx_μ são evidentemente os componentes de um 4-vetor (infinitesimal). O intervalo de tempo próprio entre os dois eventos

$$d\tau = [-(dx_\mu, dx_\mu)]^{1/2}/c \quad (14.24)$$

é um 4-escalar. Portanto, pode-se [pela regra (14.18)] formar um 4-vetor, que se chamará *4-velocidade*, da seguinte maneira:

$$U_\mu = dx_\mu/d\tau. \quad (14.25)$$

Devido ao fato de a 4-velocidade U_μ ser um 4-vetor, descobre-se que ela é útil quando se tenta escrever as equações de movimento sob uma forma invariante sob uma transformação de Lorentz. A 4-velocidade, evidentemente, está relacionada à 3-velocidade pelas equações

$$\begin{aligned} U_0 &= c dt/d\tau = \gamma c, \\ U_i &= dx_i/d\tau = \gamma u_i, \end{aligned} \quad (14.26)$$

onde

$$\gamma = [1 - (u^2/c^2)]^{-1/2}.$$

Pode-se calcular imediatamente o produto 4-escalar

$$\Sigma_\mu g_\mu (U_\mu)^2 = -c^2. \quad (14.27)$$

O 4-vetor U_μ é um exemplo de 4-vetor que tem somente três componentes independentes, pois o produto escalar de um 4-vetor por ele mesmo deve satisfazer a equação (14.27). Conhecendo-se três componentes u_i da velocidade, então os quatro componentes da 4-velocidade U_μ são dados pelas Eqs. (14.26). Reciprocamente, conhecendo-se a 4-velocidade U_μ , ou mesmo a sua parte especial U_i , pode-se determinar a 3-velocidade u_i . Observe também que no limite não relativístico $u \ll c$, $U_i = u_i$ e $U_0 = c$.

Formulando-se uma lei física de forma que dois 4-escalares sejam iguais, ou que dois 4-vetores tenham componentes iguais, então é evidente que estas equações terão a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas inerciais. Pode-se dizer que elas são *declaradamente covariantes*. Não é necessário que as leis da Física sejam escritas em termos de 4-escalares e 4-vetores. Na realidade, como a Álgebra 4-vetorial ainda não fora inventada, Einstein, ao fazer seu primeiro trabalho, não dispunha deste instrumento. Assim, ele determinou uma maneira covariante para escrever as equações da Mecânica e da Eletrodinâmica, isto é, uma mesma forma para todos os sistemas de coor-

³ O leitor que estudou a Seç. 10.2 reconhecerá que o análogo correto do produto vetorial é um 4-tensor anti-simétrico, $A_\mu B_\mu - A_\nu B_\nu$. Como tem seis componentes independentes, não pode ser correlacionado com nenhum 4-vetor. É um acidente numérico que, no espaço tridimensional, o tensor anti-simétrico e o vetor tenham, cada um deles, três componentes.

nadas inerciais. Para demonstrá-lo, no entanto, foi necessário descobrir leis especiais da transformação para cada uma das grandezas físicas que apareciam nas equações [por exemplo, a complicada lei (13.56) para a velocidade] e, então, mostrar por meio de cálculos explícitos que quando se efetua a transformação de Lorentz apropriadamente em todas as grandezas, as equações assumem a mesma forma no novo sistema de coordenadas com asterisco.

Dado um conjunto de quatro grandezas, A_0, A_1, A_2 e A_3 , cada uma delas determinada, por exemplo, por um tipo de medida realizada em relação a um sistema de coordenadas com asterisco, pode-se definir sempre de maneira formal um 4-vetor, especificando que os seus componentes, neste sistema de coordenadas, devam ser as quatro grandezas A_μ e que seus componentes em qualquer outro sistema de coordenadas sejam calculados a partir de transformações efetuadas de acordo com as Eqs. (14.16). Um 4-vetor formal deste tipo, no entanto, não será um vetor físico, isto é, a definição operacional especificando a maneira de medir as grandezas A_μ^* no sistema de coordenadas com asterisco, em geral, não será a mesma que especificaria a maneira de medir as grandezas A_μ no sistema de coordenadas sem asterisco. Para definir um 4-vetor físico, deve-se definir as quatro grandezas A_μ , especificando a maneira de medi-las num sistema de coordenadas qualquer, usando a mesma definição em todos os sistemas de coordenadas e, então, mostrar que as relações entre as quatro grandezas em dois sistemas de coordenadas quaisquer são dadas pelas Eqs. (14.16). Alternativamente, pode-se fornecer uma definição das grandezas A_μ em um sistema de coordenadas, definir os componentes A_ν^* em outro sistema através das Eqs. (14.16) e, então, demonstrar que as grandezas A_ν^* podem, de fato, ser determinadas no sistema de coordenadas com asterisco, usando-se a mesma definição operacional que no sistema de coordenadas com asterisco. Como exemplo, o 4-velocidade U_μ foi construído acima de maneira a tornar claro, desde o início, que era um 4-vetor. As Eqs. (14.26) tornam claro, então, que a 4-velocidade U_μ tem a mesma definição operacional em todos os sistemas de coordenadas; mede-se a 3-velocidade u_i em todos os sistemas de coordenadas da maneira usual e, então, calculam-se os componentes U_μ a partir das Eqs. (14.26). Reciprocamente, pode-se começar com a definição operacional (14.26) e em seguida demonstrar que as quatro grandezas U_μ se transformam na realidade como um 4-vetor. Torna-se evidente que se uma lei da Física que afirma a igualdade de dois 4-vetores deve satisfazer o postulado (13.1) [ou (13.42)], então os 4-vetores que aparecem nesta equação deverão ser 4-vetores físicos no sentido atribuído acima. O postulado (13.1) requer que as leis da Física tenham a mesma forma e o mesmo significado em todos os sistemas de coordenadas inerciais. As mesmas exigências aplicam-se evidentemente também aos 4-escalares.

Em analogia com a terminologia correspondente no caso do intervalo de 4-vetor entre dois eventos, diz-se, às vezes, que o 4-vetor A_μ é do tipo espaço se o produto escalar $(A_\mu, A_\mu) < 0$. De acordo com a Eq. (14.27), a 4-velocidade é um 4-vetor tipo tempo. Em um sistema de coordenadas particular, pode-se escrever o produto de 4-vetor por ele mesmo em termos dos seus componentes de tempo A_0 e da sua parte espacial $A = (A_1, A_2, A_3)$:

$$(A_\mu, A_\mu) = A \cdot A - (A_0)^2. \quad (14.28)$$

Cada um dos dois termos (A_0) e $A \cdot A$ é um 3-escalar; somente a combinação (14.28) é um 4-escalar.

Como aplicação da Álgebra de 4-vetores, considere uma onda plana com freqüência angular ω e número de ondas k dado pela equação

$$W = Ae^{i(k \cdot r - \omega t)}. \quad (14.29)$$

Definindo-se as quatro grandezas

$$k_0 = \omega/c, k_1 = k_x, k_2 = k_y, k_3 = k_z, \quad (14.30)$$

escreve-se a onda W na forma

$$W = Ae^{i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 - k_0x_0)}. \quad (14.31)$$

Como a fase $(k \cdot r - \omega t) = (k_\mu, x_\mu)$ em qualquer ponto da onda é determinada por sua localização no espaço, ou no tempo, em relação à crista ou à depressão da onda, e como uma crista ou uma depressão pode ser identificada sem ambigüidade, em qualquer sistema de coordenadas, a fase deve ser um escalar, que tem o mesmo valor (até um fator aditivo múltiplo de π) em todos os sistemas de coordenadas. Conclui-se, então, usando o Teorema (14.21), que as quatro grandezas k_μ são os componentes de um 4-vetor, pois seu produto com x_μ é um escalar. Chama-se o 4-vetor k_μ vetor de onda. O fato de seus componentes se transformarem como um 4-vetor permite determinar a relação entre a freqüência ω e o número de ondas k , num sistema de coordenadas, e a freqüência ω^* e o número de ondas k^* , em qualquer outro sistema de coordenadas. Em particular, pode-se, agora, fornecer uma derivação mais elegante da Eq. (13.52) para o efeito Doppler relativístico (veja o Probl. 5). A partir do vetor de ondas k_μ , pode-se formar o escalar invariante

$$S = c^2 (k_\mu, k_\mu) = c^2 k^2 - \omega^2. \quad (14.32)$$

Para uma onda de luz, $S = 0$. Para uma onda cuja velocidade de fase (ω/k) seja menor que c , S será positivo. Para um dado valor de S , a Eq. (14.32), que fornece a relação entre ω e k para uma onda qualquer, freqüentemente chama-se relação de dispersão para a onda. A grandeza S pode ela própria ser dada como função de ω ou de k . Como ω e k não são 4-escalares, se S for uma função de ω e k , ela será uma função diferente em sistemas de coordenadas diferentes. Uma onda sonora, por exemplo, que se desloca à velocidade v no ar, tem a relação de dispersão $\omega = kv$. Substituindo-se na Eq. (14.32),

$$S = k^2 (v^2 - c^2), \quad \text{se } \omega = kv. \quad (14.33)$$

A Fórmula (14.33) certamente só será válida num sistema de coordenadas em repouso em relação ao ar em que o som se propaga. Em todo sistema de coordenadas, o escalar S , dado em termos do vetor de ondas k_μ pela Eq. (14.32), terá o mesmo valor, mas num sistema de coordenadas em que o ar esteja em movimento, sua expressão funcional, em termos de k , será diferente da Eq. (14.33). A lei $\omega = kv$, que é equivalente à afirmação que as ondas sonoras se propagam em velocidade de fase v , só será verdadeira no sistema de coordenadas em que o ar está em repouso. A formulação relativística correta da lei da propagação de uma onda sonora seria obtida caso se dissesse que a on-

da se propaga em velocidade v em relação ao ar. Enunciada desta maneira, a lei será independente de qualquer escolha arbitrária do sistema de coordenadas, dependendo, certamente, da maneira com que o ar se move. Compare esta situação com o caso de uma onda luminosa, para a qual $v = c$ e a relação de dispersão $S = 0$ será válida da mesma forma em todos os sistemas inerciais.

Para definir, agora, um operador diferencial 4-vetorial análogo ao operador ∇ , definido na Seç. 3.6, pergunta-se, primeiramente, se os símbolos de derivação $\partial/\partial x_\mu$ transformam-se como os componentes de um 4-vetor. Para descobrir isto, considere uma função escalar $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Considere também que f seja um 4-escalar, isto é, que tenha o mesmo valor no mesmo ponto do espaço-tempo, não importando que sistema de referência inercial esteja sendo usado. Expressando-se, então, a função f como função de um novo sistema de coordenadas x_μ^* , suas derivadas em relação às novas variáveis serão dadas com as regras usuais do cálculo pela fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial x_\mu^*} = \sum_v \frac{\partial f}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial x_\mu^*}.$$

De acordo com as Eqs. (14.14) e (14.15), obtém-se

$$\frac{\partial x_v}{\partial x_\mu^*} = a_{v\mu}^{-1} = g_\mu g_v a_{\mu\nu}. \quad (14.34)$$

A partir das equações acima, verifica-se que a Lei da Transformação para a derivada das coordenadas será

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu^*} = \sum_v g_\mu g_v a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_v}. \quad (14.35)$$

Verifica-se que as derivadas das coordenadas não se transformam exatamente de acordo com a lei (14.16), para a transformação de um 4-vetor, porque alguns dos termos do segundo membro da Eq. (14.35) envolvem um sinal negativo.⁴ Observando que $(g_\mu)^2 = 1$, pode-se obter um conjunto de operadores diferenciais que se transformam como os componentes de um 4-vetor através da multiplicação da Eq. (14.35) por g_μ :

$$g_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu^*} = \sum_v a_{\mu\nu} g_v \frac{\partial}{\partial x_v}. \quad (14.36)$$

Define-se operador diferencial 4-vetorial \square_μ , chamado *4-gradiente*, como segue:

$$\square_\mu = g_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

⁴ O leitor que está familiarizado com a extensão da Álgebra Vetorial para sistemas não-ortogonais reconhecerá a distinção entre as Leis da Transformação (14.35) e (14.16) quando correspondem à distinção entre vetores covariantes e contravariantes. Ela aparece devido às diferenças de sinal no produto escalar invariante (14.20). Como, no presente caso, só há uma diferença de sinal, evitaremos a introdução de um formalismo mais elaborado que o necessário para trabalhar com sistemas de coordenadas não-ortogonais em geral. Introduz-se aqui somente uma espécie de 4-vetor, que se transforma de acordo com a regra de transformação (contravariante) (14.16).

isto é,

$$\square_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \square_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \square_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \square_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (14.37)$$

Os componentes do 4-vetor \square_μ são exatamente os componentes do operador gradiente no espaço comum, enquanto o componente do tempo envolve derivação em relação a t .

Formando o produto escalar de \square_μ por ele mesmo, obtém-se um operador diferencial 4-escalar, familiar ao leitor desde o estudo da Teoria das Ondas (veja, por exemplo, a Eq. 8.186),

$$(\square_\mu, \square_\mu) = \square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (14.38)$$

O operador \square_μ exerce importante papel na Teoria das Ondas. Por exemplo, supondo-se que a grandeza W na onda (14.29) seja um escalar, então se pode aplicar o operador \square_μ para obter o 4-vetor

$$\square_\mu W = ik_\mu W. \quad (14.39)$$

Para uma onda luminosa ($\omega = kc$), cada uma das grandezas W que caracterize algum componente da onda satisfaz (no vácuo) a equação

$$\square^2 W = 0. \quad (14.40)$$

Contanto que o conjunto de grandezas W seja transformado apropriadamente, a invariância em forma desta equação submetida a uma transformação de Lorentz é garantida pelo fato de \square^2 ser um 4-escalar. Pode-se usar essa instrumentação para desenvolver a equação covariante de Lorentz para uma onda que se desloque em velocidade diferente da da luz, da seguinte maneira:

$$\square^2 W - k^2 W = 0, \quad (14.41)$$

onde k é uma constante universal que tem as dimensões do inverso do comprimento. Como \square^2 e k^2 são escalares, a necessidade da covariância é manifesta. Substituindo-se o resultado da Eq. (14.29), obtém-se a relação de dispersão

$$-k^2 + (\omega^2/c^2) - \kappa^2 = 0,$$

ou, na notação da Eq. (14.32),

$$S = c^2 k^2 - \omega^2 = -c^2 \kappa^2. \quad (14.42)$$

O leitor que estudou o Cap. 8 reconhecerá que esta é uma onda cuja velocidade de fase,

$$v_p = \omega/k = (\pm) c (1 + \kappa^2 k^{-2})^{1/2}, \quad (14.43)$$

é maior do que c (!), e cuja velocidade de grupo,

$$v_g = d\omega/dk = (\pm) c (1 + \kappa^2 k^{-2})^{-1/2}, \quad (14.44)$$

é menor do que c . A velocidade de fase é a velocidade com que a forma da onda senoidal parece mover-se; como nenhum objeto físico desloca-se nessa velocidade e como uma onda senoidal perfeita não transporta informação, a velocidade da fase de uma onda pode exceder c sem violar os postulados da Relatividade. Uma modulação de baixa freqüência de uma onda senoidal desloca-se em velocidade aproximadamente igual à velocidade de grupo. Como, no entanto, a onda pode transportar sinais e energia com a velocidade de grupo, v_g tem de ser menor do que c para satisfazer o Postulado da Relatividade.

14.2 AS LEIS DA CONSERVAÇÃO SOB O PONTO DE VISTA RELATIVÍSTICO

Para formular as leis da Mecânica de maneira que satisfaçam o Postulado da Relatividade (13.42), o melhor guia é o princípio da correspondência; as leis da Mecânica relativisticamente corretas devem, além de satisfazer o postulado (13.42), reduzir-se às leis de Newton sempre que todas as velocidades envolvidas forem desprezíveis em comparação com c . A partir de um ponto de vista estritamente lógico, o Postulado da Relatividade e o princípio da correspondência não são suficientes para definir univocamente a nova teoria. No entanto, as leis da Mecânica Relativística, propostas por Einstein, em sua primeira publicação,⁵ e também independentemente por Poincaré,⁶ são os únicos conjuntos plausíveis de leis que satisfazem estas exigências sugeridas até o presente.

A maneira mais simples de atacar o problema é procurar inicialmente uma generalização relativística da Lei da Conservação do Momento Linear. Portanto, levanta-se a hipótese de que a nova teoria contém uma lei da conservação que se reduzirá no limite de pequenas velocidades à lei clássica da Conservação do Momento Linear. A Lei da Conservação afirma que uma grandeza física particular permanece constante ou, alternativamente, que tenha o mesmo valor em dois tempos diferentes quaisquer. Clasicamente, o momento linear de um sistema de partículas é uma grandeza vetorial, formada pela soma dos momentos lineares das partículas individuais de acordo com a definição dada pela Eq. (4.4). Está suficientemente claro que a generalização da Lei da Conservação do Momento Linear terá de envolver um 4-vetor P_μ , cuja parte espacial reduz-se ao clássico vetor momento no limite de velocidades pequenas. Uma definição apropriada pode ser encontrada utilizando-se a Eq. (14.25) para a 4-velocidade. Portanto, 4-vetor, chamado (4-vetor) *momento* de uma partícula, é definido como

$$p_\mu = mU_\mu, \quad (14.45)$$

onde m é a massa de repouso da partícula, freqüentemente chamada somente *massa* e definida como a massa medida de maneira usual num sistema de coordenadas em que a partícula está em, ou aproximadamente em, repouso. A massa m , definida desta maneira,

⁵ A. Einstein, *Annalen der Physik*, 17 (1905). A definição de força escolhida por Einstein era menos conveniente do que a adotada mais tarde e que será apresentada na próxima seção.

⁶ H. Poincaré, *Compt. Rend.*, 140, 1504 (1905).

é evidentemente um escalar, isto é, tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas e, em todos eles, deve-se usar a mesma massa m , a saber, a massa medida por instrumentos em movimento com a mesma velocidade que a da partícula; estes instrumentos serão os mesmos, não importando em que sistema de coordenadas as equações estão sendo desenvolvidas, porque a massa em repouso é um escalar, o momento linear P_μ da partícula é um 4-vetor. As partes temporais e espaciais do momento são dadas por

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma mc, \\ p &= \gamma mu. \end{aligned} \quad (14.46)$$

Como $\gamma \approx 1$, se $u \ll c$, a parte espacial do 4-vetor p_μ reduz-se ao clássico vetor momento linear para pequenas velocidades.⁷

Define-se, agora, o momento total de um sistema de partículas como o 4-vetor obtido somando-se o momento das partículas individuais:

$$P_\mu = \sum_j p_{j\mu} = \sum_j m_j U_{j\mu}. \quad (14.47)$$

A parte espacial do vetor P_μ reduz-se à ao momento linear total clássico, se as velocidades de todas as partículas forem pequenas em comparação com c .

Propõe-se, agora, que a Lei da Conservação Relativística exige que o 4-momento total permaneça constante;

$$(P_\mu)_{t=t_1} = (P_\mu)_{t=t_2}, \quad (14.48)$$

para quaisquer dois tempos, t_1 e t_2 , para um sistema de partículas cujo 4-momento total é P_μ , e que não interaja com qualquer outro corpo fora do sistema. A Lei (14.48) contém quatro equações correspondentes aos quatro valores do índice μ . As três equações para $\mu = 1, 2$ e 3 afirmam que o 3-momento,

$$P = (P_1, P_2, P_3) = \sum_j m_j \gamma_j u_j, \quad (14.49)$$

permanece constante. No caso-limite de velocidades pequenas, esta será exatamente a clássica Lei da Conservação do Momento Linear. Portanto, pode-se chamar o 3-momento P , definido pela Eq. (14.49), de 3-momento em geral, independente das velocidades. Existe uma equação adicional correspondente a $\mu = 0$ nas Eqs. (14.48) que afirma que a grandeza

$$P_0 = \sum_j m_j c \gamma_j \quad (14.50)$$

é constante, onde

$$\gamma_j = [1 - (u_j^2/c^2)]^{-1/2}. \quad (14.51)$$

⁷ Em Relatividade, a definição correta do 3-momento p de uma parte será simplesmente a parte espacial p_i do 4-momento p_μ . Portanto, o símbolo (γ) será usado para ambos. Observe que a 3-velocidade u não é a parte espacial da 4-velocidade U_μ , de forma que são necessários símbolos diferentes (u , U) para distingui-los.

Para verificar o significado desta equação, expande-se P_0 em uma série de potências de u^2/c^2 :

$$P_0 = c \sum_j m_j + c^{-1} \sum_j \frac{1}{2} m_j u_j^2 + c^{-3} \sum_j \frac{3}{4} m_j u_j^4 + \dots \quad (14.52)$$

O primeiro termo é exatamente a soma das massas de repouso das partículas multiplicadas por c , e deve ser constante, de acordo com as clássicas leis da Física. O segundo termo é a expressão clássica da energia cinética dividida por c . Admitindo-se que as velocidades sejam suficientemente pequenas de forma que termos de ordens superiores sejam desprezíveis, então o componente $\mu = 0$ da Lei da Conservação parece dizer que a energia cinética é constante. Este é um resultado inesperado e com uma ligeira dificuldade, pois de início inscreveu-se simplesmente uma Lei da Conservação do Momento. Torna-se claro que na Teoria da Relatividade a Lei da Conservação do Momento pode ocasionar alguma outra lei da conservação adicional, pois exige-se a conservação do 4-vetor com quatro componentes. Então, a conservação do momento e da energia juntam-se na Teoria da Relatividade; não se pode ter uma sem a outra. Este resultado é, à primeira vista, um pouco intrigante, pois em Mecânica Clássica as Leis da Conservação do Momento e da Energia têm bases diferentes. A do momento só depende da terceira lei de Newton, ou de outros aspectos equivalentes da teoria; em geral, ela é válida para todas as interações entre partículas, pelo menos, quando se consideram todos os momentos envolvidos. A conservação da energia cinética, que deve corresponder ao segundo termo em P_0 , será válida em Mecânica Clássica somente para o caso restrito de interações completamente elásticas entre as partículas. Existe uma lei geral da conservação da energia, mas ela exige que se leve em conta todas as formas de energia, incluindo energia térmica e energias potenciais associadas a vários campos de força. Portanto, a energia total, em Mecânica Clássica, não pode ser expressada por meio de conceitos puramente mecânicos, isto é, em termos das massas e das velocidades das partículas envolvidas. Como se quer que a conservação do momento P_i , dada pela Eq. (14.49), seja válida, em geral, enquanto não existir troca de momento entre um dado sistema e o mundo exterior, é-se forçado a concluir que a grandeza P_0 dada pela Eq. (14.50) também é conservada sob as mesmas circunstâncias, isto é, contanto que não haja troca de energia com o mundo exterior. Como se sabe, no caso das colisões elásticas e para velocidades não-relativísticas, termos de ordens superiores na Eq. (14.52) são desprezíveis, o segundo termo não permanece constante, sendo-se obrigado a concluir que o primeiro termo deve ser compensado pelas variações no segundo termo. *Todas as variações na energia interna de um corpo, em qualquer forma, devem, portanto, refletir-se na massa de repouso.*

Define-se, então, a energia relativística de um corpo em termos da massa e da velocidade pela fórmula

$$E = cp_0 = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 + \frac{3}{4} mu^4/c^2 + \dots \quad (14.53)$$

O primeiro termo na expansão, mc^2 , é chamado *energia de repouso*; este termo está presente mesmo quando a velocidade do corpo é igual a zero. Como se viu no último parágrafo, este termo deve conter todas as formas de energia interna do corpo, incluin-

do energia térmica, energia potencial interna de vários tipos e também energia rotacional, se existir. Em colisões inelásticas, a energia cinética pode ser convertida em alguma forma de energia interna, ou vice-versa, de forma que a energia de repouso de um corpo e, portanto, a sua massa devem variar. Em Física Clássica, a energia e a massa são conservadas separadamente. Em Mecânica Relativística, estas duas leis da conservação tornam-se uma única: a conservação da energia relativística total E . O segundo termo da expansão na Eq. (14.53) é a expressão clássica para a energia cinética. Os termos sucessivos são correções de ordem superiores que se anulam no limite $u \ll c$. Pode-se definir a energia cinética relativística como a energia de movimento de um corpo da seguinte maneira:

$$T = E - mc^2 = \frac{1}{2} mu^2 + \frac{3}{4} mu^4/c^2 + \dots \quad (14.54)$$

Será interessante calcular as variações de massa associadas às variações da energia interna. Um grama de água tem uma energia de repouso total $mc^2 = 9 \times 10^{13}$ J. Aquecida a água de 0°C a 100°C , a energia térmica total adicionada será de 418 J. O acréscimo correspondente de massa será de $418 \text{ J}/c^2 = 4,64 \times 10^{-12}$ g. Este acréscimo na massa é demasiadamente pequeno para ser medido mesmo pela balança mais sensível. A seguir, considere uma reação química comum. Se um grama de carvão for queimado com 2,7 g de oxigênio para fazer 3,7 g de CO_2 , a energia libertada será de 34 000 J. A massa total de CO_2 produzida será, portanto, menor do que a massa total de carvão mais oxigênio por uma diferença de $3,8 \times 10^{-10}$ g. Este valor está além da precisão que presentemente (1970) se pode atingir com as melhores balanças usadas em Química. A energia que pode ser liberada em reações nucleares é muito maior do que a liberada em reações químicas, por grama dos produtos reagentes. Se, por exemplo, um grama de urânio sofrer fissão, a energia liberada é de $7,6 \times 10^{10}$ J! Dividindo-se por c^2 , conclui-se que a massa dos produtos de fissão é menor do que a massa original de urânio por um fator de cerca de $0,8 \times 10^{-6}$ g. Esta é uma pequena fração de um grama, que, contudo, pode ser medida. Logo, a energia liberada em qualquer reação nuclear hipotética pode ser determinada pesando-se os constituintes e os produtos da reação e multiplicando-se a diferença de massa por c^2 .

Se p_μ for o 4-momento de uma partícula de massa m , pode-se formar um escalar efetuando o produto escalar como se segue:

$$(p_\mu, p_\mu) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = -m^2 c^2. \quad (14.55)$$

O fato de o valor deste escalar ser $-m^2 c^2$ pode ser verificado em qualquer sistema de coordenadas por cálculo direto, ou, mais rapidamente, observando-se que como se trata de um escalar, é possível calculá-lo num sistema de coordenadas em $u = 0$, e $\gamma = 1$. O 4-momento de uma partícula de massa m , como a 4-velocidade, é um 4-vetor tipo tempo.

Einstein verificou que, pela Teoria da Relatividade, é possível a existência de uma partícula que se desloca com a velocidade da luz e que tenha massa de repouso igual a zero. Se na Eq. (14.46) considera-se que $m \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow c$, mantendo o produto $\gamma mc^2 = E$ constante, obtém-se as relações

$$p_0 = E/c, \quad p = cE/c^2, \quad (14.56)$$

onde c é a velocidade da partícula e tem o módulo c . Uma partícula deste tipo é o *fóton*, associado a ondas eletromagnéticas. O fóton não tem massa de repouso e sua energia não é determinada por sua velocidade, que é sempre c , mas é dada de acordo com a hipótese de Einstein pela fórmula

$$E = \hbar\nu = \hbar\omega, (\hbar = h/2\pi), \quad (14.57)$$

onde h é a constante de Plank e $\nu = \omega/2\pi$ é a freqüência da onda eletromagnética. O produto escalar do 4-vetor momento-energia de um fóton por ele mesmo é igual a 0; pode-se chamá-lo apropriadamente 4-vetor do *tipo-luz*.

Na Teoria Quântica, existe uma equivalência entre ondas e partículas. Qualquer fenômeno pode ser descrito alternativamente em termos de partículas ou *quanta*. Reciprocamente, os fenômenos que envolvem partículas podem ser descritos alternativamente em termos de ondas associadas. As ondas associadas a partículas cujo 4-momento é p_μ têm um vetor de ondas k_μ dado pela fórmula

$$p_\mu = \hbar k_\mu. \quad (14.58)$$

Esta relação é a mesma em todos os sistemas de coordenadas iniciais, de tal forma que a hipótese quântica é compatível com o Postulado da Relatividade. Substituindo-se a Eq. (14.58) na Eq. (14.55) e usando-se a Eq. (14.30), obtém-se a relação de dispersão entre a freqüência e o número de ondas da onda associada à partícula de massa m :

$$\omega^2 - k^2 c^2 = m^2 c^4 / \hbar^2. \quad (14.59)$$

Estas relações formam a base do desenvolvimento da Mecânica Ondulatória.

14.3 TEORIA DAS COLISÕES

As expressões relativísticas para o momento e a energia de uma partícula, dadas pelas Eqs. (14.46), (14.53) e (14.54), já foram estudadas no Cap. 4 (Eqs. 4.73, 4.74 e 4.75), com o propósito de empregar as Leis da Conservação da Energia e do Momento quando se deseja obter as relações entre momentos, energias e ângulos de espalhamento, iniciais e finais, em colisões entre partículas cuja energia é elevada. Como foi evidenciado no Cap. 4, as equações da conservação (4.76), (4.77) e (4.78) podem ser úteis para partículas de alta energia usando-se as expressões relativísticas para o momento e a energia. Pode-se, agora, somar a estas três a seguinte equação para a energia Q , liberada no processo de colisão entre duas partículas de massas m_1 e m_2 antes da colisão e duas partículas de massas m_3 e m_4 após a colisão:

$$Q = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4) c^2. \quad (14.60)$$

Considere, agora, uma colisão de N partículas, incluindo talvez alguns fótons, cuja energia-momento total é

$$P_\mu = \sum_{j=1}^N p_{j\mu}, \quad (14.61)$$

Como todos os 4-vetores $p_{j\mu}$ são do tipo tempo ou do tipo luz, pode-se demonstrar (veja Probl. 9) que o 4-momento total P_μ é do tipo tempo. A única exceção é o caso em que todas as N partículas são fótons que se deslocam na mesma direção; neste caso, P_μ também é do tipo luz, podendo-se, portanto, definir um escalar M pela equação

$$(P_\mu, P_\mu) = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_0^2 = -M^2 c^2. \quad (14.62)$$

O escalar M é chamado *massa invariante* do sistema. “Invariante” refere-se ao fato de a expressão (14.62) ser invariante sob uma transformação de Lorentz. Se não existirem forças externas agindo sobre o sistema de partículas, então, de acordo com a Lei da Conservação, o momento P_μ e, portanto, M permanecerão constantes.

A massa invariante freqüentemente é útil no estudo das reações entre partículas de energia elevada. Suponha, por exemplo, que uma determinada reação que possa ser observada em uma câmara de bolha produza grande número de píons, que podem ser vistos deixando o local da reação. A massa de um píon é conhecida e o momento de qualquer um (carregado) pode ser medido, observando-se a sua direção de movimento e o raio de curvatura de sua trajetória num campo magnético; logo, pode-se medir o 4-momento p_μ de cada píon observado como resultado da reação. Suponha que se suspeite da existência de uma partícula cuja vida média seja muito curta para ser observada e que decaia em, por exemplo, três píons. A massa de tal partícula seria a massa invariante M calculada a partir da soma dos 4-momentos dos três píons em que ela decai. Portanto, pode-se verificar a hipótese agrupando os píons de cada reação em grupos de três, de todas as maneiras possíveis, e calculando, para cada grupo, a massa

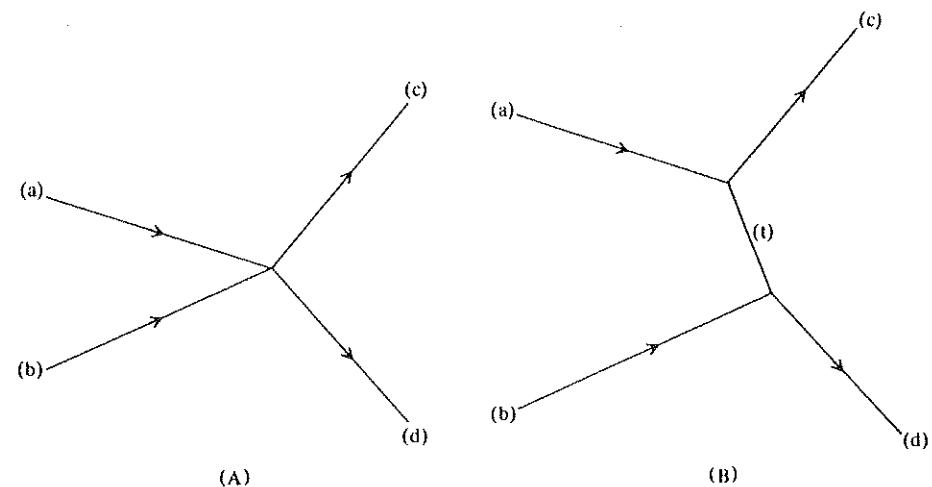


Fig. 14.1 Reação de duas partículas produzindo duas partículas no final.

invariante M . Faz-se isto em relação a grande número de reações observadas e estuda-se a distribuição dos valores calculados de M . Se a hipótese estiver correta, muitos dos valores de M se agruparão em torno de um valor particular que será, então, a massa da partícula hipotética pesquisada. Se a hipótese estiver errada, então se espera encontrar uma distribuição mais ou menos aleatória de valores de M .

Para considerar, agora, uma reação produzida pela colisão de duas partículas (a) e (b), produzindo duas partículas (c) e (d), como é mostrado esquematicamente na Fig. 14.1(A), pode-se caracterizar a reação fornecendo os 4-momentos $p_{a\mu}$ e $p_{b\mu}$ das partículas incidentes e $p_{c\mu}$ e $p_{d\mu}$ das partículas finais. A reação é, portanto, especificada pelos dezesseis componentes destes quatro 4-vetores. Se a mesma reação for descrita no sistema de coordenadas com asterisco, os 4-momentos transformar-se-ão de acordo com as equações de transformação de Lorentz (14.16). Os coeficientes das transformações de Lorentz $a_{\mu\nu}$ dependem de seis parâmetros, a saber, três componentes que especificam a velocidade do sistema de coordenadas com asterisco em relação ao sistema de coordenadas sem asterisco, e os três ângulos que especificam a orientação dos eixos com asterisco em relação aos eixos sem asterisco. Portanto, espera-se que os dezesseis componentes dos quatro 4-momentos possam ser especificados por dez parâmetros invariantes que caracterizam a reação de maneira independente do sistema de coordenadas, e seis parâmetros adicionais que dependem do sistema de coordenadas particular em que os 4-momentos são calculados. Pode-se, na realidade, construir imediatamente dez escalares a partir dos quatro 4-momentos, formando o produto escalar de cada um deles por ele mesmo ($p_{a\mu} p_{a\mu}$, $p_{b\mu} p_{b\mu}$) etc., e seis produtos entre pares ($p_{a\mu} p_{b\mu}$, $p_{b\mu} p_{a\mu}$) etc. A Lei da Conservação da Energia-Momento

$$p_{a\mu} + p_{b\mu} = p_{c\mu} + p_{d\mu} \quad (14.63)$$

fornecer quatro equações entre os componentes do momento, de forma que dos dez invariantes escalares somente seis podem ser independentes. Quatro deles podem ser tomados como massas das quatro partículas envolvidas na reação, obtidas pelos produtos escalares:

$$\begin{aligned} m_a^2 c^2 &= (E_a^2/c^2) - |\mathbf{p}_a|^2, \\ m_b^2 c^2 &= (E_b^2/c^2) - |\mathbf{p}_b|^2, \\ m_c^2 c^2 &= (E_c^2/c^2) - |\mathbf{p}_c|^2, \\ m_d^2 c^2 &= (E_d^2/c^2) - |\mathbf{p}_d|^2. \end{aligned} \quad (14.64)$$

Um quinto parâmetro conveniente é a massa invariante M do par inicial de partículas, que, de acordo com a Lei da Conservação, também é igual à massa invariante do par de partículas final, sendo dado por

$$\begin{aligned} M^2 c^2 &= -(p_{a\mu} + p_{b\mu}, p_{a\mu} + p_{b\mu}) = -(p_{c\mu} + p_{d\mu}, p_{c\mu} + p_{d\mu}) \\ &= (E_a + E_b)^2/c^2 - |\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b|^2. \end{aligned} \quad (14.65)$$

O sexto parâmetro invariante pode ser considerado convenientemente como o produto escalar:

$$S = (p_{a\mu} - p_{c\mu}, p_{a\mu} - p_{c\mu}) = (p_{d\mu} - p_{b\mu}, p_{d\mu} - p_{b\mu}), \quad (14.66)$$

onde a segunda igualdade segue-se da Lei da Conservação. Existe um sétimo produto escalar semelhante

$$T = (p_{a\mu} - p_{d\mu}, p_{a\mu} - p_{d\mu}) = (p_{c\mu} - p_{b\mu}, p_{c\mu} - p_{b\mu}), \quad (14.67)$$

que, no entanto, de acordo com os argumentos acima, não pode ser independente dos seis anteriores (veja o Probl. 12).

Se o escalar S (ou T) for negativo ou igual a zero, pode-se oferecer a seguinte interpretação interessante para S : imagine que a reação em questão acontece em dois estágios, como é mostrado na Fig. 14.1(B). A partícula (a), primeiro, decai em duas partículas (c) e (t). A partícula (t), então, reage com a partícula (b) para formar a partícula final (d). Torna-se evidente, a partir das Leis da Conservação, que a grandeza $p_{a\mu} - p_{c\mu} = p_{t\mu}$ é o 4-momento da partícula (t). O invariante $S = -M_t^2 c^2$ fornece, então, a massa da partícula (t). O 4-vetor $p_{a\mu} - p_{c\mu}$ é freqüentemente chamado *momen-*

to transferido na reação. O escalar S é às vezes chamado *quadrado do momento invariante transferido*.

Verificou-se, anteriormente, que, além das massas das quatro partículas, existem somente dois invariantes, M e S , associados à reação. Qualquer grandeza invariante associada à reação, por exemplo, a seção de choque que será definida adiante, deverá, portanto, ser expressada como função de M e S .

Verificou-se, no Cap. 4, que em Mecânica Clássica é conveniente, quando se trata de análises teóricas, usar o sistema de coordenadas do centro de massa. O mesmo será verdadeiro no estudo dos processos relativísticos, em que se define o *sistema de coordenadas do centro de massa*, como o sistema em que o 3-momento total P é igual a zero. Sendo P_μ do tipo espaço, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas em que P se anula (veja o Probl. 13). No sistema do centro de massa, o componente do tempo P_0 será Mc , onde M é a massa invariante. O leitor reconhecerá que como são os mesmos coeficientes $a_{\mu\nu}$ que aparecem nas equações de transformação (14.16) para os 4-vetores e na (14.6) para as coordenadas, o problema de encontrar o sistema do centro de massa é algebricamente idêntico ao da determinação de coordenadas no qual dois eventos, E^1 e E^2 (separados por um intervalo tipo-tempo), ocorrem no mesmo ponto do espaço em tempos diferentes. Usualmente as experiências são realizadas em sistemas de coordenadas em que uma das partículas iniciais, por exemplo, (b), esteja em repouso. Tal sistema de coordenadas é chamado *sistema de coordenadas do laboratório*.

A grandeza Mc^2 , onde M é a massa invariante de um grupo de partículas, é a energia total no sistema de coordenadas do centro de massa, sendo, portanto, chamada *energia do centro de massa*. Quando um grupo de partículas é produzido numa reação, a soma de suas energias de repouso ($\sum_i m_i c^2$) é sempre menor do que Mc^2 , exceto no caso em que todas as partículas estejam em repouso; então, a soma de suas energias de repouso será exatamente igual à energia do centro de massa. Calculando-se Mc^2 pa-

ra as partículas iniciais, no sistema de coordenadas do laboratório, pode-se determinar o *limiar* de uma reação em particular, quando a energia da partícula incidente é suficientemente grande, de forma que a energia do centro de massa torna-se igual à soma das energias de repouso das partículas que serão produzidas (veja o Probl. 14). Para partículas incidentes, cuja energia é menor do que o limiar, aquela reação particular não acontecerá.

Para definir a seção de choque para uma reação de maneira invariante relativisticamente, suponha que existam inicialmente dois grupos de partículas, (*a*) e (*b*), de momentos $p_{a\mu}$ e $p_{b\mu}$ que reagem de alguma maneira e cuja seção de choque se deseja definir. No momento, não se fará nenhuma suposição sobre a natureza da reação, exceto que se trata de uma reação, ou de um conjunto de reações, identificável e que no caso de se considerar transformações de coordenadas, far-se-á referência à mesma reação em todos os sistemas de coordenadas. A mesma reação parecerá em geral diferente, em diferentes sistemas de coordenadas — por exemplo ângulos de espalhamento podem variar quando se transformam as coordenadas —, de tal forma que qualquer parâmetro que seja necessário para especificar uma determinada reação será considerado como tendo sido transformado apropriadamente quando houve mudança de sistemas de coordenadas. Para simplificar, considere apenas sistemas de coordenadas em que as velocidades das partículas (*a*) e (*b*) são paralelas ou em que uma das duas velocidades é igual a zero. Suponha que as partículas (*a*) deslocam-se paralelamente ao eixo *x* em velocidade u_a e as partículas (*b*), em velocidade u_b . Chamando-se as partículas (*b*) de partículas-alvo, e imaginando, como se fez na Seç. 3.16, que cada partícula-alvo carregue consigo uma área de seção transversal σ , perpendicular à direção do seu movimento, define-se σ somente quando houver probabilidade de que a ocorrência da reação seja igual à probabilidade de uma partícula punctiforme (*a*) passar através da seção de choque σ associada à partícula-alvo (*b*). Pode-se observar que, como a área σ é perpendicular à direção do movimento da partícula (*b*), ela será independente da velocidade da partícula (*b*), sendo, portanto, a mesma em todos os sistemas de coordenadas do tipo considerado. Considere que as densidades de partículas de cada tipo, por unidade de volume, sejam n_a e n_b , respectivamente. Imaginando-se uma superfície paralela ao plano *yz* que se desloca em velocidade u_b (o sinal u_b indica a direção ao longo do eixo *x*), o número de partículas (*a*), por unidade de área, por unidade de tempo, que passam através desta superfície, será evidentemente $n_a|u_a - u_b|$. Portanto, o número de reações dN que ocorre no tempo dt , no volume dV , é dado por

$$dN/dt dV = |u_a - u_b| n_a n_b \sigma. \quad (14.68)$$

A densidade n_a é dada por

$$n_a = dN_a/dV, \quad (14.69)$$

onde dN_a é o número de partículas no volume dV . Mudando-se de sistema de coordenadas, mantendo a atenção em um grupo fixo de partículas do tipo (*a*), então o número dN_a será o mesmo no novo sistema de coordenadas, mas o volume dV se modificará. Considere um sistema de coordenadas em que as partículas do tipo (*a*) estão em repouso, e considerando-se que o volume ocupado por dN_a destas partículas neste sistema de

coordenadas em repouso seja dV_a , então o volume que eles ocupam em outro sistema de coordenadas qualquer será dado por

$$dV = dV_a/\gamma_a, \quad (14.70)$$

como se pode verificar, observando-se que as dimensões de dV na direção do movimento das partículas (*a*) são reduzidas por um fator γ_a , enquanto as dimensões perpendiculares a esta direção não são afetadas pelo movimento. Pode-se, portanto, escrever a densidade n_a em termos da densidade n_{0a} no sistema de coordenadas em que as partículas (*a*) estão em repouso:

$$n_a = \gamma_a n_{0a}. \quad (14.71)$$

A própria densidade n_{0a} é, evidentemente, um escalar, pois é definida (em qualquer sistema de coordenadas) como a densidade calculada em um sistema de coordenadas em que as partículas (*a*) estão em repouso.

Pode-se, agora, escrever a Eq. (14.68) na forma

$$dN/dt dV = \gamma_a \gamma_b |u_a - u_b| n_{0a} n_{0b} \sigma. \quad (14.72)$$

Pode ser mostrado (veja o Probl. 20) que o elemento de 4-volume dV é um invariante sob as transformações de Lorentz. Como dN é simplesmente o número de reações que ocorrem neste elemento de 4-volume, dN também é um escalar e, assim, o primeiro membro da Eq. (4.72) será um escalar. Como se argumentou antes, os três últimos fatores da Eq. (14.72) são escalares, a grandeza $\gamma_a \gamma_b |u_a - u_b|$ também deve ser invariante, sob transformações de Lorentz especiais do tipo (14.7). O leitor poderá demonstrar, através de cálculos diretos, que este é na realidade o caso (veja o Probl. 21). A Eq. (14.72) fornece uma definição da seção de choque invariante σ em um sistema de coordenadas qualquer em que u_a e u_b sejam paralelos (ou antiparalelos). A definição pode ser generalizada para um sistema de coordenadas arbitrário, mas não se apresentará este desenvolvimento (veja o Probl. 22).

Para verificar-se o quanto se pode aprender sobre seção de choque, usando-se apenas as suas propriedades de transformação, é preciso estar interessado numa reação em que uma partícula resultante, por exemplo, (*c*), aparece com momento p_c e energia E_c . Qualquer outra partícula resultante (*d*), (*e*) etc. só terá a energia permitida pelas Leis da Conservação. [Se existirem apenas duas partículas resultantes, (*c*) e (*d*), então $p_{d\mu}$ será determinado pelas Leis da Conservação, quando $p_{c\mu}$ é conhecido.] Como comumente p_a e E_a podem ter quaisquer valores num dado intervalo, o interesse se voltará para a seção de choque diferencial $d\sigma$, para produzir uma partícula (*c*) cuja energia e momento estejam dentro de um pequeno intervalo de valores. Se a massa m_c também puder variar em determinado intervalo, um caso incomum,⁸ pode-se escrever

$$d\sigma = F(M, \text{etc.}) dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} dE_c \quad (14.73)$$

para a seção de choque para produzir uma partícula (*c*) como momento p_c em pequeno intervalo $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz}$, e energia entre E_c e $E_c + dE_c$. Pode-se mostrar, então

⁸ Exceto para o caso de partículas cuja vida média é curta, de acordo com a Mecânica Quântica.

(Probl. 20), que o elemento de volume $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} dE_c$, no espaço energia-momento, é um 4-escalar. Como $d\sigma$ também é um escalar, a função F também o será, e, portanto, pode depender somente de invariantes associados ao processo (M e S no caso de um estado final de dois corpos). Para determinar a função $F(M, S, \dots)$, seria necessário estudar a teoria da ação particular. A maioria dos exemplos de interesse relaciona-se ao conhecimento de Mecânica Quântica.

Nos casos usuais em que a massa m_c é fixa, a energia e o momento estão relacionados pela Eq. (14.55):

$$p_c^2 c^2 + m_c^2 c^4 = E_c^2. \quad (14.74)$$

Pode-se, então, especificar somente o momento final p_c , e E_c estará determinado. Se o interesse for a seção de choque $d\sigma$ para produzir p_c no intervalo $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz}$, o elemento do espaço dos momentos $dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz}$ não é invariante. Para determinar as duas propriedades de transformação, substitui-se E_c pela massa m_c relacionada a ela pela Eq. (14.74), permitindo-se que, no momento, m_c possa assumir valores num intervalo. Então, determina-se, por derivação da Eq. (14.74), mantendo p_{cx} , p_{cy} e p_{cz} constantes, ou tomando o determinante jacobiano apropriado, que

$$dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} dE = dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} c^4 m_c dm_c / E_c. \quad (14.75)$$

Neste caso, a massa de repouso m_c , da mesma forma que dm_c , é um 4-escalar, como no primeiro membro da Eq. (14.75), concluindo-se assim que

$$dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} / E_c \text{ é invariante sob uma transformação de Lorentz.} \quad (14.76)$$

Embora se tenha derivado este resultado considerando-se o intervalo de valores de m_c , o resultado final será independente de dm_c e será válido não importando o intervalo de valores considerado; a partir disto, conclui-se que será válido para um m_c fixo. Portanto, escreve-se

$$d\sigma = F(M, \text{etc.}) dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} / E_c, \quad (14.77)$$

onde outra vez F deve ser um escalar. Como

$$dp_{cx} dp_{cy} dp_{cz} = p_c^2 dp_c d\Omega_c = [E_c^2 - m_c^2 c^4]^{1/2} E_c dE_c d\Omega_c / c^2, \quad (14.78)$$

pode-se escrever também a seção de choque para enviar as partículas (c) em um ângulo sólido $d\Omega_c$ com momento entre p_c e $p_c + dp_c$ ou com energia entre E_c e $E_c + dE_c$.

O leitor observador poderá verificar que, no caso em que só existem duas partículas finais de massas m_c e m_d , existirão somente oito componentes do 4-momento $p_{c\mu}$ e $p_{d\mu}$, as Leis da Conservação fornecem quatro relações entre elas, tendo-se duas equações, como as Eqs. (14.74), de forma que aparecerão em $d\sigma$ somente derivadas de duas variáveis. Conhecendo-se o intervalo angular $d\Omega_c$, dentro do qual a partícula (c) se desloca, o seu momento p_c e a energia E_c podem ser determinadas. Poder-se-ia, pelo menos em princípio, resolver este caso por um método semelhante ao do pará-

grafo anterior, através de determinação das propriedades de transformação de $d\Omega_c$ sob estas condições. As operações algébricas são relativamente complicadas e, por isso, não serão apresentadas.

14.4 AS EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS DO MOVIMENTO

Define-se a /3-/força, em Mecânica Relativística, como a taxa de variação do momento linear relativístico, de forma que a equação de movimento será

$$dp/dt = F. \quad (14.79)$$

Considerando-se a Eq. (14.79) como a definição da força F , então se devem determinar as equações de transformação corretas para a força, de forma que a Eq. (14.79) seja válida em todos os sistemas de coordenadas. Para fazer isto, escreve-se inicialmente uma equação equivalente em termos de 4-vetores. Considerando-se como variável independente o tempo próprio τ , medido por um relógio que se move com a partícula, então a equação do movimento pode ser escrita na forma de 4-vetor

$$dp_\mu/d\tau = \mathcal{F}_\mu, \quad (14.80)$$

onde as quatro grandezas \mathcal{F}_μ têm de ser um 4-vetor se esta equação tiver a mesma forma em todos os sistemas. Chama-se \mathcal{F}_μ a 4-força. De acordo com as Eqs. (14.46), (13.27), (14.53) e (13.25), verifica-se que as Eqs. (14.79) e (14.80) implicam a seguinte relação entre a 4-força e a força comum ou 3-força.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}, \\ \mathcal{F}_1 &= \gamma F_x, \quad \mathcal{F}_2 = \gamma F_y, \quad \mathcal{F}_3 = \gamma F_z. \end{aligned} \quad (14.81)$$

Derivando-se a Eq. (14.55) em relação a τ , verifica-se que \mathcal{F}_μ deve satisfazer a seguinte equação:

$$(p_\mu, \mathcal{F}_\mu) = (U_\mu, \mathcal{F}_\mu) = 0. \quad (14.82)$$

Na derivação da Eq. (14.82), supôs-se que a massa de repouso m é constante, assim como se supôs para obter a primeira das Eqs. (14.81). Nas colisões inelásticas, como se verificou anteriormente, a massa de repouso não permanece constante. Em tais casos, quando as forças fazem variar a energia interna e, consequentemente, a massa de um corpo, a Eq. (14.82) não mais será válida, $dE/dt \neq \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}$, e a primeira das Eqs. (14.80) pode ser independente das outras três. As Eqs. (14.79) deveriam, então, ser suplementadas por uma equação que fornecesse dE/dt ou dm/dt . Qualquer força que não modifique a massa de repouso da partícula sobre a qual atua e, em particular, a força eletromagnética, satisfaz a Eq. (14.82). Suponha que a Eq. (14.82) seja, em geral, válida exceto no caso de colisões inelásticas.

O leitor poderá verificar que os componentes \mathcal{F}_μ , dados pelas Eqs. (14.81), satisfazem realmente a Eq. (14.82). Observa-se que a forma 4-vetorial (14.80) das equa-

ções do movimento contêm quatro equações, das quais a quarta é (usualmente) redundante, pois pode ser obtida a partir das três primeiras, utilizando-se a Eq. (14.82). Embora a forma (14.80) das equações do movimento seja mais conveniente quando se está interessado em examinar a invariância relativística, a forma (14.79) será mais conveniente caso se queira escrever e resolver as equações do movimento em determinado sistema de coordenadas, pois elas são expressadas em termos da coordenada de tempo t . O tempo próprio τ não é uma variável muito conveniente, particularmente quando se trabalha com mais de uma partícula, pois cada uma carrega consigo seu tempo próprio particular.

Desde que se saiba transformar o 4-vetor \mathcal{F}_μ de um sistema de coordenadas inercial em outro, pode-se transformar a força F calculando simplesmente os componentes \mathcal{F}_μ^* , a partir das Eqs. (14.81), calculando \mathcal{F}_μ^* no novo sistema de coordenadas e usando as Eqs. (14.81) para determinar F^* no novo sistema de coordenadas. Seguindo-se este procedimento para o caso especial em que os eixos são paralelos e o movimento relativo se faz ao longo do eixo x , determinam-se

$$\begin{aligned} F_x^* &= F_x - \beta(1 - \beta u_x/c)^{-1} (u_y F_y + u_z F_z)/c, \\ F_y^* &= \gamma^{-1}(1 - \beta u_x/c)^{-1} F_y, \\ F_z^* &= \gamma^{-1}(1 - \beta u_x/c)^{-1} F_z, \end{aligned} \quad (14.83)$$

onde βc é a velocidade do sistema de coordenadas com asterisco em relação ao sistema de coordenadas sem asterisco, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ e u_x, u_y e u_z são os componentes da velocidade da partícula ou do ponto sobre o qual a força F age. Note que as equações de transformação para a 3-força envolve, além da velocidade do sistema de coordenadas, a velocidade da partícula sobre o qual a força está agindo.

14.5 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O problema relativamente difícil de encontrar as leis da força que se transformam de acordo com as Eqs. (14.83) será deixado para a próxima seção. Agora, suponha que a força F que age sobre uma partícula como função das coordenadas é conhecida e que se quer perguntar sob que circunstâncias é possível resolver o problema de determinar o movimento da partícula. Se a força for dada como função de t somente, $F(t)$, então as Eqs. (14.79) podem ser integradas diretamente e determina-se o momento linear $p(t)$. Uma vez determinado p , pode-se resolver as Eqs. (14.46) para a velocidade u . Faz-se isso mais facilmente determinando-se inicialmente o fator γ por meio da seguinte relação, que é obtida a partir da Eq. (14.46):

$$p^2/m^2c^2 = \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1. \quad (14.84)$$

Quando $\gamma(t)$ é conhecido, a velocidade u é dada imediatamente por

$$u = dr/dt = p/m\gamma. \quad (14.85)$$

Integra-se esta equação para determinar a posição $r(t)$.

Como exemplo, considere uma partícula sob a ação de uma força constante F , que será considerada ter a direção x . Se a partícula partir do repouso em $t = 0$, o momento linear em qualquer tempo t será dado por

$$p = Ft. \quad (14.86)$$

Substituindo-se na Eq. (14.84) e resolvendo para

$$\gamma = [1 + (Ft/mc)^2]^{1/2}. \quad (14.87)$$

tem-se, agora, que integrar a equação

$$dx/dt = c(Ft/mc)[1 + (Ft/mc)^2]^{-1/2}, \quad (14.88)$$

para obter

$$x = x_0 + (mc^2/F)[1 + (Ft/mc)^2]^{1/2} - mc^2/F. \quad (14.89)$$

Verifica-se que $u \rightarrow c$, quando $t \rightarrow \infty$, como era de se esperar.

Se a força F derivar de uma função energia potencial $V(r)$, então a primeira das Eqs. (14.81), que pode ser obtida a partir das Eqs. (14.79), pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = -\mathbf{u} \cdot \nabla V, \quad (14.90)$$

onde se escreve $mc^2\gamma$ no lugar de E , para reservar este último símbolo para a energia total. Como $u = dr/dt$, e levando-se em conta a definição (3.107) do gradiente, a Eq. (14.90) torna-se

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma + V) = 0, \quad (14.91)$$

ou

$$mc^2\gamma + V = E, \quad (14.92)$$

onde E é uma constante chamada *energia total*.

Resolve-se a Eq. (14.92) para o módulo da velocidade,

$$u = c[1 - m^2c^4(E - V)^{-2}]^{1/2}. \quad (14.93)$$

Esta equação fornece a velocidade como função da posição. Se o movimento for unidimensional, de forma que $u = dx/dt$, então, em princípio, pode-se integrar a Eq. (14.93) para obter o deslocamento $x(t)$. Infelizmente, existem poucas funções potenciais $V(x)$ para as quais as operações algébricas necessárias podem ser realizadas com facilidade. De qualquer forma, a Eq. (14.92), ou a (14.93), pode ser usada para descrever qualitativamente o movimento.

Quando o movimento é 3-dimensional, pode-se, como no Cap. 3, definir o momento angular, em relação a uma origem, como o vetor

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (14.94)$$

e o torque como

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (14.95)$$

Assim, mostra-se facilmente a partir da Eq. (14.79) que

$$\frac{dL}{dt} = N. \quad (14.96)$$

Para uma força central, pode-se mais uma vez demonstrar que o momento angular L é uma constante de movimento. O problema de uma força central, em princípio, pode ser resolvido seguindo-se o encaminhamento descrito na Seç. 3.13 para o caso clássico, mas a solução, na maioria dos casos, também envolve dificuldades algébricas muito grandes por causa da forma mais complicada da Eq. (14.91).

Considere uma partícula submetida à ação de uma força conservativa F , que deriva de uma energia potencial $V(r)$. Use como variável independente o tempo τ medido por um relógio que se desloca junto com a partícula. Com esta variável independente, a "velocidade" será exatamente a parte espacial da 4-velocidade

$$\frac{dx_i}{dt} = U_i \quad (14.97)$$

A "aceleração", de acordo com as Eqs. (14.45) e (14.79), será dada por

$$m \frac{d^2x_i}{dt^2} = \gamma F_i = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (14.98)$$

Substituindo-se na relação acima γ obtido na Eq. (14.92), verifica-se que se pode escrevê-la sob a seguinte forma:

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = \nabla \frac{(E-V)^2}{2mc^2}. \quad (14.99)$$

Esta relação tem a mesma forma que a equação de movimento de Newton para uma partícula cuja energia potencial é $-(E-V)^2/2mc^2$. Para tornar mais clara a conexão com as leis clássicas, faz-se

$$E = E_c + mc^2, \quad (14.100)$$

de forma que E_c seja a energia cinética mais a energia potencial total, onde a constante para energia de repouso foi omitida. Note, então, que

$$\nabla \frac{(E-V)^2}{2mc^2} = -\nabla \left[V - \frac{(E_c-V)^2}{2mc^2} \right],$$

de forma que se fazendo

$$V_{rel} = V - \frac{(E_c-V)^2}{2mc^2}, \quad (14.101)$$

a Eq. (14.99) assume a forma clássica

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla V_{rel}. \quad (14.102)$$

Este resultado demonstra o teorema enunciado no Probl. 57 do Cap. 3, que a órbita dada pela Teoria Especial da Relatividade para uma partícula que se desloca sob energia potencial $V(r)$ é a mesma órbita que a partícula seguiria de acordo com a Mecânica Newtoniana se a energia potencial fosse V_{rel} . O tempo no problema clássico equivalente não é, no entanto, a coordenada de tempo, mas o tempo próprio em relação à partícula. Note também que a energia potencial equivalente V_{rel} depende da energia E_c .

Mais tarde verificar-se-á que, na Teoria da Relatividade, a força eletromagnética sobre uma partícula carregada também é dada pela familiar fórmula de Lorentz para a força (3.283). A equação do movimento relativístico para uma partícula carregada em um campo eletromagnético é, portanto,

$$\frac{dp}{dt} = qE + \frac{q}{c} u \times B. \quad (14.103)$$

Como a força magnética é perpendicular à velocidade u , não realiza trabalho, e a taxa de variação da energia mecânica da partícula é outra vez dada pela fórmula

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = qu \cdot E. \quad (14.104)$$

No caso de um campo eletromagnético, o campo elétrico deriva de um potencial, como pode ser verificado na Eq. (3.286):

$$E = -\nabla \phi. \quad (14.105)$$

Neste caso, a energia

$$\gamma mc^2 + q\phi = E \quad (14.106)$$

é uma constante do movimento. Se o campo elétrico for igual a zero, então, de acordo com a Eq. (14.104), a energia mecânica será constante e o fator $m\gamma$ em p pode ser retirado da derivação na Eq. (14.103), que se torna

$$m\gamma \frac{du}{dt} = \frac{q}{c} u \times B. \quad (14.107)$$

Esta equação é idêntica à clássica do movimento em campo magnético, exceto pelo fato de a massa de repouso m ser substituída pela constante $m\gamma$, chamada, às vezes, "massa transversal". O movimento relativístico de uma partícula carregada em campo magnético é, portanto, igual a seu movimento clássico, exceto por sua massa que é acrescida do fator γ . Em particular, de acordo com os resultados obtidos na Seç. 3.17, uma partícula carregada movendo-se em um campo magnético constante e uniforme se desloca em círculo de raio

$$r = \frac{cm\gamma u}{qB} = \frac{cp}{qB}, \quad (14.108)$$

com freqüência

$$v = \frac{qB}{2\pi m\gamma c}, \quad (14.109)$$

de acordo com as Eqs. (3.295) e (3.299).

Como exemplo final, generaliza-se a apresentação da Seç. 4.5, de forma a obter a equação do movimento no caso em que o foguete, ou os gases expelidos, ou ambos podem deslocar-se em velocidades relativísticas. Procede-se como na Seç. 4.5, escrevendo uma equação que expresse a conservação do momento do sistema constituído do foguete mais os gases de exaustão durante um intervalo de tempo muito pequeno dt . O momento do foguete será

$$p = M\gamma u, \quad (14.110)$$

onde u é a velocidade do foguete, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ e M é a massa de repouso do foguete, a qual varia com o tempo, enquanto os gases são emitidos pelo motor. Se durante o tempo dt a massa de repouso do material emitido for dM_e e a velocidade, u_e em relação a qualquer sistema de coordenadas, então o momento destes gases de exaustão será $dM_e \gamma_e u_e$. Se, além disso, existir uma força externa F agindo sobre o foguete, então a equação de variação do momento durante o tempo dt será

$$dp + dM_e \gamma_e u_e = Fdt.$$

A taxa de variação com o tempo do momento do foguete, portanto, será dada por

$$\frac{dp}{dt} = F - \frac{dM_e}{dt} \gamma_e u_e. \quad (14.111)$$

Como a velocidade de exaustão e a taxa de exaustão de massa são usualmente conhecidas em relação ao próprio foguete, será conveniente expressar o segundo termo em relação às grandezas medidas no sistema de coordenadas em que o foguete está momentaneamente em repouso, o que se realiza mais convenientemente quando se escreve a equação em notação 4-vetorial. Portanto, multiplicando a equação por γ , tem-se

$$\frac{dp_i}{dt} = \mathcal{F}_i - \frac{dM_e}{dt} U_{ei}, \quad (14.112)$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio em relação ao foguete e \mathcal{F}_i é dado pela Eq. (14.81). Como a massa de repouso dM_e é um escalar, a equação 4-vetorial correspondente será evidentemente

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu - \frac{dM_e}{d\tau} U_{e\mu}. \quad (14.113)$$

A equação adicional para $\mu = 0$ será

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \mathcal{F}_0 - \frac{dM_e}{d\tau} \gamma_e c. \quad (14.114)$$

Multiplicando-se por c/γ , obtém-se a equação da energia

$$\frac{dE}{dt} + \gamma_e \frac{dM_e}{dt} c^2 = u \cdot F, \quad (14.115)$$

que estabelece corretamente que a taxa de crescimento da energia do foguete mais a taxa com que a energia está aparecendo nos gases de exaustão deverá ser igual à taxa com que a energia está sendo suprida pela força externa, se existir.

Considerando-se o último termo do segundo membro da Eq. (14.113) como uma força exercida sobre o foguete, observa-se que ela não satisfaz a Eq. (14.82), mas que, ao contrário,

$$\left(p_\mu, -\frac{dM_e}{d\tau} U_{e\mu} \right) = -M \frac{dM_e}{d\tau} (U_\mu, U_{e\mu}), \quad (14.116)$$

que, em geral, não é igual a zero. A massa de repouso do foguete não é constante, o que se reflete no fato de o primeiro membro da Eq. (14.113) não satisfazer a Eq. (14.82). Derivando-se a Eq. (14.55) para o presente caso, obtém-se a seguinte relação útil:

$$\left(p_\mu, \frac{dp_\mu}{d\tau} \right) = -Mc^2 \frac{dM}{d\tau} = -M \frac{dM_e}{d\tau} (U_\mu, U_{e\mu}), \quad (14.117)$$

em que o último membro pode ser obtido a partir das Eqs. (14.113) e (13.116), admitindo-se que a 4-força externa \mathcal{F}_μ satisfaça a Eq. (14.82). O produto escalar $(U_\mu, U_{e\mu})$ tem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas, mas é calculado mais facilmente no sistema em que o foguete se encontra momentaneamente em repouso, de forma que $U_0 = c$, $U_i = 0$. O resultado será

$$(U_\mu, U_{e\mu}) = -\Gamma c^2, \quad (14.118)$$

onde

$$\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \quad (14.119)$$

e onde V é a velocidade da exaustão em relação ao foguete. Assim, obteve-se a seguinte relação entre a taxa de variação da massa de repouso do foguete e a taxa com que a massa de repouso aparece na exaustão:

$$\frac{dM}{d\tau} = -\Gamma \frac{dM_e}{d\tau}. \quad (14.120)$$

Multiplicando-se a relação acima por c^2 , verifica-se que esta equação afirma simplesmente que, no sistema de coordenadas em que o foguete se encontra momentaneamente em repouso, a energia cinética mais a de repouso que aparece na exaustão é igual à taxa com que a energia de repouso do foguete decresce.

Em analogia com o procedimento no caso do foguete não-relativístico, faz-se $p_\mu = MU_\mu$ na Eq. (14.113) e transpõe-se para o segundo membro o termo envolvendo $dM/d\tau$:

$$M \frac{dU_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu + \frac{dM}{d\tau} \left(\frac{U_{e\mu}}{\Gamma} - U_\mu \right), \quad (14.121)$$

onde se usa a Eq. (14.120). Para expressar o segundo termo do segundo membro em relação às velocidades relacionadas ao sistema de coordenadas em que o foguete está

momentaneamente em repouso, usa-se o superíndice ‘0’ para identificar as grandezas no sistema de coordenadas em repouso no foguete, de forma que $U_i^0 = 0$, $U_0^0 = c$, $U_{ei}^0 = \Gamma V_i$, $U_{e0}^0 = \Gamma c$. Se $a_{\mu\nu}$ forem os coeficientes da transformação do sistema em repouso para o sistema em que a 4-velocidade do foguete for U_μ ,

$$U_{e\mu} = \Sigma_v a_{\mu v} U_v^0 = \Gamma a_{\mu 0} c + \Gamma \Sigma_i a_{\mu i} V_i. \quad (14.122)$$

Os coeficientes $a_{\mu 0}$ podem ser calculados a partir da equação

$$U_\mu = \Sigma_v a_{\mu v} U_v^0 = a_{\mu 0} c. \quad (14.123)$$

Substituindo na equação anterior, obtém-se

$$U_{e\mu} = \Gamma U_\mu + \Gamma \Sigma_i a_{\mu i} V_i. \quad (14.124)$$

Como Γ é um escalar (será a mesma constante não importando qual o sistema de coordenadas usado), o primeiro termo do segundo membro da Eq. (14.124) é um 4-vetor e, portanto, o segundo termo também deverá ser, pois o primeiro membro é um 4-vetor. Conclui-se, então, que as quatro grandezas $\Sigma_i a_{\mu i} V_i$ para $\mu = 0, 1, 2$ e 3 são os componentes de um 4-vetor. Substitui-se na Eq. (14.121) para obter a equação do movimento para o foguete na forma

$$M \frac{dU_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu + \mathcal{T}_\mu, \quad (14.125)$$

onde o 4-vetor \mathcal{F}_μ , que se poderá chamar *4-impulso* do motor do foguete, é dado por

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{dM}{d\tau} \Sigma_i a_{\mu i} V_i. \quad (14.126)$$

Considerando-se o eixo x na direção do movimento do foguete de forma que os coeficientes $a_{\mu i}$ sejam dados pela Eq. (14.7), então os componentes do 4-impulso serão

$$\mathcal{T}_0 = \beta \gamma V_x \frac{dM}{d\tau}, \quad \mathcal{T}_1 = \gamma V_x \frac{dM}{d\tau}, \quad \mathcal{T}_2 = V_y \frac{dM}{d\tau}, \quad \mathcal{T}_3 = V_z \frac{dM}{d\tau}. \quad (14.127)$$

Será interessante notar que o 4-impulso \mathcal{F}_μ não satisfaz a Eq. (14.82), como se pode verificar facilmente calculando o produto escalar (U_μ, \mathcal{F}_μ) no referencial de repouso no foguete.

Porque \mathcal{F}_μ satisfaz a Eq. (14.82), também se pode escrever a Eq. (14.125) em termos da coordenada de tempo na forma

$$M \frac{d(\gamma u)}{dt} = F + T, \quad (14.128)$$

onde o 3-impulso T é dado por

$$T_x = V_x \frac{dM}{d\tau}, \quad T_y = \frac{V_y}{\gamma} \frac{dM}{d\tau}, \quad T_z = \frac{V_z}{\gamma} \frac{dM}{d\tau}. \quad (14.129)$$

Se a velocidade u do foguete for muito menor do que c , estas relações reduzem-se à expressão não-relativística dada pelo primeiro termo do segundo membro da Eq. (4.54), quando se observa que u na Eq. (4.54) corresponde a V na presente equação. Se o motor do foguete for mantido em repouso em uma bancada de testes, o primeiro membro da Eq. (14.128) se anula, verificando-se que o impulso T será exatamente o negativo da força necessária para manter o motor em repouso. Obtém-se simplesmente o impulso em um sistema de coordenadas em que o motor do foguete está em movimento pela transformação, a partir de um sistema de coordenadas em que o motor está em repouso, usando-se a Lei da Transformação (14.83) para o impulso. [Observe que a Lei da Transformação (14.83) para a força baseia-se na relação (14.81) entre a 3-força e a 4-força, o que significa que a 4-força satisfaz a Eq. (14.82).]

Para resolver-se, agora, a Eq. (14.128) para o caso especial de um foguete acelerando a partir do repouso, sem que nenhuma outra força aja sobre ele ($F = 0$), toma-se o eixo x na direção da aceleração, de forma que o componente x da Eq. (14.128) poderá ser escrito como

$$M \frac{d(\gamma u)}{dt} = -\gamma V \frac{dM}{dt},$$

onde $dM/dt = \gamma dM/dt$ e $V_x = -V$. Usando-se a relação (14.84), reescreve-se a equação acima na forma

$$M \frac{d(\beta \gamma)}{dt} = -[1 + (\beta \gamma)^2]^{1/2} B \frac{dM}{dt}, \quad (14.130)$$

onde

$$B = V/c.$$

A Eq. (14.130) pode ser integrada imediatamente, considerando-se que $\beta = 0, M = M_0$ em $t = 0$, obtendo-se

$$\beta \gamma + [1 + (\beta \gamma)^2]^{1/2} = (M_0/M)^B,$$

cuja solução será

$$\beta \gamma = \frac{1}{2} [(M_0/M)^B - (M_0/M)^{-B}]. \quad (14.131)$$

No limite não-relativístico, pode-se escrever

$$(M_0/M)^B = e^{B \ln(M_0/M)} \doteq 1 + B \ln(M_0/M) + \dots,$$

de forma que a Eq. (14.131) torna-se no limite

$$u \doteq V \ln(M_0/M), \quad \text{se } V \ln(M_0/M) \ll c, u \ll c, \quad (14.132)$$

em concordância com o resultado clássico (4.56). No caso relativístico extremo $(M_0/M)^B \gg 1$, tem-se

$$\gamma \doteq \frac{1}{2} (M_0/M)^{B/2}, \quad \text{se } (M_0/M)^{B/2} \gg 1. \quad (14.133)$$

Para alcançar uma velocidade relativística, por exemplo, $\gamma = 5$, mesmo em velocidade de exaustão $V = c$, será necessário a exaustão de 90% da massa inicial do foguete na forma de fótons ou partículas de alta energia.

14.6 LEIS RELATIVÍSTICAS DA FORÇA. ELETRODINÂMICA

As dificuldades existentes na Teoria da Relatividade aparecem quando se tenta formular uma lei da força para a interação entre duas partículas separadas uma da outra. Ao se tentar formular a Lei da Gravitação, de Newton, por exemplo, de maneira invariante relativisticamente, defronta-se com o problema de que a distância entre dois corpos em interação tem valores diferentes em sistemas de coordenadas diferentes. Se a distância entre os dois corpos variar, aparecerá uma dificuldade mais fundamental devido à relatividade da simultaneidade. Supõe-se que a força sobre a partícula (a) no tempo t depende das posições relativas das partículas (a) e (b) no mesmo instante t . Se as duas partículas estiverem separadas por uma distância qualquer, então o momento ou evento na partícula (b) que é simultâneo com o evento na partícula (a) no tempo t será diferente em sistemas de coordenadas diferentes, todavia a força dependerá, supostamente, da distância entre estes dois eventos! A dificuldade existirá, mesmo com a terceira lei, de Newton, que afirma que a força $F_{a \rightarrow b}$ exercida pela partícula (a) sobre a (b) é igual e oposta à força $F_{b \rightarrow a}$ exercida pela partícula (b) sobre a (a). Se as forças variarem com o tempo, então a terceira lei estabelece presumivelmente que estas forças são iguais e opostas caso sejam medidas no mesmo instante. No entanto, se os dois corpos estiverem muito afastados, o tempo na partícula (b), que é simultâneo com um dado tempo na partícula (a), dependerá do sistema de coordenadas escolhido, e a terceira lei não satisfará o Postulado da Relatividade.

Esta dificuldade não aparece no caso de forças de contato, onde as duas partículas ou corpos localizam-se no mesmo ponto do espaço. Neste caso, as forças de ação e de reação ocorrem no mesmo ponto, não havendo problema com a sua simultaneidade. A terceira lei de Newton, aplicada a casos em que a ação e a reação ocorrem no mesmo ponto, satisfaaz o Postulado da Relatividade. Como exemplo, considere a pressão exercida em um fluido, já definida na Seç. 5.11 como a força, por unidade de área, no fluido. Inicialmente, escolhe-se um sistema de coordenadas, identificado pelo superíndice "0", onde um ponto particular do fluido está em repouso. Considere, agora, um pequeno elemento de superfície com área dA^0 no fluido. Define-se um vetor elemento de superfície dA^0 cujo módulo seja a área do elemento de superfície e cuja direção seja perpendicular ao elemento de superfície (veja Fig. 14.2). Pode-se simplificar a discussão, sem perder a generalização, supondo-se que o vetor dA^0 esteja no plano x^0z^0 , fazendo um ângulo θ^0 com o eixo x^0 . A força exercida pelo fluido na parte detrás do elemento de superfície dA^0 sobre o fluido na parte da frente é

$$F^0 = p^0 dA^0, \quad (14.134)$$

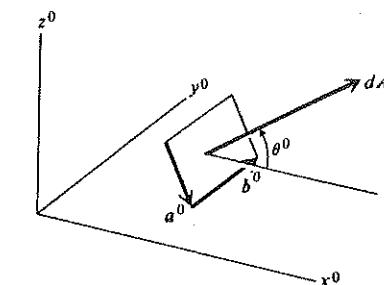


Fig. 14.2 Elemento de área de um fluido.

de acordo com a definição de pressão p^0 . Os componentes da força nas três direções são

$$\begin{aligned} F_x^0 &= p^0 \cos \theta^0 dA^0 = p^0 dA_x^0, \\ F_y^0 &= 0, \\ F_z^0 &= p^0 \sin \theta^0 dA^0 = p^0 dA_y^0. \end{aligned} \quad (14.135)$$

Transformam-se as equações acima para um sistema de coordenadas do laboratório, em que o fluido se move ao longo do eixo x em velocidade $u = \beta c$. A velocidade do sistema de coordenadas do laboratório, em relação ao sistema em repouso, será então $-\beta c$ na direção x . Pode-se usar as Eqs. (14.83) para determinar os componentes da força no novo sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x^0 = p^0 dA_x^0, \\ F_y &= \gamma^{-1} F_y^0 = 0, \\ F_z &= \gamma^{-1} F_z^0 = p^0 \gamma^{-1} dA_y^0, \end{aligned} \quad (14.136)$$

onde se usa o fato de a velocidade do fluido sobre o qual a força age ser igual a zero no sistema em repouso.

Para determinar a expressão para o elemento de área dA no sistema do laboratório, admite-se que o elemento tem a forma de um paralelogramo limitado por um vetor a no plano xz e um vetor b na direção y (Fig. 14.2) de forma que

$$dA = a \times b. \quad (14.137)$$

Como b é perpendicular à direção do movimento, terá o mesmo comprimento em ambos os sistemas de coordenadas:

$$b = b^0 = b^0 \hat{y}. \quad (14.138)$$

Considere que o vetor a seja dado na forma

$$a = a_x \hat{x} + a_z \hat{z}. \quad (14.139)$$

Então, devido à contração de Lorentz na direção x , tem-se

$$a_x = \gamma^{-1} a_x^0, \quad a_z = a_z^0. \quad (14.140)$$

Pode-se calcular o vetor

$$\begin{aligned} dA &= (a_x \hat{x} + a_z \hat{z}) \times b^0 \hat{y} \\ &= b^0 a_x^0 \gamma^{-1} \hat{z} - b^0 a_z^0 \hat{x} \\ &= dA_x^0 \hat{x} + \gamma^{-1} dA_z^0 \hat{z}. \end{aligned} \quad (14.141)$$

Isto fornece a Lei da Transformação para o elemento de área:

$$dA_x = dA_x^0, \quad dA_y = \gamma^{-1} dA_y^0, \quad dA_z = \gamma^{-1} dA_z^0, \quad (14.142)$$

onde se inclui para completar o componente y , que é igual a zero no presente caso. No sistema de coordenadas do laboratório, a pressão será definida pela equação

$$F = pdA. \quad (14.143)$$

Substituindo-se o primeiro membro da equação acima pelo resultado apresentado na Eq. (14.136) e o segundo membro pelo resultado da Eq. (14.142), verifica-se que a força é dada corretamente no sistema de coordenadas do laboratório, fazendo-se

$$p = p^0, \quad (14.144)$$

a partir do qual se conclui que a pressão no fluido é um 4-escalar, satisfazendo a terceira lei de Newton, pois a força de reação é obtida, quando se escolhe o elemento de área oposto $-dA$. A Lei da Força, neste caso, será a equação de estado do fluido, que expressa a pressão p^0 em termos de variáveis apropriadas, por exemplo, a densidade e a temperatura do fluido no sistema de coordenadas em que o fluido está em repouso.

No caso de forças exercidas entre corpos separados por uma distância qualquer, a maneira mais satisfatória de escrever a Lei da Força satisfazendo os postulados da Relatividade parece ser introduzindo um campo de força que se propague de um corpo para outro. Desta forma, as dificuldades na especificação de uma força que age diretamente entre os corpos separados por uma distância entre eles podem ser evitadas. As Leis da Conservação são satisfeitas desde que se permita que o próprio campo transporte energia e momento. Nesse caso, a terceira lei de Newton não mais será necessária. Como foi evidenciado na Seç. 4.4, estas considerações também são verdadeiras em Física Clássica em relação a um campo de força que se propaga entre corpos com velocidade finita. Embora a Lei da Gravitação, de Newton, seja a mais simples lei sobre forças fundamentais na Física Clássica, a sua generalização relativística apresenta dificuldades sérias (veja, por exemplo, o Probl. 40). A Teoria Geral da Relatividade, de Einstein, é uma Teoria da Gravitação Relativística; o seu desenvolvimento matemático encontra-se, no entanto, além do nível deste capítulo. A formulação de Maxwell das leis da Eletrodinâmica foram apresentadas já em forma invariante para transformações de Lorentz, como se verificará a seguir.

Será conveniente expressar o campo elétrico e magnético em termos dos potenciais vetor e escalar. Afirma-se, sem, no entanto, demonstrar, que os campos elétricos

e magnéticos podem ser escritos da seguinte maneira em termos de um *potencial escalar* ϕ e um *potencial vetor* A :⁹

$$\begin{aligned} E &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \\ \left[E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right], \\ B &= \nabla \times A. \end{aligned} \quad (14.145)$$

Usam-se as unidades gaussianas na discussão da Eletrodinâmica, pois elas mostram mais claramente a estrutura das equações, a partir do ponto de vista da Teoria da Relatividade. Quando se usam unidades gaussianas, a única constante fundamental que aparece nas equações da Eletrodinâmica é a velocidade da luz, c . Como auxílio para o leitor, transformam-se as equações da discussão em unidades do sistema SI, incluindo entre colchetes a forma em unidades do SI, quando houver diferença nos dois sistemas de unidades.

Acredita-se que o 3-vetor A e o 3-escalar ϕ , juntos, formem os componentes de 4-vetor. Para verificar esta hipótese, usam-se as equações da Dinâmica para os potenciais escalar e vetor, que serão citadas sem demonstração:

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho, \\ \nabla^2A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j, \\ \left[\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \right], \\ \left[\nabla^2A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2A}{\partial t^2} = -\mu_0 j \right], \end{aligned} \quad (14.146)$$

onde ρ é a densidade de carga elétrica total, por unidade de volume, e j é a densidade de corrente elétrica total, definida através da exigência de $\hat{n} \cdot j$ ser a carga total por segundo, por unidade de área, atravessando uma superfície na direção do vetor unitário \hat{n} . Para que as Eqs. (14.146) sejam válidas, também se exige que a seguinte equação, denominada *condição de Lorentz*, seja satisfeita:

⁹ Não será necessário conhecer Eletrodinâmica para acompanhar os argumentos seguintes. O leitor que desejar entender mais profundamente, deve consultar qualquer texto sobre eletricidade e magnetismo de nível intermediário, por exemplo Panofsky e Phillips, *Classical electricity and magnetism*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, 1955 (este livro usa unidades do SI) ou J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, New York, John Wiley and Sons, 1962 (este sistema usa unidades gaussianas).

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (14.147)$$

$$\left[\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \right].$$

Embora se tenham introduzido os resultados da Eletrodinâmica sem demonstração, o leitor que estiver familiarizado com as equações de Maxwell reconhecerá, com auxílio das Eqs. (14.145), que os campos elétricos e magnéticos satisfazem as duas equações homogêneas de Maxwell:

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (14.148)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (14.149)$$

$$\left[\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \right],$$

e que, com auxílio das Eqs. (14.146) e (14.147), obtém-se as outras duas equações de Maxwell

$$\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \quad (14.150)$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho, \quad (14.151)$$

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 j \\ \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right].$$

Pode-se verificar, a partir das Eqs. (14.146), que, para determinar a maneira pela qual A e ϕ se transformam entre sistemas de coordenadas em movimento, será preciso determinar como as grandezas j e ρ se transformam. Para fazer isto, imagine uma situação, em qualquer ponto do espaço, em que todas as cargas se movam com a mesma velocidade. Para um dado ponto, pode-se escolher um sistema de coordenadas local, em repouso, e que as cargas, neste ponto particular, também estejam em repouso. Identificam-se as grandezas no referencial local em repouso pelo superíndice ‘0’. A densidade de carga ρ^0 é dada pela equação

$$\rho^0 = dQ^0/dV^0, \quad (14.152)$$

onde dQ^0 é a carga total em um pequeno volume dV^0 . Retorna-se a um sistema de coordenadas de interesse em que as cargas no ponto em questão movem-se em velocidade u . A densidade de carga é, então, dada pela equação

$$\rho = dQ/dV, \quad (14.153)$$

onde dQ é a carga total em um elemento de volume dV . Suponha que o elemento de volume dV se move com a velocidade das cargas que ele encerra, de forma a continuar contendo as mesmas cargas. Como as cargas elétricas aparecem em múltiplos de uma unidade fundamental e (considerando que a carga do elétron seja $-e$), a carga no elemento de volume dV poderá, em princípio, ser obtida pela simples contagem do número de cargas unitárias encerrada dentro dele. Como o elemento de volume dV move-se solidário com as cargas e contém sempre as mesmas cargas, elas poderão ser contadas em qualquer ordem e em qualquer período de tempo escolhido. O problema de simultaneidade não aparecerá na contagem das cargas e , portanto, o resultado deverá ser o mesmo em todos os sistemas de coordenadas:

$$dQ = dQ^0, \quad (14.154)$$

de forma que a carga elétrica em um volume que se desloque com a carga é um 4-scalar. Devido à contração de Lorentz na direção do movimento, uma das três dimensões do volume dV será contraída por um fator γ , tendo-se, portanto,

$$dV = \gamma^{-1} dV^0. \quad (14.155)$$

Conclui-se, a partir das quatro equações anteriores, que

$$\rho = \gamma \rho^0. \quad (14.156)$$

A densidade de corrente no caso presente é dada por

$$j = \rho u = \gamma u \rho^0. \quad (14.157)$$

O leitor deve convencer-se de que esta expressão está correta pois $\hat{n} \cdot j$ é a expressão apropriada para a carga total, por segundo, por unidade de área, escoando através de uma superfície perpendicular a \hat{n} (veja, por exemplo, a discussão da Fig. 8.6). Relembrando as relações (14.26) para a 4-velocidade, verifica-se, então, que se pode definir um 4-vetor, a 4-corrente

$$J_\mu = \rho^0 U_\mu, \quad (14.158)$$

cujas partes espacial e temporal são

$$J_i = j_i, \quad J_0 = \rho c. \quad (14.159)$$

Portanto, as densidades ρc e j transformam-se como os componentes de um 4-vetor. Embora o desenvolvimento acima tenha sido usado para o caso em que as cargas, em qualquer ponto particular do espaço, tenham a mesma velocidade, verifica-se que, na realidade, ele pode ser aplicado em geral. Como a soma de um número qualquer de 4-vetores também é um 4-vetor, no caso em que existam grupos de cargas em qualquer ponto movendo-se em velocidades diferentes, é possível somar as suas contribuições para a 4-corrente total e concluir que a 4-corrente total associada a todas as cargas também é um 4-vetor.

Verifica-se, agora, que definindo-se um conjunto de quatro grandezas A_μ pelas equações

$$A_i = A_i, \quad A_0 = \phi, \quad (14.160)$$

$$[A_i = A_i, \quad A_0 = \phi/c],^{10}$$

pode-se escrever as Eqs. (14.146) na forma

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad (14.161)$$

$$[\square^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu].$$

Como o operador \square^2 (Eq. 14.38) é um 4-escalar, verifica-se que as grandezas A_μ devem transformar-se como um 4-vetor para que a Eq. (14.161) seja covariante relativisticamente. A condição de Lorentz (14.147) também será aproximadamente covariante, pois terá a forma

$$(\square_\mu, A_\mu) = 0, \quad (14.162)$$

o que pode ser verificado pelo leitor.

Agora o leitor já deverá estar preparado para substituir a Eq. (14.145) na Lei da Força, de Lorentz, dada pelo segundo membro da Eq. (14.103). Inserindo o resultado nas fórmulas (14.81) para a 4-força obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= -\frac{q\gamma}{c} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \frac{q\gamma}{c} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathcal{F}_i &= -q\gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{q\gamma}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q\gamma}{c} [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i. \end{aligned}$$

Através de um procedimento algébrico direto, pode-se verificar que com a definição (14.160) estas equações podem ser escritas sob a forma

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{q}{c} \sum_v g_v U_v \left(g_\mu \frac{\partial A_v}{\partial x_\mu} - g_v \frac{\partial A_\mu}{\partial x_v} \right), \quad (14.163)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{q}{c} \square_\mu (U_v, A_v) - \frac{q}{c} (U_v, \square_v) A_\mu. \quad (14.164)$$

[Em unidades do sistema SI, omite-se o c nas fórmulas (14.107), (14.163) e (14.164).] Esta relação torna claro que \mathcal{F}_μ é, na realidade, um 4-vetor; assim, a fórmula de Lorentz (14.107) para a força eletromagnética tem as propriedades de transformação corretas. O leitor verificará que esta fórmula para a força também satisfaz a Eq. (14.82), como deveria ser necessariamente, pois se usou a Eq. (14.81) na sua derivação.

14.7 ÁLGEBRA TENSORIAL NO ESPAÇO QUADRIDIMENSIONAL

O leitor que estudou o Cap. 10 deve estar interessado em verificar a possibilidade de generalizar a Álgebra Tensorial ao espaço 4-dimensional. Nesta seção, apresenta-se

¹⁰ Alguns autores usam Φ_μ , definido no sistema SI por $\Phi_i = cA_i$, $\Phi_0 = \phi$.

um resumo deste desenvolvimento, omitindo-se a maior parte das derivações, que, por não serem muito difíceis, o leitor poderá resolvê-las sozinho. No Cap. 10, havia preocupação apenas com tensores de segunda ordem; aqui generaliza-se esta noção para tensor de ordem arbitrária no espaço 4-dimensional.

Um 4-tensor de ordem n é definido como o conjunto de $4n$ grandezas $T_{\mu\nu\dots\lambda}$, identificados por $n_{\mu\nu\dots\lambda}$, cada um deles assumindo os valores 1, 2, 3 e 4, e que se transformam de acordo com a regra

$$T_{\mu\nu\dots\lambda}^* = \sum_{\alpha, \beta, \dots, \gamma} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} \dots a_{\lambda\gamma} T_{\alpha\beta\dots\gamma}. \quad (14.165)$$

Um exemplo particular de um tensor de n -ésima ordem é uma n -ada formada pelo produto $A_\mu B_\nu \dots C_\lambda$ dos componentes de n vetores, tomando-se todas as combinações possíveis de um componente de cada vetor. A soma

$$T_{\mu\nu\dots\lambda} + H_{\mu\nu\dots\lambda} \quad (14.166)$$

de dois tensores de mesma ordem, formada pela adição dos componentes correspondentes de cada um deles, é um tensor de mesma ordem. O produto $(m+n)$ -ádico

$$T_{\mu\nu\dots\lambda} H_{\alpha\beta\dots\gamma} \quad (14.167)$$

de um tensor de m -ésima ordem $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ por um tensor de n -ésima ordem $H_{\alpha\beta\dots\gamma}$, formado por todos os produtos possíveis de um componente $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ e um componente $H_{\alpha\beta\dots\gamma}$, é um tensor de ordem $m+n$. Dado um tensor $T_{\mu\nu\dots\nu}$ de ordem maior ou igual a 2, pode-se formar um tensor de ordem $(n-2)$ contraindo-se da seguinte maneira:

$$\Sigma_x g_x T_{\mu\nu\dots x\dots x\dots \lambda}, \quad (14.168)$$

onde se escolhem dois índices quaisquer de $T_{\mu\nu\dots\lambda}$ e formam-se as somas de quatro componentes em que estes dois índices têm o mesmo valor, multiplicado pelo fator g_α correspondente a cada valor particular do índice.

Como exemplo das operações acima, observe que o produto escalar (14.20) de dois 4-vetores pode ser obtido formando-se primeiramente a díada-produto $A_\mu B_\nu$ de acordo com a fórmula (14.167) e, então, efetuando a contração dos dois índices, de acordo com a fórmula (14.168). Como não restará nenhum índice, o resultado será um 4-escalar.

Um tensor pode ter a seguinte propriedade: o valor de seus componentes não varia quando os valores de dois índices particulares são trocados entre si:

$$T_{\mu\nu\dots x\dots p\dots \lambda} = T_{\mu\nu\dots p\dots x\dots \lambda}. \quad (14.169)$$

Um tensor que satisfaça esta propriedade denomina-se *simétrico* em relação àqueles dois índices. Da mesma forma, um tensor denomina-se *anti-simétrico*, em relação a dois índices particulares, se os seus componentes trocarem de sinal quando estes dois índices são trocados entre si:

$$T_{\mu\nu\dots x\dots p\dots \lambda} = -T_{\mu\nu\dots p\dots x\dots \lambda}. \quad (14.170)$$

A propriedade de simetria ou anti-simetria, em relação a um par particular de índices, é preservada sob uma transformação de Lorentz (14.165). Se um tensor é anti-simétrico

co em relação a dois índices particulares, então é evidente que aqueles dois componentes, para os quais os dois índices têm o mesmo valor, devem ser iguais a zero. Uma contração do tipo (14.168) realizada sobre dois índices anti-simétricos evidentemente fornece resultado igual a zero, isto é, fornece um tensor para o qual todos os componentes deste tipo são iguais a zero. Verificou-se anteriormente que um tensor anti-simétrico em três dimensões tem três componentes independentes. O leitor pode verificar que um tensor simétrico, de segunda ordem, tem seis componentes independentes. Em quatro dimensões, um tensor anti-simétrico não pode ser colocado em correspondência com um 4-vetor, pois tem um número diferente de componentes.

Como aplicação da Álgebra de 4-tensores, considere o *tensor campo eletromagnético*, de segunda ordem, definido pela equação

$$F_{\mu\nu} = \square_\mu A_\nu - \square_\nu A_\mu. \quad (14.171)$$

O tensor $F_{\mu\nu}$ evidentemente é anti-simétrico, tendo, portanto, seis componentes independentes que são exatamente os componentes dos vetores E e B que descrevem o campo eletromagnético. Os componentes de $F_{\mu\nu}$ são dados de acordo com a Eq. (14.145) pelo seguinte esquema, como pode ser verificado pelo leitor:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mu \backslash \nu & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & E_x & E_y & E_z \\ 1 & -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ 2 & -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ 3 & -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (14.172)$$

[Em unidades do SI, substitui-se E_x , E_y e E_z por E_x/c , E_y/c e E_z/c .]¹¹ A partir deste resultado, usando a Lei da Transformação (14.165), o leitor poderá derivar a regra para transformar os campos elétricos e magnéticos de um sistema de coordenadas para outro (veja o Probl. 52). A força eletromagnética sobre uma partícula carregada é obtida pela contração do produto triádico da 4-velocidade pelo tensor campo eletromagnético:

$$\mathcal{F}_\mu = \sum_v \frac{q}{c} g_v U_v F_{\mu v}. \quad (14.173)$$

Muitos outros exemplos adicionais da aplicação da Álgebra de 4-tensores seriam mostrados aqui se houvesse espaço para estender a discussão do Cap. 8 para a Mecânica Relativística de um meio contínuo. (Veja os Probls. 53, 54, 55.)

14.8 TEORIA GERAL DA RELATIVIDADE

Conclui-se este capítulo com alguns comentários qualitativos sobre a Teoria Geral da Relatividade. Como se observou na primeira seção, seria intuitivamente plausível

¹¹ Quando $\Phi_\mu = cA_\mu$ é usado no lugar do 4-potencial, $F_{\mu\nu}$ na Eq. (14.172) também será multiplicado por c . Veja a nota de rodapé após a Eq. (14.160).

tentar postular de maneira geral que as leis da Física deveriam ser independentes do sistema de coordenadas. No entanto, este postulado parece estar em conflito com a experiência. Ainda que possa ser difícil, ou mesmo impossível, distinguir um movimento uniforme do repouso, qualquer pessoa que viajou de automóvel em uma estrada ondulada ou entrou numa curva em alta velocidade sabe que a aceleração do sistema de coordenadas pode ser detectada imediatamente por meio de experiência simples. Uma das maneiras de sair desse dilema foi sugerida pelo físico filósofo Ernst Mach, quando imaginou que os efeitos observados não se devem à aceleração relativa ao espaço absoluto, uma noção que ele considerou sem significado, mas que podem ser atribuídas à aceleração do sistema de coordenadas local, em relação ao resto da massa do Universo. De acordo com Mach, um sistema de coordenadas inercial é aquele em que a matéria no Universo não é, em média, acelerada. Einstein tentou incorporar as idéias de Mach na Teoria Geral da Relatividade.

Verificou-se, no Cap. 7, que é possível escrever a Lei do Movimento, de Newton, em um sistema de coordenadas acelerado da mesma forma que em um sistema inercial, desde que os termos resultantes da aceleração sejam transpostos do sistema de coordenadas para o outro membro da equação, de forma que apareçam como forças adicionais. Estas forças "iniciais" que agem em qualquer corpo, num sistema de coordenadas acelerado, são proporcionais à massa do corpo. De acordo com a Lei da Gravitação, de Newton, a força gravitacional exercida sobre um corpo também é proporcional à sua massa. Einstein sugeriu que isto não é coincidência, mas que as forças iniciais devem ser consideradas como forças gravitacionais, da mesma forma que as forças dadas pela Lei da Gravitação, de Newton. Esta deverá, então, ser modificada de forma que as forças gravitacionais dependam das posições e das velocidades dos outros corpos, de maneira que as forças iniciais apareçam a partir das acelerações da massa do resto do Universo em relação ao nosso sistema de coordenadas. Verificou-se a partir da Eq. (7.37) que a força de Coriolis exercida sobre um corpo depende de sua velocidade, de tal forma que a lei generalizada para a força gravitacional sobre um corpo deve conter estes termos; eles serão análogos ao termo que fornece a força magnética sobre um corpo carregado, que também depende de sua velocidade.

No caso especial de um sistema de coordenadas acelerado, verifica-se, a partir da Eq. (7.10), que a equação do movimento é a mesma que em um campo gravitacional uniforme, onde a aceleração gravitacional g é o negativo da aceleração do sistema de coordenadas. Einstein baseou a Teoria Geral da Relatividade no princípio de que este resultado é verdadeiro não apenas em termos das leis do movimento, mas para todas as leis da Física. Assim, ele postulou o *Princípio da Equivalência*:

As leis da Física para um campo gravitacional uniforme g são as mesmas no caso de ausência desse campo gravitacional e num sistema de coordenadas acelerado cuja aceleração é $-g$. (14.174)

Nas vizinhanças de uma massa gravitacional como a Terra, a aceleração não é uniforme, mas varia em função da distância à Terra, variando também com a direção, dependendo da posição em relação à Terra. Um campo gravitacional deste tipo não

pode ser eliminado pela introdução de um sistema de coordenadas acelerado. Para incluir campos gravitacionais não-uniformes, pode-se formular o Princípio da Equivalência da seguinte forma mais satisfatória:

Em um laboratório pequeno, em queda livre, as leis da Física são as mesmas que as leis da Teoria Especial da Relatividade na ausência de campo gravitacional. (14.175)

Por laboratório em queda livre, entende-se um sistema físico sujeito unicamente a forças gravitacionais. Um exemplo seria uma nave espacial em queda no vácuo, juntamente com o seu conteúdo. Por laboratório pequeno, entende-se que ele deva ser suficientemente pequeno, de forma que as diferenças no módulo e na direção do campo gravitacional sejam desprezíveis, dentro das dimensões do laboratório, para as experiências realizadas. A partir do ponto de vista matemático, pode-se formular o princípio equivalente dizendo que, nas vizinhanças de qualquer ponto no espaço-tempo, pode-se introduzir de maneira que, na vizinhança da origem, as leis da Relatividade Especial sejam válidas na ausência de qualquer campo gravitacional.

Uma consequência imediata do Princípio de Equivalência é que todos os corpos caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional ou, de modo equivalente, que a força gravitacional é exatamente proporcional à massa. Este não é um efeito novo, pois foi observado pela primeira vez por Galileu, e a partir dele é que Einstein desenvolveu o Princípio de Equivalência. Este efeito foi testado, em 1890, por Eötvös, quando comparou essencialmente a razão entre as forças gravitacionais e as centrífugas devido à ação da rotação terrestre em inúmeros objetos. Estas experiências demonstraram a proporcionalidade existente entre a força gravitacional e a massa com precisão de uma parte em 10^8 para todos os corpos testados. R. H. Dicke, em 1964, repetiu a experiência com precisão de uma parte em 10^{11} , o teste de maior importância sobre a previsão da Teoria Geral da Relatividade. Será conveniente mostrar que a massa associada à energia nuclear e à energia química interna também está submetida ao campo gravitacional.

O Princípio da Equivalência fornece subsídios referentes às leis da Física apenas no caso de sistemas de coordenadas locais em queda livre. Na presença de massas gravitacionais, evidentemente não será possível introduzir um único sistema de coordenadas em queda livre em todos os lugares. Portanto, o problema com que se depara é formular as leis da Física de forma a poderem ser aplicadas não somente em uma região infinitesimal local, mas globalmente (ou melhor, universalmente). Sem tentar resolver este problema, já resolvido por Einstein, podem-se tirar várias conclusões imediatas partindo do Princípio da Equivalência, como, por exemplo, que a propagação da luz é afetada pelo campo gravitacional. De acordo com a Teoria Especial da Relatividade e, portanto, em um sistema de coordenadas local em queda livre, a luz desloca-se em velocidade constante c e em linha reta. Conclui-se que a luz deve experimentar também a aceleração gravitacional na presença de um campo gravitacional. Em particular, deveria-se esperar que a luz estrelar ao passar próximo ao Sol deveria encurvar-se em uma órbita em torno do Sol, de forma que a posição aparente de uma estrela atrás dele se desviasse em torno do Sol.

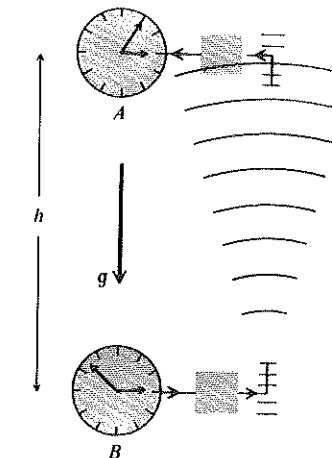


Fig. 14.3 Dois relógios em um campo gravitacional.

locasse num ângulo pequeno. Isto foi previsto pela primeira vez por Einstein. Na ausência de uma formulação global apropriada para a propagação da luz, não é possível fazer previsões numéricas. Se, no entanto, se calcular a deflexão supondo simplesmente que a luz, a uma certa distância do Sol, desloca-se em velocidade c , sendo, então, acelerada de acordo com a Lei da Gravitação, de Newton, no campo gravitacional do Sol, obtém-se uma fórmula para a deflexão (veja o Probl. 56), cujo valor obtido é a metade do valor real da deflexão prevista pela Teoria Geral da Relatividade. A deflexão prevista é tão pequena que se torna difícil medi-la com muita precisão, mas, de acordo com a exatidão das medidas realizadas durante eclipses, há coincidência com o valor previsto por Einstein.

Considere um par de relógios, A e B , separados em altura por uma distância h em um campo gravitacional uniforme g (veja a Fig. 14.3). Considere que a aceleração esteja orientada no sentido do relógio A para o relógio B . Suponha que os relógios são fisicamente idênticos e que o sinal luminoso com freqüência f_B medido no relógio B é enviado por B . Deseja-se calcular a freqüência f_A do sinal medido com auxílio do relógio A quando recebido na posição do relógio A . Para fazer isto, introduz-se um sistema de coordenadas em queda livre com aceleração g . Neste sistema de coordenadas, os dois relógios, A e B , são acelerados para cima no sentido de A para B . Escolhe-se o sistema de coordenadas de maneira que, no momento em que o relógio B envia o seu sinal, ele se encontra em repouso no sistema de coordenadas. Suponha também que a separação h não é muito grande; assim sendo, as velocidades dos dois relógios permanecem pequenas durante o tempo de interesse. Assim não haverá efeitos especiais de relatividade para serem considerados no sistema de coordenadas em queda livre. O sinal de luz enviado por B no tempo $t = 0$ chega em A no tempo $t = h/c$. Neste instante, o relógio A estará se afastando de B em velocidade $v = gt = gh/c$. (Neste instante o relógio também estará viajando com a mesma velocidade.) A freqüência f_A , portanto, é reduzida pelo efeito Doppler por um fator $[1 - (v/c)]$. Conclui-se que

$$f_A = f_B [1 - (gh/c^2)],$$

ou

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_B - f_A}{f_B} = \frac{gh}{c^2}. \quad (14.176)$$

Do ponto de vista do relógio *A*, o relógio *B* parece andar mais devagar; o deslocamento em freqüência $\Delta f/f$ é dado pela equação acima em termos de (gh) , a diferença no potencial gravitacional entre *A* e *B*. Este é o *deslocamento gravitacional vermelho*. O efeito é muito pequeno, exceto em campos gravitacionais *g* muito grandes e em grandes distâncias *h*. Devido a este efeito, prevê-se a existência de deslocamento apreciável nas freqüências das linhas espectrais enviadas de pontos próximos às estrelas anãs brancas. Alguns desses efeitos parecem já ter sido observados, embora uma verificação numérica seja difícil. Usando-se a aceleração da gravidade na superfície terrestre, e considerando-se que a altura *h* seja igual a 10 metros, conclui-se que a variação da freqüência deve ser em torno de uma parte em 10^{15} . Embora este seja um efeito muito pequeno, pode ser medido por meio do efeito Mössbauer, permitindo que esta conclusão sobre a Teoria Geral da Relatividade seja verificada por experiências na superfície da Terra.

Pode-se usar o resultado acima para discutir o paradoxo dos gêmeos (Seç. 13.6) a partir do ponto de vista do que esteja viajando. Na Relatividade Geral, usa-se um sistema de coordenadas em que o astronauta está sempre em repouso. Lembre-se que, em relação ao astronauta que está partindo, o relógio na Terra marcava 7,5 anos quando ele chegou ao planeta distante, mas, pouco depois, quando aterrissou no planeta, o relógio na Terra marcava 10 anos em relação ao astronauta estacionário. Num sistema de coordenadas em que o astronauta se encontre fixo, existe um campo gravitacional apontando da Terra em direção ao planeta distante durante o tempo em que o foguete está desacelerando (em relação à Terra). Assim, no sistema de coordenadas (acelerado) do astronauta, o relógio na Terra andará mais rápido do que o localizado no planeta. Embora a fórmula (14.176) tenha sido derivada somente até termos de ordem mais baixa em gh/c^2 , não podendo, portanto, legitimamente ser aplicada a este exemplo onde $gh/c^2 \gg 1$, a análise relativística geral correta deste problema conduz à conclusão de que, no sistema de coordenadas acelerado, o relógio na Terra, na realidade, ganha 2,5 anos durante a aterrissagem.

Outra vez, deve-se enfatizar que todos os processos físicos acontecem em taxas determinadas pelo próprio tempo, de acordo com a leitura no local em que se encontram os dois relógios. Qualquer processo físico cuja taxa de variação com o tempo seja conhecida pode ser usado como um relógio. Diferenças nas taxas medidas pelos relógios e, portanto, em todos os processos físicos, devido a diferenças nas velocidades ou no potencial gravitacional, são previstas pela Teoria Especial e Geral da Relatividade. Estas diferenças de taxa são reais, significando que devem ser levadas em conta quando se deseja correlacionar corretamente as seqüências no tempo dos eventos em sistemas distantes ou que se movam rapidamente. Por outro lado, estas diferenças são relativas, podendo-se, portanto, escolher um sistema de coordenadas em que um relógio particular esteja em repouso e, então, considerado que esteja trabalhando com uma taxa-padrão fixa; as peculiaridades existentes na comparação entre seqüências no tempo e

outros sistemas são então atribuídas a variações nas taxas dos relógios. Em relação ao astronauta, há um aumento de velocidade repentina nos relógios na Terra durante o processo de desaceleração. O gêmeo que permaneceu na Terra não observa este aumento de velocidade: ele explica a seqüência de eventos em termos da dilatação do tempo mostrado pelo relógio do astronauta.

Uma terceira experiência sugerida por Einstein na publicação original sobre a Teoria Geral da Relatividade envolve o movimento do periélio do planeta Mercúrio. Nesta obra não se tem o equipamento necessário para fazer qualquer estimativa desse efeito, exceto evidenciar, como foi observado no Cap. 3, que desvios da Lei da Gravitação Newtoniana ou da Lei do Movimento Newtoniano conduzirão à precessão do eixo maior da órbita elíptica. A precessão prevista é de 43 segundos de arco por século. As medidas e o conhecimento das órbitas planetárias atualmente são suficientemente precisas para que esta precessão possa ser medida e concordar com o valor previsto por Einstein com 5% de incerteza, isto é, dentro da exatidão experimental.

Uma das motivações de Einstein para pesquisar uma teoria da Relatividade Geral foi a sugestão apresentada por Mach de que os sistemas de coordenadas inertiais são os que se encontram em repouso, ou, pelo menos, não sofrem aceleração, em relação à média do movimento da matéria no Universo. Portanto, deve-se esperar que uma massa próxima girando rapidamente produza ligeiras rotações em um sistema de coordenadas inercial. A Teoria da Relatividade não prevê na realidade este efeito. Para rotações de massas razoáveis, que podem ser obtidas na prática, o efeito é extremamente pequeno. No entanto, vêm sendo realizadas experiências que, acredita-se, serão suficientemente precisas para detectar este efeito.

Como o Princípio da Relatividade requer que os efeitos gravitacionais não possam ser transmitidos instantaneamente de uma massa para outra, mas propagar-se no espaço existente entre elas, talvez não seja surpreendente que a Teoria da Relatividade faça previsões sobre a existência de ondas gravitacionais que se deslocam com velocidade *c*. Espera-se também que os efeitos de tais ondas sejam muito pequenos. No entanto, em 1969, as experiências realizadas por J. Weber pareciam ter detectado tais ondas.¹²

Uma conclusão interessante e importante da Teoria Geral da Relatividade é que o campo gravitacional pode afetar a geometria do espaço. Quando se trata de um campo gravitacional, os postulados da Geometria Euclidiana satisfazem precisamente. Do ponto de vista operacional, os conceitos geométricos, tais como linha reta, ângulos etc., são definidos em termos de medidas efetuadas com instrumentos físicos. Portanto, a afirmação de que a Geometria não é euclidiana implica a afirmativa de que os campos gravitacionais afetam o comportamento dos instrumentos de medida. Para verificar como isto acontece, considere um sistema de coordenadas inercial, que será chamado sistema fixo, e no qual se admitirá a validade das leis comuns da Física (em particular a Relatividade Especial e a Geometria Euclidiana). Imagine um sistema de coordenadas girando em relação ao sistema fixo, chamado sistema com movimento de rotação. Considere, agora, um círculo cujo centro esteja sobre o eixo de rotação e que o raio e a

¹² J. Weber, *Physical Review Letters*, 22, 1320 (1969).

circunferência do círculo são medidos com uma régua em repouso no sistema fixo e também com uma régua em repouso no sistema com movimento de rotação. Suponha que o raio do círculo e a velocidade de rotação são tais que um ponto sobre a circunferência, no sistema em movimento de rotação, se desloque em velocidade menor do que c , mas suficientemente grande para que o fator γ tenha uma diferença mensurável em relação a um. Fica claro que o conceito de um sistema de coordenadas girando rigidamente não pode ser estendido para os raios em que $\omega r > c$, nem se encontrarão dificuldades com os postulados da Relatividade. A discussão inicial será como medir o raio de círculo. Como a régua no sistema com movimento de rotação se move perpendicularmente ao comprimento que está sendo medido, de acordo com a discussão anterior, as medidas do raio do círculo nos sistemas móvel e fixo devem concordar. Considere que várias réguas sejam colocadas no sistema com movimento de rotação, de forma a preencherem completamente a circunferência do círculo. Considerando-se estas réguas a partir do ponto de vista do sistema de coordenadas fixo, podem-se usar as leis da Relatividade Especial, considerando que estas réguas se contrairão por um fator $\gamma = [1 - (\omega r/c)^2]^{-1/2}$; logo, o número dessas réguas que podem ser dispostas na circunferência excederá o número das que podem ser colocadas em torno do círculo no sistema de coordenadas fixo por um fator γ . Como no sistema em movimento, pode-se medir a circunferência simplesmente contando o número de réguas, conclui-se que a circunferência C^* medida será maior do que a circunferência C , e na realidade $C^* = \gamma C$. Como $r^* = r$, conclui-se que, no sistema com movimento de rotação, a circunferência do círculo é dada por

$$C^* = 2\pi\gamma r^* = 2\pi r^* [1 - (\omega r^*/c)^2]^{-1/2}. \quad (14.177)$$

A circunferência de um círculo, num sistema de coordenadas com movimento de rotação, é maior do que o valor que seria dado pela fórmula euclidiana usual por um fator que depende do raio do círculo. O efeito é maior para círculos maiores; no caso de círculos suficientemente pequenos, a fórmula aproxima-se do valor euclidiano.

Como a distorção na Geometria associa-se à aceleração do sistema de coordenadas, como esta aceleração também produz efeitos gravitacionais (campos de forças centrífugo e de Coriolis) e como, de acordo com o Princípio da Equivalência, estes efeitos gravitacionais são fisicamente indistinguíveis dos efeitos gravitacionais oriundos de massas gravitacionais, conclui-se ser preciso encontrar desvios na Geometria Euclidiana associados a campos gravitacionais. Em um sistema de coordenadas com movimento de rotação, haverá um campo gravitacional centrífugo (assim como o campo de força de Coriolis), e associado à distorção na Geometria pela qual a circunferência de um círculo é maior em comparação com o raio que seria dado pela fórmula euclidiana. Nas vizinhanças de uma força gravitacional, há um campo gravitacional centrípeto. Não há aceleração rígida no sistema de coordenadas que produzirá esta aceleração e, portanto, não haverá maneira de deduzir diretamente, a partir do Princípio da Equivalência, a natureza da Geometria produzida por este campo. Embora não se possa tornar isto plausível usando argumentos simples, o leitor não deverá ficar surpreso que a teoria de Einstein, quando trabalhada, prevê que o campo gravitacional centrípeto, em torno de uma massa gravitacional, esteja associado à distorção da Geometria na qual a circunfe-

rência de um círculo seja menor do que $2\pi r$. Da mesma forma, a área de uma esfera em torno de uma massa gravitacional é menor do que o valor euclidiano $(4\pi/3)r^3$, e crescerá menos rapidamente com o raio. Uma consequência desta distorção na Geometria é o aparecimento de um encurvamento adicional do feixe de luz além e acima do que se poderia calcular a partir unicamente da aceleração gravitacional. Como um feixe de luz que se desloca no espaço vazio segue um caminho que é a menor distância entre os dois pontos, pode-se verificar que, devido à distorção na Geometria, um feixe de luz que passe próximo ao Sol poderá percorrer uma distância menor se seguir uma trajetória aparentemente curva, que faz com que ele passe mais longe do Sol no seu ponto de aproximação máxima do que no caso da Geometria Euclidiana comum, em que ele seguiria uma linha reta. Este efeito único fornece uma deflexão do feixe de luz igual à deflexão que pode ser calculada a partir da aceleração gravitacional, e a deflexão total prevista pela Teoria Geral da Relatividade será igual a duas vezes a calculada simplesmente pela aceleração da gravidade. Medidas reais do encurvamento da luz de estrelas concordam com a previsão de Einstein com a precisão das experiências (em torno de 10%). Um efeito similar foi medido mais recentemente no atraso havido no tempo de chegada de sinais de rádio vindos de fontes astronômicas ou de satélites artificiais circulando o Sol. O comprimento de uma linha entre o objeto distante e a Terra e passando próximo ao Sol é maior do que a obtida caso o Sol não existisse, e isto é a causa do atraso previsto nos sinais de rádio que é confirmado pela experiência.

Um aspecto fascinante da Teoria Geral da Relatividade é poder ser aplicada a todo o Universo e a toda a sua história. Existe uma grande variedade de soluções para as equações do campo gravitacional de Einstein: soluções para o caso em que a densidade da matéria no Universo é uniforme e é tal que os efeitos gravitacionais produzem um espaço fechado no qual o volume total é finito. O volume de uma esfera em torno de um dado ponto cresce mais lentamente com o raio do que o volume dado pela fórmula de Euclides e, eventualmente, para um determinado valor máximo do raio, o volume torna-se igual ao volume do espaço. Um feixe de luz ou uma partícula em alta velocidade retornaria eventualmente às vizinhanças da sua origem se continuasse a viajar livremente sem ser desviado ou absorvido. Esta é uma situação que poderia, em princípio, ser verificada por meio de observações astronômicas. Se, por exemplo, o universo fosse homogêneo, de forma que a densidade das galáxias fosse a mesma em todos os pontos do Universo, então contando o número de galáxias visíveis como função das distâncias às galáxias, poder-se-ia medir efetivamente o volume de uma grande esfera como função do seu raio. Infelizmente, as observações necessárias são difíceis de ser realizadas e interpretadas e, além disso, parece que o Universo não deve ser homogêneo como se supõe.

Verifica-se que as soluções estáticas das equações do campo gravitacional de Einstein são instáveis, de forma que a teoria prevê efetivamente que o Universo deve estar em expansão ou em contração. As observações concordam com esta previsão, pois parece que o Universo, na realidade, está expandindo-se. Se essa expansão será indefinida, ou atingirá um tamanho máximo e, então, se contrairá novamente, depende, de acordo com a teoria, da densidade média da matéria, que não foi ainda medida com suficiente precisão para permitir a resposta.

Se a Geometria do espaço em torno de corpos gravitacionais é Não-Euclidiana, então sistemas de coordenadas espaciais cartesianos x , y , e z , do tipo usado na discussão da Teoria Especial da Relatividade, em geral não existirão. Uma dificuldade idêntica aparece com a coordenada de tempo. Na presença de campos gravitacionais, os relógios colocados em lugares diferentes podem andar em diferentes taxas, mesmo que estejam em repouso em algum sistema de coordenadas particular, o que pode ser verificado incluindo-se relógios na discussão de um sistema com movimento de rotação, ou a partir da discussão do deslocamento gravitacional vermelho. Não existe maneira razoável de sincronizar relógios, de forma que eles permaneçam sincronizados. Definindo-se uma coordenada de tempo t em cada ponto (x, y, z) através da correção do tempo que os sinais luminosos levam para ir do relógio-padrão, situado na origem até o ponto, então este tempo não concordará (exceto talvez em um dado instante) com o indicado pelo relógio localizado no ponto (x, y, z) .

Na Teoria Geral da Relatividade será conveniente desistir da tentativa de estabelecer um sistema de coordenadas padrão, baseado em sistemas padronizados de medidas de comprimento e tempo para localizar eventos. Em lugar disso, designam-se simplesmente quatro coordenadas, q_0 , q_1 , q_2 e q_3 , para os eventos no espaço-tempo de maneira arbitrária (contínua). Portanto, o sistema de coordenadas não contém em si próprio informações físicas ou geométricas, e qualquer mudança arbitrária para qualquer outro conjunto de coordenadas q_0^*, q_1^*, q_2^* e q_3^* será permitida. A Geometria é, então, definida pela especificação de resultados das medidas de tempo e distância entre os eventos.

Nas vizinhanças de um evento particular no espaço-tempo, o Princípio da Equivalência garante que é possível escolher um sistema de coordenadas inercial local x_λ através de medidas realizadas com relógios e réguas em queda livre. A distância ds ou intervalo de tempo $d\tau$ medido entre dois eventos próximos é dada, então, de acordo com a Eq. (14.4), por

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \sum_\lambda g_\lambda (dx_\lambda)^2, \quad (14.178)$$

onde dx_λ são as diferenças de coordenadas entre os dois eventos, e a Fórmula (14.178) só será válida numa pequena região [com o significado do Princípio da Equivalência (14.175)] dentro do qual o sistema inercial x_λ possa ser estabelecido. Retornando-se a um sistema de coordenadas arbitrário q_μ , as coordenadas x_λ podem ser expressadas em termos de q_μ por um conjunto de funções

$$x_\lambda = x_\lambda(q_0, q_1, q_2, q_3). \quad (14.179)$$

Substituindo na Eq. (14.178), obtém-se uma relação para o intervalo entre dois eventos vizinhos em termos das coordenadas gerais q_μ :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dq_\mu dq_\nu, \quad (14.180)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \sum_\lambda g_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial q_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial q_\nu}. \quad (14.181)$$

A Fórmula (14.180) fornece a relação desejada entre as coordenadas q_μ , que podem ser escolhidas arbitrariamente, e as medidas físicas de distâncias e tempos entre eventos próximos. A relação geométrica (física) entre eventos próximos é caracterizada pelas grandezas $g_{\mu\nu}$, que são chamadas componentes do tensor métrico. Como $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, somente dez dos $g_{\mu\nu}$ são independentes. Se $ds^2 > 0$, então o intervalo entre os dois pontos vizinhos será do tipo espaço e ds é o resultado da medida da distância em um sistema de coordenadas em que os dois eventos ocorrem simultaneamente. Se $ds^2 < 0$, então os dois eventos estarão separados por um intervalo tipo-tempo e $d\tau$ será o intervalo de tempo medido por um relógio que passa pelos dois eventos.

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ descreve por um lado a geometria do espaço-tempo e, por outro lado, o campo gravitacional no sistema de coordenadas q_μ . Pode-se considerar a Eq. (14.181) como uma definição operacional de $g_{\mu\nu}$; escolhe-se arbitrariamente um sistema de coordenadas q_μ , estabelece-se um sistema inercial local x_λ próximo a cada ponto do espaço-tempo por intermédio de medidas efetuadas com relógios e réguas em queda livre, e calcula-se $g_{\mu\nu}$ a partir da Eq. (14.181). Reciprocamente, conhecendo-se $g_{\mu\nu}$ numa região no espaço-tempo, pode-se trabalhar, ao contrário, a partir da Eq. (14.180) e procurar um conjunto de funções $x_\lambda(q_\mu)$ que converta ds^2 para a forma (14.178). [O leitor que estudou o Cap. 10 reconhecerá que se a região em questão for suficientemente pequena, de forma que $g_{\mu\nu}$ possa ser considerado constante, o problema deverá ser resolvido por diagonalização de um tensor simétrico no espaço quadridimensional.] Portanto, as grandezas $g_{\mu\nu}$ definem implicitamente um sistema de coordenadas x_λ em queda livre, em relação a q_μ ; pelo Princípio da Equivalência, eles caracterizam, portanto, o campo gravitacional no sistema q_μ .

A fórmula (14.180) só será válida no limite em que os eventos estão suficientemente próximos, de forma que o intervalo entre eles possa ser considerado infinitesimal. No caso dos eventos com separação finita, o intervalo entre eles deve ser definido pela integração da fórmula (14.180).

Infelizmente, não há espaço nesta obra para apresentar o desenvolvimento matemático da teoria, e estes comentários qualitativos deverão ser suficientes. O leitor que desejar estudar com maior profundidade este assunto deve consultar qualquer um dos excelentes textos sobre Relatividade (basta consultar a lista na Bibliografia).

PROBLEMAS

- Mostre que as relações (14.13) são válidas para os casos especiais (14.7) e (14.8).
- Dados dois eventos, E^1 e E^2 , escreva a grandeza S^{21} dada pela Eq. (14.4) no sistema de coordenadas com asterisco, fazendo a substituição (14.6), e verifique que as Eqs. (14.13) são válidas, S^{21} reduz-se à mesma forma (14.4) no sistema de coordenadas sem asterisco.
- Demonstre que o produto escalar (14.20) é invariante sob uma transformação de Lorentz, se A_μ e B_μ forem 4-vetores.

4. Demonstre o Teorema (14.21). [Sugestão. Se $\Sigma_\mu K_\mu B_\mu = \Sigma_\mu L_\mu B_\mu$ para B_μ arbitrário, então $K_\mu = L_\mu$.]
5. Obtenha a fórmula (13.47), que fornece o efeito Doppler relativístico, efetuando uma transformação de Lorentz no vetor de onda k_μ .
6. Um sistema de coordenadas com asterisco move-se em velocidade v , em relação a um sistema sem asterisco. A velocidade v está no plano xy e faz um ângulo α com o eixo x , medido na direção contrária ao movimento do relógio, em relação ao sistema sem asterisco. A velocidade v faz um ângulo α^* com o eixo x^* , medido na direção contrária ao movimento dos relógios no sistema com asterisco. Os eixos z e z^* são paralelos. As origens O e O^* coincidem em $t = t^* = 0$. Determine os coeficientes $a_{\mu\nu}$ para a transformação (14.6) para este caso. [Sugestão. Efetue três transformações sucessivas nas formas (14.7) e (14.8) e utilize a Eq. (14.12).] Confira seus cálculos algébricos, mostrando que a origem O se move corretamente no sistema de coordenadas com asterisco.
- Mostre que, a não ser que $\alpha = 0$, é impossível escolher α^* de forma que ambos os eixos, x^* e y^* , sejam paralelos, respectivamente, aos eixos x e y . Em outras palavras, os novos eixos não formam um ângulo reto no sistema de coordenadas antigo (e vice-versa). Dado $\alpha \neq 0$, que valor de α^* faz o eixo x^* paralelo ao eixo x ? [Sugestão. Em $t = 0$, o eixo x^* pode ser determinado no sistema sem asterisco fazendo-se $y^* = z^* = 0$.] Se $\alpha = \alpha^*$, qual é o ângulo entre os eixos x^* e y^* , medido no sistema sem asterisco?
- Mostre que, se $\beta \ll 1$, os eixos com asterisco formam aproximadamente ângulos retos em relação ao sistema sem asterisco.
7. Mostre que, se p_0 for positivo num sistema inercial qualquer, ele será positivo em todos os sistemas iniciais. (Observe a analogia com o significado absoluto do cone de luz do futuro no espaço-tempo.)
- Mostre que a massa de repouso m de uma partícula permanece constante em módulo e sinal por meio de uma transformação de Lorentz em p_μ .
8. Calcule a velocidade de grupo, cujos componentes são
- $$v_{gi} = \partial\omega/\partial k_i,$$
- em função de k , para a relação de dispersão (14.58). Mostre que a relação (14.58) significa, então, que a velocidade u de uma partícula seja igual à velocidade de grupo v_g de sua onda associada, em Mecânica Quântica Relativística.
9. Dado um conjunto de 4-vetores $p_{j\mu}$, todos tipo-tempo ou tipo-luz, mostre que suas somas são tipo-tempo ou tipo-luz. Mostre que a soma só será tipo-luz se todos os $p_{j\mu}$ forem tipo-luz e se todas as partes espaciais p_j forem paralelas.
10. Há uma teoria segundo a qual podem existir partículas para as quais o 4-momento p_μ é tipo-espacetime. Defina, para essas partículas, um parâmetro apropriado que seja análogo à massa de uma partícula comum, e escreva as equações análogas às Eqs. (14.46), expressando p_μ em termos da velocidade u . Como $u > c$, tais partículas são chamadas *táquions*. Determine as fórmulas aproximadas para E e p para um táquion no limite ultra-relativístico $u \gg c$. O que acontece no limite $u \rightarrow c$? Um táquion poderia transportar um sinal de um lugar para o outro?
11. Um feixe horizontal de antinêutrons de energia cinética igual a 100 MeV entra em uma câmara de bolhas de hidrogênio. Observa-se uma reação em que dois píons positivos de momentos lineares iguais a 141 MeV/c e 920 MeV/c deixam traços no plano vertical com ângulos de 45° em relação à direção do feixe incidente, um acima e outro abaixo. Um terceiro traço de um píon negativo é observado movendo-se horizontalmente, fazendo um ângulo reto em direção ao feixe incidente e cujo momento linear é de 145 MeV/c. Todas as energias e momentos lineares são medidos com uma precisão de 1%. Suponha que a partícula-alvo era um próton. A massa de um nucleon (nêutron ou próton) é de 938 MeV/c² e a massa de um pião é de 140 MeV/c². (É conveniente medir as energias de partículas com alta energia em MeV, as massas em MeV/c² e os momentos em MeV/c. Os cálculos cinemáticos podem, então, ser realizados sem se precisar converter para unidades complicadas.)
- a) Mostre que, pelo menos, uma partícula que não se vê (portanto, sem carga) foi produzida na reação, e que é quase certo que seja um único píon neutro. Qual é o valor e a direção do seu momento linear?
- b) Suspeita-se que um méson ω^0 pode ter sido produzido na reação. O méson ω^0 é uma partícula com uma vida média muito curta (10^{-20} s), de massa de 738 MeV/c² e carga elétrica nula, que decai em três píons. Mostre que é muito provável que tenha havido produção de um méson ω^0 , determinando a energia cinética e a direção do movimento.
12. Expresse a grandeza T , dada pela Eq. (14.67), em termos das massas m_a, m_b, m_c e m_d , dadas pela Eq. (14.64), e os invariantes M e S dados pelas Eqs. (14.65) e (14.66).
13. Dado um sistema de partículas com 3-momento total P e energia total $E = P_0c$, determine um sistema de coordenadas com asteriscos no qual $P^* = 0$, e mostre que $P_0^* = Mc$ (Eq. 14.65). [Sugestão. Tome o eixo x na direção de P .]
14. Um feixe de prótons de energia cinética T penetra em uma câmara de bolhas de hidrogênio. Determine o limiar de energia T_f para a produção de antiprotons na reação
- $$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + \bar{p}^-,$$
- onde o próton-alvo é considerado em repouso. A energia de repouso do próton e do antiproton é de 938 MeV.

15. Um píon cuja energia cinética é 1 200 MeV incide sobre um próton em repouso, produzindo píons na reação



Qual é o número máximo n de píons que podem ser produzidos na reação? A energia de repouso do próton é de 938 MeV e a do píon é de 140 MeV. [Sugestão. Use o sistema de coordenadas do centro de massa.]

16. Um píon cuja energia cinética é de 1 000 MeV é espalhado em um ângulo de 45° em relação à direção original do movimento em colisão com um próton em repouso. Qual é o ângulo de espalhamento do píon no sistema de coordenadas do centro de massa? As massas do píon e do próton são dadas no Probl. 15.

17. Uma partícula incidente (a) reage com uma partícula (b) em repouso, produzindo as partículas (c) e (d). Mostre que se as massas, os invariantes M e S e o ângulo θ_{ac} entre p_a e p_c forem conhecidos, todas as energias, os momentos e o ângulo θ_{ad} podem ser determinados.

18. Determine uma expressão para o produto escalar $(P_{a\mu}, P_{d\mu})$ dos 4-momentos das partículas (a) e (d), na reação mostrada na Fig. (14.1), em termos das massas das quatro partículas e dos invariantes M e S , definidos pelas Eqs. (14.65) e (14.66).

19. Escreva o invariante S em uma sistema de coordenadas particular, em termos das energias E_a e E_c , das massas m_a e m_c e do ângulo θ_{ac} entre a direção do movimento das duas partículas.

20. a) Mostre que o elemento de volume quadrudimensional $dV dt = dx dy dz dt$ é um 4-escalar. [Sugestão. Mostre que os jacobianos $\partial(x^*, y^*, z^*, t^*)/\partial(x, y, z, t) = 1$ para as transformações do tipo (14.7) e (14.8) e, em seguida demonstre que o jacobiano é unitário para uma transformação entre dois sistemas de coordenadas inerciais quaisquer.]

- b) Mostre que o mesmo argumento nos leva à conclusão que o elemento de volume $dp_x dp_y dp_z dE$ em um espaço momento-energia quadrudimensional também é invariante sob uma transformação de Lorentz. (Observe a relação com os Probls. 7 e 19 do Cap. 13.)

21. Mostre, usando cálculo direto, que a grandeza $\gamma_a \gamma_b |u_a - u_b|$, onde as velocidades u_a e u_b são orientadas ao longo do eixo x , é invariante, sob uma transformação de Lorentz especial, do tipo (14.7). As velocidades u_a e u_b são consideradas positivas ou negativas, de acordo com o sentido do movimento ao longo do eixo x .

22. Mostre que a grandeza invariante sob uma transformação de Lorentz

$$F_{ab} = [(p_{a\mu}, p_{b\mu})^2 - m_a^2 m_b^2 c^4]^{1/2}$$

tem o valor

$$F_{ab} = m_a m_b c^2 \gamma_a \gamma_b |u_a - u_b|$$

se u_a for paralelo ou antiparalelo a u_b . Usando este resultado, reescreva uma generalização da Eq. (14.72) que define a seção de choque σ que é um escalar sob transformações de Lorentz arbitrárias.

23. Duas partículas (a) e (b) com 4-momentos $p_{a\mu}$ e $p_{b\mu}$ têm massas m_a e m_b conhecidas e um dado 4-momento total $P_\mu = p_{a\mu} + p_{b\mu}$. Mostre que a grandeza

$$\frac{p_a^3 d\Omega_a}{p_a \cdot (E_b p_a - E_a p_b)}$$

é invariante sob uma transformação de Lorentz, onde p_a é o 3-momento linear da partícula (a), e sua direção está no ângulo sólido $d\Omega_a = \sin \theta_a d\theta_a d\phi_a$. [Sugestão. Inicie a solução a partir do elemento de volume $dp_{a0} dp_{ax} dp_{ay} dp_{az} dp_{b0} dp_{bx} dp_{by} dp_{bz}$ no 8-espaco. Primeiro faça uma mudança das variáveis p_{ax} , p_{ay} e p_{az} para coordenadas esféricas p_a , θ_a e ϕ_a no espaço p_a . Faça, então, uma mudança das variáveis p_{b0} , p_{bx} , p_{by} , p_{bz} , p_{a0} , p_a , θ_a , $\phi_a \rightarrow P_0$, P_x , P_y , P_z , $(m_a^2 c^2)$, $(m_b^2 c^2)$, θ_a , ϕ_a . O determinante jacobiano 8×8 para a última transformação não é difícil de ser calculado.]

Usando o resultado acima, mostre que a seção de choque para espalhamento elástico da partícula (a) pela partícula (b) dentro de um ângulo sólido $d\Omega_a$ pode ser escrita na forma

$$d\sigma_a = \frac{F(M, S) p_{aF}^3 d\Omega_a}{p_{aF} \cdot (E_{bF} p_{aF} - E_{aF} p_{bF})},$$

onde p_{aF} , E_{aF} , p_{bF} , E_{bF} são as energias e os momentos finais das partículas após o espalhamento, $S = (p_{aF\mu} - p_{aI\mu}, p_{aF\mu} - p_{aI\mu})$, e o índice ' I ' denota valores iniciais.

24. Calcule a seção de choque $d\sigma_a$, dada no Probl. 23, no sistema de coordenadas do centro de massa para o espalhamento elástico de duas partículas de massas iguais m . Escreva o resultado em termos da massa m , da massa invariante M e do ângulo Θ em que a partícula (a) é espalhada. Escreva o invariante S em termos de m , M e Θ . Mostre que se, para uma determinada energia do centro de massa $M_0 c^2$, o espalhamento for isotrópico, isto é, se a seção de choque por unidade de ângulo sólido $d\sigma_a/d\Omega_a$ for independente de Θ , então a função $F(M_0, S)$ será independente de S na energia do centro de massa.

Dado $F(M_0, S) = F_0$, independente de S , calcule $d\sigma_a/d\Omega_a$ no sistema de coordenadas no laboratório [onde a partícula (b) está estacionária] e, em seguida, determine a distribuição angular no laboratório de um processo de espalhamento que é isotrópico no centro de massa.

25. Verifique as Eqs. (14.83). Confira se todos os quatro componentes \mathcal{F}_μ são obtidos corretamente quando F^* é dada pelas Eqs. (14.83).

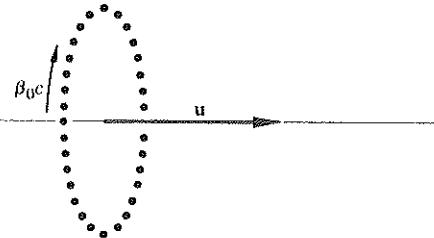


Fig. 14.4 Anel de elétrons.

26. Uma partícula parte da origem com momento p_0 orientada ao longo do eixo y . Ela está sob a ação de uma força constante F na direção x . Determine o seu movimento. Como a órbita obtida pode ser comparada com a parábola que seria obtida caso se usassem as equações clássicas do movimento?

27. Em um acelerador de anel de elétrons, um anel circular de elétrons desloca-se em velocidade u ao longo do eixo de simetria do anel (Fig. 14.4). O sistema de coordenadas em que o anel está em repouso contém grande número de elétrons N , distribuídos uniformemente em torno do anel circular de raio a e movendo-se sobre o anel com energia $\gamma_0 mc^2$. Mostre que, no sistema de coordenadas do acelerador, a sua energia e o seu momento são os mesmos que os de uma partícula única de massa $N\gamma_0 mc^2$ movendo-se com velocidade u ao longo do eixo de simetria.

28. Uma partícula de massa m , movendo-se ao longo do eixo x , é submetida à ação de uma força $F_0 \cos \omega t$ na direção x .

a) Conhecida a velocidade inicial da partícula, v_0 , determine $v(t)$.

b) Sabendo que as correções relativísticas são pequenas, determine a posição $x(t)$ até termos de primeira ordem em c^{-2} .

c) Sabendo que F_0 é pequeno, mas $\gamma_0 \gg 1$, determine $x(t)$ até termos de primeira ordem em F_0 .

d) Sabendo que $v_0 = 0$, mas $F_0 \gg \omega mc$, esboce $v(t)$ e descreva o movimento.

29. Uma partícula, movendo-se ao longo do eixo x , está sujeita à ação de uma força restauradora linear $F = -kx$. Descreva o seu movimento. Tente obter a solução pelo método da energia, levando os cálculos tão longe quanto for possível. Sob que condições o movimento concorda com o do oscilador harmônico clássico? Determine as correções relativísticas de primeira ordem para a freqüência de oscilação e para o movimento $x(t)$.

30. Uma partícula move-se ao longo do eixo x com uma energia potencial

$$V(x) = (Ax^2 - B)e^{-\alpha x^2}.$$

Se ela partir da origem com velocidade v_0 , use a integral da energia (14.92) para discutir o movimento. Descreva as espécies de movimento que podem ocorrer e dê o in-

terior de valores da velocidade inicial v_0 para cada um deles. Se a partícula puder escapar, determine a velocidade final em função de v_0 .

31. Obtenha uma função força $F(x)$ para a qual as equações relativísticas do movimento têm uma solução exatamente senoidal $x = A \sin \omega t$ para uma dada amplitude A .

32. Uma partícula leve, em alta velocidade, massa m e carga $-e$, é espalhada por uma carga pesada fixa Ze que a atrai com uma força coulombiana $-Ze^2/r^2$. Dada a velocidade inicial u_0 e o parâmetro de impacto (Seç. 3.16), determine a distância de aproximação máxima. Suponha que a carga fixa permaneça em repouso. Mostre que se $m\gamma_0 \ll M$, onde M é a massa da partícula fixa, então será legítimo desprezar o movimento da partícula pesada. (Se a carga fixa permanecer em repouso, será correto usar a Lei de Coulomb para a força.)

33. Resolva o Probl. 29 usando o potencial equivalente V_{rel} (Eq. 14.101). Mostre que este método fornece o mesmo resultado.

34. Use o Teorema (14.102) e o resultado do Probl. 67 do Cap. 3 para determinar a correção relativística de ordem mais baixa para a fórmula da seção de choque de espllhamento de Rutherford (3.276).

35. Mostre que no limite $E_c \gg V$, a órbita relativística de uma partícula de massa m é aproximadamente idêntica à órbita clássica de uma partícula de massa $m(mc^2/E)$ que se move no mesmo potencial $V(x)$ com a mesma energia $E_c = E - mc^2$.

36. Generalize o Teorema (14.102) para o caso de uma partícula carregada, submetida a um campo eletrostático $E = -\nabla\phi$ em um campo magnético estático B . Aplique o teorema obtido para resolver o Probl. 75 do Cap. 3, para o caso relativístico.

37. Uma partícula de carga q move-se em campos elétrico e magnético cruzados, $E = E_0 \hat{x}$ e $B = B_0 \hat{y}$. Mostre que se $E_0 < B_0$, a projeção do seu movimento no plano xz é uma elipse cuja excentricidade é E_0/B_0 , movendo-se na direção z em velocidade média igual a $cE_0/\gamma_0 B_0$ e que atravessa a elipse com uma freqüência angular ω_1 dada por

$$\omega_1 = q(B_0^2 - E_0^2)^{1/2}/\gamma_0 mc,$$

onde $\gamma_0 mc^2$ é a energia da partícula quando está na extremidade do semi-eixo maior da elipse. Qual é a natureza do movimento da direção y ? [Sugestão. Use o tempo próprio como uma variável independente. O problema correspondente em Mecânica Clásica foi resolvido na Seç. 3.17.]

38. Mostre, através de cálculo direto, que as quatro grandezas

$$B_\mu = \sum_i a_{\mu i} F_i,$$

usadas na definição (14.126) do 4-impulso de um motor de foguete transformam-se como os componentes de um 4-vetor. Lembre-se que V_i são os componentes da velocidade da exaustão, em relação ao foguete, e, portanto, não se transformam, e que $a_{\mu\nu}$ são os coeficientes da transformação do referencial, em repouso, do foguete para o sistema de coordenadas em que B_μ é calculado. [Sugestão. Não tenha medo deste problema. Calcule somente B'_μ e o problema estará resolvido.]

39. Uma espaçonave de massa total $M(t)$ emite, por exaustão, massa de repouso numa taxa $dM_e/d\tau$ em velocidade V em relação ao foguete. Em adição, o material não aproveitável é jogado para fora com velocidade zero em relação ao foguete com uma taxa $dM_w/d\tau$.

a) Mostre que a equação do movimento (14.128) também pode ser aplicada, mas o impulso T deve ser definido em termos de $dM_e/d\tau$.

b) Mostre que, dados V e $dM_e/d\tau$, a velocidade final de um foguete acelerado a partir do repouso poderá ser obtida se todo o material desnecessário for jogado para fora o mais depressa possível.

c) Mostre que, para uma dada quantidade de combustível, existe uma velocidade da exaustão otimizada, com o seguinte significado: considere que as propriedades do combustível são tais que é possível converter uma fração α da sua massa de repouso em energia cinética, de forma que $dE_k = \alpha c^2 dM_f$, onde dM_f é a massa do combustível consumida no tempo $d\tau$. Esta energia é utilizada para acelerar parte do combustível usado cuja massa de repouso $dM_e = -\eta dM_f$ adquire uma velocidade correspondente à da energia cinética dE_k . Qualquer parte não aproveitável do combustível usado $(1 - \alpha - \eta)dM_f$ é jogada fora. Mostre que se obtém o impulso máximo tomando o valor máximo de η , isto é, utilizando todo o combustível consumido na exaustão. Qual é o valor otimizado de V ? Suponha que o foguete deva ser acelerado em linha reta de forma que V esteja na direção de $-u$.

40. As Eqs. (6.16) e (6.33) sugerem uma possível Lei da Gravitação Relativística, na qual a força exercida sobre uma partícula de massa m é dada em termos do potencial 4-escalar Φ por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = m \square_\mu \Phi.$$

Escreva a equação covariante que deve ser resolvida para Φ , que se reduz, no caso estático (todas as massas em repouso, $\partial\Phi/\partial t = 0$), à Eq. (6.33). Mostre que, infelizmente, esta teoria simples não satisfaz a Eq. (14.82) e também que a massa de repouso de uma partícula não permanece constante. Mostre que, de acordo com esta teoria,

$$\frac{dm}{dt} = -m \frac{d\Phi}{dt},$$

onde $d\Phi/dt$ é a taxa de variação de Φ na posição da partícula em movimento.

41. Um vetor dA representa um elemento de superfície de área e orientação constantes que se move em velocidade u num sistema de coordenadas sem asterisco. Usando o

fato de a pressão ser um escalar, determine o vetor dA^* que representa o mesmo elemento de superfície em um sistema de coordenadas cujos eixos são paralelos e que se move em velocidade βc , ao longo do eixo x , em relação ao sistema sem asterisco.

42. Verifique que a Eq. (14.163) é uma transcrição 4-vetorial correta das equações precedentes para $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_i$.

43. Verifique que a 4-força eletromagnética dada pela Eq. (14.164) satisfaz a Eq. (14.82). (A demonstração pode ser obitda em duas ou três linhas.)

44. Mostre que a função lagrangiana

$$L = -mc^2(1-u^2/c^2)^{1/2} - q\phi + qu \cdot A/c$$

fornecce a equação do movimento relativisticamente correta (14.79) para uma partícula carregada.

45. Pode ser mostrado que se $L dt$ for um 4-escalar, a função lagrangiana L conduzirá a equações do movimento que são covariantes sob uma transformação de Lorentz. Mostre que para a lagrangiana L dada no Probl. 44, $L dt$ é um 4-escalar.

46. Mostre que da função lagrangiana L dada no Probl. 44 resulta a função hamiltoniana

$$H = mc^2\gamma + q\phi.$$

Escreva H em termos das coordenadas e do momento.

47. Demonstre que as somas, produtos e contrações formadas de acordo com as fórmulas (14.166), (14.167) e (14.168) transformam-se como 4-tensores de ordem apropriada.

48. Demonstre que se um 4-tensor for simétrico ou anti-simétrico em dois índices particulares, esta propriedade será preservada por uma transformação de Lorentz.

49. Conte o número de componentes independentes de um 4-tensor completamente anti-simétrico de várias ordens, isto é, um tensor anti-simétrico em cada par de índices. Mostre que não existe um 4-tensor completamente anti-simétrico, não-trivial, de ordem maior do que quatro e que esse tensor só tem um componente independente. Ele se transforma como um 4-escalar?

50. Quantos componentes independentes tem um 4-tensor simétrico de segunda ordem? Quantos componentes tem um 4-tensor completamente simétrico, isto é, simétrico em cada par de índices?

51. Verifique que o tensor campo eletromagnético definido pela Eq. (14.171) é dado corretamente em termos de E e B pela Eq. (14.172).

52. Determine os componentes de E^* e B^* num sistema de coordenadas com asterisco, em termos de E e B , num sistema de coordenadas sem asterisco relacionados entre si pelos coeficientes de transformação (14.7). (Use a relação 14.172.)

53. a) Um fluido movendo-se em velocidade u tem uma densidade de massa ρ_0 em um sistema de coordenadas, no qual o fluido está em repouso. Mostre que a densidade da massa de repouso, quando o fluido se move em velocidade u é $\gamma\rho_0$, e que a densidade de energia total é $\gamma\rho_0c^2$.

b) O tensor momento-energia cinética para um fluido é definido como

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 U_\mu U_\nu.$$

Mostre que T_{00} é a densidade de energia, que T_{0i} é a corrente de energia na direção i , que $c^{-1}T_{0i}$ é a densidade do componente i do momento e que T_{ij} é a corrente de momento, isto é, a corrente do componente i do momento na direção j .

54. a) Sabendo-se que f é uma densidade de força de corpo (3-força por unidade de volume), mostre que as quatro grandezas $f_0 = u \cdot f_c$ e f_i são os componentes de um 4-vetor, onde u é a velocidade da matéria sobre a qual a força age.

b) Usando o resultado acima e o do Probl. 53, mostre que a conservação de energia e do momento, num fluido em movimento submetido a uma densidade de força de corpo f , pode ser expressada na forma

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = f_\mu.$$

*55. A comparação entre o resultado acima e o do Probl. 35 do Cap. 10 sugere uma Lei da Conservação para um meio contendo tensões na forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} (T_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}) = f_\mu,$$

onde $P_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia das tensões. Suponha que num fluido em repouso os únicos componentes de $P_{\mu\nu}$ diferentes de zero são $P_{11} = P_{22} = P_{33} = p$, onde p é a pressão. Determine $P_{\mu\nu}$ em um sistema de coordenadas em que o fluido se move em velocidade u ao longo do eixo x . Mostre que P_{0i} é a corrente de energia devido à pressão, e que P_{ij} é a corrente de momento devido à pressão.

56. Suponha que um fóton que se move em velocidade c , quando está longe do Sol, seja acelerado pelo campo gravitacional solar e que a aceleração seja dada pela Lei da Gravitação, de Newton. Determine o ângulo de desflexão α na direção do feixe de luz passando próximo ao Sol, em função do parâmetro impacto s .

57. De acordo com a Mecânica Quântica, um fóton de freqüência ν tem energia $h\nu$ e, portanto, de acordo com a Teoria Especial da Relatividade, tem uma massa (cinética) $h\nu/c^2$. Um fóton move-se para cima contra um campo gravitacional uniforme cuja aceleração é g . Suponha que a energia total, incluindo a energia potencial gravitacional, seja conservada e determine a freqüência ν' do fóton após subir numa distância s . Mostre que o resultado concorda com a Eq. (14.176).

58. Um foguete espacial parte da Terra e viaja uma distância L em velocidade βc , $\beta \ll 1$, para chegar a um planeta em repouso em relação à Terra. Os relógios na Terra, no planeta e no foguete são sincronizados para indicar zero no momento da partida. Determine a leitura t_p do relógio no planeta no momento da chegada do foguete. Determine a leitura t_R do relógio do foguete. Determine, em relação a um sistema de coordenadas fixo no foguete, o tempo t_E indicado no relógio da Terra quando o foguete chega ao planeta. O foguete espacial desacelera com aceleração $-g$ por um tempo Δt_R até atingir o repouso em relação ao planeta. Usando a fórmula (14.176), num sistema de coordenadas em desaceleração, no qual o foguete permanece sempre em repouso, calcule (até termos de primeira ordem em β) o tempo $\Delta t_E - \Delta t_R$ ganho pelo relógio da Terra em relação ao relógio do foguete durante a desaceleração. Mostre que o tempo ganho é exatamente o suficiente para trazer de volta o sincronismo do relógio da Terra com o relógio do planeta.

59. Um relógio A , em repouso sobre o eixo de um sistema de coordenadas em movimento de rotação, emite um sinal de freqüência f_A conforme medida efetuada pelo relógio A . O sinal chega ao relógio B , também em repouso no sistema de coordenadas em movimento de rotação, a uma distância r do eixo.

a) Usando as Leis da Relatividade Especial, num sistema sem rotação, mostre que a freqüência f_B do sinal, de acordo com as medidas efetuadas pelo relógio B , pode ser escrita na forma

$$f_B = f_A (1 - 2G/c^2)^{-1/2}$$

onde G é a diferença entre o potencial gravitacional em A e B , definido pela Eq. (6.17), para o campo de força centrífugo no sistema com movimento de rotação.

b) Mostre que esta mesma fórmula concorda até termos de ordem g/c^2 com a fórmula derivada para um campo gravitacional uniforme. [A fórmula (14.176) foi derivada apenas para termos de primeira ordem em gh/c^2 .]

60. a) Mostre, a partir do resultado (14.177), que a distância ds medida em um sistema de coordenadas com movimento de rotação entre dois pontos próximos pode ser escrita na forma

$$(ds)^2 = (dr^*)^2 + r^{*2} [1 - 2G/c^2]^{-1} (d\theta)^2,$$

onde r^* e θ são coordenadas polares no sistema de coordenadas com movimento de rotação, e G é o potencial gravitacional definido pela Eq. (6.17), devido ao campo

de forças centrífugo no sistema com movimento de rotação. Considere o raio de referência, onde $\varphi = 0$, como $r^* = 0$.

b) Suponha que o resultado acima também se aplique, pelo menos aproximadamente, ao campo gravitacional em torno do Sol, mas com φ se anulando agora em $r = \infty$, de forma que, longe do Sol, a Geometria Euclidiana seja válida. Considere uma "linha reta" passando a uma distância h do Sol. Determine, considerando termos de primeira ordem em φ , o acréscimo no comprimento desta linha devido ao campo gravitacional solar. Qual é o acréscimo correspondente no tempo de viagem de um sinal de rádio passando próximo ao Sol?

c) Supondo que o resultado do Probl. 59 se aplique nas proximidades do Sol, e lembrando que a velocidade da luz c é medida em relógios locais, determine o acréscimo no tempo de viagem de um sinal de rádio que passa a uma distância h do Sol, devido à diminuição da taxa no relógio local colocado nas vizinhanças do Sol. Mostre que este efeito acarreta um atraso de tempo igual ao que foi calculado na parte (b), de forma que o tempo total será dobrado.

BIBLIOGRAFIA

A lista apresentada a seguir não é, de maneira nenhuma, uma relação completa de livros sobre o assunto tratado neste texto, mas poderá ser útil ao leitor.

TEXTOS SOBRE MECÂNICA ELEMENTAR

1. J. W. Campbell, *An introduction to mechanics*. New York, Pitman, 1947.
2. R. A. Millikan, D. Roller & E. C. Watson, *Mechanics, molecular physics, heat, and sound*. Boston, Ginn and Co., 1937.

TEXTOS SOBRE MECÂNICA INTERMEDIÁRIA

3. W. Arthur & S. K. Fenster, *Mechanics*. New York, Holt, Rinehart, and Winston, 1969.
4. R. A. Becher, *Introduction to theoretical mechanics*. New York, McGraw-Hill, 1954.
5. R. B. Lindsay, *Physical mechanics*, 2. ed. New York, D. Van Nostrand, 1950.
6. W. D. Macmillan, *Theoretical mechanics*. New York, McGraw-Hill. v. 1: *Statics and dynamics of a particle*, 1927. v. 3: *Dynamics of rigid bodies*, 1936.
7. W. F. Osgood, *Mechanics*. New York, Macmillan, 1937.
8. M. Scott, *Mechanics, statics and dynamics*. New York, McGraw-Hill, 1949.
9. R. J. Stephenson, *Mechanics and properties of matter*. New York, John Wiley & Sons, 1952.
10. J. L. Sunge & B. A. Griffith, *Principles of mechanics*, 3. ed. New York, McGraw-Hill, 1959.

TEXTOS SOBRE MECÂNICA AVANÇADA

11. H. C. Corbin & P. Stehle, *Classical mechanics*. New York, John Wiley & Sons, 1950.
12. H. Goldstein, *Classical mechanics*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1950.
13. H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6. ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1932. (New York, Dover Publications, 1945.)
14. L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Mechanics*. London, Pergamon Press, 1960. (Reading, Mass., Addison-Wesley, 1960.)

15. L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*. London, Pergamon Press, 1959. (Reading, Mass., Addison-Wesley, 1959.)
16. L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity*. London, Pergamon Press, 1959. (Reading Mass., Addison-Wesley, 1959.)
17. Lord Rayleigh, *The theory of sound* (2 vv.), 2. ed. London, Macmillan, 1894-96. (New York, Dover Publications, 1945.)
18. E. J. Routh, *Dynamics of a system of rigid bodies*, Advanced Part, 6. ed. London, Macmillan, 1905. (New York, Dover Publications, 1955.)
19. J. C. Slater & N. H. Frank, *Mechanics*. New York, McGraw-Hill, 1947.
20. A. G. Webster, *The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies*. Leipzig, B. G. Teubner, 1904.
21. E. T. Wittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4. ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1937. (New York, Dover Publications, 1944.)
22. A. Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton, Princeton University Press, 1941.
33. A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl & H. Minkowski, *The principle of relativity*. New York, Dover Publications, 1952. (Publicado originalmente em Londres: Methuen, 1923.) Uma coleção de traduções dos trabalhos originais escritos pelo autor, de leitura fácil e compreensiva.
34. D. Bohm, *The special theory of relativity*. New York, W. A. Benjamin, 1965.
35. M. Born, *Einstein's theory of relativity*. New York, Dover Publications, 1962.
36. R. B. Lindsay & H. Margenau, *Foundations of physics*. New York, John Wiley & Sons, 1936. Contém dois capítulos sobre as Teorias Geral e Especial da Relatividade.
37. N. D. Mermin, *Space and time in special relativity*. New York, McGraw-Hill, 1968.
38. R. D. Sard, *Relativistic mechanics*. New York, W. A. Benjamin, 1970.
39. J. H. Smith, *Introduction to special relativity*. New York, W. A. Benjamin, 1965.
40. E. F. Taylor & J. A. Wheeler, *Spacetime physics*. San Francisco, W. H. Freeman, 1963.

TEXTOS SOBRE ELETRICIDADE E MAGNETISMO

23. R. G. Fowler, *Introduction to electric theory*. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1953.
24. N. H. Frank, *Introduction to electricity and optics*, 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1950.
25. G. P. Harnwell, *Principles of electricity and magnetism*, 2. ed. New York, McGraw-Hill, 1949.
26. A. F. Kip, *Fundamentals of electricity and magnetism*. New York, McGraw-Hill, 1969.
27. L. Page & N. I. Adams, *Principles of electricity*. New York, D. Van Nostrand, 1931.
28. W. T. Scott, *Physics of magnetism*. New York, John Wiley & Sons, 1966.
29. J. C. Slater & N. H. Frank, *Electromagnetism*. New York, McGraw-Hill, 1947.

TEXTOS AVANÇADOS SOBRE TEORIA ELETROMAGNÉTICA

30. J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. New York, John Wiley & Sons, 1962.
31. W. K. H. Panofsky & M. Phillips, *Classical electricity and magnetism*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1962.

LIVROS E TEXTOS ELEMENTARES SOBRE RELATIVIDADE

32. A. Einstein & L. Infeld, *The evolution of physics*. New York, Simon & Schuster, 1938. Um apanhado excelente.

TEXTOS AVANÇADOS SOBRE RELATIVIDADE

41. P. G. Bergmann, *An introduction to the theory of relativity*. New York, Prentice-Hall, 1946.
42. R. C. Tolman, *Relativity, thermodynamics, and cosmology*. Oxford, Oxford University Press, 1934.

TRABALHOS SOBRE MECÂNICA QUÂNTICA

43. W. Heisenberg, *The physical principles of the quantum theory*, trans. by C. Eckart & F. C. Hoyt. Chicago, University of Chicago Press, 1930. (New York: Dover Publications, 1949.)
44. D. Bohm, *Quantum theory*. New York, Prentice-Hall, 1951.
45. M. Born, *Atomic physics*, trans. by John Dougall, 4. ed. New York, Hafner, 1946.
46. L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics – Non-relativistic theory*. London, Pergamon Press, 1958. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.)
47. R. B. Lindsay & H. Margenau, *Foundations of physics*. New York, John Wiley & Sons, 1936. Contém um capítulo sobre Mecânica Quântica.

TEXTOS E TRATADOS SOBRE TÓPICOS MATEMÁTICOS

48. R. Bellman, *Stability theory of differential equations*. New York, McGraw-Hill, 1953.
49. R. V. Churchill, *Fourier series and boundary value problems*. New York, McGraw-Hill, 1941.

50. R. Courant, *Differential and integral calculus*, trans. by E. F. McShane. London, Blackie & Son, 1934.
51. L. Hopf, *Introduction to the differential equations of physics*, trans. by Walter Nef. New York, Dover Publications, 1948.
52. D. Jackson, *Fourier series and orthogonal polynomials*. Menasha, Wisc., George Banta Publishing Co., 1941.
53. T. von Karman & M. A. Biot, *Mathematical methods in engineering*. New York, McGraw-Hill, 1940.
54. W. Kaplan, *Advanced calculus*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1952.
55. O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*. Berlin, J. Springer, 1929.
56. M. S. Knebelman & T. Y. Thomas, *Principles of college algebra*. New York, Prentice-Hall, 1942.
57. W. Leighton, *An introduction to the theory of differential equations*. New York, McGraw-Hill, 1952.
58. H. Levy & E. A. Baggott, *Numerical solutions of differential equations*, New York, Dover Publications, 1950.
59. W. E. Milne, *Numerical calculus*. Princeton, Princeton University Press, 1949.
60. W. F. Osgood, *Introduction to calculus*. New York, Macmillan, 1922.
61. W. F. Osgood, *Advanced calculus*. New York, Macmillan, 1925.
62. W. F. Osgood & W. C. Graustein, *Plane and solid analytic geometry*. New York, Macmillan, 1938.
63. B. O. Peirce, *Elements of the theory of the newtonian potential function*, 3. ed. Boston, Ginn & Co., 1902.
64. B. O. Peirce, *A short table of integrals*, 3. ed. Boston, Ginn & Co., 1929.
65. H. B. Phillips, *Vector analysis*. New York, John Wiley & Sons, 1933.
66. E. T. Wittaker & G. Robinson, *The calculus of observations*. New York, Van Nostrand, 1924.
67. A. P. Wills, *Vector analysis, with an introduction to tensor analysis*. New York, Prentice-Hall, 1931.
68. E. B. Wilson, *Advanced calculus*. Boston, Ginn & Co., 1912.
69. D. R. Wylie, Jr., *Advanced engineering mathematics*. New York, McGraw-Hill, 1951.

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES

CAPÍTULO 1

1. $4,06 \times 10^{-42}$ dina; $9,22 \times 10^{-3}$ dina.
7. b) $\mu mg/(\sin\theta - \mu \cos\theta)$.
9. $t = (v_0/g)[(\sin\theta + \mu \cos\theta)^{-1} + (\sin^2\theta - \mu^2 \cos^2\theta)^{-1/2}]$.
11. $2,0 \times 10^{27}$ t.
13. $1,6 \times 10^{11}$ massas solares.

CAPÍTULO 2

1. a) 200 hp, 1 000 hp, 3 000 hp.
b) 37 300 N, 7 460 N, 2 487 N.
3. $p = p_0$. $v_\infty = v_0 + (p_0/m)$.
5. b) $v = (F_0/4\omega m)(2\omega t - \sin 2\omega t)$, $x = (F_0/8\omega^2 m)(2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t)$.
7. a) $v = v_0$, $x = v_0 t$, quando $t < t_0$,
 $v = v_0 + p_0(t - t_0)/m\delta t$, $x = v_0 t + p_0(t - t_0)^2/2m\delta t$,
quando $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t$,
 $v = v_0 + p_0/m$, $x = v_0 t - p_0\delta t/2m + p_0(t - t_0)/m$,
quando $t > t_0 + \delta t$.
9. $x = 70t - 700(1 - e^{-t/20})$, (x em m, t em s), $v_\infty = 70$ m/s.
Supondo F independente de v .
11. b) $t_s = m(1 - e^{-\alpha v_0})/(\alpha b)$, $x_s = [m/(\alpha^2 b)][1 - e^{-\alpha v_0} - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0}]$.
13. $v = \sqrt{F_0/b} \operatorname{tgh}(\sqrt{bF_0} t/m)$.
15. $v = \sqrt{P/b} (1 - e^{-2bt/m})^{1/2}$.
17. $v = [v_0^{(1-n)} - (1 - n)(bt/m)]^{1/(1-n)}$;
 $x = m[v_0^{(2-n)} - [v_0^{(1-n)} - (1 - n)(bt/m)]^{(2-n)/(1-n)}]/(2 - n)b$;
 $t_s = mv_0^{(1-n)}/(1 - n)b$, ($n < 1$);
 $x_s = mv_0^{(2-n)}/(2 - n)b$, ($n < 2$).
19. $m\ddot{x} = k/x^3$, $x = [x_0^2 + (kt^2/mx_0^2)]^{1/2}$.
21. a) $F = -2ax + 3bx^2$.
b) $v_c^2 = 8ma^3/27b^2$.

23. a) $x^2 = \frac{E}{k} + \frac{\sqrt{E^2 - ka}}{k} \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0\right)$.

b) $x = \sqrt{\frac{a}{2E}} + \sqrt{\frac{2E}{k}} \left| \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0/2\right) \right|$; (intérprete).

25. c) $(2b/a)^{1/6}, (2\pi/3)(m^3 b^4 / 4a^7)^{1/6}$.

27. b) $x_{eq} = 0, \pm \sqrt{2}a$; at $\pm \sqrt{2}a$, $\omega = (v_0/3ma^2)^{1/2}$.

c) $\alpha > [1 + (4V_0/9mv_0^2)]^{-1}$, $\alpha > [1 + (7V_0/36mv_0^2)]^{-1}$,
 $x = a, (7/2)^{1/2}a$.

31. $x = \frac{m}{2b} \ln\left(1 + \frac{bv_0^2}{mg}\right) + \frac{m}{b} \ln \cos\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}(t_0 - t)\right], (0 < t < t_0),$
 $= \frac{m}{2b} \ln\left(1 + \frac{bv_0^2}{mg}\right) - \frac{m}{b} \ln \cosh\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}(t - t_0)\right], (t > t_0),$
onde $t_0 = \sqrt{m/bg} \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{b/mg} v_0)$.

33. $x = (x_0^{3/2} + t\sqrt{9MG/2})^{2/3}$.

37. $C_1 = A \cos \theta$, $C_2 = -\omega_1 A \sin \theta$.

39. $x = x_0 e^{-\gamma t} [\cos \omega_1 t + (\gamma/\omega_1) \sin \omega_1 t]$,

$x = x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$, $x = x_0(\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}(\gamma_1 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_2 e^{-\gamma_1 t})$.

41. $x = [(\gamma_1 x_0 + v_0)e^{-\gamma_2 t} - (\gamma_2 x_0 + v_0)e^{-\gamma_1 t}] / (\gamma_1 - \gamma_2)$, ($v_0 < 0$).

43. a) $k = 4,9 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-2}$, $b = 7,07 \times 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$.

b) 0,076 s.

45. $x = (F_0/k) + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$.

47. $x = [F_0/m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)](\omega_0 \sin \omega t - \omega \sin \omega_0 t)$.

49. $x = \frac{F_0}{m(\gamma^2 + \omega^2)^2} \left[(\gamma^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\gamma \omega \sin \omega t - (\gamma^2 - \omega^2 + \gamma^3 t - 3\gamma \omega^2 t)e^{-\gamma t} \right] + (x_0 + v_0 t + \gamma x_0 t)e^{-\gamma t}$.

53. $x = (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$, $t \leq 3\pi/2\omega_0$;

$x = (B/m)(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} [\cos(\omega t + \theta) + \cos \alpha \sin \omega_0 t + (\omega/\omega_0) \sin \alpha \cos \omega_0 t]$
 $+ (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t$, $\alpha = (3\pi\omega/2\omega_0) + \theta$, $t \geq 3\pi/2\omega_0$.

55. a) $x = 0$ se $t < t_0$, $x = (p_0/k \delta t)[1 - \cos \omega_0(t - t_0)]$, se $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t$,
 $x = (2p_0/k \delta t) \sin(\frac{1}{2}\omega_0 \delta t) \sin \omega_0(t - t_0 - \frac{1}{2}\delta t)$, se $t > t_0 + \delta t$.

57. a) $m\omega_0^2 x = (\frac{3}{2}A + \frac{1}{3}B)e^{-\omega_0 t/3} \cos(\frac{2}{3}\sqrt{2}\omega_0 t)$
 $+ (\frac{3}{8}\sqrt{2}A + \frac{37}{136}\sqrt{2}B)e^{-\omega_0 t/3} \sin(\frac{2}{3}\sqrt{2}\omega_0 t)$
 $- \frac{3}{2}A \cos \omega_0 t - \frac{1}{3}B \cos 3\omega_0 t - \frac{2}{17}B \sin 3\omega_0 t$.

59. $x = (F_0/ma^2)[1 - (1 + at + \frac{1}{2}a^2 t^2)e^{-at}]$.

61. $x = (2F_0/\pi \omega_0^2) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\omega_0 t \right]$.

63. $x = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_0, \\ \frac{p_0}{m\omega_0^2 \delta t} \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \cos \omega_1(t - t_0) - \frac{\gamma}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin \omega_1(t - t_0) \right], & \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t \\ \frac{p_0}{m\omega_0^2 \delta t} e^{-\gamma(t-t_0)} \left[\left(e^{\gamma \delta t} \cos \omega_1 \delta t - 1 - \frac{\gamma}{\omega_1} e^{\gamma \delta t} \sin \omega_1 \delta t \right) \cos \omega_1(t - t_0) \right. \\ \left. + \left(e^{\gamma \delta t} \sin \omega_1 \delta t + \frac{\gamma}{\omega_1} e^{\gamma \delta t} \cos \omega_1 \delta t - \frac{\gamma}{\omega_1} \right) \sin \omega_1(t - t_0) \right], & \text{se } t > t_0. \end{cases}$

CAPÍTULO 3

11. $F_0 R$.

13. a) $k[1 - \sqrt{5} + \ln \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]$; (b) $-k\pi/\sqrt{3}$.

15. $(\ddot{A}_\rho - 2\dot{A}_\varphi \dot{\phi} - A_\varphi \ddot{\phi} - A_\rho \dot{\phi}^2)\hat{\rho}$
 $+ (\ddot{A}_\varphi + 2\dot{A}_\rho \dot{\phi} + A_\rho \ddot{\phi} - A_\varphi \dot{\phi}^2)\hat{\phi} + \ddot{A}_z \hat{z}$.

17. b) $\frac{\partial \hat{f}}{\partial f} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} \frac{\hat{h}}{(f+h)}$, $\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} \frac{\hat{h}}{f+h}$,
 $\frac{\partial \hat{h}}{\partial f} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} \frac{f}{f+h}$, $\frac{\partial \hat{h}}{\partial h} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h}{f}\right)^{1/2} \frac{f}{f+h}$;
 $\hat{r} = (f+h)^{1/2} \left(\frac{\hat{f}}{f^{1/2}} \hat{f} + \frac{\hat{h}}{h^{1/2}} \hat{h} \right)$.

21. $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{\rho} \right) \hat{z}$.

23. a) $F_x = \frac{1}{2}F_0 + \left(\frac{mv^2}{R} - \frac{1}{2}F_0 \right) \cos \frac{vt}{R}$, $F_y = \left(\frac{1}{2}F_0 - \frac{mv^2}{R} \right) \sin \frac{vt}{R}$.

b) $\frac{\pi F_0 R}{2v} \hat{x} + \left(\frac{F_0 R}{v} - 2mv \right) \hat{y}$.

25. $L = (-2mbct^3, mact^2 - mcx_0, mabt^4 + 3mbx_0t^2)$,

$F = (2ma, 6mbt, 0)$,

$N = (-6mbct^2, 2mact, 4mabt^3 + 6mbx_0t)$.

29. $\delta = \exp(-bv_{z0}/mg)$.

33. a) $\alpha_0 = \operatorname{sen}^{-1}(gx_0/v_0^2)$.

b) O ângulo de elevação α_0 deve ser acrescido de $4bv_0 \cos \alpha_0 / 3mg(\cot^2 \alpha_0 - 1)$.

35. a) $5bx^4y^2 - 6abxyz^3$.

c) $- \int_{z_1}^{z_2} F_x dx - \int_{y_1}^{y_2} F_y dy - \int_{x_1}^{x_2} F_z dz$.

37. a) $\frac{1}{2}e^{-R}$.

b) $- \int_{s=-A+r}^{s=A+r} f(s) ds$.

41. $F_x = -ae^2(r_1^{-3} - r_2^{-3}) - xe^2(r_1^{-3} - r_2^{-3})$,
 $F_y = -ye^2(r_1^{-3} - r_2^{-3})$, $F_z = -ze^2(r_1^{-3} - r_2^{-3})$.
43. $\dot{\theta} = (k/m)^{1/2}$, $\omega_r = 2(k/m)^{1/2}$.
45. $kr^2 = E + (E^2 - \omega^2 L^2)^{1/2} \cos(2\omega t + 2\alpha_0)$, $\omega = (k/m)^{1/2}$,
 $\operatorname{tg}(\theta - \theta_0) = (\omega L)^{-1}[E - (E^2 - \omega^2 L^2)^{1/2}] \operatorname{tg}(\omega t + \alpha_0)$,
 θ_0 = ângulo no afélio. (Esta é uma figura de Lissajous com $\omega_x = \omega_y$, isto é, uma elipse.)
47. a) $F = (1 + \alpha r)Ke^{-\alpha r}/r^2$.
d) $L^2 = -mKa(1 + \alpha a)e^{-\alpha a}$, $E = (1 - \alpha a)Ke^{-\alpha a}/2a$.
e) $\tau_c = 2\pi[-K(1 + \alpha a)e^{-\alpha a}/ma^3]^{-1/2}$,
 $\tau_r = 2\pi[-K(1 + \alpha a - \alpha^2 a^2)e^{-\alpha a}/ma^3]^{-1/2}$.
[Não poderá haver um movimento circular estável se $\alpha a \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.]
49. b) Direção oposta, $1,2 \times 10^{-7} \text{ g m}^{-3}$.
51. c) A elipse precessa $2\pi(1 - \alpha)/\alpha$ radianos por revolução, na mesma direção que $\dot{\theta}$ se $\alpha < 1$, na direção oposta se $\alpha > 1$, onde $\alpha^2 = 1 + (mK'/L^2)$.
53. 1 301 km.
55. $\omega_p \doteq \frac{3}{5}\eta(R/r)^2(MG/r^3)^{1/2}$, 0,88 graus por revolução.
57. $\omega_p \doteq \frac{1}{2}K^{3/2}m^{-3/2}r^{-5/2}c^{-2}$.
59. $2,8 \text{ km s}^{-1}$, $12,3 \text{ km s}^{-1}$.
61. $v_1 = (2\pi r_1/Y_1)\{[2r_2/(r_2 + r_1)]^{1/2} - 1\}$,
 $v_2 = (2\pi r_1/Y_1)(r_1/c_2)^{1/2}\{[2r_1/(r_2 + r_1)]^{1/2} - 1\}$.
Vênus: $-5\ 700 \text{ mi h}^{-1}$; Marte: $6\ 700 \text{ mi h}^{-1}$.
63. Perigeu no ponto de $\dot{\theta}$; máximo; $a^3 = gR^2\tau^2/4\pi^2$; $\epsilon = (\lambda - 1)/(\lambda + 1)$, λ = razão entre o máximo e o mínimo $\dot{\theta}$. (Existem muitas outras respostas possíveis.)
73. $x = (E_0/2m\omega^2)(\operatorname{sen} \omega t - \omega t \operatorname{cos} \omega t)$,
 $y = (E_0/2m\omega^2)(2 \operatorname{cos} \omega t - 2 + \omega t \operatorname{sen} \omega t)$,
 $z = 0$.
75. d) Se $\dot{z}_0 = \dot{\rho}_0 = 0$, $\dot{\phi}_0 = -(qB/2mc) \pm [(qB/2mc)^2 - (qa/mp_0^2)]^{1/2}$.
e) $\omega_p = 2[(qB/2mc)^2 - (qa/2mp_0^2)]^{1/2}$.

CAPÍTULO 4

3. $2[1 + (M/m)](gl)^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$.
5. $\cos^{-1}[1 - 0,293m_1^2/(m_1 + m_2)^2]$.
7. 371 s.
9. $M_1 = 39\ 800 \text{ kgm}$, $M_2 = 1\ 946 \text{ kgm}$ (combustível + foguete excluindo a carga).
13. $r = r_0[1 + (5\pi)^{-1}(a^2/r_0^2)(\omega_0 - \omega)Y_0]^2$, Y_0 = tamanho do ano presente. 49 milhas. Menor se a Lua fosse incluída.
17. $m_1(1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \theta_1)/(1 - \alpha^2)$, $\alpha = p_{1F}/p_{1I}$. Medir θ_2 .

21. $(1 + \gamma)p_{1F} = (p_{1I} - p_{2I}) \cos \vartheta_1 \pm [\gamma p_{1I} + p_{2I}]^2 - (p_{1I} - p_{2I})^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1]^{1/2}$, $\gamma = m_2/m_1$.
23. $Q = \frac{p_1^2}{2m_1} \left[\frac{(m_1/m_3) \operatorname{sen}^2 \vartheta_4 + (m_1/m_4) \operatorname{sen}^2 \vartheta_3}{\operatorname{sen}^2(\vartheta_3 + \vartheta_4)} - 1 \right]$.
29. $2\gamma mV^2(1 + \gamma + \gamma^2)^{-1}[\gamma - (v_0/V)(1 + \gamma)^{1/2}]$, onde $\gamma = MG/R(v_0^2 + V^2)$.
39. $x_1 = x_2 = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$, $\gamma = b_1/2m_1$, $\omega_1^2 = -\gamma^2 + (k'_1 + k_3)/m_1$;
 $e x_1 = -x_2 = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_2 t + \theta)$, $\omega_2^2 = -\gamma^2 + (k'_1 - k_3)/m_1$.
41. $x_1 = \frac{(m_2\omega^2 - k'_2)F_0 \cos \omega t}{k_3^2 - (m_1\omega^2 - k'_1)(m_2\omega^2 - k'_2)}$, $x_2 = \frac{k_3 F_0 \cos \omega t}{k_3^2 - (m_1\omega^2 - k'_1)(m_2\omega^2 - k'_2)}$.

CAPÍTULO 5

5. $\omega_0^2 k^2 (1 + \mu^2)^{1/2} / 4\pi \mu g a$ voltas.
7. $\theta = \theta_0 + (N_0/b)t + [\alpha N_0/(I^2 \omega_0^3 + b^2 \omega_0)][b \operatorname{sen} \omega_0 t - I \omega_0 \cos \omega_0 t]$.
11. a) 60° acima da horizontal!
b) $\frac{1}{3}\pi(l/g)^{1/2}$, comparado a $\frac{1}{2}\pi(l/g)^{1/2}$.
13. $g = [4\pi^2(h + h')/r^2][1 + 2h'\delta/(h - h')]$.
15. $x_g = 0$, $y_g = -4a/9\pi$; $I_{0x} = I_{0y} = I_{0y} = 3\pi a^4 \sigma/8$, $I_{0z} = 3\pi a^4 \sigma/4$,
 $I_{gz} = (81\pi^2 - 32)a^4 \sigma/108\pi$, $I_{gx} = (81\pi^2 - 64)a^4 \sigma/216\pi$.
17. $2\ 112 \mu\text{cm}^5$, $2\ 491 \mu\text{cm}^5$, $1\ 169 \mu\text{cm}^5$.
19. 30 jardas.
23. a) $l \operatorname{sen}(\alpha\sqrt{3})$; b) $(5/36)Ml^2$.
25. $2\sqrt{2} \text{ kgm}$, agindo em um ponto no terceiro lado localizado 0,75 m além do vértice. A direção do equilibrante está 135° na direção dos ponteiros do relógio a partir da força de kgf.
27. a) $\mathbf{F}_0 = (0, -6 \text{ N}, -14 \text{ N})$ no centro, $\mathbf{F}_c = (0, -3 \text{ N}, -8 \text{ N})$ em qualquer vértice frontal, $-\mathbf{F}_c$ no vértice anterior adjacente. (Eixo x para fóra, eixo y horizontal e para direita, eixo z vertical, origem no centro do cubo.)
b) $\mathbf{F}_1 = (0, 0, 2 \text{ N})$ no centro, $\mathbf{F}_2 = (0, -6 \text{ N}, -16 \text{ N})$ no centro da face central. (Existem outras respostas corretas.)
c) \mathbf{F}_0 parte (a) no ponto $(17 \text{ cm}, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (0, 2 \times 10^{-3} \text{ Nm}, 5 \times 10^{-3} \text{ Nm})$.
29. $\beta_{opt} = \frac{1}{2}\alpha$, $\alpha_{opt} = 60^\circ$.
31. $A = (100W/Y)e^{100\omega_t Y}$.
33. a) C está a 2,4 m a partir de A na direção $22^\circ 50'$ abaixo da horizontal, 1 045 N, 2 060 N.
b) C está a 20,90 cm a partir de A na direção $28^\circ 45'$ abaixo da horizontal, 994 N, 1 951 N.
35. $y = w(x^2 - \frac{1}{4}D^2)(4\tau_0^2 - w^2 D^2)^{-1/2}$.
37. $L = \sqrt{3}l$, $2WL^3/Yl^4$, $2WL^2/Yl^4$.
39. $-\rho L^4/192Y(b^2 + a^2) - \rho L^2/8n$.

41. $\approx 10^9 \text{ N m}^2$.

43. $p = p_0(1 - \alpha z)^{Mg/RT_0}$, onde $T = T_0(1 - \alpha z)$.

CAPÍTULO 6

3. $x = \alpha a[\alpha^2 + (1 - \alpha)^2(a^2/b^2)]^{-3/4}$, $y = (1 - \alpha)b[(1 - \alpha)^2 + \alpha^2(b^2/a^2)]^{-3/4}$.

5. $g = -(MG/r^2)(r/a)$, ($r \geq a$), $= -(MGr/a^3)$, ($r \leq a$).

$g = (MG/r)$, ($r \geq a$), $=(MG/2a^3)(3a^2 - r^2)$, ($r \leq a$).

9. $T \frac{d}{dr} \left(\frac{R^2 Tr^2}{A^2 p} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi r^2 Gp$, constante arbitrária determinada por

$$M = \int_0^\infty \frac{4\pi A p r^2}{RT} dr, \quad p \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty. \quad A \text{ é o peso molecular.}$$

11. $p = \frac{M^2 G}{4\pi a^4} \left[\ln \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2} \right) - \frac{a^4}{2(r^2 + a^2)^2} - \frac{a^2}{r^2 + a^2} \right]$,

$$T = \frac{AMGr}{2a^2 R} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{a^4} \ln \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2} \right) - \frac{3}{2} - \frac{r^2}{a^2} \right].$$

13. a) $g - g_0 = (MG/a^2)(2 - \sqrt{2})$; b) $g - g_0 = -(\frac{3}{4})(MG/a^2)$.

15. a) $(MG/r) + (MGA^2/4r^3)(1 - 3\cos^2\theta)$;

b) $g_r = -(MG/r^2) - (3MGA^2/4r^4)(1 - 3\cos^2\theta)$,
 $g_\theta = (3MGA^2/4r^4)\sin 2\theta$.

19. a) $2\pi\sigma G$, na direção da folha. (b) É a metade do campo fora da esfera oca.

CAPÍTULO 7

1. b) $ma^* = -bv^* - bgt$.

5. $2\rho\omega v \cos\theta$, ω = velocidade angular de rotação da Terra, θ = colatitude; aproximadamente $1,29 \text{ N m}^{-2} \text{ km}^{-1}$.

7. a) $2m\omega gt \sin\theta$, na direção este. b) $(8\omega^2 h^3/9g)^{1/2} \sin\theta$.

9. $5,25 \times 10^{-4}$ radianos.

13. $\omega = (k/m)^{1/2}$; no sistema com movimento de rotação, m move-se com velocidade angular -2ω em um círculo de raio arbitrário.

17. $0,73 \times 10^6$ radianos s $^{-1}$. ω decrescerá se o elétron girar no sentido positivo em relação a B ; caso contrário, ω crescerá

21. $(2MG)^{1/2} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{a-R} - \frac{4}{a} + \frac{(a-2R)^2}{4a^3} \right]^{1/2}$.

CAPÍTULO 8

1. b) $u = A \sin(n\pi x/2l) \cos(n\pi ct/2l) + B \sin(n\pi x/2l) \sin(n\pi ct/2l)$,
 $n = 1, 3, 5, \dots$

3. $u = \frac{4l}{5\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{5\pi ct}{l} - \dots \right)$.

5. $u = A \sin \omega t (\cos kx - \operatorname{ctn} kl \sin kx)$, $k = \omega/c$.

7. $u = Ae^{-bt/2\sigma} \sin(n\pi x/l) \cos \{ [(n^2\pi^2 c^2/l^2) - (b^2/4\sigma^2)]^{1/2}t + \theta \}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

9. $\left(b \frac{\partial u}{\partial t} = -\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}; \quad g(\eta) = \frac{\tau - bc}{\tau + bc} f(\xi), \quad \xi = -\eta$.

11. $u = f(x - ct) + g(x + ct)$, onde $f(\xi) = g(\xi)$ = função obtida juntando linhas retas nos pontos $f = (-1)^n l/20$, $\xi = (n + \frac{1}{2})l$.

17. $u = (RT/M) \ln(p/p_0)$;

v é uma solução de $v_0^2 - v^2 + (2RT/M) \ln(vS/v_0 S_0) = 2gh$;

$p = p_0 v_0 S_0 / vS$.

19. $v = -(a/r^2)\hat{r}$.

23. $v_x = -(l\pi A/\omega\rho_0 L_x) \sin(l\pi x/L_x) \cos(m\pi y/L_y) \sin(k_z z - \omega t)$,
 $v_y = -(m\pi A/\omega\rho_0 L_y) \cos(l\pi x/L_x) \sin(m\pi y/L_y) \sin(k_z z - \omega t)$,
 $v_z = (k_z A/\omega\rho_0) \cos(l\pi x/L_x) \cos(m\pi y/L_y) \cos(k_z z - \omega t)$.

25. $A \cos(l\pi x/L_x) \cos(m\pi y/L_y) \cos(k_z z + \omega t)$.

27. $v_g = \left(\frac{\tau h}{m} \right)^{1/2} \cos \frac{kh}{2}, \quad c = \left(\frac{\tau h}{m} \right)^{1/2} \frac{2}{kh} \sin \frac{kh}{2}$.

29. $= (3I/2\rho l^3)(l^2 - 4x^2)$, $dp/dz = 12\eta I/\rho l^3$, onde x é a distância de um plano a meio caminho entre as paredes.

CAPÍTULO 9

1. $T = \frac{1}{2}ma^2(\dot{w}^2 \cos^2\zeta + \dot{u}^2 \sin^2\zeta) \exp(2w \cos^2\zeta + 2u \sin^2\zeta)$,

$Q_u = a \sin\zeta (F_r \sin\zeta - F_\theta \cos\zeta) \exp(w \cos^2\zeta + u \sin^2\zeta)$;

$Q_w = a \cos\zeta (F_r \cos\zeta + F_\theta \sin\zeta) \exp(w \cos^2\zeta + u \sin^2\zeta)$;

$Q_u = -2m\dot{s}^2 \sin^2\zeta, \quad Q_w = -m\dot{s}^2 \cos^2\zeta$.

3. a) $T = \frac{1}{2}m(f+h) \left(\frac{f^2}{f} + \frac{h^2}{h} \right), \quad p_f = \frac{m(f+h)}{f} \hat{j}$,

$$p_h = \frac{m(f+h)}{h} \hat{h}$$
.

5. c) ' Q_r ' = ' F_r ' = $mr\omega^2 \sin^2\theta + 2mr\omega\dot{\phi} \sin^2\theta$,

' Q_θ ' = ' F_θ ' = $mr^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta + 2mr^2\omega\dot{\phi} \sin\theta \cos\theta$,

' Q_ϕ ' = $r \sin\theta 'F_\phi'$ = $-2mr\dot{\phi}\omega \sin^2\theta - 2mr^2\omega\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta$.

11. $\omega^2 = [2g/\mu(l_1 + l_2)][1 \pm (1 - \mu)^{1/2}]$, $\mu = [m_1/(m_1 + m_2)][4l_1 l_2/(l_1 + l_2)^2]$.

15. b) $\theta \doteq [\alpha\omega^2/(g - l\omega^2)] \cos\omega t$.

17. $\cos\theta_1 = 2E/3mgR$ se $p_\phi^2 < \frac{2}{3}mR^2 E - 8E^3/27mg^2$; caso contrário o fio não arrebentará.

19. b) $z = 2l - 2(m+M)g/(m\omega^2)$,

$\omega_z^2 = (m+M)g \sin^2\theta / (m+2M\sin^2\theta) l \cos\theta$,

onde $\cos\theta = 1 - (z/2l)$.

21. b) $U = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - m\omega(xy - yx)$
 $= -\frac{1}{2}m\omega^2r^2\sin^2\theta - m\omega r^2\dot{\phi}\sin^2\theta.$

29. $H = c \left[m^2c^2 + \left(p_x - \frac{q}{c}A_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{q}{c}A_y \right)^2 + \left(p_z - \frac{q}{c}A_z \right)^2 \right]^{1/2} + q\phi.$

31. $H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2\sin^2\theta} - (m_1 + m_2)gZ - \frac{m_1 m_2 G}{r},$

$V_Z = -(m_1 + m_2)gZ, V_r = \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2\sin^2\theta} - \frac{m_1 m_2 G}{r}.$

CAPÍTULO 10

5. $T'_{11} = -40, T'_{12} = 15, T'_{13} = 35\sqrt{2},$
 $T'_{22} = 10, T'_{23} = 15\sqrt{2}, T'_{33} = 40.$

13. $T'_1 = 4, T'_2 = 10, T'_3 = -8, \hat{e}'_1 = (\sqrt{3}\hat{e}_1 + \sqrt{2}\hat{e}_2 - \hat{e}_3)/\sqrt{6},$
 $\hat{e}'_2 = (-\sqrt{3}\hat{e}_1 + \sqrt{2}\hat{e}_2 - \hat{e}_3)/\sqrt{6}, \hat{e}'_3 = (\hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3)/\sqrt{3}.$

21. Autovalores: $+1, e^{\pm i\alpha}, \cos\alpha = \frac{1}{2}(\cos\psi + \cos\theta + \cos\psi\cos\theta).$

23. $I = (5/36)Ml^2\mathbf{1}, M = 6m.$

25. $0,15 mh^2 \sin^2\alpha(6 + \tan^2\alpha).$

27. $I_{xx} = \frac{M}{12} \left(\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + c^2 \right), I_{xy} = \frac{M}{12} \left(\frac{ab^3 - a^3b}{a^2 + b^2} \right),$

$I_{xz} = 0, I_{yy} = \frac{M}{12} \left(\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} + c^2 \right), I_{yz} = 0, I_{zz} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$

29. a) $I_1 = mb^2/12, I_2 = ma^2/12, I_3 = m(a^2 + b^2)/12; \hat{e}_1 \parallel a, \hat{e}_2 \parallel b.$

b) $I_1 = \frac{1}{6}ma^2 + \left(\frac{16}{15} - \frac{\sqrt{3}}{5} \right)mb^2, I_2 = \frac{3}{4}ma^2 + \left(\frac{49}{60} - \frac{\sqrt{3}}{5} \right)mb^2,$
 $I_3 = \frac{11}{12}ma^2 + \frac{1}{4}mb^2; (\hat{e}_3 \text{ vertical}).$

31. $(w^2 + h^2)x^2 + (h^2 + l^2)y^2 + (l^2 + w^2)z^2 = 5a^2/M.$

37. $\mathbf{P} = [p_0 - (\Delta p z/l)]\mathbf{1} + (r \Delta p / 2l)(\hat{p}\hat{z} + \hat{z}\hat{p}).$

39. c) $2\eta|(\nabla v)_{is}|^2 + \eta'(\nabla \cdot v)^2$
 $= (\frac{2}{3}\eta + \eta') \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 - (\frac{2}{3}\eta - 2\eta') \sum_{i>j} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$
 $+ \eta \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + 2\eta \sum_{i>j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \text{ onde } |\mathbf{T}|^2 = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij}^2.$

41. $\mathbf{P} = c_1 \hat{z} \hat{z} \frac{\partial \xi}{\partial z} + c_2 \left(\hat{z} \frac{\partial \rho_\perp}{\partial z} + \frac{\partial \rho_\perp}{\partial z} \hat{z} \right) + c_3 (\hat{z} \nabla_\perp \xi + \nabla_\perp \xi \hat{z})$
 $+ c_4 [\nabla_\perp \rho_\perp + (\nabla_\perp \rho_\perp)^\dagger] + \frac{1}{2}(c_5 - c_4) \nabla_\perp \cdot \rho_\perp (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y}),$

onde z é o eixo de simetria e

$\nabla_\perp = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}, \rho_\perp = \hat{x}\xi + \hat{y}\eta.$

CAPÍTULO 11

5. $\omega_3 = N_3(t + t_0)/I_3, \omega_1 = \omega_{10} \cos[\alpha(t + t_0)^2] - \omega_{20} \sin[\alpha(t + t_0)^2],$
 $\omega_2 = \omega_{10} \sin[\alpha(t + t_0)^2] + \omega_{20} \cos[\alpha(t + t_0)^2],$
 $\alpha = N_3(I_3 - I_1)/(2I_3 I_1), t_0 = \omega_{30} I_3 / N_3.$

9. $\cos\psi \cos\phi - \cos\theta \sin\phi \sin\psi \quad \cos\psi \sin\phi + \cos\theta \cos\phi \sin\psi \quad \sin\psi \sin\theta$
 $- \sin\psi \cos\phi - \cos\theta \sin\phi \cos\psi \quad - \sin\psi \sin\phi + \cos\theta \cos\phi \cos\psi \quad \cos\psi \sin\theta$
 $\sin\theta \sin\phi \quad - \sin\theta \cos\phi \quad \cos\theta \cos\theta$

13. $L = \frac{5}{4}Ma^2\theta^2 + \frac{5}{4}Ma^2\phi^2 \sin^2\theta + \frac{1}{4}Ma^2(\psi + \phi \cos\theta)^2$
 $+ \frac{3}{8}Ma^2(\psi' + \phi \cos\theta)^2 - \frac{17}{14}Mag \cos\theta,$

onde ψ, ψ' referem-se ao disco e aos anéis, respectivamente. Velocidades angulares, ω_3, ω'_3 do disco e dos anéis são separadamente constantes. Precessão e nutação como as do pião na Seç. 11.5, mas com p_ψ substituído por $p_\psi + p'_\psi, I_1$ por $\frac{5}{2}Ma^2, I_3$ por $\frac{1}{2}Ma^2, \omega_3$ por $\omega_3 + \frac{9}{2}\omega'_3$.

15. O pião se eleva no tempo $t \doteq (r^2 \omega_{30} \theta_1) / (gl)$ após $\theta_1 / (2\pi\mu)$ revoluções de precessão; o centro de massa move-se em velocidade angular $(gl/r^2 \omega_{30})$ em um círculo de raio $(gl^2/\mu\omega_{30}^2)^{1/3}$, 90° fora de fase em relação à precessão. O pião oscila após $t \doteq (r^2 \omega_{30}) / (2\mu ga)$.

17. $L = \frac{1}{2}I_1\theta^2 + \frac{1}{2}I_1\phi^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}I_3(\psi + \phi \cos\theta)^2 + \frac{1}{2}(M+m)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2)$
 $-(M+m)M'G/r - MM'Ga^2/(4r^3)[1 - 3\sin^2\theta \cos^2(\phi - \alpha)].$

19. $M = 6,0 \times 10^{24} \text{ kgm}, m = 1,6 \times 10^{22} \text{ kgm}, a = 6400 \text{ km}, 24000 \text{ anos}.$

23. $(2\pi)^{-1}[(\omega_0 \cos\theta_0)(I_3\omega_3 - I_1\omega_0 \cos\theta_0)/I_1]^{1/2}.$

CAPÍTULO 12

1. $x_1 = \kappa^2[m_1 S \Delta \omega^2]^{-1/2} q_1 - \frac{1}{2}[m_1 S / \Delta \omega^2]^{-1/2} q_2,$
 $x_2 = \frac{1}{2}[m_2 S / \Delta \omega^2]^{-1/2} q_1 + \kappa^2[m_2 S \Delta \omega^2]^{-1/2} q_2,$
 $S = \frac{1}{2} \Delta \omega^2 + \frac{1}{2}(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2), \text{ na notação da Seç. 4.10}.$

3. $\omega_j^2 = \frac{5V_0}{ma^2} e^{-77}, \frac{V_0}{2ma^2} e^{-77} (13 + \sqrt{73}), \frac{V_0}{2ma^2} e^{-77} (13 - \sqrt{73}).$

5. $x_1 = a + A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),$
 $x_2 = a + A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),$
 $y_1 = A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3) + A_4 \cos(\omega_4 t + \theta_4),$
 $y_2 = -A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3) + A_4 \cos(\omega_4 t + \theta_4),$
 $z_1 = A_5 \cos(\omega_5 t + \theta_5) + A_6 \cos(\omega_6 t + \theta_6),$
 $z_2 = -A_5 \cos(\omega_5 t + \theta_5) + A_6 \cos(\omega_6 t + \theta_6),$
 $\omega_1^2 = \omega_3^2 = \omega_5^2 = k/m, \omega_2^2 = k(l+6a)/m(l+2a), \omega_4^2 = \omega_6^2 = kl/m(l+2a),$
 $\text{onde } x_1, y_1, z_1 \text{ e } x_2, y_2, z_2 \text{ são medidos de } A, B \text{ respectivamente, o eixo } x \text{ é paralelo a } \overrightarrow{AB}, \text{ e } a \text{ é a raiz positiva de } ka(l+2a)^2 - q^2 = 0.$

7. Ambos os ions oscilam em fase paralela ao campo elétrico com amplitude $(qE_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$.

11. $x_k^0 = \Delta'_k / \Delta_0$, onde $\Delta_0 = |K_{lm}^0|$, e Δ'_k é Δ_0 com K_{lk}^0 substituído por

$$(\partial V' / \partial x_l)_0, K'_{kl} = \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x_k \partial x_l} \right)_0 + \sum_m \frac{\Delta'_m}{\Delta_0} \left(\frac{\partial^3 V^0}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} \right)_0.$$

13. $W'_1 = W'_{11} + \sum_{r=2}^f \frac{W'_{1r}W'_{r1}}{W_1^0 - W_r^0} + \sum_{r,l=2}^f \frac{W'_{1r}W'_{rl}W'_{l1}}{(W_1^0 - W_r^0)(W_1^0 - W_l^0)}.$

15. $\omega_1^2 = \frac{g}{l} \left(1 + 4 \frac{m}{M} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \frac{g}{l} \left[1 - (\sqrt{2} + 1) \frac{m}{M} \right],$

$$\omega_3^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \frac{g}{l} \left[1 + (\sqrt{2} - 1) \frac{m}{M} \right].$$

17. $x_1 = x_4 = (1 + \sqrt{5})A \cos(\omega_1 t + \theta), x_2 = x_3 = -2A \cos(\omega_1 t + \theta),$
 $\omega_1 = [k(3 + \sqrt{5})/2m]^{1/2};$

$$x_1 = -x_4 = [(1 + \sqrt{5}) + 2(k'/k\sqrt{5})]A \cos(\omega_2 t + \theta),$$

$$x_2 = -x_3 = [-2 - 2(1 + \sqrt{5})(k'/k\sqrt{5})]A \cos(\omega_2 t + \theta),$$

$$\omega_2 = \omega_1 [1 + (2k'/k)/(3 + \sqrt{5})];$$

$$x_1 = x_4 = 2A \cos(\omega_3 t + \theta), \quad x_2 = x_3 = (1 + \sqrt{5})A \cos(\omega_3 t + \theta),$$

$$\omega_3 = [k(3 - \sqrt{5})/2m]^{1/2};$$

$$x_1 = -x_4 = [2 + (1 + \sqrt{5})(k'/k\sqrt{5})]A \cos(\omega_4 t + \theta),$$

$$x_2 = -x_3 = [(1 + \sqrt{5}) - 2(k'/k\sqrt{5})]A \cos(\omega_4 t + \theta),$$

$$\omega_4 = \omega_3 [1 + (2k'/k)/(3 - \sqrt{5})].$$

De acordo com a simetria, os modos 1 e 3 serão exatamente como os dados acima para qualquer k' ; então duas raízes, ω_1 e ω_3 , são conhecidas, e a equação secular pode ser fatorada.

19. $\omega_1^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\pi}{l^2 \sigma_0} \left[1 - \frac{8a}{3\pi\sigma_0} + \frac{64a^2}{9\pi^2\sigma_0} + \frac{64a^2}{\pi^2\sigma_0} \sum_{j=3,5,7,\dots} \frac{1}{j^2(j-1)(j^2-4)} \right],$

$$u = A \cos(\omega_1 t + \theta) \left[\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{8a}{\pi\sigma_0} \sum_{j=3,5,7,\dots} \frac{j^{1/2}}{(j-1)(j^2-4)} \right].$$

21. Movimentos estacionários $z = 0, r = r_0, \dot{\theta} = \omega_0$. (Coordenadas cilíndricas com $+Ze$ em $z = \pm a, r = 0$.) Vibrações normais: $r = r_0 + A \cos(\omega_1 t + \theta), z = 0; r = 0, z = A \cos(\omega_2 t + \theta)$, se $r > \sqrt{2}a$, caso contrário instável.

$$\omega_0^2 = \frac{2Ze^2}{ma^3} \left(1 + \frac{r_0^2}{a^2} \right)^{-3/2}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 \left(\frac{r_0^2}{a^2} + 4 \right) / \left(\frac{r_0^2}{a^2} + 1 \right),$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 \left(\frac{r_0^2}{a^2} - 2 \right) / \left(\frac{r_0^2}{a^2} + 1 \right).$$

23. Movimentos estacionários:

$$r = r_0, \theta = \theta_0, \dot{\alpha}^2 = Mg/(mr_0 \cos \theta_0), \dot{\phi}^2 = g/[(l - r_0) \cos \theta_0].$$

$$\omega^2 = \dot{\phi}^2(A \pm B), \quad A = \frac{3M}{M+m} \left(\frac{l}{r_0} - \cos^2 \theta_0 \right) + 1 + 3 \cos^2 \theta_0,$$

$$B^2 = A^2 + \frac{3M}{M+m} \left[4 \cos^2 \theta_0 - \frac{l}{r_0} (1 - 3 \cos^2 \theta_0) \right].$$

[Modo instável mais baixo se $\cos^2 \theta_0 < \frac{1}{3}$ e $r_0 < \frac{1}{4}l (\sec^2 \theta_0 - 3)$].

25. Movimentos estacionários: $\theta = \theta_0, \phi = 0, \omega_3 = \text{constante}$.

Vibrações normais: $\theta = \theta_0 + A \lambda \omega_3 \cos(\omega t + \beta)$,

$$\phi = (\omega / \sin \theta_0) A \sin(\omega t + \beta), \quad \omega^2 = \lambda^2 \omega_3^2 + (\omega_0^2 / \sin^2 \theta_0), \quad \lambda = I_3/I_1;$$

$$\theta = \theta_0 + A + (\omega_0^2 B t / \lambda \omega_3 \sin \theta_0), \quad \phi = B, \quad (\text{modo instável com } \omega^2 = 0).$$

27. Movimentos estacionários: $r = r_0, \alpha = \pi, \alpha$ -modo sempre instável; $r = r_0, \alpha = 0$, só será possível se $l < 3r_0$, ambos os modos sempre estáveis.

33. $X_1 = X_2 = 0, E_1 = E_2 = A$. Tente $x_1 = x_2 = B, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dot{\alpha}t$; verifique se $\dot{\alpha} = -3\omega B/2a$.

CAPÍTULO 13

3. a é enviado 1 microsegundo após b .

CAPÍTULO 14

11. a) $P_x = -305 \text{ MeV/c}, p_y = -145 \text{ MeV/c}, p_z = -553 \text{ MeV/c}$, quando o feixe incidente está na direção x .

b) $260 \text{ MeV}, p_x = -205 \text{ MeV/c}, p_y = 0, p_z = -653 \text{ MeV/c}$.

15. Seis.

19. $S = (m_a^2 + m_c^2)c^2 - 2E_a E_c / c^2 + 2p_a p_c \cos \theta_{ac}$.

$$[p = (E^2 - m^2 c^4)^{1/2}/c]$$

29. $ct = \int \{1 - [1 + (T - \frac{1}{2}kx^2)/mc^2]^{-2}\}^{-1/2} dx, \quad T = E - mc^2,$

$$\omega = (k/m)^{1/2}[1 - (3T/8mc^2) + \dots],$$

$$x = (2T/k)^{1/2}(1 + 3T/32mc^2) \operatorname{sen}(\omega t + \theta) - (2T/k)^{1/2}(3T/32mc^2) \operatorname{sen}3(\omega t + \theta) + \dots$$

31. $F = -\partial V/\partial x, V = -mc^2[1 - \omega^2(A^2 - x^2)/c^2]^{-1/2}$.

39. c) $V = c[1 - (1 - \alpha)^2]^{1/2}$.

41. Substitua F por dA na Eq. (14.83).

49. Seis de ordem dois, quatro de ordem três e um de ordem quatro.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

A lista a seguir não pretende ser completa, mas inclui os símbolos importantes que podem dar origem a ambigüidade. Em geral, os símbolos matemáticos padronizados e os símbolos usados de maneira especializada, cuja ocorrência só se dá uma vez, são omitidos. Para facilitar a referência, a página em que o símbolo ocorre a primeira vez é designada imediatamente após a definição do símbolo. Quando a utilização de um símbolo com um sentido particular restringe-se a uma ou a duas seções ou capítulos, indica-se o número do capítulo ou da seção entre parênteses após a definição.

Grandezas escalares são designadas no texto por letras em grifo; grandezas vetoriais, por letras em grifo negrito, a partir do Cap. 3. Uma letra em grifo é usada para representar o módulo do vetor que é representado pela mesma letra em grifo negrito. Uma letra em grifo com índice é usada para representar os componentes do vetor representado pela mesma letra em negrito. Um circunflexo sobre um símbolo vetorial representa um vetor de módulo unitário; um circunflexo sobre uma coordenada (em negrito) representa um vetor unitário na direção em que a coordenada cresce. No Cap. 2, letras romanas em negrito são usadas para indicar grandezas complexas. Os tensores são representados por letras maiúsculas em negrito sem serifas, a partir do Cap. 10. A mesma letra em grifo com índice duplo representa um componente do tensor, e com uma linha ou índice simples, um autovalor. Um ponto sobre uma letra indica derivação em relação ao tempo. Aspas simples são usadas para indicar grandezas associadas às forças fictícias que aparecem em sistemas de coordenadas em movimento.

LETRAS LATINAS

- A amplitude de vibração, 53
 A área, 253
 A coeficiente constante, 80
 AA' plano perpendicular a viga, 272 (Seç. 5.10)
 A potencial vetor, 423 (Seçs. 9.8, 12.7, 14.6)
 A_μ 4-potencial, 621 (Cap. 14)
 a coordenadas generalizadas com vínculo, 407 (Seç. 9.4)
 a distância do foco à diretriz de uma parábola, 157 (Cap. 3)
 a semi-eixo maior da elipse ou hipérbole, 156 (Cap. 3)
 a, \dot{a} aceleração, 23, 116
 a_{ij} coeficientes de transformação de coordenadas, 449
 $a_{\mu\nu}$ coeficientes da transformação de Lorentz, 587

<i>B</i>	coeficiente constante, 66	<i>f</i>	número de graus de liberdade, 407
<i>B</i>	indução magnética, 265	<i>f</i>	densidade de força de corpo, 279 (Caps. 5, 8)
<i>B</i>	módulo volumétrico, 257 (Caps. 5 e 8)	<i>f, f</i>	força por unidade de comprimento, 269, 330 (Seçs. 5.9, 8.1)
<i>b</i>	constante de força de atrito, 48		
<i>b</i>	semi-eixo menor da elipse, 156 (Cap. 3)		
<i>C</i>	constante arbitrária, 63	<i>G</i>	constante gravitacional, 28
<i>C</i>	uma curva no espaço, 111	<i>G</i>	centro de massa, ou centro de gravidade, 246
<i>c</i>	número de vínculos, 407	<i>G</i>	potencial gravitacional, 294
<i>c</i>	velocidade da luz, 47	<i>g, g</i>	aceleração da gravidade, 28s, 251
<i>c</i>	velocidade de fase da onda, 331 (Cap. 8)	<i>g</i>	função arbitrária, 337 (Seç. 8.3)
<i>D</i>	coeficiente constante, 332	<i>g</i>	intensidade de campo gravitacional, 293
<i>D_x</i>	componente do deslocamento elétrico, 47 (Cap. 2)	<i>g_e</i>	aceleração efetiva da gravidade, 313
det	determinante de um tensor, 454	<i>g_μ</i>	coeficiente de sinal, 586 (Cap. 14)
div	divergência de, 124	<i>g_{μν}</i>	tensor métrico, 632 (Seç. 14.8)
<i>dS, dS</i>	elemento de superfície, 124, 472	grad	gradiente de, 122
<i>dσ</i>	seção de choque de espalhamento, 163		
<i>dτ</i>	acréscimo de tempo próprio, 570	<i>H</i>	função hamiltoniana, 430
<i>dΩ</i>	elemento de ângulo sólido, 297	<i>h, h'</i>	distância do centro de massa ao eixo e ao centro de oscilação, 246 (Seç. 5.4)
<i>d*/dt</i>	derivação em relação ao tempo no sistema de coordenadas com asterisco, 306	<i>h</i>	função vetorial arbitrária, 367 (Seç. 8.10)
<i>E</i>	energia total, 51	<i>h</i>	vetor posição <i>O*</i> em relação a <i>O</i> , 303 (Caps. 7, 13)
'E'	energia total fictícia em um sistema de coordenadas em movimento, 320		
<i>E_x</i>	componente de campo elétrico, 45	<i>I</i>	fluxo de massa, 364 (Cap. 8)
<i>E₀</i>	amplitude da intensidade de um campo elétrico harmônico, 45 (Cap. 2)	<i>I_z</i>	momento de inércia em torno do eixo <i>z</i> , 240
<i>E</i>	intensidade de campo elétrico, 165	<i>I</i>	tensor de inércia, 444
<i>e</i>	módulo elementar da carga eletrônica, 45	<i>i</i>	$\sqrt{-1}$, 65
<i>ê</i>	vetor unitário (usualmente com um índice indicando uma direção ou eixo), 445		
<i>F, F'</i>	força, 25, 100	<i>J</i>	impulso, 247
<i>F, F'</i>	foco da elipse, hipérbole ou parábola, 155 (Caps. 3, 4)	<i>J_u</i>	4-corrente, 621
<i>F₀</i>	amplitude real de força harmônica <i>F</i> , 71	<i>j</i>	densidade de corrente elétrica, 619
<i>F₀</i>	amplitude complexa de força harmônica <i>F</i> , 71		
<i>F</i>	força externa total, 188	<i>K</i>	força central constante, 152
<i>F_k^e</i>	força externa total sobre a partícula <i>k</i> , 187	<i>k</i>	constante de mola, 52
<i>F_kⁱ</i>	força interna total sobre a partícula <i>k</i> , 187	<i>k</i>	número de onda angular, 336 (Cap. 8)
<i>F_{l→k}ⁱ</i>	força exercida pela partícula <i>l</i> sobre a partícula <i>k</i> , 188	<i>k</i>	raio de giração de uma viga, 276 (Seç. 5.10)
<i>F_{μν}</i>	tensor campo eletromagnético, 624 (Seç. 14.7)	<i>k_z</i>	raio de giração em torno do eixo <i>z</i> , 240
<i>F_μ</i>	4-força, 607	<i>k₁₂</i>	razão entre acelerações negativas, 24 (Cap. 1)
<i>f</i>	força de atrito, 35 (Caps. 1, 9)	<i>k</i>	vetor de ondas, 368
<i>f</i>	função arbitrária, 336 (Seçs. 8.3, 8.10)	<i>L</i>	comprimento, 227
		<i>L</i>	função lagrangiana, 402
		<i>L, L</i>	momento angular, 129
		<i>L_o, L_o</i>	momento angular em torno do ponto <i>O</i> , 129
		<i>l</i>	comprimento, 30
		<i>l₀</i>	comprimento de repouso, 569

<i>M</i>	massa invariante, 601 (Seç. 14.3)	<i>r</i>	distância radial ao eixo <i>z</i> , 240 (Cap. 5)
<i>M</i>	massa, usualmente a massa total de um corpo de um sistema de partículas, 28	<i>r</i>	raio, distância radial a uma origem, 35, 117, 120
<i>M</i>	número de Mach, 379 (Seçs. 8.14, 8.15)	$\hat{\mathbf{r}}$	vetor unitário ao longo do raio, em coordenadas polares, 117, em coordenadas esféricas, 121
<i>M</i>	peso molecular, 282 (Seç. 5.11)	<i>r</i>	coordenada relativa, 210
<i>m</i>	massa, usualmente de uma partícula, 24, massa de repouso, 546	<i>r</i>	vetor posição, 106
<i>N</i>	momento de encurvamento, 272 (Seç. 5.10)	r_s	ponto de referência, 140
<i>N</i>	número total de partículas, 187 (Caps. 4, 9)	r_1, r_2	pontos de retorno no movimento em <i>r</i> , 155 (Cap. 3)
<i>N, N</i>	torque, 131	<i>Re</i>	parte real de, 71
N_o, N_o	torque em relação ao ponto <i>O</i> , 108	rot	rotacional de, 125
<i>n</i>	módulo de cisalhamento, 267 (Cap. 5, Seç. 10.6)	<i>S</i>	força de cisalhamento, 272 (Seç. 5.10)
$\hat{\mathbf{n}}$	vetor unitário normal à superfície, orientado para fora em superfície fechada, 124	<i>S</i>	intervalo invariante entre dois eventos elevado ao quadrado, 566
<i>O</i>	ponto no espaço, usualmente a origem, 115	<i>S</i>	superfície, área de uma superfície, 124 (exceto no Cap. 5)
<i>OO'</i>	linha através do centróide da seção transversal de uma viga, 274 (Seç. 5.10)	<i>S</i>	parâmetro invariante em uma colisão, 603 (Seç. 14.3)
<i>P, P'</i>	pontos no espaço, 259	<i>S</i>	tensor da deformação, 477
<i>P</i>	potência, 337s (Cap. 8)	<i>s, s</i>	distância, 100
<i>P</i>	potência por unidade de área, 368 (Seç. 8.10)	<i>s</i>	parâmetro de impacto, 162 (Cap. 3)
P_x	componentes do momento de dipolo por unidade de volume, 47 (Cap. 2)	<i>T</i>	temperatura absoluta, 282 (Seç. 5.11)
<i>P</i>	momento linear total, 188	<i>T</i>	energia cinética, 42
\mathbf{P}	tensor das tensões, 471	<i>T</i>	parâmetro invariante em uma colisão, 462 (Seç. 14.3)
<i>p</i>	coeficiente complexo da dependência do tempo na exponencial (e^{pt}), 65	<i>T</i>	período de forças periódicas, 81 (Cap. 2)
<i>p</i>	momento generalizado (usualmente com índice), 396	<i>T</i>	período de revolução, 36 (Cap. 1)
<i>p</i>	pressão, 279	T_0	termos independentes da velocidade na energia cinética, 393 (Cap. 9)
<i>p, p</i>	momento linear, 26, 127	T_1	termos lineares nas velocidades na energia cinética, 393 (Cap. 9)
p_μ	4-momento, 596	T_2	termos quadráticos nas velocidades na energia cinética, 393 (Cap. 9)
p'	excesso de pressão, 346 (Cap. 8)	<i>t</i>	tempo, 22
<i>Q</i>	densidade de fonte, 357 (Cap. 8)	<i>tr</i>	traço, 453
<i>Q</i>	energia produzida em uma colisão elástica, 207 (Caps. 4, 14)	<i>U</i>	função de <i>x, y</i> e <i>z</i> na separação de variáveis, 370 (Cap. 8)
<i>Q</i>	força generalizada (usualmente com índice), 398	<i>U</i>	potencial dependente da velocidade, 422 (Seç. 9.8)
<i>Q</i>	ponto no espaço, 150 (Cap. 4)	U_μ	4-velocidade, 59
<i>q</i>	carga elétrica, 104	<i>u</i>	altura de um fio acima do eixo horizontal, 329 (Seçs. 8.1 a 8.5, 9.9)
<i>q</i>	coordenada generalizada (usualmente com índice), 390	<i>u</i>	energia potencial por unidade de massa, 361 (Seçs. 8.8 a 8.10)
<i>R</i>	constante dos gases, 282 (Seç. 5.11)	<i>u</i>	$1/r$ em uma órbita de força central, 150 (Cap. 3)
<i>R</i>	número de Reynolds, 383 (Seç. 8.15)	<i>u, u</i>	velocidade de uma partícula, 576 (Caps. 13, 14)
<i>R</i>	vetor coordenada do centro de massa, 180	<i>V'</i>	energia potencial efetiva, 150
<i>r, r'</i>	distâncias do foco da elipse ou hipérbole, 155 (Cap. 3)	<i>V</i>	energia potencial, 51
		<i>V</i>	volume, 124
		<i>V</i>	velocidade do centro de massa, 211
		<i>v, v</i>	velocidade, 22, 116
		<i>v_g</i>	velocidade de grupo, 377 (Seçs. 8.13, 14.1)

v	velocidade de um fluido, 348 (Cap. 8)
v	velocidade relativa, 211 (Cap. 4)
v_w	velocidade do vento, 139
W	peso de uma viga, 277 (Seç. 5.10)
W	trabalho, 100
W'	peso sobre uma viga, 277 (Seç. 5.10)
w	peso por unidade de comprimento, 270 (Cap. 5)
X	coordenada x do centro de massa, 190
X	função de x na separação de variáveis, 331 (Cap. 8)
x	coordenada retangular, 22
x	número complexo cuja parte real é x , 73
x_s	coordenada de um ponto de referência, 51
x_μ	4-coordenada, 585
x_0	amplitude complexa da coordenada x oscilando harmonicamente, 72
\hat{x}	vetor unitário paralelo ao eixo x , 98
Y	coordenada y do centro de massa, 190
Y	função de y na separação de variáveis, 371 (Cap. 8)
Y	módulo de Young, 267 (Cap. 5)
y	coordenada retangular, 22
\hat{y}	vetor unitário paralelo ao eixo y , 98
Z	função de z na separação de variáveis, 371 (Cap. 8)
Z	coordenada z do centro de massa, 190
z	coordenada retangular, 22
\hat{z}	vetor unitário paralelo ao eixo z , 98

Letra gregas

α	ângulo da assíntota da hipérbole, 157 (Cap. 3)
α	aceleração angular, 241 (Seç. 5.12)
β	ângulo de fase para oscilações forçadas, 72 (Cap. 2)
β	v/c , 570
γ	coeficiente de amortecimento, 68
γ	razão entre calores específicos, 366 (Seç. 8.10)
γ	$(1 - \beta^2)^{-1/2}$, 570
γ_1, γ_2	coeficientes de amortecimento para osciladores superamortecidos, 69 (Cap. 2)
γ_1, γ_2	coeficientes de amortecimento para osciladores acoplados, 225 (Cap. 4)
Δ	acrédito de, 110
$\Delta\omega^2$	$\omega_1^2 - \omega_2^2$ para osciladores acoplados, 221

δ	acrédito em deslocamento virtual, 189 (Caps. 4, 5)
δ_{ik}	ícone de Kronecker, 450
δm	massa do elemento de volume de um fluido, 359 (Cap. 8)
δt	pequeno acredito de tempo, 78
δV	acrédito de energia potencial, 398 (Cap. 9)
δV	elemento de volume, 349 (Cap. 8)
ϵ	excentricidade da elipse ou hipérbole, 156
ϵ	constante dielétrica, 46 (Cap. 2)
η	coeficiente de viscosidade, 37, 380
η	fase da onda, 336 (Seç. 8.3)
Θ	ângulo de espalhamento no problema de colisão de um corpo, 162
Θ	função de t na separação de variáveis, 331 (Cap. 8)
θ	ângulo entre o fio e a horizontal, 243 (Seç. 5.9, Cap. 8)
θ	ângulo de cisalhamento, 267 (Seçs. 5.8, 5.10)
θ	ângulo entre dois vetores, 100 (Cap. 3)
θ	ângulo de Euler, 493
θ	ângulo de fase, 46
θ	ângulo polar, coordenada polar, 116, coordenada esférica, 120
θ	ângulo de rotação em torno de um eixo, 240
$\hat{\theta}$	vetor unitário na direção de crescimento de θ , coordenada polar, 116, coordenada esférica, 121
ϑ_1	ângulo de espalhamento nas coordenadas do laboratório, 204
$\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$	ângulos de projeção das partículas m_2, m_3, m_4 em uma colisão, 204, 207
κ	constante de acoplamento, 221 (Cap. 4)
λ	comprimento de onda, 336
μ	coeficiente de atrito de deslizamento, 35
μ	massa reduzida, 211
μ_s	coeficiente de atrito estático, 35
ν	freqüência (ciclos/s ou revoluções/s), 168
ξ	linha de nodos, 493 (Cap. 11)
ξ	fase da onda, 335 (Cap. 8)
ρ	densidade, 29, 238
ρ	distância radial do eixo z , 119 (Cap. 3 e Seç. 12.7)
$\hat{\rho}$	vetor unitário orientado radialmente para fora a partir do eixo z , 119
σ	densidade linear de uma corda, 330 (Seçs. 8.1, 9.9)
τ	período, 134
τ	tempo próprio, 570
τ, τ	tensão, 33, 269
φ	ângulo de flexão de uma viga, 274 (Seç. 5.10)
φ	ângulo de azimute, 119
φ	vetor unitário na direção de crescimento φ , 119
Φ	ângulo de Euler, 493
ϕ	potencial de velocidade, 364 (Seç. 8.9)

- ϕ potencial elétrico, 266
 ψ ângulo de Euler, 493
 Ω velocidade angular, 316
 ω freqüência angular (radianos/s), 53
 ω, ω velocidade angular, 241, 307
 ω_c freqüência angular de corte, 342
 ω_0 freqüência (angular) natural de um oscilador sem amortecimento, 65
 ω_1 freqüência (angular) natural de um oscilador amortecido, 68 (Cap. 2)
 ω_{10}, ω_{20} freqüências (angulares) naturais de osciladores sem acoplamento, 221 (Cap. 4)
 ω_1, ω_2 freqüências (angulares) naturais de osciladores acoplados, 221 (Cap. 4)

OUTROS SÍMBOLOS

- O tensor nulo, 480
 O vetor nulo, 102
 1 tensor unitário, 444
 ∇ delta, operador simbólico, 123
 \square_μ 4-gradiente, 494 (Cap. 14)
 \square^2 produto escalar de \square_μ por \square_μ , 495 (Cap. 14)
 $A \cdot B$ produto escalar, 100
 $A \times B$ produto vetorial, 101
 $\langle \rangle_{\text{méd}}$ valor médio, 74

ÍNDICES

- F valor final (após a colisão), 203 (Cap. 4)
 I valor inicial (antes da colisão), 203 (Cap. 4)
 G, O', O, Q etc., identificam os valores no ou em relação aos pontos G, O, O', Q
 a, b, c, d etc., 106
 a, b, c, d identifica grandezas associadas às partículas a, b, c, d , 602 (Cap. 14)
 i, j, k, l, m etc., identificam grandezas associados às partículas i, j etc. ($i, j = 1, 2, \dots$), 187 (Cap. 4, 5)
 i, j, k, l etc., identificam componentes de vetor ou tensor, 445
 j, k, l, m, n identificam grandezas associadas aos modos de vibração correspondentes ou freqüências de oscilação, 79
 $m, \text{máx}$ valor máximo de, 38, 137
 $m, \text{mín}$ valor mínimo de, 38
 $x, y, z, r, \theta, \varphi, \rho$ etc., como índices de símbolos vetoriais, identificam componentes correspondentes de vetor, 22; em geral, identificam grandezas associadas às coordenadas ou eixos x, y, z, r etc., 133
 \hat{n} componente na direção de \hat{n} , 109

- 0 valor inicial ou de referência, 32
 0 valor relativo a um sistema de coordenadas em que o objeto está em repouso, 569
 $0, 1, 2$ etc., identifica o valor no tempo t_0, t_1, t_2 etc., 42 ou valor nos pontos $0, 1, 2$ etc., 139; ou grandezas associadas com o número de partículas $1, 2$ etc., 33; ou usado simplesmente para enumerar um conjunto de grandezas, 63
 $0, 1, 2, 3$ identificam os componentes, t, x, y e z de um 4-vetor, 585
 μ, ν, λ, k etc. índice de um 4-vetor (μ, ν etc. = $0, 1, 2$ e 3), 585

SUPERÍNDICES

- e externo, 187
 i interno, 187
 t transposto de um tensor, 447
 $1, 2, \dots, O, O^*$ identificam grandezas associadas a um evento particular numerado 1, 2, ..., ou identificado por O, O^* , 585, 587 (Cap. 14)
 \cdot relativo ao sistema de coordenadas com linha, 249
 \cdot variáveis adimensionais, 378 (Seçs. 8.14, 8.15)
 $*$ complexo conjugado, 65
 $*$ sistema de coordenadas com movimento relativo, 303
 0 valor relativo ao sistema de coordenadas em repouso, 616
 -1 transformação inversa, 588

ÍNDICE ANALÍTICO

- Aberração, em luz de estrelas, 550s
Aceleração, 23
 angular, 241
 centrípeta, 118, 310s
 componentes, em coordenadas cilíndricas, 120
 Coriolis, 118, 310
 efeito sobre um relógio, 567s
 da gravidade, 28s, 293s, 313s, 625s
 em coordenadas esféricas, 122
 em coordenadas polares, 117
 em coordenadas retangulares, 23, 115, 118s
 normal e tangencial, 174s
 razão das, 24
Acelerador de anel eletrônico, 638
Acelerador de partículas, 531, 562
 de gradiente alternado, 535
Acelerador linear, 562
Acoplamento fraco, 223
Adams, J. C., 181
Adição, de 4-vetores (*ver* Quadrivetor)
 de tensores (*ver* Tensor)
 de vetores (*ver* Vetor)
Alcance de um projétil, 137
Alhures absoluto, 565s
Amortecimento crítico, 70
Amortecimento (*ver* Força)
 sub, super e crítico, 70s
Análise vetorial, 122
Ângulo crítico, 35
Ângulos de, Euler, 492s
 repouso, 35
Antinodo, 372
Ângulo e espelhamento (*ver* Espelhamento)
Aproximações sucessivas, 57
Área, da elipse, 156
 de uma órbita, 152
obtida com o Teorema de Pappus, 254
varrida por um raio vetor, 157s, 159
Ar, movimento do, 323
Asteroide, 542
Assíntota da hipérbole, 157
Associatividade, lei da, 96
Atmosfera, 283
Átomo, 77, 132, 157, 207, 218, 424
 em campo magnético, 317s
 modelo de pudim, 77
 modelo de planetário, 77
Teoria de Bohr, 161
Atrito, 196, 199, 208, 362, 409, 420, 424
coeficiente de, 35
de deslizamento entre superfícies secas, 35, 48
em osciladores acoplados, 226
em superfícies lubrificadas, 48
estático, 35
Autovalor, 456s, 459s
 degenerado, 456s
Autovetor, 456ss, 459s

Bancada de testes da turbina de um foguete, 201
Bastão de beisebol, 248
Betatron, 168, 532, 534
Bohr, N., 161, 552
Brahe, Tycho, 159

Cabo (*ver* Corda)
Cálculo das variações, 425

Calor, 199, 356, 362, 422
 fluxo de, 356
 Camada neutra, 274
 Câmara de bolhas, 167
 Campo eletromagnético, 165ss, 168, 199, 423
 movimento relativístico num, 611s
 Campo gravitacional, intensidade de, 293
 fluxo de, 297
 Campo magnético, 104, 165ss, 317, 422s
 Carga e corrente elétrica, lei de transformação, 621
 Catenária, 271
 Causalidade, 561
 Cavidade, vibrações normais em, 228, 374
 Centro de gravidade, 261, 291ss
 em relação a um ponto, 292
 (ver também Centro de massa)
 Centro de massa, 190, 210, 248ss, 251s
 do hemisfério, 253
 em relação a sistemas de coordenadas diferentes, 219
 energia do, 603
 movimento do, 190, 216, 218
 sistema de coordenadas do, 212s, 603
 velocidade do, 217s
 Centro de oscilação, 247
 Centro de percussão, 248
 Centróide, 253
 a partir dos teoremas de Pappus, 224
 da seção transversal de uma viga, 275s
 (ver também Centro de massa)
 Chadwick, J., 206
 Ciclone, 313
 Ciclotron, 168, 319, 532, 534
 Ciência exata, 19
 Cilindro, rolando em plano inclinado, 405
 rolando em cilindro, 411ss, 414
 Cinemática, 114
 dos fluidos, 313ss
 num plano, 114ss, 117
 em três dimensões, 118
 Circuitos elétricos acoplados, 227s
 oscilantes, 62

Coeficiente de atrito (*ver Atrito*)
 Coeficiente de restituição, 209
 Coeficiente de viscosidade (*ver Viscosidade*)
 Colisão, 161s, 202ss, 205s, 213ss
 de primeira e segunda espécie, 207s
 elástica, 203s, 214
 endoérgica e exoérgica, 207s
 inelástica, 207s, 209
 nuclear, 207s
 parâmetros invariantes, 602s
 relativístico, 600ss
 Combinação linear, 64
 Cometa, 150
 Componente, de um tensor (*ver Tensor*)
 de um vetor (*ver Vetor*)
 do torque, 108
 Compressão, 265s, 278, 361
 Compressibilidade, 351, 380
 Comprimento, definição, 556
 de repouso, 569
 de um objeto em movimento, 554, 556ss
 unidade padrão, 557s
 Comprimento de onda, 335
 Compton, efeito de, 233
 Comutatividade, lei da, 96
 Condições de contorno, para ar em caixa, 371
 para corda, 331s, 384
 para tubo com extremidades abertas, 373
 Condições iniciais, 43, 53, 63, 131, 203, 331
 Cone do corpo, 488s
 Cone do espaço, 488s
 Cone de luz, 564ss
 Configuração, 391, 432
 espaço de, 432
 Conjugado, 261ss, 264
 Conservação da energia (*ver Energia*)
 do momento angular (*ver Momento angular*)
 do momento linear (*ver Momento linear*)

Constante arbitrária, 45, 63ss, 66, 131, 187
 Constante dielétrica, 46, 76s
 Constante do movimento, 53, 133ss, 150, 323, 610
 existência da, no problema dos três corpos, 322s
 Conta, deslizando sobre um aro, 420s
 deslizando num arame, 405
 Contração de um tensor, 624
 Coordenadas adimensionais, 378, 383
 cilíndricas (*ver Sistema de coordenadas*)
 curvilíneas, 120, 402
 ignoráveis, 414s, 431, 526s, 529s
 internas, 216
 generalizadas, 389ss, 392s, 407s
 energia cinética em, 393s
 energia potencial em, 398
 para cordas vibrantes, 425
 normais, 516, 518, 525, 529
 para cordas vibrantes, 428
 ortogonais, 393, 395
 parabólicas, 174, 434
 relativas, 210, 213
 Corda discreta (*ver Corda vibrante constituída de partículas*)
 Corda, equilíbrio de uma, 269
 Corda vibrante, 228, 330
 com densidade variável, 428
 constituída de partículas, 340, 427
 equações de Lagrange para, 427s
 modo normal, 333, 344, 428
 solução geral, 334, 336, 428
 (ver também Onda)
 Cordas e cabos flexíveis, 268ss
 Coriolis, aceleração (*ver Aceleração*)
 Corpo macroscópico, 196s
 Corpo rígido, 21, 237ss, 390, 404, 485, 568
 coordenadas para, 233ss, 238, 485, 492ss
 rotação do, 197s, 202, 208s
 em torno de um eixo, 240ss

em três dimensões, 486s, 489ss, 494, 495ss
 livre, 489ss, 492, 487s
 Corpos astronômicos, movimento dos, 196, 202, 206
 Corrente elétrica, 353, 621
 4-corrente, 621
 Curva, 115s

Decomposição de um tensor, 477
 Definição, 19, 551, 555
 operacional, 549, 554, 556, 574, 592
 Deformação, 266s, 274s
 de cisalhamento, 266, 268, 476s
 elástica, 62, 264, 266s
 em fluido sob tensão, 281
 em sólido, 477ss
 plástica, 62, 264

Degenerescência, 455s, 459ss, 524, 530
 aproximada, 524

Densidade de energia, cinética, 360
 potencial, 361

Densidade de força, 279ss, 355
 devido à pressão, 355s
 viscosa, 474

Densidade de massa, 238, 348, 365s
 própria, 604s

Derivada (*ver Diferenciação*)
 direcional, 122
 logarítmica, 69

Derivada em relação ao tempo de um vetor, 108s
 em sistema com movimento de rotação, 305ss, 308, 479

Derivada total em relação ao tempo, 348, 396s

Deslocamento, 4-vetor, 589

Deslocamento gravitacional vermelho, 628

Determinante de um tensor, 454, 461

Díada, 442
 produto da, 442

Diádica, 446ss

Diagonalização de um tensor simétrico,

455ss, 513ss, 516s, 905
 em f dimensões, 518
 Dicke, R. H., 626
 Dielétrico, meio, 76
 Diferenciação,
 de um vetor, 108ss
 em coordenadas curvilíneas, 120s
 total e parcial, 348s, 395ss
 Dilatação do tempo, 567
 Dinâmica, 21, 23s
 Dimensões, 30s
 Diretriz, 157
 Disco, momento de inércia do, 257s
 rolando sobre uma mesa, 405s
 Dispersão, 77, 343, 375
 anômala, 77
 Distância própria, 590
 Distorção, da forma de onda, 376s
 de um feixe, 279s
 Distributividade, lei da, 96
 Divergência de uma função vetorial, 124, 126s, 350
 Efeito Doppler, relativístico, 574ss, 582, 593
 fórmula, 576s
 Efeito Mössbauer, 567, 628
 Einstein, A., 20, 304, 549ss, 552, 570, 596, 599s, 624ss, 627, 629, 631
 Eixo principal, 456, 465
 de um corpo rígido, 465
 Eletrodinâmica relativística, 618ss
 Elétron, 45s, 75
 spin do, 506
 Elipse, 155ss, 158s
 foco da, 155
 semi-eixo maior, 158
 Elipsóide de inércia, 470s, 490s
 Energia, 196, 417
 absorção em meio dielétrico, 76s
 cinética, 42
 de rotação, 241, 469, 497
 de uma partícula, 42, 128
 de um fluido, 361

de um sistema de partículas, 193
 em coordenadas generalizadas, 392
 interna, 207
 no problema de dois corpos, 211
 no problema de n corpos, 215s
 relativística, 128, 599
 conservação da, 51, 133, 196ss, 199, 237, 360, 416s, 598s
 a partir das equações de Lagrange, 417, 421
 para um corpo rígido, 237, 486
 para um fluido, 360ss, 363s
 para um meio contínuo, 474
 para uma partícula, 51, 132s, 165s
 para um sistema de partículas, 193, 197ss
 constante do movimento (*ver também*
 Integral da energia)
 de expansão e compressão, 361
 de repouso, 598
 eletromagnética, 199
 e massa, 598s
 fluxo de, 337, 369
 fórmula relativística, 206, 598
 interna, 207, 216ss
 no problema dos três corpos, 319, 323, 326s
 potencial, 51, 140, 194ss
 de uma corda vibrante, 425ss, 428s
 de uma partícula, 52ss, 55, 132, 140ss
 de um sistema de partículas, 194ss
 efetiva, 150, 153, 418, 421, 497
 em coordenadas generalizadas, 397s
 em fluido, 360s
 total, 60s
 Engenheiro, 44, 62, 264
 Eötvös, R., 626
 Equação da continuidade, 351, 357, 363
 Equação de estado (*ver Fluido*)
 Equação de diferenças, 341s
 Equação de Hamilton, 431
 Equação de Laplace, 298, 365
 Equação de movimento, de um corpo

rígido, 237ss, 258s, 275, 486, 494
 de Poisson, 298
 de uma corda vibrante, 329, 340, 428
 de um fluido, 356
 de um meio contínuo, 474
 de uma partícula, 30, 41, 127
 de um sistema de partículas, 187
 em coordenadas generalizadas, 389ss, 392, 401, 429s
 em sistema de movimento, 304, 311s
 linearizadas, 511ss
 relativística, 607ss, 610ss
 soluções de, 608ss
 sobre a Terra em movimento, 312
 Equação de onda, 330, 343s, 366ss, 369
 Equação diferencial
 ordinária, 42ss, 131
 homogênea, inhomogênea, 63ss
 linear, 62ss, 65
 método numérico de solução, 44s, 132, 215
 ordem da, 62
 solução geral, 63, 71
 solução independente, 64
 solução particular, 64, 71
 solução estranha introduzida por
 diferenciação, 170
 simultânea, 131, 220
 teorema da existência, 43s
 parcial, 331s
 métodos numéricos, 331, 341
 separação das variáveis, 331
 solução geral, 333, 336, 373
 Equações covariantes, 304, 591
 Equações de Lagrange, 21, 400, 402, 408, 512
 do movimento de um fluido, 347
 para uma corda vibrante, 425ss
 Equações de Hamilton, 431
 Equações de movimento de Euler
 para um corpo rígido, 486
 para um fluido, 347, 356
 Equações diferenciais lineares simultâneas, 131, 220
 Equações do campo gravitacional, 296ss
 Equação secular, 221, 225, 457s, 460s, 513s, 528
 Equilibrante, 260
 Equilíbrio, 55, 259, 509ss
 configuração, de, 509ss
 de uma corda ou cabo, 268s
 de uma viga, 271ss
 de um corpo rígido, 261
 de um fluido, 278ss
 dinâmico, 487
 estável, 55, 88s, 509s, 516
 indiferente, 55
 instável, 55, 88, 510, 516
 ponto de, 55, 322, 414
 Escalar, 96
 4-escalar (*ver Quadriescalar*)
 3-escalar, 589
 Escoamento, estacionário, 362ss, 380ss, 383, 467, 492
 plástico, 62
 turbulento, 383
 viscoso, 380, 474s
 Esfera, momento de inércia da, 259
 oca, campo gravitacional da, 295ss
 Espaço das fases, 432s
 Espaço-tempo, 564
 quadridimensional, 564
 Espectômetro, de massa, 168
 de raios beta, 168
 Espalhamento, 161ss, 169, 206, 212ss, 215
 ângulo de, 162, 204ss, 213s
 Estabilidade, 509ss, 531, 542
 Estado, de um sistema mecânico, 429
 estacionário, 74
 Estática, 21, 258, 267
 de estruturas, 264s
 de fios e cabos, 268ss
 de fluidos, 278ss
 de vigas, 271ss, 274
 Esteira, 200
 Estrela, 196, 551, 579s
 dupla, 551

Estrutura indeterminada estatisticamente, 265
 Estruturas, 264s
 Euler, L., 347, 356
 Eventos no espaço-tempo, 563s
 Excentricidade da elipse, 156, 158s
 Expansão do universo, 631

Fase, 66, 71
 de uma onda, 335
 Figuras de Lissajous, 134
 Fitzgerald, G. F., 570
 Fluido, 278, 347ss, 350s, 473
 cinemática de, 347ss
 corrente de, 363
 energia potencial em, 361
 equação de estado de um, 282s
 equação do movimento de um, 347s, 355
 equilíbrio de um, 278ss
 escoamento de um, 352ss, 355
 escoamento estacionário de um, 362ss
 escoamento irrotacional de um, 354s, 364s
 homogêneo, 356, 361
 problemas similares em, 378
 ideal, 355, 361s, 380, 473
 incompressível, 351, 361, 365, 380
 isotrópico, 474, 476
 leis da conservação para o movimento do, 357s
 tensor energia-momento relativístico, 642
 viscoso, 362, 380ss, 383, 474ss

Fluxo, da intensidade do campo gravitacional, 296s
 irrotacional, 354, 365

Foco das seções cônicas, 155

Foguete, 201
 movimento relativístico de um, 612ss

Força, 25
 aplicada, 44ss
 central, 145ss, 148, 196, 317

centrífuga, 36, 149, 311, 401, 404, 434, 437
 centrípeta, 36
 componentes de, 34s, 104ss
 de atrito (*ver Atrito*)
 de amortecimento, 47s
 de cisalhamento, 272
 conservativa, 142, 145, 193s
 de Coriolis, 310s, 313s, 317, 404, 434, 437
 definição de, 26
 dependente da posição, 52, 132, 140
 dependente do tempo, 44s, 132
 dependente da velocidade, 43, 131
 de vínculo, 237, 408ss
 do corpo, 279, 356s, 379s
 eletromagnética, 165, 423s
 potencial para, 423
 em Relatividade, 558
 externa, 187ss, 190, 209s, 218
 fictícia, 149, 304, 311, 401
 4-força, 607
 generalizada, 397ss
 impulsiva, 78s, 247 (*ver também Impulso*)
 interna, 187ss, 195s, 209s, 218, 237, 265, 359
 lei relativística de, 616ss
 periódica, 80
 potencial para, 423
 proporcional ao inverso do quadrado, 58s, 147, 152s
 redução de um sistema de, 263s
 resultante, 260s, 263s
 3-força, 607
 unidade de, 30
 Forma diagonal, 455
 Fóton, 233, 600
 Frequência angular, 71, 151
 Frequência de corte, para corda de partículas, 343s
 para ondas num tubo, 374, 377
 Frequência normal de vibração, 333, 344, 372s

Função, arbitrária, 337
 de Green, 82
 de ponto, escalar, 111
 de ponto, vetorial, 111
 hamiltoniana, 430s
 lagrangiana, 402, 409, 421
 para uma corda vibrante, 427
 relativística, 438, 640
 potencial da velocidade, 364
 vetorial linear, 442, 445s

Furacão, 313

Futuro absoluto, 566

Galileu, 20, 626

Gás perfeito, 282

Gauss, Teorema da divergência, 124, 281, 353, 363, 432

Geometria, em Relatividade, 629ss
 euclidiana, 629

Giroscópio, 192s, 502

Graus de liberdade, 406

Gradiente, 122
 4-gradiente, 594

Gravidade, aceleração da, 28, 247, 293s
 efetiva, 313

Gravitação, 28s, 36, 147, 152, 157, 198, 291ss, 424
 constante da, 28s, 152, 291
 fluido em equilíbrio sob, 280
 teoria relativística da, 618, 625, 633

Hamilton, W. R., 21, 430s

Heisenberg, W., 20

Hemisfério, centro de massa do, 253

Herpolodia, 491

Hidrogênio, molécula iônica, 142

Hipérbole, 155, 157ss

Hooke, lei de, 62, 267, 269, 281, 478

Impulso, 42, 78ss, 128, 247
 de um foguete, 201, 614

Índice, de campo, 534
 de refração, 76

Inercial, força, 625

sistema de coordenadas, 549, 555, 625

Instante inicial, 43, 131

Integração de um vetor (*ver Vetor*)
 num volume, 252s

Integral, de energia, 53ss, 133, 142, 416ss, 609
 de Fourier, 81
 de linha, 112ss
 do momento angular, 148
 elíptica, 244

Intensidade de campo elétrico, 46, 76, 165s, 295, 423

Intervalo, tipo espaço, 490s
 tipo tempo, 490

Ionosfera, 46

Invariância das equações do movimento, 304, 591, 606

Invariante, 304, 453
 tensor, 461
 (*ver também Quadriescalar*)

Jacobiano, determinante, 391

Joule, J. P., 199

Júpiter, 542

Kennedy, R. R. e Thorndike, E. M., experiência, 551

Kepler, J., 159s

Lagrange, J. L., 21, 390, 535

Lâmina plana, 256

Larmor, Teorema de, 317ss

Lei associativa, 96

Lei comutativa, 96

Lei do inverso do quadrado, 147, 154

Leis de conservação, 196ss, 199, 417, 642
 de Kepler, 159s
 para o movimento de um fluido, 357ss
 para um corpo rígido, 237
 relativística, 596ss, 595

Lei distributiva, 96

Leverrier, U. J. J., 160

Limiar, 604

Limite elástico, 62

Linha, de ação, 259

de corrente, 363
 de nodos, 493
 de transmissão, 62, 228, 347
 Linhas de força, 296
 Lorentz, condição de, 619
 contração de, 570, 572, 583
 Lorentz, H. A., 570
 Lua, 36, 202, 319ss
 Luz, deflexão pelo Sol, 627, 631
 propagação da, 564ss, 573s, 627, 631
 velocidade da, 46s, 197, 206ss, 346,
 550, 553s, 561s

 Mach, E., 625, 629
 Magneto, 166
 Magnetron, 171
 Máquina de Atwood, 32s, 409
 Marés, 199, 202
 Massa, 24, 28, 557, 596s
 centro de (*ver* Centro de massa)
 conservação de, 357ss
 em Relatividade, 598
 de repouso, 206, 596
 fluxo de, 352s
 numa onda sonora, 368
 gravitacional, 629
 invariante, 601ss
 reduzida, 211
 transversal, 611
 unidade de, 24
 Mastro, 264s
 Matrizes, 444, 450
 produto de, 447
 soma de, 447
 Maxwell, I. C., 20, 550s
 Mecânica Estatística, 431, 433
 Mecânica Ondulatória, 370, 431, 600
 Mecânica Quântica, 20s, 27, 62, 77, 161,
 165, 196, 199, 202, 206, 211, 228, 417,
 431, 600
 Meio contínuo, 21, 23, 329, 474, 624, 642
 Membrana vibrante, 228
 Mercúrio, órbita de (*ver* Precessão)

Método numérico de solução (*ver*
 Equações diferenciais)
 Métodos de relaxação, 269
 Metro, definição de, 557s
 Michelson, A. A. e Morley, E. W., 550,
 570, 580
 Mínimo, teste para, 511
 Minkowski, H., 588
 Modelo, do pudim, 77
 planetário do átomo, 77
 Modo, de propagação num tubo, 374
 de vibração (*ver* Modo normal)
 normal de vibração, 222, 333, 513
 de uma corda vibrante, 333s, 345,
 428
 de um fluido em caixa, 370ss
 de osciladores acoplados, 223ss,
 226, 333s, 344, 512s
 Módulo,
 de cisalhamento, 267, 274, 478
 de elasticidade (*ver* Módulo
 volumétrico; Módulo de
 cisalhamento; Módulo de Young)
 de um vetor, 96
 volumétrico, 267, 281, 356, 362,
 365s, 478
 isotérmico, 366
 adiabático, 366
 Molécula, 196, 207, 218, 424
 Momento (*ver* Linear, Angular e
 Momento generalizado)
 lei da conservação relativística, 603
 potencial de, 424
 Momento angular, 129ss, 147, 190s, 396
 conservação do, 148, 197s, 199s,
 200ss, 203, 237, 239, 359s, 417
 do corpo rígido, 237, 240
 interno, 218
 orbital, 198, 218
 rotacional, 198
 spin, 198, 218
 vetor, 130
 Momento angular e energia intrínseca,
 218

Momento de dipolo, 47
 Momento de inércia, 240, 255, 464
 de uma esfera, 257
 de um anel, 256s
 de um disco, 257
 principal, 465
 Momento de inércia principal degenerado,
 465
 Momento de octopolo, 301
 Momento de quadripolo, 301
 Momento de uma força, 106s
 Momento de um vetor, 106s
 Momento fletor, 272
 Momento generalizado, 396, 424s
 Momento linear, 26, 41, 127, 187s, 190,
 358s, 396
 conservação do, 188s, 196ss, 199ss,
 237, 358ss, 417, 596ss
 densidade de, 353, 358
 interno, 216s
 medida do, 168
 no problema de dois corpos, 211
 potencial do, 207
 relativístico, 206, 598
 vetor, 127
 Momento transferido numa colisão, 603
 Movimento, celestial (*ver* Corpos
 astronômicos)
 estacionário, 525s
 interno, 216
 Movimento linear, 216ss
 Multiplicação, de vetores (*ver* Vetor)
 de 4-tensores (*ver* Quadrítensores)
 de 4-vetores (*ver* Quadrivetores)
 de tensores (*ver* Tensor)
 Múons, vida média de, 567

 Netuno, 160
 Nêutron, 206
 Newton, 20, 25ss, 28, 36s, 152, 159,
 161, 296, 366
 Newton, leis do movimento de, 21, 25ss,
 192, 195, 304, 389, 402, 549, 552
 relativística, 552

(ver também Equações do Movimento)
 terceira lei de, 26s, 166, 188s, 197s,
 237, 265, 359, 362
 forma forte, 166, 191, 198
 forma fraca, 166, 189, 195, 209
 na teoria da relatividade, 616
 Nodos, 372
 Núcleo, 207s, 218
 raio do, 164
 residual, 208
 Número, de Mach, 379
 de onda, 336
 de ondas angular, 336
 Números complexos, 65ss, 68, 71
 Nutação, 498

 Observadores, movendo-se relativamente,
 562
 Onda, eletromagnética, 47, 77, 346, 376,
 550
 de deslocamento, 336, 343, 367, 370s,
 374
 em forma 4-vetorial, 602
 em uma corda, 334
 em uma corda de partículas, 340
 em uma linha de transmissão, 347
 em um sólido, 368
 em um tubo, 374
 esférica, 369
 estacionária, 340, 371
 gravitacional, 629
 harmônica, 334, 368
 longitudinal, 368
 plana, 367
 propagação de, 344s
 reflexão de, 338ss
 sonora, 346, 366, 593
 potência em, 368s
 velocidade da, 364s
 velocidade em, 368, 371
 Operador vetorial linear, 443, 446
 Órbita, aperiódica, 150s
 de equilíbrio, 532
 de precessão, 161, 179

elíptica, 159s
 fechada, 151, 161
 hiperbólica, 161s, 164
 limitada, 151, 161
 para uma força proporcional ao inverso do quadrado, 153ss, 159ss
 relativística, 611
Orbital, energia, momento linear, momento angular, 218s
Ordem de um tensor, 623
Oscilação (*ver também Oscilador harmônico*, Modo normal de vibração, Pequenas vibrações)
Oscilações de Betrator, 531ss, 534
Oscilador harmônico, 53, 60ss, 431s, 135
 acoplado, 225, 341, 419, 512ss
 com amortecimento, 225, 519s
 com força aplicada, 227, 517ss
 coordenadas normais para, 428, 516, 518, 521, 525
 modos normais, 222, 224s, 428, 513ss, 516
 teoria da perturbação para, 520s
 tipos de acoplamento, 225, 227s
amortecido, 61, 67ss
 criticamente, super, sub, 70
energia do, 69
 em duas e três dimensões, 131ss, 134s
forçado, 61, 71s, 74, 79ss, 81
isotrópico, 135s
livre, 61
 potência fornecida pela força aplicada, 74ss

Parábola, 137, 155, 157
Paradoxo, em Relatividade, 553s, 561
 dos gêmeos, 577, 628
Paramétrico, representação de uma curva, 113, 115s, 118
Parâmetro do impacto, 162s
 invariante em uma colisão, 602
Partícula, 21s, 197, 218s
 alfa, 164
 alvo, 212, 604

elementar, 158, 197
 incidente, 212
 sistema de, 21, 187ss, 190, 198, 215ss, 218s
Partículas atômicas, movimento das, 196ss, 199
Pascal, Princípio de, 279
Passado absoluto, 566
Pêndulo, composto, 245ss
 de Foucault, 314s
 esférico, 417ss
 simples, 242ss
Pequenas vibrações, 228, 509ss, 526
 em torno do movimento estacionário, 525ss, 528
Periélio, 158
Período de revolução, 152, 159
Planeta, 28, 152s, 159ss, 196, 199, 628
Pião, 192, 495ss
 simétrico, 192s, 495ss
Plano invariante, 491
Plano mediano, 533
Plutão, 160
Poincaré, H., 588, 596
Poinsot, solução para um corpo com movimento de rotação, 490s
Poiseuille, lei de, 382
Polarização, 76
Polinômio de Legendre, 301
Polodia, 491
Ponto de referência, 51s, 140
 de retorno, 54, 59, 153, 155, 159
Ponto de sela, 321
Ponto singular, 321
Posição angular, 240s
Postulado da velocidade da luz, 550s
Potência, 42, 73ss, 337s, 368ss
 fator de, 74
Potencial, dependente da velocidade, 422
 de velocidade, 364
 elétrico, 166ss, 295, 423
 escalar e vetor, 423, 619
 gravitacional, 294, 628
 momento, 424

Precessão, do eixo da Terra, 505
 de uma órbita elíptica, 160, 182
 de um corpo com movimento de rotação, 487s
 de um giroscópio, 193, 530
 de um pêndulo de Foucault, 315s
 de um pião, 497s
 do periélio de Mercúrio, 161, 179, 629
Pressão, 279ss, 355s, 365s
 como uma densidade de energia potencial, 359s
 definição relativística, 676s
Pressão-velocidade, relação em uma onda sonora, 368
Princípio de Arquimedes, 280
Princípio da correspondência, 552, 596
Princípio da equivalência, 625, 632
Problema, de n corpos, 187, 215ss
 dos dois corpos, 147, 209ss, 215
 dos três corpos, 319, 535ss
 estabilidade do, 538ss, 542
 restrito, 319ss
 solução de Lagrange, 347
 similar, 378, 383
Produto, escalar, 100, 445
 de inércia, 464
 escalar triplo, 104
 externo, 102s
 interno, 100
 quadriescalar, 590
 vetorial, 102s
 de 4-vetores, 590s
 triplo, 103s
Projeção, 97
Projetis, 136ss, 139
Pseudovetor, 451

Quadricorrente, 621
Quadriescalar, 585ss
Quadriforça, 607
Quadrigradiente, 594s
Quadrímpulso, 614
Quadrímomento, 596ss
Quadrítensor, 623

contração, 623
 produto, 623
 soma de, 623
 simétrico e anti-simétrico, 623s
Quadrivelocidade, 591
Quadrivetor, 585, 589
 adição de, 589
 deslocamento, 589
 físico e formal, 592
 multiplicação, 589s
 tipo espaço, 592
 tipo tempo, 592
Queda livre, 32, 56

Raio
 de curvatura, 174
 de geração, 240
 de seção transversal de uma viga, 276
Reação nuclear, 208
Recuo, 208
Redução de um sistema de forças, 263
Referencial, 304, 555ss (*ver também Sistema de coordenadas*)
Reflexão de uma onda, 339
Regra da mão direita, 102, 104
Régua, movimento de uma, 557s, 566s
Relação adiabática, 356
Relação de dispersão, para uma onda, 593s
Relatividade, 20s, 196, 417
 e a definição de massa, 24, 26, 596
 fórmulas de energia e do momento, 205, 596ss
 função de Lagrange na, 438
 postulado da, 549
 princípio newtoniano da, 27, 304
 teoria especial da, 27, 167, 182, 304, 549ss, 626
 postulado da, 549s, 574, 592
 teoria geral, 29, 161, 196, 305, 403, 550, 624ss, 627
 teste da, 626, 628s
Relógio, 243
 comportamento relativístico do, 628s

em movimento, 554, 556ss, 559
 sincronização do, 556, 562s, 584
 Resistência do ar, 56, 137ss
 Ressonância, 61, 75, 224
 Resultante, 34, 104, 260, 263
 Reynolds, número de, 383
 Rotação virtual, 197
 Rotacional, 125, 142, 353s
 da velocidade, 353s
 Rutherford, E., 77, 161s, 164, 212
 seção de choque de espalhamento, de, 164s, 212ss, 215
 Satélite, 153, 196
 da Terra, 181, 542
 Schrödinger, E., 20
 Seção cônica, 155
 Seção de choque, de espalhamento, 163ss, 206, 215
 forma invariante, 606
 tubo de escoamento, 363s
 Secretaria Internacional de Peso e Medidas, 557
 Separação de variáveis, 331, 371, 373
 Separador de creme, 311
 Série
 de Fourier, 81, 334, 376, 425
 de Taylor, 50, 54, 62
 Sèvres, França, 557
 Símbolo delta (Δ), 123ss, 126, 352
 Simetria, 250, 417, 465
 esférica, 251, 296, 465
 Simultaneidade, 554s, 558ss, 561
 Sincrotron, 531, 534
 Sistema de coordenadas, 27, 304, 431
 centro de massa, 213
 cilíndrica, 119s, 125, 252
 curvilínea, 120, 402
 do laboratório, 212s, 603
 em movimento, 303ss, 389, 404, 408ss, 429s, 434
 em Relatividade Geral, 630ss
 em rotação, 305ss, 391, 393ss, 404, 437, 479, 628

esféricas, 121, 126s, 253
 inercial, 549, 555ss, 625
 orientado à esquerda, 451
 parabólicas, 174, 434
 polares, 117ss, 120s, 129
 retangulares, 22, 115ss, 118, 253
 translação do, 303ss
 Sistema de referência, 304, 555 (*ver também* Sistema de coordenadas)
 Sistemas de forças equivalentes, 260ss, 263
 Sol, massa do, 39, 160
 Sólido, elástico, 228, 368, 477
 isotrópico, 478
 Sólidos, leis de conservação em, 362
 Solução geral (*ver* Equação diferencial)
 Soluções aproximadas, 370
 por aproximações sucessivas, 57
 Spin (*ver* Momento angular)
 Superamortecimento, 70
 Superposição, 79s, 222, 227, 513, 529
 Temperatura de um fluido, 282, 356s
 Tempo, definição do, 556
 e espaço, distinção entre, 564
 em Relatividade Geral, 632
 Tempo próprio, 570
 como variável independente, 611
 intervalo, 590
 Tensão, 265ss, 274, 359
 de cisalhamento, 265, 355, 476
 num fluido, 278, 474ss, 477
 num sólido elástico, 477ss
 Tensor, 265, 441, 443s, 450
 álgebra em quadriespacô, 622ss
 anti-simétrico, 448s, 477
 associado a superfícies quâdricas, 471
 autovalor de um, 456ss
 autovetor de um, 456ss
 componentes de um, 444
 constante do, 444
 de campo eletromagnético, 624
 de inércia, 444, 463ss
 determinante do, 454, 461
 diagonalização do, 455, 458

eixos principais do, 456s
 escala invariante do, 461
 métrico, 633
 nulo, 481
 ortogonal, 452s
 produto escalar do, 446
 produto interno, 446
 produto por um escalar, 443, 479
 simétrico, 448s, 455, 457, 471, 476s
 soma de, 443, 447
 traço de um, 453, 461
 transporte de um, 448
 unitário, 444s
 Tensor das tensões, 471ss
 num fluido viscoso, 476ss
 num sólido elástico, 477ss
 Teorema da divergência, de Gauss, 124, 281, 418, 424, 432
 Teorema de Bernoulli, 362
 Coriolis, 310, 317
 Euler, 416
 Larmor, 317s
 Liouville, 432s
 Pappus, 254
 Stokes, 125, 141
 Varignon, 259
 Teorema do eixo paralelo, 255
 para o tensor de inércia, 464s
 Teorema do eixo perpendicular, 256
 Teorema do momento angular, 130s, 192, 237
 Teorema do momento linear, 41, 127, 188, 359
 Teoria da perturbação, 520ss
 caso degenerado, 523ss
 primeira ordem, 521ss
 segunda ordem, 524s
 Teoria da relatividade geral (*ver* Relatividade)
 Teoria de grupo, 477
 Teoria do campo gravitacional, 293ss, 629ss, 632
 Teoria do momento angular, 131, 191, 237
 Teoria eletromagnética, 25, 27, 165, 423, 550s
 Teoria nuclear do átomo, 164
 Termo primitivo, 20
 Terra, campo gravitacional da, 300s
 interior da, 278
 leis do movimento da, 312ss, 315s
 rotação da, 202, 502s
 Thomson, J. J., 168
 Torque, 106, 131, 147, 192, 241s, 258, 272s
 componente do, 108
 Torção, 271
 Trabalho, 60, 100, 129, 140
 em compressão, 361
 expressado como integral de linha, 111s, 128s
 realizado por forças de vínculo, 408
 Traço, 453, 461
 Transformação de coordenadas, 449ss, 452
 ortogonal, 452
 Transformação de Lorentz, 552, 566, 571ss, 574ss, 583
 da carga elétrica e da corrente, 620
 da velocidade, 576
 do campo eletromagnético, 624
 do potencial eletromagnético, 622
 equações de, 572, 588s
 Transformação ortogonal, 452
 Transiente, 74, 83
 Translação, de um sistema de coordenadas, 303
 virtual, 189
 Triangular, 589
 Triforça, 607s
 Trimomento, 597
 Trivelocidade, 607s
 Trivetor, 589
 Tubo, circular, 373, 380s
 com extremidades abertas, 373
 de órgão, 373
 escoamento viscoso em, 380
 modos normais de vibração em, 373

propagação de ondas em, 374ss
 de escoamento, 363s
 Turbina de um foguete, impulso da, 201, 615

 Unidade de força gravitacional, 30
 Unidades, 29s, 557s
 CCS, 29, 165
 gaussianas, 165, 619
 inglesas, 29
 SI, 29, 165, 619
 Universidade de Stanford, 562
 Universo, de acordo com a teoria da relatividade, 631
 Urânos, 160

 Valor característico (*ver* Autovalor)
 Velocidade, 22
 ao longo de uma curva, 174s
 componentes, em coordenadas cilíndricas, 119ss
 em coordenadas esféricas, 121
 em coordenadas polares, 117ss, 120
 em coordenadas retangulares, 114, 115
 da luz, 551, 561s
 de energia, 375
 de informação, 375
 de um sinal, 375, 561
 do som, 346s, 366
 em ondas sonoras, 367, 373
 generalizada, 392
 interna, 216
 terminal, 57s, 138
 Velocidade angular, 241
 adição de, 493
 em termos de ângulo de Euler, 493
 vetor, 307s
 Velocidade de escape, 59
 de fase, 336, 377
 de grupo, 375ss, 378
 generalizada, 392
 terminal, 57s, 138
 Vento, 139, 314
 oeste, 314

Vetor, 95ss, 98
 acréscimo de, 110
 adição de, 34, 96, 98
 axial, 451
 com componentes complexos, 458s
 componentes de um, 97s, 305ss
 definição algébrica e geometria, 95, 92, 99
 deslizante, 95, 259
 derivação de, 108s, 120ss
 diferenciação de, 109ss, 120, 122
 divergência, 124
 em f dimensões, 511s
 fixo, 95
 igualdade de, 95
 integração de, 172
 força de volume, 252ss
 integral de linha de, 111ss
 livre, 95, 259
 módulo de um, 95, 98
 momento de um, 106
 multiplicação por um escalar, 96, 98
 nulo, 101s
 ortogonal, 515
 paralelo, 102
 perpendicular, 102
 polar, 451
 potencial, 423s, 619
 produto escalar de, 100
 produto externo de, 102
 produto interno de, 100
 produto triplo de, 103s
 produto vetorial de, 102
 projeção, 97
 resolução em componentes, 34s, 105ss
 rotacional de um, 125, 141s, 175
 subtração de, 100
 3-vetor, 589
 4-vetor tipo luz, 600
 unitário, 117, 119, 121
 torque, 108
 Vetor de onda, 368, 575, 593
 Vibração, de um fluido numa caixa, 370
 teoria da, 509 (*ver também* Modo

 normal, Oscilador harmônico, Cordas vibrantes)
 Vibrações, eletromagnéticas, 370
 forçadas, 517ss (*ver também* Oscilador harmônico)
 Vínculo, 237, 390, 402, 404
 em movimento, 408, 420
 equações de, 408, 412
 força de, 408
 holônomo, 405ss
 interno, 216
 não-holônomo, 406s

Virtual, deslocamento, 189, 398
 rotação, 192
 translação, 189
 Viscosidade, 380, 474
 coeficiente de, 37, 380, 474, 476
 Vórtice, 353, 359

 Weber, J., 629

 Young, módulo de, 267, 269, 275, 484
 Yukawa, H., 178

