

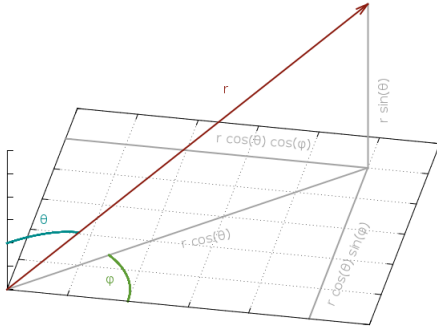
Mecânica Clássica I Coordenadas - Esféricas

Anderson Thiago and André Del Bianco Giuffrida and Gabriela Curti and Priscila França Guidini

Para tratar problemas de Mecânica Clássica, é comum utilizar-mos três sistemas de coordenadas: Esféricas, Cilíndricas e Cartesianas.

A maior diferença entre coordenadas esféricas e cartesianas é visualizar que os vetores $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ variam com o tempo, diferente de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ que são fixos, de modo que:

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$



Pela Figura podemos ver que a posição é dada pelo vetor \vec{r} , onde:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\vec{r} = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \hat{i} + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \hat{j} + r \cos(\theta) \hat{k}$$

de modo que \hat{r} :

$$\hat{r} = \sin(\theta) \cos(\varphi) \hat{i} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \hat{j} + \cos(\theta) \hat{k}$$

além disso temos:

$$\hat{\phi} = \hat{k} \times \hat{r} = -\sin(\varphi) \hat{i} + \cos(\varphi) \hat{j}$$

Com os vetores definidos podemos calcular a aceleração e a velocidade em coordenadas esféricas.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + (r \dot{\phi} \sin(\theta)) \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = & (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) \hat{r} \\ & + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \hat{\theta} \\ & + (r \ddot{\phi} \sin(\theta) + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin(\theta) + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta)) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Vemos nas equações acima que alguns termos são reconhecíveis, como:

$\dot{r} \hat{r}$ Velocidade radial: velocidade com que o objeto se aproxima ou se afasta da origem na direção radial.

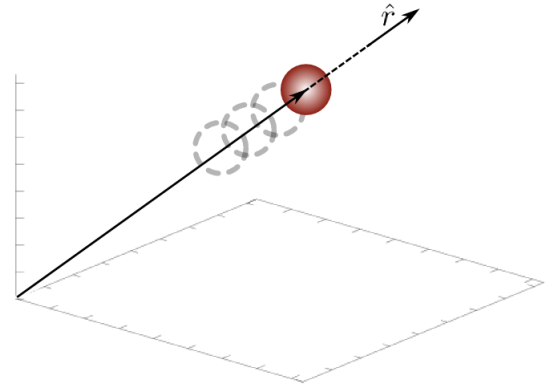
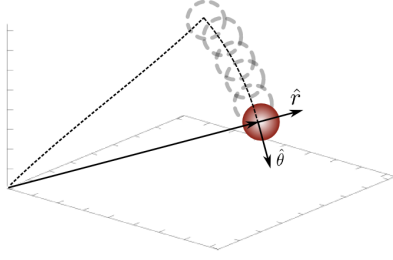
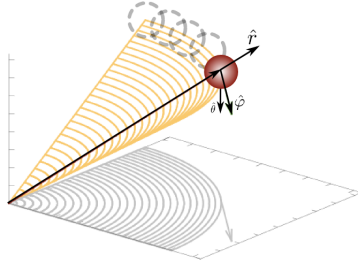


FIG. 1: Movimento em \hat{r}

$r \dot{\theta} \hat{\theta}$ Velocidade tangencial em θ : é perpendicular a \hat{r} sendo orientada na direção polar.

FIG. 2: Movimento em $\hat{\theta}$

$r \sin(\theta) \dot{\varphi} \hat{\varphi}$ Velocidade tangencial em φ : é perpendicular a \hat{r} sendo orientada na direção azimutal.

FIG. 3: Movimento em $\hat{\varphi}$

$\ddot{r} \hat{r} - r \dot{\theta}^2 \hat{r}$ Aceleração centrípeta: Característico de movimentos curvilíneos ou circulares. Ela é perpendicular à velocidade e aponta para o centro da trajetória.

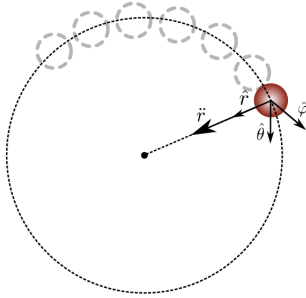


FIG. 4: Aceleração centrípeta

$r \ddot{\theta} \hat{\theta}$ Aceleração angular: é a variação da velocidade angular no tempo

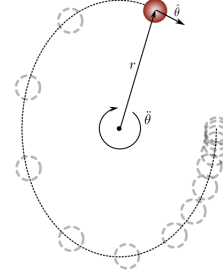


FIG. 5: Aceleração Angular

$2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ e $2r\dot{\theta}\sin(\theta)\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ Aceleração de Coriolis: Aceleração de um corpo que se move em relação a um sistema de referência, medida em outro sistema de referência que apresenta um movimento angular em relação ao primeiro.

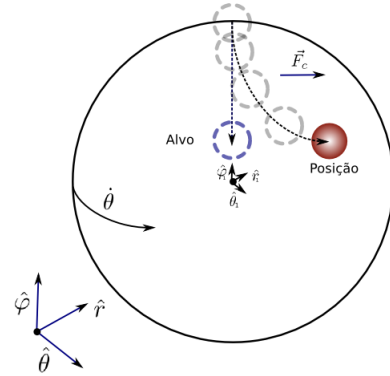


FIG. 6: Efeito de Coriolis

Na figura acima, o sistema de coordenadas $\hat{r}_1, \hat{\theta}_1, \hat{\varphi}_1$ está em movimento ($\dot{\theta}$ referencial inercial), a descrição do movimento no sistema $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ (não-inercial) será diferente pois surgirá a força inercial provinda de $\dot{\theta}$