Mecânica Clássica I

André Del Bianco Giuffrida
IFSC - USP
andre.giuffrida@usp.br

Para a partícula de massa m atuando sobre a força:

$$F(t) = F_0 \sin^2(\omega t)$$

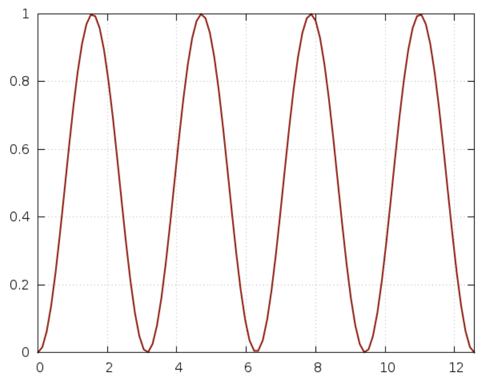

Figura 1: $F(t); \omega = 1\frac{rad}{s}$

Vamos calcular a velocidade em função do tempo $V(t)$ e a posição em função do tempo $X(t)$

Sendo, pela lei de Newton $F(t) = m\frac{dv}{dt}$ vemos que:

$$V(t) - V(0) = \int_0^t \frac{F(t')dt'}{m}$$

Como $V(0) = 0$:

$$V(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m} \sin^2(\omega t')dt'$$

Usando a identidade, $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ conseguimos integrar.

Basta ajustar as constantes e integrar para obtemos:

$$V(t) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]$$

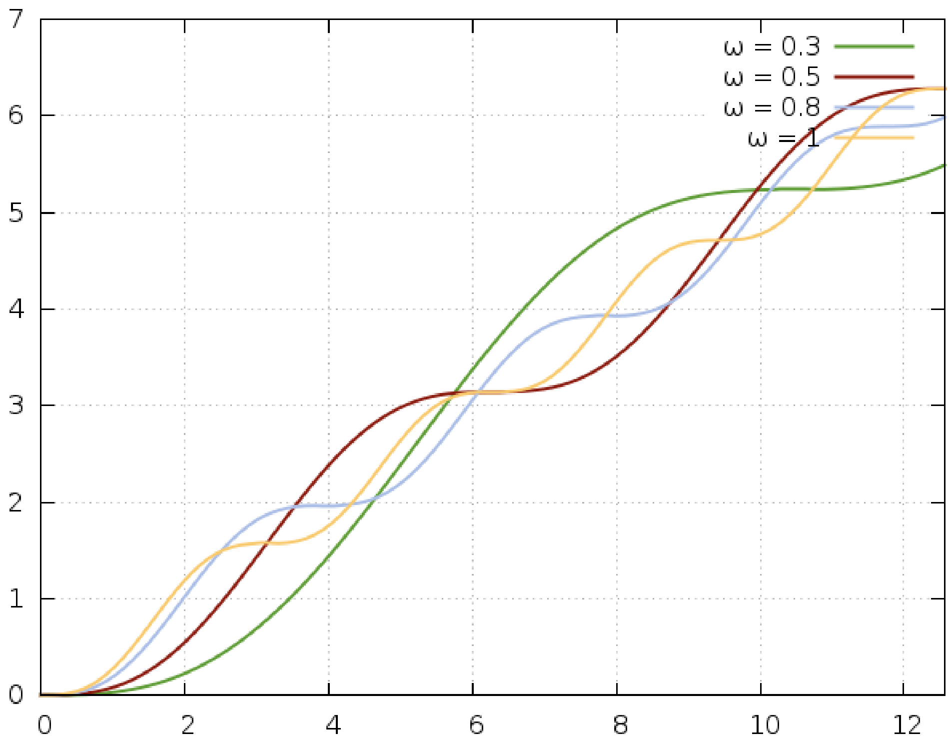

Figura 2: $V(t)$

Agora utilizando o mesmo raciocínio para x podemos ver que:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t V(t')dt'$$

Usando $X(0) = X_0$ e substituindo $V(t)$ temos:

$$X(t) - X_0 = \int_0^t \left(\frac{F_0}{m}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]\right) dt'$$

$$X(t) - X_0 = \frac{F_0}{m}\left[\int_0^t \frac{t}{2}dt' - \int_0^t \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}dt'\right]$$

Fazendo substituição em $2\omega t$

$$X(t) - X_0 = \frac{F_0}{m}\left[\frac{t^2}{4} + \frac{\cos(2\omega t)}{8\omega^2} - \frac{1}{8\omega^2}\right]$$

$$X(t) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{t^2}{4} + \frac{\cos(2\omega t)}{8\omega^2} - \frac{1}{8\omega^2}\right] + X_0$$

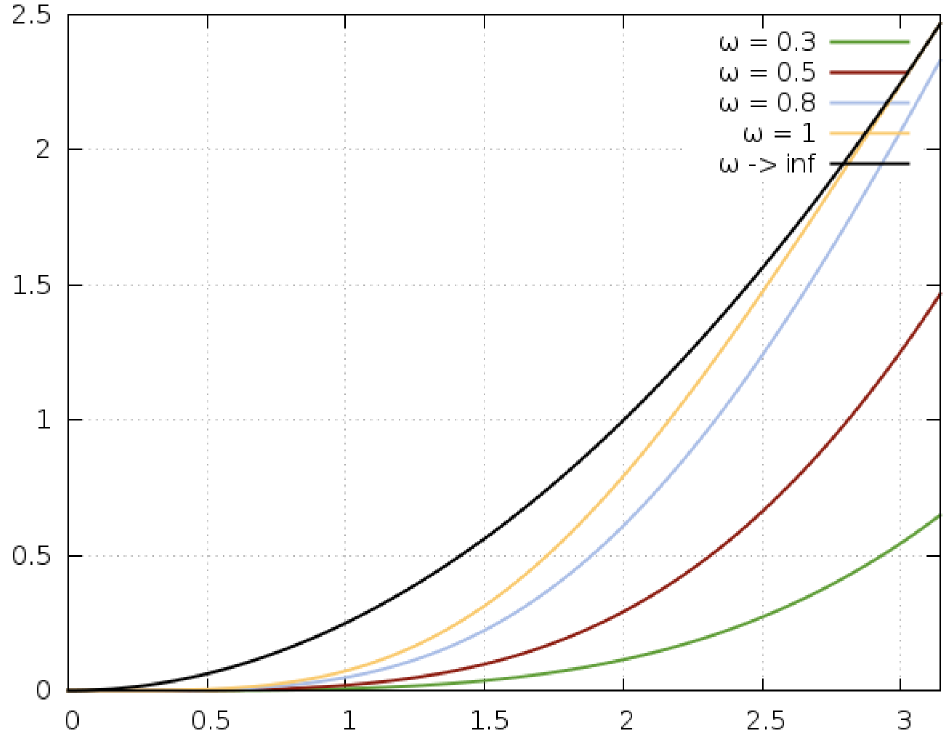

Figura 3: $X(t)$

Note que quanto maior a frequência mais próximo de uma parábola o gráfico se aproxima, ou seja quando ω é muito grande temos um regime próximo a uma força constante.

É fácil notar ao calcular o limite quando ω vai a infinito.

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{F_0}{m}\left[\frac{t^2}{4} + \frac{\cos(2\omega t)}{8\omega^2} - \frac{1}{8\omega^2}\right] + X_0$$

$=$

$$\frac{F_0}{m}\frac{t^2}{4} + X_0$$

Obtemos assim a parábola.

Podemos associar este problema a qualquer problema prático envolvendo uma força constante, simplismente trocando a constante por algo que vibra em torno da constante com o intuito de tornar a análise mais profunda e detalhada, porém funções trigonométricas ainda que representem a oscilação e a faixa de erro de uma grandeza são previsíveis e pouco próximas da realidade para sistemas reais que exigem esse nível de detalhe.

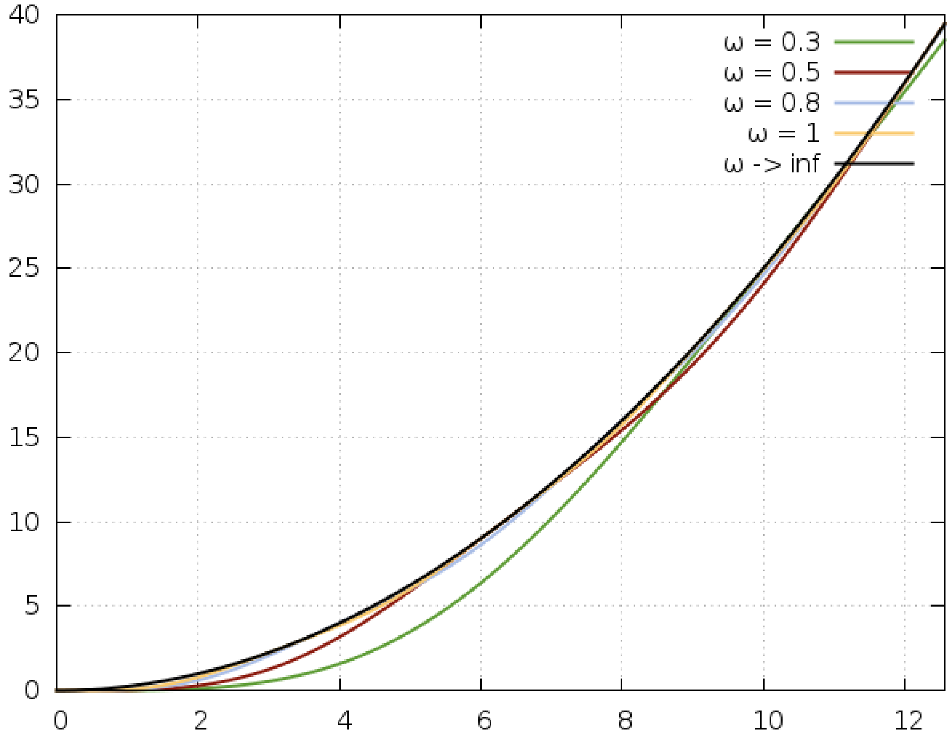

Figura 4: $X(t)$