Mecânica Clássica I - Resolução do exercício 3 da primeira prova
André Del Bianco Giuffrida

Uma partícula de massa m está sujeita a uma força: $\vec{F}(r) = -\frac{\beta}{r^3}\hat{r}$ *onde β é uma constante positiva.*

$$V(\infty) - V(r) = -\int_r^{\infty} F(r')dr' = \int_r^{\infty} \frac{\beta}{r'^3}dr' = -\frac{\beta}{2r'^2}\bigg|_r^{\infty} = +\frac{\beta}{2r^2}$$

Como $V(\infty) = 0$ obtemos que o potencial da força é dado por:$V(r) = -\dfrac{\beta}{2r^2}$

O Potencial fetivo é: $\quad V_{ef} = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{\beta}{2r^2} = \dfrac{1}{2r^2}\left[\dfrac{L^2}{m} - \beta\right]$

Partindo de $\vec{F} = m\vec{a}$ temos $-\frac{\beta}{r^3}\hat{r} = m\big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\big)\hat{r}$, ou seja, $\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{\beta}{mr^3}$ com isso obtemos a seguinte equação:

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\beta}{r^3} \quad \text{Usando os mesmos truques da gravitação,} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = u\Big(\frac{\beta m}{L^2} - 1\Big)$$

a solução aqui fica $u(\theta) = Acos(\omega\theta - \varphi)$ onde $u = \frac{1}{r}$ e assim conseguimos a equação geral para o movimento:

$$r(\theta) = \frac{1}{Acos(\omega\theta - \varphi)} \quad \text{para} \quad \omega = \sqrt{\frac{\beta m}{L^2} - 1} \quad \text{e } A = \sqrt{\frac{\frac{L^2}{m} - \beta}{2E}}$$

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{2E}{\beta}}}{cos(\theta\sqrt{\frac{\beta m}{L^2} - 1})\sqrt{\frac{L^2}{\beta m} - 1}}$$

Isso nos leva aos possíveis movimentos: