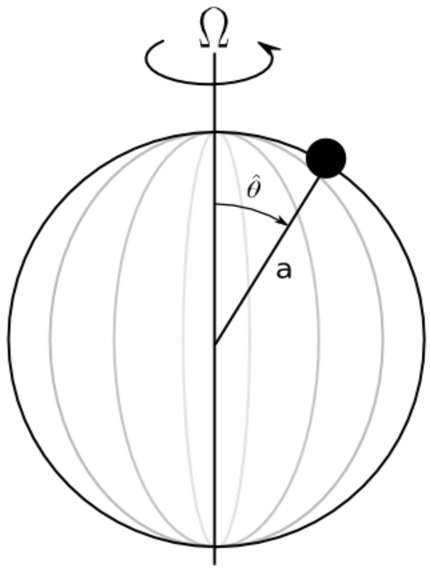
Mecânica Clássica II
André Del Bianco Giuffrida

Fetter - Exercício *3.1*



A massa é livre para percorrer o aro e este gira com velocidade angular Ω , a é o raio do aro.
Usando como Coordenada generalizada θ, podemos calcular as Energias:

$$T = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2(\theta)\Omega^2) \quad , \quad V = mga\cos(\theta)$$

$$\mathcal{L} = T - V \quad \text{então} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \Big(\frac{1}{2}ma^2\sin^2(\theta)\Omega^2 - mga\cos(\theta)\Big)$$

Aqui, Já podemos analisar o potencial efetivo (entre parenteses na Lagrangiana)
Usando a Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Aqui podemos derivar duas equações de movimento uma para θ e outra para Ω nesta primeira análise vamos manter Ω constante

$$ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma^2\Omega^2\sin(2\theta) + mga\sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\Omega^2\sin(2\theta) + \frac{g}{a}\sin(\theta) = 0$$

e a Equação de movimento para θ fica:

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\cos(\theta)\Big)$$

Podemos encontrar a condição para o equilibrio da massa em um angulo qualquer θ_0

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \cos(\theta_0) = -\frac{g}{a\Omega^2} \quad , \quad \theta_0 = 0 \quad \text{e} \quad \theta_0 = \pi$$

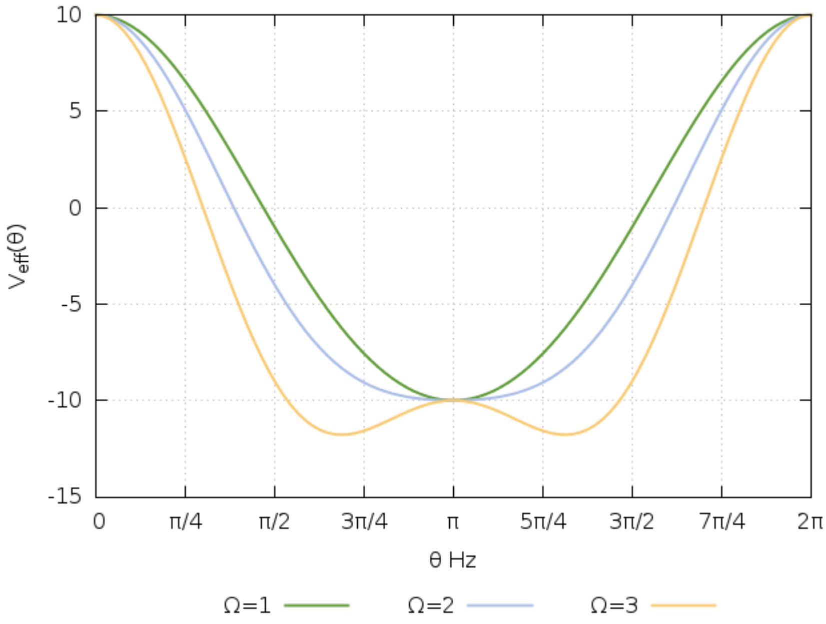


Figure 1: Potencial efetivo

Podemos analisar esses pontos de equilibrio fazendo $\theta(t) = \theta_0 + \delta(t)$ onde $\delta(t)$ é tão pequena quanto quisermos.

- para θ_0 em torno de 0.

$$\theta(t) = 0 + \delta(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \ddot{\delta}$$

$$\ddot{\delta} = sin(\delta)\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\cos(\delta)\Big)$$

Expandindo em taylor o seno e o cosseno de δ

$$\ddot{\delta} = \Big[\delta - \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^5}{5!} - ...\Big]\Big[\frac{g}{a} + \Omega^2(1 - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} - ...)\Big]$$

Fazendo $\delta^n \rightarrow 0$ para $n > 1$ obtemos uma equação muito bem comportada como segue:

$$\ddot{\delta} = \delta\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\Big) \quad \text{ou} \quad \ddot{\delta} = \alpha^2\delta$$

Que tem solução:

$$\delta(t) = e^{\alpha t} \quad \text{para} \quad \alpha = \sqrt{\frac{g}{a} + \Omega^2}$$

O equilibrio é instavel neste ponto pois α^2 nunca assume valores negativos o que faz o deslocamento não ser restaurador e torna o ponto um equilibrio instável.

- para θ_0 em torno de π.

$$\theta(t) = \pi + \delta(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \ddot{\delta}$$

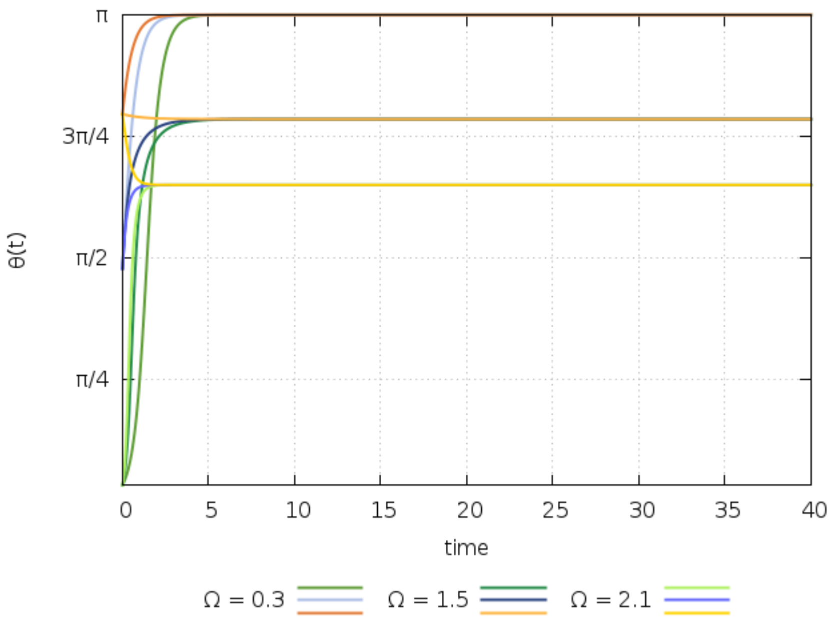


Figure 2: $\theta(t)$ Solução Numerica por Runge Kutta, $g = 10$, $a = 5$

Expandindo em taylor o seno e o cosseno de $\pi + \delta$ e fazendo a aproximação

$$\ddot{\delta} = -\delta\Big(\frac{g}{a} - \Omega^2\Big) \quad \text{ou} \quad \ddot{\delta} = -\beta^2\delta$$

Esta equação pode ser resolvida como:

$$\delta(t) = e^{i\beta t} \quad \text{para} \quad \beta = \sqrt{\frac{g}{a} - \Omega^2}$$

Aqui o equilibrio é estável em $\theta = \pi$, se $\beta^2 > 0$.
Caso, $\Omega^2 > g/a$ o equilibrio passa a ser instável nesse ponto também.

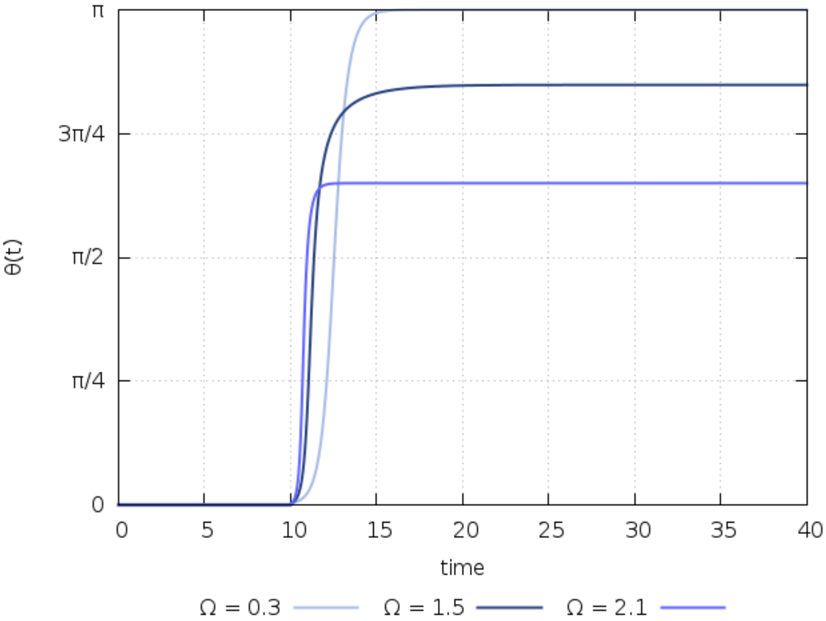


Figure 3: Teste de Instabilidade, em t=10s a particula sofre um deslocamento de $0.01rad$ na sua posição instantânea

- Para $cos(\theta_0) = -\frac{g}{a\Omega^2}$

  Voltando a Equação de movimento, podemos analizar a Força Efetiva ! e poderiamos ter feito isso para os dois casos acima.

$$ma^2\ddot{\theta} = ma^2\sin(\theta)\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\cos(\theta)\Big)$$

  Onde o termo da direita vamos chamar de Força Efetiva ($\tilde{F}(\theta)$) como a Força pode ser escrita como $\tilde{F}(\theta) = -\frac{\partial\tilde{V}(\theta)}{\partial\theta}$ e estamos procurando vales de potencial, ao derivarmos a força novamente podemos encontrar a concavidade de cada ponto de equilibrio do sistema e isso nos diz se esse ponto é um ponto de equilibrio estável ou instável dependendo do sinal de derivada de $\tilde{F}(\theta)$ com relação a θ.

$$\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\Bigg(ma^2\sin(\theta)\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\cos(\theta)\Big)\Bigg)$$

$$\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta} = ma^2\cos(\theta)\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\cos(\theta)\Big) - ma^2\Omega^2\sin^2(\theta)$$

$$\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta} = ma^2\cos(\theta)\Big(\frac{g}{a} + \Omega^2\cos(\theta)\Big) - ma^2\Omega^2\Big(1 - \cos^2(\theta)\Big)$$

$$\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta} = ma^2\cos(\theta)\frac{g}{a} + ma^2\Omega^2\cos^2(\theta) - ma^2\Omega^2 + ma^2\Omega^2\cos^2(\theta)$$

$$\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta} = ma^2\cos(\theta)\frac{g}{a} + 2ma^2\Omega^2\cos^2(\theta) - ma^2\Omega^2$$

  Substituindo a condição inicial $\cos(\theta_0) = -\frac{g}{a\Omega^2}$ ficamos com:

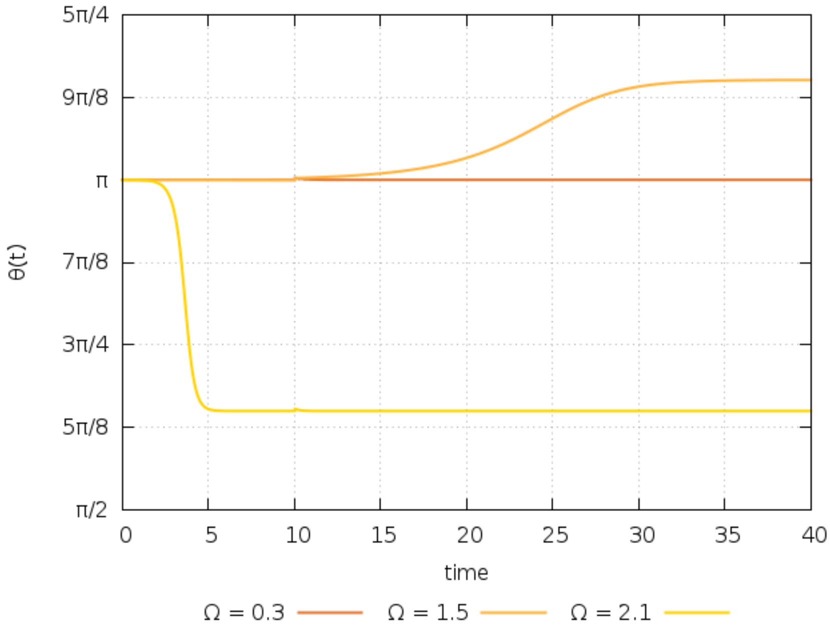


Figure 4: Teste de Instabilidade, em t=10s a particula sofre um deslocamento de $0.01 rad$ na sua posição (Resultado Numérico, para Ω muito grande não é necesário forçar o deslocamento, o equilibrio é instável com a aproximação de Runge-Kutta consultar código para mais informações)

$$\left.\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta_0} = ma^2\Big(\frac{g^2}{a^2\Omega^2} - \Omega^2\Big)$$

θ_0 é um ponto de equilibrio estável se a equação $\left.\frac{d\tilde{F}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta_0}$ for maior que zero. Caso contrario o equilibrio é instável, portanto.

$$\frac{g}{a\Omega^2}\begin{cases} > 1 & \text{Estável} \\ < 1 & \text{Instável} \end{cases}$$

Vamos agora calcular a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ para esse sistema, usando$p(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ e aplicando a transformação de legendre para $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{H} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \quad \text{onde} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{H} = ma^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 - a^2\sin^2(\theta)\Omega^2) - mga\cos(\theta)$$

e assim obtemos as equações de Hamilton para o sistema:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = ma^2\cos(\theta)\sin(\theta)\Omega^2 - mga\sin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -ma^2\cos(\theta)\sin(\theta)\Omega^2 + mga\sin(\theta)$$

Podemos plotar o espaço de fase para a variação de Ω como segue:

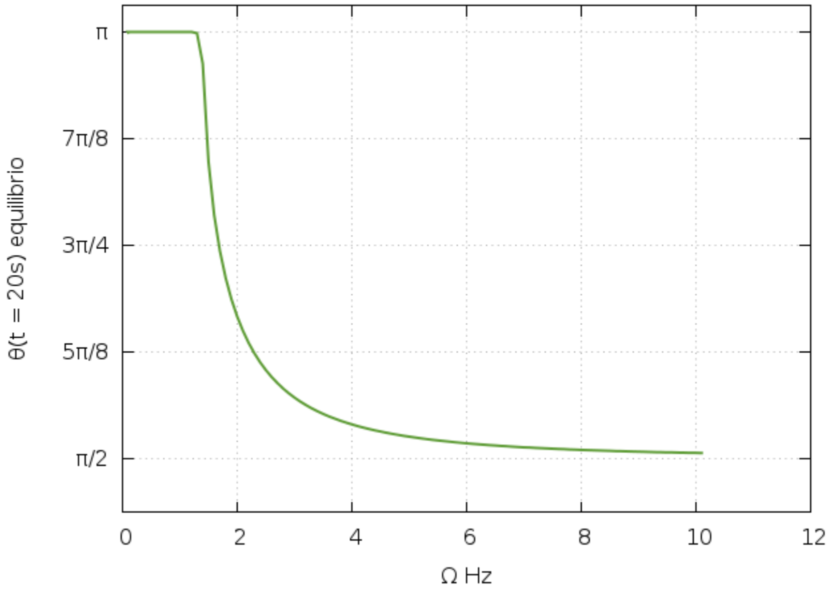


Figure 5: Posição de Equilibrio em função de Ω

Agora só falta calcularmos a força que atua no aro, e para isso vamos utilizar os multiplicadores de lagrange.
Voltemos na Lagrangeana porém sem introduzir o vínculo:

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\Omega^2 + \dot{r}^2) \quad , \quad V = mgr\cos(\theta)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\sin^2(\theta)\Omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr\cos(\theta)$$

Escrevendo explicitamente o vínculo, a massa está restrita a se mover sobre o aro de raio a.

$$r = a \quad \rightarrow \quad f(r,\theta) = r \quad \text{é a equação do vínculo nesse caso}$$

E com isso.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\sigma} - \lambda\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial q_\sigma} = 0$$

desse modo, $\frac{\partial}{\partial r}r = 1 \quad \frac{\partial}{\partial\theta}r = 0$, com isso podemos escrever,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} - \lambda_r = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta} - mr\sin^2(\theta)\Omega^2 + mg\cos(\theta) = \lambda_r \equiv Q_r$$

$$2mr\dot{r}\ddot{\theta} - mr^2\sin(2\theta) - mgr\sin(\theta) = 0$$

Podemos interpretar as equações e analisar os gráficos para a força e compara-los com o potencial efetivo

$$Q_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta} - r\sin^2(\theta)\Omega^2 + g\cos(\theta))$$

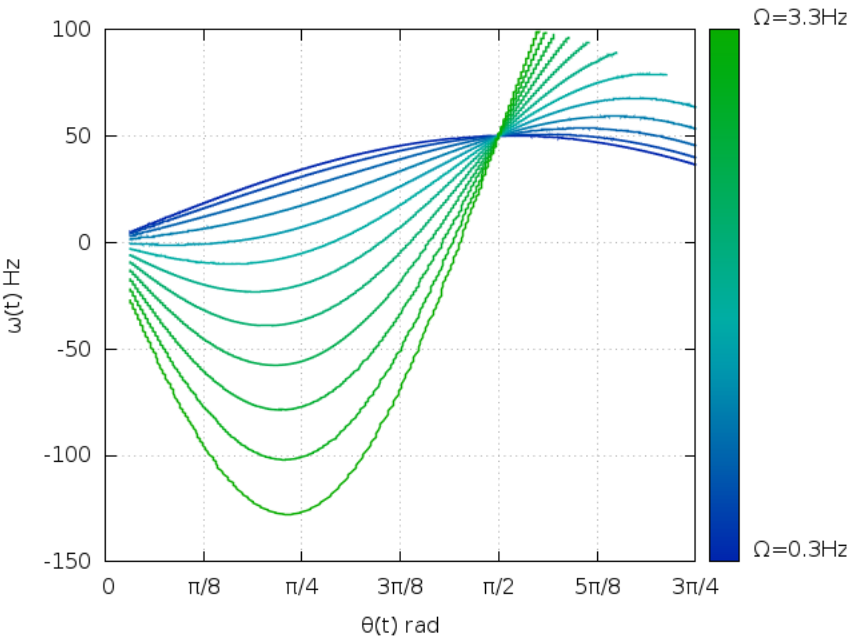


Figure 6: Espaço de Fase para Ω variando de $0.3Hz$ a $3.3Hz$ com $\theta_0 = 0.2$ ($\dot{\theta}$ x θ)

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin(\theta)}{2\dot{r}}(r\cos(\theta) + g)$$

Introduzindo o vínculo novamente reduzimos a equação de Q_r para

$$Q_r = -ma\dot{\theta} - ma\sin^2(\theta)\Omega^2 + g\cos(\theta)$$

Usando Runge-Kutta podemos plotar Q_r em função de θ. pois o termo que vai com $\dot{\theta}$ é simplesmente a primeira parte da recurssão em Runge-Kutta

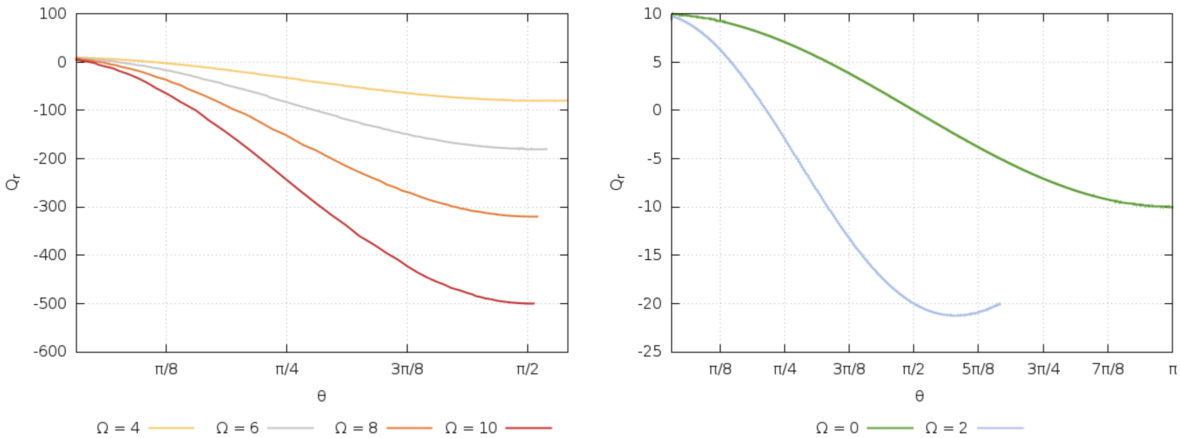


Figure 7: Forças Generalizadas Q_r para diferentes Ωs

```
    ## Runge-Kutta de quarta ordem , essa funcao sera usada em todos os coidigos

def RK4(f):
    return lambda t, y, dt: (
            lambda dy1: (
            lambda dy2: (
            lambda dy3: (
            lambda dy4: (dy1 + 2*dy2 + 2*dy3 + dy4)/6
            )( dt * f( t + dt  , y + dy3 ) )
            )( dt * f( t + dt/2, y + dy2/2 ) )
            )( dt * f( t + dt/2, y + dy1/2 ) )
            )( dt * f( t     , y       ) )
```

Para o Calculo de θ (Figure 2)

```
from math import sin, cos
import sys

## (y deve ser interpretado como theta aqui dentro!)
## argumantos passados na chamada do programa , y0 = theta inicial
## O2 = Omega (velocidade angular do aro)

if len(sys.argv) > 2:
       y0 = float(sys.argv[1])
       O2 = float(sys.argv[2])
else:
       y0 , O2, = 0.001 , 2

## g = 10
## a = 5
g,a = 10, 5

## Chamada da RK4 com a equacao diferencial inicial.
dy = RK4(lambda t, y: sin(y)*((g/a) + pow(O2,2)*cos(y)))

## Condicoes iniciais para tempo theta (y0) e dt
t, y, dt = 0., y0, .01

## Condicao de parada
TMAX = 40

########## Variacoes de codigo ocorrem apenas daqui para baixo ##########
#*
while t <= TMAX:
       print("%2.2f \t %4.6f " % (t, y))
       ## Passagem Recursiva dos parametros da funcao "dy"
       ## para atingir a segunda ordem em y
       t, y = t + dt, y + dy( t, y + dy( t, y, dt ), dt )
```

Para o Grafico de θ_0 equilibrio em função de Ω (Figure 5)

```
from math import sin, cos
import sys

if len(sys.argv) > 2:
```

```
        y0 = float(sys.argv[1])
        O2 = float(sys.argv[2])
else:
        y0 , O2, = 0.001 , 0

g,a = 10, 5

TMAX = 20

while O2 <= 10:
        dy = RK4(lambda t, y: sin(y)*((g/a) + pow(O2,2)*cos(y)))
        t, y, dt= 0., y0, .01
        O2 = O2 + 0.1
        ## Calcula ate o ultimo valor de theta e so depois da o print do valor de
            omega com o theta final
        while t <= TMAX:
                t, y = t + dt, y + dy( t, y + dy( t, y, dt ), dt )
        print("%2.2f \t %4.6f " % (O2, y))
```

Para os testes de instabilidade uma pequena variação no primeiro código (Figure 3 e Figure 4)

```
from math import sin, cos
import sys

if len(sys.argv) > 2:
        y0 = float(sys.argv[1])
        O2 = float(sys.argv[2])
else:
        y0 , O2, = 0.001 , 2

g,a = 10, 5


dy = RK4(lambda t, y: sin(y)*((g/a) + pow(O2,2)*cos(y)))

t, y, dt = 0., y0, .01
TMAX = 40

while t <= TMAX:
        ## Variacao em theta quando o tempo esta em 10s
        if (t > 10 and t < 10 + dt): #Condicao para um pequeno deslocamento em t = 10s
                y=y+0.01
                t = t+dt
        else:
                print("%2.2f \t %4.6f " % (t, y))
                t, y = t + dt, y + dy( t, y + dy( t, y, dt ), dt )
```