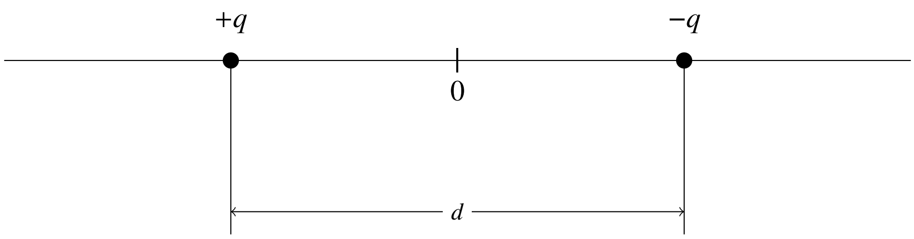
Eletromagnetismo
André Del Bianco Giuffrida

Lista 1
Ex 1

Duas cargas pontuais, $+q$ e $-q$, estão situadas ao longo do eixo x em $x = -\frac{d}{2}$ e $x = +\frac{d}{2}$, respectivamente.
(a) Escreva uma expressão para a densidade de carga $\rho(\vec{r})$ em todo o espaço.
(b) Calcule o potencial elétrico ao longo do eixo z.
(c) A partir do resultado do item (b), calcule o vetor campo elétrico ao longo do eixo z.



Usando a função delta de dirac podemos construir a densidade de carga espacial

$$\rho(\vec{r}) = +q\Big(\delta(\vec{r} + \frac{d}{2}\hat{x}) - \delta(\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{x})\Big)$$

Para confirmar basta integrar $\rho(\vec{r})$ em todo o espaço

$$Q = \int_V \rho(\vec{r'})dv' = \int_V q\delta(\vec{r} + \frac{d}{2}\hat{x})dv' - \int_V q\delta(\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{x})dv' = q - q = 0$$

como já era esperado a carga total Q em todo espaço é nula

Para calcular o potencial elétrico ao longo do eixo z vamos utilizar o principio de superposição e o potencial para uma única carga pontual.

$$V_u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|(\vec{r} - \vec{r_i})|}$$

Onde $\vec{r_i}$ é a coordenada da carga, usando o princípio de superposição podemos escrever:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{x}|} + \frac{-q}{|\vec{r} + \frac{d}{2}\hat{x}|}\right)$$

Ao longo do eixo z temos que $\vec{r} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + z\hat{z}$

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{z^2 + \frac{d^2}{4}}} + \frac{-q}{\sqrt{z^2 + \frac{d^2}{4}}}\right) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q - q}{\sqrt{z^2 + \frac{d^2}{4}}}\right) \quad = \quad 0$$

Ou seja o Potencial elétrico ao longo do eixo z é nulo Usando agora a definição de potencial para calcular $\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(r)$$

Aplicando o gradiente em $V(r)$

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{q}{|\vec{r} - \frac{d}{2}\hat{x}|} + \frac{-q}{|\vec{r} + \frac{d}{2}\hat{x}|}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{q}{\sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4} - xd + y^2 + z^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4} + xd + y^2 + z^2}}\right)$$

Usando a seguinte identidade para a derivada:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2 + xa + c}} = -\frac{(a + 2x)}{(2(c + x(a + x))^{\frac{3}{2}})}$$

Podemos escrever separadamente

$$E_x = \frac{-q(a + 2x)}{2(x(a + x) + c)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q(a - 2x)}{2(x(x - a) + c)^{\frac{3}{2}}}\hat{x}$$

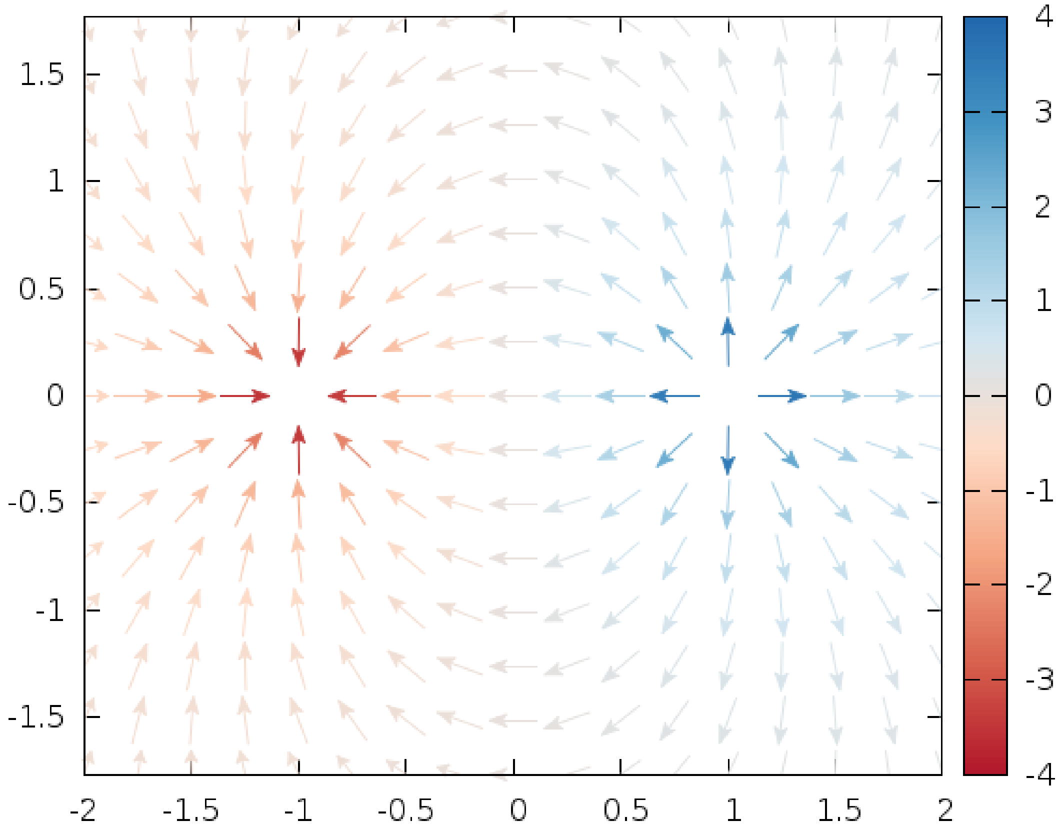


Figure 1