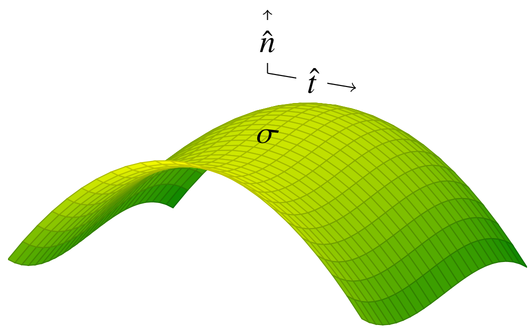
Eletromagnetismo
André Del Bianco Giuffrida

Lista 1
Ex 8

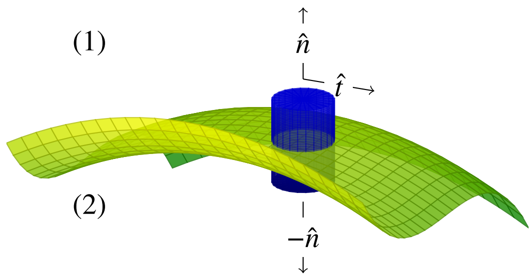
Considere uma superfície arbitrária contendo uma densidade de carga superficial σ, em geral não uniforme. Demonstre as condições de contorno para o campo elétrico de cada lado da superfície:

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad ; \quad \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot \hat{t} = 0$$

onde $\hat{n}$ é um versor normal à superfície apontando do lado (2) para o lado (1), e $\hat{t}$ é qualquer versor perpendicular a $\hat{n}$.



Vamos começar envolvendo um pedaço da superfície com carga por uma superfície gaussiana como no desenho (cilindro com tampas):



$$\text{Gauss:} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

Porém a integral de ρ no volume é a carga total (Q_v) contida no volume, sendo assim podemos calcular:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \quad \text{onde} \quad Q_v = \int_A \sigma da$$

Já o outro lado da integral trata do *Fluxo* do campo $\vec{E}$ pelo cilindro, ao fazermos a altura do cilindro ir a zero, estaremos pegando o Fluxo nas tampas superior e inferior, ambas com area da, e tornaremos o fluxo sobre as paredes nulo, pois a área estará indo a zero, ou seja

$$\lim_{z\to 0} \oint \vec{E} \cdot \hat{t}\, da = \lim_{z\to 0} \int_0^z \vec{E} \cdot \hat{t}\, 2\pi z'\, dz' = 0$$

Mesmo que o campo tenha componentes na direção $\hat{t}$ a área vai a zero $\quad\therefore\quad$ Fluxo de $\vec{E}$ por uma área nula é nulo.

$$\int_{A_1} \vec{E_1} \cdot \hat{t}\, da + \int_{A_2} \vec{E_2} \cdot (-\hat{t})\, da = 0 \quad \text{onde} \quad \left(\vec{E_1} \cdot \hat{t} + \vec{E_2} \cdot (-\hat{t})\right) da = 0$$

Então o Fluxo total fica:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_A \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, da$$

$$\int_{A_1} \vec{E_1} \cdot \hat{n}\, da + \int_{A_2} \vec{E_2} \cdot (-\hat{n})\, da = \int_A \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, da \quad \text{onde} \quad \left(\vec{E_1} \cdot \hat{n} + \vec{E_2} \cdot (-\hat{n})\right) da = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, da$$

e Assim chegamos as condições de contorno :

$$\left(\vec{E_1} - \vec{E_2}\right) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\left(\vec{E_1} - \vec{E_2}\right) \cdot \hat{t} = 0$$