Eletromagnetismo
André Del Bianco Giuffrida

Lista 1
Ex 1

O campo elétrico em certa região do espaço é $\vec{E}(\vec{r}) = kr^3\hat{r}$ em coordenadas esféricas, sendo k uma constante.
(a) Encontre a densidade de carga $\rho(r)$ fonte deste campo.
(b) Determine o potencial elétrico $V(r)$

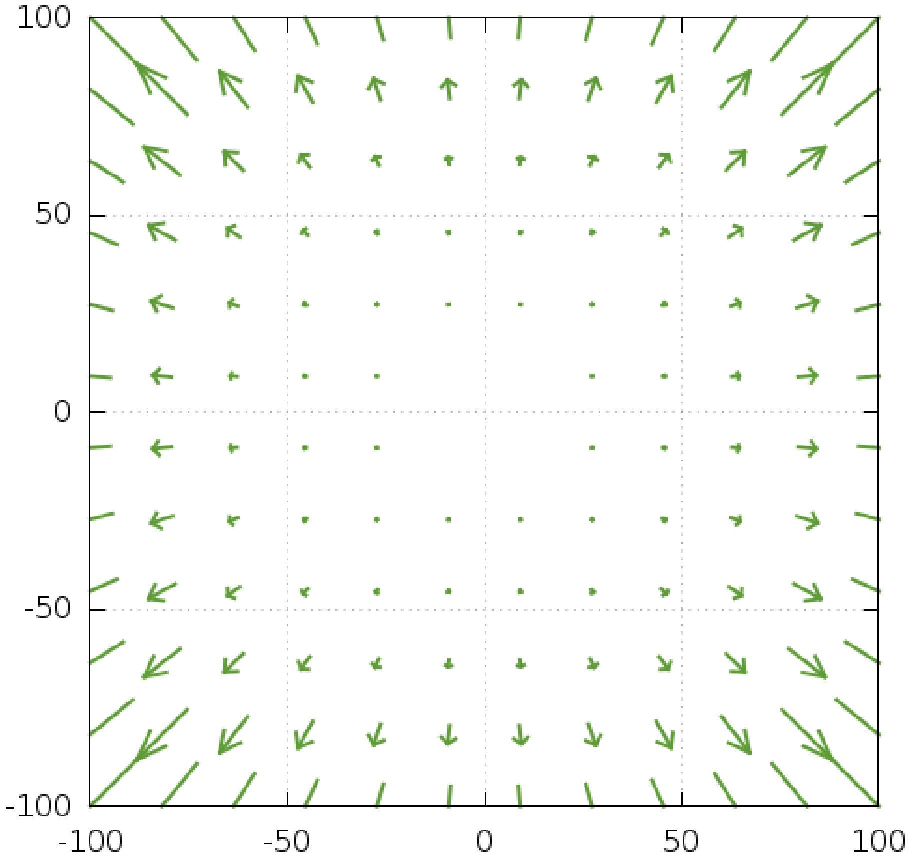

Figure 1: Campo $\vec{E}(\vec{r}) = kr^3\hat{r}$

Partindo da definição de campo para uma distribuição de carga contínua

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\hat{R}}{R^2}dq \quad \text{, onde} \quad R = \vec{r} - \vec{r'}$$

Para uma densidade de carga espacial $\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dv}$

$$kr^3\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\hat{R}}{R^2}\rho(\vec{r'})dv'$$

$$kr^3\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\Omega \int_0^\infty \frac{\hat{R}}{R^2}\rho(\vec{r'})dr'$$

$$kr^3\hat{r} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{\hat{R}}{R^2}\rho(\vec{r'})dr'$$

Para resolver essa integral podemos usar o Divergente do campo.

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(kr^5) = \nabla \cdot \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{\hat{R}}{R^2}\rho(\vec{r'})dr'$$

Aqui ∇ atua na variavel r, podemos escrever:

$$5kr^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^\infty \nabla \cdot \left[\frac{\hat{R}}{R^2}\right]\rho(\vec{r'})dr'$$

Usando a função delta de dirac (δ)

$$\nabla \cdot \left[\frac{\hat{R}}{R^2}\right] = \delta(\vec{r} - \vec{r'}) \quad , \quad 5kr^2\epsilon_0 = \int_0^\infty \delta(\vec{r} - \vec{r'})\rho(\vec{r'})dr'$$

$$\rho(\vec{r}) = 5kr^2\epsilon_0$$

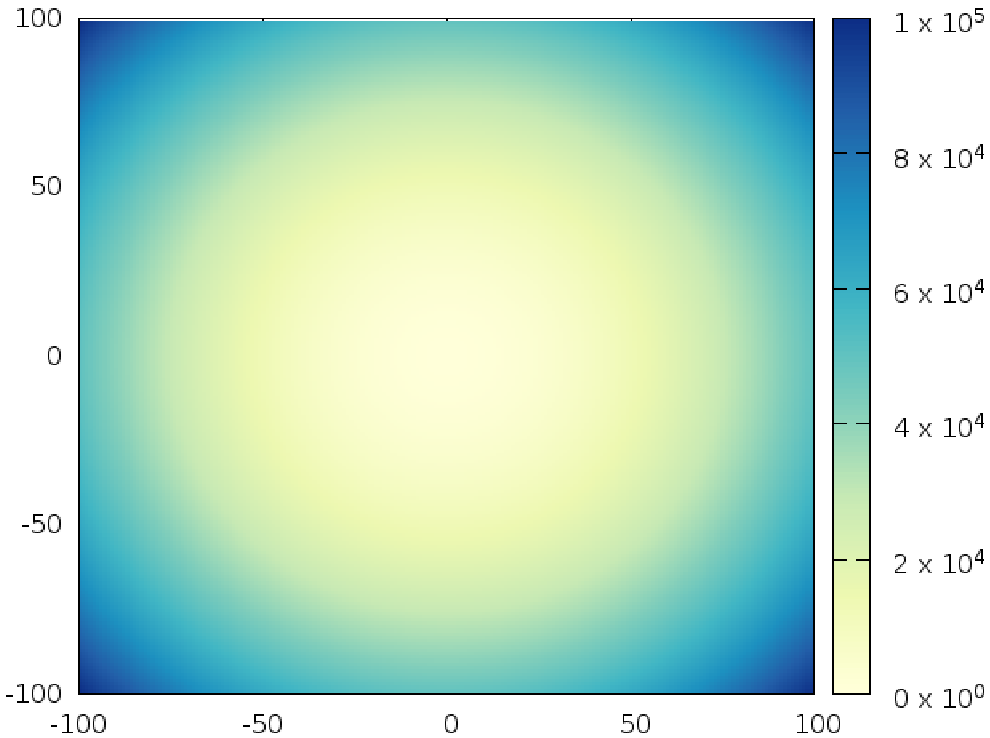

Figure 2: Distribuição de Carga $\rho(\vec{r})$ em $\theta = \pi$

Agora para calcular $V(\vec{r})$ teremos que definir o referencial $(\vec{O}_r)$ em um ponto arbitrário pois a densidade de carga se estende ao infinito!

Definindo $\vec{O}_r = (0,0,0)$ o que nos leva a:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{O}_r}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad = \quad -\int_{\vec{O}_r}^{\vec{r}} kr^3 \hat{r} \cdot d\vec{l} \quad = \quad -\int_{0}^{r} kr^3 dr$$

$$V(r) = -\frac{kr^4}{4}\Big|_{\vec{0}}^{\vec{r}} \quad \rightarrow \quad V(r) = -\frac{kr^4}{4}$$

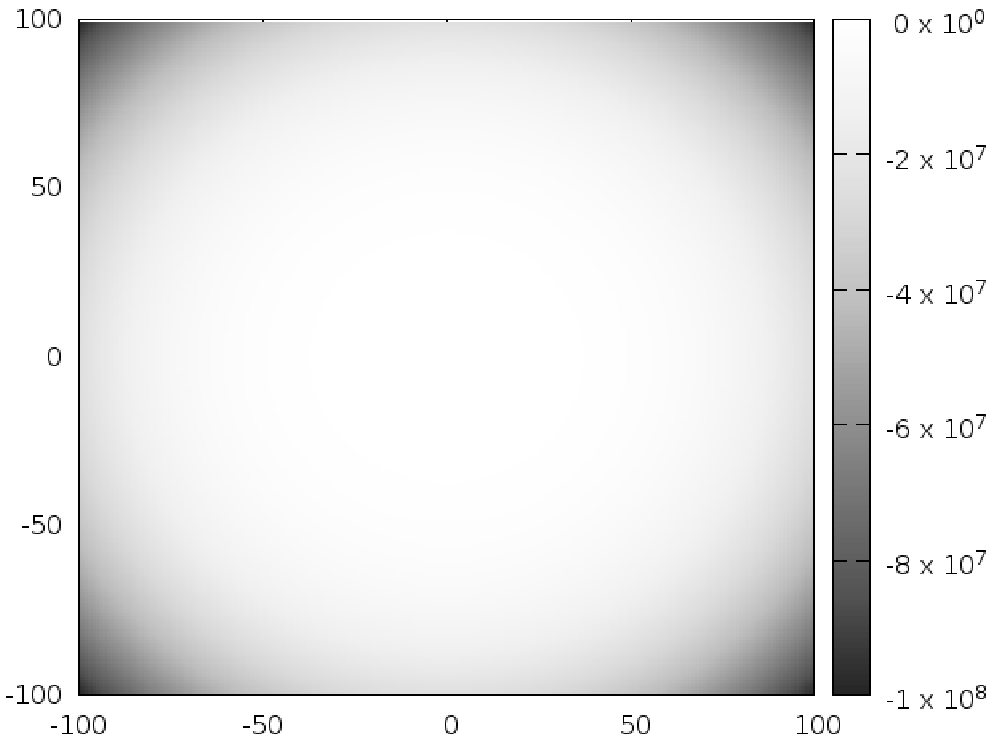

Figure 3: Potencial $V(\vec{r})$