Eletromagnetismo

André Del Bianco Giuffrida

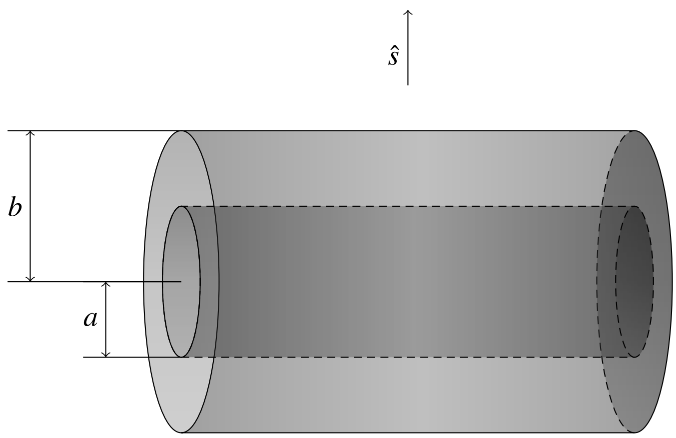
Lista 1
Ex 7

Um cabo coaxial é construído usando um cilindro maciço de raio a, coberto concentricamente por uma superfície cilíndrica de raio b.
O espaço entre ambos cilindros está vazio. O cilindro interno possui uma densidade de carga volumétrica ρ uniforme, enquanto que o cilindro externo possui uma densidade de carga superficial uniforme σ, cujo valor garante que o conjunto completo seja eletricamente neutro.

(a) Encontre o campo elétrico em todo o espaço: $s < a$, $a < s < b$ e $b < s$. Faça um gráfico do campo em função da posição.

(b) Calcule a capacitância por unidade de comprimento.

(c) Calcule a energia eletrostática por unidade de comprimento.



(a)

Calculando o Campo.

- $(s > b)$
  Devido ao conjunto completo ser eletricamente nulo podemos concluir que :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_v \frac{(\rho + \sigma)}{\epsilon_0} dv \quad , \quad (\rho + \sigma) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}(s > b) = \vec{0}$$

- $(s < a)$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

$$\vec{E} \oint d\vec{a} = \frac{2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^s s' \rho ds' \hat{s} \quad , \quad \vec{E} 2\pi L s = \frac{2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^s s' \rho ds' \hat{s}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho s}{2\epsilon_0} \hat{s}$$

- $(a < s < b)$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_v \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

$$\vec{E} \oint d\vec{a} = \frac{2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^a s' \rho ds' \hat{s} \quad , \quad \vec{E} 2\pi L s = \frac{2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^a \rho s' ds' \hat{s}$$

$$\vec{E} = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{1}{s} \hat{s}$$

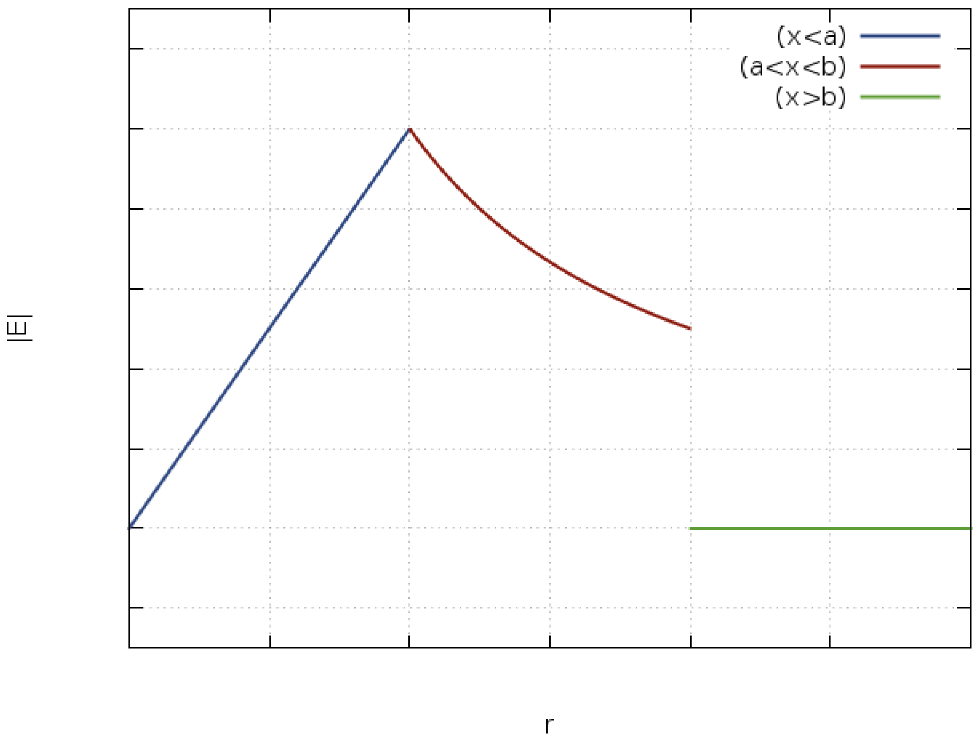


Figure 1: $|\vec{E}(\vec{r})|$ nas três regiões

(b)
Para calcular a capacitância por unidade de comprimento precisamos da diferença de potencial.

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{1}{s} (\hat{s} \cdot d\vec{l})$$

$$V(b) - V(a) = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s'} ds' \quad , \quad V(b) - V(a) = -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pela definição da densidade de carga, $Q = \rho\pi a^2 L$
Como queremos a capacitância por unidade de comprimento vamos escrever:

$$C_L = \frac{\rho\pi a^2}{V} \quad , \quad C_L = -\frac{\rho\pi a^2}{\frac{a^2\rho}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C_L = -\frac{2\epsilon_0\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(c)

Vamos calcular a energia Eletrostática por unidade de comprimento, sendo u a densidade de energia (energia por unidade de volume)

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \quad \text{integrando na área perpendicular a } \hat{z} \qquad \int u\,da = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 da$$

$$u' = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} E^2 s' ds'\right] \quad u' = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} E^2 s' ds'\right]$$

$$u' = \epsilon_0\pi\left[\int_0^a \frac{\rho^2}{4\epsilon_0^2} s'^3 ds' + \int_a^b \frac{a^4\rho^2}{4\epsilon_0^2}\frac{1}{s'}ds' + \int_b^{\infty} 0\,ds'\right]$$

$$u' = \frac{\rho^2\pi}{4\epsilon_0^2}\left[\quad \frac{s^4}{4}\bigg|_{s=0}^{a} \quad + \quad a^4\ln(s)\bigg|_{s=a}^{b} \quad\right]$$

$$u' = \frac{\rho^2\pi a^4}{4\epsilon_0^2}\left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

de modo que u' é a Energia por unidade de comprimento, ou pode-se chamar u' de Densidade linear de energia no cabo