Eletromagnetismo

André Del Bianco Giuffrida

Lista 3
Ex 5

Uma carga pontual q se encontra frente a uma esfera condutora de raio R, a uma distância $d > R$ do seu centro. A esfera se encontra a um potencial $V_0 \neq 0$.

(a) Usando o método das imagens, determine o potencial elétrico fora da esfera.
(b) Determine a densidade de carga induzida sobre a esfera.
(c) Calcule a força entre a carga e a esfera. Verifique o comportamento limite para $d >> R$.

(a)

Podemos considerar a configuração asseguir como problema imagem retirado do livro de referência (Griffiths, D. J.) "Eletrodinâmica p. xv, 3a ed Pearson Addison Wesley, 2011" nesse problema o potencial na esfera é zero, para sanar essa diferença podemos inserir a carga q_0 na origem, onde essa garante que o potencial na esfera seja $V_0 \neq 0$.

Nessas condições:
Para satisfazer a condição de contorno, $q_0 = 4\pi\epsilon_0 R V_0$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{|\vec{r} - d'\hat{x}|} + \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{x}|} + \frac{q_0}{|\vec{r}|}\right] \quad \text{para} \quad \vec{r} > R$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{|\vec{r} - d'\hat{x}|} + \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{x}|} + \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{|\vec{r}|}\right] \quad \text{para} \quad \vec{r} > R$$

Onde q' e d' podem ser determinados do seguinte modo:

$$V(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=(R,0,0)} = V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{|R - d'|} + \frac{q}{|R - d|} + \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{|R|}\right]$$

$$V(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=(R,0,0)} = V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q'}{|R - d'|} + \frac{q}{|R - d|} + 4\pi\epsilon_0 V_0\right]$$

$$\frac{q'}{|R - d'|} = \frac{-q}{|R - d|}$$

Igualando as frações porém forçando a condição de que $d' < R$:

$$\frac{q'/R}{|1 - d'/R|} = -\frac{q/d}{|1 - R/d|}$$

$$q' = -\frac{R}{d}q \quad , \quad d' = \frac{R^2}{d}$$

Então podemos escrever o Potencial como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R}{d}\frac{-q}{|\vec{r} - \frac{R^2}{d}\hat{x}|} + \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{x}|} + \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{|\vec{r}|}\right] \quad \text{para} \quad \vec{r} > R$$

(b)

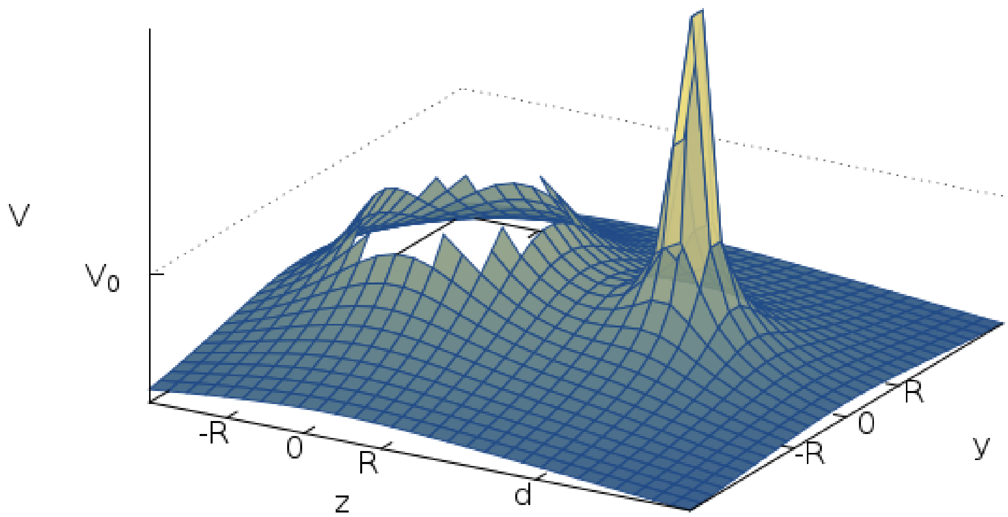

Figure 1: Potencial $V(\vec{r})$ para $\vec{r} > R$ no plano $z = 0$

Para determinar a densidade de carga induzida podemos extrair o divergente do potencial na superficie da esfera.

$$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) \quad \text{e pelas condições de contorno} \quad (\vec{E_1} - \vec{E_2}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Onde $\vec{E_2}$ é o campo no lado de dentro e $\vec{E_1}$ do lado de fora, o campo do lado de dentro é nulo pois trata-se de um condutor, então:

$$\sigma = -\epsilon_0 \nabla V(\vec{r}) \cdot \hat{r} \quad \text{então} \quad \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} V(\vec{r})$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{R}{d}\frac{-q}{|\vec{r} - \frac{R^2}{d}\hat{x}|} + \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{x}|} + \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{|\vec{r}|}\right]_{r=R}$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{d}\frac{q(R - \frac{R^2}{d}\hat{x}\cdot\hat{r})}{|R - \frac{R^2}{d}|^3} + \frac{q(R - d\hat{x}\cdot\hat{r})}{|R - d|^3} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{R}\right]$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{R}{d}\frac{q(R - \frac{R^2}{d}\sin(\theta)\cos(\phi))}{|R - \frac{R^2}{d}|^3} + \frac{q(R - d\sin(\theta)\cos(\phi))}{|R - d|^3} + \frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{R}\right]$$

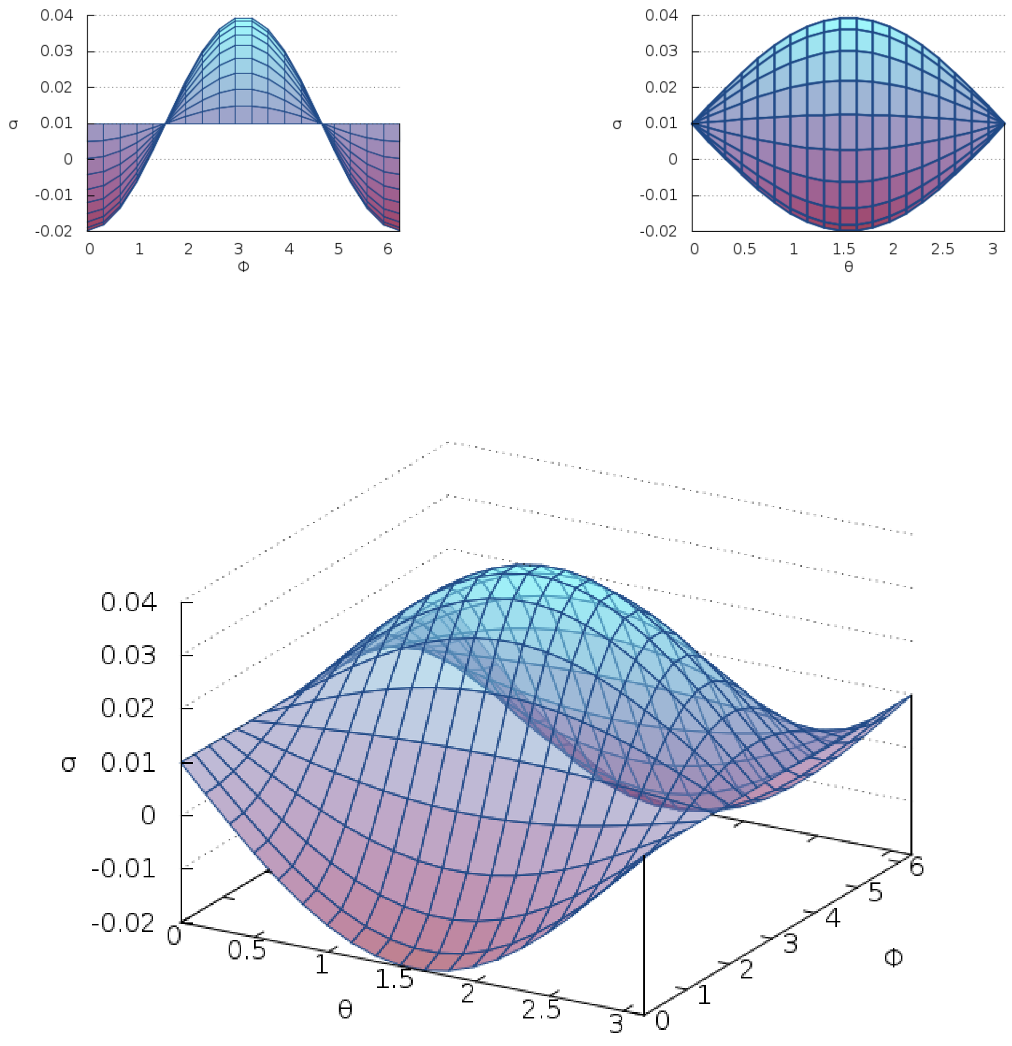

Figure 2: $\sigma(\theta, \phi)$ na superfície da esfera adotando ϕ azimutal e theta polar $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$

(c)
Para calcular a força, voltemos ao problema imagem.

Temos 3 cargas agora, o que significa que teremos a contribuição de duas forças provenientes das cargas q_0 e q' atuando sobre a carga q, portanto:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_0}{d^2} + \frac{q'}{(d-d')^2}\right)\hat{x}$$

e como já sabemos q', d' e q_0

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{d^2} - \frac{R\,q}{(d-R)^2}\right)\hat{x}$$