Eletromagnetismo

André Del Bianco Giuffrida

Lista 3
Ex 4

Uma carga pontual q está localizada a uma distância d com relação a um plano condutor infinito fixado a potencial zero. A referência de potencial está no infinito.

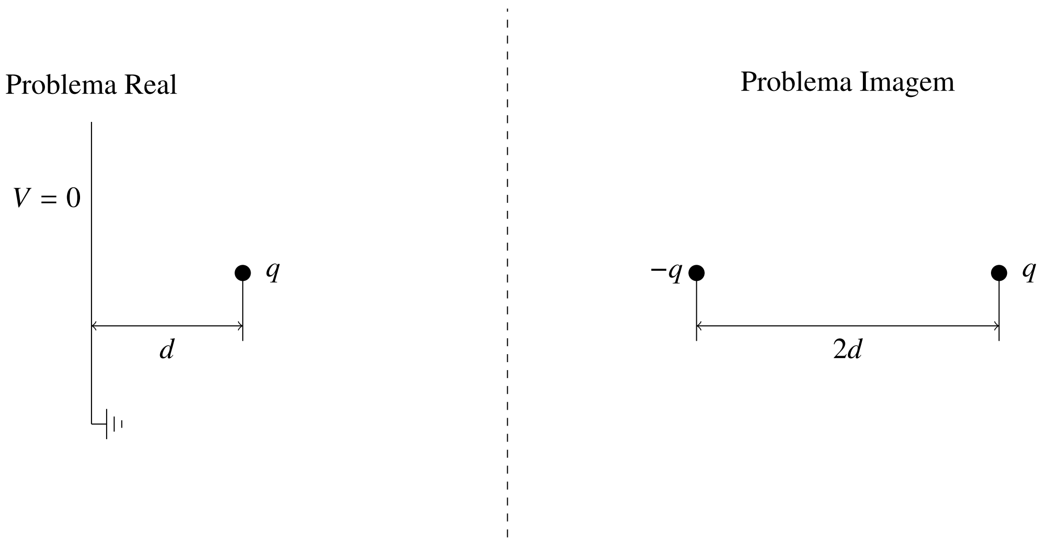
(a) Verifique que este problema real satisfaz as condições necessárias para obter o potencial $V(\vec{r})$ a partir da solução do problema imagem (com uma carga $-q$ a distância $2d$ da primeira): mesma ρ e mesma condição de Dirichlet sobre o contorno S.

(b) Calcule a densidade de carga elétrica σ sobre o plano condutor.

(c) É conveniente especificar condições de contorno de Neumann para este problema?

(d) Calcule a força que o plano exerce sobre a carga q.

(e) Calcule a energia eletrostática do sistema (carga e plano).



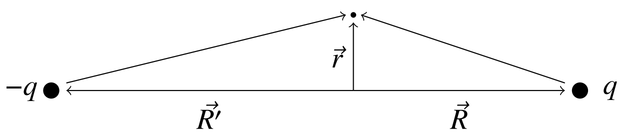
(a)

No problema imagem podemos mostrar que $V(\vec{r})$ no plano a distância d das duas cargas possui potencial 0 devido a simetria do problema.

Resolvendo o problema real através do método das cargas imagens, podemos resolver para q' e d' a seguinte expressão:

$$V = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{R}'|}\right)$$

Para a seguinte configuração:



Pelo teorema da unicidade podemos ver que se, $q = -q'$ e $R = R'$ a expressão para o potencial é validada, e assim podemos obter o potencial do problema real através do potencial do problema imagem avaliado no semi-espaço do lado em que a carga real é situado, e o potencial do lado oposto é nulo, pois não exite caga e o potencial é contínuo, equalizando isso obtemos:

$$V(\vec{r}) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r} - d\,\hat{x}|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\,\hat{x}|}\right)$$

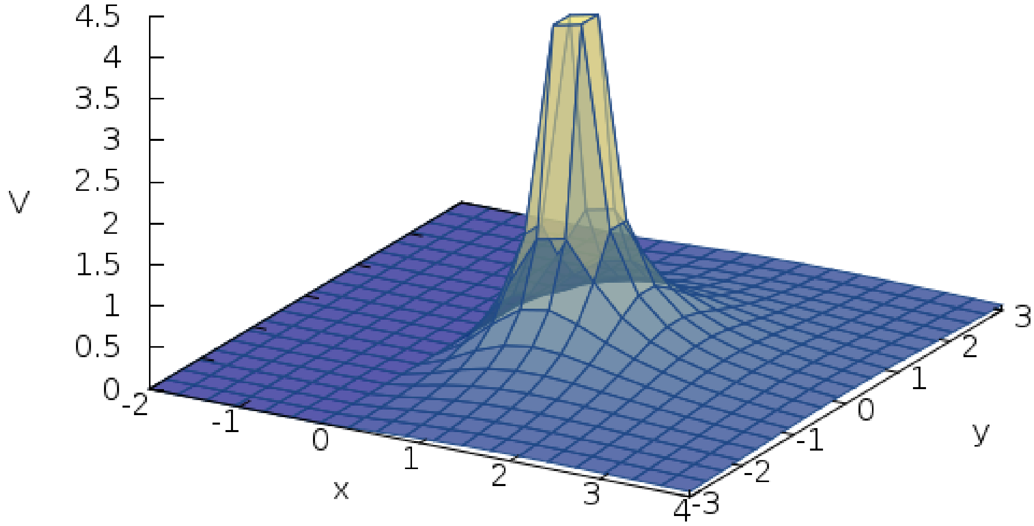


Figure 1: Potencial $V(\vec{r})$ no plano xy para a carga em (1,0,0) e o plano a potencial nulo em (0,y,z)

(b)
Para obter-mos σ podemos partir do potencial já encontrado e calcular o campo elétrico $\vec{E}$.

$$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) \quad \text{e pelas condições de contorno} \quad \left(\vec{E_1} - \vec{E_2}\right)\cdot\hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$4\pi\epsilon_0\,\vec{E_1} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{|\vec{r} - d\,\hat{x}|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\,\hat{x}|}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{|\vec{r} - d\,\hat{x}|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\,\hat{x}|}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{|\vec{r} - d\,\hat{x}|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\,\hat{x}|}\right) =$$

$$\vec{E_1} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q(x+d)\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}}{\left((x+d)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{E_2} = 0 \quad \text{pois o potencial é constante e nulo em } \; x < 0$$

$$\vec{E}\cdot\hat{x} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q(x+d)}{\left((x+d)^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{x=0}$$

Assim obtemos σ no plano $x = 0$:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{q\,d}{\left(d+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)$$

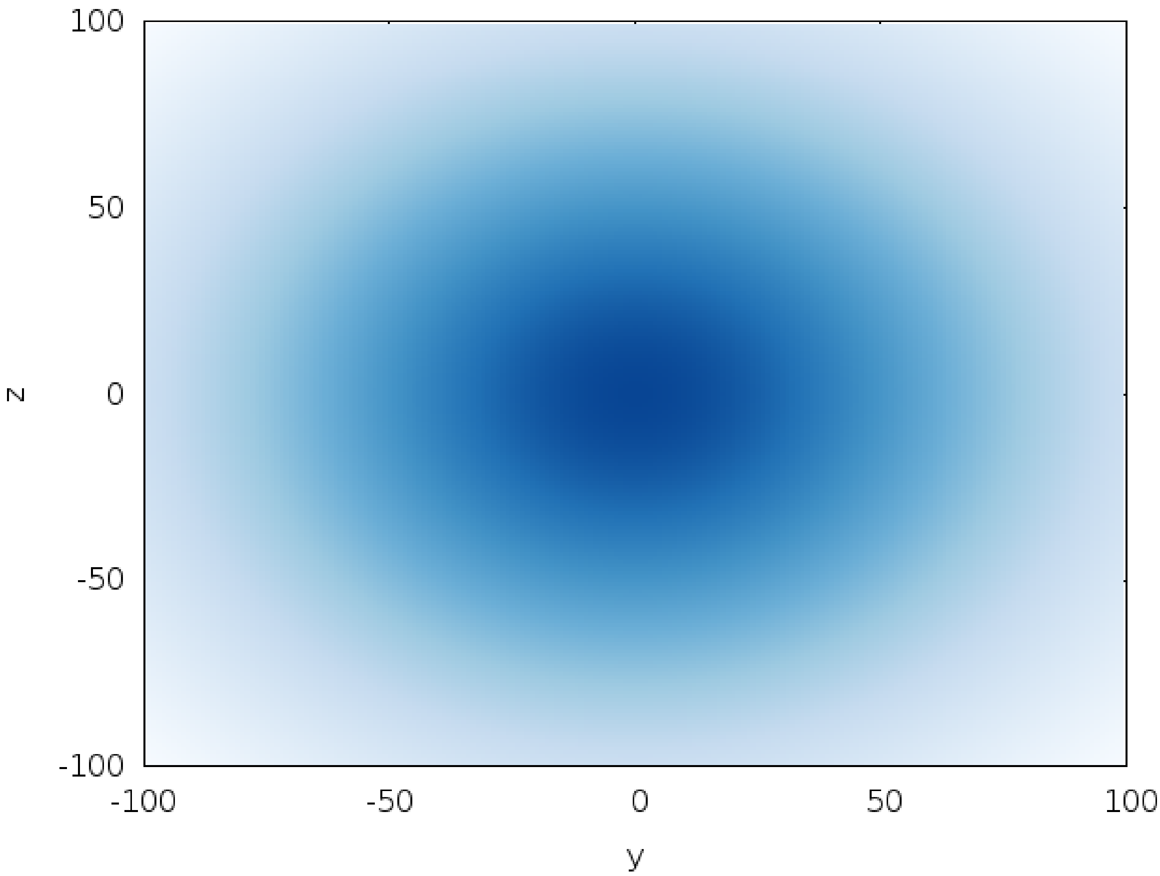


Figure 2: Densidade superficial de carga σ no plano $x = 0$ em frente a carga

(c)

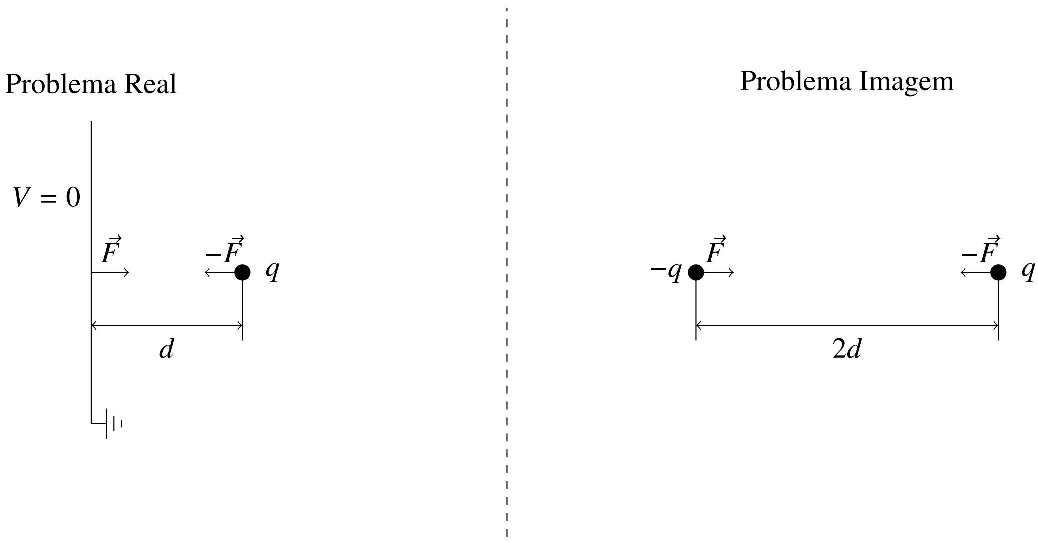
As Condições de Contorno de Neumann, implicam em fornecer a variação na direção normal do potencial na superfície ao invés de fornecer $V(r)$ no contorno explicitamente, como fizemos no início (Condição de Contorno de Dirichlet).

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n}\Bigg|_s \rightarrow \text{é dado!} \quad \rightarrow \quad \text{Condição de Contorno de Neumann}$$

$$V(\vec{r})\Big|_s \rightarrow \text{é dado!} \quad \rightarrow \quad \text{Condição de Contorno de Dirichlet}$$

(Pensar melhor sobre isso!)

(d) A força que o plano exerce sobre a carga, pode ser feita integrando a densidade de carga, porém podemos calcular através do problema imagem, pois a força que o plano exerce sobre a carga é a força que atua na carga, e é a mesma para o problema imagem , como no esquema:



É necessário que as forças sejam as mesmas, os dois problemas são identicos para $x > 0$, ou seja, a força que atua na carga q é a mesma que atua na carga q' no problema imagem e é a mesma no problema real que atua sobre o plano.

A força de Coulomb para as duas cargas é $\vec{F}$ e é a mesma força para a carga em frente ao plano.

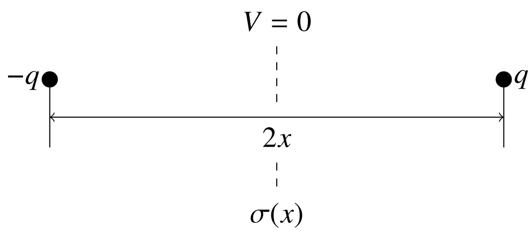
$$\vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}\hat{x}$$

(e)
Para calcular a energia eletrostática armazenada no sistema podemos partir da definição de trabalho W e assim podemos encontrar a variação da energia potencial elétrica calculando o trabalho para trazer a carga q do infinito até a distância d do plano.

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Delta U_{ab}$$

No problema real a densidade de carga no plano vai variar com a distância da carga ao plano, porém é muito mais fácil olhar-mos como varia a força no problema imagem, assim podemos concluir que é necessário trazer a carga imagem ao mesmo tempo que a carga real para que a condição de contorno seja satisfeita ($V = 0$ em $x = 0$), assim podemos calcular a força na carga q a distância $2x$ da carga $-q$.

$$\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2}$$



Fazendo a integral temos:

$$W = \int_\infty^d \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2} dx = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_d^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

$$W = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$