

Econometría de las series de tiempo, cointegración y heteroscedasticidad condicional autoregresiva**

CLIVE GRANGER Y ROBERT ENGLE

1. Introducción

La investigación empírica en economía, así como en economía financiera, utiliza como herramienta fundamental a las series de tiempo. El reconocido trabajo económico de Trygve Haavelmo, considerado como visión estándar, considera a las series de tiempo económicas como realizaciones de procesos estocásticos. Esta aproximación permite al modelador el uso de inferencia estadística en la construcción y comprobación de ecuaciones que caracterizan a las relaciones entre variables económicas. El Premio Nobel de este año (2003), reconoce dos contribuciones que han profundizado nuestro entendimiento de dos propiedades centrales de muchas series de tiempo económicas – no estacionariedad y volatilidad variable en el tiempo – permitiendo un gran número de aplicaciones.

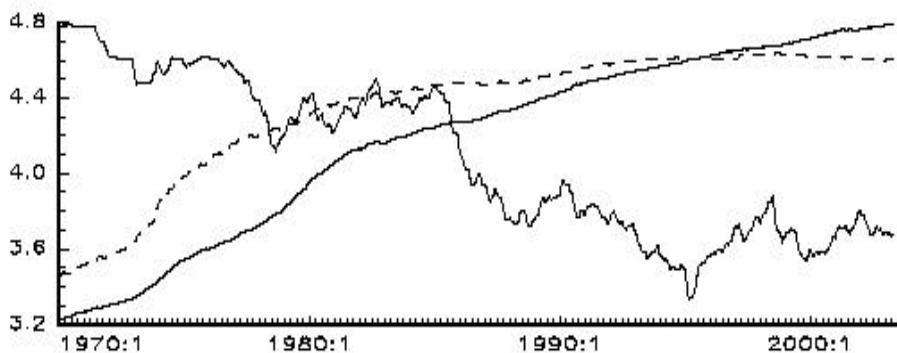


Gráfico 1.1: Logaritmo (reescalado) del tipo de cambio yen japonés/dólar estadounidense (línea sólida decreciente), logaritmo del índice de precios al consumidor de Estados Unidos ajustado

* Este artículo ha sido tomado de la información oficial publicada por la Real Academia de Ciencias con motivo de la entrega del Premio en Economía del Banco de Suecia en memoria de Alfred Nóbel, 2003.

estacionalmente (línea sólida creciente) y logaritmo del índice de precios del consumidor de Japón ajustado estacionalmente (línea punteada creciente), 1970:1 – 2003:5, observaciones mensuales.

La no estacionariedad, una propiedad común de muchas series de tiempo económicas y financieras, significa que una variable no tiene una tendencia clara a retornar a un valor constante o a una tendencia lineal. Como un ejemplo, el gráfico 1.1 muestra tres series mensuales: el valor del dólar estadounidense expresado en yenes japoneses, y los índices de precios del consumidor estacionalmente ajustados para Estados Unidos y Japón. Ninguna de estas series, de las cuales los índices de precios son considerablemente más suavizados que el tipo de cambio, parecen ser estacionarias, en el sentido de regresar a un valor fijo o fluctuar alrededor de una tendencia lineal (caso en que las desviaciones de la tendencia son estacionarias). Otras variables agregadas, tales como el producto nacional bruto, el consumo, el empleo y los precios de los activos comparten esta propiedad. Por lo tanto, es apropiado asumir que estas variables han sido generadas por un proceso no estacionario y siguen tendencias estocásticas.

Un objetivo importante de la investigación empírica en macroeconomía es probar hipótesis y estimar relaciones, derivadas de la teoría económica, entre tales variables agregadas. La teoría estadística, que fue aplicada adecuadamente durante los años 80 para construir y probar grandes modelos de ecuaciones simultáneas, se basaba en el supuesto de que las variables de esos modelos eran estacionarias. El problema fue que la inferencia estadística asociada con los procesos estacionarios ya no es válida si las series de tiempo son en efecto realizaciones de procesos no estacionarios.

Esta dificultad no fue adecuadamente comprendida entre los constructores de modelos econométricos hace tres décadas. Actualmente esto no es así, y a Clive Granger se le puede atribuir este cambio de percepción. Él ha demostrado que los modelos macroeconómicos que contienen variables estocásticas no estacionarias pueden ser construidos en tal forma que los resultados sean estadísticamente significativos y económicamente coherentes. Además su trabajo ha proporcionado el sustento para modelar en forma dinámica las variables económicas interrelacionadas. Granger ha alcanzado estos avances mediante la introducción del concepto de variables cointegradas, el cual ha cambiado radicalmente la manera en que los modelos empíricos de las relaciones macroeconómicas son formulados actualmente.

La segunda propiedad central de las series de tiempo económicas, común a muchas series de

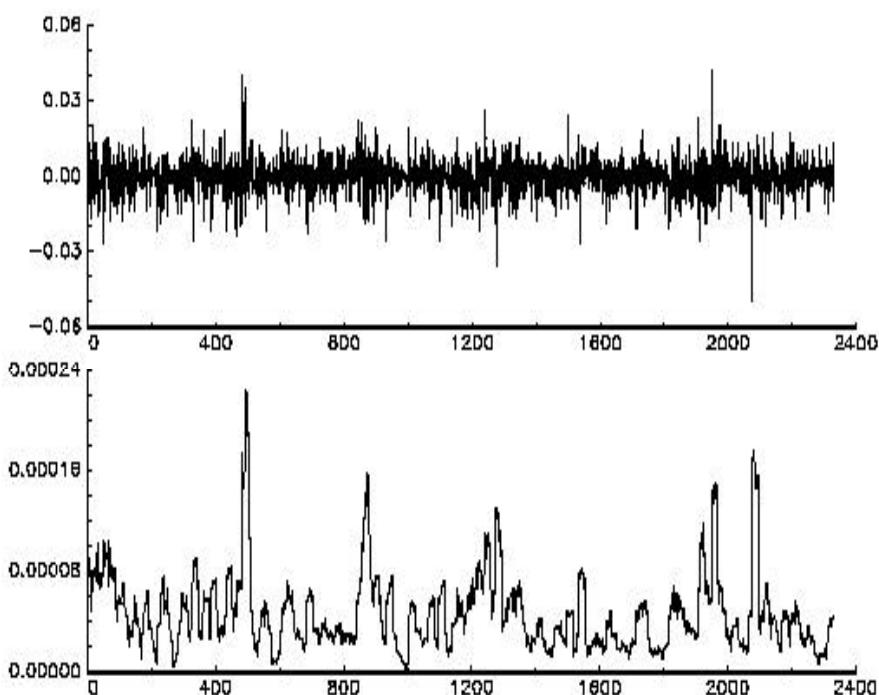


Gráfico 1.2: Retornos diarios (daily returns) del tipo de cambio (yen / dólar) y la correspondiente media móvil a 20 días de los cambios al cuadrado, 1986-1995. Tiempo financieras, es que su volatilidad cambia a través del tiempo. Considere series financieras tales como la tasa de variación del tipo de cambio diario o el índice accionario. Como un ejemplo, el gráfico 1.2 en su panel superior contiene la primera diferencia de una serie del gráfico 1.1 medida con frecuencia diaria. El panel inferior que despliega la media móvil a 20 días (cuatro semanas trading) de los retornos al cuadrado, claramente ilustra cómo los períodos de alta volatilidad alternan con períodos de calma relativa.

La volatilidad de los rendimientos es una cuestión clave para los investigadores en economía financiera y los analistas de los mercados financieros. Los precios de las acciones y otros activos dependen de la volatilidad esperada (estructura de covarianza) de los rendimientos. Los bancos y otras instituciones financieras consideran al análisis de la volatilidad como una parte del monitoreo de su exposición al riesgo. Hasta los años 80, tanto los investigadores como los participantes de los mercados financieros utilizaron modelos en los cuales se asumía a la volatilidad como constante en el tiempo. Sin embargo, como ilustra el gráfico 1.2, la volatilidad puede variar considerablemente a través del tiempo: grandes (pequeños) cambios en los rendimientos son seguidos por pequeños (grandes) cambios. La modelización y el

pronóstico de la volatilidad, por tanto, son cruciales para los mercados financieros. La investigación de modelos con volatilidad fue iniciada por Robert Engle quien, a inicios de los 80, desarrolló un nuevo concepto al cual denominó heterocedasticidad condicional autoregresiva y su acrónimo ARCH. Desde su aparición, los modelos construidos alrededor de este concepto se han vuelto una herramienta indispensable para los analistas financieros, banqueros y administradores de fondos de todo el mundo. Durante dos décadas, Robert Engle ha permanecido al frente de la investigación en modelos de volatilidad y ha realizado varias contribuciones sobresalientes en esta área.

2. Variables económicas cointegradas

Los macroeconomistas construyen modelos con series de tiempo para probar teorías económicas, para pronosticar y para el análisis de política. Tales modelos son construidos y aplicados por economistas en universidades, instituciones de investigación económica y bancos centrales. Existe una larga tradición de grandes modelos macroeconómicos construidos con cientos de ecuaciones y variables. Más recientemente, los pequeños modelos con solo una cantidad de ecuaciones y variables manejables se han vuelto más comunes. Si se considera que muchas de las series de tiempo que los modeladores usan son no estacionarias, el manejo de tales series requiere un nuevo enfoque y una inferencia estadística diferente de la inferencia tradicional desarrollada para aplicaciones de series estacionarias.

En esta sección, nosotros describimos las contribuciones de Clive Granger que le llevaron a desarrollar el concepto de cointegración y sus aplicaciones. Empezamos definiendo el concepto y la teoría estadística relacionada, incluyendo el denominado teorema de representación de Granger. Esto es seguido por una descripción del método de dos pasos utilizado para probar las relaciones de cointegración y estimar los sistemas de ecuaciones con variables cointegradas. Algunas extensiones del concepto básico de cointegración son brevemente tratadas. Finalizamos con la discusión de aplicaciones. La investigación empírica sobre la hipótesis de paridad del poder de compra PPC es utilizada para demostrar cómo la cointegración puede no solamente cambiar el análisis empírico, sino además darle una nueva dimensión.

2.1 Cointegración: definición básica

Al revisar las series de tiempo del gráfico 1.1, es apropiado asumir que han sido generadas mediante procesos estocásticos no estacionarios. Por un largo tiempo, fue una práctica común estimar ecuaciones que involucran variables no estacionarias en los modelos macroeconómicos mediante regresiones lineales directamente. No se comprendía en forma adecuada que probar hipótesis acerca de los coeficientes

utilizando la inferencia estadística estándar podría llevar a resultados completamente espurios. En un influyente documento, Clive Granger y su asociado Paul Newbold (Granger y Newbold (1994)) puntualizaron que los tests de este tipo de regresiones pueden a menudo sugerir una relación estadísticamente significativa entre variables donde en realidad no existe. Granger y Newbold llegaron a esta conclusión mediante la generación de series no estacionarias independientes, más precisamente caminos aleatorios.¹ Ellos realizaron regresiones de esas variables entre sí y observaron el valor del estadístico t de los coeficientes estimados calculados bajo el supuesto de que el verdadero valor de los coeficientes es igual a cero. A pesar del hecho de que las variables en la regresión eran independientes, los autores encontraron que la hipótesis nula de coeficiente cero fue rechazada más frecuentemente de lo que predice la teoría estándar. Al mismo tiempo, ellos observaron que los residuos de la ecuación estimada mostraron autocorrelación positiva muy fuerte.²

Estos resultados mostraron que muchas de las relaciones aparentemente significativas entre las variables económicas no estacionarias en los modelos econométricos existentes podían ser espurias. Este trabajo fue un paso inicial en la agenda de investigación de Granger de los métodos desarrollados para construir modelos econométricos más realistas y útiles.

Los estadísticos que trabajan con modelos de series de tiempo sugirieron una solución sencilla al problema de la “regresión espuria”. Si las relaciones económicas son especificadas en primeras diferencias en vez de niveles, las dificultades estadísticas inherentes a las variables no estacionarias pueden ser evitadas debido a que las variables diferenciadas son usualmente estacionarias aún si las variables originales no lo son. Sin embargo, las teorías económicas son generalmente formuladas para los niveles de las variables antes que para las diferencias. Por ejemplo, las teorías del consumo postulan una relación entre los niveles de consumo, ingreso, riqueza y otras variables — y no con sus tasas de crecimiento. Un modelo que relacione las primeras diferencias de estas variables no haría uso completo de estas teorías. Una aproximación alternativa involucraría remover una tendencia lineal de las variables y especificar las relaciones empíricas entre ellas usando variables sin tendencia. El remover las tendencias asume, sin embargo, que las variables siguen tendencias determinísticas separadas, lo cual no parece realista, dadas las graves implicaciones de largo plazo. Los modelos econométricos dinámicos basados en las variables sin tendencia lineal pueden ser útiles para caracterizar la dinámica de corto plazo de las variables económicas pero no sus relaciones de largo plazo. Lo mismo es

¹ Asuma que $\{\varepsilon_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, es una secuencia de variables estocásticas independientes con media cero y varianza σ^2 y sea $\varepsilon_T = \sum_{t=0}^{T-1} \varepsilon_t$. La secuencia $\{\varepsilon_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$ es entonces un camino aleatorio (sin DRIFT).

² Granger y Newbold (1974) obtuvieron sus conclusiones mediante simulación. La teoría de distribución asintótica válida para su experimento fue analizada más de una década después por Phillips (1986). Una presentación compacta de estos desarrollos puede encontrarse en Granger (2001).

verdad para los modelos basados solamente en primeras diferencias.

La solución de Clive Granger a este problema puede ser ilustrada mediante la ecuación de regresión más simple posible:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t,$$

donde y_t es la variable dependiente, x_t es el regresor exógeno simple, y $\{\varepsilon_t\}$ un ruido blanco, con media cero. Granger (1981) argumenta que para poder ser significativa una ecuación debe ser consistente en el sentido de que “una simulación de las variables explicativas del lado derecho debería producir las mejores propiedades de la variable que está siendo explicada”. Por ejemplo, si y_t es una variable estacional, luego x_t tiene que ser estacional, si ε_t va a ser un ruido blanco. Para seguir con el desarrollo de la idea, Granger (1981) definió el concepto de *grado de integración* de una variable. Si la variable z_t puede transformarse en estacionaria diferenciándola d veces, es llamada integrada de orden d , o $I(d)$. Las variables aleatorias débilmente estacionarias son también $I(0)$. Muchas variables macroeconómicas pueden ser consideradas como variables $I(1)$: si $z_t \sim I(1)$, luego $D z_t \sim I(0)$. Note que las variables $I(1)$ dominan a las variables $I(0)$. En una combinación lineal de variables la variación de las primeras domina a la variación de las últimas. Para ilustrarlo, si $z_t \sim I(1)$ y $w_t \sim I(0)$, luego $z_t + w_t \sim I(1)$.

Considere nuevamente la ecuación (2.1) y asuma que $x_t \sim I(1)$ y $y_t \sim I(1)$. Luego, generalmente $y_t - b x_t \sim I(1)$. Sin embargo, existe una importante excepción. Si $\varepsilon_t \sim I(0)$, luego $y_t - b x_t \sim I(0)$, por tanto, la combinación lineal $y_t - b x_t$ tiene las mismas propiedades estadísticas que una variable $I(0)$. Existe solamente una de tales combinaciones y por tanto el coeficiente b es único.³ En este caso especial, las variables x_t y y_t se denominan cointegradas. En forma más general, si una combinación lineal de un conjunto de variables $I(1)$ es $I(0)$, se dice que las variables son cointegradas. Este concepto, introducido por Granger (1981) se ha convertido en extremadamente importante para el análisis de las series de tiempo económicas no estacionarias. Una generalización a $I(d)$ variables, donde d ya no es un entero, es también posible, en cuyo caso la combinación lineal de las variables cointegradas tiene que ser $I(d-d_o)$, donde $d_o > 0$.

³ La unicidad puede ser demostrada como sigue. Suponga que existen dos relaciones de cointegración entre las variables $I(1)$ y_t y x_t : $y_t = b_j x_t + \varepsilon_{jt}$, $j = 1, 2$, $b_1 \neq b_2$. Sustrayendo el Segundo desde el primero equivale a $(b_2 - b_1) x_t = \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}$.

El lado izquierdo de esta ecuación es $I(1)$ mientras que el lado derecho, como una diferencia de dos variables $I(0)$, es $I(0)$. Esto es una contradicción a menos que $b_1 = b_2$, en cuyo caso $\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t}$.

La importancia de la cointegración en la modelización de series económicas no estacionarias se clarifica en el denominado teorema de la representación de Granger, cuya primera formulación se realiza en Granger y Weiss (1983). Con el propósito de ilustrar este resultado, considere el siguiente sistema autoregresivo bivariado de orden p:

$$\begin{aligned}x_t &= \sum_{j=1}^p \gamma_{1j} x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \delta_{1j} y_{t-j} + \varepsilon_{1t} \\y_t &= \sum_{j=1}^p \gamma_{2j} x_{t-j} + \sum_{j=1}^p \delta_{2j} y_{t-j} + \varepsilon_{2t},\end{aligned}$$

donde x_t y y_t son I(1) y cointegradas, y ε_{1t} y ε_{2t} son ruido blanco. El teorema de representación de Granger considera que en este caso el sistema puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= \alpha_1(y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{1j}^* \Delta x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \delta_{1j}^* \Delta y_{t-j} + \varepsilon_{1t} \\ \Delta y_t &= \alpha_2(y_{t-1} - \beta x_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{2j}^* \Delta x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \delta_{2j}^* \Delta y_{t-j} + \varepsilon_{2t},\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde al menos uno de los parámetros α_1 y α_2 se desvía de cero. Las dos ecuaciones del sistema están balanceadas, esto es, sus lados izquierdo y derecho son del mismo orden de integración, ya que $y_{t-1} - \mathbf{b}x_{t-1} \sim I(0)$.

Suponga que $y_t - \mathbf{b}x_t = 0$ define una relación de equilibrio dinámico entre dos variables económicas y x. Luego $y_t - \mathbf{b}x_t$ es un indicador del grado de desequilibrio. Los coeficientes α_1 y α_2 representan la magnitud de la corrección del desequilibrio y el sistema ahora se dice que está *en forma de corrección de errores*. Un sistema caracterizado por estas dos ecuaciones está además en desequilibrio en cualquier tiempo dado, pero tiene una tendencia intrínseca a ajustarse por sí mismo hacia el equilibrio.

Además, un modelo econométrico no puede ser especificado sin conocer el orden

de integración de las variables. Los tests de hipótesis de raíz unitaria (no estacionaria) fueron desarrollados por Fuller (1976), Dickey y Fuller (1979-1981), Phillips y Perron (1988) y otros.⁴ Cuando estos tests son aplicados a cada una de las tres series de tiempo del gráfico 1.1, la hipótesis nula de raíz unitaria no puede ser rechazada. Pero la raíz unitaria es rechazada para las series en primeras diferencias. Luego las series pueden ser caracterizadas como realizaciones de variables estocásticas I(1).

Debería mencionarse que las combinaciones lineales de variables no estacionarias habían aparecido en ecuaciones de econometría dinámica anteriores al trabajo de Granger sobre cointegración. Phillips (1957), quien acuñó el término “corrección de errores”, y Sargan (1964) fueron los precursores. La conocida ecuación de consumo en Davidson, Hendry, Srba y Yeo (1978), modelo denominado DHSY, difundió la idea entre los macroeconomistas. En su estudio, basado en series trimestrales de Gran Bretaña, una diferencia rezagada de $c_t - y_b$, donde c_t es el logaritmo del consumo privado de bienes no durables y y_t es el ingreso privado, representó el componente de corrección de errores. Sin embargo, estos autores no consideraron las implicaciones estadísticas de introducir tales componentes en sus modelos.⁵

2.2 Cointegración: estimación y prueba

El concepto de cointegración no habría sido muy útil en la práctica sin una teoría estadística para los tests de cointegración y para estimar parámetros de sistemas lineales con cointegración. Granger y Robert Engle conjuntamente desarrollaron las técnicas necesarias en su estudio influyente y clásico, Engle y Granger (1987), en el cual la teoría de las variables cointegradas es resumida y analizada. El estudio contiene, entre otras cosas, una prueba rigurosa del teorema de representación de Granger.

Engle y Granger (1987) consideran el problema de probar la hipótesis nula de no cointegración entre un conjunto de variables I(1). Ellos estiman los coeficientes de una relación estática entre esas variables mediante mínimos cuadrados ordinarios y aplican el bien conocido test de raíz unitaria de los residuos. El rechazo de la

⁴ Al diferenciar una variable con raíz unitaria se remueve la raíz unitaria.

⁵ Para una discusión del modelo DHSY usando análisis de cointegración, véase Hendry, Muellbauer y Murphy (1990).

hipótesis nula de raíz unitaria es evidencia a favor de la cointegración. El funcionamiento de algunos test de este tipo es comparado en el estudio.

Más recientemente, se ha vuelto posible comprobar la hipótesis nula de que la relación lineal estimada entre las variables I(1) es una relación de cointegración (los errores de la regresión son estacionarios) contra la alternativa de no cointegración (los errores son no estacionarios). Las pruebas de hipótesis fueron desarrolladas por Shin (1994), basados en los conocidos test de estacionariedad de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992), así como de Saikkonen y Luukkonen (1993), Xiao y Phillips (2002), y otros.

Otra contribución fundamental de Engle y Granger (1987) es el método de estimación de dos etapas para los modelos de vectores autoregresivos (VAR) con cointegración. Considere el siguiente modelo VAR de orden p:

$$\Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_j \Delta \mathbf{x}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (t = 1, \dots, T) \quad (2.3)$$

donde \mathbf{x}_t es un vector $n \times 1$ de variables I(1), $\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$ es una matriz $n \times n$ tal que las matrices $n \times r$ $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ tengan un rango r , $\boldsymbol{\Gamma}_j, j=1, \dots, p-1$, sean matrices de parámetros $n \times n$, y $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ es un vector $n \times 1$ de ruido blanco con una matriz de covarianza definida positiva. Si $0 < r < n$, las variables en \mathbf{x}_t son cointegradas con una relación $\boldsymbol{b} \mathbf{x}_t$ de cointegración r . Stock (1987) ha mostrado que bajo ciertas condiciones de regularidad, el estimador de mínimos cuadrados de \boldsymbol{b} es consistente y converge al verdadero valor a una rápida tasa T^1 (T es el número de observaciones). Por esta razón, a \boldsymbol{b} estimado se le considera como superconsistente. Utilizando este resultado, Engre y Granger demostraron que los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros restantes $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\Gamma}_j, j=1, \dots, p-1$, obtenidos mediante el reemplazo de \boldsymbol{b} por \boldsymbol{b} estimado, tienen la misma distribución asintótica que el estimador basado en el verdadero valor de \boldsymbol{b} .

Si las variables en \mathbf{x} son cointegradas, los parámetros de (2.3) pueden ser estimados en dos etapas: se empieza por estimar \boldsymbol{b} o, más precisamente, el espacio de cointegración (\boldsymbol{b} hasta la constante multiplicativa) usando una forma de mínimos cuadrados. Luego, manteniendo esa estimación fija, se estima los parámetros remanentes mediante máxima verosimilitud. Los estimadores de $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\Gamma}_j, j=1, \dots, p-1$, son consistentes y asintóticamente normales. Las hipótesis que involucran estos parámetros y sus valores pueden ser comprobadas utilizando inferencia estadística estándar.

Los resultados en Engle y Granger (1987) abrieron la posibilidad para una gran cantidad de aplicaciones. Se amplió la popularidad de los modelos VAR desarrollados por Sims (1980) para ofrecer una alternativa de modelos de ecuaciones simultáneas. Sims había enfatizado el uso de modelos VAR irrestrictos como un medio para modelar las relaciones económicas sin hacer supuestos innecesarios. Por otra parte, un modelo VAR con cointegración a menudo se basa en la idea de un “largo plazo”, o equilibrio móvil, definido por la teoría económica y caracterizado por el vector $b'x_{t-1}$ en (2.3). Las dinámicas de corto plazo representadas por las matrices de parámetros G_j , $j=1,\dots,p-1$, son libres de restricciones. De la misma forma lo es la matriz de ajuste de fuerza a que describe la contribución de los grados de desequilibrio de largo plazo al proceso de ajuste hacia el objetivo móvil o equilibrio.

El método de dos etapas de Engle y Granger representó un quiebre decisivo en la modelización de relaciones económicas utilizando series de tiempo cointegradas no estacionarias. Entre los últimos desarrollos, el trabajo de Johansen (1988, 1991) merece especial atención. Johansen derivó el estimador de máxima verosimilitud de b o, más precisamente, el espacio atravesado por los vectores de cointegración r en (2.3) utilizando regresiones de rango reducido.⁶ Además, encontró tests secuenciales para determinar el número de vectores de cointegración. El método de Johansen puede ser visto como una aproximación de segunda generación, en el sentido de que se construye directamente en la estimación de máxima verosimilitud en lugar de descansar parcialmente sobre mínimos cuadrados.

2.3 Extensiones de la cointegración

Granger y Engle, junto a varios coautores, han extendido el concepto de cointegración a las variables integradas estacionalmente. En el trabajo aplicado, es muy común tratar con series de tiempo con fuertes variaciones estacionales mediante diferenciación estacional. Por ejemplo, si x_t es una serie trimestral no estacionaria, su diferenciación estacional $\Delta_{4x_t} = x_t - x_{t-4}$ puede ser I(0). Si dos series estacionales no estacionarias x_t y y_t pueden transformarse en I(0) mediante diferenciación estacional y existe una combinación lineal $y_t - bx_t \sim I(0)$, entonces las dos series se denominan cointegradas estacionalmente. Este tipo de series fueron inicialmente analizadas por Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (1990).

⁶ En la práctica, el vector b es normalizado manteniendo fijo uno de sus elementos, por tanto,

Granger y Lee (1990) definieron el concepto de multicointegración que puede ser una herramienta muy útil cuando se modela relaciones de tipo flujo-stock. Suponga que x_t y y_t son cointegradas. Entonces, la suma acumulativa de las desviaciones de la relación de cointegración $y_t - bx_t = 0$ es necesariamente una variable I(1). Si esta nueva variable es cointegrada con una de las variables cointegradas originales, x_t , o y_t , entonces las dos últimas son multicointegradas.⁷

En muchos casos, las desviaciones del equilibrio son explicadas por los costos de transacción e información. Granger y Swanson (1996) demuestran cómo tales costos pueden ser incorporados en modelos con variables cointegradas y cómo esto puede generar un modelo de corrección de errores no lineal. Los costos de ajuste son a menudo abultados, y un ajuste no ocurrirá a menos que la desviación del equilibrio o el valor deseado exceda un valor límite fijado. Granger y Swanson demuestran cómo tales mecanismos, analizados por ejemplo en modelos (S, s) para el ajuste de inventarios y en los modelos de costos de menú para el ajuste de precios, pueden ser incorporados dentro de modelos con variables cointegradas. La teoría estadística para este tipo de cointegración fue delineada inicialmente por Balke y Fomby (1997), quienes la denominaron cointegración threshold. Para recientes desarrollos en esta área véase Lo y Zivot (2001).

2.4 Áreas de aplicación

La cointegración se ha convertido en una herramienta econométrica común para el análisis empírico en numerosas áreas, donde las relaciones de largo plazo afectan los valores observados actualmente: el consumo actual está restringido por el ingreso futuro esperado, las tasas de interés actuales de largo plazo están determinadas por las tasas esperadas de corto plazo, entre otros ejemplos. En tales áreas, relaciones de cointegración potenciales pueden ser derivadas de la teoría económica, comprobadas, y —si en realidad existe cointegración— incorporadas dentro de modelos económéticos.

La relación entre riqueza y consumo es un ejemplo donde la interacción entre la

su estimación, así como la estimación de α , son únicas.

⁷ Por ejemplo, las ventas y la producción en una industria pueden ser I(1) y cointegradas, en cuyo caso, su diferencia, el cambio en inventario, es una variable I(0). Por tanto, el nivel de inventario (nivel inicial más cambios acumulados) será I(1). Con un nivel determinado de inventario, definido como una proporción fija de las ventas, el inventario y las ventas podrían ser cointegradas. Esto convierte a las variables originales, ventas y producción, en cointegradas.

teoría y la práctica está cambiando nuestra visión del mundo real. La visión tradicional en muchos libros de texto es que un incremento en la riqueza causa, en forma aproximada, un aumento en el consumo en proporción a las tasas de interés real. Esta magnitud también puede ser razonable en términos del denominado modelo de ciclo de vida del consumo y los ahorros. Si esto fuera verdad, las fluctuaciones en los mercados de acciones e inmobiliario podrían tener un fuerte impacto sobre el consumo.

La visión tradicional, sin embargo, descansa en estudios econométricos y modelos simulados que no distinguen adecuadamente entre perturbaciones temporales y permanentes de la riqueza. Un estudio muy reciente de Lettau y Ludvigson (2003) demuestra que el consumo, el ingreso laboral y la riqueza deben estar cointegrados si los hogares observan una restricción presupuestaria intertemporal en su conducta de consumo. Después de comprobar que este punto de vista teórico concuerda con los datos, los autores estiman un modelo de corrección de errores que presenta dos resultados. Primero, la mayoría de perturbaciones de la riqueza se relacionan temporalmente con las fluctuaciones en el mercado de valores y segundo, tales perturbaciones temporales tienen poco efecto en el consumo, tanto en el corto como en el largo plazo.

Los conocidos estudios de cointegración basados en la teoría económica incluyen a Campbell y Séller (1987), quienes estudiaron las burbujas en los precios de los activos, Campbell y Séller (1988), Cochrane (1994) y Lettau y Ludvigson (2001) quienes investigaron la posibilidad de predecir los precios de las acciones, Campbell (1987) que comprueba la hipótesis de que el consumo está determinado por el ingreso permanente, King, Plosser, Stock y Watson (1991), quienes consideran el rol de los shocks de productividad permanente en la economía estadounidense de la posguerra, Johansen y Juselius (1990) quienes estudian la demanda de dinero, y Hall, Anderson y Granger (1992) quienes consideran la estructura de plazos de las tasas de interés.

El estudio de los tipos de cambio y precios permite ilustrar, de una forma simple, cómo la cointegración puede transformar el análisis empírico y revelar nuevas formas de investigar viejos problemas. Una proposición básica, formulada hace algún tiempo por Cassel (1922), es que el tipo de cambio se ajusta para mantener la paridad del poder de compra (PPC): el precio de una canasta de bienes expresado en moneda común, debería ser el mismo en todos los países. (Véase Froot y Rogoff (1995) y Sarno y Taylor (2002) para investigaciones de la literatura sobre PPC, tipos de cambio y precios). Asumiendo que existen dos países, tenemos:

$$S_t P_t^* = P_t \quad (2.4)$$

Donde S_t es el tipo de cambio entre la moneda doméstica y la externa, mientras que P_t y P_t^* constituyen los niveles de precios de los bienes domésticos y extranjeros en moneda local. Expresado de otra forma, el tipo de cambio real $S_t P_t^*/P_t$ se asume como constante e igual a uno.

A primera vista, esta proposición parece completamente divorciada con las fuertes fluctuaciones en los tipos de cambio observadas y la relativa estabilidad de las tasas de inflación, como se puede observar en las series del gráfico 1.1, donde se indica que en los años 70, al contrario de lo que propone la hipótesis de PPC, el yen ganó fortaleza frente al dólar mientras que la tasa de inflación japonesa fue más alta que la tasa de inflación norteamericana. La información ha sido menos contradictoria después de ese período, pero la relación entre el tipo de cambio fluctuante y los niveles de precios relativamente estables debilita la teoría.

La falta de una clara relación uno a uno entre el tipo de cambio y los precios relativos no debería sorprender. Primero, en el corto plazo, el tipo de cambio está primariamente afectado por las expectativas y movimientos de capital. Consecuentemente, puede tomar tiempo para que los movimientos comerciales suavicen las desviaciones de la PPC: en el mejor de los casos, la PPC es una relación de largo plazo. Segundo, las desviaciones de la PPC podrían ser explicadas tomando a algunos bienes como no transables, ya que ningún mecanismo obvio podría eliminar las diferencias de precios entre tales bienes. Tercero, los costos de transacción y embarque requieren pequeñas diferencias de precios antes que sean removidas por el comercio.

Los estudios empíricos de la hipótesis de PPC inicialmente fueron formulados por Cassel (1922) en su versión simple. La PPC fue probada usando modelos de la forma:

$$s_t = a + b(p_t - p_t^*) + \epsilon_t \quad (2.5)$$

donde s_t es el logaritmo del tipo de cambio entre la moneda nacional y extranjera, y p_t y p_t^* son los logaritmos de los niveles de precios de los bienes internos y externos, respectivamente. Como se ha visto en (2.4), la hipótesis nula de la PPC es equivalente a que $a = 0$ y $b = 1$ en (2.5). Frenkel (1978, 1981), y muchos otros, estimaron ecuaciones de este tipo. En estos artículos, la ecuación (2.5) fue estimada mediante mínimos cuadrados ordinarios y la hipótesis $b = 1$ comprobada usando el estadístico t estándar. El fuerte rechazo de la hipótesis de PPC fue un resultado común, al menos para los datos de los países industrializados durante el período post Bretton Woods con tipos de cambio flotantes. Más aún, los rechazos no mostraron un patrón claro: las estimaciones de b se desviaron de 1 hacia arriba y hacia abajo. Sin embargo, estos resultados no son adecuados ya que no toman en cuenta la supuesta no estacionariedad de los tipos de cambio y los niveles de precios y por tanto la

posibilidad de que $\epsilon_t \sim I(1)$. Además, las ecuaciones estáticas del tipo (2.5) no pueden separar (posiblemente fuertemente) las desviaciones de corto plazo de la PPC y los ajustes de largo plazo del tipo de cambio hacia el equilibrio.

La siguiente generación de estudios tratan explícitamente a la PPC como una relación de largo plazo, lo cual implica que las desviaciones de la PPC deberían seguir un proceso estacionario. Esto viene de asumir que $a=0$ y $b=1$ en (2.5) y comprobar si es que los residuales, es decir, las desviaciones del tipo de cambio real fijo, son un proceso $I(0)$. Cuando este tipo de pruebas fueron aplicadas a las series de tiempo post Bretton Woods, no se rechazó la hipótesis de raíz unitaria, como por ejemplo en Meese y Rogoff (1988) y por tanto no se apoyó a la PPC aún como una relación de largo plazo. Una explicación ofrecida en la literatura fue que las series de tiempo no habían sido lo suficientemente largas para que las pruebas de raíz unitaria tengan poder. Cuando las series se extendieron hacia atrás, un siglo o más, la hipótesis de raíz unitaria es efectivamente rechazada. Véase por ejemplo Frankel (1986).

Si la PPC es válida en el largo plazo, qué rápido sería el ajuste. Edison (1987) examinó este problema, aplicando una estructura de corrección de errores a las series de un siglo o más de duración. Esto significa estimar una ecuación del tipo:

$$\Delta s_t = a + b(s_{t-1} - p_{t-1} + p_{t-1}^*) + g(\Delta p_{t-1} - \Delta p_{t-1}^*) + \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

donde b mide la tasa de convergencia hacia la PPC. El resultado típicamente sugiere períodos de desviación de la PPC de entre 3 y 7 años. El comportamiento de la dinámica de corto plazo del tipo de cambio puede ser explicado como una combinación de *shocks* transitorios y ajustes graduales hacia la PPC.

Estos estudios de segunda generación asumen que existe una relación de cointegración entre s_t , p_t y p_t^* con un vector de cointegración $b=(1, -1, 1)$, obtenido de la forma simple de la PPC. Parece realista, sin embargo, asumir un tipo de cambio real con tendencia, debido a las diferentes tendencias en los precios relativos de los bienes transables y no transables (el denominado efecto Balassa-Samuelson). El

⁸ De acuerdo al efecto Balassa-Samuelson, los países pobres crecen más rápido que los países ricos, y los precios al consumidor crecen más rápido en los primeros que en los últimos. Una razón es que el crecimiento más rápido en las economías pobres se debe primariamente al crecimiento de la productividad en el sector de bienes transables donde los precios tienden a igualarse entre todos los países. El fuerte crecimiento de la productividad lleva a incrementos salariales mayores también en el sector de bienes no transables. En este sector, sin embargo, se espera que la productividad crezca a casi la misma tasa en todas las economías. Los grandes incrementos de salarios por tanto implican grandes crecimientos en precios de los bienes no transables en países pobres. Tales incrementos de precios, en efecto, aumentan la tasa de

vector relevante de cointegración en tal situación es $b = (1, -\mathbf{m} \ \mathbf{m}^*)'$ donde los parámetros \mathbf{m} y \mathbf{m}^* , si se desvían de la unidad, pueden reflejar diferentes tendencias de precios para los bienes transables y no transables.⁹ Para considerar esta extensión, se empieza por correr la regresión

$$s_t = \alpha + \mu p_t - \mu^* p_t^* + \varepsilon_t \quad (2.7)$$

y comprobar la no estacionariedad (o estacionariedad) de los errores. Los errores estacionarios apoyan la versión más general de la PPC. Luego, si se comprueba que los errores son estacionarios, la dinámica completa del sistema puede ser estimada como se discute en Engle y Granger (1987). Este proceso genera una idea de si existen y de qué forma son las fluctuaciones del tipo de cambio alrededor de la PPC de equilibrio.

Algunos estudios de tercera generación que usan esta aproximación han sido conducidos desde fines de los años 80. Un resultado común es que la hipótesis nula de no cointegración es rechazada más frecuentemente que la nula de raíz unitaria en $s_t - p_t + p_t^*$. Los resultados son todavía sensibles al período de observación: los datos post Bretton Woods tienden a producir estimaciones de \mathbf{m} y \mathbf{m}^* lejanas de la unidad, mientras que los datos de todo el siglo veinte producen valores cercanos a uno.

Las tres series de tiempo del gráfico 1.1 sirven para demostrar cómo la validez de la hipótesis PPC puede ser examinada usando análisis de cointegración. Al estimar los parámetros de la ecuación (2.7) se obtiene:

$$s_t = 6.63 + 0.44p_t - 1.07p_t^* + \hat{\varepsilon}_t. \quad (2.8)$$

Los residuos estimados en (2.8) se presentan en el gráfico 2.1. Tienen la apariencia de fluctuar alrededor de cero, lo cual sugiere estacionariedad, pero despliegan considerable persistencia, lo cual sugiere lo opuesto. Se requiere una prueba formal para comprobarlo.

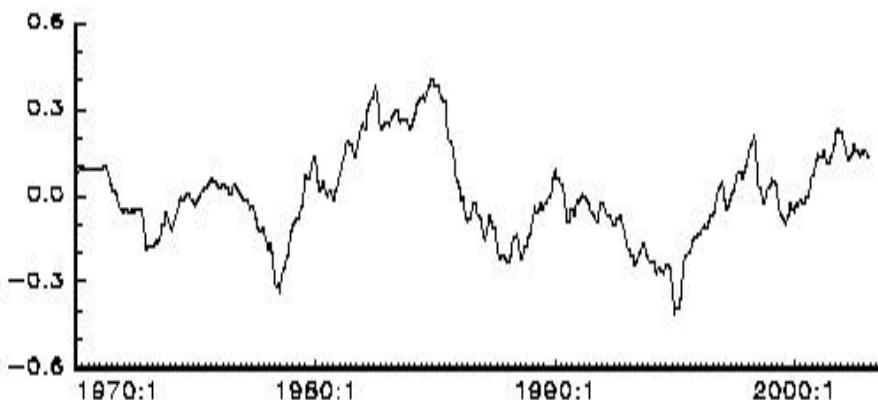
Culver y Papell (1999) prueban la hipótesis PPC para algunos países, con cointegración para la hipótesis nula contra la alternativa de no estacionariedad, utilizando el test de Shin (1994). Continuando con esta aproximación, la cointegración

crecimiento del índice de precios agregado al consumidor en esos países.

⁹ Esto requiere el supuesto de que el nivel de precios externo p_t^* es exógeno en el sentido de que no existe retroalimentación hacia él desde las otras dos variables. Esto restringe a un sistema con dos ecuaciones, donde puede existir como máximo un vector de cointegración.

no es rechazada a un nivel del 5%. Si se concluye que s_t , p_t y p_t^* pueden considerarse como cointegradas, el vector b estimado = (1, -0.44, 1.07) estimado de (2.7) es un vector de cointegración. No es cercano a (1, -1, 1) como se requiere para la versión restringida de PPC y los datos proveen débil apoyo para una versión general de PPC entre Japón y Estados Unidos durante el período 1975-2003.¹⁰

Gráfico 2.1
Residuos de la regresión 2.8



3. Modelando la volatilidad

Muchos economistas financieros están preocupados con la modelización de la volatilidad de los rendimientos de activos. La teoría de elección de portafolio intenta derivar portafolios óptimos como funciones de las varianzas y covarianzas de los rendimientos. El modelo de valoración de activos de capital (CAPM) y otros modelos de valoración de activos muestran cómo los inversionistas obtienen recompensa por tomar riesgos sistemáticos, por ejemplo, los riesgos relacionados con la covarianza entre sus propios activos y los de mercado u otros factores no diversificados. Las fórmulas de valoración de opciones calculan los precios de las opciones y otros

¹⁰ Sin embargo, los resultados son sensibles a la elección de la hipótesis nula. Los tests Dickey-Fuller aumentados de la hipótesis de raíz unitaria, véase Dickey y Fuller (1981), generan valores t desde -2.3 hasta -2.5, que no son lo suficientemente pequeños para rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia de 0.1 (el valor crítico es de -2.58).

instrumentos derivados en términos de la volatilidad de los activos subyacentes. Los bancos y otras instituciones financieras aplican los denominados modelos de valoración de riesgo para estimar los riesgos de sus activos de mercado. Para todos estos propósitos, la modelización de la volatilidad o, en otras palabras, la estructura de covarianza de los rendimientos de los activos, es esencial.

Los economistas financieros siempre han conocido que la volatilidad en los rendimientos tiende a agruparse y que las distribuciones marginales de muchos rendimientos de activos son leptocúrticas, lo cual significa que tienen colas más anchas que la densidad de la distribución normal con la misma media y varianza. Aún cuando el agrupamiento temporal de los rendimientos era conocido para muchos investigadores, los rendimientos eran modelados como independiente e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo. Los ejemplos incluyen a Mandelbrot (1963) y Mandelbrot y Taylor (1967) quienes usaron la denominada distribución paretiana estable para caracterizar la distribución de los rendimientos.¹¹ La modelización de Robert Engle de la volatilidad variable en el tiempo mediante la heteroscedasticidad condicional autoregresiva (ARCH) significó un notable avance.

Nosotros empezamos esta sección presentando el modelo ARCH básico de Engle, algunas de sus generalizaciones y una breve aplicación. Luego se discute sobre el denominado modelo ARCH en-medias (ARCH-M), donde los primeros momentos condicionales –en aplicaciones, usualmente rendimientos esperados de activos– están sistemáticamente relacionados con los segundos momentos condicionales modelados mediante ARCH. Las generalizaciones multivariadas de los modelos ARCH también son consideradas, así como las nuevas parametrizaciones de ARCH. Se concluye con el análisis de valoración de riesgos, donde los modelos ARCH juegan un importante papel.

3.1 Heteroscedasticidad condicional autorregresiva

En la econometría de series de tiempo, quienes construyen modelos generalmente parametrizan la media condicional de una variable o un vector de variables. Suponga que en el tiempo t se observa el vector estocástico $(y_t, \mathbf{x}_t')'$ donde y_t es un escalar y \mathbf{x}_t es un vector de variables tales que algunos de sus elementos pueden ser rezagos de y_t . Esto implica el siguiente modelo predictivo para la variable y_t :

$$y_t = E\{y_t | \mathbf{x}_t\} + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

¹¹ Para un análisis más profundo de las distribuciones paretianas estables y su uso en finanzas y econometría, véase Rachev y Mitnik (2000).

donde la media condicional $E\{y_t | \mathbf{x}_t\}$, típicamente tiene una forma paramétrica, $E\{\varepsilon_t | \mathbf{x}_t\} = E\varepsilon_t = 0$, y $E\varepsilon_t\varepsilon_s = 0$, para $t \neq s$, esto es, $\{\varepsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas con media cero. Cuando se estima los parámetros en $E\{y_t | \mathbf{x}_t\}$, típicamente se asume que la varianza incondicional del término de error ε_t es constante o variable en el tiempo en forma desconocida. (En efecto, se asumió varianzas constantes y covarianzas en la presentación de estimación de sistemas cointegrados).¹²

Engle (1982) consideró el supuesto alternativo que, mientras la varianza de error incondicional –si existe- sea constante, la varianza de error *condicional* es variable en el tiempo. Esta noción revolucionaria hizo posible explicar las características sistemáticas en los movimientos de la varianza a lo largo del tiempo y, a posteriori, estimar los parámetros de la varianza condicional conjuntamente con los parámetros de la media condicional. En la literatura no existen trabajos anteriores con este tipo de ideas.

Engle parametrizó la varianza condicional de ε_t en el modelo (3.1) tal que los grandes errores positivos o negativos ε_t fueran probablemente seguidos por otros grandes errores de cualquier signo, y los pequeños errores por pequeños errores de cualquier signo. Más formalmente, él asumió que ε_t puede ser descompuesto como $\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}$, donde $\{z_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con media cero y varianza unitaria, y donde

$$h_t = \text{var}(\varepsilon_t | \mathcal{F}_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2. \quad (3.2)$$

En (3.2), $\varepsilon_t = y_t - E\{y_t | \mathbf{x}_t\}$, y el conjunto de información $F_t = \{\varepsilon_{t-j} : j \geq 1\}$, $\alpha_0 > 0$, y $\alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, q$.

La ecuación (3.2) define el modelo ARCH introducido en Engle (1982), donde la varianza condicional es una función de los valores pasados de los errores cuadrados. En este estudio clásico, Engle desarrolló la teoría de la estimación del modelo ARCH, dando las condiciones para que los estimadores de máxima verosimilitud sean consistentes y asintóticamente normales, y presentó un test de multiplicador de Lagrange para la hipótesis de no ARCH (tanto para la varianza condicional como incondicional) en los errores ε_t .

¹² Alternativamente, la media condicional es una función no paramétrica de \mathbf{x}_t , en cuyo caso el enfoque es sobre la estimación de su forma funcional.

3.2 Extensiones y aplicaciones

En la práctica, ε_t^2 tiende a tener una función de autocorrelación que decae en forma relativamente lenta entre las series de rendimientos de frecuencia de observación suficientemente altos, en términos diarios y semanales. Una adecuada caracterización de estos hechos estilizados requiere un modelo ARCH con un largo rezago q . Pero si el lado derecho de (3.2) es modificado mediante el aumento de rezagos de la varianza condicional h_t (un rezago es a menudo suficiente), el modelo resultante puede ser formulado con solo un pequeño número de parámetros y todavía desplegar una función de autocorrelación que decae lentamente para ε_t^2 . Poco tiempo después de la publicación del estudio sobre ARCH, el estudiante graduado de Engle, Tim Bollerslev, introdujo este tipo de modelo y lo llamó modelo ARCH generalizado (GARCH). Este modelo tiene la siguiente forma, véase Bollerslev (1986),

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (3.3)$$

El modelo GARCH de primer orden ($p = q = 1$), además sugerido independientemente por Taylor (1986), se ha vuelto el modelo ARCH más popular en la práctica. Comparado con el modelo básico ARCH de Engle, el modelo GARCH es una innovación técnica útil que permite una especificación parsimoniosa: el modelo GARCH de primer orden contiene solamente tres parámetros. Sin embargo, no genera ninguna nueva visión conceptual.

La aplicación de Engle (1982) incluye series macroeconómicas tales como la tasa de inflación, pero Engle rápidamente se dio cuenta que el modelo ARCH también era muy útil para economía financiera. En efecto, cuando se consideraban cambios en las series de tiempo de los precios, Mandelbrot (1963) había observado que "...grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios –de cualquier signo– y pequeños cambios tienden a ser seguidos por pequeños cambios...", pero no continuó modelando los rendimientos como dependientes del tiempo. Si la media condicional es asumida como constante, luego el modelo ARCH puede ser usado para caracterizar series de rendimiento que contienen dependencia no lineal pero despliegan agrupamientos de volatilidad. Si bien el modelo ARCH es usado para modelar observaciones leptocúrticas, también puede servir para predecir la volatilidad. Esto, en efecto, puede ser crucial para los inversionistas quienes desean limitar el riesgo de su portafolio.

El panel superior del gráfico 3.1 muestra los rendimientos diarios en términos de logaritmos (primeras diferencias de los logaritmos de los precios de cierre diarios) del índice de acciones *Standard and Poor 500* desde el 16 de mayo de 1995 al 29 de abril de 2003, 2000 observaciones en total. Los períodos volátiles alternan en efecto con períodos de relativa calma, como en el caso de las series de tipo de cambio diario del gráfico 1.2.

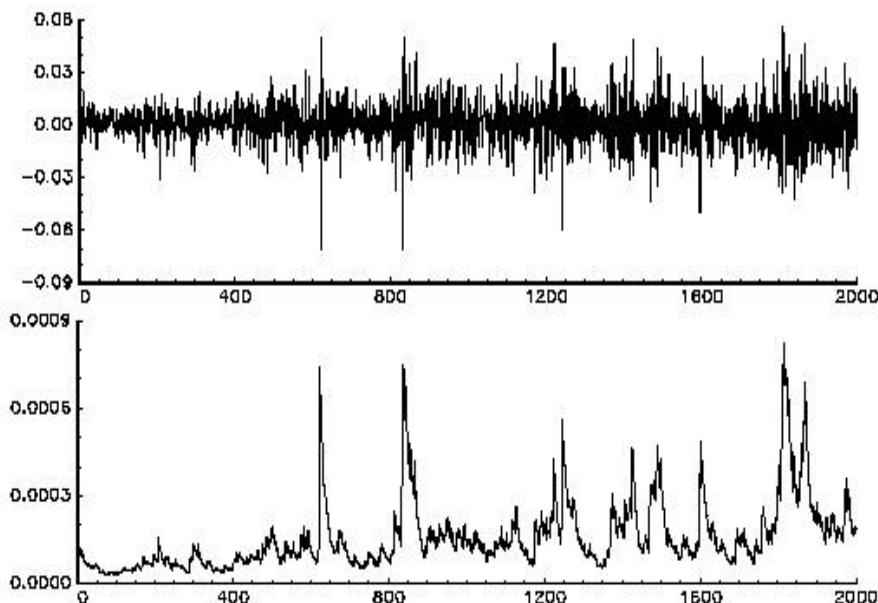


Gráfico 3.1: panel superior: rendimientos diarios logarítmicos del índice de acciones *Standard and Poor 500*, 16 mayo 1995 – 29 abril 2003. Panel inferior: varianza condicional estimada para el mismo índice mediante un modelo GARCH de primer orden (3.4).

Al ajustar un modelo GARCH a las series del gráfico 3.1. bajo el supuesto de que los errores z_t son normales (y que ε_t son condicionalmente normales) se obtiene

$$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.091\varepsilon_{t-1}^2 + 0.899h_{t-1}. \quad (3.4)$$

La suma de a_l estimado + b_l estimado es cercana a uno, que es algo común en este tipo de aplicaciones. La condición $a_l + b_l < 1$ es necesaria y suficiente para que

el proceso GARCH de primer orden sea estacionariamente débil, y el modelo estimado (3.4) satisface esta condición. La varianza condicional rezagada h_{t-1} tiene un coeficiente estimado de 0.9, lo cual significa que el 90% del shock de la varianza permanece el siguiente día, y el período equivale a seis días. El panel inferior del gráfico 3.1 muestra la varianza condicional estimada h_t a lo largo del tiempo. Los picos en el gráfico tienen una cola a la derecha que decrece en forma relativamente lenta, lo cual demuestra que la volatilidad es persistente. Otra valiosa observación es que durante los períodos turbulentos, la varianza condicional es varias veces más alta que su nivel básico. Esto sugiere que la turbulencia tendrá implicaciones prácticas para los inversionistas cuando se predice la volatilidad de un índice accionario o de un portafolio. Para una investigación reciente sobre la predicción de la volatilidad, véase Poon y Granger (2003).

Lo que es parametrizado en (3.2) y (3.3) es la varianza condicional. Una alternativa propuesta por Schwert (1990) es parametrizar la desviación estándar condicional $h_t^{1/2}$. Esto es importante en las predicciones con modelos GARCH. Si la función de pérdida del pronosticador está basada en el error de la media absoluta en lugar de la raíz del error cuadrado medio, comúnmente más utilizada, es natural utilizar un modelo que parametrize la desviación estándar condicional y no la varianza condicional. Un modelo más general contendría las dos alternativas como casos especiales. Este tipo de modelo, denominado modelo GARCH de poder asimétrico, fue introducido por Ding, Granger y Engle (1993). Ellos parametrizaron un modelo condicional general h_t^δ donde $\delta > 0$. Cuando Ding et al. (1993) estimaron un modelo de poder GARCH (1,1) para una larga serie de rendimientos diarios del índice S & P, ellos obtuvieron un δ estimado = 1.43, y ambas hipótesis nulas, $\delta = 1$ y $\delta = 1/2$, fueron rechazadas. El modelo GARCH (1,1), sin embargo, ha mantenido en forma rotunda su posición como el modelo GARCH más popular en la práctica.

3.3 ARCH en medias y ARCH en medias multivariado

Los modelos ARCH y GARCH son herramientas eficientes para estimar momentos de segundo orden condicionales de las distribuciones estadísticas -por ejemplo, las varianzas y covarianzas. Una gran parte de la teoría financiera trata sobre la relación entre los segundos momentos de los rendimientos de los activos y los primeros momentos (rendimientos esperados de activos). Parecía evidente extender los modelos ARCH para caracterizar explícitamente esta conexión. Este tipo de modelo, la primera aplicación del ARCH a las finanzas de Engle, puede consultarse en Engle, Lilien y Robins (1987). Engle y sus coautores consideran una economía con dos activos, uno riesgoso y otro libre de riesgo. Asumen que el riesgo es medido como una función de la varianza condicional de los activos riesgosos. Como un resultado,

el precio ofrecido por los agentes aversos al riesgo fluctúa a lo largo del tiempo, y el precio de equilibrio determina la relación media-varianza. Esto sugiere incluir un valor positivo con una función monótonicamente creciente de la varianza condicional en la ecuación de la media condicional. En su forma más simple, esto se representa como

$$r_t = \beta + g(h_t) + \varepsilon_t, \quad (3.5)$$

donde r_t es el rendimiento de excedente de un activo en el tiempo t , $g(h_t)$ es una función de la varianza condicional h_t y h_t se define como en (3.2). Engle et al. (1987) eligió $g(h_t) = \delta h_t^{1/2}$, $\delta > 0$, esto es, un múltiplo de la desviación estándar condicional de ε_t . Las ecuaciones (3.5) y (3.2) conjuntamente definen un modelo ARCH-en-medias. Los autores aplicaron el modelo para explicar los rendimientos excedentes mensuales de los bonos del Tesoro de Estados Unidos a seis meses. Asumiendo como activos libres de riesgo a los bonos del tesoro a tres meses, encuentran un efecto significativo del componente de riesgo estimado $\delta h_t^{1/2}$ sobre el rendimiento excedente r_t .

Sin embargo, en la teoría financiera el precio de un activo no es primariamente una función de su varianza sino de su covarianza con el portafolio de mercado (CAPM) y otros factores de riesgo no diversificables (Teoría de Arbitraje de Precios). Aplicar el modelo de valoración de activos ARCH-en-media a la valoración de varios activos riesgosos, por tanto, implica modelar las covarianzas condicionales. En lugar del modelo CAPM estándar, donde los agentes tienen expectativas comunes y constantes de las medias y las varianzas de los rendimientos futuros, esta generalización lleva a un CAPM condicional, donde los rendimientos esperados son funciones de las covarianzas variables en el tiempo con el portafolio de mercado.

Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988) construyeron un modelo GARCH multivariado. Sea \mathbf{r}_t el vector $n \times 1$ de los rendimientos excedentes reales en el tiempo t y \mathbf{w}_t el correspondiente vector de valores ponderados. De acuerdo al CAPM, el vector de medias condicionales de los rendimientos excedentes es proporcional a la covarianza entre los activos y el portafolio de mercado:

$$\boldsymbol{\mu}_t = \delta \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1}, \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{H}_t = [h_{ij}]$ es la matriz de covarianza condicional $n \times n$, h_{ij} es la covarianza condicional entre el activo i y el activo j en el tiempo t y δ es una constante. De acuerdo a (3.6), el rendimiento esperado de los activos cambia a lo largo del tiempo con variaciones en la estructura de covarianza. En otras palabras, el denominado coeficiente \mathbf{b} en CAPM es variable en el tiempo. La matriz \mathbf{H}_t es parametrizada en

forma que cada varianza condicional y covarianza tengan su propia ecuación. Como lo postulan Bollerslev et al. (1988), esto lleva al siguiente modelo de GARCH-en-medias:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\alpha}_0 + \delta \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

y¹³

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \boldsymbol{\alpha} + \sum_{j=1}^q \mathbf{A}_j \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j}) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}). \quad (3.7)$$

con tres activos ($n = 3$), el sistema (3.7) consiste de seis ecuaciones, para tres varianzas condicionales y tres covarianzas condicionales. Para mantener el número de parámetros en (3.7), Bollerslev et al. (1988) hicieron dos supuestos simplificadores consistentes en que $p = q = 1$ y \mathbf{A}_1 y \mathbf{B}_1 sean matrices diagonales. Luego, aplicaron el modelo a datos trimestrales para tres activos: cuentas (cuentas del Tesoro a seis meses), bonos (bonos del Tesoro a veinte años) y acciones (índice NYSE incluyendo dividendos). Los resultados muestran, entre otras cosas, que las varianzas condicionales y las covarianzas son fuertemente autorregresivas. La hipótesis de que la matriz de covarianzas condicional \mathbf{H}_t es constante a lo largo del tiempo es claramente rechazada, lo cual implica que el vector de coeficientes beta en el CAPM debería variar en el tiempo.

Con el fin de mitigar el problema práctico inherente a la estimación de un gran número de parámetros, Engle (1987) sugirió un modelo que fue más tarde aplicado en Engle, Ng y Rothschild (1990). En este modelo ARCH-factor el vector de rendimiento de los activos \mathbf{r}_t , sigue la siguiente definición

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{B} \boldsymbol{\xi}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{r}_t tiene una estructura de factores. En la ecuación (3.8), \mathbf{B} es una matriz $n \times k$ de carga de factores, esto es, los parámetros a ser estimados \mathbf{x} , son un vector $k \times 1$ de factores no observables, y se espera que k sea mucho menor que n . Esto implica que la conducta dinámica de un gran número de rendimientos de activos es caracterizada por un pequeño número de factores comunes. Se asume ahora que los errores $\boldsymbol{\varepsilon}_t$

¹³ El operador de vectores elige las observaciones en cada columna que están sobre la diagonal principal y los apila sobre cada cual, empezando con la primera columna. Por ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Luego, el vector $(\mathbf{A}) = (a_{11}, a_{12}, a_{22})'$.

tienen una matriz de covarianza condicional \mathbf{Y} y que los factores tienen una matriz de covarianzas condicional \mathbf{L}_t . El asumir que e_t y x_t no están correlacionados lleva a la siguiente matriz de covarianzas condicional de \mathbf{r}_t :

$$\text{cov}(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Psi} + \sum_{j=1}^k \lambda_{jt} \boldsymbol{\beta}_j \boldsymbol{\beta}'_j, \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{L}_t = \text{diag}(\lambda_{1t}, \dots, \lambda_{kt})$ y b_j es la columna j th de \mathbf{B} . Si se asume que cada λ_{jt} tiene una estructura de tipo ARCH, los parámetros de este modelo ARCH-factor pueden ser estimados. La estimación es simplificada mediante el supuesto de que los portafolios (pesos de sus valores) son conocidos, donde esto implica conocer los elementos de b_j . La estimación e implicaciones del modelo ARCH-factor son discutidos en Engle et al. (1990). Ellos aplicaron un modelo de un factor ($k = 1$ en (3.9)) a la valoración de cuentas del Tesoro de diferentes plazos de vencimiento.

Independientemente de Engle y sus coautores, Diebold y Nerlove (1989) desarrollaron un modelo similar que fue exitosamente aplicado a la modelización de concordancia en la volatilidad de los movimientos de las series de tipo de cambio de siete días. Los modelos de factores de este tipo han sido utilizados para estudiar las relaciones entre los mercados de acciones internacionales.

3.4 Otros desarrollos

Desde su inicio, la teoría estadística de los modelos ARCH ha sido ampliamente utilizada y las aplicaciones abundan. Cientos de aplicaciones a las series de tiempo financieras han sido enumeradas en una investigación de Bollerslev, Chou y Corner (1992), y estas aplicaciones han venido creciendo constantemente. Varios autores han contribuido a la teoría de estimación de estos modelos y han derivado condiciones para la consistencia y normalidad asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud en modelos ARCH y GARCH, tanto univariados como multivariados.

Robert Engle por su cuenta ha ampliado la creciente literatura. Uno de los problemas en los modelos GARCH multivariados fue asegurar que la matriz \mathbf{H}_t de covarianzas condicionales sea definida positiva para cada t . Engle y Corner (1995) definieron un modelo GARCH parsimonioso donde este supuesto es satisfecho, y que se ha vuelto popular entre los estudiosos del tema. Engle (2002 a) ha sugerido otro modelo GARCH multivariado con esta propiedad, el denominado modelo GARCH dinámico de correlación condicional. Independientemente de Engle, un modelo similar fue desarrollado por Tse y Tsui (2002). Este modelo es una extensión

del modelo GARCH de correlación condicional constante de Bollerslev (1990).

Engle y Ng (1993) diseñaron tests de mala especificación para los modelos GARCH, lo cual constituye un desarrollo importante. También introducen un nuevo concepto, la *curva de impacto de las noticias*. La idea es condicionar al tiempo t sobre la información disponible en $t-2$ y luego considerar en forma aislada el efecto del shock ϵ_{t-1} sobre la varianza condicional h_t . Por tanto, diferentes modelos ARCH y GARCH pueden ser comparados preguntando cómo la varianza condicional es afectada por la última información, “las noticias”. Por ejemplo, la curva de impacto de las noticias del modelo GARCH (1,1) tiene la forma

$$h_t = A + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

donde $A = a_0 + b_1 s^2$ (s^2 es la varianza incondicional de ϵ_t). Esta curva es simétrica con respecto a $\epsilon_{t-1} = 0$. Otros modelos GARCH tienen curvas de impacto de noticias asimétricas. Véase Engle y Ng (1993) y Ding et al. (1993) para ejemplos y discusiones. De acuerdo a estos modelos, una gran pieza de “noticia” negativa y otra positiva de la misma magnitud no tienen el mismo efecto sobre la varianza condicional.

La idea original de Engel ha generado diferentes parametrizaciones. La que se aplica más comúnmente es el modelo GARCH exponencial de Nelson (1991), donde el logaritmo de la varianza condicional tiene una forma paramétrica. Este fue el primer modelo GARCH asimétrico. Mientras los modelos GARCH ordinarios requieren restricciones paramétricas para que la varianza condicional sea positiva para todos los t , tales restricciones no son necesarias en el modelo GARCH exponencial.

Otro modelo que merece mencionarse en este contexto es el modelo de volatilidad estocástica autorregresivo. Difiere de los modelos GARCH en que el logaritmo de la varianza condicional es en sí mismo un proceso estocástico. Un proceso de volatilidad estocástica autorregresiva de primer orden, primeramente sugerido por Taylor (1982), tiene la forma

$$\ln h_t = \alpha + \beta \ln h_{t-1} + \eta_t$$

donde h_t es una “variable de varianza condicional” de valor positivo y $\{\eta_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas con media cero y varianza constante. El modelo de volatilidad estocástica de ϵ_t tiene una complicación técnica inherente. No posee una forma cerrada porque contiene dos procesos aleatorios no observables: $\{z_t\}$ debido a la descomposición $\epsilon_t = z_t h_t^{1/2}$, y $\{\eta_t\}$. Recientemente, los modelos de volatilidad estocástica han atraído considerable atención junto con el desarrollo de métodos de estimación numéricos efectivos para

sus parámetros. Véase las investigaciones de Ghysels, Harvey y Renault (1996) y Shepard (1996).

En base a la teoría de modelos ARCH, Engle recientemente consideró nuevos modelos para el análisis empírico de la microestructura del mercado. La idea es aplicar un modelo como el GARCH a los datos de duración de transacciones entre los comercios, lo cual es factible debido a que la duración es una variable de valor positivo en la misma forma que el error al cuadrado e_t^2 en el modelo ARCH. En dos contribuciones, Engle y Russell (1998) y Engle (2000), se define la denominada duración condicional autorregresiva (ACD), en que Engle inicia una nueva literatura para clarificar el comportamiento de los agentes individuales en los mercados de acciones. Estos trabajos han generado una gran cantidad de nuevos e interesantes estudios sobre modelos ACD, que se han sucedido rápidamente.

3.5 Aplicaciones para valorar el riesgo

Adicionalmente a su aplicación en la valoración de activos, los modelos ARCH y GARCH han sido aplicados en otras áreas de la economía financiera. La valoración de opciones y otros derivados, donde la varianza del activo subyacente es un parámetro clave, es un área obvia de aplicación. Véase Noh, Engle y Kane (1994).

Además, los modelos ARCH y GARCH se han vuelto unas herramientas populares e indispensables en las modernas operaciones de manejo de riesgo. Actualmente, los bancos, otras entidades financieras y muchas grandes compañías usan el denominado análisis de valor del riesgo. Los modelos de valor de riesgo también son usados para calcular los requerimientos de capital para los riesgos de mercado de acuerdo a las reglas de Basilea II. Véase, por ejemplo, el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria (1996). Para entender el concepto, considere a un inversionista con un activo de portafolio. El inversionista quiere predecir la mínima pérdida esperada, L_{\min} , de este portafolio que ocurrirá a una pequeña probabilidad dada α , durante el período considerado. El valor predicho de L_{\min} , el valor de riesgo, mide el riesgo del portafolio. Volviendo sobre lo mismo, la predicción es que la pérdida no será más grande que L_{\min} con probabilidad $1-\alpha$. Este concepto es una medida natural para control de riesgos, por ejemplo en casos donde un regulador bancario quiere asegurarse que los bancos tienen suficiente capital para que la probabilidad de caer en insolvencia dentro del próximo mes no exceda a α .

La atracción del valor de riesgo es que reduce el riesgo de mercado asociado con un portafolio de activos a un número fácilmente entendible. La pérdida puede ser calculada asumiendo que la distribución marginal de los rendimientos es constante

sobre el tiempo, pero —según lo sugiere la evidencia— esto no parece realista. Sin embargo, si la distribución de los rendimientos es variable en el tiempo, se requiere un modelo para predecir los valores futuros de los momentos condicionales que caracterizan la distribución. Si se considera que este último es condicionalmente normal, luego los primeros dos momentos, la media y la varianza, caracterizan completamente la distribución. Los modelos GARCH son ampliamente utilizados para estimar la varianza de la distribución condicional de los rendimientos requerida para calcular la pérdida esperada (su utilización puede extenderse también al caso no normal). Los investigadores a menudo usan un promedio móvil ponderado exponencialmente

$$h_t = (1 - \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad 0 < \beta_1 < 1,$$

que es un caso especial de (3.3) y, más precisamente, del denominado modelo GARCH integrado, introducido por Engle y Bollerslev (1986).

Manganelli y Engle (2001) analizan la gran cantidad de aproximaciones al cálculo del valor de riesgo. Variantes de los modelos GARCH se han constituido en importantes componentes de este desarrollo. Por ejemplo, Engle y Manganelli (1999) introdujeron el denominado valor autorregresivo condicional en el modelo de riesgo, el mismo que está basado en la idea de modelar directamente el cuantil (α) de la distribución que es de interés.

Como un simple ejemplo del uso de los modelos GARCH en el análisis de valor de riesgo, considere a una inversionista con un portafolio del índice S & P 500 —la serie del gráfico 3.1— de un millón de dólares. Asuma que ella aplica el modelo GARCH (1,1) estimando (3.4) con errores normales. La inversionista quiere estimar el monto debajo el cual su pérdida permanecerá con probabilidad de 0.99 al siguiente día de abrirse el mercado de valores si ella retiene el portafolio. Considere dos puntos en el tiempo: el 1 de septiembre de 1995 (viernes), cuando la varianza condicional estimada de (3.4) logra su mínimo y el 31 de julio de 2002 cuando obtiene su máximo.¹⁴ La máxima pérdida pronosticada por el modelo GARCH para el 5 de septiembre de 1995 (martes, después del *Labor Day*), equivale a \$ 12.400, mientras que la suma correspondiente para el 1 de agosto de 2002, es de \$ 61.500. La diferencia entre los dos montos ilustra la importancia de la volatilidad variable en el tiempo y del ARCH como una

¹⁴ Este ejemplo es, por supuesto, artificial en el sentido de que el modelo GARCH es estimado para un período que finaliza el 29 de abril de 2003. En la práctica, la inversionista podría usar solamente un modelo GARCH estimado para las observaciones disponibles en el tiempo en que el valor de riesgo es calculado.

herramienta en el análisis de valor de riesgo.

4. Otras contribuciones

Tanto Engle como Granger han realizado contribuciones valiosas en varias áreas de la econometría de series de tiempo. Además de su estrecha colaboración con Granger para desarrollar tests de cointegración y estimación de técnicas para modelos con variables cointegradas, Engle también ha realizado importantes trabajos sobre exogeneidad, un concepto clave en la modelización econométrica (Engle, Hendry y Richard (1983) y Engle y Hendry (1993)). Granger ha dejado su huella en muchas áreas del conocimiento. Su desarrollo de una definición estable de causalidad (Granger (1969)) ha generado una vasta literatura. También ha contribuido a la teoría de los modelos denominados de larga memoria que se han vuelto populares en la literatura econométrica (Granger y Joyeux (1980)). Más aún, Granger está entre los primeros en considerar el uso de análisis espectral (Granger y Hatanaka (1964)) así como los modelos no lineales (Granger y Andersen (1978)) en la investigación de series de tiempo económicas. Sus contribuciones a la teoría y la práctica de las predicciones económicas son también muy valiosas. Granger y Morgenstern (1970) es uno de los primeros artículos clásicos en esta área, mientras que Granger y Bates (1969) puede ser considerado como el inicio de la vasta literatura en las predicciones combinadas.

5. Conclusión y claves para futuras lecturas

Desde su inicio, la cointegración se ha convertido en una vasta área de investigación. Un remarcable número de libros y artículos que analizan tanto aspectos teóricos como cuantitativos han sido publicados. La cointegración se ha convertido en un tópico estándar de los libros de texto de econometría. Engle y Granger (1991) es una recopilación de artículos claves, incluyendo algunas de las referencias de este estudio. Libros de Banerjee, Dolado, Galbraith y Hendry (1993), Johansen (1995) y Hatanaka (1996) consideran la teoría estadística que subyace en el análisis de cointegración. Watson (1994) es una investigación que tiene un modelo de vectores autorregresivos general con variables no estacionarias como su punto de partida. Una revisión técnica más amplia de la teoría estadística de los procesos no estacionarios que incluyen la cointegración puede ser revisada en Tanaka (1996).

La heteroscedasticidad condicional autorregresiva ha generado, al igual que la cointegración, una extensa literatura y la mayoría de textos de series de tiempo y econometría actualmente incluye una exposición sobre este tópico. Engle (1995) es una recopilación de estudios clave. Dentro de las investigaciones se incluye a

Bollerslev, Engle y Nelson (1994), Diebold y Lopez (1995), Palm (1996) y Shepard (1996). El libro de Gouriéroux (1996) discute las aplicaciones a la teoría estadística y a la financiera. Finalmente, Engle (2002 b) ofrece una perspectiva al futuro.

El trabajo de Clive Granger sobre no estacionariedad de series de tiempo y el de Robert Engle sobre volatilidad variable en el tiempo han tenido una influencia decisiva sobre la economía aplicada y la investigación financiera. La cointegración y los modelos ARCH, y los métodos que se han desarrollado alrededor de estos conceptos, han cambiado marcadamente la manera en que se realiza la modelización econométrica.

Bibliografía

- Balke, N. and Fomby, T. B.: 1997, Threshold cointegration, *International Economic Review* 38, 627—645.
- Banerjee, A., Dolado, J., Galbraith, J. W. and Hendry, D. F.: 1993, *Co-Integration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non Stationary Data*, Oxford University Press, Oxford.
- Basle Committee on Banking Supervision: 1996, *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Basle.
- Bollerslev, T.: 1986, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307—327.
- Bollerslev, T.: 1990, Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *Review of Economics and Statistics* 72, 498—505.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y. and Kroner, K. F.: 1992, ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence, *Journal of Econometrics* 52, 5—59.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. and Nelson, D. B.: 1994, ARCH models, in R. F. Engle and D. L. McFadden (eds), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, North Holland, Amsterdam, pp. 2959—3038.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J.: 1988, A capital asset-pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy* 96, 116—131.
- Campbell, J. Y.: 1987, Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis, *Econometrica* 55, 1249—1273.
- Campbell, J. Y. and Shiller, R. J.: 1987, Cointegration and tests of present value models, *Journal of Political Economy* 95, 1062—1088.
- Campbell, J. Y. and Shiller, R. J.: 1988, The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors, *Review of Financial Studies* 1, 195-228
- Cassel, G.: 1922, *Money and Foreign Exchange After 1914*, MacMillan, New York.

- Cochrane, J. Y.: 1994, Permanent and transitory components of GNP and stock prices, *Quarterly Journal of Economics* 109, 241—266.
- Culver, S. E. and Papell, D. H.: 1999, Long-run purchasing power parity with short-run data: Evidence with a null hypothesis of stationarity, *Journal of International Money and Finance* 18, 751—768.
- Davidson, J. E. H., Hendry, D. F., Srba, F. and Yeo, S.: 1978, Econometric modelling of the aggregate time-series relationship between consumers' expenditure and income in United Kingdom, *Economic Journal* 88, 661—692.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A.: 1979, Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association* 74, 427—431.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A.: 1981, Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica* 49, 1057—1072.
- Diebold, F. X. and Lopez, J. A.: 1995, Modelling volatility dynamics, in K. D. Hoover (ed.), *Macroeconomics. Developments, Tensions, and Prospects*, Kluwer, Boston, pp. 427—466.
- Diebold, F. X. and Nerlove, M.: 1989, The dynamics of exchange rate volatility: A multivariate latent factor ARCH model, *Journal of Applied Econometrics* 4, 1-21
- Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F.: 1993, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance* 1, 83-106
- Edison, H.: 1987, Purchasing power parity in the long run: A test of the dollar/pound exchange rate 1890-1978, *Journal of Money, Credit, and Banking* 19, 376—387.
- Engle, R. F.: 1982, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica* 50, 987—1007.
- _____: 1987, Multivariate GARCH with factor structures-cointegration in variance, *unpublished paper*, Department of Economics, University of California, San Diego.

- _____: 2000, The econometrics of ultra-high-frequency data, *Econometrica* 68, 1—22.
- _____: 2002a, Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models, *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339—350.
- _____: 2002b, New frontiers for ARCH models, *Journal of Applied Econometrics* 17, 425—446.
- Engle, R. F. and Bollerslev, T.: 1986, Modeling the persistence of conditional variances *Econometric Reviews* 5, 1—50.
- Engle, R. F. (ed.): 1995, *ARCH. Selected Readings*, Oxford University Press, Oxford.
- Engle, R. F. and Granger, C. W. J.: 1987, Co-integration and error-correction: Representation, estimation and testing, *Econometrica* 55, 251—276.
- _____, (eds): 1991, *Long-Run Economic Relationships. Readings in Cointegration*, Oxford University Press, Oxford.
- Engle, R. F. and Hendry, D. F.: 1993, Testing super exogeneity and invariance *Journal of Econometrics* 56, 119-139.
- Engle, R. F., Hendry, D. F. and Richard, J.-F.: 1983, Exogeneity, *Econometrica* 51, 277—304.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F.: 1995, Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory* 11, 122—150.
- Engle, R. F., Lilien, D. M. and Robins, R. P.: 1987, Estimating time-varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model, *Econometrica* 55, 391—407.
- Engle, R. F. and Manganelli, S.: 1999, CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles, *Working paper 99-20*, Department of Economics, University of California, San Diego.
- Engle, R. F. and Ng, V. K.: 1993, Measuring and testing the impact of news on

volatility, *Journal of Finance* 48, 1749—1777.

Engle, R. F., Ng, V. K. and Rothschild, M.: 1990, FACTOR-ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills, *Journal of Econometrics* 45, 213—237

Engle, R. F. and Russell, J. R.: 1998, Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data, *Econometrica* 66, 1127—1162.

Frenkel, J.: 1986, International capital mobility and crowding out in the U.S. economy: Imperfect integration of financial or goods markets?, in R. Hafer (ed.), *How Open is the US Economy*, Lexington Books, Lexington.

_____: 1978, Quantifying capital mobility in the 1980s, in D. Bernheim and J. Shoven (eds), *National Saving and Economic Performance*, University of Chicago Press, Chicago.

_____: 1981, The collapse of purchasing power parity during the 1970s, *European Economic Review* 16, 145—165.

Froot, K. A. and Rogoff, K.: 1995, Perspectives on PPP and long-run real exchanger rates, in G. Grossman and K. Rogoff (eds), *Handbook of International Economics*. Vol. 3, Elsevier, Amsterdam, pp. 1647—1688.

Fuller, W. A.: 1976, *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.

Ghysels, E., Harvey, A. C. and Renault, E.: 1996, Stochastic volatility, in G. S. Maddala and C. R. Rao (eds), *Handbook of Statistics 14: Statistical Methods in Finance*, Elsevier, Amsterdam.

Gouriéroux, C.: 1996, *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, Berlin.

Granger, C. W. J.: 1969, Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica* 37, 424—438.

Granger, C. W. J.: 1981, Some properties of time series data and their use in econometric model specification, *Journal of Econometrics* 16, 121—130.

Granger, C. W. J.: 2001, Spurious regressions in econometrics, in B. H. Baltagi (ed.), A

Companion to Theoretical Econometrics, Blackwell, Oxford, pp. 557—561.

Granger, C. W. J. and Andersen, A. P.: 1978, *Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

Granger, C. W. J. and Bates, I.: 1969, The combination of forecasts, *Operations Research Quarterly* 20, 45 1—468.

Granger, C. W. J. and Hatanaka, M.: 1964, *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Granger, C. W. J. and Joyeux, R.: 1980, An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *Journal of Time Series Analysis* 1, 15-30

Granger, C. W. J. and Lee, T.-H: 1990, Multicointegration, in G. E. Rhodes, Jr and T. B. Fomby (eds), *Advances in Econometrics: Cointegration, Spurious Regressions and Unit Roots*, JAI Press, New York, pp. 17—84.

Granger, C. W. J. and Morgenstern, O.: 1970, *Predictability of Stock Market Prices*, Heath, Lexington, MA.

Granger, C. W. J. and Newbold, P.: 1974, Spurious regressions in econometrics *Journal of Econometrics* 2, 111—120.

Granger, C. W. J. and Swanson, N. R.: 1996, Further developments in the study of cointegrated variables, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 58, 374—386.

Granger, C. W. J. and Weiss, A. A.: 1983, Time series analysis of error-correction models, in S. Karlin, T. Amemiya and L. A. Goodman (eds), *Studies in Econometrics, Time Series and Multivariate Statistics, in Honor of T. W. Anderson*, Academic Press, San Diego, pp. 255—278.

Hall, A. D., Anderson, H. M. and Granger, C. W. J.: 1992, A cointegration analysis of treasury bill yields, *Review of Economics and Statistics* 74, 116—126.

Hatanaka, M.: 1996, *Time-Series-Based Econometrics. Unit Roots and Cointegrations*, Oxford University Press, Oxford.

Hendry, D. F., Muellbauer, J. N. J. and Murphy, A.: 1990, The econometrics of DHSY, in J.D. Hey and D. Winch (eds), *A Century of Economics. 100 Years of the*

Royal Economic Society and the Economic Journal, Blackwell, Oxford, pp. 298—334.

Hylleberg, S., Engle, R. F., Granger, C. W. J. and Yoo, B. S.: 1990, Seasonal cointegration, *Journal of Econometrics* 44, 215—238.

Johansen, S.: 1988, Statistical analysis of cointegration vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 231—254.

_____: 1991, Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica* 59, 1551—1580.

_____: 1995, *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, Oxford.

Johansen, S. and Juselius, K.: 1990, Maximum likelihood estimation and inference on cointegration- with application to the demand for money, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 52, 169—210.

King, R. G., Plosser, C. I., Stock, J. H. and Watson, M. W.: 1991, Stochastic trends and economic fluctuations, *American Economic Review* 81, 819—840.

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. and Shin, T.: 1992, Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic series have a unit root?, *Journal of Econometrics* 54, 159—178

Lettau, M. and Ludvigson, S.: 2001, Consumption, aggregate wealth, and expected stock returns, *Journal of Finance* 56, 815—850.

_____: 2003, Understanding trend and cycle in asset values: Reevaluating the wealth effect on consumption, *Working paper* 9848, National Bureau of Economic Research.

Lo, M. C. and Zivot, E.: 2001, Threshold cointegration and nonlinear adjustment to the law of one price, *Macroeconomic Dynamics* 5, 533—576.

Mandelbrot, B.: 1963, The variation of certain speculative prices, *Journal of Business* 36, 394—419.

Mandelbrot, B. and Taylor, H.: 1967, On the distribution of stock price differences,

Operations Research 15, 1057—1062.

- Manganelli, S. and Engle, R. F.: 2001, Value at risk models in finance, *Working Paper* 75, European Central Bank.
- Meese, R. and Rogoff, K.: 1988, Was it real? The exchange rate differential relation over the modern floating exchange rate period, *Journal of Finance* 43, 933-948.
- Nelson, D. B.: 1991, Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica* 59, 347—370.
- Noh, J., Engle, R. F. and Kane, A.: 1994, Forecasting volatility and option pricing of the SP 500 index, *Journal of Derivatives* 2, 17—31.
- Palm, F. C.: 1996, GARCH models of volatility, in G. Maddala and C. Rao (eds), *Handbook of Statistics 14: Statistical Methods in Finance*, Vol. 14, Elsevier Amsterdam, pp. 209-240.
- Phillips, A. W.: 1957, Stabilization policy and the time forms of lagged responses, *Economic Journal* 67, 265—277.
- Phillips, P. C. B.: 1986, Understanding spurious regressions, *Journal of Econometrics* 33, 311—340.
- Phillips, P. C. B. and Perron, P.: 1988, Testing for a unit root in a time series regression, *Biometrika* 75, 335—346.
- Poon, S.-H. and Granger, C. W. J.: 2003, Forecasting volatility in financial markets: A review, *Journal of Economic Literature* 41, 478—539.
- Rachev, S. and Mitnik, S.: 2000, *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, Chichester.
- Saikkonen, P. and Luukkonen, R.: 1993, Testing for a moving average unit root in autoregressive integrated moving average models, *Journal of the American Statistical Association* 88, 596—601.
- Sargan, J. D.: 1964, Wages and prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology, in P. E. Hart, G. Mills and J. N. Whittaker (eds), *Econometric*

Analysis for National Economic Planning, Butterworths, London.

- Sarno, L. and Taylor, M. P.: 2002, Purchasing power parity and the real exchange rate, *IMF Staff Papers* 49, 65—105.
- Schwert, G. W.: 1990, Stock volatility and the crash of '87, *Review of Financial Studies* 3, 77—102.
- Shephard, N. G.: 1996, Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility, in D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen (eds), *Time Series Models. In Econometrics, Finance and Other Fields*, Chapman and Hall, London, pp. 1—67.
- Shin, Y.: 1994, A residual-based test of the null of cointegration against the alternative of no cointegration, *Econometric Theory* 10, 91—115.
- Sims, C. A.: 1980, Macroeconomics and reality, *Econometrica* 48, 1—48.
- Stock, J. H.: 1987, Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors, *Econometrica* 55, 1035—1056.
- Tanaka, K.: 1996, *Time Series Analysis. Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory*, Wiley, New York.
- Taylor, S. J.: 1982, Financial returns modeled by the product of two stochastic processes—a study of the daily sugar prices 1961–75, in O. D. Anderson (ed.), *Time Series Analysis: Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam pp. 203—226.
- Taylor, S. J.: 1986, *Modelling Financial Time Series*, Wiley, Chichester.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C.: 2002, A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 351—362.
- Watson, M. W.: 1994, Vector autoregressions and cointegration, in R. F. Engle and D. L. McFadden (eds), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, North-Holland, Amsterdam, pp. 2844—2915.
- Xiao, Z. and Phillips, P. C. B.: 2002, A CUSUM test for cointegration using regression residuals, *Journal of Econometrics* 108, 43—61.