

SERIES INTEGRADAS Y COINTEGRADAS: UNA INTRODUCCIÓN

ÁLVARO ANCHUELO
Universidad de Salamanca

El uso de contrastes de raíces unitarias y cointegración se está generalizando de tal modo entre los investigadores que trabajan con series temporales que su conocimiento resultará pronto imprescindible. Sin embargo, tanto los resúmenes existentes de esta literatura como los artículos originales se caracterizan por su complejidad. Este trabajo pretende servir de introducción relativamente sencilla a dichos métodos econométricos al economista que, sin estar especializado en este campo, desee conocer sus principales rasgos. Para ello, se define el concepto de serie integrada. Se estudian las técnicas más frecuentemente utilizadas en la investigación aplicada para determinar el orden de integrabilidad de una serie temporal (contrastos DF, ADF, Phillips-Perron, DW). Se define el concepto de cointegración y su relación con los Modelos de Corrección de Errores, establecida por el Teorema de Representación de Granger. Por último, se comentan los métodos propuestos por Engle-Granger y Johansen para el tratamiento de series cointegradas.

Palabras clave: Raíces Unitarias. Cointegración.

El uso de los contrastes de raíces unitarias y cointegración se está generalizando de tal modo entre los investigadores que trabajan con series temporales que su conocimiento resultará pronto imprescindible⁽¹⁾. Sin embargo, los resúmenes existentes de esta literatura (muchos de ellos excelentes, como, entre otros, Psaradakis, 1989; Pagan *et al.*, 1989; Dolado *et al.*, 1990; Escrivano, 1990), y aún en mayor medida los artículos originales, se caracterizan por su complejidad. Este trabajo pretende servir de introducción relativamente sencilla y guía a dichos métodos econométricos al economista que, sin estar especializado en este campo, desee conocer sus principales rasgos.

La estructura del trabajo es la siguiente. La sección 1 está dedicada al estudio de las series integradas. En 1.1 se define el concepto de serie integrada. En 1.2 se analizan las técnicas más frecuentemente utilizadas en la investigación aplicada para determinar el orden de integrabilidad de una serie temporal (el contraste DF en a), ADF y Phillips-Perron en b), DW en c). La sección 2 se dedica al estudio de las series cointegradas. En 2.1 se define el concepto. En 2.2 se muestra la

(1) Algunos ejemplos de trabajos aparecidos en nuestro país que los utilizan: Andrés *et al.* (1990), Molinas *et al.* (1991), Dolado y Escrivá (1991), Vega (1991), Ngama y Sosvilla (1991), Ayuso *et al.* (1992), Anchuelo (1992).

estrecha relación existente entre series cointegradas y Modelos de Corrección de Errores, establecida por el Teorema de Representación de Granger. Por último, en 2.3 y 2.4 se comentan los métodos propuestos por Engle-Granger y Johansen para el tratamiento de series cointegradas.

1. SERIES INTEGRADAS

1.1 Concepto de serie integrada

Antes de poder definir el concepto de serie integrada, es necesario introducir el de estacionariedad. Para los fines de este trabajo, basta con un tratamiento intuitivo, limitado al concepto de estacionariedad débil. Una aproximación más formal puede hallarse en Spanos (1986).

Una serie estacionaria se caracteriza por una media constante, que no varía con el tiempo; una varianza también constante y finita; una limitada memoria de su conducta pasada, con efectos transitorios de una perturbación aleatoria. Gráficamente serán series que tienden a volver a su media y cruzarla repetidamente, fluctuando a su alrededor con una amplitud relativamente constante. Un ejemplo simple de serie estacionaria es la generada por un ruido blanco.

El Teorema de Descomposición de Wold muestra como toda serie estacionaria sin componente determinístico se puede representar como un MA infinito. A su vez, éste podrá ser aproximado por un ARMA finito.

El comportamiento de una serie no estacionaria diferirá radicalmente del anteriormente descrito. Veámoslo utilizando como ejemplo un paseo aleatorio con término constante:

$$x_t = \mu + x_{t-1} + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim I.N(0, \sigma^2)$.

Se supone, para simplificar, que el proceso comienza en $t = 0$, con $x_0 = 0$. En este caso

$$E(x_t) = t\mu$$

$$var(x_t) = t\sigma^2$$

$$cov(x_t, x_{t-T}) = (t-T)\sigma^2; T \geq 0$$

Es decir, los momentos incondicionales dependen del tiempo, y los efectos de una perturbación aleatoria sobre x_t son permanentes, no transitorios (esto es, presentan "memoria larga").

Las series integradas son un caso particular de series no estacionarias. Se dice de una serie temporal x_t que es integrada de orden d, $I(d)$, cuando es necesario diferenciarla d veces para convertirla en estacionaria (Granger, 1986; Engle y Granger, 1987).

$$x_t \sim I(d) \iff (1 - L)^d x_t \sim I(0)$$

donde L simboliza el operador de retardos. De esta forma, una serie estacionaria en niveles, sin necesidad de diferenciarla, es $I(0)$. Volviendo a los ejemplos antes mencionados, el ruido blanco es un proceso $I(0)$, el paseo aleatorio es $I(1)$.

Una serie $I(d)$, de acuerdo con el teorema de Wold, será representable mediante un ARMA no determinístico, estacionario e invertible, pero una vez dife-

renciada d veces. Es decir, la serie en niveles es ARIMA(p,d,q), con determinados p y q. Se podrá, por tanto, representar:

$$\phi(L)(1-L)^d x_t = \theta(L)\epsilon_t$$

donde ϵ_t es un ruido blanco, y

$$\phi(L) = \sum_{i=0}^p \phi_i L^i$$

$$\theta(L) = \sum_{i=0}^q \theta_i L^i$$

Al hallar las soluciones o raíces del polinomio asociado con la parte autorregresiva

$$\phi(z)(1-z)^d = 0$$

donde z es un número real, es evidente que existen d soluciones z=1, en otras palabras, d raíces unitarias. Es debido a esto que los contrastes cuyo objeto es esclarecer el orden de integrabilidad de una serie se conocen también como contrastes de raíces unitarias.

La gran mayoría de los estudios se han centrado en el caso particular de series no estacionarias representado por las series integradas. Esta prioridad que se les ha otorgado se debe en gran medida a los trabajos clásicos de Granger y Newbold (1974) y Nelson y Plosser (1982). Los primeros propugnan la necesidad de diferenciar las series si se desean evitar resultados espúreos al utilizar la econometría convencional. Los segundos proporcionan evidencia de que muchas series macroeconómicas son integradas, en general de orden uno.

También colaboran una serie de trabajos que muestran que el que algunas series sean integradas es una consecuencia teórica del uso racional de la información disponible. Por ejemplo, Hall (1978) para el consumo, Blanchard (1981) para la inversión, Samuelson (1973) para el precio de las acciones, Meese y Singleton (1983) para el tipo de cambio.

El análisis econométrico convencional se basaba, entre otros, en el supuesto de que las series son estacionarias⁽²⁾. En la sección dedicada a la cointegración, se comentarán más detalladamente los problemas que se derivan de que la mayor parte de las series económicas sean integradas, y cómo subsanarlos. Antes estudiaremos las técnicas encaminadas a determinar el orden de integrabilidad de una serie temporal.

Un resumen detallado de la enorme literatura sobre series integradas y cointegración sobrepasaría el propósito de estas páginas. Nos centraremos en aquellos métodos más frecuentemente utilizados en la investigación aplicada.

(2) Alternativamente, si las variables explicativas de un modelo standard de regresión son exógenas, y la perturbación aleatoria ruido blanco o estacionaria, cabe realizar inferencia condicionada a las variables explicativas y los resultados de la econometría clásica siguen siendo aplicables.

1.2 Contrastes del orden de integrabilidad de una serie temporal:

a) El contraste de Dickey-Fuller (DF)

La literatura sobre contrastes del orden de integrabilidad de una serie temporal se ha desarrollado a partir de las aportaciones iniciales de Dickey (1976), Fuller (1976) y Dickey-Fuller (1979, 1981).

El caso más sencillo es aquel en el que el Proceso Generador de Datos (PGD) es AR(1) sin componentes determinísticos:

$$x_t = \rho x_{t-1} + \epsilon_t ; \quad t=1,2,\dots,T.$$

$$\epsilon_t \sim I.N. (0, \sigma^2)$$

con x_0 fijo. La hipótesis nula es $\rho=1$, es decir, la existencia de una raíz unitaria, con lo que x sería integrado de orden uno, I(1). La hipótesis alternativa es la estacionariedad de x , I(0).

El contraste se realiza mediante la estimación por mínimos cuadrados ordinarios de la regresión auxiliar:

$$\Delta x_t = \mu + \gamma x_{t-1} + e_t$$

donde $\Delta = 1-L$.

Al realizar esta reparametrización,

$$\gamma = \rho - 1$$

$$H_0 : \gamma = 0$$

$$H_1 : \gamma < 0$$

La hipótesis nula se rechaza para valores de la t del estimador de γ en la regresión auxiliar, $t(\gamma)$, suficientemente negativos.

La distribución límite de $t(\gamma)$ bajo la hipótesis nula es una función de procesos brownianos. Por ello, no son válidos los valores críticos usuales para la t. Fuller (1976) calcula los valores correctos mediante simulaciones numéricas de Monte Carlo para diferentes tamaños de la muestra.

Además, la distribución límite de los estadísticos depende de la regresión auxiliar concreta que se use, así como de los componentes determinísticos presentes en el PGD bajo la hipótesis nula. Esto constituye una de las principales dificultades en la aplicación de este tipo de contrastes.

Los casos más sencillos son:

Caso A:

$$P.G.D. : x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$$

$$R.A. : \Delta x_t = \gamma x_{t-1} + e_t$$

P.G.D.: Proceso Generador de Datos bajo la hipótesis nula.
R.A.: Regresión Auxiliar.

En este caso, la distribución límite de $t(\gamma)$ es una función de procesos brownianos. La distribución en muestras finitas aparece tabulada en Fuller (1976), Tabla 8.5.2.

Caso B:

$$\begin{aligned} P.G.D. : x_t &= x_{t-1} + \epsilon_t \\ R.A. : \Delta x_t &= \mu + \gamma x_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

La distribución límite de $t(\gamma)$ es de nuevo una función de procesos brownianos. La distribución en muestras finitas, aunque distinta de la existente en el caso A, también aparece tabulada en Fuller (1976), Tabla 8.5.2.

Caso C:

$$\begin{aligned} P.G.D. : x_t &= c + x_{t-1} + \epsilon_t \\ R.A. : \Delta x_t &= \mu + \gamma x_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

Si el PGD contiene un término constante, la distribución $N(0,1)$ proporciona valores críticos asintóticamente válidos para el estadístico t de la regresión auxiliar. La importancia práctica de este hallazgo es dudosa. Simulaciones de Monte Carlo han mostrado que hacen falta tamaños muestrales muy grandes para que la $N(0,1)$ proporcione una buena aproximación a las distribuciones finitas exactas. Para una discusión más detallada, Hylleberg y Mizon (1989a, 1989b).

La lista de casos puede ampliarse incluyendo una tendencia lineal determinística, tanto en el PGD como en la Regresión Auxiliar.

El contraste sirve para distinguir entre una serie integrada de orden uno y una serie estacionaria. Para contemplar la posibilidad de que nos hallemos ante series integradas de orden superior a uno, aunque sean infrecuentes en Economía, habría que empezar por contrastar el grado de integrabilidad por el caso I(3) frente a I(2) sobre la segunda diferencia de las series, pasando luego al caso I(2) frente a I(1) sobre la primera diferencia y, por último, al caso I(1) frente a I(0) sobre el nivel de las series (Dickey y Pantula, 1987).

b) Los contrastes de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) y de Phillips-Perron

Otro problema del contraste DF que aún no hemos comentado es la posibilidad de que los errores, aunque estacionarios, no satisfagan el supuesto de ser ruido blanco. En realidad, frecuentemente están autocorrelacionados. Esto afecta a las propiedades asintóticas de los estadísticos. Existen en la literatura dos vías alternativas para enfrentarse a dicho problema.

b₁) La corrección paramétrica de Dickey y Fuller

consiste en aumentar la regresión auxiliar con retrasos de Δx :

$$\Delta x_t = \mu + \gamma x_{t-1} + \sum_{i=1}^n b_i \Delta x_{t-i} + e_t$$

n ha de elegirse de forma que desaparezca la autocorrelación en los residuos para que sean ruido blanco. Es importante hacer la elección correcta: un n demasiado pequeño no soluciona el problema, un n demasiado grande provoca que el contraste pierda poder.

El contraste que acabamos de describir se conoce como el contraste aumentado de Dickey y Fuller (ADF). Sus valores críticos para el estadístico $t(\gamma)$ son los mismos que en el contraste DF, con lo que pueden usarse las mismas Tablas.

b₂) La corrección no paramétrica de Phillips y Perron

Esta corrección, propuesta por Phillips (1987) y Phillips-Perron (1988), tiene en cuenta la correlación serial sin necesidad de especificar explicitamente como se genera. Para ello se requiere una modificación del contraste DF que usa las autocovarianzas de los residuos⁽³⁾. Bajo la hipótesis nula, los estadísticos modificados tienen la misma distribución límite que los Dickey-Fuller.

Experimentos de Monte Carlo han encontrado que el funcionamiento del contraste ADF es más satisfactorio en muestras finitas que el del contraste de Phillips-Perron (véase Handa y Ma, 1989; Godfrey y Tremayne, 1988). Según estos estudios, el contraste ADF sería robusto a errores heteroscedásticos, o no normales pero distribuidos independiente e identicamente. El de Phillips-Perron sería ligeramente preferible si los errores están autocorrelacionados; también en el caso de errores heteroscedásticos si el tamaño muestral es elevado.

c) El contraste de Durbin-Watson

Sargan y Bhargava (1983) proponen una idea totalmente distinta para contrastar la hipótesis nula de la existencia de una raíz unitaria. Consiste en utilizar el estadístico Durbin-Watson de la regresión

$$\begin{aligned}x_t &= \mu + e_t \\ \text{con } e_t &= \rho e_{t-1} + \epsilon_t\end{aligned}$$

En este caso, la hipótesis nula es que e_t sigue un paseo aleatorio, es decir, $\rho=1$. (Obsérvese que si e_t es $I(1)$, x_t también). La alternativa es que e_t sea $AR(1)$ estacionario.

Como

$$DW \approx 2(1-\rho)$$

(ver, por ejemplo, Stewart y Wallis, 1987, p.223), la hipótesis nula no se rechazará para valores del Durbin-Watson próximos a cero. Sargan y Bhargava proporcionan Tablas con los valores críticos.

El principal defecto de este enfoque es lo restrictivo de sus hipótesis subyacentes.

2. COINTEGRACIÓN

Prácticamente toda la literatura econométrica clásica se basaba en el supuesto de que las variables son estacionarias⁽⁴⁾. Sin embargo, la mayoría de las variables que aparecen en los modelos económicos de series temporales no lo son. Esto tiene importantes consecuencias, tanto para la formulación de los modelos como para la distribución de sus estimadores. En la sección anterior se detallaron los principales métodos existentes para detectar si nos hallamos en presencia de series

(3) Como ejemplos de trabajos en revistas españolas que presentan estas correcciones, véanse Ngama y Sosvilla-Rivero (1991) o Ayuso *et al.* (1992).

(4) O bien, como ya se ha indicado previamente, que se verificaba la hipótesis de exogeneidad con ruido estacionario, lo que permite la inferencia condicionada a una realización concreta del proceso generador de las variables exógenas. Bajo tal supuesto, en general, la inferencia clásica sigue siendo válida, si bien debe interpretarse como inferencia condicionada. Véase, por ejemplo, Engle y Yoo (1991), en especial la sección 6, para una discusión más amplia de esta problemática.

no estacionarias. En esta sección analizaremos cómo proceder en caso de que así sea.

Como apuntamos anteriormente, Granger y Newbold (1974) fueron los primeros autores que señalaron con claridad la importancia de los posibles problemas que el uso de variables integradas podría provocar, por dar lugar a correlaciones engañosamente elevadas. La solución más obvia, propuesta también por ellos en la línea de Box y Jenkins (1970), consiste en diferenciar las series hasta lograr su estacionariedad y, a continuación, trabajar con esas series diferenciadas.

Dicha estrategia fue aplicada por un elevado número de investigadores tras la publicación del trabajo de Granger y Newbold. No era, sin embargo, satisfactoria: Davidson, Hendry, Srba y Yeo (1978), así como Hendry y Mizon (1978) hicieron notar que, al expresar el modelo en diferencias, no era posible inferir su solución a largo plazo a partir del modelo estimado.

Un tratamiento más satisfactorio de los modelos con variables integradas no se logra hasta la segunda mitad de los años ochenta, con la aparición de la literatura sobre cointegración. A continuación pretendemos subrayar sus hallazgos más llamativos, lo que no deja de ser difícil debido a su amplitud y rápido crecimiento.

2.1 Concepto de series cointegradas

El concepto de series cointegradas fue desarrollado por Engle y Granger (1987). Se dice que las variables que componen un vector x_t están cointegradas de orden d,b

$$x_t \sim CI(d, b)$$

si todas ellas son integradas de orden d, I(d), y existe un vector α distinto de cero tal que

$$z_t = \alpha' x_t \sim I(d-b), b > 0$$

es decir, z_t es integrada de orden d menos b, siendo b mayor que cero. El vector α que origina una combinación lineal de variables I(d) con un orden de integrabilidad menor que d se denomina vector de cointegración.

El caso más sencillo, y de mayor relevancia, es d=b=1. Para simplificar aún más, limitémonos al caso en que el vector x_t se compone de sólo dos variables, x_{1t} y x_{2t} . Entonces, normalizando el primer elemento del vector de cointegración

$$z_t = \alpha' x_t = (1, -\beta) \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = x_{1t} - \beta x_{2t}$$

Por tratarse de series no estacionarias, una combinación lineal arbitraria será en general no estacionaria. Pero, al tratarse de series cointegradas, ha de existir una combinación lineal estacionaria, dada por el vector de cointegración.

La interpretación económica de los anteriores comentarios estadísticos es que existe una relación de equilibrio a largo plazo entre las variables:

$$x_{1t} = \eta + \beta x_{2t} + z_t$$

El concepto de equilibrio tiene diversos significados en Economía. En la literatura sobre cointegración, tan solo quiere decir que se observa una relación lineal entre un conjunto de variables que se ha mantenido durante un largo período

de tiempo. x_{1t} y x_{2t} se mueven de manera conjunta, de forma que aunque cada una de ellas sea integrada, su combinación lineal no lo es. z_t se puede interpretar como la distancia que separa al sistema del equilibrio a largo plazo.

Para resaltar que el concepto de equilibrio en la literatura sobre cointegración puede diferir del concepto de equilibrio en economía, tal vez sea útil recurrir a un ejemplo. Considérese una ecuación de demanda de dinero del siguiente tipo:

$$\ln M = b_0 + b_1 \cdot \ln R + b_2 \cdot \ln P + b_3 \cdot \ln(1+r)$$

En ella, el logaritmo de la demanda de dinero ($\ln M$) se hace depender del logaritmo del nivel de renta ($\ln R$), del logaritmo de los precios ($\ln P$) y del logaritmo de $1+r$ (siendo “r” el tipo de interés). Si suponemos que $\ln M$, $\ln R$ y $\ln P$ son procesos $I(1)$, y que $\ln(1+r)$ es $I(0)$, el tipo de interés no intervendría en la relación de equilibrio relevante para la metodología de la cointegración, mientras que posiblemente sí figuraría en una noción de equilibrio inspirada en la lógica económica.

Obsérvese el requerimiento de que las series sean integradas del mismo orden. Uno de los objetivos perseguidos al construir un modelo econométrico es explicar las variaciones en la variable dependiente, dejando poca variación inexplicada en la perturbación. Un requerimiento mínimo es lograr un error z_t que sea $I(0)$. Para conseguirlo, si la variable dependiente es $I(1)$, las variables explicativas también han de ser $I(1)$; si éstas fuesen $I(0)$, la ecuación estaría mal especificada, lo que se reflejaría en la perturbación, que sería $I(1)$ en vez de $I(0)$ como debiera. Intuitivamente, para explicar una serie que está creciendo, las variables explicativas deben estar también creciendo. Sino, el crecimiento permanecería inexplicado y aparecería recogido en la perturbación.

2.2 El teorema de representación de Granger

Granger (1983) prueba que si un conjunto de variables están cointegradas $CI(1,1)$, pueden ser representadas mediante un Modelo de Corrección del Error (MCE):

$$\Delta x_{1t} = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \sum_i \theta_{2i} \Delta x_{2,t-i} + \sum_i \theta_{3i} \Delta x_{1,t-i} + \epsilon_t$$

Los MCE, introducidos por Sargan (1964), fueron popularizados en la investigación empírica por una serie de trabajos de Hendry: Davidson, Hendry, Srba y Yeo (1978), Hendry y von Ungern-Sternberg (1981), Hendry y Richard (1983).

Dicha parametrización resulta muy atractiva para las variables cointegradas. El término z_{t-1} (término de corrección de errores) recoge la desviación respecto al equilibrio en el período $t-1$. La cuantía del desequilibrio afectará al comportamiento de x_1 en el período t , de forma que, aunque a corto plazo sean posibles las desviaciones del equilibrio, existen mecanismos estabilizadores (automáticos o discretionales) que tienden a restaurarlo.

Así, el MCE retiene la información sobre las relaciones a largo plazo entre las variables en niveles, recogida en el término de corrección de errores, a la vez que permite flexibilidad en la especificación de sus relaciones a corto, recogidas mediante el resto de los parámetros. Además, en él sólo aparecen variables estacionarias (z porque x_1 y x_2 están cointegradas, el resto por aparecer diferenciadas) con lo que se puede aplicar la teoría econométrica convencional. Por contra, si

se optase por modelizar tan solo en términos de variables diferenciadas, desaparecería la información sobre el largo plazo.

El Teorema también demuestra que si el PGD es un MCE, generará un conjunto de variables que estén cointegradas. La relación entre el MCE y el concepto de cointegración es, por tanto, biunívoca.

Estimar directamente el MCE no es fácil, por tratarse de un sistema de ecuaciones sujeto a una restricción no lineal. Engle y Granger (1987) proponen un método mucho más sencillo que permite obtener estimadores consistentes.

2.3 El método de Engle y Granger

a) Estimación del vector de cointegración

Primera etapa

En una primera etapa, estos autores proponen estimar mediante mínimos cuadrados ordinarios la relación de equilibrio a largo plazo entre las variables. Esta regresión se denomina en la literatura la "regresión de cointegración". El estimador obtenido por mínimos cuadrados ordinarios si una regresión satisface los supuestos clásicos es $O(T^{1/2})$, es decir, converge en probabilidad hacia el valor verdadero del parámetro al tender a infinito la raíz cuadrada del tamaño muestral T . Por contra, Stock (1987) demuestra que si, como en el caso que nos ocupa, un conjunto de variables están cointegradas de orden $CI(1,1)$, el estimador mínimo cuadrático del vector de cointegración α es $O(T)$, converge en probabilidad con α al tender T a infinito. Al converger más rápido, se dice que es *superconsistente*.

Además, la prueba de la consistencia del estimador del vector de cointegración mediante mínimos cuadrados ordinarios no requiere el supuesto clásico de que los regresores no estén correlacionados contemporaneamente con el error, porque de existir esta correlación será asintóticamente despreciable. De hecho, cualquiera de las variables cointegradas puede usarse como variable dependiente en la regresión (se pueden elegir distintas normalizaciones del vector de cointegración) y los estimadores seguirán siendo consistentes.

Como contrapartida a los alentadores resultados anteriores, Stock (1987) también muestra que en los estimadores mediante mínimos cuadrados ordinarios del vector de cointegración existe un sesgo que puede ser considerable en muestras pequeñas (ver también Banerjee *et al.*, 1986), y distribuciones límite no Normales.

Segunda etapa

Una vez que se ha estimado la relación a largo plazo entre las variables, Engle y Granger también muestran cómo obtener estimadores consistentes del resto de parámetros del MCE, que recogen las relaciones a corto plazo. Para ello, en una segunda etapa, imponen el valor estimado del vector de cointegración mediante la inclusión en el MCE, como término de corrección del error, de los residuos desfasados de la regresión estimada en la primera etapa.

A pesar de utilizar el valor estimado del vector de cointegración en vez de el (desconocido) valor verdadero, se obtienen estimadores por mínimos cuadrados ordinarios del resto de parámetros del MCE que son consistentes, debido a la superconsistencia del estimador del vector de cointegración hallado en la primera etapa. Sin embargo, el sesgo en los estimadores de la primera etapa puede afectar adversamente, a través del término de corrección de errores, a las propiedades en muestras pequeñas de los parámetros a corto plazo.

b) Contrastes de cointegración

Los residuos de la regresión efectuada en la primera etapa se pueden utilizar para realizar contrastes de la existencia de cointegración entre las variables. Si están cointegradas, los errores han de ser estacionarios. Se puede comprobar si es así o no aplicando los contrastes de raíces unitarias descritos al comienzo de este trabajo (DF, ADF, DW...) a dichos residuos⁽⁵⁾. La hipótesis nula es que los residuos son I(1), es decir, no hay cointegración. La hipótesis alternativa, que los residuos son I(0), que existe cointegración.

No obstante, es preciso tener en cuenta que, al usar los contrastes DF o ADF para comprobar si estos residuos son no estacionarios, surge una complicación que no se daba cuando se les aplicaba a series temporales originales, directamente observadas en vez de construidas. Esto se debe a que la estimación mediante mínimos cuadrados ordinarios elige los estimadores que provoquen la menor varianza muestral en los residuos. Por eso, incluso si las variables no están cointegradas, la estimación por mínimos cuadrados ordinarios hará que los residuos parezcan lo más estacionarios que sea posible. Por tanto, al usar los contrastes DF y ADF sobre estos residuos, tenderán a rechazar la hipótesis nula de no estacionaridad con demasiada frecuencia. Para corregir este sesgo, los valores críticos se han de elevar ligeramente⁽⁶⁾. Engle y Granger (1987), Engle y Yoo (1987) y MacKinnon (1990) proporcionan tablas generadas por métodos de Monte Carlo para distintos casos.

2.4 El método de Johansen

El método bietápico de Engle y Granger es relativamente simple e intuitivo. A pesar de estas ventajas, no está exento de inconvenientes. El número de vectores de cointegración que puede existir entre un conjunto de N variables (todas integradas del mismo orden) puede ser de hasta N-1. En el ejemplo utilizado en el apartado anterior N=2, podría haber como máximo un vector de cointegración. Pero si N fuese mayor que dos, podría haber más de un vector de cointegración, y el obtenido mediante el método de Engle y Granger sería una combinación lineal de ellos. Un segundo inconveniente importante de este método es, como se señaló con anterioridad, que los estadísticos que proporciona carecen de distribuciones límite bien definidas.

Aunque inicialmente muy popular entre los investigadores, el método de Engle y Granger está siendo progresivamente desplazado por otros que intentan corregir sus deficiencias. De todos ellos, el que ha suscitado mayor interés es el propuesto por Johansen (1988). Su enfoque permite estimar mediante máxima verosimilitud todos los vectores de cointegración que existan entre un conjunto de N variables; proporciona contrastes, con estadísticos que tienen distribuciones límite bien definidas, del número de vectores de cointegración que son significativos; también ofrece contrastes de restricciones lineales sobre los parámetros que componen dichos vectores.

Debido a su importancia, se esquematizan a continuación las principales ideas del método de Johansen. Se parte de un vector X formado por N variables, todas ellas I(1). El PGD es el Vector Autorregresivo (VAR)

(5) Phillips-Ouliaris (1990) desarrollan la teoría asintótica de este tipo de contrastes.

(6) Además, los valores críticos de este tipo de contrastes dependen del número de variables que aparecen en la regresión de cointegración.

$$X_t = \Pi_1 X_{t-1} + \dots + \Pi_k X_{t-k} + e_t$$

$$e_t \sim I.N. (0, \Omega)$$

donde Π_i representa una matriz de parámetros N por N, Ω la matriz de covarianzas.

La expresión anterior se puede reparametrizar como un Modelo de Corrección del Error

$$\Delta X_t = \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Gamma_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta X_{t-k+1} + \Gamma_k X_{t-k} + e_t$$

$$\Gamma_i = -I + \Pi_1 + \dots + \Pi_i \quad i = 1, \dots, k$$

Todos los vectores X diferenciados (el del lado izquierdo y los primeros k-1 del derecho) se compondrán de variables I(0). Por tanto, las N combinaciones lineales de variables I(1) $\Gamma_k X_{t-k}$ han de ser también I(0), o porque existan algunos vectores de cointegración o, de no ser así, porque Γ_k sea una matriz de ceros. El rango de Γ_k coincidirá con el número de vectores de cointegración linealmente independientes que existan entre las N variables en X. Sea r dicho número (forzosamente menor que N). Entonces, será posible definir una matriz β , N por r, tal que sus columnas sean los r vectores de cointegración

$$\beta' X_{t-k} \sim I(0)$$

También será posible definir una matriz α , N por r, tal que

$$\alpha \beta' = -\Gamma_k$$

con lo que

$$\Delta X_t = \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Gamma_2 \Delta X_{t-2} + \dots + (-\alpha \beta') X_{t-k} + e_t$$

La función de verosimilitud del sistema

$$L(\beta, \alpha, \Omega; \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1})$$

se puede concentrar con respecto a $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}$. Para ello, en

$$\Delta X_t + \alpha \beta' X_{t-k} = \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta X_{t-k+1} + e_t$$

se suprime de ambos lados el efecto de $\Delta X_{t-1}, \dots, \Delta X_{t-k+1}$. En el lado derecho sólo quedará e_t . En el izquierdo, habrá que reemplazar ΔX_t y X_{t-k} por los residuos que resulten de la regresión de cada una de ellas respecto a $\Delta X_{t-1}, \dots, \Delta X_{t-k+1}$ (que denominaremos R_{0t} y R_{kt} respectivamente). Por tanto

$$R_{0t} + \alpha \beta' R_{kt} = e_t$$

con función de verosimilitud

$$L_1(\beta, \alpha, \Omega)$$

Aún es posible concentrar más la función de verosimilitud, esta vez respecto a α y Ω . De conocer β , sería posible estimar α y Ω mediante una regresión de R_{0t} respecto a $\beta' R_{kt}$. Por consiguiente, los estimadores de α y Ω se pueden expresar en función de β , obteniéndose

$$L_2(\beta)$$

A partir de este resultado, Johansen muestra cómo estimar la matriz β hallando determinados autovalores y sus correspondientes autovectores. Los r autovectores que corresponden a los r mayores autovalores de los N calculados son los estimadores de las r columnas de β , es decir, de los r vectores de cointegración.

Además de estimar consistentemente β , el método de Johansen permite diseñar contrastes del número de vectores de cointegración existentes entre un conjunto de N variables utilizando la razón de verosimilitudes. También se puede utilizar para el diseño de contrastes de restricciones lineales sobre los parámetros de los vectores de cointegración.

Procedimientos alternativos al de Johansen, también aplicables a un conjunto de variables en el que existe más de un vector de cointegración, pueden encontrarse en Stock y Watson (1988) y Phillips y Ouliaris (1988).



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anchuelo Crego, A. (1992): *Sostenibilidad a Largo Plazo de los Déficit Fiscales y por Cuenta Corriente de la Balanza de Pagos en los Países Miembros de la C.E.E.*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- Andrés, J., Escribano, A., Molinas, C. y Taguas, D. (1990): *La Inversión en España. Econometría con Restricciones de Equilibrio*, Antoni Bosch e Instituto de Estudios Fiscales, Barcelona.
- Ayuso, J., Dolado, J.J. y Sosvilla-Rivero, S. (1992): "¿Es el Tipo Forward un Predictor Inseguro del Tipo Spot Futuro?: El Caso del Tipo de Cambio peseta/dólar Reconsiderado", *Revista Española de Economía*, monográfico "Mercados Financieros Españoles", págs. 111-134.
- Banerjee, A., Dolado, J.J., Hendry, D.F. y Smith, G.W. (1986): "Exploring Equilibrium Relationships in Econometrics Through Static Models: some Monte Carlo Evidence", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 48, págs. 253-278.
- Blanchard, O.J. (1981): "What is Left from the Multiplier Accelerator?", *American Economic Review* 71, págs. 150-154.
- Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1970): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.
- Cuthbertson, K., Hall, S. y Taylor, M. (1992): *Applied Econometric Techniques*, Mimeo, London Business School.
- Davidson, J.E.H., Hendry, D.F., Srba, F. y Yeo, J.S. (1978): "Econometric Modelling of the Aggregate Time Series Relationships Between Consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom", *Economic Journal* 88, págs. 661-692.
- Dickey, D.A. (1976): *Estimation and Hypothesis Testing in Nonstationary Time Series*, Tesis Doctoral no publicada, Iowa State University.
- Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1979): "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association* 47, págs. 427-431.
- Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1981): "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Econometrica* 49, págs. 1057-1072.
- Dickey, D.A. y Pantula, S.G. (1987): "Determining the Order of Differencing in Autoregressive Processes", *Journal of Business and Economic Statistics* 15, págs. 455-461.
- Dolado, J.J., y Escrivá, J.L. (1991): *La Demanda de Dinero en España: Definiciones Amplias de Liquidez*, Documento de Trabajo nº 9107, Servicio de Estudios del Banco de España.

- Dolado, J.J., Jenkinson, T. y Sosvilla-Rivero, S. (1990): *Cointegration and Unit Roots: a Survey*, Servicio de Estudios del Banco de España, Documento de Trabajo nº 9005, publicado en el *Journal of Economic Surveys*, Vol. 4, págs. 249-274.
- Engle, R.F. y Granger, C.W.J. (1987): "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", *Econometrica* 55, págs. 251-276.
- Engle, R.F. y Yoo, B.S. (1987): "Forecasting and Testing in Cointegrated Systems", *Journal of Econometrics* 35, págs. 143-159.
- Engle, R.F. y Yoo, B.S. (1991): "Cointegrated Economic Time Series: An Overview with New Results", en R.F. Engle y C.W.J. Granger (ed.), *Long-run Economic Relationships*, Oxford University Press.
- Escribano, A. (1990): "Introducción al Tema de Cointegración y Tendencias", *Cuadernos Económicos* de I.C.E. 44, págs. 7-42.
- Fuller, W.A. (1976): *Introduction to Statistical Time Series*, New York, Wiley.
- Godfrey, L.G. y Tremayne, A.R. (1988): *On the Finite Sample Performance of Tests for Unit Roots*, Department of Econometrics, University of Sidney, Discussion Paper 88-03.
- Granger, C.W.J. (1983): *Cointegrated Variables and Error Correction Models*, Discussion Paper 83-13a, University of California in San Diego.
- Granger, C.W.J. (1986): "Developments in the Study of Cointegrated Economic Variables", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 48, págs. 213-228.
- Granger, C.W.J. y Newbold, P. (1974): "Spurious Regressions in Econometrics", *Journal of Econometrics* 2, págs. 111-120.
- Hall, R.E. (1978): "Stochastic Implications of the Life Cycle - Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence", *Journal of Political Economy* 86, págs. 971-987.
- Handa, J. y Ma, B.K. (1989): "Four Tests for the Random Walk Hypothesis: Power versus Robustness", *Economic Letters* 29, págs. 141-145.
- Hendry, D.F. y Mizon, G.M. (1978): "Serial Correlation as a Convenient Simplification, not a Nuisance: A Comment on a Study of the Demand for Money by the Bank of England", *Economic Journal* 88, págs. 349-363.
- Hendry, D. y Richard, J.F. (1983): "The Econometric Analysis of Economic Time Series", *International Statistical Review* 51, págs. 111-163.
- Hendry, D.F. y Von Unger-Sternberg, T. (1981): "Liquidity and Inflation Effects on Consumers' Expenditure". En Deaton, A.S. (ed.): *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Hylleberg, S. y Mizon, G.E. (1989a): "A Note on the Distribution of the Least Squares Estimator of a Random Walk with Drift", *Economic Letters* 29, págs. 225-230.
- Hylleberg, S. y Mizon, G.E. (1989b): "Cointegration and Error Correction Mechanisms", *Economic Journal* 99, págs. 113-125.
- Johansen, S. (1988): "Statistical Analysis of Cointegrating Vectors", *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, págs. 231-254.
- Johansen, S. y Juselius, K. (1988): *Hypothesis Testing for Cointegration Vectors with an Application to the Demand for Money in Denmark and Finland*, Working Paper 88/05, University of Copenhagen. Publicado bajo el título: "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration with Applications to the Demand for Money" en el *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 52 (1990), págs. 169-210.
- Johansen, S. y Juselius, K. (1990): "Testing Structural Hypotheses in a Multivariate Cointegration Analysis of the Purchasing Power Parity and the Uncovered Interest Parity for the UK", Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen. Publicado en el *Journal of Econometrics*, Vol. 53 (1992), págs. 211-244.
- Mackinnon, J.G. (1990): *Critical Values for Cointegration Tests*, University of California, San Diego. Discussion Paper 90-4.
- Meese, R.A. y Singleton, K.J. (1983): "On Unit Roots and the Empirical Modelling of Exchange Rates", *Journal of Finance* 33, págs. 1029-1036.
- Molinas, C., Sebastián, M. y Zabalza, A. (1991): *La Economía Española: una Perspectiva Macroeconómica*, Antoni Bosch e Instituto de Estudios Fiscales, Barcelona-Madrid.

- Nelson, C.R. y Plosser, C.I. (1982): "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications", *Journal of Monetary Economics* 10, págs. 139-162.
- Ngama, Y.L. y Sosvilla-Rivero, S. (1991): "An Empirical Examination of Absolute Purchasing Power Parity: Spain 1977-1988", *Revista Española de Economía* 8, págs. 285- 311.
- Pagan, A.R. y Wickens, M.R. (1989): "Econometrics: a Survey", *Economic Journal*.
- Phillips, P.C.B. (1987): "Time Series Regression with a Unit Root", *Econometrica* 55, págs. 277-301.
- Phillips, P.C.B. y Ouliaris, S. (1988): "Testing for Cointegration Using Principal Components Methods", *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, págs. 205-230.
- Phillips, P.C.B. y Ouliaris, S. (1990): "Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration", *Econometrica* 58, págs.165-193.
- Phillips, P.C.B. y Perron, P. (1988): "Testing for a Unit Root in Time Series Regression", *Biometrika* 75, págs. 335-346.
- Psaradakis, Z.G. (1989): *The Econometrics of Cointegrated Time Series: a Survey*, Discussion Papers in Economics and Econometrics, University of Southampton.
- Samuelson, P.A. (1973): "Proof that Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly", *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, págs. 369- 374.
- Sargan, J.D. (1964): "Wages and Prices in the United Kingdom: A Study in Econometric Methodology". En Hart, Mills y Withaker (eds): *Econometric Analysis for National Economic Planning*, London, Butterworths.
- Sargan, J.D. y Bhargava, A. (1983): "Testing Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by the Gaussian Random Walk", *Econometrica* 51, págs. 153-174.
- Spanos, A. (1986): *Statistical Foundations of Econometric Modelling*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Stewart, M.B. y Wallis, K.F. (1987): *Introductory Econometrics*, 2^a ed., Oxford, Basil Blackwell.
- Stock, J.H. (1987): "Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors", *Econometrica* 55, págs. 1035-1056.
- Stock, J.H. y Watson, M.W. (1988): "Testing for Common Trends", *Journal of the American Statistical Association* 83, págs. 1097-1107.
- Vega, J.L. (1991): *Tests de Raíces Unitarias: Aplicación a Series de la Economía Española y al Análisis de la Velocidad de Circulación del Dinero 1964-1990*, Documento de Trabajo nº 9117, Servicio de Estudios del Banco de España.

Fecha de recepción del original: Noviembre, 1992
Versión final: Febrero, 1993

ABSTRACT

The use of unit roots and cointegration tests is becoming so generalised among researchers that having some knowledge of them is extremely desirable. But most of the existing literature is of a highly technical nature. The purpose of this paper is to provide an "intuitive" introduction to it for the non-specialist. First, the concept of integration is introduced. Then, the main procedures for testing the order of integration are discussed (DF, ADF, Phillips-Perron and DW tests). Cointegration is defined, and its close relationship to Error Correction Models shown. Finally, a discussion of the proposals of Engle-Granger and Johansen for estimation and testing in systems of cointegrated variables completes the paper.

Keywords: Unit Roots. Cointegration.