

Методы численного интегрирования

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ - подынтегральная ф-я,
непрерывная на отрезке $[a; b]$

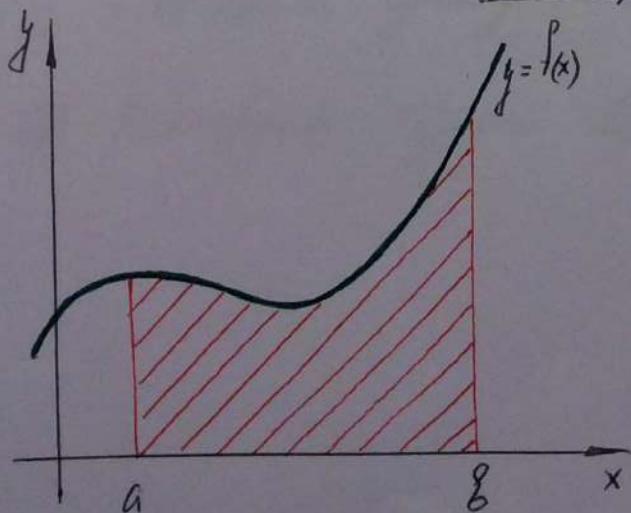
Аналитически задача нахождения определенного интеграла решается по формуле Ньютона - Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Если интеграл невозможно вычислить аналитически, то применяются методы численного интегрирования:

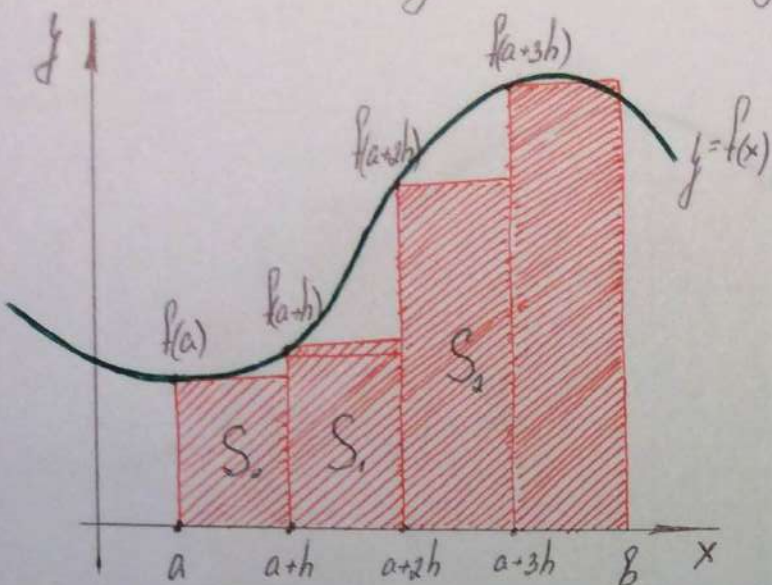
- Метод левых прямоугольников
- Метод правых прямоугольников
- Метод средних прямоугольников
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

Геометрический смысл интеграла



Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$ то интеграл численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс, прямой $x = a$ и прямой $x = b$

Метод левых прямоугольников



① задать границы $[a; b]$
 $n=10$ $\epsilon=0,0001$

② Вычисляем шаг
$$h = \frac{b-a}{n}$$

③ Площадь каждого прямоуго.

- ширина - h

- высота - значение ф-ции слева

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= h \cdot f(a) \\ S_1 &= h \cdot f(a+h) \\ S_2 &= h \cdot f(a+2h) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_i = h \cdot f(a+ih) \\ i=0, \dots, n-1, \text{ шаг } 1}$$

④ Суммируем площади

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} S_i$$

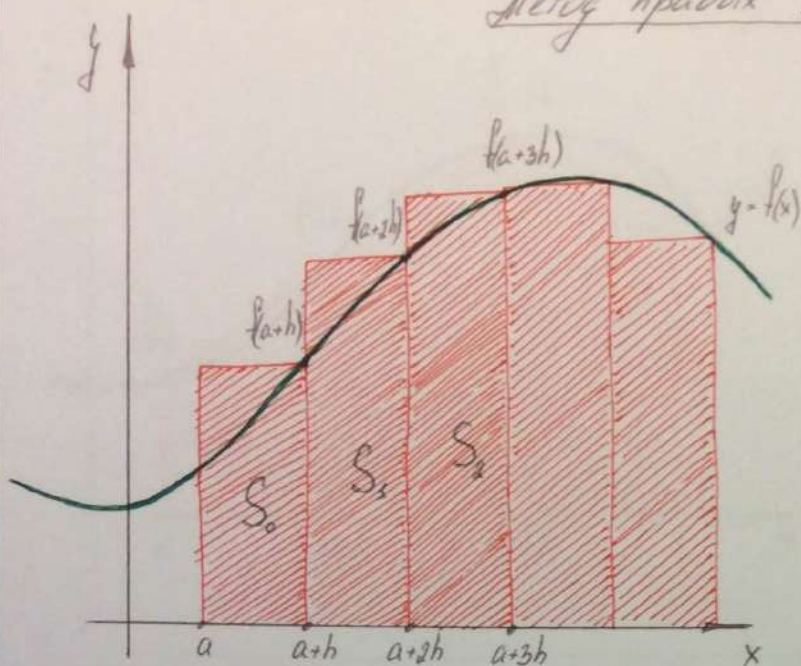
⑤ Увеличиваем число разбиений в 2 раза $n = n \cdot 2$

- Вычисляем новый шаг

- находим сумму площадей (S_2)

⑥ Повторяем пункты ②-⑤ пока $|S_2 - S_1| \geq \epsilon$

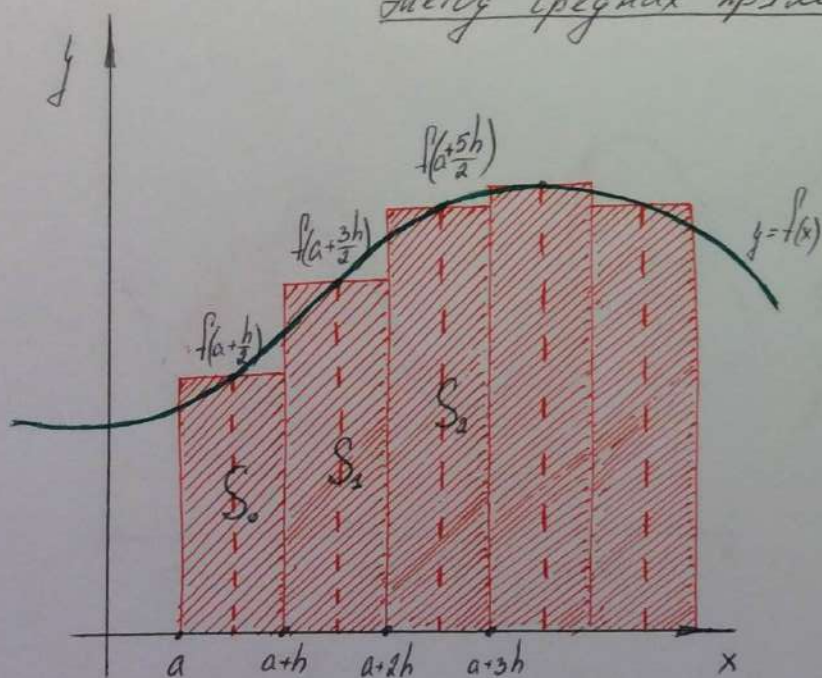
Метод правых прямоугольников



$$S_i = h \cdot f(a + (i+1)h)$$

$$i = 0, \dots, n-1, \text{ шаг } 1$$

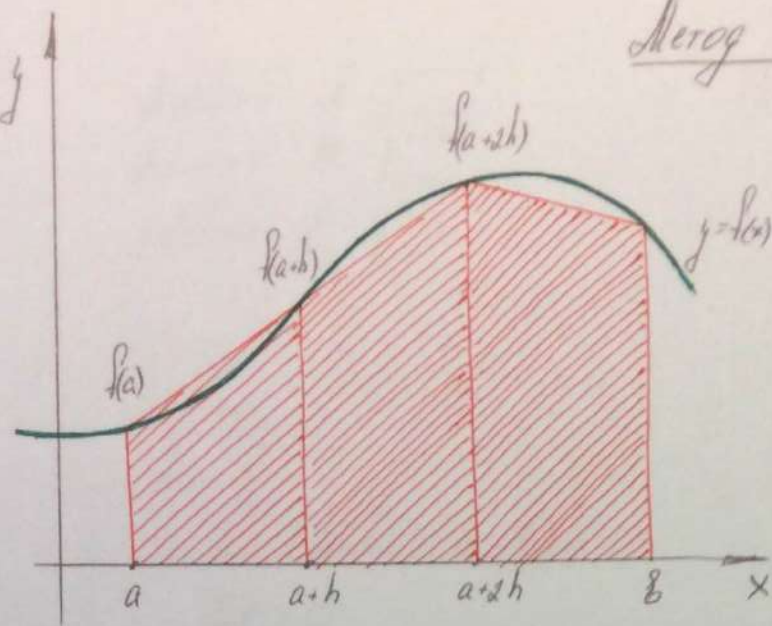
Метод средних прямоугольников



$$S_i = h \cdot f(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

$$i = 0, \dots, n-1, \text{ шаг } 1$$

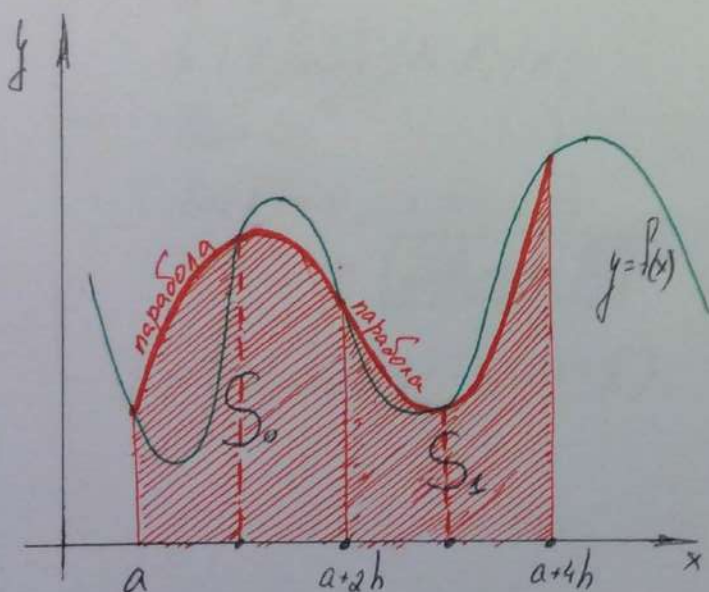
Метод трапеций



$$S_i = \frac{f(a+ih) + f(a+(i+1)h)}{2} h$$

$i = 0, \dots, n-1, \text{ шаг } 1$

Метод Симпсона (метод парабол)



В этом методе отрезки subdivизируются, а дуга ф-ции заменяется на дугу параболы. Т.е. кривая ф-ции заменяется кривой 2-го порядка, а не кривой 1-го порядка, как в предыдущих методах.

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

$$S_0 = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h))$$

$$S_1 = \frac{h}{3} (f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h))$$

$$S_i = \frac{h}{3} (f(a+2ih) + 4f(a+(2i+1)h) + f(a+(2i+2)h))$$

$$i = 0, \dots, n-1, \text{ шаг } 1$$

#define A
#define B
#define E

Реализация алгоритма

```
n = 10;  
do {  
    h = (double)(B - A) / n;  
    S1 = 0;  
    for (i = 0; i < n; i++)  
        S1 += формула Si  
  
    n *= 2;  
    h = (double)(B - A) / n;  
    S2 = 0;  
    for (i = 0; i < n; i++)  
        S2 += формула Si  
} while (fabs(S1 - S2) >= E);
```