Дифференцирование

Общий вид дифференциального уравнения

$$\boxed{F(x, y, y', y'', y''' \ldots y^{n}) = 0}$$ диф. ур-е n-го порядка

Рассмотрим простейший случай - диф ур-е 1-го порядка

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

Найдем производную для двух простейших функций $y = f(x)$

$y = f(x) = x^2 + 10x + 2$

$y' = 2x + 10$

$y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$

$y' = -\frac{1}{2}$

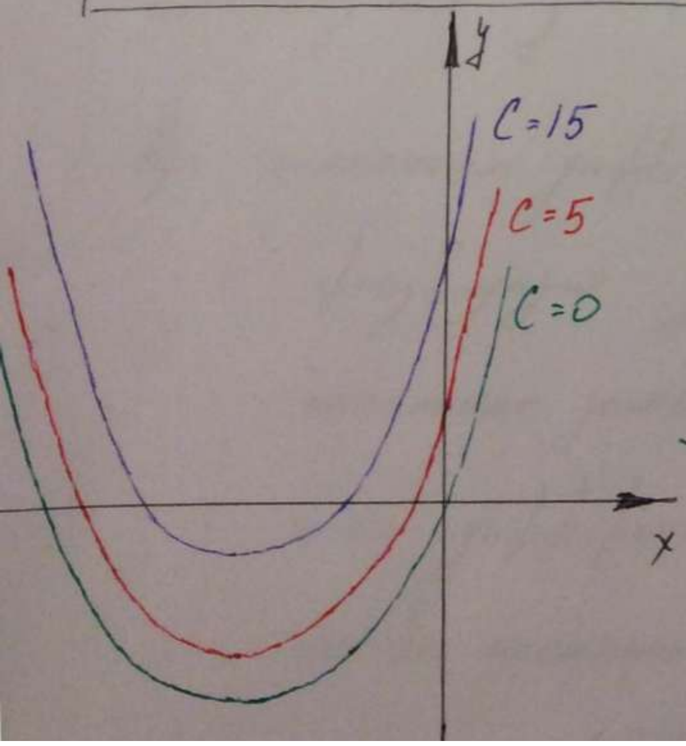
Задача дифференцирования - нахождение исходной функции если известна её производная.

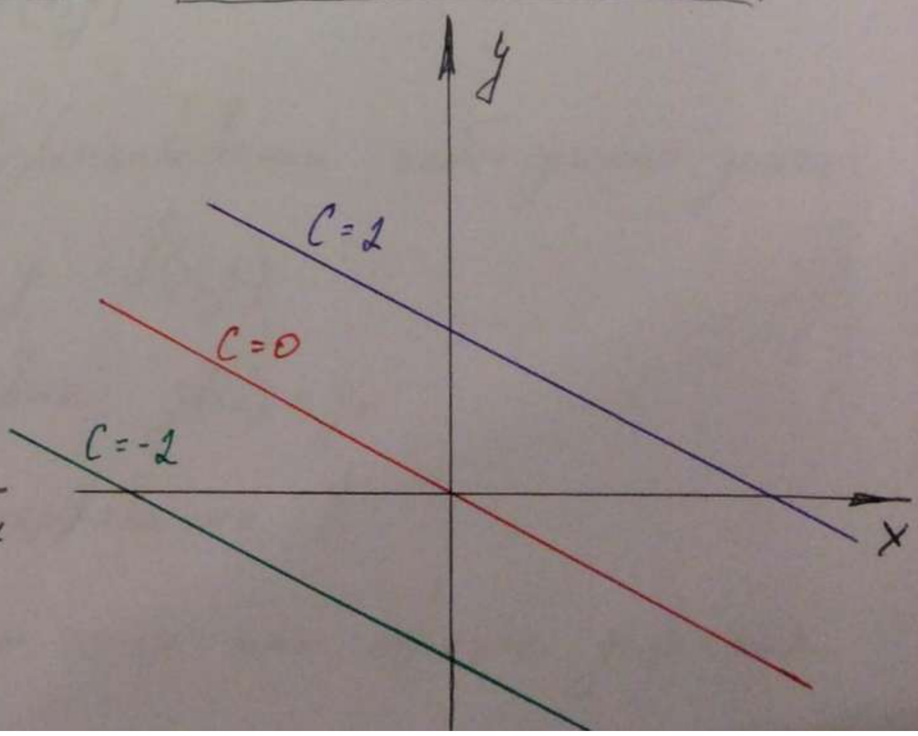
$\int (2x + 10)\,dx = x^2 + 10x + C$

Семейство парабол

$\int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{1}{2}x + C$

Семейство прямых





Задавая начальное условия, можно однозначно определить конкретную функцию из семейства возможных функций.
Для этого достаточно знать значение исходной искомой функции в одной точке $y(x_0)=y_0$
Через известную нам точку может проходить только одна функция из известного нам семейства функций

Численное дифференцирование

При численном дифференцировании мы не можем найти исходную функцию. Это возможно только при аналитическом решении. Но мы можем найти точки исходной функции.

Задача численного дифференцирования - нахождение точек исходной функции $y=f(x)$ если известна её производная $y'=f(x,y)$

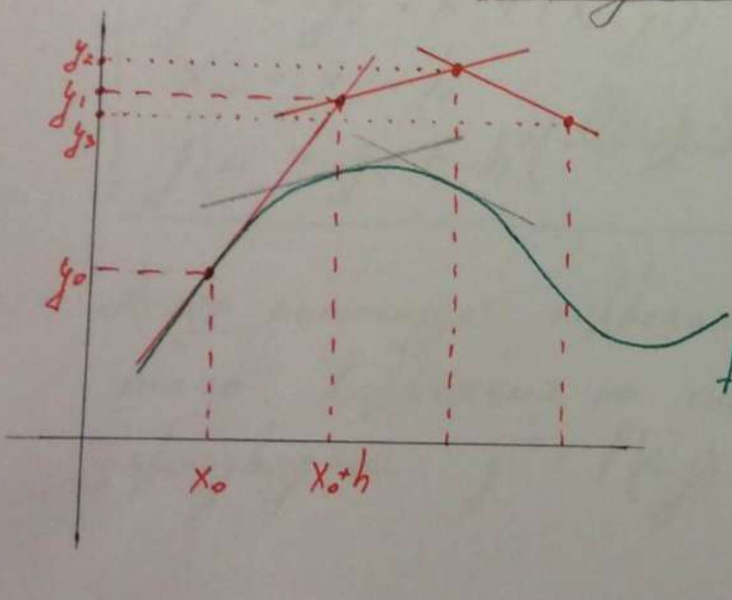
При численном дифференцировании необходимо знать:

- производную $y'=f(x,y)$
- начальное условие $y(x_0)=y_0$
- шаг дифференцирования h
- кол-во искомых точек или отрезок диф-ния

При нахождении точек исходной функции каждая из точек вычисляется с погрешностью, причем для каждой точки $(x_i; y_i)$ погрешность будет больше, чем для предыдущей точки $(x_{i-1}; y_{i-1})$. Таким образом, чем больше точек мы находим, тем больше погрешности мы имеем.

Погрешность для точки $(x_i; y_i)$ это её собственная погрешность + погрешность точки $(x_{i-1}; y_{i-1})$

Метод Эйлера



1. задать шаг h и отрезок дифференцирования $[a; b]$
2. задать начальные условия $y(x_0) = y_0$
3. Нахождение следующей точки

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ x_{i+1} &= x_i + h \end{aligned}}$$

Метод Эйлера - одноступенчатый метод, каждая следующая точка находится только на основе предыдущей точки.

Модифицированной метод Эйлера

$$x^* = x_i + \frac{h}{2}$$
$$y^* = y_i + \frac{h}{2} \cdot f'(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x^*, y^*)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

Метод использует промежуточную точку на половинном шаге и вторую производную $y'' = f'(x, y)$. При этом погрешность вычислений уменьшается

Усовершенствованной метод Эйлера

$$y^* = y_i + h \cdot f'(x_i, y_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + h^*\left(\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*)}{2}\right)$$

Метод использует коррекцию без использования половинного шага. Коррекция на шаге h за счет второй производной $y'' = f'(x, y)$

Метод Рунге-Кутта

$$k_1 = f(x_i\ y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + h/2,\ y_i + k_1/2\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + h/2,\ y_i + k_2/2\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

Нахождение y' и y''

$$7xy + xy' = \frac{3+x^2}{y}$$

$$y' = \frac{3+x^2}{xy} - \frac{7xy}{x} = \frac{3+x^2}{xy} - 7y$$

$$y'' = \left(\frac{3+x^2}{xy} - 7y\right)' = \frac{(3+x^2)'xy - (xy)'(3+x)}{(xy)^2} - (7y)' =$$

$$= \frac{2x \cdot xy - ((x)' \cdot y + (y)' \cdot x)(3+x)}{x^2 y^2} - 7y' =$$

$$= \frac{2x^2 y - (y + xy')(3+x)}{x^2 y^2} - 7y'$$

При составлении программ y' заменяем $f(x, y)$

```
double f_1 (double x, double y){
    return (2*pow(x,2)*y -(y + x*f(x,y))*(3+x))/(pow(x,2)*pow(y,2))
                                                   - 7*f(x,y)
}
```

```
double f (double x, double y) {
    return (3+pow(x,2))/(x*y) - 7*y
```