1 Coomologia continua

1.1 Definizioni

Riportiamo la definizione di topologia compatta-aperta e ne ricordiamo alcune utili proprietà.

Definizione 1.1. Siano X, Y spazi topologici, $F(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. La *topologia compatta-aperta* su $F(X,Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi

$$V(K,U) = \{f \in F(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

al variare di $K \subseteq X$ compatto e di $U \subseteq Y$ aperto.

Lemma 1.1. *(i) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f\colon Y \to Z$, $g\colon X \to Y$ funzioni continue. Allora le applicazioni*

$$f \circ -\colon F(X,Y) \longrightarrow F(X,Z), \qquad - \circ g\colon F(Y,Z) \longrightarrow F(X,Z)$$

sono continue.

(ii) Siano X, Y spazi topologici con X localmente compatto e Hausdorff. Allora l'applicazione di valutazione

$$\begin{aligned} F(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

In questa sezione, tutti moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno da intendersi a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Sia M una n-varietà. Consideriamo sullo spazio $S_i(M) = F(\Delta^i, M)$ degli i-simplessi singolari la topologia compatta aperta.

Definizione 1.2. Una cocatena $\varphi \in C^i(M)$ si dice *continua* se la sua restrizione a $S_i(M)$ è continua.

Osserviamo che se $\varphi \in C^i(M)$ è continua, allora anche $\varphi \circ d \in C^{i+1}(M)$ lo è (grazie al lemma 1.1). Dunque le cocatene continue formano un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$, che denotiamo con $C_c^\bullet(M)$; indichiamo inoltre con $C_{b,c}^\bullet(M) = C_c^\bullet(M) \cup C_b^\bullet(M)$ il complesso delle cocatene continue limitate. I moduli di coomologia relativi ai complessi $C_c^\bullet(M)$ e $C_{b,c}^\bullet$ saranno denotati, rispettivamente, con $H_c^\bullet(M)$ e $H_{b,c}^\bullet(M)$. Le inclusioni di complessi

$$i^\bullet\colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(M), \qquad i_b^\bullet\colon C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_b^\bullet(M)$$

inducono mappe in coomologia

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H_b^\bullet(i_b^\bullet)\colon H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M).$$

In questa sezione ci domanderemo se queste mappe siano isomorfismi, dando risposta affermativa nel caso in cui M ammetta una metrica Riemanniana a curvatura non positiva.

1.2 Cocatene continue e moduli relativamente iniettivi

Sia M una n-varietà chiusa, $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Fissiamo un'identificazione di $\Gamma = \pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di p.

Ricordiamo che i moduli $C^i(\widetilde{M})$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Osserviamo che per ogni $g \in \Gamma$ l'applicazione $g \cdot -\colon S_i(\widetilde{M}) \to S_i(\widetilde{M})$ è continua (grazie al lemma 1.1), dunque i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ ereditano per restrizione una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Analogamente, i moduli $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ ereditano una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati.

Lemma 1.2. *Esiste una funzione continua $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $x \in \widetilde{M}$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di x tale che l'insieme

$$\{g \in \Gamma : g(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito;

(ii) per ogni $x \in \widetilde{M}$ vale

$$\sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g \cdot x) = 1.$$

Proposizione 1.3. *Per ogni $i \geq 0$, i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ e $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ sono relativamente iniettivi (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $C^i_c(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo. Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli, $\iota\colon A \to B$ una funzione Γ-lineare fortemente iniettiva con inversa sinistra $\mathbb{R}$-lineare $\sigma\colon B \to A$, $\alpha\colon A \to C^i_c(\widetilde{M})$ una funzione Γ-lineare.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
& C^i_c(\widetilde{M}) &
\end{tikzcd}$$

Sia $h_{\widetilde{M}}$ una funzione come nel lemma 1.2. Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C^i_c(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}(b))))(s),$$

dove $e_0, \ldots, e_i$ sono i vertici del simplesso standard Δ^i. Osserviamo che, per le proprietà di $h_{\widetilde{M}}$, la somma su g è in realtà una somma finita, dunque $\beta(b)(s)$ è ben definito.

- **$\beta(b)$ è una cocatena continua.** Per definizione di $h_{\widetilde{M}}$, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di $s(e_0)$ tale che
$$\Gamma_s = \{g \in \Gamma : g^{-1}(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$
è finito. Allora per ogni $s' \in V(\{e_0\}, W)$ (che è un intorno di s in $S_i(\widetilde{M})$) vale
$$\beta(b)(s') = \sum_{g \in \Gamma_s} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s'(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot b)))(s'),$$
che è evidentemente continua in s' (grazie al lemma 1.1).

- **β è Γ-lineare.** Sia $g_0 \in \Gamma$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\beta(g_0 \cdot b)(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} g_0 \cdot b)))(s) \\ &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1} g_0^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g_0 k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(s) \\ &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}(g_0^{-1} \circ s)(e_0))) \cdot \alpha(k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(g_0^{-1} \circ s) \\ &= \beta(b)(g_0^{-1} \circ s) = (g_0 \cdot \beta(b))(s).\end{aligned}$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.**. Sia $a \in A$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\beta(\iota(a))(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot \iota(a))))(s) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(\iota(g^{-1} \cdot a))))(s) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(a)(s) = \alpha(a)(s).\end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo.

La stessa costruzione funziona anche per $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ nel contesto di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati: infatti, poiché $\|\sigma\| \leq 1$, si vede che $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$. Dunque $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato relativamente iniettivo. □

1.3 Varietà con curvatura non positiva

Nonostante si possa proseguire anche con ipotesi meno restrittive, per semplicità ci limiteremo a considerare, da qui alla fine della sezione, varietà chiuse M che ammettano una metrica Riemanniana con curvatura non positiva.

In questo contesto, il teorema di Cartan-Hadamard garantisce che ogni coppia di punti $x, y \in \widetilde{M}$ siano collegati da un'unica geodetica; inoltre le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo continuo dagli estremi. Questo fatto permette di realizzare una procedura di raddrizzamento dei simplessi singolari.

Definizione 1.3. Siano $x_0, \ldots, x_k$ punti di $\widetilde{M}$. Il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \ldots, x_k$ è un simplesso singolare $[x_0, \ldots, x_k] \in S_k(\widetilde{M})$ definito induttivamente come segue.

- Se $k = 0$, allora $[x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- Se $k > 0$, allora $[x_0, \ldots, x_k]$ è univocamente determinato dalla seguente condizione: per ogni $z \in \Delta^{k-1} \subseteq \Delta^k$, la restrizione di $[x_0, \ldots, x_k]$ al segmento di estremi z e e_k è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che collega $[x_0, \ldots, x_{k-1}](z)$ a x_k.

È facile vedere, grazie a Cartan-Hadamard, che la definizione è ben posta (ossia $[x_0, \ldots, x_k]$ è una funzione continua). Notiamo inoltre che, essendo gli elementi di Γ isometrie di $\widetilde{M}$, vale l'identità

$$g \circ [x_0, \ldots, x_k] = [g(x_0), \ldots, g(x_k)]$$

per ogni $g \in \Gamma$.

È infine utile osservare che, essendo M e $\widetilde{M}$ spazi metrici, la topologia compatta-aperta su $S_i(M)$ e $S_i(\widetilde{M})$ coincide con quella della convergenza uniforme.

1.4 Cocatene continue e risoluzioni forti di $\mathbb{R}$

Proposizione 1.4. *I complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ sono risoluzioni forti di $\mathbb{R}$ (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Il fatto che i complessi siano esatti segue dal fatto che l'identità è omotopa a 0, giusto?

Dimostrazione. Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Definiamo per ogni $i \geq 0$ un operatore $\mathbb{R}$-lineare $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} r : \quad \Delta^k &\longrightarrow \Delta^{k+1} \\ t_0 e_0 + \ldots + t_k e_k &\longmapsto t_0 e_1 + \ldots + t_k e_{k+1} \end{aligned}$$

che identifica Δ^k con la faccia di Δ^{k+1} opposta a e_0. Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$, definiamo $T_k(s) \in S_{k+1}(\widetilde{M})$ come l'unico simplesso singolare che soddisfa la seguente condizione: per ogni $q \in \Delta^k$, la restrizione di $T_k(s)$ al segmento di estremi e_0 e $r(q)$ è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica di $\widetilde{M}$ di estremi x_0 e $s(q)$. Grazie al teorema di Cartan-Hadamard, è facile verificare che $T_k(s)$ è ben definito e continuo, e che l'applicazione $T_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_{k+1}(\widetilde{M})$ è continua. Estendendo T_k per $\mathbb{R}$-linearità, si ottiene una mappa $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Definiamo infine $T_{-1} \colon \mathbb{R} \to C_0(\widetilde{M})$ come $T_{-1}(t) = t x_0$. Si verifica facilmente che $d_0 \circ T_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ e che $T_{k-1} \circ d_k + d_{k+1} \circ T_k = \mathrm{id}_{C_k(\widetilde{M})}$ per ogni $k \geq 0$.

Definiamo ora per ogni $k \geq 0$ l'applicazione

$$\begin{aligned} h^k : C_c^k(\widetilde{M}) &\longrightarrow C_c^{k-1}(\widetilde{M}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ T_{k-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $h^k(\varphi)$ è effettivamente una cocatena continua, poiché la restrizione di T_{k-1} a $S_{k-1}(\widetilde{M})$ è continua. Dunque la famiglia $\{h^k\}_{k\geq 0}$ fornisce un'omotopia fra l'identità del complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo.

Infine, è evidente che per ogni $\varphi \in C_b^k(\widetilde{M})$ vale $\left\|h^k(\varphi)\right\| \leq \|\varphi\|$. Dunque le restrizioni $h^k \colon C_{b,c}^k(\widetilde{M}) \to C_{b,c}^{k-1}(\widetilde{M})$ forniscono un'omotopia fra l'identità del complesso $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato. □

1.5 Coomologia continua e coomologia singolare

Lemma 1.5. *Il morfismo di complessi $p^\bullet \colon C^\bullet(M) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ induce per restrizione isomorfismi isometrici di complessi*

Che norma c'è su $C_c^\bullet(M)$?

$$p^\bullet|_{C_c^\bullet(M)} \colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma, \qquad p^\bullet|_{C_{b,c}^\bullet(M)} \colon C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$

i quali a loro volta inducono isomorfismi isometrici in coomologia

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(C_c^\bullet(M)^\Gamma), \qquad H_{b,c}^\bullet(M) \simeq H_{b,c}^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Fare la dimostrazione.

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Proposizione 1.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora le applicazioni*

$$H^\bullet(i^\bullet) \colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H_b^\bullet(i_b^\bullet) \colon H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M)$$

sono isomorfismi isometrici.

Di nuovo, che norma c'è su $H^\bullet(M)$?

Dimostrazione. In questa sezione (proposizione 1.3 e proposizione 1.4) abbiamo mostrato che il complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ fornisce una risoluzione forte relativamente iniettiva di $\mathbb{R}$. Sappiamo (?THM? **??**) che lo stesso vale per il complesso $C^\bullet(\widetilde{M})$. Poiché l'inclusione $j^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M}) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi che estende l'identità di $\mathbb{R}$, dalla ?THM? **??** otteniamo che

$$H^\bullet(j^\bullet) \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare.

Analogamente,

$$H_b^\bullet(j_b^\bullet) \colon H_b^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H_b^\bullet(C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare. Poiché $j^\bullet$ e $j_b^\bullet$ sono 1-Lipschitz, lo stesso vale per $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$; per mostrare che si tratta di isometrie, è dunque sufficiente (di nuovo grazie alla ?THM? **??**) esibire morfismi di complessi $\theta^\bullet \colon C^\bullet(\widetilde{M}) \to$

$C_c^\bullet(\widetilde{M})$, $\theta_b^\bullet\colon C_b^\bullet(\widetilde{M}) \to C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ che siano 1-Lipschitz ed estendano l'identità di $\mathbb{R}$.

Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Per ogni $\varphi \in C^k(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo

$$\theta^k(\varphi)(s) = \sum_{(g_0,\ldots,g_k)\in\Gamma^{k+1}} h_{\widetilde{M}}(g_0^{-1}(s(e_0)))\cdots h_{\widetilde{M}}(g_k^{-1}(s(e_k)))\cdot\varphi([g_0(x_0),\ldots,g_k(x_0)]),$$

dove $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ è data dal lemma 1.2. Grazie alle proprietà di $h_{\widetilde{M}}$ è facile verificare che $\theta(\varphi)$ (una volta estesa per $\mathbb{R}$-linearità) definisce un elemento di $C_c^k(\widetilde{M})$, e che $\theta^\bullet$ risulta essere un morfismo 1-Lipschitz di complessi di $\mathbb{R}[\Gamma]$ moduli che estende l'identità di $\mathbb{R}$.

Abbiamo dunque mostrato che le mappe $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$ sono isomorfismi isometrici. Dai seguenti diagrammi commutativi di complessi

$$\begin{tikzcd} C_c^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] \arrow[d, "i^\bullet"] & C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \arrow[d, "j^\bullet"] \\ C^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_{b,c}^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] \arrow[d, "i_b^\bullet"] & C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \arrow[d, "j_b^\bullet"] \\ C_b^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] & C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{tikzcd}$$

(in cui le frecce orizzontali sono isomorfismi isometrici per il lemma 1.5) segue che anche $H^\bullet(i^\bullet)$ e $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$ sono isomorfismi isometrici. $\square$

2 Principio di proporzionalità di Gromov

2.1 Mappa di restrizione

Utilizziamo le notazioni della sezione precedente, continuando a supporre che M sia una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Sia G il gruppo delle isometrie di $\widetilde{M}$ che preservano l'orientazione. È ben noto che G ammette una struttura di gruppo di Lie che induce la topologia compatta-aperta. Di conseguenza esiste una misura di Borel regolare invariante a sinistra su G (*misura di Haar*), unica a meno di riscalamento.

Poiché Γ è un sottogruppo discreto di G e $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ è compatta, esiste un insieme misurabile $F \subseteq G$ relativamente compatto tale che $\{\gamma \cdot F\}_{\gamma\in\Gamma}$ definisca una partizione localmente finita di G. In particolare, Γ è cocompatto in G, pertanto la misura di Haar è anche invariante a destra. D'ora in poi supporremo che tale misura sia riscalata in modo che F abbia misura 1. Reference please.

Definizione 2.1. Indichiamo con $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ il complesso delle cocatene continue G-invarianti. L'inclusione di complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G \to C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ induce una mappa in coomologia

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

detta *mappa di restrizione*.

Osserviamo che, considerando su $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ e $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$ le seminorme indotte rispettivamente da $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ e $C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$, la mappa di restrizione risulta 1-Lipschitz.

Ci proponiamo ora di costruire un'inversa sinistra 1-Lipschitz di $\mathrm{res}^\bullet$. Indichiamo con μ_G la misura di Haar su G. Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ definiamo

$$\mathrm{trans}^i(\varphi)(s) = \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g).$$

Si tratta di una buona definizione, poiché $\varphi(- \cdot s)$ è una funzione continua da G in $\mathbb{R}$ e F è relativamente compatto. Estendendo $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ per linearità, otteniamo un elemento di $C^i(\widetilde{M})$.

Proposizione 2.1. *Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ valgono le seguenti proprietà.*

(i) La cocatena $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è continua.*

(ii) Vale $\mathrm{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1}) = \mathrm{trans}^i(\varphi) \circ d^{i+1}$.

(iii) Se φ è Γ-invariante, allora $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è G-invariante.*

(iv) Se φ è G-invariante, allora $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

Dimostrazione.

(i) Osserviamo innanzitutto che la topologia compatta-aperta su $S_i(\widetilde{M})$ è indotta dalla distanza

$$\operatorname{dist}(s,s') = \sup\{\operatorname{dist}_{\widetilde{M}}(s(x),s'(x)) : x \in \Delta^i\}.$$

Sia $s_0 \in S_i(\widetilde{M})$, e sia $\epsilon > 0$. Poiché $\overline{F}$ è compatto in G, dal lemma 1.1 si ottiene immediatamente che $\overline{F} \cdot s_0$ è compatto in $S_i(\widetilde{M})$. Dalla continuità di φ segue facilmente l'esistenza di un $\eta > 0$ tale che per ogni $s \in \overline{F} \cdot s_0$ e per ogni $s' \in S_i(\widetilde{M})$ con $\operatorname{dist}(s,s') < \eta$ valga $|\varphi(s) - \varphi(s')| \leq \epsilon$. Sia dunque $s \in S_i(\widetilde{M})$ tale che $\operatorname{dist}(s_0,s) < \eta$. Poiché G agisce su $S_i(\widetilde{M})$ in modo isometrico, allora anche $\operatorname{dist}(g \cdot s_0, g \cdot s) < \eta$ per ogni $g \in G$. Ma allora

$$|\operatorname{trans}^i(\varphi)(s) - \operatorname{trans}^i(\varphi)(s_0)| \leq \int_F |\varphi(g\cdot s) - \varphi(g \cdot s')| d\mu_G(g) \leq \epsilon \mu_G(F) = \epsilon$$

dunque $\operatorname{trans}^i(\varphi)$ è continua.

(ii) Sia $s \in S_{i+1}(\widetilde{M})$, e siano $a_0, \ldots, a_{i+1} \in \mathbb{R}$, $s_0, \ldots, s_{i+1} \in S_i(\widetilde{M})$ tali che

$$d^{i+1}(s) = \sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j.$$

Osserviamo che

$$d^{i+1}(g \cdot s) = \sum_{j=0}^{r} a_j (g \cdot s_j),$$

per ogni $g \in G$, da cui

$$\begin{aligned}
\operatorname{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1})(s) &= \int_F \varphi(d^{i+1}(g \cdot s)) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \int_F \varphi(g \cdot s_j) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \operatorname{trans}^i(\varphi)(s_j) \\
&= \operatorname{trans}^i(\varphi) \left(\sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j \right) = \operatorname{trans}^i(\varphi)(d^{i+1} s).
\end{aligned}$$

(iii) Fissiamo $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$, $s \in S_i(\widetilde{M})$, $g_0 \in G$. Poiché F è relativamente compatto, lo sono anche $F \cdot g_0$ e $F \cdot g_0^{-1}$, dunque esistono un numero finito di elementi $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \Gamma$ tali che

$$F \cdot g_0 \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F \qquad \text{e} \qquad F \cdot g_0^{-1} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j^{-1} \cdot F.$$

Posto $F_j = (\gamma_j^{-1} \cdot F \cdot g_0) \cap F$ si ottiene immediatamente che

$$F = \bigsqcup_{j=1}^{r} F_j \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad F \cdot g_0 = \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F_j .$$

Sfruttando il fatto che μ_G è invariante a destra e a sinistra e che φ è Γ-invariante si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{trans}^i(\varphi)(g_0 \cdot s) &= \int_F \varphi(g g_0 \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_{F \cdot g_0} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{\gamma_j \cdot F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(\gamma_j g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) = \mathrm{trans}(\varphi)(s).
\end{aligned}$$

(iv) Se φ è G-invariante segue immediatamente dalla definizione che $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

□

Corollario 2.2. *La mappa di restrizione*

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un'immersione isometrica.

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1 segue immediatamente che

$$\mathrm{trans}^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$$

è un morfismo di complessi ben definito la cui restrizione a $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ è l'identità. Poiché $\mathrm{trans}^\bullet$ è evidentemente 1-Lipschitz, guardando la corrispondente mappa in coomologia si ottiene che

$$H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

è una mappa 1-Lipschitz tale che $H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \circ \mathrm{res}^\bullet$ sia l'identità. Questo conclude la dimostrazione. □

Possibili errori di battitura nel libro

- **p.105, Lemma 8.2.** X al posto di M.
- **p.106, Proposition 8.5.** $\mathbb{R}$-modulo normato al posto di Γ-modulo normato.
- **p.109, Proposition 8.7.** La mappa $H^\bullet(i^\bullet)$ è fra moduli di coomologia, non di cocatene (stessa cosa per $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$).
- **p. 111, Proposition 8.8, proof.** Probabilmente sono io che mi perdo in qualche sciocchezza insiemistica, ma non riesco a dedurre

$$F = \bigsqcup_{i=1}^{r} F_i \implies F \cdot g_0 = \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_i \cdot F_i.$$