Domande

Domande, vagamente in ordine di importanza.

- Giusto per essere sicuro di aver capito bene, nella dimostrazione della Proposizione 4.4, il motivo per cui $g \circ \partial_i s_\ell = \partial_i s_\ell \circ \overline{\sigma}$ è che entrambi i membri sono "lineari" (più precisamente, la parametrizzazione baricentrica si ottiene prendendo la combinazione convessa dei vertici in $\mathbb{R}^{n,1}$ e poi proiettando sull'iperboloide, e le isometrie in questo modello sono lineari)?

- Nel libro (precisamente a pagina 111) non riesco bene a seguire la dimostrazione della Proposizione 8.8. Probabilmente sono io che mi perdo in sciocchezze insiemistiche, ma come si deduce l'implicazione

$$F = \bigsqcup_{i=1}^{r} F_i \implies F \cdot g_0 = \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_i \cdot F_i?$$

  Non capendolo (ma di nuovo, probabilmente sono io che mi perdo qualcosa) ho dovuto modificare lievemente la dimostrazione (Proposizione 3.1).

- Ci sono altre domande sparse nel testo (arancioni, a fianco), ma sono di secondaria importanza, potremo parlarne più avanti.

Possibili errori di battitura nel libro

- **p.105, Lemma 8.2.** X al posto di M.
- **p.107, Proposition 8.5.** $\mathbb{R}$-modulo normato al posto di Γ-modulo normato.
- **p.109, Proposition 8.7.** La mappa $H^\bullet(i^\bullet)$ è fra moduli di coomologia, non di cocatene (stessa cosa per $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$).
- **p.113, Proposition 8.11, (1).** Dovrebbe essere $k \in \mathbb{N}$.
- **p.114.** Nella penultima riga prima della sezione 8.8, dovrebbe essere $\mathrm{res}^n([\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G)$ (manca la c).
- **p.118.** Nell'ultima espressione matematica della pagina, un $=$ dovrebbe essere un $\geq$ (quello fra $\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}$ e $\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\kappa(n,\epsilon)}$).

1 Volume simpliciale

1.1 Complessi seminormati

Definizione 1.1. Una *seminorma* su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è una funzione $\|-\| : V \to [0, \infty]$ tale che:

(i) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (per convenzione, $0 \cdot \infty = 0$);

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in V$.

Osserviamo che, contrariamente all'uso comune, ammettiamo anche ∞ come possibile valore assunto dalla seminorma. Una *norma* su V è una seminorma che soddisfa inoltre le seguenti proprietà:

(iii) $\|v\| < \infty$ per ogni $v \in V$;

(iv) se $v \in V \setminus \{0\}$ allora $\|v\| > 0$.

Dati una seminorma $\|-\|$ su V e un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$, il quoziente V/W eredita una seminorma naturale così definita: per ogni $[v] \in V/W$,

$$\|[v]\| = \inf\{\|v'\| : v' \in V, [v] = [v']\}.$$

Se V e W sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali seminormati, un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ si dice:

- *L-Lipschitz* se $\|f(v)\| \leq L \cdot \|v\|$ per ogni $v \in V$;
- *isometrica* se $\|f(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.

Un'*immersione isometrica* è un'isometria iniettiva fra spazi seminormati (osserviamo che un'isometria non è necessariamente iniettiva).

Dati due spazi vettoriali seminormati V_1, V_2, un'applicazione lineare L-Lipschitz $f\colon V_1 \to V_2$ e due sottospazi $W_1 \subseteq V_1$, $W_2 \subseteq V_2$ tali che $f(W_1) \subseteq W_2$, si verifica facilmente che l'applicazione indotta $\overline{f}\colon V_1/W_1 \to V_2/W_2$ è ancora L-Lipschitz. Al contrario, la proprietà di essere isometrica non si conserva per passaggio al quoziente.

Definizione 1.2. Un *complesso seminormato* è un complesso $(C_\bullet, d_\bullet)$ di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali in cui ogni C_i è dotato di una seminorma.

Dalla discussione precedente deriva che gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $H_i(C_\bullet)$ ereditano in modo naturale una seminorma. Inoltre, un morfismo di complessi L-Lipschitz $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ induce applicazioni L-Lipschitz $H_\bullet(f_\bullet)\colon H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(C'_\bullet)$ in omologia.

1.2 Seminorme singolari e prodotto di Kronecker

Sia X uno spazio topologico. Poiché in questa trattazione ci occuperemo quasi esclusivamente di (co)omologia a coefficienti reali, laddove non specificato i moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno da intendersi a coefficienti reali. Muniamo il complesso delle catene singolari $(C_\bullet(X), d)$ della norma ℓ^1, definita come segue: per ogni $\sum_{i=1}^k a_i s_i \in C_n(X)$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i s_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^k |a_i|.$$

Definiamo inoltre la seminorma ℓ^∞ sul complesso delle cocatene singolari $(C^\bullet(X), \delta)$: data una cocatena $\varphi \in C^n(X)$, la sua seminorma ℓ^∞ è

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1\}.$$

Di conseguenza i moduli di omologia e coomologia di X ereditano, rispettivamente, le seminorme $\|-\|_1$ e $\|-\|_\infty$. Osserviamo che, data una funzione continua $f\colon X \to Y$ fra spazi topologici, i morfismi di complessi indotti $f_\bullet\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ e $f^\bullet\colon C^\bullet(Y) \to C^\bullet(X)$ risultano 1-Lipschitz rispetto alle seminorme appena definite; lo stesso vale dunque per le mappe indotte in (co)omologia. In particolare, segue che le equivalenze omotopiche inducono isomorfismi isometrici in (co)omologia.

Per ogni $n \geq 0$ è ben definita l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [c]) &\longmapsto \varphi(c), \end{aligned}$$

detta *prodotto di Kronecker*. Vale il seguente risultato di dualità.

Proposizione 1.1. *Sia $\alpha \in H_n(X)$. Allora*

$$\|\alpha\|_1 = \max\{\langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Una disuguaglianza segue immediatamente osservando che per ogni $c \in C_n(X)$, $\varphi \in C^n(X)$ vale $\|a\|_1 \cdot \|\varphi\|_\infty \geq \varphi(a)$. Per dimostrare l'altra, fissiamo un ciclo a che rappresenti α. Denotiamo con $B_n(X) \subseteq C_n(X)$ il sottospazio dei bordi. Per Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare $\varphi \in C^n(X)$ di norma al più 1, nullo su $B_n(X)$ e tale che

$$\varphi(a) = \inf\{\|a - b\|_1 : b \in B_n(X)\}.$$

Ma allora $\varphi(a) = \|[a]\|_1$, da cui $\langle [\varphi], \alpha \rangle = \|\alpha\|_1$. $\square$

1.3 Volume simpliciale

D'ora in poi i moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno sempre muniti implicitamente delle seminorme ℓ^1 e ℓ^∞ appena definite.

Sia M una n-varietà (topologica) chiusa (ossia compatta, connessa e senza bordo) e orientata. È ben noto che $H_n(M,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, e l'orientazione permette di distinguere un generatore $[M]_\mathbb{Z} \in H_n(M,\mathbb{Z})$, detto *classe fondamentale* di M a coefficienti interi. L'inclusione di complessi $C_\bullet(M,\mathbb{Z}) \to C_\bullet(M,\mathbb{R})$ induce una mappa in omologia $H_\bullet(M,\mathbb{Z}) \to H_\bullet(M,\mathbb{R})$; l'immagine di $[M]_\mathbb{Z}$ in $H_n(M,\mathbb{R})$, indicata con $[M]_\mathbb{R}$ o semplicemente con $[M]$, è detta *classe fondamentale* di M (a coefficienti reali).

Definizione 1.3. Sia M una n-varietà chiusa e orientata. Si definisce *volume simpliciale* di M il numero reale $\|M\| = \|[M]\|_1$.

Osserviamo che il volume simpliciale non dipende dalla scelta dell'orientazione, dunque è ben definito per qualunque varietà chiusa e orientabile. Se M non è orientabile e $\widetilde{M}$ è il suo rivestimento doppio orientabile, si definisce $\|M\| = \|\widetilde{M}\|/2$. Infine, se M è compatta e non connessa, si definisce $\|M\|$ come la somma dei volumi simpliciali delle sue componenti connesse.

Rimandiamo alle sezioni successive il risultato principale di questa trattazione, che permetterà di calcolare il volume simpliciale di varietà Riemanniane piatte o iperboliche. Ci limitiamo per ora a enunciare alcune proprietà del volume simpliciale

Osserviamo innanzitutto che il volume simpliciale dipende solo dal tipo di omotopia della varietà chiusa M, come si vede facilmente ricordando che le equivalenze omotopiche inducono isomorfismi in omologia.

Proposizione 1.2. *Sia $f\colon M \to N$ una funzione continua fra n-varietà orientate , e sia d il grado di f. Allora $|d| \cdot \|N\| \leq \|M\|$.*

Si può parlare di grado fra varietà non orientate?

Dimostrazione. Per definizione di grado, vale $H_n(f_\bullet)([M]) = d \cdot [N]$. Poiché $H_n(f_\bullet)$ è 1-Lipschitz, segue che $|d| \cdot \|[N]\|_1 \leq \|[M]\|_1$, ossia la tesi. □

Corollario 1.3. *Se una varietà orientabile M ammette endomorfismi di grado almeno 2, allora $\|M\| = 0$.*

Proposizione 1.4. *Sia $f\colon M \to N$ un rivestimento di grado d fra varietà chiuse e orientabili. Allora $\|M\| = d \cdot \|N\|$.*

Dimostrazione. Se $\sum_{i\in I} a_i s_i \in C_n(N)$ è un ciclo che rappresenta la classe fondamentale di N in omologia, allora $\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^d a_i \widetilde{s}_{i,j} \in C_n(M)$ è un ciclo che rappresenta la classe fondamentale di M, dove $\widetilde{s}_{i,1}, \ldots, \widetilde{s}_{i,d}$ sono i d sollevamenti di s_i. Prendendo l'estremo inferiore delle norme ℓ^1 al variare dei rappresentanti di $[N]$ otteniamo la disuguaglianza $d\,\|N\| \geq \|M\|$. Per l'altra, è sufficiente osservare che f è una mappa di grado d, e applicare la Proposizione 1.2. □

Data una n-varietà chiusa orientata, esiste un'unica classe in coomologia $[M]^* \in H^n(M)$ tale che $\langle [M]^*, [M]\rangle = 1$; $[M]^*$ è detta *coclasse fondamentale* di M.

Proposizione 1.5. *Vale $\|M\| = \|[M]^*\|_\infty^{-1}$ (dove si intende che $\infty^{-1} = 0$).*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.1 sappiamo che

$$\|M\| = \max\{\langle \beta, [M] \rangle : \beta \in H^n(M), \|\beta\|_\infty \leq 1\}.$$

Se $\|[M]^*\|_\infty = \infty$ allora l'unico elemento di $H^n(M)$ di norma finita è 0, dunque $\|M\| = 0$. Altrimenti è evidente che

$$\|M\| = \left\langle \frac{[M]^*}{\|[M]^*\|_\infty}, [M] \right\rangle = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}. \qquad \square$$

2 Coomologia continua

2.1 Definizioni

Riportiamo la definizione di topologia compatta-aperta e ne ricordiamo alcune utili proprietà.

Definizione 2.1. Siano X, Y spazi topologici, $F(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. La *topologia compatta-aperta* su $F(X,Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi

$$V(K,U) = \{f \in F(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

al variare di $K \subseteq X$ compatto e di $U \subseteq Y$ aperto.

Lemma 2.1. *(i) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f\colon Y \to Z$, $g\colon X \to Y$ funzioni continue. Allora le applicazioni*

$$(f \circ -)\colon F(X,Y) \longrightarrow F(X,Z), \qquad (- \circ g)\colon F(Y,Z) \longrightarrow F(X,Z)$$

sono continue.

(ii) Siano X, Y spazi topologici con X localmente compatto e Hausdorff. Allora l'applicazione di valutazione

$$\begin{aligned} F(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

Sia M una n-varietà. Consideriamo sullo spazio $S_i(M) = F(\Delta^i, M)$ degli i-simplessi singolari la topologia compatta-aperta.

Definizione 2.2. Una cocatena $\varphi \in C^i(M)$ si dice *continua* se la sua restrizione a $S_i(M)$ è continua.

Osserviamo che se $\varphi \in C^i(M)$ è continua, allora anche $\varphi \circ d \in C^{i+1}(M)$ lo è (grazie al Lemma 2.1). Dunque le cocatene continue formano un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$, che indichiamo con $C_c^\bullet(M)$. I moduli di coomologia relativi a questo complesso saranno denotati con $H_c^\bullet(M)$. L'inclusione di complessi

$$i^\bullet\colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(M)$$

induce mappe in coomologia

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M).$$

Il complesso $C_c^\bullet(M)$ eredita per restrizione la seminorma ℓ^∞, che induce a sua volta una seminorma su $H_c^\bullet(M)$. In questa sezione ci domanderemo se la mappa $H^\bullet(i^\bullet)$ sia un isomorfismo isometrico, dando risposta affermativa nel caso in cui M ammetta una metrica Riemanniana a curvatura non positiva.

2.2 Cocatene continue e moduli iniettivi

Sia M una n-varietà chiusa, $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Fissiamo un'identificazione di $\Gamma = \pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di p. Ricordiamo che i moduli $C^i(\widetilde{M})$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli.

Proposizione 2.2. *Per ogni $i \geq 0$, il $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo $C^i \bullet (\widetilde{M})$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia $L_i(\widetilde{M})$ un insieme di rappresentanti per l'azione di Γ su $S_i(\widetilde{M})$. In altre parole, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esistono unici $g_s \in \Gamma$, $\overline{s} \in L_i(\widetilde{M})$ tali che $s = g_s \cdot \overline{s}$.

Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli, $\iota\colon A \to B$, $\alpha\colon A \to C^i(\widetilde{M})$ due applicazioni $\mathbb{R}[\Gamma]$-lineari con ι iniettiva. Consideriamo un'inversa sinistra $\mathbb{R}$-lineare $\sigma\colon B \to A$ di ι, ossia tale che $\sigma \circ \iota$ sia l'identità su A.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
& C^i(\widetilde{M}) &
\end{tikzcd}$$

Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C^i(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \alpha(\sigma(g_s^{-1} \cdot b))(\overline{s}).$$

- **β è Γ-lineare.** Sia $g \in \Gamma$. Osserviamo che $g^{-1} \cdot s = g^{-1} g_s \cdot \overline{s}$, dunque $g_{g^{-1}\cdot s} = g^{-1} g_s$ e $\overline{g^{-1} \cdot s} = \overline{s}$. Allora

$$(g \cdot \beta(b))(s) = \beta(b)(g^{-1} \cdot s) = \alpha(\sigma(g_s^{-1} g \cdot b))(\overline{s}) = \beta(g \cdot b)(s).$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.** Sia $a \in A$. Abbiamo

$$\beta(\iota(a))(s) = \alpha(\sigma(g_s^{-1} \cdot (\iota(a))))(\overline{s}) = \alpha(g_s^{-1} \cdot a)(\overline{s}) = \alpha(a)(s). \qquad \square$$

Osserviamo che per ogni $g \in \Gamma$ l'applicazione $(g \cdot -)\colon S_i(\widetilde{M}) \to S_i(\widetilde{M})$ è continua (grazie al Lemma 2.1), dunque i moduli $C_c^i(\widetilde{M})$ ereditano per restrizione una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Per mostrare un analogo della proposizione precedente per i moduli di cocatene continue, è necessario un lemma preliminare.

Lemma 2.3. *Esiste una funzione continua $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $x \in \widetilde{M}$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di x tale che l'insieme

$$\{g \in \Gamma : g(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito;

(ii) *per ogni* $x \in \widetilde{M}$ *vale*

$$\sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g\cdot x) = 1.$$

Proposizione 2.4. *Per ogni* $i \geq 0$, *il* $\mathbb{R}[\Gamma]$*-modulo* $C_c^i(\widetilde{M})$ *è iniettivo.*

Dimostrazione. Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli, $\iota\colon A \to B$, $\alpha\colon A \to C_c^i(\widetilde{M})$ due applicazioni $\mathbb{R}[\Gamma]$-lineari con ι iniettiva. Consideriamo un'inversa sinistra $\mathbb{R}$-lineare $\sigma\colon B \to A$ di ι.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
& C_c^i(\widetilde{M}) &
\end{tikzcd}$$

Sia $h_{\widetilde{M}}$ una funzione come nel Lemma 2.3. Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C_c^i(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0)))\cdot\alpha(g(\sigma(g^{-1}\cdot b)))(s),$$

dove $e_0,\ldots,e_i$ sono i vertici del simplesso standard Δ^i. Osserviamo che, per le proprietà di $h_{\widetilde{M}}$, la somma su g è in realtà una somma finita, dunque $\beta(b)(s)$ è ben definito.

- $\beta(b)$ **è una cocatena continua.** Per definizione di $h_{\widetilde{M}}$, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di $s(e_0)$ tale che

  $$\Gamma_s = \{g \in \Gamma : g^{-1}(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

  è finito. Allora per ogni $s' \in V(\{e_0\}, W)$ (che è un intorno di s in $S_i(\widetilde{M})$) vale

  $$\beta(b)(s') = \sum_{g\in\Gamma_s} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s'(e_0)))\cdot\alpha(g(\sigma(g^{-1}\cdot b)))(s'),$$

  che è evidentemente continua in s' (grazie al Lemma 2.1).

- β **è** Γ**-lineare.** Sia $g_0 \in \Gamma$. Abbiamo

  $$\begin{aligned}
  \beta(g_0\cdot b)(s) &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0)))\cdot\alpha(g(\sigma(g^{-1}g_0\cdot b)))(s) \\
  &= \sum_{k\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}g_0^{-1}(s(e_0)))\cdot\alpha(g_0k(\sigma(k^{-1}\cdot b)))(s) \\
  &= \sum_{k\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}(g_0^{-1}\cdot s)(e_0)))\cdot\alpha(k(\sigma(k^{-1}\cdot b)))(g_0^{-1}\cdot s) \\
  &= \beta(b)(g_0^{-1}\cdot s) = (g_0\cdot\beta(b))(s).
  \end{aligned}$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.** Sia $a \in A$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\beta(\iota(a))(s) &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}\cdot \iota(a)))))(s) \\ &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(\iota(g^{-1}\cdot a)))))(s) \\ &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(a)(s) = \alpha(a)(s).\end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo iniettivo. $\square$

2.3 Varietà con curvatura non positiva

Nonostante si possa proseguire anche con ipotesi meno restrittive, per semplicità ci limiteremo a considerare, da qui alla fine della sezione, varietà chiuse M che ammettano una metrica Riemanniana con curvatura non positiva.

In questo contesto, il teorema di Cartan-Hadamard garantisce che ogni coppia di punti $x, y \in \widetilde{M}$ siano collegati da un'unica geodetica; inoltre le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo liscio dagli estremi. Questo fatto permette di realizzare una procedura di raddrizzamento dei simplessi singolari.

Definizione 2.3. Siano $x_0, \dots, x_k$ punti di $\widetilde{M}$. Il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \dots, x_k$ è il simplesso singolare $[x_0, \dots, x_k] \in S_k(\widetilde{M})$ definito induttivamente come segue.

- Se $k = 0$, allora $[x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- Se $k > 0$, allora $[x_0, \dots, x_k]$ è univocamente determinato dalla seguente condizione: per ogni $z \in \Delta^{k-1} \subseteq \Delta^k$, la restrizione di $[x_0, \dots, x_k]$ al segmento di estremi z e e_k è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che collega $[x_0, \dots, x_{k-1}](z)$ a x_k.

È facile vedere, grazie a Cartan-Hadamard, che la definizione è ben posta (ossia $[x_0, \dots, x_k]$ è una funzione continua). Notiamo inoltre che, essendo gli elementi di Γ isometrie di $\widetilde{M}$, vale l'identità

$$g \circ [x_0, \dots, x_k] = [g(x_0), \dots, g(x_k)]$$

per ogni $g \in \Gamma$.

È infine utile osservare che, essendo M e $\widetilde{M}$ spazi metrici, la topologia compatta-aperta su $S_i(M)$ e $S_i(\widetilde{M})$ coincide con quella della convergenza uniforme.

2.4 Cocatene continue e risoluzioni iniettive

Proposizione 2.5. *Il complesso di* $\mathbb{R}[\Gamma]$*-moduli*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\epsilon} C^0(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{k-1}} C^k(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^k} \dots$$

è esatto, dove l'azione di $\mathbb{R}[\Gamma]$ *su* $\mathbb{R}$ *è banale e* $\epsilon(t)$ *è la cocatena che vale* t *su ogni* 0*-simplesso.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\widetilde{M}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, dunque ha coomologia banale in tutte le dimensioni positive. Ciò implica che il complesso è esatto in $C^k(\widetilde{M})$ per ogni $k \geq 1$. È immediato verificare che il complesso è esatto anche in $\mathbb{R}$ e in $C^0(\widetilde{M})$, da cui la tesi. □

Proposizione 2.6. *Il complesso di* $\mathbb{R}[\Gamma]$*-moduli*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\epsilon} C_c^0(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^0} C_c^1(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{k-1}} C_c^k(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^k} \dots$$

è esatto.

Dimostrazione. Costruiremo un'omotopia $\mathbb{R}$-lineare fra l'identità del complesso e la mappa nulla, mostrandone così l'esattezza. Fissiamo un punto base $x_0 \in \widetilde{M}$. Definiamo per ogni $k \geq 0$ un operatore $\mathbb{R}$-lineare $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} r : \qquad \Delta^k &\longrightarrow \Delta^{k+1} \\ t_0e_0 + \ldots + t_ke_k &\longmapsto t_0e_1 + \ldots + t_ke_{k+1} \end{aligned}$$

che identifica Δ^k con la faccia di Δ^{k+1} opposta a e_0. Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$, definiamo $T_k(s) \in S_{k+1}(\widetilde{M})$ come l'unico simplesso singolare che soddisfa la seguente condizione: per ogni $q \in \Delta^k$, la restrizione di $T_k(s)$ al segmento di estremi e_0 e $r(q)$ è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica di $\widetilde{M}$ di estremi x_0 e $s(q)$. Grazie al teorema di Cartan-Hadamard, è facile verificare che $T_k(s)$ è ben definito e continuo, e che l'applicazione $T_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_{k+1}(\widetilde{M})$ è continua. Estendendo T_k per $\mathbb{R}$-linearità, si ottiene una mappa $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Definiamo infine $T_{-1} \colon \mathbb{R} \to C_0(\widetilde{M})$ come $T_{-1}(t) = tx_0$. Si verifica facilmente che $d_0 \circ T_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ e che $T_{k-1} \circ d_k + d_{k+1} \circ T_k = \mathrm{id}_{C_k(\widetilde{M})}$ per ogni $k \geq 0$.

Definiamo ora per ogni $k \geq 0$ l'applicazione

$$\begin{aligned} h^k : C_c^k(\widetilde{M}) &\longrightarrow C_c^{k-1}(\widetilde{M}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ T_{k-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $h^k(\varphi)$ è effettivamente una cocatena continua, poiché la restrizione di T_{k-1} a $S_{k-1}(\widetilde{M})$ è continua. Dunque la famiglia di mappe $\{h^k\}_{k\geq 0}$ fornisce un'omotopia fra l'identità del complesso e l'applicazione nulla, da cui la tesi. □

Dato un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo A, una *risoluzione iniettiva* di A è il dato di un complesso $(I^\bullet, \delta^\bullet)$ di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli iniettivi e di una mappa $\epsilon\colon A \to I^0$ tali che la successione

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \epsilon\ } I^0 \xrightarrow{\ \delta^0\ } I^1 \xrightarrow{\ \delta^1\ } \dots \xrightarrow{\ \delta^{k-1}\ } I^k \xrightarrow{\ \delta^k\ } \dots$$

sia esatta.

Ricordiamo un noto fatto di algebra omologica. Reference please?

Teorema 2.7. *Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Siano $(I^\bullet, \delta_I^\bullet)$ una risoluzione iniettiva di A, $(J^\bullet, \delta_J^\bullet)$ una risoluzione iniettiva di B. Sia $f\colon A \to B$ un morfismo di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Allora esiste un morfismo di complessi $f^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet$ che* estende f*, ossia che fa commutare il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\epsilon_I"] \arrow[d, "f"] & I^0 \arrow[r, "\delta_I^0"] \arrow[d, dashed, "f^0"] & I^1 \arrow[r, "\delta_I^1"] \arrow[d, dashed, "f^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\epsilon_J"] & J^0 \arrow[r, "\delta_J^0"] & J^1 \arrow[r, "\delta_J^1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Inoltre, ogni altro morfismo di complessi che estende f è omotopo a $f^\bullet$.

2.5 Coomologia continua e coomologia singolare

Esiste un funtore $(-)^\Gamma$ dalla categoria dei $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli nella categoria degli $\mathbb{R}$-moduli, che a ogni $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo A associa il sottospazio A^Γ degli elementi Γ-invarianti, e agisce sui morfismi per restrizione.

Lemma 2.8. *Il morfismo di complessi $p^\bullet\colon C^\bullet(M) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ induce per restrizione isomorfismi isometrici di complessi*

$$p^\bullet\colon C^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma, \qquad p^\bullet\colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$

i quali a loro volta inducono isomorfismi isometrici in coomologia

$$H^\bullet(M) \simeq H^\bullet(C^\bullet(M)^\Gamma), \qquad H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Dimostrazione. È immediato verificare che $p^\bullet\colon C^\bullet(M) \to C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ è un isomorfismo isometrico. Per concludere è sufficiente mostrare che una cocatena $\varphi \in C^k(M)$ è continua se e solo se lo è $\varphi \circ p_k \in C^k(\widetilde{M})^\Gamma$. Tuttavia non è difficile vedere che la mappa $(p \circ -)\colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(M)$ è un rivestimento; in particolare Reference please.
è continua, suriettiva e aperta, da cui la tesi. $\square$

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 2.9. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora l'applicazione*

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M)$$

è un isomorfismo isometrico.

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 2.2 e della Proposizione 2.5, il complesso

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\epsilon} C^0(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

fornisce una risoluzione iniettiva del $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo banale $\mathbb{R}$. Analogamente, grazie alla Proposizione 2.4 e alla Proposizione 2.6, anche il complesso

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\epsilon} C_c^0(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^0} C_c^1(\widetilde{M}) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

descrive una risoluzione iniettiva di $\mathbb{R}$. Abbiamo inoltre l'inclusione di complessi $j^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M}) \to C^\bullet(\widetilde{M})$, che è un morfismo 1-Lipschitz che estende l'identità di $\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}}"] & C_c^0(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "j^0"] & C_c^1(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "j^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\epsilon"] & C^0(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^0"] & C^1(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Esibiremo ora un morfismo di complessi 1-Lipschitz $\theta^\bullet \colon C^\bullet(\widetilde{M}) \to C_c^\bullet(\widetilde{M})$ che estenda l'identità di $\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}}"] & C^0(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "\theta^0"] & C^1(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "\theta^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\epsilon"] & C_c^0(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^0"] & C_c^1(\widetilde{M}) \arrow[r, "\delta^1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Fissiamo un punto base $x_0 \in \widetilde{M}$. Per ogni $\varphi \in C^k(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo

$$\theta^k(\varphi)(s) = \sum_{(g_0,\dots,g_k)\in\Gamma^{k+1}} h_{\widetilde{M}}(g_0^{-1}(s(e_0))) \cdots h_{\widetilde{M}}(g_k^{-1}(s(e_k)))\cdot\varphi([g_0(x_0),\dots,g_k(x_0)]),$$

dove $h_{\widetilde{M}} \colon \widetilde{M} \to [0,1]$ è data dal Lemma 2.3. Grazie alle proprietà di $h_{\widetilde{M}}$ è facile verificare che $\theta^k(\varphi)$ (una volta estesa per $\mathbb{R}$-linearità) definisce un elemento di $C_c^k(\widetilde{M})$, e che $\theta^\bullet$ risulta essere un morfismo 1-Lipschitz di complessi di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli che estende l'identità di $\mathbb{R}$.

Osserviamo che

$$\theta^\bullet \circ j^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M}) \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})$$

è un morfismo di complessi che estende l'identità di $\mathbb{R}$. Dal Teorema 2.7 segue che tale morfismo è omotopo all'identità. Questa proprietà si mantiene applicando il funtore $(-)^\Gamma$, dunque otteniamo che

$$H^\bullet(\theta^\bullet) \circ H^\bullet(j^\bullet) = \mathrm{id}_{H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)}\,.$$

Allo stesso modo,

$$H^\bullet(j^\bullet) \circ H^\bullet(\theta^\bullet) = \mathrm{id}_{H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)}\,.$$

Essendo $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H^\bullet(\theta^\bullet)$ morfismi 1-Lipschitz, segue in particolare che

$$H^\bullet(j^\bullet)\colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo isometrico.

Dal diagramma commutativo di complessi

$$\begin{tikzcd}
C_c^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] \arrow[d, "i^\bullet"] & C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \arrow[d, "j^\bullet"] \\
C^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma
\end{tikzcd}$$

(in cui le frecce orizzontali sono isomorfismi isometrici per il Lemma 2.8) segue che anche $H^\bullet(i^\bullet)$ è un isomorfismo isometrico. $\square$

3 Principio di proporzionalità di Gromov

3.1 Mappa di restrizione

Utilizziamo le notazioni della sezione precedente, continuando a supporre che M sia una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Sia G il gruppo delle isometrie di $\widetilde{M}$ che preservano l'orientazione. È ben noto che G ammette una struttura di gruppo di Lie che induce la topologia compatta-aperta. Di conseguenza esiste una misura di Borel regolare invariante a sinistra su G (*misura di Haar*), unica a meno di riscalamento.

Poiché Γ è un sottogruppo discreto di G e $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ è compatta, esiste un insieme misurabile $F \subseteq G$ relativamente compatto tale che $\{\gamma \cdot F\}_{\gamma \in \Gamma}$ definisca una partizione localmente finita di G. In particolare, Γ è cocompatto in G, pertanto la misura di Haar è anche invariante a destra. D'ora in poi supporremo che tale misura sia riscalata in modo che F abbia misura 1.

Reference please.

Definizione 3.1. Indichiamo con $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ il complesso delle cocatene continue G-invarianti. L'inclusione di complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G \to C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ induce una mappa in coomologia

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

detta *mappa di restrizione*.

Osserviamo che, considerando su $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ e $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$ le seminorme indotte rispettivamente da $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ e $C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$, la mappa di restrizione risulta 1-Lipschitz.

Ci proponiamo ora di costruire un'inversa sinistra 1-Lipschitz di $\mathrm{res}^\bullet$. Indichiamo con μ_G la misura di Haar su G. Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ definiamo

$$\mathrm{trans}^i(\varphi)(s) = \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g).$$

Si tratta di una buona definizione, poiché $\varphi(- \cdot s)$ è una funzione continua da G in $\mathbb{R}$ e F è relativamente compatto. Estendendo $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ per linearità, otteniamo un elemento di $C^i(\widetilde{M})$.

Proposizione 3.1. *Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ valgono le seguenti proprietà.*

(i) La cocatena $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è continua.*

(ii) Vale $\mathrm{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1}) = \mathrm{trans}^i(\varphi) \circ d^{i+1}$.

(iii) Se φ è Γ-invariante, allora $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è G-invariante.*

(iv) Se φ è G-invariante, allora $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

Dimostrazione.

(i) Osserviamo innanzitutto che la topologia compatta-aperta su $S_i(\widetilde{M})$ è indotta dalla distanza

$$\mathrm{dist}(s,s') = \sup\{\mathrm{dist}_{\widetilde{M}}(s(x),s'(x)) : x \in \Delta^i\}.$$

Sia $s_0 \in S_i(\widetilde{M})$, e sia $\epsilon > 0$. Poiché $\overline{F}$ è compatto in G, dal Lemma 2.1 si ottiene immediatamente che $\overline{F} \cdot s_0$ è compatto in $S_i(\widetilde{M})$. Dalla continuità di φ segue facilmente l'esistenza di un $\eta > 0$ tale che per ogni $s \in \overline{F} \cdot s_0$ e per ogni $s' \in S_i(\widetilde{M})$ con $\mathrm{dist}(s,s') < \eta$ valga $|\varphi(s) - \varphi(s')| \leq \epsilon$. Sia dunque $s \in S_i(\widetilde{M})$ tale che $\mathrm{dist}(s_0, s) < \eta$. Poiché G agisce su $S_i(\widetilde{M})$ in modo isometrico, allora anche $\mathrm{dist}(g \cdot s_0, g \cdot s) < \eta$ per ogni $g \in G$. Ma allora

$$|\,\mathrm{trans}^i(\varphi)(s) - \mathrm{trans}^i(\varphi)(s_0)| \leq \int_F |\varphi(g\cdot s) - \varphi(g \cdot s')| d\mu_G(g) \leq \epsilon \mu_G(F) = \epsilon$$

dunque $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ è continua.

(ii) Sia $s \in S_{i+1}(\widetilde{M})$, e siano $a_0, \dots, a_{i+1} \in \mathbb{R}$, $s_0, \dots, s_{i+1} \in S_i(\widetilde{M})$ tali che

$$d^{i+1}(s) = \sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j.$$

Osserviamo che

$$d^{i+1}(g \cdot s) = \sum_{j=0}^{r} a_j (g \cdot s_j),$$

per ogni $g \in G$, da cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1})(s) &= \int_F \varphi(d^{i+1}(g \cdot s)) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \int_F \varphi(g \cdot s_j) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \,\mathrm{trans}^i(\varphi)(s_j) \\
&= \mathrm{trans}^i(\varphi) \left(\sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j \right) = \mathrm{trans}^i(\varphi)(d^{i+1} s).
\end{aligned}$$

(iii) Fissiamo $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$, $s \in S_i(\widetilde{M})$, $g_0 \in G$. Poiché F è relativamente compatto, lo sono anche $F \cdot g_0$ e $F \cdot g_0^{-1}$, dunque esistono un numero finito di elementi $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$ tali che

$$F \cdot g_0 \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F \qquad \text{e} \qquad F \cdot g_0^{-1} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j^{-1} \cdot F.$$

Posto $F_j = (\gamma_j^{-1} \cdot F \cdot g_0) \cap F$ si ottiene immediatamente che

$$F = \bigsqcup_{j=1}^{r} F_j \qquad \text{e} \qquad F \cdot g_0 = \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F_j .$$

Sfruttando il fatto che μ_G è invariante a destra e a sinistra e che φ è Γ-invariante si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{trans}^i(\varphi)(g_0 \cdot s) &= \int_F \varphi(gg_0 \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_{F \cdot g_0} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{\gamma_j \cdot F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(\gamma_j g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) = \mathrm{trans}(\varphi)(s).
\end{aligned}$$

(iv) Se φ è G-invariante segue immediatamente dalla definizione che $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$. □

Corollario 3.2. *La mappa di restrizione*

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un'immersione isometrica.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.1 segue immediatamente che

$$\mathrm{trans}^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$$

è un morfismo di complessi ben definito la cui restrizione a $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ è l'identità. Poiché $\mathrm{trans}^\bullet$ è evidentemente 1-Lipschitz, guardando la corrispondente mappa in coomologia si ottiene che

$$H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

è una mappa 1-Lipschitz tale che $H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \circ \mathrm{res}^\bullet$ sia l'identità. Questo conclude la dimostrazione. □

3.2 Cociclo volume

Se X è una varietà Riemanniana, denotiamo con ${}_sS_k(X)$ lo spazio dei k-simplessi *lisci* di X (ossia l'insieme delle funzioni lisce da Δ^k in X) munito della topologia C^1.

Proposizione 3.3. *Per ogni $x_0, \dots, x_k \in \widetilde{M}$, il simplesso dritto $[x_0, \dots, x_k]$ è liscio. Inoltre l'applicazione*

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times \ldots \times \widetilde{M} &\longrightarrow {}_sS_k(\widetilde{M}) \\ (x_0, \dots, x_k) &\longmapsto [x_0, \dots, x_k] \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. L'enunciato è banalmente vero per $k = 0$. Un semplice argomento induttivo (che sfrutta il teorema di Cartan-Hadamard) permette di concludere. □

Per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo $\widetilde{\operatorname{str}}_k(s) = [s(e_0), \dots, s(e_k)]$. Estendendo $\widetilde{\operatorname{str}}_k$ per $\mathbb{R}$-linearità otteniamo un'applicazione $\widetilde{\operatorname{str}}_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(\widetilde{M})$.

Proposizione 3.4. *L'applicazione $\widetilde{\operatorname{str}}_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(\widetilde{M})$ soddisfa le seguenti proprietà.*

(i) $d_{k+1} \circ \widetilde{\operatorname{str}}_{k+1} = \widetilde{\operatorname{str}}_{k+1} \circ d_k$ *per ogni $k \geq 0$ (ossia $\widetilde{\operatorname{str}}_\bullet \colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi).*

(ii) $\widetilde{\operatorname{str}}_k(\gamma \circ s) = \gamma \circ \widetilde{\operatorname{str}}_k(s)$ *per ogni $k \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$, $s \in S_k(\widetilde{M})$.*

(iii) $\widetilde{\operatorname{str}}_\bullet \colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ *è omotopa all'identità mediante un'omotopia Γ-equivariante che manda simplessi lisci in una somma finita di simplessi lisci.*

Dimostrazione.

(i) È immediato verificare che la i-esima faccia di $[x_0, \dots, x_k]$ è $[x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_k]$, da cui la tesi.

(ii) Poiché le isometrie preservano le geodetiche, si ha

$$\gamma \circ [x_0, \dots, x_k] = [\gamma(x_0), \dots, \gamma(x_k)],$$

da cui la tesi.

(iii) Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo l'applicazione $F \colon \Delta^k \times [0,1] \to \widetilde{M}$ in modo che per ogni $x \in \Delta^k$ la mappa $F(x, -) \colon [0,1] \to \widetilde{M}$ sia la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che congiunge $s(x)$ con $\widetilde{\operatorname{str}}_k(s)(x)$. Definiamo poi $T_k(s) = F_\bullet(c)$, dove $c \in C_{k+1}(\Delta^k \times [0,1])$ è la triangolazione standard di $\Delta^k \times [0,1]$. È immediato verificare che $d_{k+1} \circ T_k + T_{k-1} \circ d_k = \operatorname{id} - \widetilde{\operatorname{str}}_k$, mentre la Γ-equivarianza di T_k segue dal fatto che le isometrie preservano le geodetiche. □

Come conseguenza otteniamo un morfismo di complessi $\mathrm{str}_\bullet\colon C_\bullet(M) \to C_\bullet(M)$ omotopo all'identità. Inoltre, dalla Proposizione 3.3, $\mathrm{str}_k(s)$ è un simplesso liscio di M per ogni $s \in S_k(M)$, e le restrizioni $\mathrm{str}_k\colon S_k(M) \to {}_sS_k(M)$ sono continue.

Supponiamo ora che M sia orientata, e sia n la dimensione di M. Denotiamo con $\omega_M \in \Omega^n(M)$ la forma volume di M.

Definizione 3.2. Per ogni $s \in S_n(M)$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

Estendendo per linearità, otteniamo una cocatena $\mathrm{Vol}_M \in C^n(M)$, detta *cocatena volume*.

Poiché $\mathrm{str}_n\colon S_n(M) \to {}_sS_n(M)$ è continua e l'integrazione è continua rispetto alla topologia C^1, otteniamo che la cocatena volume è continua. Osserviamo inoltre che per ogni $s \in S_{n+1}(M)$ vale

$$\mathrm{Vol}_M(d(s)) = \int_{\mathrm{str}_n(d(s))} \omega_M = \int_{d\,\mathrm{str}_{n+1}(s)} \omega_M = \int_{\mathrm{str}_{n+1}(s)} d\omega_M = 0,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\mathrm{str}_\bullet$ è un morfismo di complessi e il teorema di Stokes. Pertanto Vol_M è un cociclo, e definisce classi $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$, $[\mathrm{Vol}_M]_c \in H^n_c(M)$ in coomologia.

Lemma 3.5. *Vale* $[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $[\mathrm{Vol}_M] = \langle [\mathrm{Vol}_M], [M] \rangle \cdot [M]^*$. È ben noto che la classe fondamentale di M ammette un rappresentante della forma $c = \sum s_i$, dove gli s_i sono gli n-simplessi lisci e orientati positivamente di una triangolazione di M. Per la Proposizione 3.4, il ciclo $c - \mathrm{str}_n(c)$ è bordo di una catena di $(n+1)$-simplessi lisci. Pertanto

$$\langle [\mathrm{Vol}_M], [M] \rangle = \mathrm{Vol}_M(c) = \int_{\mathrm{str}_n(c)} \omega_M = \int_c \omega_M = \mathrm{Vol}(M),$$

dove abbiamo usato il teorema di Stokes per dedurre che

$$\int_{c - \mathrm{str}_n(c)} \omega_M = 0. \qquad \square$$

3.3 Principio di proporzionalità

Consideriamo l'immagine di Vol_M mediante l'identificazione isometrica $C^n_c(M) \simeq C^n_c(\widetilde{M})^\Gamma$ indotta da $p^\bullet$: si tratta del cociclo $\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\colon C_n(\widetilde{M}) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni simplesso $s \in S_n(\widetilde{M})$ valga

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(p \circ s)} \omega_M = \int_{p \circ \widetilde{\mathrm{str}}_n(s)} \omega_M = \int_{\widetilde{\mathrm{str}}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}},$$

dove $\omega_{\widetilde{M}}$ è la forma volume di $\widetilde{M}$. Osserviamo che $\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$ è una cocatena G-invariante, dunque definisce una classe $[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M}))$ tale che l'immagine di $\mathrm{res}^n([\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G)$ mediante l'identificazione isometrica $H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \simeq H_c^n(M)$ sia proprio $[\mathrm{Vol}_M]_c$.

Possiamo ora enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora*

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}.$$

Dimostrazione. Possiamo facilmente ridurci al caso in cui M sia orientata. Cominciamo osservando che tutte le mappe nel seguente diagramma sono isomorfismi o immersioni isometriche (rispettivamente per il Teorema 2.9, il Lemma 2.8 e il Corollario 3.2).

$$H^n(M) \xleftarrow[\simeq]{H^n(i^\bullet)} H_c^n(M) \xrightarrow[\simeq]{H^n(p^\bullet)} H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \xleftarrow{\mathrm{res}^n} H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

Inoltre, a $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ a sinistra corrisponde $[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ a destra; in particolare, $\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty = \left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty$. Allora la tesi segue immediatamente dalla Proposizione 1.5 e dal Lemma 3.5:

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}. \qquad \square$$

In particolare, abbiamo il seguente.

Corollario 3.7. *Nelle ipotesi del teorema precedente, il rapporto $\|M\| / \mathrm{Vol}(M)$ dipende solo dalla classe di isometria del rivestimento universale $\widetilde{M}$.*

4 Varietà euclidee e iperboliche

4.1 Varietà euclidee

Il principio di proporzionalità di Gromov permette di calcolare immediatamente il volume simpliciale di tutte le varietà chiuse euclidee (ossia localmente isometriche a $\mathbb{R}^n$).

Proposizione 4.1. *Sia M una varietà chiusa euclidea. Allora $\|M\| = 0$.*

Dimostrazione. Sia n la dimensione di M. Osserviamo che l'n-toro euclideo $(S^1)^n$ ha volume simpliciale nullo, poiché ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto. Poiché il rivestimento universale di ogni varietà euclidea è isometrico a $\mathbb{R}^n$, dal Corollario 3.7 segue che

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\left\|(S^1)^n\right\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)} = 0. \qquad \square$$

4.2 Varietà iperboliche

Nel resto di questa sezione ci proponiamo di calcolare il rapporto $\|M\| \,/\, \mathrm{Vol}(M)$ per varietà chiuse iperboliche (ossia localmente isometriche a $\mathbb{H}^n$). Il Teorema 3.6 garantisce che tale rapporto non dipende dalla varietà M, e fornisce un metodo per calcolarlo: è sufficiente conoscere la seminorma della coclasse $[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\mathbb{H}^n)^G)$, dove G denota il gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}^n$ che preservano l'orientazione.

Ricordiamo brevemente alcuni fatti riguardanti la geometria dei simplessi dritti in $\mathbb{H}^n$. Nello spazio iperbolico sono ben definite le combinazioni convesse di punti, e dunque in particolare anche i sottoinsiemi convessi. Un *k-simplesso (geodetico)* in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è l'inviluppo convesso di $k+1$ punti in $\mathbb{H}^n$, detti *vertici*. Un simplesso si dice *finito* se tutti i suoi vertici appartengono a $\mathbb{H}^n$, ideale se tutti i suoi vertici appartengono a $\partial\mathbb{H}^n$, e *regolare* e ogni permutazione dei suoi vertici si estende a un'isometria di $\mathbb{H}^n$. I simplessi geodetici sono esattamente le immagini dei simplessi dritti (più precisamente, l'immagine di $[x_0, \ldots, x_k]$ è il simplesso geodetico di vertici $x_0, \ldots, x_k$). Per ogni $\ell > 0$ esiste a meno di isometria un unico n-simplesso regolare finito di lato ℓ, che denoteremo con τ_ℓ. Inoltre esiste a meno di isometria un unico n-simplesso regolare ideale, che denoteremo con τ_∞; definiamo infine $v_n = \mathrm{Vol}(\tau_\infty)$.

Teorema 4.2. *Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora $\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n$, e $\mathrm{Vol}(\Delta) = v_n$ se e solo se Δ è regolare ideale.*

Teorema 4.3. *Vale $\lim\limits_{\ell\to\infty} \mathrm{Vol}(\tau_\ell) = v_n$.*

Reference please.

Dato un simplesso geodetico con vertici $x_0, \ldots, x_k$, possiamo definire la sua *parametrizzazione baricentrica* come l'applicazione

$$\begin{aligned} \Delta^k &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ t_0 e_0 + \ldots + t_k e_k &\longmapsto t_0 x_0 + \ldots + t_k e_k. \end{aligned}$$

Si tratta ovviamente di una parametrizzazione liscia, e avrà un ruolo nella dimostrazione della proposizione seguente.

Abbiamo prima bisogno, però, di introdurre il concetto di cocatena alternante. Dato uno spazio topologico X, una cocatena $\varphi \in C^k(X)$ si dice *alternante* se per ogni permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}$ vale $\varphi(- \circ \overline{\sigma}) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \varphi$, dove $\overline{\sigma} \colon \Delta^k \to \Delta^k$ è l'affinità che induce la permutazione σ sui vertici di Δ^k. Denotiamo con $C^k_{\mathrm{alt}}(X)$ il sottospazio di $C^k(X)$ formato dalle k-cocatene alternanti. Si vede facilmente che $C^\bullet_{\mathrm{alt}}(X)$ è un sottocomplesso di $C^\bullet(X)$. Inoltre esiste un morfismo di complessi 1-Lipschitz $\mathrm{alt}^\bullet \colon C^\bullet(X) \to C^\bullet_{\mathrm{alt}}(X)$ che a ogni cocatena $\varphi \in C^k(X)$ associa la cocatena alternante $\mathrm{alt}^k(\varphi)$ definita come

$$\mathrm{alt}^k(\varphi)(s) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \varphi(s \circ \overline{\sigma})$$

sui simplessi singolari $s \in S_k(X)$. È evidente che $\mathrm{alt}^\bullet$ è l'identità sulle cocatene alternanti.

Possiamo infine calcolare esplicitamente il volume simpliciale delle varietà iperboliche.

Proposizione 4.4. *Sia M una n-varietà iperbolica chiusa. Allora*

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n}.$$

Dimostrazione. Grazie al Teorema 3.6, è sufficiente dimostrare che $\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]^G_c\right\|_\infty = v_n$. Dal Teorema 4.2 segue che

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]^G_c\right\|_\infty \leq \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty = v_n,$$

quindi rimane da mostrare la disuguaglianza opposta.

Per definizione,

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]^G_c\right\|_\infty = \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi_\infty\| : \varphi \in C^{n-1}_c(\mathbb{H}^n)^G\right\}.$$

Osserviamo che la cocatena volume è alternante; inoltre il morfismo 1-Lipschitz $\mathrm{alt}^\bullet \colon C^\bullet(\mathbb{H}^n) \to C^\bullet(\mathbb{H}^n)$ preserva le cocatene continue e G-invarianti, dunque

$$\begin{aligned}
\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]^G_c\right\|_\infty &\geq \inf\left\{\|\mathrm{alt}^n(\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi)\|_\infty : \varphi \in C^{n-1}_c(\mathbb{H}^n)^G\right\} \\
&= \inf\left\{\left\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\,\mathrm{alt}^{n-1}(\varphi)\right\|_\infty : \varphi \in C^{n-1}_c(\mathbb{H}^n)^G\right\} \\
&= \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi\|_\infty : \varphi \in C^{n-1}_{c,\mathrm{alt}}(\mathbb{H}^n)^G\right\}.
\end{aligned}$$

Sia dunque φ una $(n-1)$-cocatena continua alternante e G-invariante. Consideriamo un n-simplesso regolare finito τ_ℓ e la sua parametrizzazione baricentrica s_ℓ. Sia $\partial_i s_\ell$ la sua i-esima faccia; è evidente che $\partial_i s_\ell$ è a sua volta una parametrizzazione baricentrica. Sia $\overline{\sigma} \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ una mappa affine che induce una permutazione dispari $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sui vertici di Δ^{n-1}. Poiché τ_ℓ è regolare, esiste un'isometria $g \in G$ di $\mathbb{H}^n$ che induce la permutazione σ sui vertici di $\partial_i s_\ell$; a meno di comporre con la riflessione lungo l'iperpiano che contiene l'immagine di $\partial_i s_\ell$, possiamo supporre che g preservi l'orientazione. Dalla definizione di parametrizzazione baricentrica è evidente che $g \circ \partial_i s_\ell = \partial_i s_\ell \circ \overline{\sigma}$.

Sfruttando il fatto che φ è contemporaneamente G-invariante e alternante otteniamo

$$\varphi(\partial_i s_\ell) = \varphi(g \circ \partial_i s_\ell) = \varphi(\partial_i s_\ell \circ \sigma) = -\varphi(\partial_i s_\ell),$$

da cui $\varphi(\partial_i s_\ell) = 0$ e $\varphi(ds_\ell) = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty &\geq \inf \left\{ \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi\|_\infty : \varphi \in C^{n-1}_{c,\mathrm{alt}}(\mathbb{H}^n)^G \right\} \\
&\geq \inf \left\{ |(\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi)(s_\ell)| : \varphi \in C^{n-1}_{c,\mathrm{alt}}(\mathbb{H}^n)^G \right\} \\
&= |\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s_\ell)| = \mathrm{Vol}(\tau_\ell).
\end{aligned}$$

Facendo tendere $\ell \to \infty$, dal Teorema 4.3 otteniamo $\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty \geq v_n$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 4.5. *Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g. Allora*

$$\|\Sigma_g\| = \begin{cases} 0 & g < 2 \\ 4g - 4 & g \geq 2 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Per i casi $g = 0, 1$ basta osservare che S^2 e $S^1 \times S^1$ ammettono endomorfismi di grado arbitrariamente alto, dunque hanno volume simpliciale nullo. Se invece $g \geq 2$, è ben noto che Σ_g ammette una metrica iperbolica. Ricordando che $v_2 = \pi$ e che (per Gauss-Bonnet) $\mathrm{Area}(\Sigma_g) = -2\pi\chi(\Sigma_g) = 4\pi g + 4\pi$, dalla Proposizione 4.4 segue che

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Area}(\Sigma_g)}{v_2} = 4g - 4. \qquad \square$$

Corollario 4.6. *Una varietà chiusa non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.*

Dimostrazione. Se una varietà chiusa M ammette una metrica euclidea, allora per la Proposizione 4.1 vale $\|M\| = 0$. Se M ammette una metrica iperbolica, per la Proposizione 4.4 il suo volume simpliciale è strettamente positivo. $\square$