1 Coomologia continua

1.1 Definizioni

Riportiamo la definizione di topologia compatta-aperta e ne ricordiamo alcune utili proprietà.

Definizione 1.1. Siano X, Y spazi topologici, $F(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. La *topologia compatta-aperta* su $F(X,Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi

$$V(K,U) = \{f \in F(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

al variare di $K \subseteq X$ compatto e di $U \subseteq Y$ aperto.

Lemma 1.1. *(i) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f\colon Y \to Z$, $g\colon X \to Y$ funzioni continue. Allora le applicazioni*

$$f \circ - \colon F(X,Y) \longrightarrow F(X,Z), \qquad - \circ g\colon F(Y,Z) \longrightarrow F(X,Z)$$

sono continue.

(ii) Siano X, Y spazi topologici con X localmente compatto e Hausdorff. Allora l'applicazione di valutazione

$$\begin{aligned} F(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

In questa sezione, tutti moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno da intendersi a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Sia M una n-varietà. Consideriamo sullo spazio $S_i(M) = F(\Delta^i, M)$ degli i-simplessi singolari la topologia compatta aperta.

Definizione 1.2. Una cocatena $\varphi \in C^i(M)$ si dice *continua* se la sua restrizione a $S_i(M)$ è continua.

Osserviamo che se $\varphi \in C^i(M)$ è continua, allora anche $\varphi\partial \in C^{i+1}(M)$ lo è (grazie al lemma 1.1). Dunque le cocatene continue formano un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$, che denotiamo con $C^\bullet_c(M)$; indichiamo inoltre con $C^\bullet_{b,c}(M) = C^\bullet_c(M) \cup C^\bullet_b(M)$ il complesso delle cocatene continue limitate. I moduli di coomologia relativi ai complessi $C^\bullet_c(M)$ e $C^\bullet_{b,c}$ saranno denotati, rispettivamente, con $H^\bullet_c(M)$ e $H^\bullet_{b,c}(M)$. Le inclusioni di complessi

$$i^\bullet\colon C^\bullet_c(M) \longrightarrow C^\bullet(M), \qquad i^\bullet_b\colon C^\bullet_{b,c}(M) \longrightarrow C^\bullet_b(M)$$

inducono mappe in coomologia

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H^\bullet_c(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H^\bullet_b(i^\bullet_b)\colon H^\bullet_{b,c}(M) \longrightarrow H^\bullet_b(M).$$

In questa sezione ci domanderemo se queste mappe siano isomorfismi, dando risposta affermativa nel caso in cui M ammetta una metrica Riemanniana a curvatura non positiva.

1.2 Cocatene continue e moduli relativamente iniettivi

Sia M una n-varietà chiusa, $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Fissiamo un'identificazione di $\Gamma = \pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di p.

Ricordiamo che i moduli $C^i(\widetilde{M})$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Osserviamo che per ogni $g \in \Gamma$ l'applicazione $g \cdot -\colon S_i(\widetilde{M}) \to S_i(\widetilde{M})$ è continua (grazie al lemma 1.1), dunque i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ ereditano per restrizione una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Analogamente, i moduli $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ ereditano una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati.

Lemma 1.2. *Il morfismo di complessi $p^\bullet\colon C^\bullet(M) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ induce per restrizione isomorfismi isometrici di complessi*

Che norma c'è su $C^\bullet_c(M)$?

$$p^\bullet|_{C^\bullet_c(M)}\colon C^\bullet_c(M) \longrightarrow C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma, \qquad p^\bullet|_{C^\bullet_{b,c}(M)}\colon C^\bullet_{b,c}(M) \longrightarrow C^\bullet_{b,c}(\widetilde{M})^\Gamma,$$

i quali a loro volta inducono isomorfismi isometrici in coomologia

$$H^\bullet_c(M) \simeq H^\bullet(C^\bullet_c(M)^\Gamma), \qquad H^\bullet_{b,c}(M) \simeq H^\bullet_{b,c}(C^\bullet_{b,c}(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Lemma 1.3. *Esiste una funzione continua $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $x \in \widetilde{M}$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di x tale che l'insieme

$$\{g \in \Gamma : g(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito;

(ii) per ogni $x \in \widetilde{M}$ vale

$$\sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g \cdot x) = 1.$$

Proposizione 1.4. *Per ogni $i \geq 0$, i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ e $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ sono relativamente iniettivi (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $C^i_c(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo. Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli, $\iota\colon A \to B$ una funzione Γ-lineare fortemente iniettiva con inversa sinistra $\mathbb{R}$-lineare $\sigma\colon B \to A$, $\alpha\colon A \to C^i_c(\widetilde{M})$ una funzione Γ-lineare.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
& C^i_c(\widetilde{M}) &
\end{tikzcd}$$

Sia $h_{\widetilde{M}}$ una funzione come nel lemma 1.3. Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C_c^i(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}(b))))(s),$$

dove $e_0, \ldots, e_i$ sono i vertici del simplesso standard Δ^i. Osserviamo che, per le proprietà di $h_{\widetilde{M}}$, la somma su g è in realtà una somma finita, dunque $\beta(b)(s)$ è ben definito.

- **$\beta(b)$ è una cocatena continua.** Per definizione di $h_{\widetilde{M}}$, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di $s(e_0)$ tale che

  $$\Gamma_s = \{g \in \Gamma : g^{-1}(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

  è finito. Allora per ogni $s' \in V(\{e_0\}, W)$ (che è un intorno di s in $S_i(\widetilde{M})$) vale

  $$\beta(b)(s') = \sum_{g \in \Gamma_s} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s'(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot b)))(s'),$$

  che è evidentemente continua in s' (grazie al lemma 1.1).

- **β è Γ-lineare.** Sia $g_0 \in \Gamma$. Abbiamo

  $$\begin{aligned}
  \beta(g_0 \cdot b)(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} g_0 \cdot b)))(s) \\
  &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1} g_0^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g_0 k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(s) \\
  &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}(g_0^{-1} \circ s)(e_0))) \cdot \alpha(k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(g_0^{-1} \circ s) \\
  &= \beta(b)(g_0^{-1} \circ s) = (g_0 \cdot \beta(b))(s).
  \end{aligned}$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.** Sia $a \in A$. Abbiamo

  $$\begin{aligned}
  \beta(\iota(a))(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot \iota(a))))(s) \\
  &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(\iota(g^{-1} \cdot a))))(s) \\
  &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(a)(s) = \alpha(a)(s).
  \end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo.

La stessa costruzione funziona anche per $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ nel contesto di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati: infatti, poiché $\|\sigma\| \leq 1$, si vede che $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$. Dunque $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato relativamente iniettivo. □

1.3 Varietà con curvatura non positiva

Nonostante si possa proseguire anche con ipotesi meno restrittive, per semplicità ci limiteremo a considerare, da qui alla fine della sezione, varietà M che ammettano una metrica Riemanniana con curvatura non positiva.

In questo contesto, il teorema di Cartan-Hadamard garantisce che ogni coppia di punti $x, y \in \widetilde{M}$ siano collegati da un'unica geodetica; inoltre le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo continuo dagli estremi. Questo fatto permette di realizzare una procedura di raddrizzamento dei simplessi singolari.

Definizione 1.3. Siano $x_0, \ldots, x_k$ punti di $\widetilde{M}$. Il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \ldots, x_k$ è un simplesso singolare $[x_0, \ldots, x_k] \in S_k(\widetilde{M})$ definito induttivamente come segue.

- Se $k = 0$, allora $[x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- Se $k > 0$, allora $[x_0, \ldots, x_k]$ è univocamente determinato dalla seguente condizione: per ogni $z \in \Delta^{k-1} \subseteq \Delta^k$, la restrizione di $[x_0, \ldots, x_k]$ al segmento di estremi z e e_k è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che collega $[x_0, \ldots, x_{k-1}](z)$ a x_k.

È facile vedere, grazie a Cartan-Hadamard, che la definizione è ben posta (ossia $[x_0, \ldots, x_k]$ è una funzione continua).

1.4 Cocatene continue e risoluzioni forti di $\mathbb{R}$

Proposizione 1.5. *I complessi $C^\bullet_c(\widetilde{M})$ e $C^\bullet_{b,c}(\widetilde{M})$ sono risoluzioni forti di $\mathbb{R}$ (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Il fatto che i complessi siano esatti segue dal fatto che l'identità è omotopa a 0, giusto?

Dimostrazione. Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Definiamo per ogni $i \geq 0$ un operatore $\mathbb{R}$-lineare $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} r : \qquad \Delta^k &\longrightarrow \Delta^{k+1} \\ t_0 e_0 + \ldots + t_k e_k &\longmapsto t_0 e_1 + \ldots + t_k e_{k+1} \end{aligned}$$

che identifica Δ^k con la faccia di Δ^{k+1} opposta a e_0. Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$, definiamo $T_k(s) \in S_{k+1}(\widetilde{M})$ come l'unico simplesso singolare che soddisfa la seguente condizione: per ogni $q \in \Delta^k$, la restrizione di $T_k(s)$ al segmento di estremi e_0 e $r(q)$ è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica di $\widetilde{M}$ di estremi x_0 e $s(q)$. $\square$