

Volume simpliciale

Norma e seminorma ℓ^1

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Norma ℓ^1 su $C_n(X)$

$$\left\| \sum a_i s_i \right\|_1 = \sum |a_i| \in (0, +\infty)$$

Seminorma ℓ^1 su $H_n(X)$

$$\|\alpha\|_1 = \inf \{ \|c\|_1 : c \in Z_n(X), [c] = \alpha \} \in [0, +\infty)$$

Volume simpliciale

Classe fondamentale

Sia M una n -varietà chiusa orientata.

- ▶ $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
- ▶ L'orientazione fissa un generatore $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M, \mathbb{Z})$.
- ▶ Il cambio di coefficienti $C_{\bullet}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{\bullet}(M, \mathbb{R})$ induce

$$H_{\bullet}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{\bullet}(M, \mathbb{R})$$

$$[M]_{\mathbb{Z}} \longmapsto [M]_{\mathbb{R}} = [M].$$

Volume simpliciale

Definizione

Definizione

Sia M una n -varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1.$$

- ▶ Non dipende dall'orientazione \implies è ben definito per varietà chiuse orientabili.
- ▶ Può essere nullo, anche se $[M] \neq 0$.

Volume simpliciale

Principio di proporzionalità

Teorema

Sia M una varietà Riemanniana chiusa.

Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M .

Volume simpliciale

Principio di proporzionalità

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema

Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva.
Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)} = \frac{1}{\|[\text{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G\|_\infty}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M .

Applicazioni

Limitazione del grado

Proposizione

Siano M, N n -varietà chiuse orientate, $f: M \rightarrow N$ una funzione continua di grado d . Allora

$$|d| \cdot \|N\| \leq \|M\|.$$

Corollario

Sia $f: M \rightarrow M$ di grado $d \geq 2$. Allora $\|M\| = 0$.

Applicazioni

Varietà euclidee

- ▶ L' n -toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\|(S^1)^n\| = 0$.
- ▶ $(S^1)^n$ ammette una metrica piatta, con rivestimento universale isometrico a \mathbb{R}^n .
- ▶ Data una qualunque n -varietà chiusa euclidea M , vale

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)} = \frac{\|(S^1)^n\|}{\text{Vol}((S^1)^n)} = 0$$

da cui $\|M\| = 0$.

Applicazioni

Varietà iperboliche

Teorema

Sia M una n -varietà chiusa iperbolica. Allora

$$\|M\| = \frac{\text{Vol}(M)}{v_n},$$

dove v_n è il volume dell' n -simpleso ideale regolare in \mathbb{H}^n .

Corollario

Una varietà chiusa M non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.

Applicazioni

Mappe fra superfici

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g .

- ▶ Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$
- ▶ Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\text{Vol}(\Sigma_g)}{v_2} = -\frac{2\pi\chi(\Sigma_g)}{\pi} = 4g - 4.$$

- ▶ Sia $f: \Sigma_{g_1} \rightarrow \Sigma_{g_2}$, con $g_1 \geq 1$, $g_2 \geq 2$. Allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{\|\Sigma_{g_1}\|}{\|\Sigma_{g_2}\|} = \frac{g_1 - 1}{g_2 - 1}.$$

Principio di proporzionalità

Norma e seminorma ℓ^∞

Sia X uno spazio topologico

$$\dots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta^n} C^n(X) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \dots$$

Norma ℓ^∞ su $C^n(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{ |\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1 \} \in (0, +\infty]$$

Seminorma ℓ^∞ su $H^n(X)$

$$\|\beta\|_\infty = \inf \{ \|\varphi\|_\infty : \varphi \in Z^n(X), [\varphi] = \beta \} \in [0, +\infty]$$

Principio di proporzionalità

Dualità

Il prodotto di Kronecker è l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned}\langle -, - \rangle : H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [z]) &\longmapsto \varphi(z).\end{aligned}$$

Proposizione

Sia $\alpha \in H_n(X)$. Allora

$$\|\alpha\|_1 = \max \{ \langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1 \}.$$

Principio di proporzionalità

Coclasse fondamentale

Sia M una n -varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale.

- Esiste un'unica classe $[M]^* \in H^n(M)$ tale che

$$\langle [M]^*, [M] \rangle = 1.$$

- Per dualità, vale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}.$$

Principio di proporzionalità

Coomologia Γ -invariante

- ▶ Sia M una n -varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- ▶ Sia $p: \tilde{M} \rightarrow M$ il rivestimento universale.
- ▶ Sia $\Gamma = \pi_1(M)$ identificato con $\text{Aut}(\tilde{M}, p)$.

Γ agisce sul complesso di cocatene $C^\bullet(\tilde{M})$.

Proposizione

Il rivestimento p induce isomorfismi isometrici

$$\begin{aligned} p^\bullet: C^\bullet(M) &\longrightarrow C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma, \\ H^\bullet(p^\bullet): H^\bullet(M) &\longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma). \end{aligned}$$

Principio di proporzionalità

Curvatura non negativa

Teorema (Cartan-Hadamard)

La mappa esponenziale

$$\exp_x: T_x\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$$

è un diffeomorfismo

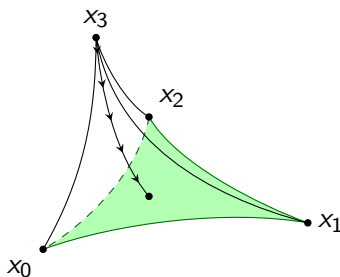
- ▶ \tilde{M} è diffeomorfo a \mathbb{R}^n .
- ▶ Per ogni $x, y \in \tilde{M}$ esiste un'unica geodetica che li collega.
- ▶ Le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo liscio dagli estremi.

Principio di proporzionalità

Mappa di raddrizzamento

Il teorema di Cartan-Hadamard permette di definire il *simplezzo dritto* di vertici $x_0, \dots, x_k \in \tilde{M}$.

- ▶ $k = 0 \rightsquigarrow [x_0]$ è lo 0-simplezzo avente immagine x_0 .
- ▶ $k > 0 \rightsquigarrow [x_0, \dots, x_k]$ è il “cono geodetico” di vertice x_k e base $[x_0, \dots, x_{k-1}]$.



Principio di proporzionalità

Mappa di raddrizzamento

Per ogni k -simpleso singolare $s: \Delta^k \rightarrow \tilde{M}$ definiamo il simpleso

$$\widetilde{\text{str}}_k(s) = [s(e_0), \dots, s(e_k)].$$

- ▶ $\widetilde{\text{str}}_\bullet: C_\bullet(\tilde{M}) \rightarrow C_\bullet(\tilde{M})$ è un morfismo di complessi Γ -equivariante.
- ▶ Induce $\text{str}_\bullet: C_\bullet(M) \rightarrow C_\bullet(M)$.
- ▶ Entrambi i morfismi sono omotopi all'identità.

▶ RIFARE

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

Per ogni n -simpleso $s: \Delta^n \rightarrow M$ definiamo

$$\text{Vol}_M(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_M.$$

- ▶ $\text{Vol}_M(d_{n+1}(s)) = 0$, dunque è un cociclo.
- ▶ Definisce una classe $[\text{Vol}_M] \in H^n(M)$ in coomologia.
- ▶ Vale $[\text{Vol}_M] = \text{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\text{Vol}(M)}{\|[\text{Vol}_M]\|_\infty}$$


Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

Vol_M

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

Vol_M

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$[\text{Vol}_M]$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M]$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

$$\text{Vol}_M \longmapsto \text{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$$[\text{Vol}_M]$$

$$\text{Vol}_{\tilde{M}}(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_{\tilde{M}}$$

Principio di proporzionalità

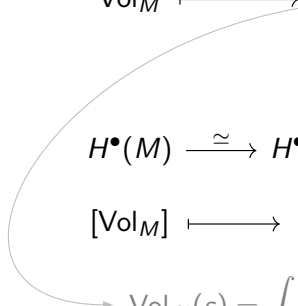
Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \longmapsto [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]^\Gamma$$


$$\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\tilde{M}}$$

Principio di proporzionalità

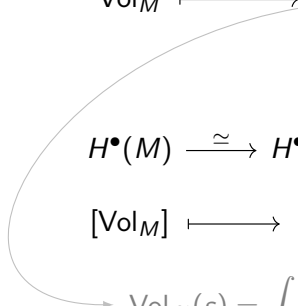
Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

$$\text{Vol}_M \longmapsto \text{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$$[\text{Vol}_M] \longmapsto [\text{Vol}_{\tilde{M}}]^\Gamma$$


$$\text{Vol}_{\tilde{M}}(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_{\tilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità


Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma \longleftrightarrow C^\bullet(\tilde{M})^G$$

$$\text{Vol}_M \longmapsto \text{Vol}_{\tilde{M}} \equiv \text{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$$[\text{Vol}_M] \longmapsto [\text{Vol}_{\tilde{M}}]^\Gamma$$


$$\text{Vol}_{\tilde{M}}(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_{\tilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità

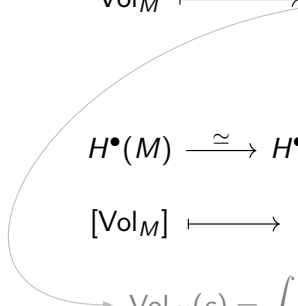
Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma \longleftrightarrow C^\bullet(\tilde{M})^G$$

$$\text{Vol}_M \longmapsto \text{Vol}_{\tilde{M}} \stackrel{=}{=} \text{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) \longleftarrow H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^G)$$

$$[\text{Vol}_M] \longmapsto [\text{Vol}_{\tilde{M}}]^\Gamma \longleftrightarrow [\text{Vol}_{\tilde{M}}]^G$$


$$\text{Vol}_{\tilde{M}}(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_{\tilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità

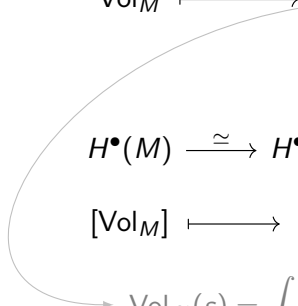
Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma \longleftrightarrow C^\bullet(\tilde{M})^G$$

$$\text{Vol}_M \longmapsto \text{Vol}_{\tilde{M}} \equiv \text{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) \xleftarrow{?} H^\bullet(C^\bullet(\tilde{M})^G)$$

$$[\text{Vol}_M] \longmapsto [\text{Vol}_{\tilde{M}}]^\Gamma \longleftrightarrow [\text{Vol}_{\tilde{M}}]^G$$


$$\text{Vol}_{\tilde{M}}(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_{\tilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità

Coomologia continua

Sia $S_k(M) = \{\Delta^k \rightarrow M\}$ lo spazio dei k -simpletti singolari, munito della topologia compatta-aperta.

Definizione

Una cocatena $\varphi \in C^k(M)$ è *continua* se la restrizione

$$\varphi: S_k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è continua.

- ▶ $C_c^\bullet(M)$ è un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$.
- ▶ Si pone $H_c^\bullet(M) = H^\bullet(C_c^\bullet(M))$.

Principio di proporzionalità

Coomologia continua

Proposizione

L'inclusione $C_c^\bullet(M) \hookrightarrow C^\bullet(M)$ induce un isomorfismo isometrico

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(M).$$

Proposizione

L'inclusione $C_c^\bullet(\tilde{M})^G \hookrightarrow C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$ induce un'immersione isometrica

$$H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G) \hookrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma).$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$C^\bullet(M)$$

$$\mathrm{Vol}_M$$

$$H^\bullet(M)$$

$$[\mathrm{Vol}_M]$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$C^\bullet(M) \longleftrightarrow C_c^\bullet(M)$$

$$\mathrm{Vol}_M \equiv \mathrm{Vol}_M$$

$$H^\bullet(M) \xleftarrow{\cong} H_c^\bullet(M)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \longleftarrow [\mathrm{Vol}_M]_c$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$C^\bullet(M) \longleftrightarrow C_c^\bullet(M) \xrightarrow{p^\bullet} C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \stackrel{=}{=} \mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \stackrel{\cong}{\longleftarrow} H_c^\bullet(M) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \longleftarrow [\mathrm{Vol}_M]_c \longmapsto [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$C^\bullet(M) \longleftrightarrow C_c^\bullet(M) \xrightarrow{p^\bullet} C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma \longleftrightarrow C_c^\bullet(\tilde{M})^G$$

$$\text{Vol}_M \xlongequal{\quad} \text{Vol}_M \longmapsto \text{Vol}_{\tilde{M}} \xlongequal{\quad} \text{Vol}_{\tilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xleftarrow{\cong} H_c^\bullet(M) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) \longleftrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G)$$

$$[\text{Vol}_M] \longleftarrow [\text{Vol}_M]_c \longmapsto [\text{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma \longleftarrow [\text{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$H^\bullet(M) \xleftarrow{\cong} H_c^\bullet(M) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) \longleftrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \longleftrightarrow [\mathrm{Vol}_M]_c \longmapsto [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma \longleftrightarrow [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$H^\bullet(M) \xleftarrow{\cong} H_c^\bullet(M) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) \xleftarrow{\quad} H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \xleftarrow{\quad} [\mathrm{Vol}_M]_c \xrightarrow{\quad} [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma \xleftarrow{\quad} [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$\begin{array}{ccccccc} H^\bullet(M) & \xleftarrow{\cong} & H_c^\bullet(M) & \xrightarrow{\cong} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) & \xleftarrow{\quad} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G) \\ [\mathrm{Vol}_M] & \xleftarrow{\quad} & [\mathrm{Vol}_M]_c & \xrightarrow{\quad} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma & \xleftarrow{\quad} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G \end{array}$$

Possiamo infine calcolare:

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$\begin{array}{ccccccc} H^\bullet(M) & \xleftarrow{\cong} & H_c^\bullet(M) & \xrightarrow{\cong} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) & \xleftarrow{\quad} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G) \\ [\mathrm{Vol}_M] & \xleftarrow{\quad} & [\mathrm{Vol}_M]_c & \xrightarrow{\quad} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma & \xleftarrow{\quad} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G \end{array}$$

Possiamo infine calcolare:

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$\begin{array}{ccccccc} H^\bullet(M) & \xleftarrow{\cong} & H_c^\bullet(M) & \xrightarrow{\cong} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) & \xleftarrow{\cong} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G) \\ [\mathrm{Vol}_M] & \xleftarrow{\cong} & [\mathrm{Vol}_M]_c & \xrightarrow{\cong} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma & \xleftarrow{\cong} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G \end{array}$$

Possiamo infine calcolare:

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty}$$

\uparrow
 $[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$\begin{array}{ccccccc} H^\bullet(M) & \xleftarrow{\cong} & H_c^\bullet(M) & \xrightarrow{\cong} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^\Gamma) & \xleftarrow{\cong} & H^\bullet(C_c^\bullet(\tilde{M})^G) \\ [\mathrm{Vol}_M] & \xleftarrow{\cong} & [\mathrm{Vol}_M]_c & \xrightarrow{\cong} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^\Gamma & \xleftarrow{\cong} & [\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G \end{array}$$

Possiamo infine calcolare:

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_{\tilde{M}}]_c^G\|_\infty}.$$