Principio di proporzionalità di Gromov

Studente
Filippo Gianni Baroni

Relatore
Prof. Roberto Frigerio

Scuola Normale Superiore

14 maggio 2020

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Norma ℓ^1 su $C_n(X)$

$$\left\| \sum a_i s_i \right\|_1 = \sum |a_i| \in [0, +\infty)$$

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Norma ℓ^1 su $C_n(X)$

$$\left\| \sum a_i s_i \right\|_1 = \sum |a_i| \in [0, +\infty)$$

Seminorma ℓ^1 su $H_n(X)$

$$\|\alpha\|_1 = \inf \{ \|c\|_1 : c \in Z_n(X), [c] = \alpha \} \in [0, +\infty)$$

Sia M una n-varietà chiusa orientata.

Sia M una n-varietà chiusa orientata.

- $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Sia M una n-varietà chiusa orientata.

- $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
- L'orientazione fissa un generatore $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M, \mathbb{Z})$.

Sia M una n-varietà chiusa orientata.

- $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
- L'orientazione fissa un generatore $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M, \mathbb{Z})$.
- Il cambio di coefficienti $C_\bullet(M, \mathbb{Z}) \to C_\bullet(M, \mathbb{R})$ induce

$$\begin{aligned} H_\bullet(M, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_\bullet(M, \mathbb{R}) \\ [M]_{\mathbb{Z}} &\longmapsto [M]_{\mathbb{R}} = [M]. \end{aligned}$$

Definizione

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 .$$

Definizione

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 .$$

- Non dipende dall'orientazione $\implies$ è ben definito per varietà chiuse orientabili.

Definizione

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 .$$

- Non dipende dall'orientazione $\implies$ è ben definito per varietà chiuse orientabili.
- Può essere nullo, anche se $[M] \neq 0$.

Teorema (Gromov)

Sia M una varietà Riemanniana chiusa.
Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema (Gromov)

Sia M una varietà Riemanniana chiusa.
Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema (Gromov)

Sia M una varietà Riemanniana chiusa <u>con curvatura non positiva</u>. Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema (Gromov)

Sia M una varietà Riemanniana chiusa <u>con curvatura non positiva</u>. Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{1}{\left\| [\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \right\|_\infty}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Proposizione

Siano M, N n-varietà chiuse orientate, $f : M \to N$ una funzione continua di grado d. Allora

$$|d| \cdot \|N\| \leq \|M\| .$$

Proposizione

Siano M, N n-varietà chiuse orientate, $f\colon M \to N$ una funzione continua di grado d. Allora

$$|d| \cdot \|N\| \leq \|M\| .$$

Corollario

Sia $f\colon M \to M$ di grado $d \geq 2$. Allora $\|M\| = 0$.

- L'n-toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\left\|(S^1)^n\right\| = 0$.

- L'n-toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\left\|(S^1)^n\right\| = 0$.
- $(S^1)^n$ ammette una metrica euclidea, con rivestimento universale isometrico a $\mathbb{R}^n$.

- L'n-toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\left\|(S^1)^n\right\| = 0$.
- $(S^1)^n$ ammette una metrica euclidea, con rivestimento universale isometrico a $\mathbb{R}^n$.
- Data una qualunque n-varietà chiusa euclidea M, vale

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\left\|(S^1)^n\right\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)}$$

- L'n-toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\left\|(S^1)^n\right\| = 0$.
- $(S^1)^n$ ammette una metrica euclidea, con rivestimento universale isometrico a $\mathbb{R}^n$.
- Data una qualunque n-varietà chiusa euclidea M, vale

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\left\|(S^1)^n\right\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)} = 0$$

da cui $\|M\| = 0$.

Teorema

Sia M una n-varietà chiusa iperbolica. Allora

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n}$$

dove v_n è il volume dell'n-simplesso ideale regolare in $\mathbb{H}^n$.

Teorema
Sia M una n-varietà chiusa iperbolica. Allora

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n} > 0$$

dove v_n è il volume dell'n-simplesso ideale regolare in $\mathbb{H}^n$.

Corollario

Una varietà chiusa M non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.

Corollario

Una varietà chiusa M non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.

Corollario

Se M, N sono varietà iperboliche e $f : M \to N$ è una funzione continua, allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{\|M\|}{\|N\|}$$

Corollario

Una varietà chiusa M non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.

Corollario

Se M, N sono varietà iperboliche e $f : M \to N$ è una funzione continua, allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{\|M\|}{\|N\|} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(N)}.$$

principio di proporzionalità

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$. $\longleftarrow$ $\Sigma_0 = S^2$, $\Sigma_1 = S^1 \times S^1$

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_g)}{v_2}$$

area del triangolo
ideale in $\mathbb{H}^2$

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

Gauss-Bonnet

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_g)}{v_2}$$

area del triangolo
ideale in $\mathbb{H}^2$

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

Gauss-Bonnet

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_g)}{v_2} = -\frac{2\pi\chi(\Sigma_g)}{\pi}$$

area del triangolo ideale in $\mathbb{H}^2$

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

Gauss-Bonnet

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_g)}{v_2} = -\frac{2\pi\chi(\Sigma_g)}{\pi} = 4g - 4$$

area del triangolo ideale in $\mathbb{H}^2$

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, $\|\Sigma_g\| = 4g - 4$.
- Sia $f \colon \Sigma_{g_1} \to \Sigma_{g_2}$ con $g_1 \geq 1$, $g_2 \geq 2$.

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$.
- Per $g \geq 2$, $\|\Sigma_g\| = 4g - 4$.
- Sia $f\colon \Sigma_{g_1} \to \Sigma_{g_2}$ con $g_1 \geq 1$, $g_2 \geq 2$. Allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{g_1 - 1}{g_2 - 1} = \frac{\chi(\Sigma_{g_1})}{\chi(\Sigma_{g_2})}.$$

Sia X uno spazio topologico.

$$\ldots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta^{n}} C^{n}(X) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \ldots$$

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta^{n}} C^{n}(X) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \dots$$

Norma ℓ^∞ su $C^n(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{|\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1\} \in [0, +\infty]$$

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta^{n}} C^{n}(X) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \dots$$

Norma ℓ^∞ su $C^n(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1\} \in [0, +\infty]$$

Seminorma ℓ^∞ su $H^n(X)$

$$\|\beta\|_\infty = \inf\{\|\varphi\|_\infty : \varphi \in Z^n(X), [\varphi] = \beta\} \in [0, +\infty]$$

Il prodotto di Kronecker è l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \langle -,- \rangle \colon H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\quad [\varphi] \quad , \quad [c] \quad) &\longmapsto \varphi(c). \end{aligned}$$

Il prodotto di Kronecker è l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle \colon H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\ [\varphi] \ , \ [c] \ ) &\longmapsto \varphi(c). \end{aligned}$$

Proposizione

Sia $\alpha \in H_n(X)$. Allora

$$\|\alpha\|_1 = \max \left\{ \langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale.

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale.

- Esiste un'unica classe $[M]^* \in H^n(M)$ tale che

$$\langle [M]^*, [M] \rangle = 1.$$

$H_n(M) \simeq \mathbb{R}$
$H^n(M) \simeq \mathbb{R}$

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale.

- Esiste un'unica classe $[M]^* \in H^n(M)$ tale che
$$\langle [M]^*, [M] \rangle = 1.$$
- Per dualità, vale
$$\|M\| = \|[M]\|_1 = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}.$$

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale.

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale.
- Sia $\Gamma = \pi_1(M)$ identificato con $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}, p) < \mathrm{Isom}^+(\widetilde{M})$.

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale.
- Sia $\Gamma = \pi_1(M)$ identificato con $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}, p)$.

Γ agisce sul complesso di cocatene $C^\bullet(\widetilde{M})$.

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale.
- Sia $\Gamma = \pi_1(M)$ identificato con $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}, p)$.

Γ agisce sul complesso di cocatene $C^\bullet(\widetilde{M})$.

Proposizione

Il rivestimento p induce isomorfismi isometrici

$$p^\bullet\colon C^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale.
- Sia $\Gamma = \pi_1(M)$ identificato con $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}, p)$.

Γ agisce sul complesso di cocatene $C^\bullet(\widetilde{M})$.

Proposizione

Il rivestimento p induce isomorfismi isometrici

$$p^\bullet\colon C^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$
$$H^\bullet(p^\bullet)\colon H^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Teorema (Cartan-Hadamard)

La mappa esponenziale

$$\exp_x \colon T_x\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$

è un diffeomorfismo.

Teorema (Cartan-Hadamard)

La mappa esponenziale

$$\exp_x \colon T_x\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$

è un diffeomorfismo.

- $\widetilde{M}$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Cartan-Hadamard)

La mappa esponenziale

$$\exp_x \colon T_x\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$

è un diffeomorfismo.

- $\widetilde{M}$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- Per ogni $x, y \in \widetilde{M}$ esiste un'unica geodetica che li collega.

Teorema (Cartan-Hadamard)

La mappa esponenziale

$$\exp_x\colon T_x\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$

è un diffeomorfismo.

- $\widetilde{M}$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- Per ogni $x, y \in \widetilde{M}$ esiste un'unica geodetica che li collega.
- Le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo liscio dagli estremi.

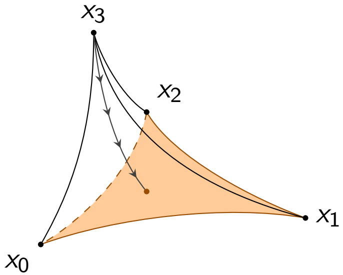
Il teorema di Cartan-Hadamard permette di definire il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \ldots, x_k \in \widetilde{M}$.

Il teorema di Cartan-Hadamard permette di definire il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \dots, x_k \in \widetilde{M}$.

- $k = 0 \rightsquigarrow [x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.

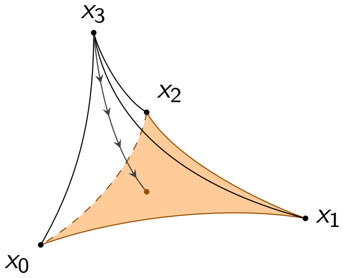
Il teorema di Cartan-Hadamard permette di definire il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \dots, x_k \in \widetilde{M}$.

- $k = 0 \rightsquigarrow [x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- $k > 0 \rightsquigarrow [x_0, \dots, x_k]$ è il "cono geodetico" di vertice x_k e base $[x_0, \dots, x_{k-1}]$.



Il teorema di Cartan-Hadamard permette di definire il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \ldots, x_k \in \widetilde{M}$.

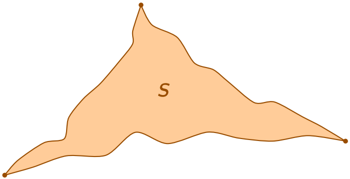
- $k = 0 \rightsquigarrow [x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- $k > 0 \rightsquigarrow [x_0, \ldots, x_k]$ è il "cono geodetico" di vertice x_k e base $[x_0, \ldots, x_{k-1}]$.



I simplessi dritti sono lisci.

Principio di proporzionalità

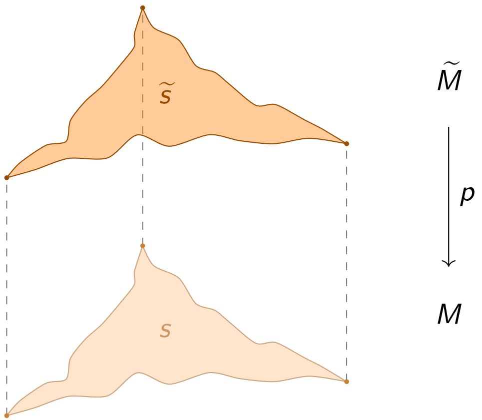
Mappa di raddrizzamento

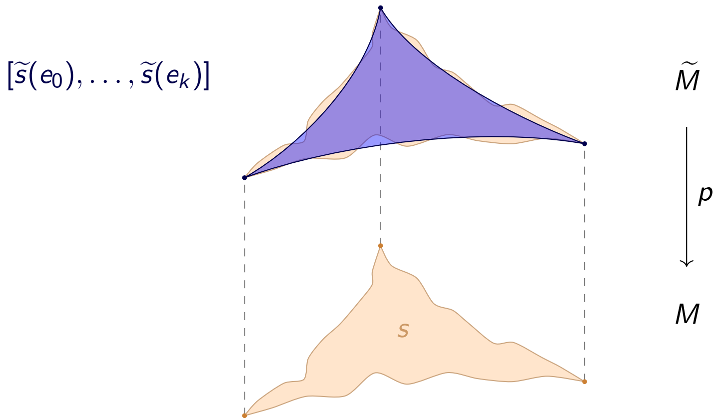


$$\widetilde{M} \xrightarrow{p} M$$

Principio di proporzionalità

Mappa di raddrizzamento

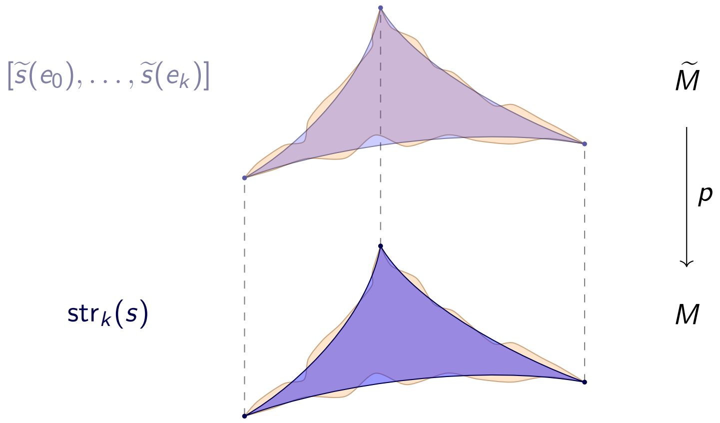




$[\widetilde{s}(e_0), \ldots, \widetilde{s}(e_k)]$
$\widetilde{M}$
p
M
s

Principio di proporzionalità

Mappa di raddrizzamento



Per ogni n-simplesso $s\colon \Delta^n \to M$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

Per ogni n-simplesso $s\colon \Delta^n \to M$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

Stokes

- $\mathrm{Vol}_M(d_{n+1}(s)) = 0$, dunque è un cociclo.

Per ogni n-simplesso $s\colon \Delta^n \to M$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M .$$

- $\mathrm{Vol}_M(d_{n+1}(s)) = 0$, dunque è un cociclo.
- Definisce una classe $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ in coomologia.

Per ogni n-simplesso $s\colon \Delta^n \to M$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

- $\mathrm{Vol}_M(d_{n+1}(s)) = 0$, dunque è un cociclo.
- Definisce una classe $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ in coomologia.
- Vale $[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

Per ogni n-simplesso $s\colon \Delta^n \to M$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

- $\mathrm{Vol}_M(d_{n+1}(s)) = 0$, dunque è un cociclo.
- Definisce una classe $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ in coomologia.
- Vale $[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty}$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

Vol_M

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M]$$

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M]$$

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M]$$

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}}$$

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \longmapsto \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}}$$

$$C^\bullet(M) \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_M \longmapsto \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$$

$$H^\bullet(M) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

$$[\mathrm{Vol}_M] \longmapsto \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma$$

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$\begin{tikzcd} C^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma & C^\bullet(\widetilde{M})^G \arrow[l, hook'] \\ \mathrm{Vol}_M \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \arrow[r, equal] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H^\bullet(M) \arrow[r, "\simeq"] & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \\ [\mathrm{Vol}_M] \arrow[r, mapsto] & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$
\begin{array}{ccccc}
C^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma & \hookleftarrow & C^\bullet(\widetilde{M})^G \\
\mathrm{Vol}_M & \longmapsto & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} & = & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
H^\bullet(M) & \xrightarrow{\simeq} & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) & \longleftarrow & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma & \longleftarrow & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G
\end{array}
$$

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}} \implies \text{è } G\text{-invariante}$$

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$
\begin{tikzcd}
C^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma & C^\bullet(\widetilde{M})^G \arrow[l, hook'] \\
\mathrm{Vol}_M \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \arrow[r, equal] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \\
H^\bullet(M) \arrow[r, "\simeq"] & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^G) \arrow[l] \\
[\mathrm{Vol}_M] \arrow[r, mapsto] & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

non dipende da M

Principio di proporzionalità

Cociclo volume

$$\begin{tikzcd} C^\bullet(M) \arrow[r, "p^\bullet", "\simeq"'] & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma & C^\bullet(\widetilde{M})^G \arrow[l, hook'] \\ \mathrm{Vol}_M \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \arrow[r, equal] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H^\bullet(M) \arrow[r, "\simeq"] & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^G) \arrow[l, "?"'] \\ {[\mathrm{Vol}_M]} \arrow[r, mapsto] & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

Principio di proporzionalità
Cociclo volume

$$
\begin{array}{ccccc}
C^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma & \longleftarrow\!\!\!\rhook & C^\bullet(\widetilde{M})^G \\
\mathrm{Vol}_M & \longmapsto & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} & = & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H^\bullet(M) \arrow[r, "\simeq"] & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \arrow[r, bend left, "?"] & H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^G) \arrow[l] \\
{[\mathrm{Vol}_M]} \arrow[r, mapsto] & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Sia $S_k(M) = \{s\colon \Delta^k \to M\}$ lo spazio dei k-simplessi singolari, munito della topologia compatta-aperta.

Sia $S_k(M) = \{s \colon \Delta^k \to M\}$ lo spazio dei k-simplessi singolari, munito della topologia compatta-aperta.

Definizione

Una cocatena $\varphi \in C^k(M)$ si dice *continua* se la restrizione

$$\varphi \colon S_k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è continua.

Sia $S_k(M) = \{s\colon \Delta^k \to M\}$ lo spazio dei k-simplessi singolari, munito della topologia compatta-aperta.

Definizione

Una cocatena $\varphi \in C^k(M)$ si dice *continua* se la restrizione

$$\varphi\colon S_k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è continua.

- Si definisce $C^k_c(M) = \{\varphi \in C^k(M) : \varphi \text{ è continua}\}$.
- $C^\bullet_c(M)$ è un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$.

Sia $S_k(M) = \{s\colon \Delta^k \to M\}$ lo spazio dei k-simplessi singolari, munito della topologia compatta-aperta.

Definizione

Una cocatena $\varphi \in C^k(M)$ si dice *continua* se la restrizione

$$\varphi\colon S_k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è continua.

- Si definisce $C^k_c(M) = \{\varphi \in C^k(M) : \varphi \text{ è continua}\}$.
- $C^\bullet_c(M)$ è un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$.
- Si pone $H^\bullet_c(M) = H^\bullet(C^\bullet_c(M))$.

Proposizione

L'inclusione $C_c^\bullet(M) \hookrightarrow C^\bullet(M)$ induce un isomorfismo isometrico

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(M).$$

Proposizione

L'inclusione $C_c^\bullet(M) \hookrightarrow C^\bullet(M)$ induce un isomorfismo isometrico

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(M).$$

Proposizione

L'inclusione $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G \hookrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ induce un'immersione isometrica

$$H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longhookrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$C^\bullet(M)$

Vol_M

$H^\bullet(M)$

$[\mathrm{Vol}_M]$

$$\begin{array}{ccc} C^\bullet(M) & \hookleftarrow & C^\bullet_c(M) \\ \mathrm{Vol}_M & = & \mathrm{Vol}_M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(M) & \xleftarrow{\simeq} & H^\bullet_c(M) \\ [\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c \end{array}$$

Principio di proporzionalità

Isomorfismi isometrici

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet(M) & C_c^\bullet(M) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "p^\bullet"] & C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \\
\mathrm{Vol}_M \arrow[r, equal] & \mathrm{Vol}_M \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}
\end{tikzcd}$$

anche in $H_c^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
H^\bullet(M) & H_c^\bullet(M) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \\
{[\mathrm{Vol}_M]} & {[\mathrm{Vol}_M]_c} \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & {\left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^\Gamma}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
C^\bullet(M) & \hookleftarrow & C^\bullet_c(M) & \xrightarrow{p^\bullet} & C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma & \hookleftarrow & C^\bullet_c(\widetilde{M})^G \\
\mathrm{Vol}_M & = & \mathrm{Vol}_M & \longmapsto & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} & = & \mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^\bullet(M) & \xleftarrow{\simeq} & H^\bullet_c(M) & \xrightarrow{\simeq} & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma) & \hookleftarrow & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^\Gamma & \longleftarrow\!\shortmid & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^G
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^\bullet(M) & \xleftarrow{\ \simeq\ } & H^\bullet_c(M) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma) & \hookleftarrow & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma_c & \longleftarrow\!\shortmid & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G_c
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^\bullet(M) & \xleftarrow{\simeq} & H_c^\bullet(M) & \xrightarrow{\simeq} & H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) & \hookleftarrow & H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^\Gamma & \longleftarrow\!\shortmid & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^G
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^\bullet(M) & \xleftarrow{\ \simeq\ } & H_c^\bullet(M) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) & \hookleftarrow & H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^\Gamma & \longleftarrow\!\shortmid & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]_c^G
\end{array}
$$

Possiamo infine calcolare:

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^\bullet(M) & \xleftarrow{\ \simeq\ } & H^\bullet_c(M) & \xrightarrow{\ \simeq\ } & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma) & \hookleftarrow & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma_c & \longleftarrow\!\shortmid & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G_c
\end{array}
$$

Possiamo infine calcolare:

$$
\|M\| \underset{\text{dualità}}{=} \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} \underset{[Vol_M] = \mathrm{Vol}(M)\cdot[M]^*}{=} \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^\bullet(M) & \xleftarrow{\simeq} & H^\bullet_c(M) & \xrightarrow{\simeq} & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma) & \hookleftarrow & H^\bullet(C^\bullet_c(\widetilde{M})^G) \\
[\mathrm{Vol}_M] & \longleftarrow\!\shortmid & [\mathrm{Vol}_M]_c & \longmapsto & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^\Gamma_c & \longleftarrow\!\shortmid & \left[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}\right]^G_c
\end{array}
$$

Possiamo infine calcolare:

$$
\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]^G_c\right\|_\infty}.
$$

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

Principio di proporzionalità

Varietà iperboliche

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

- Il rivestimento universale è $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$.

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

- Il rivestimento universale è $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$.
- Obiettivo: stimare $\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty$.

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

- Il rivestimento universale è $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$.
- Obiettivo: stimare $\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty$.

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\mathbb{H}^n}$$

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

- Il rivestimento universale è $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$.
- Obiettivo: stimare $\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty$.
- I simplessi dritti sono *geodetici*.

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\mathbb{H}^n}$$

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

- Il rivestimento universale è $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$.
- Obiettivo: stimare $\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty$.
- I simplessi dritti sono *geodetici*.

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\mathbb{H}^n}$$

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

Sia M una n-varietà iperbolica chiusa.

- Il rivestimento universale è $\widetilde{M} = \mathbb{H}^n$.
- Obiettivo: stimare $\left\| [\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \right\|_\infty$.
- I simplessi dritti sono *geodetici*.

$$\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_{\mathbb{H}^n} \leq v_n$$

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

- Per ogni $x \in C_n(\mathbb{H}^n)$ vale

$$|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(c)| \leq v_n \cdot \|c\|_1 \implies \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty \leq v_n.$$

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

- Per ogni $x \in C_n(\mathbb{H}^n)$ vale

$$|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(c)| \leq v_n \cdot \|c\|_1 \implies \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty \leq v_n.$$

- Allora

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \leq \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty$$

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

- Per ogni $x \in C_n(\mathbb{H}^n)$ vale

$$|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(c)| \leq v_n \cdot \|c\|_1 \implies \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty \leq v_n.$$

- Allora

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \leq \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty \leq v_n.$$

Teorema

Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora

$$\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n,$$

dove v_n è il volume del n-simplesso regolare ideale.

- Per ogni $x \in C_n(\mathbb{H}^n)$ vale

$$|\,\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(c)| \leq v_n \cdot \|c\|_1 \implies \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty \leq v_n.$$

- Allora

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \leq \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty \leq v_n.$$

$$\|M\| \geq \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n}$$