Volume simpliciale

Norma e seminorma ℓ^1

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Norma ℓ^1 su $C_n(X)$

$$\left\| \sum a_i s_i \right\|_1 = \sum |a_i|$$

Seminorma ℓ^1 su $H_n(X)$

$$\|c\|_1 = \inf \{ \|z\|_1 : z \in Z_n(X), [z] = c \}$$

Volume simpliciale
Classe fondamentale

Sia M una n-varietà chiusa orientata.

- $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
- L'orientazione fissa un generatore $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M, \mathbb{Z})$.
- Il cambio di coefficienti $C_\bullet(M, \mathbb{Z}) \to C_\bullet(M, \mathbb{R})$ induce

$$\begin{aligned} H_\bullet(M\mathbb{Z}) &\longrightarrow H_\bullet(M, \mathbb{R}) \\ [M]_{\mathbb{Z}} &\longmapsto [M]_{\mathbb{R}} = [M]. \end{aligned}$$

Definizione

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 .$$

- Non dipende dall'orientazione $\Longrightarrow$ è ben definito per varietà chiuse orientabili.
- Può essere nullo, anche se $[M] \neq 0$.

Volume simpliciale

Principio di proporzionalità

Teorema

Sia M una varietà Riemanniana chiusa.
Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema

Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{1}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Proposizione

Siano M, N n-varietà chiuse orientate, $f\colon M \to N$ una funzione continua di grado d. Allora

$$|d| \cdot \|N\| \leq \|M\| .$$

Corollario

Sia $f\colon M \to M$ di grado $d \geq 2$. Allora $\|M\| = 0$.

- L'n-toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\left\|(S^1)^n\right\| = 0$.
- $(S^1)^n$ ammette una metrica piatta, con rivestimento universale isometrico a $\mathbb{R}^n$.
- Data una qualunque n-varietà chiusa euclidea M, vale

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\left\|(S^1)^n\right\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)} = 0$$

da cui $\|M\| = 0$.

Teorema
Sia M una n-varietà chiusa iperbolica. Allora

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n},$$

dove v_n è il volume dell'n-simplesso ideale regolare in $\mathbb{H}^n$.

Corollario
Una varietà chiusa M non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.

Applicazioni

Mappe fra superfici

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_g)}{v_2} = -\frac{2\pi\chi(\Sigma_g)}{\pi} = 4g - 4.$$

- Sia $f \colon \Sigma_{g_1} \to \Sigma_{g_2}$, con $g_1 \geq 1$, $g_2 \geq 2$. Allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{\|\Sigma_{g_1}\|}{\|\Sigma_{g_2}\|} = \frac{g_1 - 1}{g_2 - 1}.$$