

1 Coomologia continua

1.1 Definizioni

Riportiamo la definizione di topologia compatta-aperta e ne ricordiamo alcune utili proprietà.

Definizione 1.1. Siano X, Y spazi topologici, $F(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y . La *topologia compatta-aperta* su $F(X, Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi

$$V(K, U) = \{f \in F(X, Y) : f(K) \subseteq U\}$$

al variare di $K \subseteq X$ compatto e di $U \subseteq Y$ aperto.

Lemma 1.1. (i) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f: Y \rightarrow Z$, $g: X \rightarrow Y$ funzioni continue. Allora le applicazioni

$$f \circ -: F(X, Y) \longrightarrow F(X, Z), \quad - \circ g: F(Y, Z) \longrightarrow F(X, Z)$$

sono continue.

(ii) Siano X, Y spazi topologici con X localmente compatto e Hausdorff. Allora l'applicazione di valutazione

$$\begin{aligned} F(X, Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

In questa sezione, tutti moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno da intendersi a coefficienti in \mathbb{R} .

Sia M una n -varietà. Consideriamo sullo spazio $S_i(M) = F(\Delta^i, M)$ degli i -simplessi singolari la topologia compatta aperta.

Definizione 1.2. Una cocatena $\varphi \in C^i(M)$ si dice *continua* se la sua restrizione a $S_i(M)$ è continua.

Osserviamo che se $\varphi \in C^i(M)$ è continua, allora anche $\varphi \circ d \in C^{i+1}(M)$ lo è (grazie al lemma 1.1). Dunque le cocatene continue formano un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$, che denotiamo con $C_c^\bullet(M)$; indichiamo inoltre con $C_{b,c}^\bullet(M) = C_c^\bullet(M) \cap C_b^\bullet(M)$ il complesso delle cocatene continue limitate. I moduli di coomologia relativi ai complessi $C_c^\bullet(M)$ e $C_{b,c}^\bullet$ saranno denotati, rispettivamente, con $H_c^\bullet(M)$ e $H_{b,c}^\bullet(M)$. Le inclusioni di complessi

$$i^\bullet: C_c^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(M), \quad i_b^\bullet: C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_b^\bullet(M)$$

inducono mappe in coomologia

$$H^\bullet(i^\bullet): H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \quad H_b^\bullet(i_b^\bullet): H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M).$$

In questa sezione ci domanderemo se queste mappe siano isomorfismi, dando risposta affermativa nel caso in cui M ammetta una metrica Riemanniana a curvatura non positiva.

1.2 Cocatene continue e moduli relativamente iniettivi

Sia M una n -varietà chiusa, $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ il suo rivestimento universale. Fissiamo un'identificazione di $\Gamma = \pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di p .

Ricordiamo che i moduli $C^i(\widetilde{M})$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{R}[\Gamma]$ -moduli. Osserviamo che per ogni $g \in \Gamma$ l'applicazione $g \cdot -: S_i(\widetilde{M}) \rightarrow S_i(\widetilde{M})$ è continua (grazie al lemma 1.1), dunque i moduli $C_c^i(\widetilde{M})$ ereditano per restrizione una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$ -moduli. Analogamente, i moduli $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ ereditano una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$ -moduli normati.

Lemma 1.2. *Esiste una funzione continua $h_{\widetilde{M}}: \widetilde{M} \rightarrow [0, 1]$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) *per ogni $x \in \widetilde{M}$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di x tale che l'insieme*

$$\{g \in \Gamma : g(W) \cap \text{supp } h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito;

(ii) *per ogni $x \in \widetilde{M}$ vale*

$$\sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g \cdot x) = 1.$$

Proposizione 1.3. *Per ogni $i \geq 0$, i moduli $C_c^i(\widetilde{M})$ e $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ sono relativamente iniettivi (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo normato).*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo relativamente iniettivo. Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$ -moduli, $\iota: A \rightarrow B$ una funzione Γ -lineare fortemente iniettiva con inversa sinistra \mathbb{R} -lineare $\sigma: B \rightarrow A$, $\alpha: A \rightarrow C_c^i(\widetilde{M})$ una funzione Γ -lineare.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightleftharpoons[\iota]{\sigma} & B \\ & & \downarrow \alpha & \swarrow \beta & \\ & & C_c^i(\widetilde{M}) & & \end{array}$$

Sia $h_{\widetilde{M}}$ una funzione come nel lemma 1.2. Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C_c^i(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione \mathbb{R} -lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}(b))))(s),$$

dove e_0, \dots, e_i sono i vertici del simpleso standard Δ^i . Osserviamo che, per le proprietà di $h_{\widetilde{M}}$, la somma su g è in realtà una somma finita, dunque $\beta(b)(s)$ è ben definito.

- **$\beta(b)$ è una cocatena continua.** Per definizione di $h_{\widetilde{M}}$, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di $s(e_0)$ tale che

$$\Gamma_s = \{g \in \Gamma : g^{-1}(W) \cap \text{supp } h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito. Allora per ogni $s' \in V(\{e_0\}, W)$ (che è un intorno di s in $S_i(\widetilde{M})$) vale

$$\beta(b)(s') = \sum_{g \in \Gamma_s} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s'(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot b)))(s'),$$

che è evidentemente continua in s' (grazie al lemma 1.1).

- **β è Γ -lineare.** Sia $g_0 \in \Gamma$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \beta(g_0 \cdot b)(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} g_0 \cdot b)))(s) \\ &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1} g_0^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g_0 k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(s) \\ &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}(g_0^{-1} \circ s)(e_0)) \cdot \alpha(k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(g_0^{-1} \circ s) \\ &= \beta(b)(g_0^{-1} \circ s) = (g_0 \cdot \beta(b))(s). \end{aligned}$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.** Sia $a \in A$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \beta(\iota(a))(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot \iota(a))))(s) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(\iota(g^{-1} \cdot a))))(s) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(a)(s) = \alpha(a)(s). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo relativamente iniettivo.

La stessa costruzione funziona anche per $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ nel contesto di $\mathbb{R}[\Gamma]$ -moduli normati: infatti, poiché $\|\sigma\| \leq 1$, si vede che $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$. Dunque $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo normato relativamente iniettivo. \square

1.3 Varietà con curvatura non positiva

Nonostante si possa proseguire anche con ipotesi meno restrittive, per semplicità ci limiteremo a considerare, da qui alla fine della sezione, varietà chiuse M che ammettano una metrica Riemanniana con curvatura non positiva.

In questo contesto, il teorema di Cartan-Hadamard garantisce che ogni coppia di punti $x, y \in \widetilde{M}$ siano collegati da un'unica geodetica; inoltre le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo continuo dagli estremi. Questo fatto permette di realizzare una procedura di raddrizzamento dei semplici singolari.

Definizione 1.3. Siano x_0, \dots, x_k punti di \widetilde{M} . Il *simpleso dritto* di vertici x_0, \dots, x_k è un simpleso singolare $[x_0, \dots, x_k] \in S_k(\widetilde{M})$ definito induttivamente come segue.

- Se $k = 0$, allora $[x_0]$ è lo 0-simpleso avente immagine x_0 .
- Se $k > 0$, allora $[x_0, \dots, x_k]$ è univocamente determinato dalla seguente condizione: per ogni $z \in \Delta^{k-1} \subseteq \Delta^k$, la restrizione di $[x_0, \dots, x_k]$ al segmento di estremi z e e_k è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che collega $[x_0, \dots, x_{k-1}](z)$ a x_k .

È facile vedere, grazie a Cartan-Hadamard, che la definizione è ben posta (ossia $[x_0, \dots, x_k]$ è una funzione continua). Notiamo inoltre che, essendo gli elementi di Γ isometrie di \widetilde{M} , vale l'identità

$$g \circ [x_0, \dots, x_k] = [g(x_0), \dots, g(x_k)]$$

per ogni $g \in \Gamma$.

È infine utile osservare che, essendo M e \widetilde{M} spazi metrici, la topologia compatta-aperta su $S_i(M)$ e $S_i(\widetilde{M})$ coincide con quella della convergenza uniforme.

1.4 Cocatene continue e risoluzioni forti di \mathbb{R}

Proposizione 1.4. *I complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ sono risoluzioni forti di \mathbb{R} (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo normato).*

Dimostrazione. Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Definiamo per ogni $i \geq 0$ un operatore \mathbb{R} -lineare $T_k: C_k(\widetilde{M}) \rightarrow C_{k+1}(\widetilde{M})$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} r: \quad \Delta^k &\longrightarrow \Delta^{k+1} \\ t_0 e_0 + \dots + t_k e_k &\longmapsto t_0 e_1 + \dots + t_k e_{k+1} \end{aligned}$$

che identifica Δ^k con la faccia di Δ^{k+1} opposta a e_0 . Dato un simpleso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$, definiamo $T_k(s) \in S_{k+1}(\widetilde{M})$ come l'unico simpleso singolare che soddisfa la seguente condizione: per ogni $q \in \Delta^k$, la restrizione di $T_k(s)$ al segmento di estremi e_0 e $r(q)$ è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica di \widetilde{M} di estremi x_0 e $s(q)$. Grazie al teorema di Cartan-Hadamard, è facile verificare che $T_k(s)$ è ben definito e continuo, e che l'applicazione $T_k: S_k(\widetilde{M}) \rightarrow S_{k+1}(\widetilde{M})$ è continua. Estendendo T_k per \mathbb{R} -linearità, si ottiene una mappa $T_k: C_k(\widetilde{M}) \rightarrow C_{k+1}(\widetilde{M})$. Definiamo infine $T_{-1}: \mathbb{R} \rightarrow C_0(\widetilde{M})$ come $T_{-1}(t) = t x_0$. Si verifica facilmente che $d_0 \circ T_{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ e che $T_{k-1} \circ d_k + d_{k+1} \circ T_k = \text{id}_{C_k(\widetilde{M})}$ per ogni $k \geq 0$.

Definiamo ora per ogni $k \geq 0$ l'applicazione

$$\begin{aligned} h^k: C_c^k(\widetilde{M}) &\longrightarrow C_c^{k-1}(\widetilde{M}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ T_{k-1}. \end{aligned}$$

Il fatto che i complessi siano esatti segue dal fatto che l'identità è omotopa a 0, giusto?

Osserviamo che $h^k(\varphi)$ è effettivamente una cocatena continua, poiché la restrizione di T_{k-1} a $S_{k-1}(\widetilde{M})$ è continua. Dunque la famiglia $\{h^k\}_{k \geq 0}$ fornisce un'omotopia fra l'identità del complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di \mathbb{R} come $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo.

Infine, è evidente che per ogni $\varphi \in C_b^k(\widetilde{M})$ vale $\|h^k(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$. Dunque le restrizioni $h^k: C_{b,c}^k(\widetilde{M}) \rightarrow C_{b,c}^{k-1}(\widetilde{M})$ forniscono un'omotopia fra l'identità del complesso $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di \mathbb{R} come $\mathbb{R}[\Gamma]$ -modulo normato. \square

1.5 Coomologia continua e coomologia singolare

Lemma 1.5. *Il morfismo di complessi $p^\bullet: C^\bullet(M) \rightarrow C^\bullet(\widetilde{M})$ induce per restrizione isomorfismi isometrici di complessi*

$$p^\bullet|_{C_c^\bullet(M)}: C_c^\bullet(M) \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma, \quad p^\bullet|_{C_{b,c}^\bullet(M)}: C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$

in quali a loro volta inducono isomorfismi isometrici in coomologia

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(C_c^\bullet(M)^\Gamma), \quad H_{b,c}^\bullet(M) \simeq H_{b,c}^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Proposizione 1.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora le applicazioni*

$$H^\bullet(i^\bullet): H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \quad H_b^\bullet(i_b^\bullet): H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M)$$

sono isomorfismi isometrici.

Dimostrazione. In questa sezione (proposizione 1.3 e proposizione 1.4) abbiamo mostrato che il complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ fornisce una risoluzione forte relativamente iniettiva di \mathbb{R} . Sappiamo (?THM? ??) che lo stesso vale per il complesso $C^\bullet(\widetilde{M})$. Poiché l'inclusione $j^\bullet: C_c^\bullet(\widetilde{M}) \rightarrow C^\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi che estende l'identità di \mathbb{R} , dalla ?THM? ?? otteniamo che

$$H^\bullet(j^\bullet): H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare.

Analogamente,

$$H_b^\bullet(j_b^\bullet): H_b^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H_b^\bullet(C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare. Poiché j^\bullet e j_b^\bullet sono 1-Lipschitz, lo stesso vale per $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$; per mostrare che si tratta di isometrie, è dunque sufficiente (di nuovo grazie alla ?THM? ??) esibire morfismi di complessi $\theta^\bullet: C^\bullet(\widetilde{M}) \rightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})$, $\theta_b^\bullet: C_b^\bullet(\widetilde{M}) \rightarrow C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ che siano 1-Lipschitz ed estendano l'identità di \mathbb{R} .

Che norma c'è su $C_c^\bullet(M)$?

Fare la dimostrazione.

Di nuovo, che norma c'è su $H^\bullet(M)$?

Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Per ogni $\varphi \in C^k(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo

$$\theta^k(\varphi)(s) = \sum_{(g_0, \dots, g_k) \in \Gamma^{k+1}} h_{\widetilde{M}}(g_0^{-1}(s(e_0))) \cdots h_{\widetilde{M}}(g_k^{-1}(s(e_k))) \cdot \varphi([g_0(x_0), \dots, g_k(x_0)]),$$

dove $h_{\widetilde{M}}: \widetilde{M} \rightarrow [0, 1]$ è data dal lemma 1.2. Grazie alle proprietà di $h_{\widetilde{M}}$ è facile verificare che $\theta(\varphi)$ (una volta estesa per \mathbb{R} -linearità) definisce un elemento di $C_c^k(\widetilde{M})$, e che θ^\bullet risulta essere un morfismo 1-Lipschitz di complessi di $\mathbb{R}[\Gamma]$ moduli che estende l'identità di \mathbb{R} .

Abbiamo dunque mostrato che le mappe $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$ sono isomorfismi isometrici. Dai seguenti diagrammi commutativi di complessi

$$\begin{array}{ccc} C_c^\bullet(M) & \xrightarrow[p \simeq]{\bullet} & C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \\ \downarrow i^\bullet & & \downarrow j^\bullet \\ C^\bullet(M) & \xrightarrow[p \simeq]{\bullet} & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_{b,c}^\bullet(M) & \xrightarrow[p \simeq]{\bullet} & C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \\ \downarrow i_b^\bullet & & \downarrow j_b^\bullet \\ C_b^\bullet(M) & \xrightarrow[p \simeq]{\bullet} & C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{array}$$

(in cui le frecce orizzontali sono isomorfismi isometrici per il lemma 1.5) segue che anche $H^\bullet(i^\bullet)$ e $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$ sono isomorfismi isometrici. \square

2 Principio di proporzionalità di Gromov

2.1 Mappa di restrizione

Utilizziamo le notazioni della sezione precedente, continuando a supporre che M sia una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Sia G il gruppo delle isometrie di \widetilde{M} che preservano l'orientazione. È ben noto che G ammette una struttura di gruppo di Lie che induce la topologia compatta-aperta. Di conseguenza esiste una misura di Borel regolare invariante a sinistra su G (*misura di Haar*), unica a meno di riscalamento.

Poiché Γ è un sottogruppo discreto di G e $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ è compatta, esiste un insieme misurabile $F \subseteq G$ relativamente compatto tale che $\{\gamma \cdot F\}_{\gamma \in \Gamma}$ definisca una partizione localmente finita di G . In particolare, Γ è cocompatto in G , pertanto la misura di Haar è anche invariante a destra. D'ora in poi supporremo che tale misura sia riscalata in modo che F abbia misura 1.

Reference please.

Definizione 2.1. Indichiamo con $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ il complesso delle cocatene continue G -invarianti. L'inclusione di complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G \rightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ induce una mappa in coomologia

$$\text{res}^\bullet : H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

detta *mappa di restrizione*.

Osserviamo che, considerando su $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ e $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$ le seminorme indotte rispettivamente da $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ e $C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$, la mappa di restrizione risulta 1-Lipschitz.

Ci proponiamo ora di costruire un'inversa sinistra 1-Lipschitz di res^\bullet . Indichiamo con μ_G la misura di Haar su G . Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ definiamo

$$\text{trans}^i(\varphi)(s) = \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g).$$

Si tratta di una buona definizione, poiché $\varphi(- \cdot s)$ è una funzione continua da G in \mathbb{R} e F è relativamente compatto. Estendendo $\text{trans}^i(\varphi)$ per linearità, otteniamo un elemento di $C^i(\widetilde{M})$.

Proposizione 2.1. Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ valgono le seguenti proprietà.

- (i) La cocatena $\text{trans}^i(\varphi)$ è continua.
- (ii) Vale $\text{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1}) = \text{trans}^i(\varphi) \circ d^{i+1}$.
- (iii) Se φ è Γ -invariante, allora $\text{trans}^i(\varphi)$ è G -invariante.
- (iv) Se φ è G -invariante, allora $\text{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

Dimostrazione.

- (i) Osserviamo innanzitutto che la topologia compatta-aperta su $S_i(\widetilde{M})$ è indotta dalla distanza

$$\text{dist}(s, s') = \sup\{\text{dist}_{\widetilde{M}}(s(x), s'(x)) : x \in \Delta^i\}.$$

Sia $s_0 \in S_i(\widetilde{M})$, e sia $\epsilon > 0$. Poiché \overline{F} è compatto in G , dal lemma 1.1 si ottiene immediatamente che $\overline{F} \cdot s_0$ è compatto in $S_i(\widetilde{M})$. Dalla continuità di φ segue facilmente l'esistenza di un $\eta > 0$ tale che per ogni $s \in \overline{F} \cdot s_0$ e per ogni $s' \in S_i(\widetilde{M})$ con $\text{dist}(s, s') < \eta$ valga $|\varphi(s) - \varphi(s')| \leq \epsilon$. Sia dunque $s \in S_i(\widetilde{M})$ tale che $\text{dist}(s_0, s) < \eta$. Poiché G agisce su $S_i(\widetilde{M})$ in modo isometrico, allora anche $\text{dist}(g \cdot s_0, g \cdot s) < \eta$ per ogni $g \in G$. Ma allora

$$|\text{trans}^i(\varphi)(s) - \text{trans}^i(\varphi)(s_0)| \leq \int_F |\varphi(g \cdot s) - \varphi(g \cdot s_0)| d\mu_G(g) \leq \epsilon \mu_G(F) = \epsilon$$

dunque $\text{trans}^i(\varphi)$ è continua.

- (ii) Sia $s \in S_{i+1}(\widetilde{M})$, e siano $a_0, \dots, a_{i+1} \in \mathbb{R}$, $s_0, \dots, s_{i+1} \in S_i(\widetilde{M})$ tali che

$$d^{i+1}(s) = \sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j.$$

Osserviamo che

$$d^{i+1}(g \cdot s) = \sum_{j=0}^r a_j (g \cdot s_j),$$

per ogni $g \in G$, da cui

$$\begin{aligned} \text{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1})(s) &= \int_F \varphi(d^{i+1}(g \cdot s)) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \int_F \varphi(g \cdot s_j) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \text{trans}^i(\varphi)(s_j) \\ &= \text{trans}^i(\varphi) \left(\sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j \right) = \text{trans}^i(\varphi)(d^{i+1}s). \end{aligned}$$

- (iii) Fissiamo $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$, $s \in S_i(\widetilde{M})$, $g_0 \in G$. Poiché F è relativamente compatto, lo sono anche $F \cdot g_0$ e $F \cdot g_0^{-1}$, dunque esistono un numero finito di elementi $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$ tali che

$$F \cdot g_0 \subseteq \bigsqcup_{j=1}^r \gamma_j \cdot F \quad \text{e} \quad F \cdot g_0^{-1} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^r \gamma_j^{-1} \cdot F.$$

Posto $F_j = (\gamma_j^{-1} \cdot F \cdot g_0) \cap F$ si ottiene immediatamente che

$$F = \bigsqcup_{j=1}^r F_j \quad \text{e} \quad F \cdot g_0 = \bigsqcup_{j=1}^r \gamma_j \cdot F_j.$$

Sfruttando il fatto che μ_G è invariante a destra e a sinistra e che φ è Γ -invariante si ottiene

$$\begin{aligned} \text{trans}^i(\varphi)(g_0 \cdot s) &= \int_F \varphi(g g_0 \cdot s) d\mu_G(g) \\ &= \int_{F \cdot g_0} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{j=1}^r \int_{\gamma_j \cdot F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{j=1}^r \int_{F_j} \varphi(\gamma_j g \cdot s) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{j=1}^r \int_{F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\ &= \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) = \text{trans}(\varphi)(s). \end{aligned}$$

(iv) Se φ è G -invariante segue immediatamente dalla definizione che $\text{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

□

Corollario 2.2. *La mappa di restrizione*

$$\text{res}^\bullet: H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un'immersione isometrica.

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.1 segue immediatamente che

$$\text{trans}^\bullet: C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$$

è un morfismo di complessi ben definito la cui restrizione a $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ è l'identità. Poiché trans^\bullet è evidentemente 1-Lipschitz, guardando la corrispondente mappa in coomologia si ottiene che

$$H^\bullet(\text{trans}^\bullet): H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

è una mappa 1-Lipschitz tale che $H^\bullet(\text{trans}^\bullet) \circ \text{res}^\bullet$ sia l'identità. Questo conclude la dimostrazione. □

2.2 Cociclo volume

Se X è una varietà Riemanniana, denotiamo con ${}_sS_k(X)$ lo spazio dei k -simplessi lisci di X (ossia l'insieme delle funzioni lisce da Δ^k in X) munito della topologia C^1 .

Proposizione 2.3. *Per ogni $x_0, \dots, x_k \in \widetilde{M}$, il simpleso dritto $[x_0, \dots, x_k]$ è liscio. Inoltre l'applicazione*

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times \dots \times \widetilde{M} &\longrightarrow {}_sS_k(\widetilde{M}) \\ (x_0, \dots, x_k) &\longmapsto [x_0, \dots, x_k] \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. □

Per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo $\widetilde{\text{str}}_k(s) = [s(e_0), \dots, s(e_k)]$. Estendendo $\widetilde{\text{str}}_k$ per \mathbb{R} -linearità otteniamo un'applicazione $\widetilde{\text{str}}_k: S_k(\widetilde{M}) \rightarrow S_k(\widetilde{M})$.

Proposizione 2.4. *L'applicazione $\widetilde{\text{str}}_k: S_k(\widetilde{M}) \rightarrow S_k(\widetilde{M})$ soddisfa le seguenti proprietà.*

- (i) $d_{k+1} \circ \widetilde{\text{str}}_{k+1} = \widetilde{\text{str}}_{k+1} \circ d_k$ per ogni $k \geq 0$ (ossia $\widetilde{\text{str}}_\bullet: C_\bullet(\widetilde{M}) \rightarrow C_\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi).
- (ii) $\widetilde{\text{str}}_k(\gamma \circ s) = \gamma \circ \widetilde{\text{str}}_k(s)$ per ogni $k \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$, $s \in S_k(\widetilde{M})$.
- (iii) $\widetilde{\text{str}}_\bullet: C_\bullet(\widetilde{M}) \rightarrow C_\bullet(\widetilde{M})$ è omotopa all'identità mediante un'omotopia Γ -equivariante che manda simplessi lisci in una somma finita di simplessi lisci.

Dimostrazione.

- (i) È immediato verificare che la i -esima faccia di $[x_0, \dots, x_k]$ è $[x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_k]$, da cui la tesi.
- (ii) Poiché le isometrie preservano le geodetiche, si ha

$$\gamma \circ [x_0, \dots, x_k] = [\gamma(x_0), \dots, \gamma(x_k)],$$

da cui la tesi.

- (iii) Dato un simpleso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo l'applicazione $F: \Delta^k \times [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ in modo che per ogni $x \in \Delta^k$ la mappa $F(x, -): [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ sia la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che congiunge $s(x)$ con $\widetilde{\text{str}}_k(s)(x)$. Definiamo poi $T_k(s) = F_\bullet(c)$, dove $c \in C_{k+1}(\Delta^k \times [0, 1])$ è la triangolazione standard di $\Delta^k \times [0, 1]$. È immediato verificare che $d_{k+1} \circ T_k + T_{k-1} \circ d_k = \text{id} - \widetilde{\text{str}}_k$, mentre la Γ -equivarianza di T_k segue dal fatto che le isometrie preservano le geodetiche. □

Come conseguenza otteniamo un morfismo di complessi $\text{str}_\bullet: C_\bullet(M) \rightarrow C_\bullet(M)$ omotopo all'identità. Inoltre, dalla proposizione 2.3, $\text{str}_k(s)$ è un semplice liscio di M per ogni $s \in S_k(M)$, e le restrizioni $\text{str}_k: S_k(M) \rightarrow {}_s S_k(M)$ sono continue.

Supponiamo ora che M sia orientata, e sia n la dimensione di M . Denotiamo con $\omega_M \in \Omega^n(M)$ la forma volume di M .

Definizione 2.2. Per ogni $s \in S_n(M)$ definiamo

$$\text{Vol}_M(s) = \int_{\text{str}_n(s)} \omega_M.$$

Estendendo per linearità, otteniamo una cocatena $\text{Vol}_M \in C^n(M)$, detta *cocatena volume*.

Poiché $\text{str}_n: S_n(M) \rightarrow {}_s S_n(M)$ è continua e l'integrazione è continua rispetto alla topologia C^1 , otteniamo che la cocatena volume è continua. Osserviamo inoltre che per ogni $s \in S_{n+1}(M)$ vale

$$\text{Vol}_M(d(s)) = \int_{\text{str}_n(d(s))} \omega_M = \int_{d \text{str}_{n+1}(s)} \omega_M = \int_{\text{str}_{n+1}(s)} d\omega_M = 0,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che str_\bullet è un morfismo di complessi e il teorema di Stokes. Pertanto Vol_M è un cociclo, e definisce classi $[\text{Vol}_M] \in H^n(M)$, $[\text{Vol}_M]_c \in H_c^n(M)$ in coomologia.

Lemma 2.5. Vale $[\text{Vol}_M] = \text{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $[\text{Vol}_M] = \langle [\text{Vol}_M], [M] \rangle \cdot [M]^*$. È ben noto che la classe fondamentale di M ammette un rappresentante della forma $c = \sum s_i$, dove gli s_i sono gli n -simpletti lisci e orientati positivamente di una triangolazione di M . Per la proposizione 2.4, $c - \text{str}_n(c)$ è bordo di una catena di simpletti lisci. Pertanto

$$\langle [\text{Vol}_M], [M] \rangle = \text{Vol}_M(c) = \int_{\text{str}_n(c)} \omega_M = \int_c \omega_M = \text{Vol}(M),$$

dove abbiamo usato il teorema di Stokes per dedurre che

$$\int_{c - \text{str}_n(c)} \omega_M = 0. \quad \square$$

Possibili errori di battitura nel libro

- p.105, **Lemma 8.2.** X al posto di M .
- p.107, **Proposition 8.5.** \mathbb{R} -modulo normato al posto di Γ -modulo normato.
- p.109, **Proposition 8.7.** La mappa $H^\bullet(i^\bullet)$ è fra moduli di coomologia, non di cocatene (stessa cosa per $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$).
- p.111, **Proposition 8.8, proof.** Probabilmente sono io che mi perdo in qualche sciocchezza insiemistica, ma non riesco a dedurre

$$F = \bigsqcup_{i=1}^r F_i \implies F \cdot g_0 = \bigsqcup_{i=1}^r \gamma_i \cdot F_i.$$

- p.113, **Proposition 8.11, (1).** Dovrebbe essere $k \in \mathbb{N}$.