Volume simpliciale

Norma e seminorma ℓ^1

Sia X uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Norma ℓ^1 su $C_n(X)$

$$\left\| \sum a_i s_i \right\|_1 = \sum |a_i| \in (0, +\infty)$$

Seminorma ℓ^1 su $H_n(X)$

$$\|\alpha\|_1 = \inf \{ \|c\|_1 : c \in Z_n(X), [c] = \alpha \} \in [0, +\infty]$$

Volume simpliciale

Classe fondamentale

Sia M una n-varietà chiusa orientata.

- $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.
- L'orientazione fissa un generatore $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M, \mathbb{Z})$.
- Il cambio di coefficienti $C_\bullet(M, \mathbb{Z}) \to C_\bullet(M, \mathbb{R})$ induce

$$\begin{aligned} H_\bullet(M, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_\bullet(M, \mathbb{R}) \\ [M]_{\mathbb{Z}} &\longmapsto [M]_{\mathbb{R}} = [M]. \end{aligned}$$

Definizione

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 .$$

- Non dipende dall'orientazione $\implies$ è ben definito per varietà chiuse orientabili.
- Può essere nullo, anche se $[M] \neq 0$.

Volume simpliciale

Principio di proporzionalità

Teorema

Sia M una varietà Riemanniana chiusa.
Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema

Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{1}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di M.

Proposizione

Siano M, N n-varietà chiuse orientate, $f\colon M \to N$ una funzione continua di grado d. Allora

$$|d| \cdot \|N\| \leq \|M\| .$$

Corollario

Sia $f\colon M \to M$ di grado $d \geq 2$. Allora $\|M\| = 0$.

Applicazioni

Varietà euclidee

- L'n-toro $(S^1)^n$ ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza, $\|(S^1)^n\| = 0$.
- $(S^1)^n$ ammette una metrica piatta, con rivestimento universale isometrico a $\mathbb{R}^n$.
- Data una qualunque n-varietà chiusa euclidea M, vale

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\|(S^1)^n\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)} = 0$$

da cui $\|M\| = 0$.

Teorema

Sia M una n-varietà chiusa iperbolica. Allora

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n},$$

dove v_n è il volume dell'n-simplesso ideale regolare in $\mathbb{H}^n$.

Corollario

Una varietà chiusa M non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.

Applicazioni

Mappe fra superfici

Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g.

- Per $g \leq 1$ vale $\|\Sigma_g\| = 0$
- Per $g \geq 2$, Σ_g ammette una metrica iperbolica.

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Vol}(\Sigma_g)}{v_2} = -\frac{2\pi\chi(\Sigma_g)}{\pi} = 4g - 4.$$

- Sia $f \colon \Sigma_{g_1} \to \Sigma_{g_2}$, con $g_1 \geq 1$, $g_2 \geq 2$. Allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{\|\Sigma_{g_1}\|}{\|\Sigma_{g_2}\|} = \frac{g_1 - 1}{g_2 - 1}.$$

Dualità

Norma e seminorma ℓ^∞

Sia X uno spazio topologico

$$\dots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta^n} C^n(X) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \dots$$

Norma ℓ^∞ su $C^n(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\left\{|\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1\right\} \in (0, +\infty]$$

Seminorma ℓ^∞ su $H^n(X)$

$$\|\beta\|_\infty = \inf\left\{\|\varphi\|_\infty : \varphi \in Z^n(X), [\varphi] = \beta\right\} \in [0, +\infty]$$

Dualità

Prodotto di Kronecker

Il prodotto di Kronecker è l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned}\langle -, - \rangle : H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [z]) &\longmapsto \varphi(z).\end{aligned}$$

Proposizione

Sia $\alpha \in H_n(X)$. Allora

$$\|\alpha\|_1 = \max \left\{ \langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Dualità

Volume simpliciale

Sia M una n-varietà chiusa orientata, $[M] \in H_n(M)$ la sua classe fondamentale.

- Esiste un'unica classe $[M]^* \in H^n(M)$ tale che
$$\langle [M]^*, [M] \rangle = 1.$$
- Per dualità, vale
$$\|M\| = \|[M]\|_1 = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}.$$

Rivestimento universale

Coomologia Γ-invariante

- Sia M una n-varietà Riemanniana chiusa e orientata con curvatura non positiva.
- Sia $p\colon \widetilde{M} \to M$ il rivestimento universale.
- Sia $\Gamma = \pi_1(M)$ identificato con $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}, p)$.

Γ agisce sul complesso di cocatene $C^\bullet(\widetilde{M})$.

Proposizione

Il rivestimento p induce isomorfismi isometrici

$$p^\bullet\colon C^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$
$$H^\bullet(p^\bullet)\colon H^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Teorema (Cartan-Hadamard)

La mappa esponenziale

$$\exp_p\colon T_p\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$

è un diffeomorfismo

- $\widetilde{M}$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- Per ogni $x, y \in \widetilde{M}$ esiste un'unica geodetica che li collega.
- Le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo liscio dagli estremi.

Rivestimento universale
Simplessi dritti

Il teorema di Cartan-Hadamard permette di definire il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \dots, x_k \in \widetilde{M}$.

- $k = 0 \rightsquigarrow [x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- $k > 0 \rightsquigarrow [x_0, \dots, x_k]$ è il "cono geodetico" di vertice x_k e base $[x_0, \dots, x_{k-1}]$.

- Inserire figura

Rivestimento universale

Mappa di raddrizzamento

Per ogni k-simplesso singolare $s\colon \Delta^k \to \widetilde{M}$ definiamo il simplesso

$$\widetilde{\mathrm{str}}_k(s) = [s(e_0), \ldots, s(e_k)].$$

- $\widetilde{\mathrm{str}}_\bullet\colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi Γ-equivariante.
- Induce $\mathrm{str}_\bullet\colon C_\bullet(M) \to C_\bullet(M)$.
- Entrambi i morfismi sono omotopi all'identità.

- Inserire figura

Rivestimento universale

Cociclo volume

Per ogni n-simplesso $s\colon \Delta^n \to M$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M,$$

dove ω_M è la forma volume.

- $\mathrm{Vol}_M(d_{n+1}(s)) = 0$, dunque è un cociclo.
- Definisce una classe $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ in coomologia.
- Vale
$$[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*.$$