1 Volume simpliciale

1.1 Complessi seminormati

Definizione 1.1. Una *seminorma* su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è una funzione $\|-\| : V \to [0, \infty]$ tale che:

(i) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (per convenzione, $0 \cdot \infty = 0$);

(ii) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in V$.

Osserviamo che, contrariamente all'uso comune, ammettiamo anche ∞ come possibile valore assunto dalla seminorma. Una *norma* su V è una seminorma che soddisfa inoltre le seguenti proprietà:

(i) $\|v\| < \infty$ per ogni $v \in V$;

(ii) se $v \in V \setminus \{0\}$ allora $\|v\| > 0$.

Dati una seminorma $\|-\|$ su V e un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$, il quoziente V/W eredita una seminorma naturale così definita: per ogni $[v] \in V/W$,

$$\|[v]\| = \inf\{\|v'\| : v' \in V, [v] = [v']\}.$$

Se V e W sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali seminormati, un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ si dice:

- L-Lipschitz se $\|f(v)\| \le L \cdot \|v\|$ per ogni $v \in V$;
- isometrica se $\|f(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.

Osserviamo che un'isometria fra spazi seminormati non è necessariamente iniettiva.

Dati due spazi vettoriali seminormati V_1, V_2, un'applicazione lineare L-Lipschitz $f\colon V_1 \to V_2$ e due sottospazi $W_1 \subseteq V_1$, $W_2 \subseteq V_2$ tali che $f(W_1) \subseteq W_2$, si verifica facilmente che l'applicazione indotta $\overline{f}\colon V_1/W_1 \to V_2/W_2$ è ancora L-Lipschitz. Al contrario, la proprietà di essere isometrica non si conserva per passaggio al quoziente.

Definizione 1.2. Un *complesso normato* è un complesso $(C_\bullet, d_\bullet)$ di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali in cui ogni C_i è dotato di una seminorma.

Dalla discussione precedente deriva che gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $H_i(C_\bullet)$ ereditano in modo naturale una seminorma. Inoltre, un morfismo di complessi L-Lipschitz $f_\bullet\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ induce applicazioni L-Lipschitz $H_\bullet(f_\bullet)\colon H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(C'_\bullet)$ in omologia.

1.2 Seminorme singolari e prodotto di Kronecker

Sia X uno spazio topologico. Muniamo il complesso delle catene singolari $(C_\bullet(X), d)$ della norma ℓ^1, definita come segue: per ogni $\sum_{i=1}^k a_i s_i \in C_n(X)$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i s_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^k |a_i|.$$

Definiamo inoltre la seminorma ℓ^∞ sul complesso delle cocatene singolari $(C^\bullet(X), \delta)$: data una cocatena $\varphi \in C^n(X)$, la sua seminorma ℓ^∞ è

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1\}.$$

Di conseguenza i moduli di omologia e coomologia di X ereditano, rispettivamente, le seminorme $\|-\|_1$ e $\|-\|_\infty$.

Per ogni $n \geq 0$ è ben definita l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [c]) &\longmapsto \varphi(c), \end{aligned}$$

detta *prodotto di Kronecker*. Vale il seguente risultato di dualità.

Proposizione 1.1. *Sia $\alpha \in H_n(X)$. Allora*

$$\|\alpha\|_1 = \max\{\langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Una disuguaglianza segue immediatamente osservando che per ogni $c \in C_n(X)$, $\varphi \in C^n(X)$ vale $\|a\|_1 \cdot \|\varphi\|_\infty \geq \varphi(a)$. Per dimostrare l'altra, fissiamo un ciclo a che rappresenti α. Denotiamo con $B_n(X) \subseteq C_n(X)$ il sottospazio dei bordi. Per Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare $\varphi \in C^n(X)$ di norma al più 1, nullo su $B_n(X)$ e tale che

$$\varphi(a) = \inf\{\|a - b\|_1 : b \in B_n(X)\}.$$

Ma allora $\varphi(a) = \|[a]\|_1$, da cui $\langle [\varphi], \alpha \rangle = \|\alpha\|_1$. $\square$

2 Coomologia continua

2.1 Definizioni

Riportiamo la definizione di topologia compatta-aperta e ne ricordiamo alcune utili proprietà.

Definizione 2.1. Siano X, Y spazi topologici, $F(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. La *topologia compatta-aperta* su $F(X,Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi

$$V(K,U) = \{f \in F(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

al variare di $K \subseteq X$ compatto e di $U \subseteq Y$ aperto.

Lemma 2.1. *(i) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f\colon Y \to Z$, $g\colon X \to Y$ funzioni continue. Allora le applicazioni*

$$f \circ -\colon F(X,Y) \longrightarrow F(X,Z), \qquad - \circ g\colon F(Y,Z) \longrightarrow F(X,Z)$$

sono continue.

(ii) Siano X, Y spazi topologici con X localmente compatto e Hausdorff. Allora l'applicazione di valutazione

$$\begin{aligned} F(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

In questa sezione, tutti moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno da intendersi a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Dirlo prima.

Sia M una n-varietà. Consideriamo sullo spazio $S_i(M) = F(\Delta^i, M)$ degli i-simplessi singolari la topologia compatta aperta.

Definizione 2.2. Una cocatena $\varphi \in C^i(M)$ si dice *continua* se la sua restrizione a $S_i(M)$ è continua.

Osserviamo che se $\varphi \in C^i(M)$ è continua, allora anche $\varphi \circ d \in C^{i+1}(M)$ lo è (grazie al Lemma 2.1). Dunque le cocatene continue formano un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$, che denotiamo con $C^\bullet_c(M)$; indichiamo inoltre con $C^\bullet_{b,c}(M) = C^\bullet_c(M) \cap C^\bullet_b(M)$ il complesso delle cocatene continue limitate. I moduli di coomologia relativi ai complessi $C^\bullet_c(M)$ e $C^\bullet_{b,c}$ saranno denotati, rispettivamente, con $H^\bullet_c(M)$ e $H^\bullet_{b,c}(M)$. Le inclusioni di complessi

$$i^\bullet\colon C^\bullet_c(M) \longrightarrow C^\bullet(M), \qquad i^\bullet_b\colon C^\bullet_{b,c}(M) \longrightarrow C^\bullet_b(M)$$

inducono mappe in coomologia

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H^\bullet_c(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H^\bullet_b(i^\bullet_b)\colon H^\bullet_{b,c}(M) \longrightarrow H^\bullet_b(M).$$

In questa sezione ci domanderemo se queste mappe siano isomorfismi, dando risposta affermativa nel caso in cui M ammetta una metrica Riemanniana a curvatura non positiva.

2.2 Cocatene continue e moduli relativamente iniettivi

Sia M una n-varietà chiusa, $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Fissiamo un'identificazione di $\Gamma = \pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di p.

Ricordiamo che i moduli $C^i(\widetilde{M})$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Osserviamo che per ogni $g \in \Gamma$ l'applicazione $g \cdot -\colon S_i(\widetilde{M}) \to S_i(\widetilde{M})$ è continua (grazie al Lemma 2.1), dunque i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ ereditano per restrizione una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Analogamente, i moduli $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ ereditano una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati.

Lemma 2.2. *Esiste una funzione continua $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $x \in \widetilde{M}$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di x tale che l'insieme

$$\{g \in \Gamma : g(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito;

(ii) per ogni $x \in \widetilde{M}$ vale

$$\sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g \cdot x) = 1.$$

Proposizione 2.3. *Per ogni $i \geq 0$, i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ e $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ sono relativamente iniettivi (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $C^i_c(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo. Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli, $\iota\colon A \to B$ una funzione Γ-lineare fortemente iniettiva con inversa sinistra $\mathbb{R}$-lineare $\sigma\colon B \to A$, $\alpha\colon A \to C^i_c(\widetilde{M})$ una funzione Γ-lineare.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & C^i_c(\widetilde{M}) & \end{tikzcd}$$

Sia $h_{\widetilde{M}}$ una funzione come nel Lemma 2.2. Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C^i_c(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}(b))))(s),$$

dove $e_0, \ldots, e_i$ sono i vertici del simplesso standard Δ^i. Osserviamo che, per le proprietà di $h_{\widetilde{M}}$, la somma su g è in realtà una somma finita, dunque $\beta(b)(s)$ è ben definito.

- **$\beta(b)$ è una cocatena continua.** Per definizione di $h_{\widetilde{M}}$, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di $s(e_0)$ tale che
$$\Gamma_s = \{g \in \Gamma : g^{-1}(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$
è finito. Allora per ogni $s' \in V(\{e_0\}, W)$ (che è un intorno di s in $S_i(\widetilde{M})$) vale
$$\beta(b)(s') = \sum_{g \in \Gamma_s} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s'(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot b)))(s'),$$
che è evidentemente continua in s' (grazie al Lemma 2.1).

- **β è Γ-lineare.** Sia $g_0 \in \Gamma$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\beta(g_0 \cdot b)(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} g_0 \cdot b)))(s) \\ &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1} g_0^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g_0 k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(s) \\ &= \sum_{k \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}(g_0^{-1} \circ s)(e_0))) \cdot \alpha(k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(g_0^{-1} \circ s) \\ &= \beta(b)(g_0^{-1} \circ s) = (g_0 \cdot \beta(b))(s).\end{aligned}$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.** Sia $a \in A$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\beta(\iota(a))(s) &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot \iota(a))))(s) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(\iota(g^{-1} \cdot a))))(s) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(a)(s) = \alpha(a)(s).\end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo.

La stessa costruzione funziona anche per $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ nel contesto di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati: infatti, poiché $\|\sigma\| \leq 1$, si vede che $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$. Dunque $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato relativamente iniettivo. □

2.3 Varietà con curvatura non positiva

Nonostante si possa proseguire anche con ipotesi meno restrittive, per semplicità ci limiteremo a considerare, da qui alla fine della sezione, varietà chiuse M che ammettano una metrica Riemanniana con curvatura non positiva.

In questo contesto, il teorema di Cartan-Hadamard garantisce che ogni coppia di punti $x, y \in \widetilde{M}$ siano collegati da un'unica geodetica; inoltre le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo continuo dagli estremi. Questo fatto permette di realizzare una procedura di raddrizzamento dei simplessi singolari.

Definizione 2.3. Siano $x_0, \dots, x_k$ punti di $\widetilde{M}$. Il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \dots, x_k$ è un simplesso singolare $[x_0, \dots, x_k] \in S_k(\widetilde{M})$ definito induttivamente come segue.

- Se $k = 0$, allora $[x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- Se $k > 0$, allora $[x_0, \dots, x_k]$ è univocamente determinato dalla seguente condizione: per ogni $z \in \Delta^{k-1} \subseteq \Delta^k$, la restrizione di $[x_0, \dots, x_k]$ al segmento di estremi z e e_k è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che collega $[x_0, \dots, x_{k-1}](z)$ a x_k.

È facile vedere, grazie a Cartan-Hadamard, che la definizione è ben posta (ossia $[x_0, \dots, x_k]$ è una funzione continua). Notiamo inoltre che, essendo gli elementi di Γ isometrie di $\widetilde{M}$, vale l'identità

$$g \circ [x_0, \dots, x_k] = [g(x_0), \dots, g(x_k)]$$

per ogni $g \in \Gamma$.

È infine utile osservare che, essendo M e $\widetilde{M}$ spazi metrici, la topologia compatta-aperta su $S_i(M)$ e $S_i(\widetilde{M})$ coincide con quella della convergenza uniforme.

2.4 Cocatene continue e risoluzioni forti di $\mathbb{R}$

Proposizione 2.4. *I complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ sono risoluzioni forti di $\mathbb{R}$ (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Il fatto che i complessi siano esatti segue dal fatto che l'identità è omotopa a 0, giusto?

Dimostrazione. Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Definiamo per ogni $i \geq 0$ un operatore $\mathbb{R}$-lineare $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} r: \qquad \Delta^k &\longrightarrow \Delta^{k+1} \\ t_0e_0 + \ldots + t_ke_k &\longmapsto t_0e_1 + \ldots + t_ke_{k+1} \end{aligned}$$

che identifica Δ^k con la faccia di Δ^{k+1} opposta a e_0. Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$, definiamo $T_k(s) \in S_{k+1}(\widetilde{M})$ come l'unico simplesso singolare che soddisfa la seguente condizione: per ogni $q \in \Delta^k$, la restrizione di $T_k(s)$ al segmento di estremi e_0 e $r(q)$ è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica di $\widetilde{M}$ di estremi x_0 e $s(q)$. Grazie al teorema di Cartan-Hadamard, è facile verificare che $T_k(s)$ è ben definito e continuo, e che l'applicazione $T_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_{k+1}(\widetilde{M})$ è continua. Estendendo T_k per $\mathbb{R}$-linearità, si ottiene una mappa $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Definiamo infine $T_{-1} \colon \mathbb{R} \to C_0(\widetilde{M})$ come $T_{-1}(t) = tx_0$. Si verifica facilmente che $d_0 \circ T_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ e che $T_{k-1} \circ d_k + d_{k+1} \circ T_k = \mathrm{id}_{C_k(\widetilde{M})}$ per ogni $k \geq 0$.

Definiamo ora per ogni $k \geq 0$ l'applicazione

$$\begin{aligned} h^k : C_c^k(\widetilde{M}) &\longrightarrow C_c^{k-1}(\widetilde{M}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ T_{k-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $h^k(\varphi)$ è effettivamente una cocatena continua, poiché la restrizione di T_{k-1} a $S_{k-1}(\widetilde{M})$ è continua. Dunque la famiglia $\{h^k\}_{k\geq 0}$ fornisce un'omotopia fra l'identità del complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo.

Infine, è evidente che per ogni $\varphi \in C_b^k(\widetilde{M})$ vale $\left\|h^k(\varphi)\right\| \leq \|\varphi\|$. Dunque le restrizioni $h^k\colon C_{b,c}^k(\widetilde{M}) \to C_{b,c}^{k-1}(\widetilde{M})$ forniscono un'omotopia fra l'identità del complesso $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato. □

2.5 Coomologia continua e coomologia singolare

Lemma 2.5. *Il morfismo di complessi $p^\bullet\colon C^\bullet(M) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ induce per restrizione isomorfismi isometrici di complessi*

Che norma c'è su $C_c^\bullet(M)$?

$$p^\bullet|_{C_c^\bullet(M)}\colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma, \qquad p^\bullet|_{C_{b,c}^\bullet(M)}\colon C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$

i quali a loro volta inducono isomorfismi isometrici in coomologia

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(C_c^\bullet(M)^\Gamma), \qquad H_{b,c}^\bullet(M) \simeq H_{b,c}^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Fare la dimostrazione.

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Proposizione 2.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora le applicazioni*

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H_b^\bullet(i_b^\bullet)\colon H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M)$$

sono isomorfismi isometrici.

Di nuovo, che norma c'è su $H^\bullet(M)$?

Dimostrazione. In questa sezione (Proposizione 2.3 e Proposizione 2.4) abbiamo mostrato che il complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ fornisce una risoluzione forte relativamente iniettiva di $\mathbb{R}$. Sappiamo (?THM? **??**) che lo stesso vale per il complesso $C^\bullet(\widetilde{M})$. Poiché l'inclusione $j^\bullet\colon C_c^\bullet(\widetilde{M}) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi che estende l'identità di $\mathbb{R}$, dalla ?THM? **??** otteniamo che

$$H^\bullet(j^\bullet)\colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare.

Analogamente,

$$H_b^\bullet(j_b^\bullet)\colon H_b^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H_b^\bullet(C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare. Poiché $j^\bullet$ e $j_b^\bullet$ sono 1-Lipschitz, lo stesso vale per $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$; per mostrare che si tratta di isometrie, è dunque sufficiente (di nuovo grazie alla ?THM? **??**) esibire morfismi di complessi $\theta^\bullet\colon C^\bullet(\widetilde{M}) \to C_c^\bullet(\widetilde{M})$, $\theta_b^\bullet\colon C_b^\bullet(\widetilde{M}) \to C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ che siano 1-Lipschitz ed estendano l'identità di $\mathbb{R}$.

Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Per ogni $\varphi \in C^k(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo

$$\theta^k(\varphi)(s) = \sum_{(g_0,\ldots,g_k)\in\Gamma^{k+1}} h_{\widetilde{M}}(g_0^{-1}(s(e_0)))\cdots h_{\widetilde{M}}(g_k^{-1}(s(e_k)))\cdot\varphi([g_0(x_0),\ldots,g_k(x_0)]),$$

dove $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ è data dal Lemma 2.2. Grazie alle proprietà di $h_{\widetilde{M}}$ è facile verificare che $\theta^k(\varphi)$ (una volta estesa per $\mathbb{R}$-linearità) definisce un elemento di $C_c^k(\widetilde{M})$, e che $\theta^\bullet$ risulta essere un morfismo 1-Lipschitz di complessi di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli che estende l'identità di $\mathbb{R}$.

Abbiamo dunque mostrato che le mappe $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$ sono isomorfismi isometrici. Dai seguenti diagrammi commutativi di complessi

$$\begin{array}{ccc} C_c^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle i^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle j^\bullet} \\ C^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_{b,c}^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle i_b^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle j_b^\bullet} \\ C_b^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{array}$$

(in cui le frecce orizzontali sono isomorfismi isometrici per il Lemma 2.5) segue che anche $H^\bullet(i^\bullet)$ e $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$ sono isomorfismi isometrici. $\square$

3 Principio di proporzionalità di Gromov

3.1 Mappa di restrizione

Utilizziamo le notazioni della sezione precedente, continuando a supporre che M sia una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Sia G il gruppo delle isometrie di $\widetilde{M}$ che preservano l'orientazione. È ben noto che G ammette una struttura di gruppo di Lie che induce la topologia compatta-aperta. Di conseguenza esiste una misura di Borel regolare invariante a sinistra su G (*misura di Haar*), unica a meno di riscalamento.

Poiché Γ è un sottogruppo discreto di G e $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ è compatta, esiste un insieme misurabile $F \subseteq G$ relativamente compatto tale che $\{\gamma \cdot F\}_{\gamma \in \Gamma}$ definisca una partizione localmente finita di G. In particolare, Γ è cocompatto in G, pertanto la misura di Haar è anche invariante a destra. D'ora in poi supporremo che tale misura sia riscalata in modo che F abbia misura 1. Reference please.

Definizione 3.1. Indichiamo con $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ il complesso delle cocatene continue G-invarianti. L'inclusione di complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G \to C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ induce una mappa in coomologia

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

detta *mappa di restrizione*.

Osserviamo che, considerando su $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ e $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$ le seminorme indotte rispettivamente da $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ e $C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$, la mappa di restrizione risulta 1-Lipschitz.

Ci proponiamo ora di costruire un'inversa sinistra 1-Lipschitz di $\mathrm{res}^\bullet$. Indichiamo con μ_G la misura di Haar su G. Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ definiamo

$$\mathrm{trans}^i(\varphi)(s) = \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g).$$

Si tratta di una buona definizione, poiché $\varphi(- \cdot s)$ è una funzione continua da G in $\mathbb{R}$ e F è relativamente compatto. Estendendo $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ per linearità, otteniamo un elemento di $C^i(\widetilde{M})$.

Proposizione 3.1. *Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ valgono le seguenti proprietà.*

(i) *La cocatena* $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è continua.*

(ii) *Vale* $\mathrm{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1}) = \mathrm{trans}^i(\varphi) \circ d^{i+1}$.

(iii) *Se φ è Γ-invariante, allora* $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è G-invariante.*

(iv) *Se φ è G-invariante, allora* $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

Dimostrazione.

(i) Osserviamo innanzitutto che la topologia compatta-aperta su $S_i(\widetilde{M})$ è indotta dalla distanza

$$\mathrm{dist}(s,s') = \sup\{\mathrm{dist}_{\widetilde{M}}(s(x),s'(x)) : x \in \Delta^i\}.$$

Sia $s_0 \in S_i(\widetilde{M})$, e sia $\epsilon > 0$. Poiché $\overline{F}$ è compatto in G, dal Lemma 2.1 si ottiene immediatamente che $\overline{F}\cdot s_0$ è compatto in $S_i(\widetilde{M})$. Dalla continuità di φ segue facilmente l'esistenza di un $\eta > 0$ tale che per ogni $s \in \overline{F}\cdot s_0$ e per ogni $s' \in S_i(\widetilde{M})$ con $\mathrm{dist}(s,s') < \eta$ valga $|\varphi(s)-\varphi(s')| \le \epsilon$. Sia dunque $s \in S_i(\widetilde{M})$ tale che $\mathrm{dist}(s_0,s) < \eta$. Poiché G agisce su $S_i(\widetilde{M})$ in modo isometrico, allora anche $\mathrm{dist}(g\cdot s_0, g\cdot s) < \eta$ per ogni $g \in G$. Ma allora

$$|\operatorname{trans}^i(\varphi)(s)-\operatorname{trans}^i(\varphi)(s_0)| \le \int_F |\varphi(g\cdot s)-\varphi(g\cdot s')| d\mu_G(g) \le \epsilon\mu_G(F) = \epsilon$$

dunque $\operatorname{trans}^i(\varphi)$ è continua.

(ii) Sia $s \in S_{i+1}(\widetilde{M})$, e siano $a_0,\ldots,a_{i+1} \in \mathbb{R}$, $s_0,\ldots,s_{i+1} \in S_i(\widetilde{M})$ tali che

$$d^{i+1}(s) = \sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j.$$

Osserviamo che

$$d^{i+1}(g\cdot s) = \sum_{j=0}^{r} a_j (g\cdot s_j),$$

per ogni $g \in G$, da cui

$$\begin{aligned}
\operatorname{trans}^{i+1}(\varphi\circ d^{i+1})(s) &= \int_F \varphi(d^{i+1}(g\cdot s)) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \int_F \varphi(g\cdot s_j) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \operatorname{trans}^i(\varphi)(s_j) \\
&= \operatorname{trans}^i(\varphi)\left(\sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j\right) = \operatorname{trans}^i(\varphi)(d^{i+1}s).
\end{aligned}$$

(iii) Fissiamo $\varphi \in C^i_c(\widetilde{M})$, $s \in S_i(\widetilde{M})$, $g_0 \in G$. Poiché F è relativamente compatto, lo sono anche $F\cdot g_0$ e $F\cdot g_0^{-1}$, dunque esistono un numero finito di elementi $\gamma_1,\ldots,\gamma_r \in \Gamma$ tali che

$$F\cdot g_0 \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j\cdot F \qquad \text{e} \qquad F\cdot g_0^{-1} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j^{-1}\cdot F.$$

Posto $F_j = (\gamma_j^{-1} \cdot F \cdot g_0) \cap F$ si ottiene immediatamente che

$$F = \bigsqcup_{j=1}^{r} F_j \qquad \text{e} \qquad F \cdot g_0 = \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F_j.$$

Sfruttando il fatto che μ_G è invariante a destra e a sinistra e che φ è Γ-invariante si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{trans}^i(\varphi)(g_0 \cdot s) &= \int_F \varphi(gg_0 \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_{F \cdot g_0} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{\gamma_j \cdot F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(\gamma_j g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) = \mathrm{trans}(\varphi)(s).
\end{aligned}$$

(iv) Se φ è G-invariante segue immediatamente dalla definizione che $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

□

Corollario 3.2. *La mappa di restrizione*

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un'immersione isometrica.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.1 segue immediatamente che

$$\mathrm{trans}^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$$

è un morfismo di complessi ben definito la cui restrizione a $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ è l'identità. Poiché $\mathrm{trans}^\bullet$ è evidentemente 1-Lipschitz, guardando la corrispondente mappa in coomologia si ottiene che

$$H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

è una mappa 1-Lipschitz tale che $H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \circ \mathrm{res}^\bullet$ sia l'identità. Questo conclude la dimostrazione. □

3.2 Cociclo volume

Se X è una varietà Riemanniana, denotiamo con ${}_sS_k(X)$ lo spazio dei k-simplessi *lisci* di X (ossia l'insieme delle funzioni lisce da Δ^k in X) munito della topologia C^1.

Proposizione 3.3. *Per ogni $x_0, \ldots, x_k \in \widetilde{M}$, il simplesso dritto $[x_0, \ldots, x_k]$ è liscio. Inoltre l'applicazione*

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times \ldots \times \widetilde{M} &\longrightarrow {}_sS_k(\widetilde{M}) \\ (x_0, \ldots, x_k) &\longmapsto [x_0, \ldots, x_k] \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. □

Per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo $\widetilde{\mathrm{str}}_k(s) = [s(e_0), \ldots, s(e_k)]$. Estendendo $\widetilde{\mathrm{str}}_k$ per $\mathbb{R}$-linearità otteniamo un'applicazione $\widetilde{\mathrm{str}}_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(\widetilde{M})$.

Proposizione 3.4. *L'applicazione $\widetilde{\mathrm{str}}_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(\widetilde{M})$ soddisfa le seguenti proprietà.*

(i) $d_{k+1} \circ \widetilde{\mathrm{str}}_{k+1} = \widetilde{\mathrm{str}}_{k+1} \circ d_k$ *per ogni* $k \geq 0$ *(ossia* $\widetilde{\mathrm{str}}_\bullet \colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ *è un morfismo di complessi).*

(ii) $\widetilde{\mathrm{str}}_k(\gamma \circ s) = \gamma \circ \widetilde{\mathrm{str}}_k(s)$ *per ogni* $k \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$, $s \in S_k(\widetilde{M})$.

(iii) $\widetilde{\mathrm{str}}_\bullet \colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ *è omotopa all'identità mediante un'omotopia* Γ*-equivariante che manda simplessi lisci in una somma finita di simplessi lisci.*

Dimostrazione.

(i) È immediato verificare che la i-esima faccia di $[x_0, \ldots, x_k]$ è $[x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_k]$, da cui la tesi.

(ii) Poiché le isometrie preservano le geodetiche, si ha

$$\gamma \circ [x_0, \ldots, x_k] = [\gamma(x_0), \ldots, \gamma(x_k)],$$

da cui la tesi.

(iii) Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo l'applicazione $F \colon \Delta^k \times [0,1] \to \widetilde{M}$ in modo che per ogni $x \in \Delta^k$ la mappa $F(x, -) \colon [0,1] \to \widetilde{M}$ sia la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che congiunge $s(x)$ con $\widetilde{\mathrm{str}}_k(s)(x)$. Definiamo poi $T_k(s) = F_\bullet(c)$, dove $c \in C_{k+1}(\Delta^k \times [0,1])$ è la triangolazione standard di $\Delta^k \times [0,1]$. È immediato verificare che $d_{k+1} \circ T_k + T_{k-1} \circ d_k = \mathrm{id} - \widetilde{\mathrm{str}}_k$, mentre la Γ-equivarianza di T_k segue dal fatto che le isometrie preservano le geodetiche. □

Come conseguenza otteniamo un morfismo di complessi $\mathrm{str}_\bullet \colon C_\bullet(M) \to C_\bullet(M)$ omotopo all'identità. Inoltre, dalla Proposizione 3.3, $\mathrm{str}_k(s)$ è un simplesso liscio di M per ogni $s \in S_k(M)$, e le restrizioni $\mathrm{str}_k \colon S_k(M) \to {}_sS_k(M)$ sono continue.

Supponiamo ora che M sia orientata, e sia n la dimensione di M. Denotiamo con $\omega_M \in \Omega^n(M)$ la forma volume di M.

Definizione 3.2. Per ogni $s \in S_n(M)$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

Estendendo per linearità, otteniamo una cocatena $\mathrm{Vol}_M \in C^n(M)$, detta *cocatena volume.*

Poiché $\mathrm{str}_n \colon S_n(M) \to {}_sS_n(M)$ è continua e l'integrazione è continua rispetto alla topologia C^1, otteniamo che la cocatena volume è continua. Osserviamo inoltre che per ogni $s \in S_{n+1}(M)$ vale

$$\mathrm{Vol}_M(d(s)) = \int_{\mathrm{str}_n(d(s))} \omega_M = \int_{d\,\mathrm{str}_{n+1}(s)} \omega_M = \int_{\mathrm{str}_{n+1}(s)} d\omega_M = 0,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\mathrm{str}_\bullet$ è un morfismo di complessi e il teorema di Stokes. Pertanto Vol_M è un cociclo, e definisce classi $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$, $[\mathrm{Vol}_M]_c \in H^n_c(M)$ in coomologia.

Lemma 3.5. *Vale* $[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $[\mathrm{Vol}_M] = \langle [\mathrm{Vol}_M], [M] \rangle \cdot [M]^*$. È ben noto che la classe fondamentale di M ammette un rappresentante della forma $c = \sum s_i$, dove gli s_i sono gli n-simplessi lisci e orientati positivamente di una triangolazione di M. Per la Proposizione 3.4, $c - \mathrm{str}_n(c)$ è bordo di una catena di simplessi lisci. Pertanto

$$\langle [\mathrm{Vol}_M], [M] \rangle = \mathrm{Vol}_M(c) = \int_{\mathrm{str}_n(c)} \omega_M = \int_c \omega_M = \mathrm{Vol}(M),$$

dove abbiamo usato il teorema di Stokes per dedurre che

$$\int_{c - \mathrm{str}_n(c)} \omega_M = 0. \qquad \square$$

3.3 Principio di proporzionalità

Consideriamo l'immagine di Vol_M mediante l'identificazione isometrica $C^n_c(M) \simeq C^n_c(\widetilde{M})^\Gamma$ indotta da $p^\bullet$: si tratta del cociclo $\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \colon C_n(\widetilde{M}) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni simplesso $s \in S_n(\widetilde{M})$ valga

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(p \circ s)} \omega_M = \int_{p \circ \widetilde{\mathrm{str}}_n(s)} \omega_M = \int_{\widetilde{\mathrm{str}}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}},$$

dove $\omega_{\widetilde{M}}$ è la forma volume di $\widetilde{M}$. Osserviamo che $\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$ è una cocatena G-invariante, dunque definisce una classe $[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M}))$ tale che l'immagine di $\mathrm{res}^n([\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G)$ mediante l'identificazione isometrica $H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \simeq H_c^n(M)$ sia proprio $[\mathrm{Vol}_M]_c$.

Possiamo ora enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora*

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}.$$

Dimostrazione. Per come è definito il volume simpliciale per varietà non orientabili, possiamo supporre che M sia orientata. Cominciamo osservando che tutte le mappe nel seguente diagramma sono isomorfismi o immersioni isometriche (rispettivamente per la Proposizione 2.6, il Lemma 2.5 e il Corollario 3.2).

$$H^n(M) \xleftarrow[\simeq]{H^n(i^\bullet)} H_c^n(M) \xrightarrow[\simeq]{H^n(p^\bullet)} H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \xleftarrow{\mathrm{res}^n} H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

Inoltre, a $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ a sinistra corrisponde $[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ a destra; in particolare, $\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty = \left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty$. Allora la tesi segue immediatamente dalla ?THM? **??** e dal Lemma 3.5:

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}. \qquad \square$$

In particolare, abbiamo il seguente.

Corollario 3.7. *Nelle ipotesi del teorema precedente, il rapporto $\|M\| / \mathrm{Vol}(M)$ dipende solo dalla classe di isometria del rivestimento universale $\widetilde{M}$.*

4 Varietà euclidee e iperboliche

4.1 Varietà euclidee

Il principio di proporzionalità di Gromov permette di calcolare immediatamente il volume simpliciale di tutte le varietà chiuse euclidee (ossia localmente isometriche a $\mathbb{R}^n$).

Proposizione 4.1. *Sia M una varietà chiusa euclidea. Allora $\|M\| = 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che l'n-toro euclideo $(S^1)^n$ ha volume simpliciale nullo, poiché ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto. Poiché il rivestimento universale di ogni varietà euclidea è isometrico a $\mathbb{R}^n$, dal Corollario 3.7 segue che

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\left\|(S^1)^n\right\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)} = 0. \qquad \square$$

4.2 Varietà iperboliche

Nel resto di questa sezione ci proponiamo di calcolare il rapporto $\|M\| / \mathrm{Vol}(M)$ per varietà chiuse iperboliche (ossia localmente isometriche a $\mathbb{H}^n$). Il Teorema 3.6 garantisce che non dipende dalla varietà M, e fornisce un metodo per calcolarlo: è sufficiente conoscere la seminorma della coclasse $[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\mathbb{H}^n)^G)$, dove G denota il gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}^n$ che preservano l'orientazione.

Ricordiamo brevemente alcuni fatti riguardanti la geometria dei simplessi dritti in $\mathbb{H}^n$. Un *k-simplesso (geodetico)* in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è l'inviluppo convesso di $k+1$ punti in $\mathbb{H}^n$, detti *vertici*. Un simplesso si dice *finito* se tutti i suoi vertici appartengono a $\mathbb{H}^n$, ideale se tutti i suoi vertici appartengono a $\partial\mathbb{H}^n$, e *regolare* e ogni permutazione dei suoi vertici si estende a un'isometria di $\mathbb{H}^n$. I simplessi geodetici sono esattamente le immagini dei simplessi dritti (più precisamente, l'immagine di $[x_0, \dots, x_k]$ è il simplesso geodetico di vertici $x_0, \dots, x_k$). Per ogni $\ell > 0$ esiste a meno di isometria un unico n-simplesso regolare finito di lato ℓ, che denoteremo con τ_ℓ. Inoltre esiste a meno di isometria un unico n-simplesso regolare ideale, che denoteremo con τ_∞; definiamo infine $v_n = \mathrm{Vol}(\tau_\infty)$.

Teorema 4.2. *Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora $\mathrm{Vol}(\Delta) \leq v_n$, e $\mathrm{Vol}(\Delta) = v_n$ se e solo se Δ è regolare ideale.*

Teorema 4.3. *Vale $\lim_{\ell\to\infty} \mathrm{Vol}(\tau_\ell) = v_n$.*

Reference please.

Proposizione 4.4. *Sia M una n-varietà iperbolica chiusa. Allora*

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n}.$$

Dimostrazione. Grazie al Teorema 3.6, è sufficiente dimostrare che $\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty = v_n$. Dal Teorema 4.2 segue che

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \leq \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty = v_n,$$

quindi rimane da mostrare la disuguaglianza opposta.

Per definizione,

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty = \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi_\infty\| : \varphi \in C_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}.$$

Osserviamo che la cocatena volume è alternante; inoltre il morfismo 1-Lipschitz $\mathrm{alt}^\bullet \colon C^\bullet(\mathbb{H}^n) \to C^\bullet(\mathbb{H}^n)$ preserva le cocatene continue e G-invarianti, dunque

$$\begin{aligned}\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty &\geq \inf\left\{\|\mathrm{alt}^n(\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi)\|_\infty : \varphi \in C_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &= \inf\left\{\left\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\,\mathrm{alt}^{n-1}(\varphi)\right\|_\infty : \varphi \in C_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &= \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi\|_\infty : \varphi \in C_{c,\mathrm{alt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}.\end{aligned}$$

Sia dunque φ una $(n-1)$-cocatena continua alternante e G-invariante. Consideriamo un n-simplesso regolare finito τ_ℓ e la sua parametrizzazione $s_\ell = [\tau_\ell(e_0), \ldots, \tau_\ell(e_n)]$; sia $\partial_i s_\ell = [\tau_\ell(e_0), \ldots, \widehat{\tau_\ell(e_i)}, \ldots, \tau_\ell(e_n)]$ la i-esima faccia. Sia $\sigma \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ una mappa affine che induce una permutazione dispari sui vertici di Δ^{n-1}. Poiché τ_ℓ è regolare, esiste un'isometria $g \in G$ di $\mathbb{H}^n$ tale che $g \circ \partial_i s_\ell = \partial_i s_\ell \circ \sigma$; a meno di comporre con la riflessione lungo l'iperpiano che contiene l'immagine di $\partial_i s_\ell$, possiamo supporre che g preservi l'orientazione. Sfruttando il fatto che φ è contemporaneamente G-invariante e alternante otteniamo

Funziona no?

$$\varphi(\partial_i s_\ell) = \varphi(g \circ \partial_i s_\ell) = \varphi(\partial_i s_\ell \circ \sigma) = -\varphi(\partial_i s_\ell),$$

da cui $\varphi(\partial_i s_\ell) = 0$ e $\varphi(ds_\ell) = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty &\geq \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi\|_\infty : \varphi \in C_{c,\mathrm{alt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &\geq \inf\left\{|(\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi)(s_\ell)| : \varphi \in C_{c,\mathrm{alt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &= |\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s_\ell)| = \mathrm{Vol}(\tau_\ell).\end{aligned}$$

Facendo tendere $\ell \to \infty$, dal Teorema 4.3 otteniamo $\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \geq v_n$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 4.5. *Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g. Allora*

$$\|\Sigma_g\| = \begin{cases} 0 & g < 2\\ 4g - 4 & g \geq 2\end{cases}.$$

Dimostrazione. Per i casi $g = 0, 1$ basta osservare che S^2 e $S^1 \times S^1$ ammettono endomorfismi di grado arbitrariamente alto, dunque hanno volume simpliciale nullo. Se invece $g \geq 2$, è ben noto che Σ_g ammette una metrica iperbolica. Ricordando che $v_2 = \pi$ e $\mathrm{Area}(\Sigma_g) = -2\pi\chi(\Sigma_g) = 4\pi g + 4\pi$, dalla Proposizione 4.4 segue che

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Area}(\Sigma_g)}{v_2} = 4g - 4. \qquad \square$$

Possibili errori di battitura nel libro

- **p.105, Lemma 8.2.** X al posto di M.
- **p.107, Proposition 8.5.** $\mathbb{R}$-modulo normato al posto di Γ-modulo normato.
- **p.109, Proposition 8.7.** La mappa $H^\bullet(i^\bullet)$ è fra moduli di coomologia, non di cocatene (stessa cosa per $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$).
- **p.111, Proposition 8.8, proof.** Probabilmente sono io che mi perdo in qualche sciocchezza insiemistica, ma non riesco a dedurre

$$F = \bigsqcup_{i=1}^{r} F_i \implies F \cdot g_0 = \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_i \cdot F_i.$$

- **p.113, Proposition 8.11, (1).** Dovrebbe essere $k \in \mathbb{N}$.
- **p.114.** Dovrebbe essere $\mathrm{res}^n([\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G)$ (manca la c).