Domande

Domande, vagamente in ordine di importanza.

- Dopo aver scritto tutta la parte sulla dimostrazione del principio di proporzionalità di Gromov, mi sono accorto che di fatto non serve mai parlare di coomologia limitata, nonostante compaia in alcuni enunciati presi direttamente dal libro (Proposizione 2.3, Proposizione 2.4, Lemma 2.5, Proposizione 2.6). Ai fini della mia (ridotta) trattazione, è sufficiente dare una nozione di *seminorma* (eventualmente infinita) sui complessi di (co)catene e sui moduli di (co)omologia, come ho fatto nella prima sezione. Sebbene da una lettura anche superficiale del libro sia evidente che i concetti di volume simpliciale e di coomologia limitata sono strettamente legati, stavo pensando che forse per questa trattazione sia meglio escludere il secondo, che rischierebbe altrimenti di sembrare "tirato fuori dal nulla" e poco pertinente per gli obiettivi che la trattazione si pone.

- Nello spirito della domanda precedente, siccome in ultima analisi parlerò solo di $R[\Gamma]$-moduli per $R = \mathbb{R}$, le nozioni di *relativa iniettività* (e di conseguenza di *risoluzione forte*) non sono necessarie. Pensavo anche in questo caso di tralasciarle, parlando solo di risoluzioni iniettive, potendo così invocare ben noti risultati di algebra omologica per la dimostrazione del Proposizione 2.6. In ogni caso (mi corregga se sbaglio) mi pare che il modo migliore di dimostrare che il complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ fornisce una risoluzione di $\mathbb{R}$ sia comunque di esibire un'omotopia fra 0 e l'identità.

- Nella dimostrazione della Proposizione 4.4, ho azzardato un argomento che evita la parametrizzazione baricentrica. Probabilmente non funzionerà, vista la mia ancora scarsa dimestichezza con la geometria iperbolica, ma vorrei chiedere il suo parere.

- Nel libro (precisamente a pagina 111) non riesco bene a seguire la dimostrazione della Proposizione 8.8. Probabilmente sono io che mi perdo in sciocchezze insiemistiche, ma come si deduce l'implicazione

$$F = \bigsqcup_{i=1}^{r} F_i \implies F \cdot g_0 = \bigsqcup_{i=1}^{r} \gamma_i \cdot F_i?$$

  Non capendolo (ma di nuovo, probabilmente sono io che mi perdo qualcosa) ho dovuto modificare lievemente la dimostrazione (Proposizione 3.1).

- Ci sono altre domande sparse nel testo (arancioni, a fianco), ma sono di secondaria importanza, potremo parlarne più avanti.

Possibili errori di battitura nel libro

- **p.105, Lemma 8.2.** X al posto di M.
- **p.107, Proposition 8.5.** $\mathbb{R}$-modulo normato al posto di Γ-modulo normato.
- **p.109, Proposition 8.7.** La mappa $H^\bullet(i^\bullet)$ è fra moduli di coomologia, non di cocatene (stessa cosa per $H_b^\bullet(i_b^\bullet)$).
- **p.113, Proposition 8.11, (1).** Dovrebbe essere $k \in \mathbb{N}$.
- **p.114.** Dovrebbe essere $\mathrm{res}^n([\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G)$ (manca la c).

1 Volume simpliciale

1.1 Complessi seminormati

Definizione 1.1. Una *seminorma* su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è una funzione $\|-\| : V \to [0,\infty]$ tale che:

(i) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (per convenzione, $0 \cdot \infty = 0$);

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in V$.

Osserviamo che, contrariamente all'uso comune, ammettiamo anche ∞ come possibile valore assunto dalla seminorma. Una *norma* su V è una seminorma che soddisfa inoltre le seguenti proprietà:

(iii) $\|v\| < \infty$ per ogni $v \in V$;

(iv) se $v \in V \setminus \{0\}$ allora $\|v\| > 0$.

Dati una seminorma $\|-\|$ su V e un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$, il quoziente V/W eredita una seminorma naturale così definita: per ogni $[v] \in V/W$,

$$\|[v]\| = \inf\{\|v'\| : v' \in V, [v] = [v']\}.$$

Se V e W sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali seminormati, un'applicazione lineare $f \colon V \to W$ si dice:

- *L-Lipschitz* se $\|f(v)\| \leq L \cdot \|v\|$ per ogni $v \in V$;
- *isometrica* se $\|f(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.

Un'*immersione isometrica* è un'isometria fra spazi seminormati (osserviamo che un'isometria non è necessariamente iniettiva).

Dati due spazi vettoriali seminormati V_1, V_2, un'applicazione lineare L-Lipschitz $f \colon V_1 \to V_2$ e due sottospazi $W_1 \subseteq V_1$, $W_2 \subseteq V_2$ tali che $f(W_1) \subseteq W_2$, si verifica facilmente che l'applicazione indotta $\overline{f} \colon V_1/W_1 \to V_2/W_2$ è ancora L-Lipschitz. Al contrario, la proprietà di essere isometrica non si conserva per passaggio al quoziente.

Definizione 1.2. Un *complesso seminormato* è un complesso $(C_\bullet, d_\bullet)$ di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali in cui ogni C_i è dotato di una seminorma.

Dalla discussione precedente deriva che gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali $H_i(C_\bullet)$ ereditano in modo naturale una seminorma. Inoltre, un morfismo di complessi L-Lipschitz $f_\bullet \colon C_\bullet \to C'_\bullet$ induce applicazioni L-Lipschitz $H_\bullet(f_\bullet) \colon H_\bullet(C_\bullet) \to H_\bullet(C'_\bullet)$ in omologia.

1.2 Seminorme singolari e prodotto di Kronecker

Sia X uno spazio topologico. Muniamo il complesso delle catene singolari $(C_\bullet(X), d)$ della norma ℓ^1, definita come segue: per ogni $\sum_{i=1}^k a_i s_i \in C_n(X)$ vale

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i s_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^k |a_i|.$$

Definiamo inoltre la seminorma ℓ^∞ sul complesso delle cocatene singolari $(C^\bullet(X), \delta)$: data una cocatena $\varphi \in C^n(X)$, la sua seminorma ℓ^∞ è

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1\}.$$

Di conseguenza i moduli di omologia e coomologia di X ereditano, rispettivamente, le seminorme $\|-\|_1$ e $\|-\|_\infty$. Osserviamo che, data una funzione continua $f \colon X \to Y$ fra spazi topologici, i morfismi di complessi indotti $f_\bullet \colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ e $f^\bullet \colon C^\bullet(Y) \to C^\bullet(X)$ risultano 1-Lipschitz rispetto alle seminorme appena definite; lo stesso vale dunque per le mappe indotte in (co)omologia. In particolare, segue che le equivalenze omotopiche inducono isomorfismi isometrici in (co)omologia.

Per ogni $n \geq 0$ è ben definita l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [c]) &\longmapsto \varphi(c), \end{aligned}$$

detta *prodotto di Kronecker*. Vale il seguente risultato di dualità.

Proposizione 1.1. *Sia $\alpha \in H_n(X)$. Allora*

$$\|\alpha\|_1 = \max\{\langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1\}.$$

Dimostrazione. Una disuguaglianza segue immediatamente osservando che per ogni $c \in C_n(X)$, $\varphi \in C^n(X)$ vale $\|a\|_1 \cdot \|\varphi\|_\infty \geq \varphi(a)$. Per dimostrare l'altra, fissiamo un ciclo a che rappresenti α. Denotiamo con $B_n(X) \subseteq C_n(X)$ il sottospazio dei bordi. Per Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare $\varphi \in C^n(X)$ di norma al più 1, nullo su $B_n(X)$ e tale che

$$\varphi(a) = \inf\{\|a - b\|_1 : b \in B_n(X)\}.$$

Ma allora $\varphi(a) = \|[a]\|_1$, da cui $\langle [\varphi], \alpha \rangle = \|\alpha\|_1$. $\square$

1.3 Volume simpliciale

D'ora in poi i moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno sempre muniti implicitamente delle seminorme ℓ^1 e ℓ^∞ appena definite.

Sia M una n-varietà (topologica) chiusa (ossia compatta, connessa e senza bordo) e orientata. È ben noto che $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, e l'orientazione permette di distinguere un generatore $[M]_\mathbb{Z} \in H_n(M, \mathbb{Z})$, detto *classe fondamentale* di M a coefficienti interi. L'inclusione di complessi $C_\bullet(M,\mathbb{Z}) \to C_\bullet(M,\mathbb{R})$ induce una mappa in omologia $H_\bullet(M,\mathbb{Z}) \to H_\bullet(M,\mathbb{R})$; l'immagine di $[M]_\mathbb{Z}$ in $H_n(M,\mathbb{R})$, indicata con $[M]_\mathbb{R}$ o semplicemente con $[M]$, è detta *classe fondamentale* di M (a coefficienti reali).

Definizione 1.3. Sia M una n-varietà chiusa e orientata. Si definisce *volume simpliciale* di M il numero reale $\|M\| = \|[M]\|_1$.

Osserviamo che il volume simpliciale non dipende dalla scelta dell'orientazione, dunque è ben definito per qualunque varietà chiusa e orientabile. Se M non è orientabile e $\widetilde{M}$ è il suo rivestimento doppio orientabile, si definisce $\|M\| = \|\widetilde{M}\|/2$. Infine, se M è compatta e non connessa, si definisce $\|M\|$ come la somma dei volumi simpliciali delle sue componenti connesse.

Rimandiamo alle sezioni successive il risultato principale di questa trattazione, che permetterà di calcolare il volume simpliciale di varietà Riemanniane piatte o iperboliche. Ci limitiamo per ora a enunciare alcune proprietà del volume simpliciale

Osserviamo innanzitutto che il volume simpliciale dipende solo dal tipo di omotopia della varietà chiusa M, come si vede facilmente ricordando che le equivalenze omotopiche inducono isomorfismi in omologia.

Proposizione 1.2. *Sia $f\colon M \to N$ una funzione continua fra n-varietà orientate, e sia d il grado di f. Allora $|d| \cdot \|N\| \leq \|M\|$.*

Si può parlare di grado fra varietà non orientate?

Dimostrazione. Per definizione di grado, vale $H_n(f_\bullet)([M]) = d \cdot [N]$. Poiché $H_n(f_\bullet)$ è 1-Lipschitz, segue che $|d| \cdot \|[N]\|_1 \leq \|[M]\|_1$, ossia la tesi. □

Corollario 1.3. *Se una varietà orientabile M ammette endomorfismi di grado almeno 2, allora $\|M\| = 0$.*

Proposizione 1.4. *Sia $f\colon M \to N$ un rivestimento di grado d fra varietà chiuse e orientabili. Allora $\|M\| = d \cdot \|N\|$.*

Dimostrazione. Se $\sum_{i\in I} a_i s_i \in C_n(N)$ è un ciclo che rappresenta la classe fondamentale di N in omologia, allora $\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^d a_i \widetilde{s}_{i,j} \in C_n(M)$ è un ciclo che rappresenta la classe fondamentale di M, dove $\widetilde{s}_{i,1}, \dots, \widetilde{s}_{i,d}$ sono i d sollevamenti di s_i. Prendendo l'estremo inferiore delle norme ℓ^1 al variare dei rappresentanti di $[N]$ otteniamo la disuguaglianza $d\|N\| \geq \|M\|$. Per l'altra, è sufficiente osservare che f è una mappa di grado d, e applicare la Proposizione 1.2. □

Data una n-varietà chiusa orientata, esiste un'unica classe in coomologia $[M]^* \in H^n(M)$ tale che $\langle [M]^*, [M] \rangle = 1$; $[M]^*$ è detta *coclasse fondamentale* di M.

Proposizione 1.5. *Vale $\|M\| = \|[M]^*\|_\infty^{-1}$ (dove si intende che $\infty^{-1} = 0$).*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 1.1 sappiamo che

$$\|M\| = \max\{\langle \beta, [M] \rangle : \beta \in H^n(M), \|\beta\|_\infty \leq 1\}.$$

Se $\|[M]^*\|_\infty = \infty$ allora l'unico elemento di $H^n(M)$ di norma finita è 0, dunque $\|M\| = 0$. Altrimenti è evidente che

$$\|M\| = \left\langle \frac{[M]^*}{\|[M]^*\|_\infty}, [M] \right\rangle = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}. \qquad \square$$

2 Coomologia continua

2.1 Definizioni

Riportiamo la definizione di topologia compatta-aperta e ne ricordiamo alcune utili proprietà.

Definizione 2.1. Siano X, Y spazi topologici, $F(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. La *topologia compatta-aperta* su $F(X,Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi

$$V(K,U) = \{f \in F(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

al variare di $K \subseteq X$ compatto e di $U \subseteq Y$ aperto.

Lemma 2.1. *(i) Siano X, Y, Z spazi topologici, $f\colon Y \to Z$, $g\colon X \to Y$ funzioni continue. Allora le applicazioni*

$$(f \circ -)\colon F(X,Y) \longrightarrow F(X,Z), \qquad (- \circ g)\colon F(Y,Z) \longrightarrow F(X,Z)$$

sono continue.

(ii) Siano X, Y spazi topologici con X localmente compatto e Hausdorff. Allora l'applicazione di valutazione

$$\begin{aligned} F(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è continua.

In questa sezione, tutti moduli di (co)catene e di (co)omologia saranno da intendersi a coefficienti in $\mathbb{R}$. Dirlo prima.

Sia M una n-varietà. Consideriamo sullo spazio $S_i(M) = F(\Delta^i, M)$ degli i-simplessi singolari la topologia compatta aperta.

Definizione 2.2. Una cocatena $\varphi \in C^i(M)$ si dice *continua* se la sua restrizione a $S_i(M)$ è continua.

Osserviamo che se $\varphi \in C^i(M)$ è continua, allora anche $\varphi \circ d \in C^{i+1}(M)$ lo è (grazie al Lemma 2.1). Dunque le cocatene continue formano un sottocomplesso di $C^\bullet(M)$, che denotiamo con $C_c^\bullet(M)$; indichiamo inoltre con $C_{b,c}^\bullet(M) = C_c^\bullet(M) \cap C_b^\bullet(M)$ il complesso delle cocatene continue limitate. I moduli di coomologia relativi ai complessi $C_c^\bullet(M)$ e $C_{b,c}^\bullet$ saranno denotati, rispettivamente, con $H_c^\bullet(M)$ e $H_{b,c}^\bullet(M)$. Le inclusioni di complessi

$$i^\bullet\colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C^\bullet(M), \qquad i_b^\bullet\colon C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_b^\bullet(M)$$

inducono mappe in coomologia

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H_b^\bullet(i_b^\bullet)\colon H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M).$$

In questa sezione ci domanderemo se queste mappe siano isomorfismi, dando risposta affermativa nel caso in cui M ammetta una metrica Riemanniana a curvatura non positiva.

2.2 Cocatene continue e moduli relativamente iniettivi

Sia M una n-varietà chiusa, $p\colon \widetilde{M} \to M$ il suo rivestimento universale. Fissiamo un'identificazione di $\Gamma = \pi_1(M)$ con il gruppo degli automorfismi di rivestimento di p.

Ricordiamo che i moduli $C^i(\widetilde{M})$ hanno una struttura naturale di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Osserviamo che per ogni $g \in \Gamma$ l'applicazione $(g \cdot -)\colon S_i(\widetilde{M}) \to S_i(\widetilde{M})$ è continua (grazie al Lemma 2.1), dunque i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ ereditano per restrizione una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli. Analogamente, i moduli $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ ereditano una struttura di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati.

Lemma 2.2. *Esiste una funzione continua $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $x \in \widetilde{M}$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di x tale che l'insieme

$$\{g \in \Gamma : g(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$

è finito;

(ii) per ogni $x \in \widetilde{M}$ vale

$$\sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g \cdot x) = 1.$$

Proposizione 2.3. *Per ogni $i \geq 0$, i moduli $C^i_c(\widetilde{M})$ e $C^i_{b,c}(\widetilde{M})$ sono relativamente iniettivi (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $C^i_c(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo. Siano A, B due $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli, $\iota\colon A \to B$ una funzione Γ-lineare fortemente iniettiva con inversa sinistra $\mathbb{R}$-lineare $\sigma\colon B \to A$, $\alpha\colon A \to C^i_c(\widetilde{M})$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
& C^i_c(\widetilde{M}) &
\end{tikzcd}$$

Sia $h_{\widetilde{M}}$ una funzione come nel Lemma 2.2. Per ogni $b \in B$ definiamo la cocatena $\beta(b) \in C^i_c(\widetilde{M})$ come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ valga

$$\beta(b)(s) = \sum_{g \in \Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}(b))))(s),$$

dove $e_0, \ldots, e_i$ sono i vertici del simplesso standard Δ^i. Osserviamo che, per le proprietà di $h_{\widetilde{M}}$, la somma su g è in realtà una somma finita, dunque $\beta(b)(s)$ è ben definito.

- $\beta(b)$ **è una cocatena continua.** Per definizione di $h_{\widetilde{M}}$, per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ esiste un intorno $W \subseteq \widetilde{M}$ di $s(e_0)$ tale che
$$\Gamma_s = \{g \in \Gamma : g^{-1}(W) \cap \operatorname{supp} h_{\widetilde{M}} \neq \emptyset\}$$
è finito. Allora per ogni $s' \in V(\{e_0\}, W)$ (che è un intorno di s in $S_i(\widetilde{M})$) vale
$$\beta(b)(s') = \sum_{g\in\Gamma_s} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s'(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot b)))(s'),$$
che è evidentemente continua in s' (grazie al Lemma 2.1).

- β **è Γ-lineare.** Sia $g_0 \in \Gamma$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\beta(g_0 \cdot b)(s) &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1}g_0 \cdot b)))(s)\\ &= \sum_{k\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}g_0^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g_0k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(s)\\ &= \sum_{k\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(k^{-1}(g_0^{-1} \circ s)(e_0))) \cdot \alpha(k(\sigma(k^{-1} \cdot b)))(g_0^{-1} \circ s)\\ &= \beta(b)(g_0^{-1} \circ s) = (g_0 \cdot \beta(b))(s).\end{aligned}$$

- **Vale $\beta \circ \iota = \alpha$.** Sia $a \in A$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\beta(\iota(a))(s) &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(g^{-1} \cdot \iota(a))))(s)\\ &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(g(\sigma(\iota(g^{-1} \cdot a))))(s)\\ &= \sum_{g\in\Gamma} h_{\widetilde{M}}(g^{-1}(s(e_0))) \cdot \alpha(a)(s) = \alpha(a)(s).\end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che $C_c^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo relativamente iniettivo.

La stessa costruzione funziona anche per $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ nel contesto di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli normati: infatti, poiché $\|\sigma\| \leq 1$, si vede che $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$. Dunque $C_{b,c}^i(\widetilde{M})$ è un $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato relativamente iniettivo. □

2.3 Varietà con curvatura non positiva

Nonostante si possa proseguire anche con ipotesi meno restrittive, per semplicità ci limiteremo a considerare, da qui alla fine della sezione, varietà chiuse M che ammettano una metrica Riemanniana con curvatura non positiva.

In questo contesto, il teorema di Cartan-Hadamard garantisce che ogni coppia di punti $x, y \in \widetilde{M}$ siano collegati da un'unica geodetica; inoltre le parametrizzazioni a velocità costante delle geodetiche dipendono in modo continuo dagli estremi. Questo fatto permette di realizzare una procedura di raddrizzamento dei simplessi singolari.

Definizione 2.3. Siano $x_0, \ldots, x_k$ punti di $\widetilde{M}$. Il *simplesso dritto* di vertici $x_0, \ldots, x_k$ è un simplesso singolare $[x_0, \ldots, x_k] \in S_k(\widetilde{M})$ definito induttivamente come segue.

- Se $k = 0$, allora $[x_0]$ è lo 0-simplesso avente immagine x_0.
- Se $k > 0$, allora $[x_0, \ldots, x_k]$ è univocamente determinato dalla seguente condizione: per ogni $z \in \Delta^{k-1} \subseteq \Delta^k$, la restrizione di $[x_0, \ldots, x_k]$ al segmento di estremi z e e_k è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che collega $[x_0, \ldots, x_{k-1}](z)$ a x_k.

È facile vedere, grazie a Cartan-Hadamard, che la definizione è ben posta (ossia $[x_0, \ldots, x_k]$ è una funzione continua). Notiamo inoltre che, essendo gli elementi di Γ isometrie di $\widetilde{M}$, vale l'identità

$$g \circ [x_0, \ldots, x_k] = [g(x_0), \ldots, g(x_k)]$$

per ogni $g \in \Gamma$.

È infine utile osservare che, essendo M e $\widetilde{M}$ spazi metrici, la topologia compatta-aperta su $S_i(M)$ e $S_i(\widetilde{M})$ coincide con quella della convergenza uniforme.

2.4 Cocatene continue e risoluzioni forti di $\mathbb{R}$

Proposizione 2.4. *I complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ sono risoluzioni forti di $\mathbb{R}$ (rispettivamente come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo e come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato).*

Il fatto che i complessi siano esatti segue dal fatto che l'identità è omotopa a 0, giusto?

Dimostrazione. Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Definiamo per ogni $i \geq 0$ un operatore $\mathbb{R}$-lineare $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} r: \quad \Delta^k &\longrightarrow \Delta^{k+1} \\ t_0e_0 + \ldots + t_ke_k &\longmapsto t_0e_1 + \ldots + t_ke_{k+1} \end{aligned}$$

che identifica Δ^k con la faccia di Δ^{k+1} opposta a e_0. Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$, definiamo $T_k(s) \in S_{k+1}(\widetilde{M})$ come l'unico simplesso singolare che soddisfa la seguente condizione: per ogni $q \in \Delta^k$, la restrizione di $T_k(s)$ al segmento di estremi e_0 e $r(q)$ è la parametrizzazione a velocità costante della geodetica di $\widetilde{M}$ di estremi x_0 e $s(q)$. Grazie al teorema di Cartan-Hadamard, è facile verificare che $T_k(s)$ è ben definito e continuo, e che l'applicazione $T_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_{k+1}(\widetilde{M})$ è continua. Estendendo T_k per $\mathbb{R}$-linearità, si ottiene una mappa $T_k \colon C_k(\widetilde{M}) \to C_{k+1}(\widetilde{M})$. Definiamo infine $T_{-1} \colon \mathbb{R} \to C_0(\widetilde{M})$ come $T_{-1}(t) = tx_0$. Si verifica facilmente che $d_0 \circ T_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ e che $T_{k-1} \circ d_k + d_{k+1} \circ T_k = \mathrm{id}_{C_k(\widetilde{M})}$ per ogni $k \geq 0$.

Definiamo ora per ogni $k \geq 0$ l'applicazione

$$\begin{aligned} h^k : C_c^k(\widetilde{M}) &\longrightarrow C_c^{k-1}(\widetilde{M}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ T_{k-1}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $h^k(\varphi)$ è effettivamente una cocatena continua, poiché la restrizione di T_{k-1} a $S_{k-1}(\widetilde{M})$ è continua. Dunque la famiglia $\{h^k\}_{k\geq 0}$ fornisce un'omotopia fra l'identità del complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo.

Infine, è evidente che per ogni $\varphi \in C_b^k(\widetilde{M})$ vale $\|h^k(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$. Dunque le restrizioni $h^k\colon C_{b,c}^k(\widetilde{M}) \to C_{b,c}^{k-1}(\widetilde{M})$ forniscono un'omotopia fra l'identità del complesso $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ e l'applicazione nulla, da cui si ottiene che $C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ è una risoluzione forte di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}[\Gamma]$-modulo normato. $\square$

2.5 Coomologia continua e coomologia singolare

Lemma 2.5. *Il morfismo di complessi $p^\bullet\colon C^\bullet(M) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ induce per restrizione isomorfismi isometrici di complessi*

$$p^\bullet|_{C_c^\bullet(M)}\colon C_c^\bullet(M) \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma, \qquad p^\bullet|_{C_{b,c}^\bullet(M)}\colon C_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma,$$

i quali a loro volta inducono isomorfismi isometrici in coomologia

$$H_c^\bullet(M) \simeq H^\bullet(C_c^\bullet(M)^\Gamma), \qquad H_{b,c}^\bullet(M) \simeq H_{b,c}^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma).$$

Fare la dimostrazione.

Possiamo infine dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Proposizione 2.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora le applicazioni*

$$H^\bullet(i^\bullet)\colon H_c^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(M), \qquad H_b^\bullet(i_b^\bullet)\colon H_{b,c}^\bullet(M) \longrightarrow H_b^\bullet(M)$$

sono isomorfismi isometrici.

Dimostrazione. In questa sezione (Proposizione 2.3 e Proposizione 2.4) abbiamo mostrato che il complesso $C_c^\bullet(\widetilde{M})$ fornisce una risoluzione forte relativamente iniettiva di $\mathbb{R}$. Sappiamo (?THM? **??**) che lo stesso vale per il complesso $C^\bullet(\widetilde{M})$. Poiché l'inclusione $j^\bullet\colon C_c^\bullet(\widetilde{M}) \to C^\bullet(\widetilde{M})$ è un morfismo di complessi che estende l'identità di $\mathbb{R}$, dalla ?THM? **??** otteniamo che

$$H^\bullet(j^\bullet)\colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare.

Analogamente,

$$H_b^\bullet(j_b^\bullet)\colon H_b^\bullet(C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H_b^\bullet(C_b^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un isomorfismo lineare. Poiché $j^\bullet$ e $j_b^\bullet$ sono 1-Lipschitz, lo stesso vale per $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H_b^\bullet(j_b^\bullet)$; per mostrare che si tratta di isometrie, è dunque sufficiente (di nuovo grazie alla ?THM? **??**) esibire morfismi di complessi $\theta^\bullet\colon C^\bullet(\widetilde{M}) \to C_c^\bullet(\widetilde{M})$, $\theta_b^\bullet\colon C_b^\bullet(\widetilde{M}) \to C_{b,c}^\bullet(\widetilde{M})$ che siano 1-Lipschitz ed estendano l'identità di $\mathbb{R}$.

Fissiamo un $x_0 \in \widetilde{M}$. Per ogni $\varphi \in C^k(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo

$$\theta^k(\varphi)(s) = \sum_{(g_0,\ldots,g_k)\in\Gamma^{k+1}} h_{\widetilde{M}}(g_0^{-1}(s(e_0)))\cdots h_{\widetilde{M}}(g_k^{-1}(s(e_k)))\cdot\varphi([g_0(x_0),\ldots,g_k(x_0)]),$$

dove $h_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to [0,1]$ è data dal Lemma 2.2. Grazie alle proprietà di $h_{\widetilde{M}}$ è facile verificare che $\theta^k(\varphi)$ (una volta estesa per $\mathbb{R}$-linearità) definisce un elemento di $C^k_c(\widetilde{M})$, e che $\theta^\bullet$ risulta essere un morfismo 1-Lipschitz di complessi di $\mathbb{R}[\Gamma]$-moduli che estende l'identità di $\mathbb{R}$.

Abbiamo dunque mostrato che le mappe $H^\bullet(j^\bullet)$ e $H^\bullet_b(j^\bullet_b)$ sono isomorfismi isometrici. Dai seguenti diagrammi commutativi di complessi

$$\begin{array}{ccc} C^\bullet_c(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet_c(\widetilde{M})^\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle i^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle j^\bullet} \\ C^\bullet(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^\bullet_{b,c}(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet_{b,c}(\widetilde{M})^\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle i^\bullet_b} & & \downarrow{\scriptstyle j^\bullet_b} \\ C^\bullet_b(M) & \xrightarrow[\simeq]{p^\bullet} & C^\bullet_b(\widetilde{M})^\Gamma \end{array}$$

(in cui le frecce orizzontali sono isomorfismi isometrici per il Lemma 2.5) segue che anche $H^\bullet(i^\bullet)$ e $H^\bullet_b(i^\bullet_b)$ sono isomorfismi isometrici. $\square$

3 Principio di proporzionalità di Gromov

3.1 Mappa di restrizione

Utilizziamo le notazioni della sezione precedente, continuando a supporre che M sia una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Sia G il gruppo delle isometrie di $\widetilde{M}$ che preservano l'orientazione. È ben noto che G ammette una struttura di gruppo di Lie che induce la topologia compatta-aperta. Di conseguenza esiste una misura di Borel regolare invariante a sinistra su G (*misura di Haar*), unica a meno di riscalamento.

Poiché Γ è un sottogruppo discreto di G e $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ è compatta, esiste un insieme misurabile $F \subseteq G$ relativamente compatto tale che $\{\gamma \cdot F\}_{\gamma\in\Gamma}$ definisca una partizione localmente finita di G. In particolare, Γ è cocompatto in G, pertanto la misura di Haar è anche invariante a destra. D'ora in poi supporremo che tale misura sia riscalata in modo che F abbia misura 1.

Reference please.

Definizione 3.1. Indichiamo con $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ il complesso delle cocatene continue G-invarianti. L'inclusione di complessi $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G \to C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$ induce una mappa in coomologia

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

detta *mappa di restrizione*.

Osserviamo che, considerando su $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ e $H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$ le seminorme indotte rispettivamente da $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ e $C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma$, la mappa di restrizione risulta 1-Lipschitz.

Ci proponiamo ora di costruire un'inversa sinistra 1-Lipschitz di $\mathrm{res}^\bullet$. Indichiamo con μ_G la misura di Haar su G. Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ e per ogni $s \in S_i(\widetilde{M})$ definiamo

$$\mathrm{trans}^i(\varphi)(s) = \int_F \varphi(g \cdot s)d\mu_G(g).$$

Si tratta di una buona definizione, poiché $\varphi(- \cdot s)$ è una funzione continua da G in $\mathbb{R}$ e F è relativamente compatto. Estendendo $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ per linearità, otteniamo un elemento di $C^i(\widetilde{M})$.

Proposizione 3.1. *Per ogni $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$ valgono le seguenti proprietà.*

(i) La cocatena $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è continua.*

(ii) Vale $\mathrm{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1}) = \mathrm{trans}^i(\varphi) \circ d^{i+1}$.

(iii) Se φ è Γ-invariante, allora $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ *è G-invariante.*

(iv) Se φ è G-invariante, allora $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$.

Dimostrazione.

(i) Osserviamo innanzitutto che la topologia compatta-aperta su $S_i(\widetilde{M})$ è indotta dalla distanza

$$\mathrm{dist}(s,s') = \sup\{\mathrm{dist}_{\widetilde{M}}(s(x),s'(x)) : x \in \Delta^i\}.$$

Sia $s_0 \in S_i(\widetilde{M})$, e sia $\epsilon > 0$. Poiché $\overline{F}$ è compatto in G, dal Lemma 2.1 si ottiene immediatamente che $\overline{F} \cdot s_0$ è compatto in $S_i(\widetilde{M})$. Dalla continuità di φ segue facilmente l'esistenza di un $\eta > 0$ tale che per ogni $s \in \overline{F} \cdot s_0$ e per ogni $s' \in S_i(\widetilde{M})$ con $\mathrm{dist}(s,s') < \eta$ valga $|\varphi(s) - \varphi(s')| \le \epsilon$. Sia dunque $s \in S_i(\widetilde{M})$ tale che $\mathrm{dist}(s_0,s) < \eta$. Poiché G agisce su $S_i(\widetilde{M})$ in modo isometrico, allora anche $\mathrm{dist}(g \cdot s_0, g \cdot s) < \eta$ per ogni $g \in G$. Ma allora

$$|\,\mathrm{trans}^i(\varphi)(s) - \mathrm{trans}^i(\varphi)(s_0)| \le \int_F |\varphi(g\cdot s) - \varphi(g \cdot s')| d\mu_G(g) \le \epsilon\mu_G(F) = \epsilon$$

dunque $\mathrm{trans}^i(\varphi)$ è continua.

(ii) Sia $s \in S_{i+1}(\widetilde{M})$, e siano $a_0,\ldots,a_{i+1} \in \mathbb{R}$, $s_0,\ldots,s_{i+1} \in S_i(\widetilde{M})$ tali che

$$d^{i+1}(s) = \sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j.$$

Osserviamo che

$$d^{i+1}(g \cdot s) = \sum_{j=0}^{r} a_j (g \cdot s_j),$$

per ogni $g \in G$, da cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{trans}^{i+1}(\varphi \circ d^{i+1})(s) &= \int_F \varphi(d^{i+1}(g \cdot s)) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \int_F \varphi(g \cdot s_j) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} a_j \,\mathrm{trans}^i(\varphi)(s_j) \\
&= \mathrm{trans}^i(\varphi) \left(\sum_{j=0}^{i+1} a_j s_j \right) = \mathrm{trans}^i(\varphi)(d^{i+1}s).
\end{aligned}$$

(iii) Fissiamo $\varphi \in C_c^i(\widetilde{M})$, $s \in S_i(\widetilde{M})$, $g_0 \in G$. Poiché F è relativamente compatto, lo sono anche $F \cdot g_0$ e $F \cdot g_0^{-1}$, dunque esistono un numero finito di elementi $\gamma_1,\ldots,\gamma_r \in \Gamma$ tali che

$$F \cdot g_0 \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F \qquad \text{e} \qquad F \cdot g_0^{-1} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j^{-1} \cdot F.$$

Posto $F_j = (\gamma_j^{-1} \cdot F \cdot g_0) \cap F$ si ottiene immediatamente che

$$F = \bigsqcup_{j=1}^{r} F_j \qquad \text{e} \qquad F \cdot g_0 = \bigsqcup_{j=1}^{r} \gamma_j \cdot F_j.$$

Sfruttando il fatto che μ_G è invariante a destra e a sinistra e che φ è Γ-invariante si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{trans}^i(\varphi)(g_0 \cdot s) &= \int_F \varphi(gg_0 \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_{F \cdot g_0} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{\gamma_j \cdot F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(\gamma_j g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{F_j} \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) \\
&= \int_F \varphi(g \cdot s) d\mu_G(g) = \mathrm{trans}(\varphi)(s).
\end{aligned}$$

(iv) Se φ è G-invariante segue immediatamente dalla definizione che $\mathrm{trans}^i(\varphi) = \varphi$. □

Corollario 3.2. *La mappa di restrizione*

$$\mathrm{res}^\bullet \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma)$$

è un'immersione isometrica.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.1 segue immediatamente che

$$\mathrm{trans}^\bullet \colon C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma \longrightarrow C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$$

è un morfismo di complessi ben definito la cui restrizione a $C_c^\bullet(\widetilde{M})^G$ è l'identità. Poiché $\mathrm{trans}^\bullet$ è evidentemente 1-Lipschitz, guardando la corrispondente mappa in coomologia si ottiene che

$$H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \colon H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \longrightarrow H^\bullet(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

è una mappa 1-Lipschitz tale che $H^\bullet(\mathrm{trans}^\bullet) \circ \mathrm{res}^\bullet$ sia l'identità. Questo conclude la dimostrazione. □

3.2 Cociclo volume

Se X è una varietà Riemanniana, denotiamo con ${}_sS_k(X)$ lo spazio dei k-simplessi *lisci* di X (ossia l'insieme delle funzioni lisce da Δ^k in X) munito della topologia C^1.

Proposizione 3.3. *Per ogni $x_0, \ldots, x_k \in \widetilde{M}$, il simplesso dritto $[x_0, \ldots, x_k]$ è liscio. Inoltre l'applicazione*

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times \ldots \times \widetilde{M} &\longrightarrow {}_sS_k(\widetilde{M}) \\ (x_0, \ldots, x_k) &\longmapsto [x_0, \ldots, x_k] \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. □

Per ogni $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo $\widetilde{\mathrm{str}}_k(s) = [s(e_0), \ldots, s(e_k)]$. Estendendo $\widetilde{\mathrm{str}}_k$ per $\mathbb{R}$-linearità otteniamo un'applicazione $\widetilde{\mathrm{str}}_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(\widetilde{M})$.

Proposizione 3.4. *L'applicazione $\widetilde{\mathrm{str}}_k \colon S_k(\widetilde{M}) \to S_k(\widetilde{M})$ soddisfa le seguenti proprietà.*

(i) $d_{k+1} \circ \widetilde{\mathrm{str}}_{k+1} = \widetilde{\mathrm{str}}_{k+1} \circ d_k$ *per ogni* $k \geq 0$ *(ossia* $\widetilde{\mathrm{str}}_\bullet \colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ *è un morfismo di complessi).*

(ii) $\widetilde{\mathrm{str}}_k(\gamma \circ s) = \gamma \circ \widetilde{\mathrm{str}}_k(s)$ *per ogni* $k \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$, $s \in S_k(\widetilde{M})$.

(iii) $\widetilde{\mathrm{str}}_\bullet \colon C_\bullet(\widetilde{M}) \to C_\bullet(\widetilde{M})$ *è omotopa all'identità mediante un'omotopia Γ-equivariante che manda simplessi lisci in una somma finita di simplessi lisci.*

Dimostrazione.

(i) È immediato verificare che la i-esima faccia di $[x_0, \ldots, x_k]$ è $[x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_k]$, da cui la tesi.

(ii) Poiché le isometrie preservano le geodetiche, si ha

$$\gamma \circ [x_0, \ldots, x_k] = [\gamma(x_0), \ldots, \gamma(x_k)],$$

da cui la tesi.

(iii) Dato un simplesso singolare $s \in S_k(\widetilde{M})$ definiamo l'applicazione $F \colon \Delta^k \times [0,1] \to \widetilde{M}$ in modo che per ogni $x \in \Delta^k$ la mappa $F(x, -) \colon [0,1] \to \widetilde{M}$ sia la parametrizzazione a velocità costante della geodetica che congiunge $s(x)$ con $\widetilde{\mathrm{str}}_k(s)(x)$. Definiamo poi $T_k(s) = F_\bullet(c)$, dove $c \in C_{k+1}(\Delta^k \times [0,1])$ è la triangolazione standard di $\Delta^k \times [0,1]$. È immediato verificare che $d_{k+1} \circ T_k + T_{k-1} \circ d_k = \mathrm{id} - \widetilde{\mathrm{str}}_k$, mentre la Γ-equivarianza di T_k segue dal fatto che le isometrie preservano le geodetiche. □

Come conseguenza otteniamo un morfismo di complessi $\mathrm{str}_\bullet \colon C_\bullet(M) \to C_\bullet(M)$ omotopo all'identità. Inoltre, dalla Proposizione 3.3, $\mathrm{str}_k(s)$ è un simplesso liscio di M per ogni $s \in S_k(M)$, e le restrizioni $\mathrm{str}_k \colon S_k(M) \to {}_sS_k(M)$ sono continue.

Supponiamo ora che M sia orientata, e sia n la dimensione di M. Denotiamo con $\omega_M \in \Omega^n(M)$ la forma volume di M.

Definizione 3.2. Per ogni $s \in S_n(M)$ definiamo

$$\mathrm{Vol}_M(s) = \int_{\mathrm{str}_n(s)} \omega_M.$$

Estendendo per linearità, otteniamo una cocatena $\mathrm{Vol}_M \in C^n(M)$, detta *cocatena volume.*

Poiché $\mathrm{str}_n \colon S_n(M) \to {}_sS_n(M)$ è continua e l'integrazione è continua rispetto alla topologia C^1, otteniamo che la cocatena volume è continua. Osserviamo inoltre che per ogni $s \in S_{n+1}(M)$ vale

$$\mathrm{Vol}_M(d(s)) = \int_{\mathrm{str}_n(d(s))} \omega_M = \int_{d\,\mathrm{str}_{n+1}(s)} \omega_M = \int_{\mathrm{str}_{n+1}(s)} d\omega_M = 0,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\mathrm{str}_\bullet$ è un morfismo di complessi e il teorema di Stokes. Pertanto Vol_M è un cociclo, e definisce classi $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$, $[\mathrm{Vol}_M]_c \in H^n_c(M)$ in coomologia.

Lemma 3.5. *Vale* $[\mathrm{Vol}_M] = \mathrm{Vol}(M) \cdot [M]^*$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $[\mathrm{Vol}_M] = \langle [\mathrm{Vol}_M], [M] \rangle \cdot [M]^*$. È ben noto che la classe fondamentale di M ammette un rappresentante della forma $c = \sum s_i$, dove gli s_i sono gli n-simplessi lisci e orientati positivamente di una triangolazione di M. Per la Proposizione 3.4, $c - \mathrm{str}_n(c)$ è bordo di una catena di simplessi lisci. Pertanto

$$\langle [\mathrm{Vol}_M], [M] \rangle = \mathrm{Vol}_M(c) = \int_{\mathrm{str}_n(c)} \omega_M = \int_c \omega_M = \mathrm{Vol}(M),$$

dove abbiamo usato il teorema di Stokes per dedurre che

$$\int_{c - \mathrm{str}_n(c)} \omega_M = 0. \qquad \square$$

3.3 Principio di proporzionalità

Consideriamo l'immagine di Vol_M mediante l'identificazione isometrica $C^n_c(M) \simeq C^n_c(\widetilde{M})^\Gamma$ indotta da $p^\bullet$: si tratta del cociclo $\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}} \colon C_n(\widetilde{M}) \to \mathbb{R}$ tale che per ogni simplesso $s \in S_n(\widetilde{M})$ valga

$$\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}(s) = \int_{\mathrm{str}_n(p \circ s)} \omega_M = \int_{p \circ \widetilde{\mathrm{str}}_n(s)} \omega_M = \int_{\widetilde{\mathrm{str}}_n(s)} \omega_{\widetilde{M}},$$

dove $\omega_{\widetilde{M}}$ è la forma volume di $\widetilde{M}$. Osserviamo che $\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}$ è una cocatena G-invariante, dunque definisce una classe $[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M}))$ tale che l'immagine di $\mathrm{res}^n([\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G)$ mediante l'identificazione isometrica $H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \simeq H_c^n(M)$ sia proprio $[\mathrm{Vol}_M]_c$.

Possiamo ora enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.6. *Sia M una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva. Allora*

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}.$$

Dimostrazione. Per come è definito il volume simpliciale per varietà non orientabili, possiamo supporre che M sia orientata. Cominciamo osservando che tutte le mappe nel seguente diagramma sono isomorfismi o immersioni isometriche (rispettivamente per la Proposizione 2.6, il Lemma 2.5 e il Corollario 3.2).

$$H^n(M) \xleftarrow[\simeq]{H^n(i^\bullet)} H_c^n(M) \xrightarrow[\simeq]{H^n(p^\bullet)} H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^\Gamma) \xleftarrow{\mathrm{res}^n} H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$$

Inoltre, a $[\mathrm{Vol}_M] \in H^n(M)$ a sinistra corrisponde $[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\widetilde{M})^G)$ a destra; in particolare, $\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty = \left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty$. Allora la tesi segue immediatamente dalla Proposizione 1.5 e dal Lemma 3.5:

$$\|M\| = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\|[\mathrm{Vol}_M]\|_\infty} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\left\|[\mathrm{Vol}_{\widetilde{M}}]_c^G\right\|_\infty}. \qquad \square$$

In particolare, abbiamo il seguente.

Corollario 3.7. *Nelle ipotesi del teorema precedente, il rapporto $\|M\| / \mathrm{Vol}(M)$ dipende solo dalla classe di isometria del rivestimento universale $\widetilde{M}$.*

4 Varietà euclidee e iperboliche

4.1 Varietà euclidee

Il principio di proporzionalità di Gromov permette di calcolare immediatamente il volume simpliciale di tutte le varietà chiuse euclidee (ossia localmente isometriche a $\mathbb{R}^n$).

Proposizione 4.1. *Sia M una varietà chiusa euclidea. Allora $\|M\| = 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che l'n-toro euclideo $(S^1)^n$ ha volume simpliciale nullo, poiché ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto. Poiché il rivestimento universale di ogni varietà euclidea è isometrico a $\mathbb{R}^n$, dal Corollario 3.7 segue che

$$\frac{\|M\|}{\mathrm{Vol}(M)} = \frac{\left\|(S^1)^n\right\|}{\mathrm{Vol}((S^1)^n)} = 0. \qquad \square$$

4.2 Varietà iperboliche

Nel resto di questa sezione ci proponiamo di calcolare il rapporto $\|M\| \,/\, \mathrm{Vol}(M)$ per varietà chiuse iperboliche (ossia localmente isometriche a $\mathbb{H}^n$). Il Teorema 3.6 garantisce che non dipende dalla varietà M, e fornisce un metodo per calcolarlo: è sufficiente conoscere la seminorma della coclasse $[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G \in H^n(C_c^\bullet(\mathbb{H}^n)^G)$, dove G denota il gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}^n$ che preservano l'orientazione.

Ricordiamo brevemente alcuni fatti riguardanti la geometria dei simplessi dritti in $\mathbb{H}^n$. Un *k-simplesso (geodetico)* in $\overline{\mathbb{H}^n}$ è l'inviluppo convesso di $k+1$ punti in $\mathbb{H}^n$, detti *vertici*. Un simplesso si dice *finito* se tutti i suoi vertici appartengono a $\mathbb{H}^n$, ideale se tutti i suoi vertici appartengono a $\partial\mathbb{H}^n$, e *regolare* e ogni permutazione dei suoi vertici si estende a un'isometria di $\mathbb{H}^n$. I simplessi geodetici sono esattamente le immagini dei simplessi dritti (più precisamente, l'immagine di $[x_0, \dots, x_k]$ è il simplesso geodetico di vertici $x_0, \dots, x_k$). Per ogni $\ell > 0$ esiste a meno di isometria un unico n-simplesso regolare finito di lato ℓ, che denoteremo con τ_ℓ. Inoltre esiste a meno di isometria un unico n-simplesso regolare ideale, che denoteremo con τ_∞; definiamo infine $v_n = \mathrm{Vol}(\tau_\infty)$.

Teorema 4.2. *Sia Δ un n-simplesso geodetico in $\mathbb{H}^n$. Allora $\mathrm{Vol}(\Delta) \le v_n$, e $\mathrm{Vol}(\Delta) = v_n$ se e solo se Δ è regolare ideale.*

Teorema 4.3. *Vale $\lim_{\ell\to\infty} \mathrm{Vol}(\tau_\ell) = v_n$.*

Reference please.

Parlare delle cocatene alternanti.

Proposizione 4.4. *Sia M una n-varietà iperbolica chiusa. Allora*

$$\|M\| = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{v_n}.$$

Dimostrazione. Grazie al Teorema 3.6, è sufficiente dimostrare che $\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty = v_n$. Dal Teorema 4.2 segue che

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \le \|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}\|_\infty = v_n,$$

quindi rimane da mostrare la disuguaglianza opposta.

Per definizione,

$$\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty = \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi_\infty\| : \varphi \in C_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}.$$

Osserviamo che la cocatena volume è alternante; inoltre il morfismo 1-Lipschitz $\mathrm{alt}^\bullet \colon C^\bullet(\mathbb{H}^n) \to C^\bullet(\mathbb{H}^n)$ preserva le cocatene continue e G-invarianti, dunque

$$\begin{aligned}\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty &\geq \inf\left\{\|\mathrm{alt}^n(\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi)\|_\infty : \varphi \in C_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &= \inf\left\{\left\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\,\mathrm{alt}^{n-1}(\varphi)\right\|_\infty : \varphi \in C_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &= \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi\|_\infty : \varphi \in C_{c,\mathrm{alt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}.\end{aligned}$$

Sia dunque φ una $(n-1)$-cocatena continua alternante e G-invariante. Consideriamo un n-simplesso regolare finito τ_ℓ e la sua parametrizzazione $s_\ell = [\tau_\ell(e_0), \dots, \tau_\ell(e_n)]$; sia $\partial_i s_\ell = [\tau_\ell(e_0), \dots, \widehat{\tau_\ell(e_i)}, \dots, \tau_\ell(e_n)]$ la i-esima faccia. Sia $\sigma \colon \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ una mappa affine che induce una permutazione dispari sui vertici di Δ^{n-1}. Poiché τ_ℓ è regolare, esiste un'isometria $g \in G$ di $\mathbb{H}^n$ tale che $g \circ \partial_i s_\ell = \partial_i s_\ell \circ \sigma$; a meno di comporre con la riflessione lungo l'iperpiano che contiene l'immagine di $\partial_i s_\ell$, possiamo supporre che g preservi l'orientazione. Sfruttando il fatto che φ è contemporaneamente G-invariante e alternante Funziona? otteniamo

$$\varphi(\partial_i s_\ell) = \varphi(g \circ \partial_i s_\ell) = \varphi(\partial_i s_\ell \circ \sigma) = -\varphi(\partial_i s_\ell),$$

da cui $\varphi(\partial_i s_\ell) = 0$ e $\varphi(ds_\ell) = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned}\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty &\geq \inf\left\{\|\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi\|_\infty : \varphi \in C_{c,\mathrm{alt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &\geq \inf\left\{|(\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n} + \delta\varphi)(s_\ell)| : \varphi \in C_{c,\mathrm{alt}}^{n-1}(\mathbb{H}^n)^G\right\}\\ &= |\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}(s_\ell)| = \mathrm{Vol}(\tau_\ell).\end{aligned}$$

Facendo tendere $\ell \to \infty$, dal Teorema 4.3 otteniamo $\left\|[\mathrm{Vol}_{\mathbb{H}^n}]_c^G\right\|_\infty \geq v_n$, il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 4.5. *Sia Σ_g la superficie chiusa orientabile di genere g. Allora*

$$\|\Sigma_g\| = \begin{cases} 0 & g < 2 \\ 4g - 4 & g \geq 2 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Per i casi $g = 0, 1$ basta osservare che S^2 e $S^1 \times S^1$ ammettono endomorfismi di grado arbitrariamente alto, dunque hanno volume simpliciale nullo. Se invece $g \geq 2$, è ben noto che Σ_g ammette una metrica iperbolica. Ricordando che $v_2 = \pi$ e $\mathrm{Area}(\Sigma_g) = -2\pi\chi(\Sigma_g) = 4\pi g + 4\pi$, dalla Proposizione 4.4 segue che

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\mathrm{Area}(\Sigma_g)}{v_2} = 4g - 4. \qquad \square$$