

# Volume simpliciale

Norma e seminorma  $\ell^1$

Sia  $X$  uno spazio topologico.

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

Norma  $\ell^1$  su  $C_n(X)$

$$\left\| \sum a_i s_i \right\|_1 = \sum |a_i| \in (0, +\infty)$$

Seminorma  $\ell^1$  su  $H_n(X)$

$$\|\alpha\|_1 = \inf \{ \|c\|_1 : c \in Z_n(X), [c] = \alpha \} \in [0, +\infty]$$

# Volume simpliciale

## Classe fondamentale

Sia  $M$  una  $n$ -varietà chiusa orientata.

- ▶  $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ .
- ▶ L'orientazione fissa un generatore  $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M, \mathbb{Z})$ .
- ▶ Il cambio di coefficienti  $C_{\bullet}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{\bullet}(M, \mathbb{R})$  induce

$$\begin{aligned} H_{\bullet}(M\mathbb{Z}) &\longrightarrow H_{\bullet}(M, \mathbb{R}) \\ [M]_{\mathbb{Z}} &\longmapsto [M]_{\mathbb{R}} = [M]. \end{aligned}$$

# Volume simpliciale

## Definizione

### Definizione

Sia  $M$  una  $n$ -varietà chiusa orientata,  $[M] \in H_n(M)$  la sua classe fondamentale. Si chiama *volume simpliciale* il numero reale

$$\|M\| = \|[M]\|_1.$$

- ▶ Non dipende dall'orientazione  $\implies$  è ben definito per varietà chiuse orientabili.
- ▶ Può essere nullo, anche se  $[M] \neq 0$ .

# Volume simpliciale

## Principio di proporzionalità

### Teorema

Sia  $M$  una varietà Riemanniana chiusa.

Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di  $M$ .

# Volume simpliciale

## Principio di proporzionalità

Lo dimostreremo con un'ipotesi aggiuntiva.

### Teorema

Sia  $M$  una varietà Riemanniana chiusa con curvatura non positiva.  
Allora il rapporto

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)} = \frac{1}{\|[\text{Vol}_{\tilde{M}}]^G\|_\infty}$$

dipende solo dal tipo di isometria del rivestimento universale di  $M$ .

# Applicazioni

## Limitazione del grado

### Proposizione

Siano  $M, N$   $n$ -varietà chiuse orientate,  $f: M \rightarrow N$  una funzione continua di grado  $d$ . Allora

$$|d| \cdot \|N\| \leq \|M\|.$$

### Corollario

Sia  $f: M \rightarrow M$  di grado  $d \geq 2$ . Allora  $\|M\| = 0$ .

# Applicazioni

## Varietà euclidee

- ▶ L' $n$ -toro  $(S^1)^n$  ammette endomorfismi di grado arbitrariamente alto; di conseguenza,  $\|(S^1)^n\| = 0$ .
- ▶  $(S^1)^n$  ammette una metrica piatta, con rivestimento universale isometrico a  $\mathbb{R}^n$ .
- ▶ Data una qualunque  $n$ -varietà chiusa euclidea  $M$ , vale

$$\frac{\|M\|}{\text{Vol}(M)} = \frac{\|(S^1)^n\|}{\text{Vol}((S^1)^n)} = 0$$

da cui  $\|M\| = 0$ .

# Applicazioni

## Varietà iperboliche

### Teorema

Sia  $M$  una  $n$ -varietà chiusa iperbolica. Allora

$$\|M\| = \frac{\text{Vol}(M)}{v_n},$$

dove  $v_n$  è il volume dell' $n$ -simpleso ideale regolare in  $\mathbb{H}^n$ .

### Corollario

Una varietà chiusa  $M$  non può ammettere contemporaneamente una metrica euclidea e una iperbolica.



# Applicazioni

## Mappe fra superfici

Sia  $\Sigma_g$  la superficie chiusa orientabile di genere  $g$ .

- ▶ Per  $g \leq 1$  vale  $\|\Sigma_g\| = 0$
- ▶ Per  $g \geq 2$ ,  $\Sigma_g$  ammette una metrica iperbolica.

$$\|\Sigma_g\| = \frac{\text{Vol}(\Sigma_g)}{v_2} = -\frac{2\pi\chi(\Sigma_g)}{\pi} = 4g - 4.$$

- ▶ Sia  $f: \Sigma_{g_1} \rightarrow \Sigma_{g_2}$ , con  $g_1 \geq 1$ ,  $g_2 \geq 2$ . Allora

$$|\deg(f)| \leq \frac{\|\Sigma_{g_1}\|}{\|\Sigma_{g_2}\|} = \frac{g_1 - 1}{g_2 - 1}.$$

# Dualità

## Norma e seminorma $\ell^\infty$

Sia  $X$  uno spazio topologico

$$\dots \xleftarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta^n} C^n(X) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X) \xleftarrow{\delta^{n-2}} \dots$$

Norma  $\ell^\infty$  su  $C^n(X)$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{ |\varphi(c)| : c \in C_n(X), \|c\|_1 \leq 1 \} \in (0, +\infty]$$

Seminorma  $\ell^\infty$  su  $H^n(X)$

$$\|\beta\|_\infty = \inf \{ \|\varphi\|_\infty : \varphi \in Z^n(X), [\varphi] = \beta \} \in [0, +\infty]$$

# Dualità

## Prodotto di Kronecker

Il prodotto di Kronecker è l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned}\langle -, - \rangle : H^n(X) \times H_n(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\varphi], [z]) &\longmapsto \varphi(z).\end{aligned}$$

## Proposizione

Sia  $\alpha \in H^n(X)$ . Allora

$$\|\alpha\|_1 = \max \{ \langle \beta, \alpha \rangle : \beta \in H^n(X), \|\beta\|_\infty \leq 1 \}.$$

# Dualità

## Volume simpliciale

Sia  $M$  una  $n$ -varietà chiusa orientata,  $[M] \in H_n(M)$  la sua classe fondamentale.

- ▶ Esiste un'unica classe  $[M]^* \in H^n(M)$  tale che

$$\langle [M]^*, [M] \rangle = 1.$$

- ▶ Per dualità, vale

$$\|M\| = \|[M]\|_1 = \frac{1}{\|[M]^*\|_\infty}.$$