Esercizi del 16 maggio

Esercizio 5.4

Definizione di X. Sia

$$X = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : A \text{ è simmetrica e definita positiva}\}.$$

Definiamo l'azione

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\longrightarrow X \\ (M, A) &\longmapsto MAM^t. \end{aligned}$$

Per un ben noto fatto di algebra lineare, per ogni $A \in X$ esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $MM^t = A$ (infatti A e Id hanno la stessa segnatura). A meno di sostituire M con

$$M \cdot \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

possiamo supporre che $\det M > 0$. Osserviamo poi che

$$1 = \det A = \det(MM^t) = (\det M)^2,$$

da cui $\det M = 1$. Abbiamo dunque mostrato che per ogni $A \in X$ esiste $M \in G$ tale che $\alpha(M, \mathrm{Id}) = A$, da cui segue che l'azione è transitiva. Lo stabilizzatore di $\mathrm{Id} \in X$ è l'insieme dalle matrici $M \in G$ tali che $MM^t = \mathrm{Id}$, ossia precisamente $SO(n, \mathbb{R}) = K$.

Come accade sempre per un'azione transitiva, abbiamo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} X &\longleftrightarrow G/K \\ \alpha(M, \mathrm{Id}) &\longleftarrow M \cdot K, \end{aligned}$$

che permette di identificare X con G/K.

Definizione della metrica Riemanniana. Sappiamo che il tangente a X nel punto Id è dato da

$$T_{\mathrm{Id}}X = \{B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : B = B^t, \operatorname{tr} B = 0\}.$$

Il gruppo G agisce su TX mediante α come segue: se $M \in G$, $A \in X$, $B \in T_A X$ allora

$$M \cdot B = MBM^t \in T_{\alpha(M,A)}X.$$

Definiamo il prodotto scalare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_{\mathrm{Id}} : T_{\mathrm{Id}}X \times T_{\mathrm{Id}}X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (B, C) &\longmapsto \operatorname{tr}(BC). \end{aligned}$$

È evidente che si tratta di un'applicazione bilineare simmetrica; è inoltre un prodotto scalare definito positivo poiché, se B è una matrice simmetrica, allora $\operatorname{tr}(B^2)$ è la somma dei quadrati degli autovalori di B, strettamente positiva a meno che $B = 0$.

Osserviamo che questo prodotto scalare è K-invariante: per ogni $B, C \in T_{\mathrm{Id}}X$, $M \in K$ vale infatti

$$\left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} = \operatorname{tr}(MBCM^t) = \operatorname{tr}(MM^tBC) = \operatorname{tr}(BC) = \langle B, C\rangle_{\mathrm{Id}}\,.$$

Possiamo allora definire una metrica Riemanniana G-invariante su X come segue: per ogni $A \in X$ definiamo

$$\begin{aligned} \langle -,-\rangle_A : T_AX \times T_AX &\longrightarrow \mathbb{R} \\ B, C &\longmapsto \langle MBM^t, MCM^t\rangle_{\mathrm{Id}}\,, \end{aligned}$$

dove $M \in G$ è una matrice tale che $\alpha(M, A) = \mathrm{Id}$. Svolgiamo le verifiche necessarie.

- L'applicazione è ben definita. Infatti, se due matrici $M, N \in G$ soddisfano $\alpha(M, A) = \alpha(N, A) = \mathrm{Id}$, allora NM^{-1} è un elemento dello stabilizzatore di Id, ossia è un elemento di K. Ma allora, poiché $\langle -,-\rangle_{\mathrm{Id}}$ è K-invariante, abbiamo

$$\begin{aligned} \left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} &= \left\langle NM^{-1}MBM^t(M^t)^{-1}N^t, NM^{-1}MCM^t(M^t)^{-1}N^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\ &= \left\langle NBN^t, NCN^t \right\rangle_{\mathrm{Id}}\,. \end{aligned}$$

- Poiché $\langle -,-\rangle_{\mathrm{Id}}$ è un prodotto scalare definito positivo, è evidente che lo stesso vale per $\langle -,-\rangle_A$.

- La metrica Riemanniana così definita è G-invariante. Siano infatti $A \in X$, $M \in G$, $B, C \in T_AX$; sia $N \in G$ tale che $\alpha(N, A) = \mathrm{Id}$. Allora NM^{-1} è tale che $\alpha(NM^{-1}, \alpha(M, A)) = \mathrm{Id}$, dunque

$$\begin{aligned} \left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\alpha(M,A)} &= \left\langle (NM^{-1})MBM^t(NM^{-1})^t, (NM^{-1})MCM^t(NM^{-1})^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\ &= \left\langle NBN^t, NCN^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\ &= \langle B, C\rangle_A \end{aligned}$$

Definizione dell'inversione. Definiamo l'inversione nel punto $\mathrm{Id} \in X$ come

$$\begin{aligned} \tau : X &\longrightarrow X \\ A &\longmapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

È ovviamente un diffeomorfismo di ordine 2. Calcoliamo il differenziale di τ in ogni punto: se $A \in X$ e $B \in T_AB$, allora

$$\begin{aligned} \tau(A + tB) &= (A + tB)^{-1} \\ &= (\mathrm{Id} + tA^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= A^{-1} - tA^{-1}BA^{-1} + o(t), \end{aligned}$$

da cui

$$\mathrm{d}\tau_A(B) = -A^{-1}BA^1 \in T_{A^{-1}}X.$$

Questo ci dice immediatamente che $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{Id}} = -\,\mathrm{id}_{T_{\mathrm{Id}}X}$. Possiamo inoltre verificare che τ è un'isometria. Siano $M \in G$, $A \in X$, $B, C \in T_AX$. Sia $M \in G$ una matrice tale che $\alpha(M, A) = \mathrm{Id}$. Allora

$(M^{-1})^t$ è tale che $\alpha((M^{-1})^t, A^{-1}) = \mathrm{Id}$, dunque

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}\tau_A(B), \mathrm{d}\tau_A(C)\rangle &= \left\langle (M^{-1})^t A^{-1} B A^{-1} M^{-1}, (M^{-1})^t A^{-1} C A^{-1} M^{-1} \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \left\langle (AM^t)^{-1} B (MA)^{-1}, (AM^t)^{-1} C (MA)^{-1} \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&\overset{MAM^t = \mathrm{Id}}{=} \left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \langle B, C\rangle_A .
\end{aligned}$$

Evidentemente $\mathrm{Id} \in X$ è un punto fisso per τ; mostriamo che è anche isolato. Fissiamo una norma submoltiplicativa $\|-\|$ sullo spazio di matrici $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Sia $A \in X$ diverso dall'identità, e poniamo $B = A - \mathrm{Id} \neq 0$; mostriamo che se $\|B\| < 2$ allora $\tau(A) \neq A$. Se per assurdo $\tau(A) = A$, allora $(\mathrm{Id} + B)^2 = \mathrm{Id}$, da cui immediatamente $-2B = B^2$. Ma allora varrebbe

$$2\|B\| = \left\|B^2\right\| \leq \|B\|^2 ,$$

contro l'ipotesi. Segue che Id è un punto fisso isolato di τ.

Mostriamo infine che τ è compatibile con l'azione di G e σ: siano $A \in X$, $M \in G$. Allora

$$\tau(\alpha(M, A)) = (MAM^t)^{-1} = (M^t)^{-1} A^{-1} M^{-1} = \alpha((M^t)^{-1}, A) = \alpha(\sigma(M), A).$$