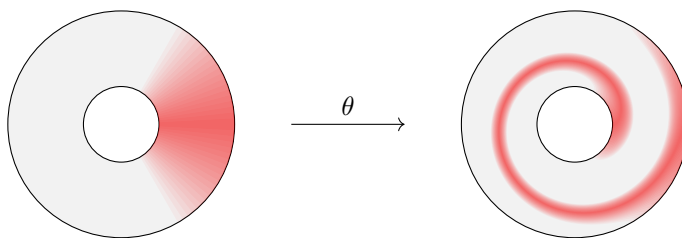


Esercizi dell'11 aprile

Dehn twist

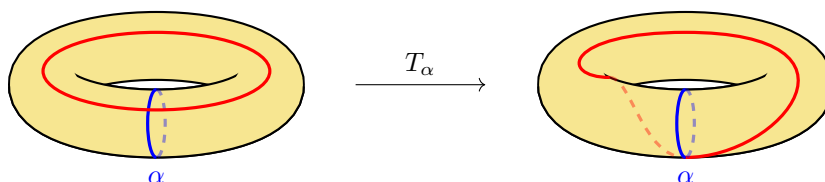
Per fissare la notazione, ricordiamo come si definiscono i Dehn twist. Siano S una superficie chiusa orientabile, $\alpha: S^1 \rightarrow S$ una curva semplice chiusa non banale. Sia $A = S^1 \times [-1, 1]$ con l'orientazione indotta da quelle standard di S^1 e $[-1, 1]$. Fissiamo un intorno regolare di α , ossia un embedding $\psi: A \rightarrow S$ tale che $\psi(x, 0) = \alpha(x)$ per ogni $x \in S^1$; scegliamolo in modo che ψ preservi l'orientazione. Fissiamo infine una funzione $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ tale che $f(t) = 0$ per $t \leq -\frac{1}{2}$ e $f(t) = 2\pi$ per $t \geq \frac{1}{2}$, e definiamo

$$\begin{aligned} \theta: A &\longrightarrow A \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto (e^{i(x+f(t))}, t). \end{aligned}$$



Possiamo ora definire il Dehn twist intorno a α come il diffeomorfismo $T_\alpha: S \rightarrow S$ tale che

$$T_\alpha(p) = \begin{cases} p & p \notin \psi(A) \\ (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1})(p) & p \in \psi(A). \end{cases}$$



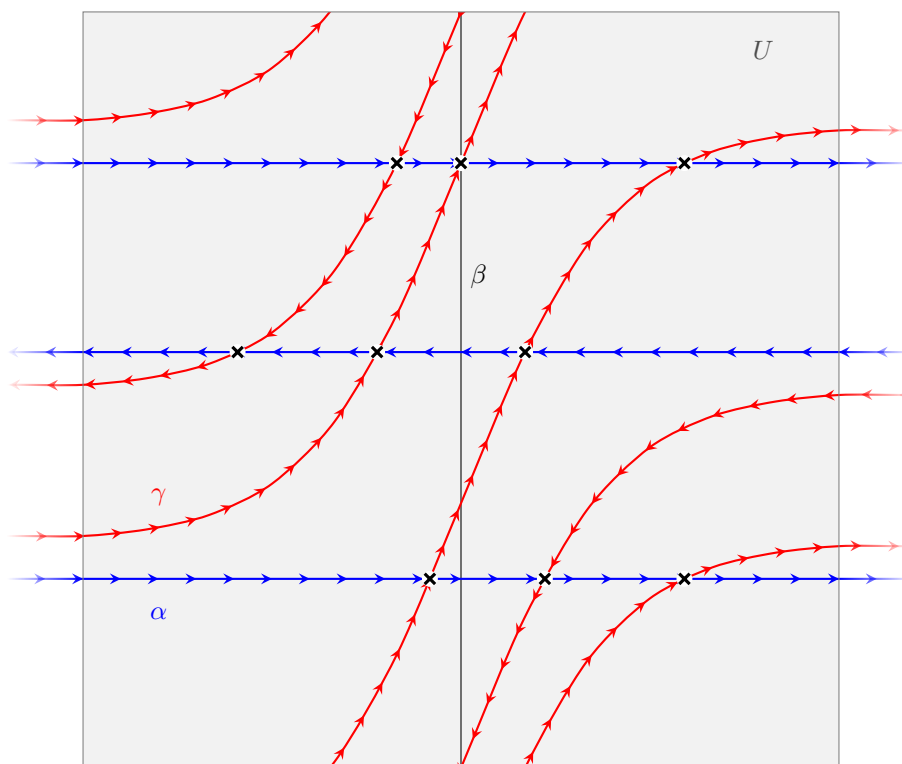
Come visto a lezione, la classe di isotopia di T_α non dipende dalla scelta dell'intorno regolare ψ né della funzione f . Mostreremo inoltre nell'Esercizio 3.2 che la classe di isotopia di T_α non cambia invertendo l'orientazione di α o sostituendo α con una curva a lei isotopa: è dunque ben definito l'elemento $T_a \in \text{MCG}(S)$ per $a \in \mathcal{S}$.

Esercizio 3.1

Lemma 1. *Siano a, b classi di isotopia di curve semplici chiuse, con b non banale, e sia $k \geq 0$. Allora*

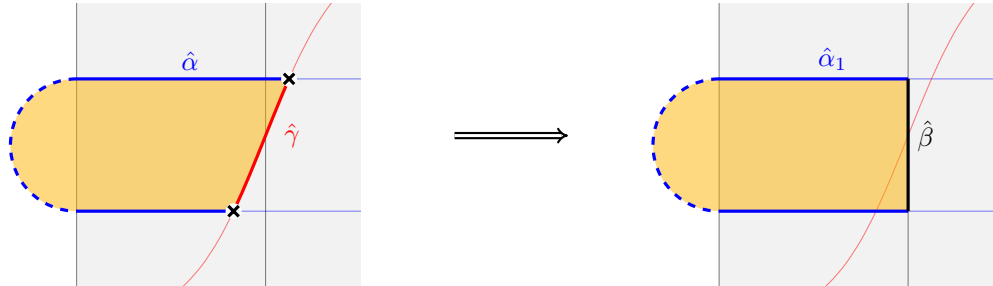
$$i(a, T_b^k(a)) = k \cdot i(a, b)^2.$$

Dimostrazione. Siano α, β rappresentanti di a, b in posizione minimale. Se α e β non si intersecano la tesi è ovvia, dunque supponiamo che si intersechino almeno in un punto. Scegliamo un intorno regolare U di β abbastanza stretto da intersecare α in $i(a, b)$ archi disgiunti, ciascuno dei quali interseca β esattamente una volta. Definiamo un rappresentante γ della classe $T_b^k(a)$ come segue: consideriamo una curva α' parallela a α , ottenuta traslando α lungo un suo intorno regolare, e poniamo $\gamma = T_\beta^k(\alpha')$. Possiamo orientare α e γ in modo che siano coorientate e che entrando in U si allontanino.

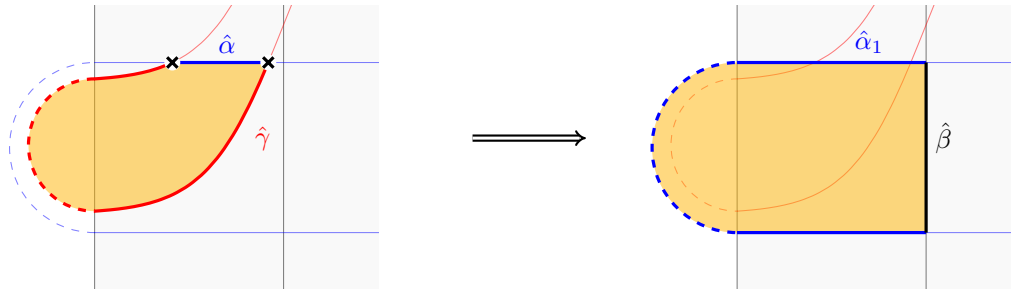


È immediato verificare che α e γ si intersecano esattamente in $k \cdot i(a, b)^2$ punti. È dunque sufficiente mostrare che α e γ sono in posizione minimale, ossia che non formano bigoni. Se $i(a, b) = 1$ allora α e γ non possono formare bigoni (si intersecano sempre con la stessa orientazione), quindi supponiamo $i(a, b) \geq 2$. Supponiamo per assurdo che esista un bigono D , e siano $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ i lati di D che giacciono rispettivamente su α e γ . Distinguiamo alcuni casi.

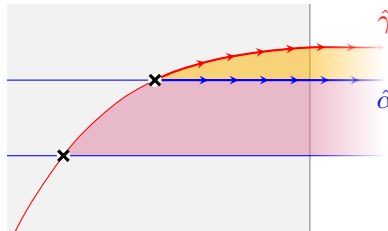
- Se $\hat{\gamma}$ è tutto contenuto in U , allora α e β formano un bigono, ma ciò è impossibile, dato che sono in posizione minimale.



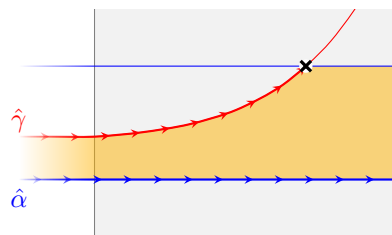
- Se $\hat{\alpha}$ è tutto contenuto in U , allora di nuovo α e β formano un bigono (ricordiamo che α e γ sono parallele fuori da U).



- Dunque $\hat{\alpha}$ esce da U per poi rientrarvi. Analizziamo cosa succede vicino vicino al punto in cui $\hat{\alpha}$ esce da U .



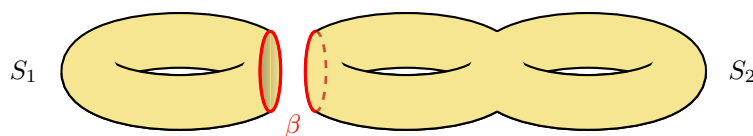
Osserviamo che la regione in rosa non può essere un bigono, in quanto il suo lato giacente su γ è tutto contenuto in U , e abbiamo già escluso questa possibilità. Dunque il bigono è necessariamente la regione arancione, e $\hat{\gamma}$ è parallelo a $\hat{\alpha}$ fuori da U . Analizziamo ora cosa succede vicino al punto in cui $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ rientrano in U .



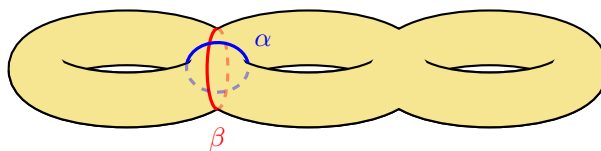
Dopo essere entrati in U , $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ si allontanano, dunque non è possibile che la prima intersezione di $\hat{\gamma}$ con α sia il secondo estremo di $\hat{\alpha}$; è pertanto impossibile che $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ siano lati di un bigono. \square

Sia $b \in \mathcal{S}$ una classe di isotopia non banale, e $\beta: S^1 \rightarrow S$ una curva che la rappresenta. Mostriamo che esiste $a \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, b) \neq 0$.

- **Supponiamo che β sia separante.** In questo caso $S \setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici S_1 e S_2 , ciascuna con una componente di bordo. Naturalmente S_1 e S_2 hanno genere almeno 1, altrimenti β sarebbe omotopicamente banale.

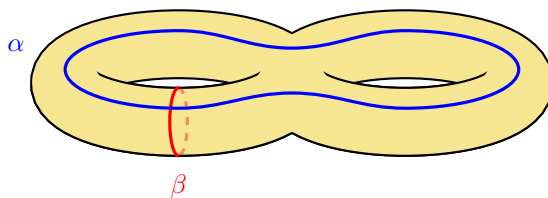


Allora possiamo prendere come a la classe di isotopia della curva α ottenuta come in figura.



Mediante il criterio del bigono è facile vedere che α e β sono in posizione minimale, dunque $i(a, b) = 2$.

- **Supponiamo che β non sia separante.** In questo caso esiste una curva α che interseca β esattamente una volta (basta collegare due punti di S molto vicini a β mediante un arco che non interseca β).



Prendendo come a la classe di isotopia di α , otteniamo che $i(a, b) = 1$.

Dal Lemma 1 sappiamo che

$$i(a, T_b^k(a)) = k \cdot i(a, b)^2 \neq 0$$

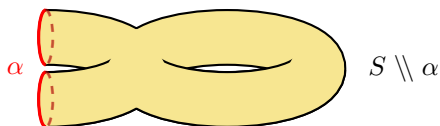
per ogni $k > 0$, dunque in particolare $T_b^k(a) \neq a$. Pertanto l'azione di T_b^k su \mathcal{S} è non banale, e in particolare T_b^k non è banale.

Esercizio 3.2

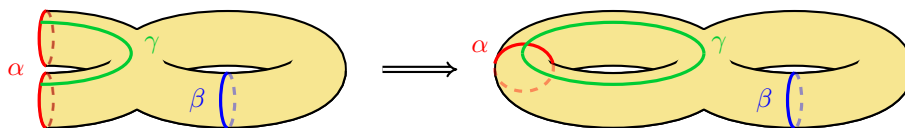
Lemma 2. Siano $a, b \in \mathcal{S}$ due classi di isotopia non banali distinte. Allora esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, c) \neq i(b, c)$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se $i(a, b) \neq 0$ allora è sufficiente scegliere $c = a$, giacché $i(a, a) = 0$. Supponiamo dunque che $i(a, b) = 0$, e siano α, β curve semplici chiuse in posizione minimale che rappresentano a e b ; in particolare, α e β hanno supporti disgiunti. Distinguiamo alcuni casi.

- **Supponiamo che α non sia separante.** Allora $S \setminus \alpha$ è una superficie compatta connessa con due componenti di bordo.



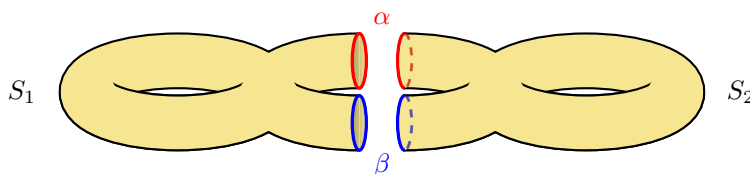
- **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano alla stessa componente connessa di $S \setminus \alpha \setminus \beta$.** Allora esiste una curva γ che interseca α esattamente una volta e non interseca β .



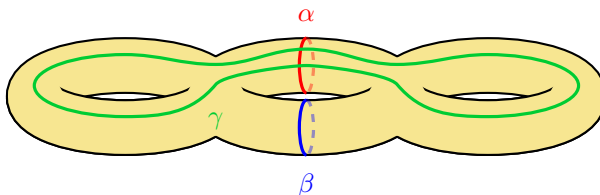
Prendendo come c la classe di isotopia di γ , otteniamo che

$$i(a, c) = 1 \neq 0 = i(b, c).$$

- **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano a componenti connesse diverse di $S \setminus \alpha \setminus \beta$.** In questo caso $S \setminus \alpha \setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici S_1 e S_2 , ciascuna con due componenti di bordo, una lungo α e una lungo β .



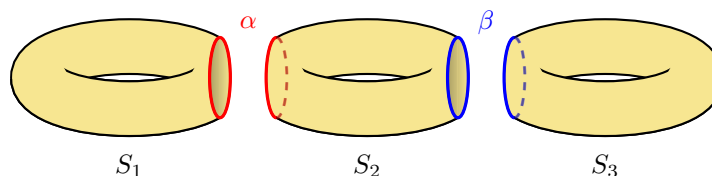
Osserviamo che S_1 e S_2 hanno genere almeno 1, altrimenti α e β coborderebbero un anello e sarebbero dunque isotope. È allora facile individuare una curva γ la cui classe di isotopia c soddisfa la tesi.



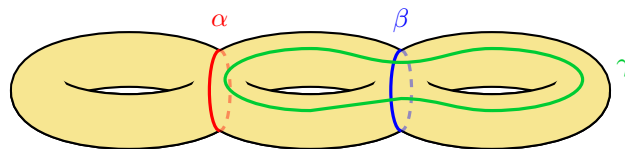
Grazie al criterio del bigono, si verifica che α e γ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a, c) = 2 \neq 0 = i(b, c).$$

- **Supponiamo che β non sia separante.** Possiamo allora ripetere il ragionamento del punto precedente, scambiando i ruoli di α e β , ottenendo una classe c tale che $i(a, c) \neq i(b, c)$.
- **Supponiamo che α e β siano separanti.** Allora $S \setminus \alpha \setminus \beta$ è unione disgiunta di tre superfici S_1 , S_2 e S_3 ; S_1 ha una componente di bordo lungo α , S_3 ha una componente di bordo lungo β , e S_2 ha due componenti di bordo, una lungo α e una lungo β .



Osserviamo che S_1 e S_3 hanno genere almeno 1, altrimenti α o β sarebbero omotopicamente banali, e che anche S_2 ha genere almeno 1, altrimenti sarebbero isotopi. È allora facile individuare una curva γ la cui classe di isotopia c soddisfa la tesi.



Grazie al criterio del bigono, si verifica che β e γ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a, c) = 0 \neq 2 = i(b, c).$$

□

- (1) ■ Cominciamo a mostrare che la classe di isotopia di T_α non dipende dall'orientazione di α . Sia dunque $\alpha: S^1 \rightarrow S$ una curva semplice chiusa, e sia $\bar{\alpha}: S^1 \rightarrow S$ la curva inversa, ossia quella definita da $\bar{\alpha}(e^{ix}) = \alpha(e^{-ix})$. Se $\psi: A \rightarrow S$ è un intorno regolare orientato di α , allora

$$\begin{aligned} \bar{\psi}: A &\longrightarrow S \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto \psi(e^{-ix}, -t) \end{aligned}$$

è un intorno regolare orientato di $\bar{\alpha}$. Poiché la classe di isotopia dei Dehn twist non dipende dalla scelta di f , non è restrittivo supporre che $f(-t) = 2\pi - f(t)$. Mostriamo allora che $T_\alpha(p) = T_{\bar{\alpha}}(p)$ per ogni $p \in S$ (dunque in particolare T_α e $T_{\bar{\alpha}}$ sono isotopi). La tesi è ovvia per $p \notin \psi(A)$, dunque supponiamo $p \in \psi(A)$; è sufficiente far vedere che $\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \bar{\psi} = \bar{\psi} \circ \theta$. Effettivamente:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \bar{\psi})(e^{ix}, t) &= \psi(\theta(e^{-ix}, -t)) = \psi(e^{i(-x+f(-t))}, -t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t); \\ (\bar{\psi} \circ \theta)(e^{ix}, t) &= \bar{\psi}(e^{i(x+f(t))}, t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t). \end{aligned}$$

- Supponiamo che le curve semplici chiuse non banali $\alpha, \beta: S^1 \rightarrow S$ siano due rappresentanti della stessa classe di isotopia, ossia che esista un'isotopia (ambiente) $F: S \times [0, 1] \rightarrow S$ tale che $F_0 = \text{id}_S$ e $F_1 \circ \alpha = \beta$. Osserviamo che, per quanto abbiamo dimostrato, possiamo orientare α e β in modo che una tale isotopia esista. Sia $\psi: A \rightarrow S$ un intorno regolare orientato di α ; notiamo che $F_1 \circ \psi$ è un intorno regolare orientato di β . È allora evidente che un Dehn twist intorno a β è dato da $T_\beta = F_1 \circ T_\alpha \circ F_1^{-1}$, che è ovviamente isotopo a T_α . Questo mostra che $T_\beta = T_\alpha$ in $\text{MCG}(S)$.
- Siano ora $\alpha, \beta: S^1 \rightarrow S$ due curve semplici chiuse non banali e non isotope, e siano $a, b \in \mathcal{S}$ le corrispondenti classi di isotopia. Per il Lemma 2, esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, c) \neq i(b, c)$. Dal Lemma 1 otteniamo

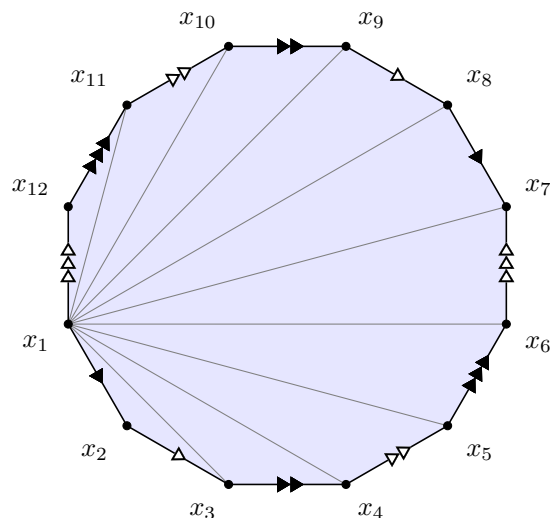
$$i(c, T_a(c)) = i(c, a)^2 \neq i(c, b)^2 = i(c, T_b(c)),$$

da cui $T_a \neq T_b$ come elementi di $\text{MCG}(S)$.

- (2) Per non creare conflitti di notazione, siano $h \in \text{MCG}(S)$, $a \in \mathcal{S}$. Sia $\alpha: S^1 \rightarrow S$ un rappresentante di a , e con lieve abuso di notazione trattiamo h come un diffeomorfismo di S . Sia $\psi: A \rightarrow S$ un intorno regolare di α : notiamo che $h \circ \psi$ è un intorno regolare di $h \circ \alpha$. Ma allora è evidente che $h \circ T_\alpha \circ h^{-1}$ è un Dehn twist intorno a $h \circ \alpha$, ossia $T_{h(a)} = h \circ T_a \circ h^{-1}$. Segue che h commuta con T_a se e solo se $T_{h(a)} = T_a$, ossia (grazie al punto (1)) se e solo se $h(a) = a$.

Esercizio 3.5

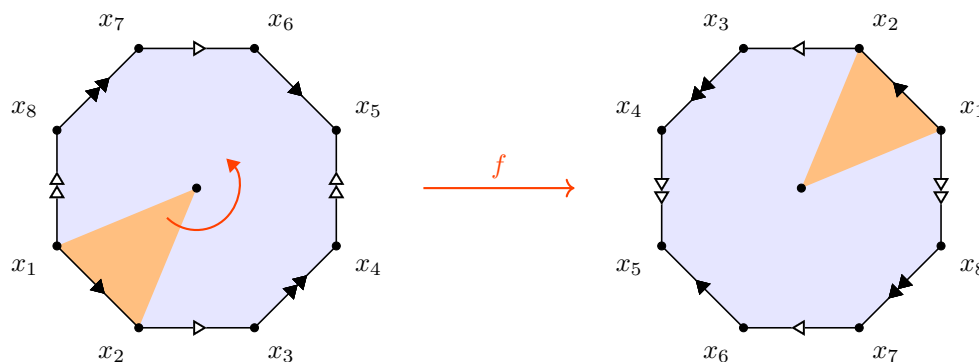
Consideriamo la superficie chiusa ottenuta incollando lati opposti di un $4g$ -gono regolare con orientazioni parallele. Più precisamente, detti x_1, \dots, x_{4g} i vertici del poligono regolare, incolliamo il segmento $x_i x_{i+1}$ con il segmento $x_{2g+i+1} x_{2g+i}$. La superficie Σ così ottenuta ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella, $2g$ 1-celle e una 2-cella.



- Σ è **orientabile**. Questo si vede immediatamente triangolando il poligono regolare e osservando che le identificazioni fra lati invertono l'orientazione.
- Una base per $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ è data dai segmenti $x_i x_{i+1}$ per $1 \leq i \leq 2g$. Questo si vede facilmente calcolando l'omologia cellulare: infatti i segmenti $x_i x_{i+1}$ sono esattamente le 1-celle, e hanno tutte bordo nullo. Al contempo, anche l'unica 2-cella ha bordo nullo, dunque $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ con base data dalle 1-celle.

In particolare, Σ è una superficie chiusa orientabile di genere g .

Per ogni $1 \leq i \leq 2g$, sia $\alpha_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ la classe rappresentata in omologia dal segmento $x_i x_{i+1}$. Consideriamo l'automorfismo $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ indotto dalla rotazione di angolo π intorno al centro del poligono regolare.



Osserviamo che il segmento $x_i x_{i+1}$ viene mandato da f nel segmento $x_{2g+i} x_{2g+i+1}$, dunque $f_*(\alpha_i) = -\alpha_i$. Poiché gli α_i formano una base di $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, abbiamo che $f_* = -\text{id}_{H_1(\Sigma, \mathbb{Z})}$. Ovviamente f ha ordine 2 e preserva l'orientazione, dunque $[f] \in \text{MCG}(\Sigma)$ è l'involuzione iperellittica cercata.

Esercizi del 2 maggio

Esercizio 4.2

Siano $K \subseteq S^3$ un nodo, νK un intorno tubolare (aperto) di K tale che $\overline{\nu K}$ sia diffeomorfo a $D^2 \times S^1$. Allora $M = S^3 \setminus \nu K$ è una 3-varietà compatta il cui bordo $\partial M = \overline{\nu K} \setminus \nu K$ è diffeomorfo al 2-toro T^2 . Per semplicità, poniamo $T^2 = \partial M$ e $D^2 \times S^1 = \nu K$.

Scriviamo una parte della successione esatta di Mayer-Vietoris¹ per $S^3 = M \cup (D^2 \times S^1)$, dove $i: T^2 \rightarrow M$ e $j: T^2 \rightarrow D^2 \times S^1$ indicano le inclusioni:

$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(T^2) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_1(M) \oplus H_1(D^2 \times S^1) \longrightarrow H_1(S^3).$$

Ricordando che $H_2(S^3) = H_1(S^3) = 0$ otteniamo l'isomorfismo

$$0 \longrightarrow H_1(T^2) \xrightarrow[\simeq]{(i_*, j_*)} H_1(M) \oplus H_1(D^2 \times S^1) \longrightarrow 0.$$

Poiché $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_1(D^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$, otteniamo immediatamente che $H_1(M) = \mathbb{Z}$.

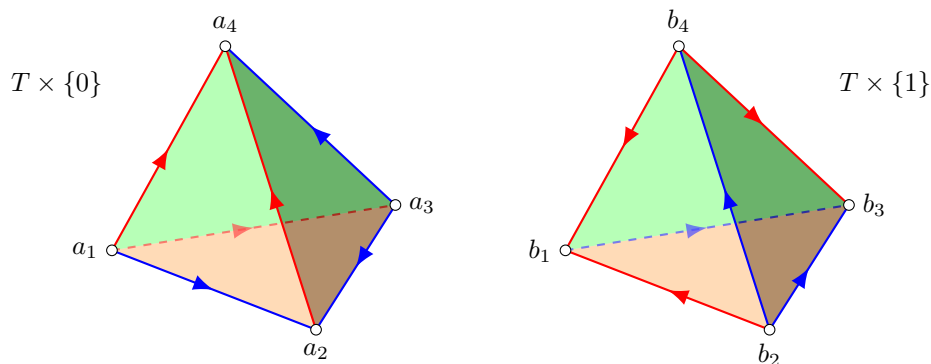
Sia ora $l \in H_1(T^2)$ la classe di omologia, ben definita a meno del segno, tale che $i_*(l) = 0 \in H_1(M)$ e $j_*(l)$ generi $H_1(D^2 \times S^1)$. Osserviamo che il nucleo dell'omomorfismo $i_*: H_1(T^2) \rightarrow H_1(M)$ è precisamente il sottogruppo ciclico generato da l , e che l è primitivo, in quanto $H_1(M) = \mathbb{Z}$ non ha torsione. Sappiamo allora che esiste un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse non orientate che rappresenta l in omologia; poiché anche $-l$ è rappresentata dalla stessa classe di isotopia, otteniamo che è ben definita la *longitudine* come l'unica curva semplice chiusa di T^2 (a meno di isotopia e dell'orientazione) che in omologia genera il nucleo di i_* .

Con un ragionamento del tutto analogo, possiamo ben definire il *meridiano* come l'unica curva semplice chiusa di T^2 (a meno di isotopia e dell'orientazione) che in omologia genera il nucleo dell'omomorfismo $j_*: H_1(T^2) \rightarrow H_1(D^2 \times S^1)$.

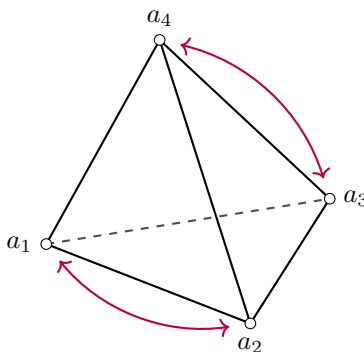
¹Nonostante M e $D^2 \times S^1$ non siano aperti in S^3 , entrambi sono retratti per deformazione di un loro intorno aperto; inoltre tali intorni aperti si possono scegliere in modo che la loro intersezione si retragga per deformazione su $M \cap (D^2 \times S^1) = T^2$.

Esercizio 4.3

Ricordiamo che una struttura iperbolica sul complementare del nodo figura otto è data dall'incollamento di due tetraedri ideali regolari iperbolici secondo il seguente schema (le facce dello stesso colore vengono identificate, in modo da rispettare le frecce e i colori rappresentati sugli spigoli).



Per fissare la notazione, siano M il complementare del nodo figura otto, $T \times \{0, 1\}$ l'unione disgiunta dei due tetraedri $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$, \sim la relazione di equivalenza descritta dall'incollamento, in modo che $M = T \times \{0, 1\} / \sim$. Ricordiamo che, essendo T un tetraedro ideale regolare iperbolico, ogni permutazione dei suoi vertici è indotta da un'isometria di \mathbb{H}^3 . Sia allora $g: T \rightarrow T$ l'isometria di T che induce la permutazione $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.



Definiamo l'isometria

$$f: T \times \{0, 1\} \longrightarrow T \times \{0, 1\}$$

$$(x, i) \longmapsto (g(x), 1 - i).$$

In altre parole, f scambia $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$, e poi applica a ognuno dei tetraedri l'isometria che induce la permutazione σ . In altre parole ancora, f è l'unica isometria di $T \times \{0, 1\}$ che effettua i seguenti scambi di vertici:

$$a_1 \leftrightarrow b_2 \qquad a_2 \leftrightarrow b_1 \qquad a_3 \leftrightarrow b_4 \qquad a_4 \leftrightarrow b_3.$$

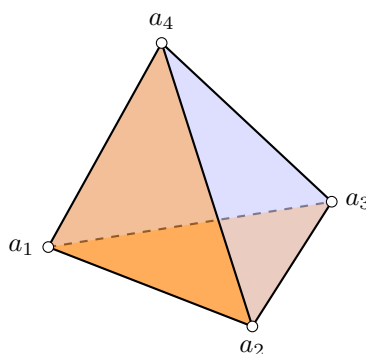
È facile verificare che f è compatibile con la relazione di equivalenza \sim .

- Per quanto riguarda le facce, consideriamo ad esempio $a_1a_2a_3$ e $b_2b_3b_1$, identificate da \sim . La faccia $a_1a_2a_3$ viene mandata da f in $b_2b_1b_4$, mentre $b_2b_3b_1$ viene mandata in $a_1a_4a_2$; le facce $a_1a_4a_2$ e $b_2b_1b_4$ risultano identificate da \sim . Analogamente si mostra che f è compatibile con \sim sulle parti interne di tutte le altre facce.
- Per quanto riguarda gli spigoli, una verifica diretta mostra che f manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, preservando la direzione delle frecce. Pertanto f risulta compatibile con \sim anche sugli spigoli.

Per passaggio al quoziente otteniamo dunque un'isometria $\bar{f}: M \rightarrow M$. Verifichiamo che \bar{f} non ha punti fissi.

- I punti delle parti interne dei tetraedri non sono fissati da \bar{f} , poiché f scambia $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$.
- I punti delle parti interne delle facce non sono fissati da \bar{f} , poiché g agisce in modo libero sull'insieme delle facce di T .
- I punti degli spigoli non sono fissati da \bar{f} , poiché (come già osservato) f manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa.

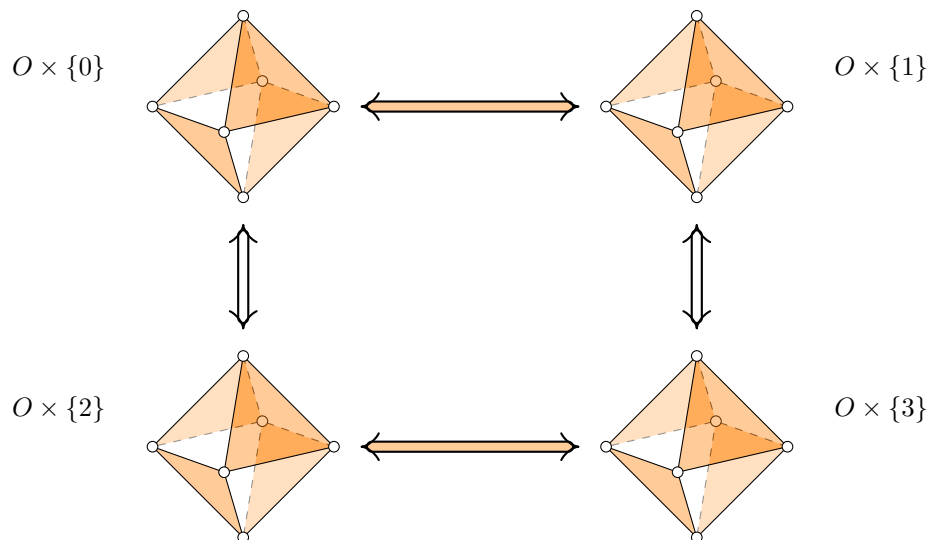
Osserviamo infine che \bar{f} ha ordine 2. Pertanto possiamo definire $N = M/\langle \bar{f} \rangle$, che risulta essere una varietà iperbolica di volume finito, doppiamente rivestita dal complementare del nodo figura otto. La proiezione al quoziente della tassellazione di M fornisce una tassellazione di N con un tetraedro ideale regolare iperbolico, che riportiamo per completezza.



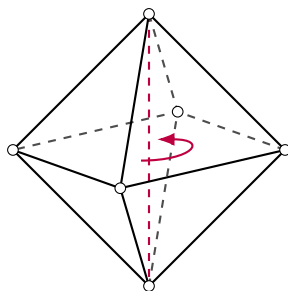
La varietà N si ottiene incollando la faccia $a_1a_2a_3$ su $a_1a_4a_2$ e la faccia $a_1a_3a_4$ su $a_3a_2a_4$.

Esercizio 4.4

Ricordiamo la costruzione, vista a lezione, di una 3-varietà iperbolica tassellata da quattro ottaedri ideali regolari iperbolici. Dopo aver colorato le facce degli ottaedri a scacchiera, le identifichiamo secondo il seguente schema, utilizzando come mappa di incollamento l'identità.



Seguiamo ora un approccio simile a quello dell'esercizio precedente. Siano $O \times \{0\}$, $O \times \{1\}$, $O \times \{2\}$, $O \times \{3\}$ gli ottaedri, $M = O \times \{0, 1, 2, 3\} / \sim$ la varietà ottenuta mediante l'incollamento. Sia $g: O \rightarrow O$ l'isometria data dalla rotazione di un angolo piatto attorno alla retta che congiunge due vertici diametralmente opposti.



Definiamo l'isometria

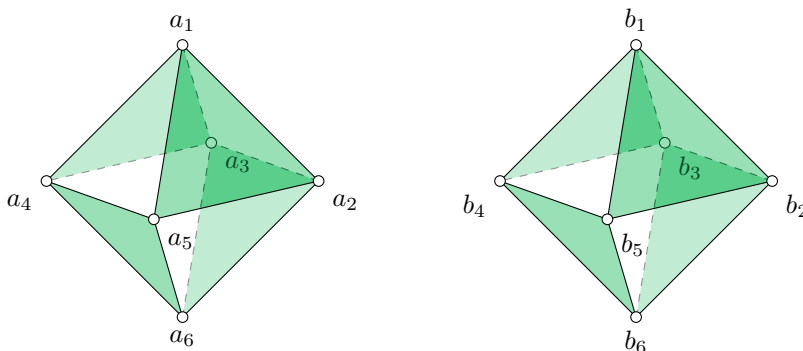
$$f: O \times \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow O \times \{0, 1, 2, 3\}$$

$$(x, i) \longmapsto (g(x), 3 - i).$$

In altre parole, f scambia $(O \times \{0\}) \leftrightarrow (O \times \{3\})$ e $(O \times \{1\}) \leftrightarrow (O \times \{2\})$, e poi applica g a ciascun ottaedro. Si vede facilmente che f è compatibile con la relazione di equivalenza \sim , grazie al fatto che g preserva la colorazione a scacchiera (la compatibilità sugli spigoli si può verificare direttamente a parte). Per passaggio al quoziente otteniamo dunque un'isometria $\bar{f}: M \rightarrow M$.

Si vede immediatamente che \bar{f} agisce su M senza punti fissi. Infatti tutte le identificazioni in $O \times \{0, 1, 2, 3\}$ sono del tipo $(x, i) \sim (x, i')$; se (x, i) è tale che $f(x, i) \sim (x, i)$, allora necessariamente $g(x) = x$, dunque x è un punto fisso per g e di conseguenza appartiene alla parte interna di O . Poiché i punti nelle parti interne degli ottaedri non sono identificati con altri punti, dovrebbe valere che $3 - i = i$, il che è assurdo.

Osserviamo infine che \bar{f} ha ordine 2. Pertanto possiamo definire $N = M/\langle \bar{f} \rangle$, che risulta essere una varietà iperbolica di volume finito, doppiamente rivestita da M . La proiezione al quoziente della tassellazione di M fornisce una tassellazione di N con due ottaedri ideali regolari iperbolici, che riportiamo per completezza.



Ogni faccia azzurra a sinistra si identifica con la corrispondente faccia azzurra a destra, usando l'identità come mappa di incollamento. Le facce bianche si identificano invece mediante il seguente schema:

$$a_1a_2a_3 \leftrightarrow b_1b_4b_5 \quad a_1a_4a_5 \leftrightarrow b_1b_2b_3 \quad a_6a_3a_4 \leftrightarrow b_6b_5b_2 \quad a_6a_5a_2 \leftrightarrow b_6b_3b_4.$$