Esercizi del 2 maggio

Esercizio 4.2

A meno di restringere νK, operazione che preserva il tipo di omotopia di M, possiamo supporre che la chiusura di νK sia contenuta nella parte interna di un intorno tubolare compatto $D^2 \times S^1 \subseteq S^3$ di K.

- Consideriamo gli aperti $U = \operatorname{int} M$, $V = \operatorname{int}(D^2 \times S^1)$ di S^3. Osserviamo che U è omotopicamente equivalente a M, V è omotopicamente equivalente a S^1, e $U \cap V$ è omotopicamente equivalente a T^2. Scriviamo una parte della successione esatta di Mayer-Vietoris relativa a U e V:
$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(M) \longrightarrow H_1(S^3),$$
da cui
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus H_1(M) \longrightarrow 0.$$
Poiché $H_1(M)$ è abeliano e finitamente generato (M è compatta), segue immediatamente che $H_1(M) \simeq \mathbb{Z}$.

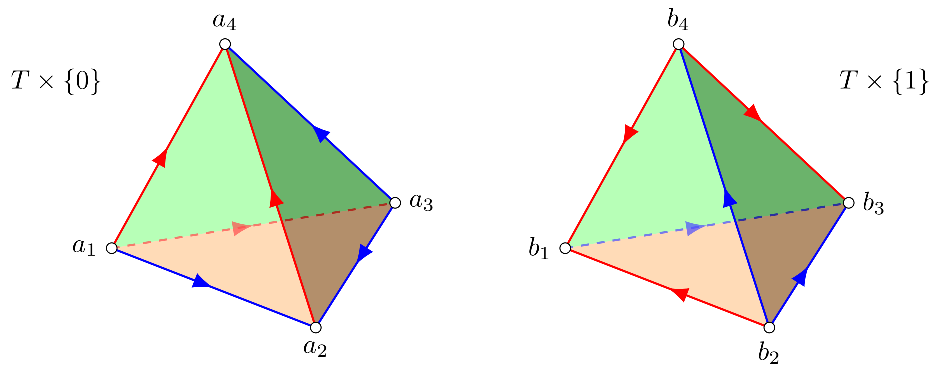
- Mostriamo che l'omomorfismo $H_1(T^2) \to H_1(M)$ indotto dall'inclusione è suriettivo.
  - **Vale $H_1(S^3, \overline{\nu K}) = 0$.** Infatti dalla successione esatta lunga in omologia relativa per la coppia $(S^3, \overline{\nu K})$ otteniamo
  $$H_1(S^3) \longrightarrow H_1(S^3, \overline{\nu K}) \longrightarrow \widetilde{H}_0(\overline{\nu K}),$$
  da cui (osservando che $H_1(S^3) = \widetilde{H}_0(\overline{\nu K}) = 0$) la tesi.
  - **Vale $H_1(M, T^2) = 0$.** Poiché $M = S^3 \setminus \nu K$ e $T^2 = \overline{\nu K} \setminus \nu K$, per escissione otteniamo
  $$H_1(M, T^2) = H_1(S^3 \setminus \nu K, \overline{\nu K} \setminus \nu K) \simeq H_1(S^3, \overline{\nu K}) = 0.$$
  - **L'omomorfismo $H_1(T^2) \to H_1(M)$ è suriettivo.** Infatti dalla successione esatta lunga della coppia (M, T^2) otteniamo
  $$H_1(T^2) \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow H_1(M, T^2) = 0.$$

  Ma allora il nucleo di questo omomorfismo è un sottogruppo ciclico di $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generato da un elemento primitivo, diciamo $\alpha \in H_1(T^2)$. Sappiamo che tale α è rappresentato (a meno dell'orientazione) da un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse, il che permette di definire la *longitudine*.

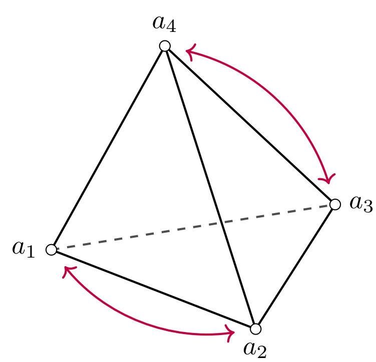
- Si vede facilmente che l'omomorfismo $H_1(T_2) \to H_1(D^2 \times S^1)$ è suriettivo, poiché ogni curva chiusa in $D^2 \times S^1$ che rappresenta un generatore di $H_1(D^2 \times S^1)$ è omotopa a una curva con supporto contenuto in T_2. Allora, esattamente come nel punto precedente, il nucleo di tale omomorfismo è generato da un elemento primitivo di $H_1(T^2)$, al quale corrisponde (a meno dell'orientazione) un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse. Questo permette di definire il *meridiano*.

Esercizio 4.3

Ricordiamo che una struttura iperbolica sul complementare del nodo figura otto è data dall'incollamento secondo il seguente schema di due tetraedri ideali regolari iperbolici aventi orientazione opposta (le facce dello stesso colore vengono identificate, in modo da rispettare le orientazioni e i colori rappresentati sugli spigoli).



Per fissare la notazione, siano M il complementare del nodo figura otto, $T \times \{0,1\}$ l'unione disgiunta dei due tetraedri $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$, $\sim$ la relazione di equivalenza descritta dall'incollamento, in modo che $M = T \times \{0,1\}/\sim$. Ricordiamo che, essendo T un tetraedro ideale regolare iperbolico, ogni permutazione dei suoi vertici è indotta da un'isometria di $\mathbb{H}^3$. Sia allora $g\colon T \to T$ l'isometria di T che induce la permutazione $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.



Definiamo l'isometria.

$$\begin{aligned} f : T \times \{0,1\} &\longrightarrow T \times \{0,1\} \\ (x, i) &\longmapsto (g(x), 1 - i). \end{aligned}$$

In altre parole, f scambia $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$, e poi applica su ognuno dei tetraedri l'isometria che induce la permutazione σ. In altre parole ancora, f è l'unica isometria di $T \times \{0,1\}$ che effettua i seguenti scambi di vertici:

$$a_1 \leftrightarrow b_2 \qquad a_2 \leftrightarrow b_1 \qquad a_3 \leftrightarrow b_4 \qquad a_4 \leftrightarrow b_3.$$

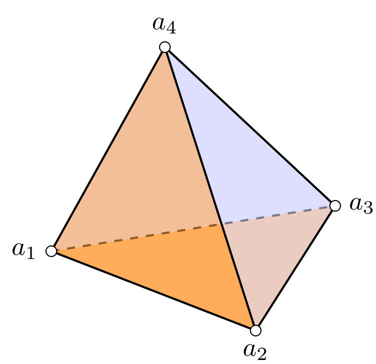
È facile verificare che f è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$.

- Per quanto riguarda le facce, consideriamo ad esempio $a_1a_2a_3$ e $b_2b_3b_1$, identificate da $\sim$. La faccia $a_1a_2a_3$ viene mandata da f in $b_2b_1b_4$, mentre $b_2b_3b_1$ viene mandata in $a_1a_4a_2$; le facce $a_1a_4a_2$ e $b_2b_1b_4$ risultano identificate da $\sim$. Analogamente si mostra che f è compatibile con $\sim$ sulle parti interne di tutte le facce.
- Per quanto riguarda gli spigoli, una verifica diretta mostra che f manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, preservando la direzione delle frecce. Dunque f risulta compatibile con $\sim$ anche sugli spigoli.

Per passaggio al quoziente otteniamo dunque un'isometria $\overline{f}\colon M \to M$. Verifichiamo che $\overline{f}$ non ha punti fissi.

- I punti delle parti interne dei tetraedri non sono fissati da $\overline{f}$, poiché f scambia $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$.
- I punti delle parti interne delle facce non sono fissati da $\overline{f}$, poiché g agisce in modo libero sull'insieme delle facce di T.
- I punti degli spigoli non sono fissati da $\overline{f}$, poiché (come già osservato) f manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa.

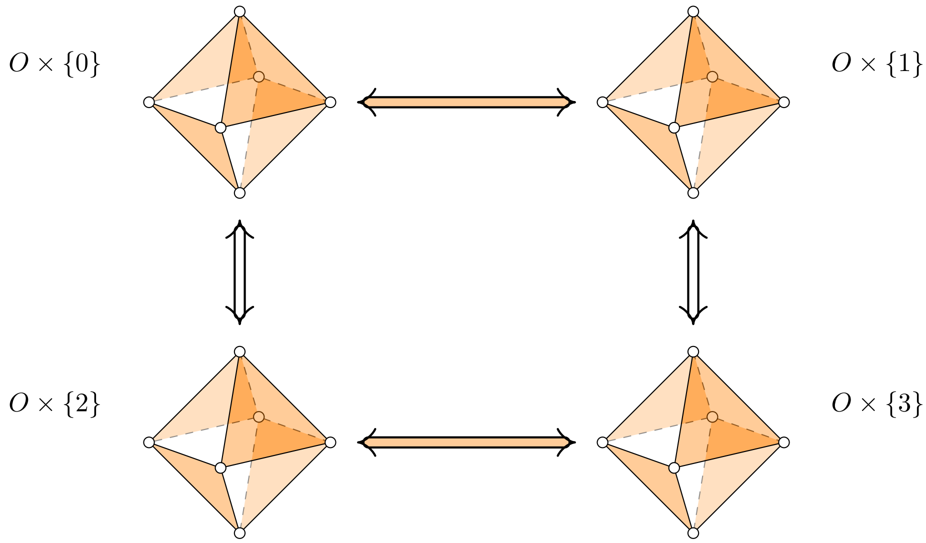
Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2. Pertanto possiamo definire $N = M/\langle \overline{f} \rangle$, che risulta essere una varietà iperbolica di volume finito, doppiamente rivestita dal complementare del nodo figura otto. La proiezione al quoziente della tassellazione di M fornisce una tassellazione di N con un tetraedro ideale regolare iperbolico, che riportiamo per completezza.



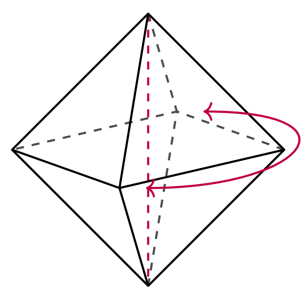
La varietà N si ottiene incollando la faccia $a_1a_2a_3$ su $a_1a_4a_2$ e la faccia $a_1a_3a_4$ su $a_3a_2a_4$.

Esercizio 4.4

Ricordiamo la costruzione, vista a lezione, di una 3-varietà iperbolica tassellata da quattro ottaedri ideali regolari iperbolici. Dopo aver colorato le facce degli ottaedri a scacchiera, le identifichiamo secondo il seguente schema, utilizzando come mappa di incollamento l'identità.



Seguiamo ora un approccio simile a quello dell'esercizio precedente. Siano $O \times \{0\}$, $O \times \{1\}$, $O \times \{2\}$, $O \times \{3\}$ gli ottaedri, $M = O \times \{0,1,2,3\}/\sim$ la varietà ottenuta mediante l'incollamento. Sia $g\colon O \to O$ l'isometria data dalla riflessione lungo la retta che congiunge due vertici diametralmente opposti.



Definiamo l'applicazione

$$f\colon O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4 \longrightarrow O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4$$

che prima scambia $O_1 \leftrightarrow O_4$ e $O_2 \leftrightarrow O_3$, e poi applica a ogni ottaedro la "mappa antipodale", ossia l'isometria che scambia ogni vertice con quello diametralmente opposto. È immediato verificare che f passa al quoziente, definendo un'isometria $\overline{f}\colon M \to M$. Tale isometria, inoltre, non ha punti fissi:

infatti l'unico punto fisso della mappa antipodale appartiene alla parte interna dell'ottaedro, ma ovviamente f agisce in modo libero su $\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$, dunque nessun punto nelle parti interne degli ottaedri può essere fissato.

Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2, dunque possiamo definire $N = M/\langle\overline{f}\rangle$, che risulta essere una 3-varietà iperbolica non compatta e di volume finito, doppiamente rivestita da M. Le immagini di O_1 e O_2 mediante la proiezione al quoziente forniscono una tassellazione di N con due ottaedri ideali regolari iperbolici. Dalla costruzione che abbiamo effettuato, è facile risalire esplicitamente alla suddetta tassellazione, ~~che riportiamo per completezza~~.