Esercizi dell'11 aprile

Dehn twist

Per fissare la notazione, ricordiamo come si definiscono i Dehn twist. Siano S una superficie chiusa orientabile, $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa non banale. Sia $A = S^1 \times [-1,1]$ con l'orientazione indotta da quelle standard di S^1 e $[-1,1]$. Fissiamo un intorno regolare di α, ossia un embedding $\psi\colon A \to S$ tale che $\psi(x,0) = \alpha(x)$ per ogni $x \in S^1$; scegliamolo in modo che ψ preservi l'orientazione. Fissiamo infine una funzione $f\colon [-1,1] \to [0,2\pi]$ tale che $f(t) = 0$ per $t \le -\frac{1}{2}$ e $f(t) = 2\pi$ per $t \ge \frac{1}{2}$, e definiamo

$$\begin{aligned} \theta\colon \qquad A &\longrightarrow A \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto (e^{i(x+f(t))}, t). \end{aligned}$$

Possiamo ora definire il Dehn twist intorno a α come il diffeomorfismo $T_\alpha\colon S \to S$ tale che

$$T_\alpha(p) = \begin{cases} p & p \notin \psi(A) \\ (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1})(p) & p \in \psi(A). \end{cases}$$

Come visto a lezione, la classe di isotopia di T_α non dipende dalla scelta dell'intorno regolare ψ né della funzione f. Mostreremo inoltre nell'Esercizio 3.2 che la classe di isotopia di T_α non cambia invertendo l'orientazione di α o sostituendo α con una curva a lei isotopa: è dunque ben definito l'elemento $T_a \in \mathrm{MCG}(S)$ per $a \in \mathcal{S}$.

Esercizio 3.1

Lemma 1. *Siano a, b classi di isotopia di curve, con b non banale. Allora*

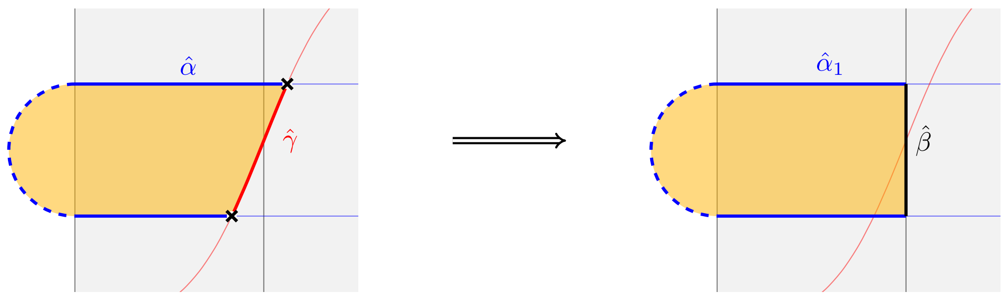
$$i(a, T_b(a)) = i(a,b)^2.$$

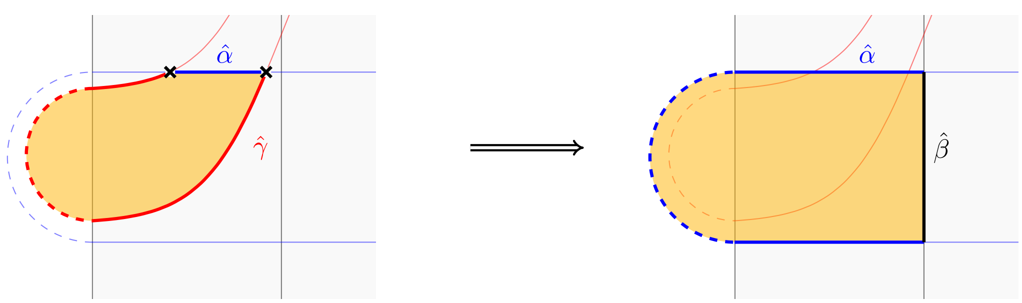
Dimostrazione. Siano α, β rappresentati di a, b in posizione minimale. Se α e β non si intersecano la tesi è ovvia, dunque supponiamo che si intersechino almeno in un punto. Scegliamo un intorno regolare U di β abbastanza stretto da intersecare α in $i(a,b)$ archi disgiunti, ciascuno dei quali interseca β esattamente una volta. Definiamo un rappresentante γ della classe $T_b(a)$ come segue: consideriamo una curva α' parallela a α, ottenuta traslando α lungo un suo intorno regolare, e poniamo $\gamma = T_\beta(\alpha')$. Possiamo orientare α e γ in modo che siano coorientate e che entrando in U si allontanino.

È immediato verificare che α e γ si intersecano esattamente in $i(a,b)^2$ punti. Mostriamo dunque che α e γ sono in posizione minimale, ossia che non formano bigoni. Se $i(a,b) = 1$ non c'è nulla da dimostrare (α e γ si intersecano solo in un punto, dunque hanno intersezione algebrica dispari), quindi supponiamo $i(a,b) \ge 2$. Supponiamo per assurdo che esista un bigono D, e siano $\hat\alpha$, $\hat\gamma$ i lati di D che giacciono rispettivamente su α e γ. Distinguiamo alcuni casi.

- Se $\hat\gamma$ è tutto contenuto in U, allora α e β formano un bigono, ma ciò è impossibile, dato che sono in posizione minimale.
- Se $\hat\alpha$ è tutto contenuto in U, allora di nuovo α e β formano un bigono (ricordiamo che α e γ sono parallele fuori da U).

□





Esercizio 3.2

Lemma 2. *Siano $a, b \in \mathcal{S}$ due classi di isotopia distinte. Allora esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a,c) \neq i(b,c)$.*

(1) ▪ Cominciamo a mostrare che la classe di isotopia di T_α non dipende dall'orientazione di α. Sia dunque $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa, e sia $\overline{\alpha}\colon S^1 \to S$ la curva inversa, ossia quella definita da $\overline{\alpha}(e^{ix}) = \alpha(e^{-ix})$. Se $\psi\colon A \to S$ è un intorno regolare orientato di α, allora

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\colon \quad & A \longrightarrow S \\ (e^{ix}, t) & \longmapsto \psi(e^{-ix}, -t) \end{aligned}$$

è un intorno regolare orientato di $\overline{\alpha}$. Poiché la classe di isotopia dei Dehn twist non dipende dalla scelta di f, non è restrittivo supporre che $f(-t) = 2\pi - f(t)$. Mostriamo allora che $T_\alpha(p) = T_{\overline{\alpha}}(p)$ per ogni $p \in S$ (dunque in particolare sono isotopi). La tesi è ovvia per $p \notin \psi(A)$, dunque supponiamo $p \in \psi(A)$; è sufficiente far vedere che $\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi} = \overline{\psi} \circ \theta$. Effettivamente:

$$(\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi})(e^{ix}, t) = \psi(\theta(e^{-ix}, -t)) = \psi(e^{i(-x+f(-t))}, -t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t);$$
$$(\overline{\psi} \circ \theta)(e^{ix}, t) = \overline{\psi}(e^{i(x+f(t))}, t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t).$$

- Supponiamo che le curve semplici chiuse non banali $\alpha, \beta\colon S^1 \to S$ siano due rappresentanti della stessa classe di isotopia, ossia che esista un'isotopia (ambiente) $F\colon S \times [0,1] \to S$ tale che $F_0 = \mathrm{id}_S$ e $F_1 \circ \alpha = \beta$. Osserviamo che, per quanto abbiamo dimostrato, possiamo orientare α e β in modo che una tale isotopia esista. Sia $\psi\colon A \to S$ un intorno regolare orientato di α; notiamo che $F_1 \circ \psi$ è un intorno regolare orientato di β. È allora evidente che un Dehn twist intorno a β è dato da $T_\beta = F_1 \circ T_\alpha \circ F_1^{-1}$, che è ovviamente isotopo a T_α. Questo mostra che $T_\beta = T_\alpha$ in $\mathrm{MCG}(S)$.
- Siano ora $\alpha, \beta\colon S^1 \to S$ due curve semplici chiuse non banali e non isotope, e siano $a, b \in \mathcal{S}$ le corrispondenti classi di isotopia. Per il Lemma 2, esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, c) \neq i(b, c)$. Dal Lemma 1 otteniamo
$$i(c, T_a(c)) = i(c, a)^2 \neq i(c, b)^2 = i(c, T_b(c)),$$
da cui $T_a \neq T_b$ come elementi di $\mathrm{MCG}(S)$.

(2) Per non creare conflitti di notazione, siano $h \in \mathrm{MCG}(S)$, $a \in \mathcal{S}$. Sia $\alpha\colon S^1 \to S$ un rappresentante di a, e con lieve abuso di notazione trattiamo h come un diffeomorfismo di S. Sia $\psi\colon A \to S$ un intorno regolare di α: notiamo che $h \circ \psi$ è un intorno regolare di $h \circ \alpha$. Ma allora è evidente che $h \circ T_\alpha \circ h^{-1}$ è un Dehn twist intorno a $h \circ \alpha$, da cui la tesi.

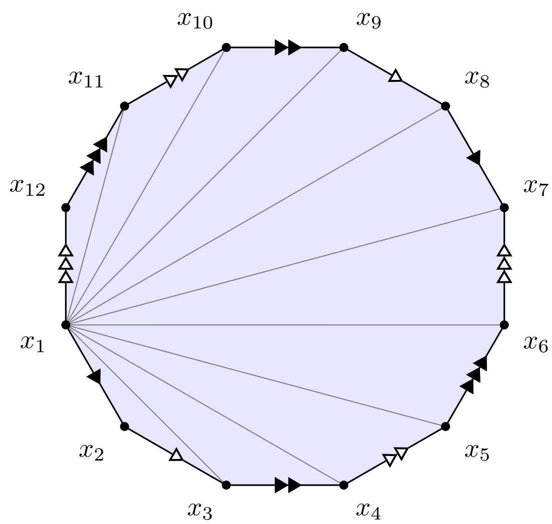
Esercizio 3.5

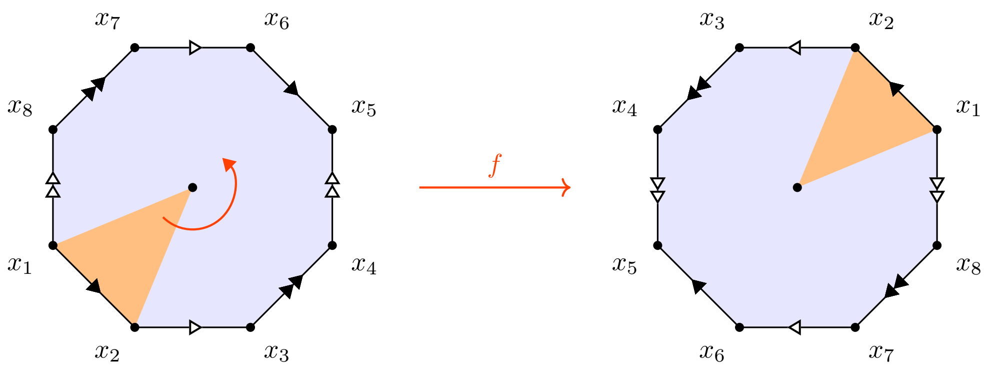
Consideriamo la superficie chiusa ottenuta incollando lati opposti di un $4g$-gono regolare con orientazioni parallele. Più precisamente, detti $x_1, \ldots, x_{4g}$ i vertici del poligono regolare, incolliamo il segmento $x_i x_{i+1}$ con il segmento $x_{2g+i+1} x_{2g+i}$. La superficie Σ così ottenuta ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella, $2g$ 1-celle e una 2-cella.

- **Σ è orientabile.** Questo si vede immediatamente triangolando il poligono regolare e osservando che le identificazioni fra lati invertono l'orientazione.
- **Una base per $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ è data dai segmenti $x_i x_{i+1}$ per $1 \leq i < 2g$.** Questo si vede facilmente calcolando l'omologia cellulare: infatti i segmenti $x_i x_{i+1}$ sono esattamente le 1-celle, e hanno tutte bordo nullo. Al contempo, anche l'unica 2-cella ha bordo nullo, dunque $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ con base data dalle 1-celle.

In particolare, Σ è una superficie chiusa orientabile di genere g.

Per ogni $1 \leq i < 2g$, sia $\alpha_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ la classe rappresentata in omologia dal segmento $x_i x_{i+1}$. Consideriamo l'automorfismo $f\colon \Sigma \to \Sigma$ indotto dalla rotazione di angolo π intorno al centro del poligono regolare. Osserviamo che il segmento $x_i x_{i+1}$ viene mandato da f nel segmento $x_{2g+i} x_{2g+i+1}$, dunque $f_*(\alpha_i) = -\alpha_i$. Poiché gli α_i formano una base di $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, abbiamo che $f_* = -\mathrm{id}_{H_1(\Sigma, \mathbb{Z})}$. Ovviamente f ha ordine 2 e preserva l'orientazione, dunque $[f] \in \mathrm{MCG}(\Sigma)$ è l'involuzione iperellittica cercata.





Esercizio 3.6

Siano $[f] \in \mathrm{MCG}(S_g)$, $[m] \in \mathrm{Teich}(S_g)$ tali che $[f_*m] = [m]$. Ciò significa che esiste un diffeomorfismo h di S_g isotopo all'identità e tale che $f_*m = h_*m$. Ma allora $(h^{-1} \circ f)_*m = m$; poiché $h^{-1} \circ f$ e f sono isotopi, essi rappresentano la stessa classe in $\mathrm{MCG}(S_g)$, dunque possiamo supporre (a meno di cambiare rappresentante) che $f_*m = m$. Ciò significa precisamente che f è un'isometria per la superficie S_g con la metrica m.

I punti singolari dello spazio dei moduli sono precisamente le (classi di) metriche che sono fissate da elementi non banali di $\mathrm{MCG}(S_g)$. Come abbiamo visto, se elemento $\varphi \in \mathrm{MCG}(S_g)$ fissa una classe $[m] \in \mathrm{Teich}(S_g)$, allora esiste un rappresentante f di φ (che non sarà isotopo all'identità se φ è non banale) che è un'isometria per S_g munita della metrica m.