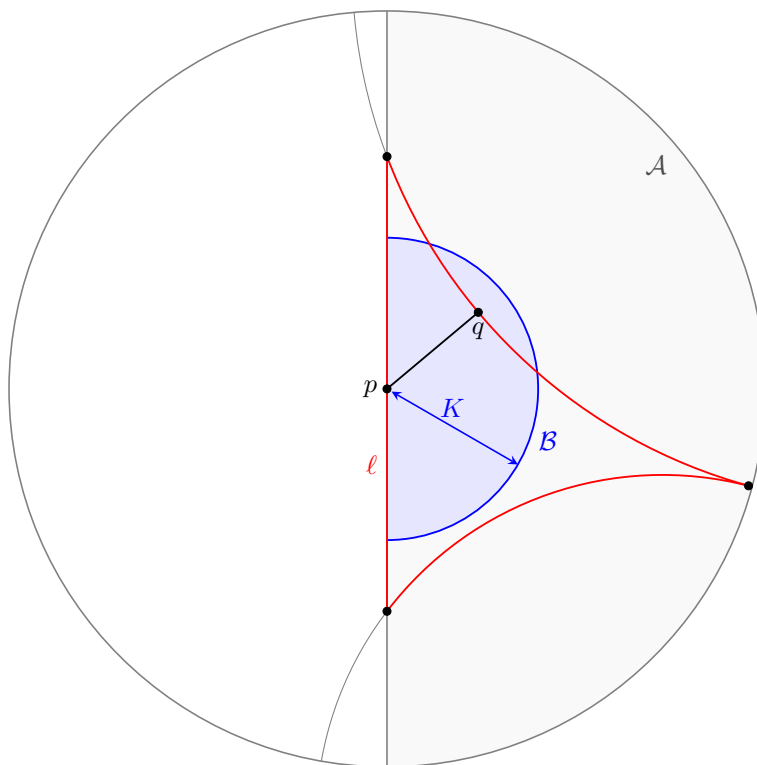


## Esercizi del 14 marzo

### Esercizio 1.4

Sia  $K > 0$  tale che le palle iperboliche di raggio  $K$  abbiano area maggiore di  $2\pi$ ; mostriamo che tale  $K$  soddisfa la condizione richiesta.

Sia  $\Delta \subseteq \mathbb{H}^2$  un triangolo,  $p \in \Delta$  un punto giacente su un lato  $\ell$ . Se  $p$  è un vertice la tesi è ovvia, dunque supponiamo che non lo sia. Sia  $\mathcal{A}$  il semipiano (aperto) delimitato da  $\ell$  su cui giace il triangolo. Definiamo  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{H}^2$  come l'intersezione di  $\mathcal{A}$  con la palla di centro  $p$  e raggio  $K$ ; osserviamo che  $\mathcal{B}$  ha area maggiore di  $2\pi/2 = \pi$ . Di conseguenza, essendo l'area di  $\Delta$  al più  $\pi$ , necessariamente  $\mathcal{B}$  non è contenuto in  $\Delta$ . Poiché  $\mathcal{B}$  interseca  $\Delta$  ed è connesso, deve esistere un punto di  $q \in \mathcal{B}$  che giace sul bordo di  $\Delta$ . Giacché  $\mathcal{A}$  e  $\ell$  sono disgiunti,  $q$  deve appartenere a uno degli altri due lati; essendo la distanza fra  $p$  e  $q$  al più  $K$ , otteniamo la tesi.



### Esercizio 1.5

Utilizziamo il modello  $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  del semipiano. Siano  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  i lati del triangolo  $\Delta$ , con  $\ell_1$  di lunghezza  $l$ . A meno di isometria, possiamo supporre che  $\ell_1$  giaccia sulla circonferenza centrata in  $(0, 0)$  di raggio  $r > 0$ , e che  $\ell_2$  giaccia su una retta verticale (parallela all'asse  $y$ ). Siano inoltre  $\alpha, \beta$  gli angoli che le rette congiungenti  $(0, 0)$  agli estremi di  $\ell_1$  formano con l'asse  $x$ .

Una parametrizzazione di  $\ell_1$  è data dalla curva

$$\begin{aligned}\gamma : [\alpha, \pi - \beta] &\longrightarrow H^2 \\ t &\longmapsto r(\cos t, \sin t).\end{aligned}$$

Pertanto la lunghezza di  $\ell_1$  si può calcolare come

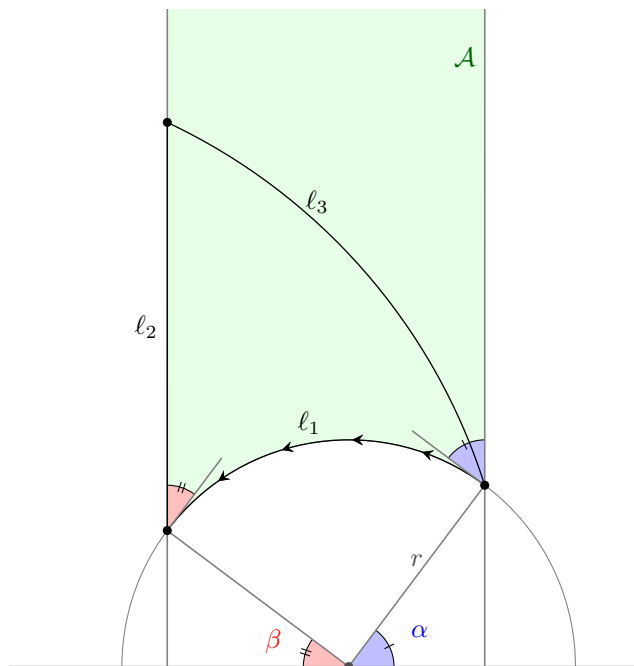
$$l = \int_{\alpha}^{\pi - \beta} \frac{1}{r \sin t} \|\gamma'\|_E dt = \int_{\alpha}^{\pi - \beta} \frac{1}{r \sin t} \cdot r dt = \int_{\alpha}^{\pi - \beta} \frac{1}{\sin t} dt > \pi - \beta - \alpha,$$

dove  $\|-\|_E$  indica la norma euclidea. Denotiamo con  $\mathcal{A}$  il cono sopra  $\ell_1$  di vertice  $\infty$ , ossia

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in H^2 : -r \cos \beta \leq x \leq r \cos \alpha, x^2 + y^2 \geq r^2\}.$$

È evidente che  $\Delta$  è contenuto in  $\mathcal{A}$ ; inoltre  $\mathcal{A}$  è un triangolo con angoli  $\alpha, \beta$  e 0, dunque ha area  $\pi - \alpha - \beta$ . Ma allora

$$l > \pi - \alpha - \beta = \text{Area}(\mathcal{A}) \geq \text{Area}(\Delta).$$



### Esercizio 1.9

**Lemma.** Siano  $A \in O(n)$  una matrice ortogonale,  $b \in \mathbb{R}^n$  un vettore. Definiamo  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  come  $\varphi(x) = Ax + b$ . Supponiamo che  $\varphi$  non abbia punti fissi. Allora esiste una retta affine di  $\mathbb{R}^n$  che è  $\varphi$ -invariante.

*Dimostrazione.*

- **Vale**  $\mathbb{R}^n = \ker(A - I) \oplus \text{im}(A - I)$ .

Per motivi di dimensione, è sufficiente mostrare che i due sottospazi hanno intersezione banale.

Sia  $v \in \ker(A - I) \cup \text{im}(A - I)$ ; allora  $v = Aw - w$  per un qualche  $w \in \mathbb{R}^n$ . Allora

$$\langle v, v \rangle = \langle Aw - w, v \rangle = \langle Aw, v \rangle - \langle w, v \rangle = \langle w, Av, - \rangle \langle w, v \rangle = \langle w, Av - v \rangle = 0,$$

da cui  $v = 0$ .

- **Vale**  $b \notin \text{im}(A - I)$ .

Se per assurdo  $b = Aw - w$ , allora  $\varphi(-w) = -Aw + b = -w$ , dunque  $\varphi$  avrebbe un punto fisso, il che è contro l'ipotesi.

- **L'isometria  $\varphi$  ammette una retta invariante.**

Utilizzando la decomposizione del primo punto, scriviamo  $b = v + (Aw - w)$  con  $Av = v$ .

Poiché  $b \notin \text{im}(A - I)$ , necessariamente  $v \neq 0$ . Mostriamo che la retta affine  $\ell = -w + \text{span}(v)$  è  $\varphi$ -invariante. Per  $t \in \mathbb{R}$  vale

$$\varphi(-w + tv) = -Aw + tAv + b = -Aw + tv + (v + Aw - w) = -w + (t + 1)v \in \ell,$$

da cui la tesi. □

Sia  $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  un'isometria parabolica. Consideriamo il modello del semispazio  $H^n$ ; possiamo supporre che  $\psi$  fissi  $\infty$ . Allora  $\psi$  si scrive come  $\psi(x, t) = (Ax + b, t)$  per opportuni  $A \in O(n-1)$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Per il Lemma, esiste una retta euclidea  $\ell = w + \text{span}(v) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  invariante per la mappa  $(x \mapsto Ax + b)$ . È allora evidente che il piano iperbolico  $\{(w + sv, t) : s \in \mathbb{R}, t > 0\} \subseteq H^n$  è  $\psi$ -invariante.

## Esercizi del 28 marzo

### Introduzione teorica

**Definizione.** Sia  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  un sottogruppo. Fissiamo un punto  $x \in \mathbb{H}^n$ . Definiamo  $L(\Gamma)$  come l'insieme dei punti limite in  $\partial\mathbb{H}^n$  dell'orbita  $\Gamma \cdot x$ . Poniamo inoltre  $O(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n \setminus L(\Gamma)$ .

Mostriamo che questa definizione è ben posta (ossia non dipende dalla scelta del punto  $x$ ).

**Proposizione.** Siano  $x, x' \in \mathbb{H}^n$ . Sia  $y \in \partial\mathbb{H}^n$  un punto limite dell'orbita  $\Gamma \cdot x$ . Allora  $y$  è anche un punto limite dell'orbita  $\Gamma \cdot x'$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste una successione di isometrie  $\{g_i\}_{i \geq 0} \subseteq \Gamma$  tali che  $g_i(x) \rightarrow y$ . Essendo  $g_i$  un'isometria di  $\mathbb{H}^n$ , vale  $\text{dist}(g_i(x), g_i(x')) = \text{dist}(x, x')$ , pertanto anche  $g_i(x') \rightarrow y$ .  $\square$

È evidente che  $L(\Gamma)$  è un chiuso  $\Gamma$ -invariante. Inoltre abbiamo la seguente.

**Proposizione.** Supponiamo che  $\Gamma$  non sia elementare. Sia  $S \subseteq \partial\mathbb{H}^n$  un chiuso non vuoto  $\Gamma$ -invariante. Allora  $L(\Gamma) \subseteq S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$  l'involuppo convesso di  $S$ . Poiché  $\Gamma$  non è elementare,  $S$  contiene almeno due punti, dunque  $K \cap \mathbb{H}^n$  è non vuoto. Scegliamo un  $x \in K \cap \mathbb{H}^n$ ; poiché  $S$  è chiuso e  $\Gamma$ -invariante, lo stesso vale per  $K$ . Ma allora l'insieme dei punti limite di  $\Gamma \cdot x$  che giacciono in  $\partial\mathbb{H}^n$  (ossia  $L(\Gamma)$ ) è contenuto in  $K \cap \partial\mathbb{H}^n = S$ , da cui la tesi.  $\square$

**Proposizione.** Supponiamo che  $\Gamma$  agisca su  $\mathbb{H}^n$  in modo libero e propriamente discontinuo. Allora  $\Gamma$  agisce liberamente anche su  $O(\Gamma)$ .

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che tutti i punti fissi di elementi di  $\Gamma$  giacciono in  $L(\Gamma)$ . Sia  $g \in \Gamma$ ; distinguiamo due casi.

- Se  $g$  è iperbolico, considerando il modello del semispazio  $H^n$  si vede immediatamente che i due punti fissi di  $g$  sono anche punti limite di  $\langle g \rangle$ .
- Se  $g$  è parabolico, consideriamo una qualunque orbita  $\langle g \rangle \cdot x$ . Poiché  $\overline{\mathbb{H}^n}$  è metrizzabile e compatto, necessariamente questa orbita ammette un punto limite, il quale risulta fissato da  $g$ ; ma  $g$  ha un unico punto fisso, che dunque è anche un punto limite.  $\square$

**Definizione.** Sia  $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$  un convesso chiuso contenente almeno due punti (dunque non tutto contenuto in  $\partial\mathbb{H}^n$ ). Definiamo l'applicazione  $\rho_K: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow K$  come segue:

- se  $x \in \mathbb{H}^n$ , allora  $\rho_K(x)$  è il punto di  $K \cap \mathbb{H}^n$  di minima distanza da  $x$ ;
- se  $x \in \partial\mathbb{H}^n$ , allora  $\rho_K(x)$  è l'unico punto di  $K$  giacente sulla minima sfera centrata in  $x$  che interseca  $K$ .

Osserviamo che questa definizione è ben posta poiché  $K$  è convesso e chiuso. Inoltre si verifica facilmente che vale l'uguaglianza  $\rho_{g(K)} \circ g = g \circ \rho_K$  per ogni isometria  $g$  di  $\mathbb{H}^n$ .

**Proposizione.** La restrizione

$$\rho_K: \mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K) \rightarrow \mathbb{H}^n$$

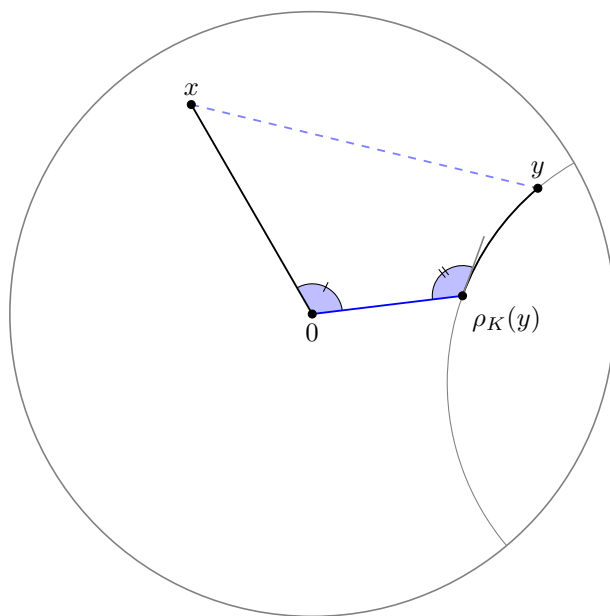
è continua.

*Dimostrazione.* Utilizziamo il modello del disco. Sia  $x \in \mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K)$ . Poiché  $x \notin \partial\mathbb{H}^n \cap K$ , sicuramente  $\rho_K(x) \in \mathbb{H}^n$ . A meno di isometria, possiamo supporre che  $\rho_K(x) = 0$ . Sia ora  $y \in \mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K)$ . Mostriamo che  $\|\rho_K(y)\|_E \leq \|y - x\|_E$ , dove  $\|\cdot\|_E$  indica la norma euclidea sul disco: questo sarà sufficiente per concludere.

Se  $\rho_K(y) = 0$  la disuguaglianza è sicuramente verificata, dunque possiamo supporre  $\rho_K(y) \neq 0$ . Osserviamo che tutto il segmento euclideo (che è anche un segmento iperbolico)  $[0, \rho_K(y)]$  è contenuto in  $K$ , essendo  $K$  convesso. Poiché  $0$  è il punto di  $K$  più vicino a  $x$ , allora necessariamente l'angolo fra  $[0, \rho_K(y)]$  e  $[0, x]$  è ottuso, dunque  $\langle x, \rho_K(y) \rangle \leq 0$  (questa disuguaglianza è vera anche se  $x = 0$ , nel qual caso l'angolo citato non è ben definito). Allo stesso modo, spostando  $\rho_K(y)$  in  $0$  e ricordando che le isometrie sono (anti)conformi, anche l'angolo fra  $[\rho_K(y), 0]$  e il segmento iperbolico fra  $\rho_K(y)$  e  $y$  è ottuso, dunque a maggior ragione anche l'angolo fra  $[\rho_K(y), 0]$  e  $[\rho_K(y), y]$  (segmento euclideo) lo è. Segue che  $\langle \rho_K(y) - y, \rho_K(y) \rangle \leq 0$  (di nuovo, questa disuguaglianza è vera anche se  $y = \rho_K(y)$ ). Combinando le due disuguaglianze trovate otteniamo che

$$\|\rho_K(y)\|_E^2 \leq \langle \rho_K(y), y - x \rangle \leq \|\rho_K(y)\|_E \cdot \|y - x\|_E,$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La tesi segue immediatamente.  $\square$



**Proposizione.** Supponiamo che  $L(\Gamma)$  contenga almeno due punti e che  $\Gamma$  agisca in modo propriamente discontinuo su  $\mathbb{H}^n$ . Allora  $\Gamma$  agisce allo stesso modo su  $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$  l'involuppo convesso di  $L(\Gamma)$ ; poiché  $L(\Gamma)$  è un chiuso  $\Gamma$ -invariante, lo stesso vale per  $K$ . Consideriamo l'applicazione  $\rho: \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^n$  definita come la restrizione a  $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$  di  $\rho_K$ . Per quanto abbiamo osservato,  $\rho$  è continua e soddisfa  $\rho \circ g = g \circ \rho$  per ogni  $g \in \Gamma$ .

Mostriamo che l'azione di  $\Gamma$  su  $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$  è propriamente discontinua. Siano  $y, y' \in \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ . Poiché l'azione di  $\Gamma$  su  $\mathbb{H}^n$  è propriamente discontinua, esistono intorno  $U, U'$  di  $\rho(y), \rho(y')$

rispettivamente tali che  $U \cap g(U') \neq \emptyset$  solo per un numero finito di  $g \in \Gamma$ . Scegliamo  $W = \rho^{-1}(U)$  e  $W' = \rho^{-1}(U')$  come intorni, rispettivamente, di  $y$  e  $y'$ . Si verifica facilmente che se  $U \cap g(U') = \emptyset$  allora  $W \cap g(W') = \emptyset$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema.** *Supponiamo che la varietà iperbolica completa  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  abbia volume finito. Sia*

$$S = \bigcup_{g \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \text{Fix}(g) \subseteq \partial\mathbb{H}^n.$$

*Allora  $S$  è denso in  $\partial\mathbb{H}^n$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che  $\Gamma$  non è elementare, altrimenti  $M$  avrebbe volume infinito. Notiamo poi che  $\bar{S} \subseteq \partial\mathbb{H}^n$  è un chiuso non vuoto  $\Gamma$ -invariante, dunque contiene  $L(\Gamma)$ . Allo stesso tempo, poiché  $\Gamma$  agisce su  $O(\Gamma)$  senza punti fissi, necessariamente  $S \subseteq L(\Gamma)$ ; in particolare, essendo  $\Gamma$  non elementare,  $L(\Gamma)$  contiene almeno due punti.

Supponiamo ora per assurdo che  $S$  non sia denso in  $\partial\mathbb{H}^n$ . Poiché  $L(\Gamma) \subseteq \bar{S}$ , segue che  $O(\Gamma)$  è non vuoto. Sia dunque  $y \in O(\Gamma)$ ; poiché l'azione di  $\Gamma$  su  $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$  è libera e propriamente discontinua, esiste un intorno  $W \subseteq \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$  di  $y$  tale che  $W \cap g(W) = \emptyset$  per ogni  $g \in \Gamma$  diverso dall'identità. Poiché  $y$  ha un sistema fondamentale di intorni costituito da semispazi, possiamo supporre che  $W$  sia un semispazio. Ma allora  $\text{vol}(M) \geq \text{vol}(W) = \infty$ , il che contraddice l'ipotesi.  $\square$

## Esercizio 2.1

Per assurdo, sia  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  un'isometria che commuta con tutti gli elementi di  $\Gamma$ . Distinguiamo due casi.

- Se  $\varphi$  è parabolica o iperbolica, per un Lemma visto a lezione segue che  $\text{Fix}(\varphi) = \text{Fix}(g)$  per ogni  $g \in \Gamma$  non banale, ossia tutti gli elementi di  $\Gamma$  non banali hanno gli stessi punti fissi. Per un altro Lemma visto a lezione, ciò implica che  $\Gamma$  è elementare, il che contraddice l'ipotesi di finitezza del volume di  $M$ .
- Se  $\varphi$  è ellittica, denotiamo con  $S \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$  il sottospazio dei punti fissi di  $\varphi$  (si tratta di un sottospazio proprio e non vuoto). Sia  $g \in \Gamma$  non banale; mostriamo che  $\text{Fix}(g) \subseteq S$ .
  - Se  $g$  è parabolica, poiché  $\varphi$  e  $g$  commutano abbiamo che  $\varphi(\text{Fix}(g)) = \text{Fix}(g)$ , ossia l'unico punto fisso di  $g$  è fissato da  $\varphi$ , da cui  $\text{Fix}(g) \subseteq S$ .
  - Se  $g$  è iperbolica, poiché  $\varphi$  e  $g$  commutano abbiamo che  $g(S) = S$ . Consideriamo il modello del semispazio  $H^n$ , in cui i punti fissi di  $g$  siano  $0$  e  $\infty$ . Ricordando che  $\varphi$  si scrive come  $(x, t) \mapsto \lambda(Ax, t)$ , si vede immediatamente che  $S$  deve necessariamente essere un'iperpiano ortogonale a  $\partial H^n$ , ossia  $\infty \in S$ . Scambiando  $0$  e  $\infty$  otteniamo che entrambi i punti fissi di  $g$  appartengono a  $S$ .

Poiché  $S$  è un sottospazio proprio,  $S \cap \partial\mathbb{H}^n$  non può essere denso in  $\partial\mathbb{H}^n$ , il che contraddice il Teorema.

## Esercizio 2.4

La proiezione  $\phi: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$  induce un omomorfismo di gruppi

$$\Phi: \mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]) \rightarrow \mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i])$$

applicando  $\phi$  a ogni entrata della matrice. Sia  $\Gamma < \mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$  il nucleo di  $\Phi$ . Poiché  $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i])$  è finito,  $\Gamma$  ha indice finito in  $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ . Osserviamo che

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix} \in \mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i]) : a, b, c, d, \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

(con lieve abuso di notazione, trattiamo gli elementi di  $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$  come matrici invece che come classi di equivalenza).

- **$\Gamma$  non contiene elementi ellittici.** Supponiamo per assurdo che un elemento  $\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}$  di  $\Gamma$  sia ellittico, ossia abbia traccia reale minore di 2 in modulo. Allora  $2+2a+2d$  è un numero reale, intero, pari e minore di 2 in modulo, dunque è necessariamente nullo. La condizione sul determinante diventa allora

$$1 = \det \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & -1-2a \end{pmatrix} = -(1+4a+4a^2+4bc),$$

ossia

$$1+2a+2a^2+2bc=0,$$

il che è assurdo (ad esempio guardando la parità della parte reale).

- **La varietà iperbolica  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  ha volume finito.** Dall'Esercizio 2.3 sappiamo che il gruppo  $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$  ha un dominio fondamentale  $D$  di volume finito. Poiché  $\Gamma$  ha indice finito in  $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ , allora esiste un dominio fondamentale (in senso lato) per  $\Gamma$  di volume finito, che si ottiene prendendo l'unione dei domini  $g \cdot D$  al variare di  $g$  in un insieme di rappresentanti per  $\mathbb{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])/\Gamma$ .
- **La varietà iperbolica  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  non è compatta.** Basta osservare che  $\Gamma$  contiene l'elemento parabolico  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

## Esercizio 2.5

Poiché  $M$  è compatta, tutti gli elementi di  $\Gamma$  sono iperbolici. Dal Teorema segue immediatamente che  $S$  è denso in  $\partial\mathbb{H}^n$ .