# Esercizi dell'11 aprile

## Dehn twist

Per fissare la notazione, ricordiamo come si definiscono i Dehn twist. Siano $S$ una superficie chiusa orientabile, $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa non banale. Sia $A = S^1 \times [-1,1]$ con l'orientazione indotta da quelle standard di $S^1$ e $[-1,1]$. Fissiamo un intorno regolare di $\alpha$, ossia un embedding $\psi\colon A \to S$ tale che $\psi(x,0) = \alpha(x)$ per ogni $x \in S^1$; scegliamolo in modo che $\psi$ preservi l'orientazione. Fissiamo infine una funzione $f\colon [-1,1] \to [0,2\pi]$ tale che $f(t) = 0$ per $t \le -\frac{1}{2}$ e $f(t) = 2\pi$ per $t \ge \frac{1}{2}$, e definiamo

$$\begin{aligned} \theta\colon \qquad A &\longrightarrow A \\ (e^{ix},t) &\longmapsto (e^{i(x+f(t))},t). \end{aligned}$$

Possiamo ora definire il Dehn twist intorno a $\alpha$ come il diffeomorfismo $T_\alpha\colon S \to S$ tale che

$$T_\alpha(p) = \begin{cases} p & p \notin \psi(A) \\ (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1})(p) & p \in \psi(A). \end{cases}$$

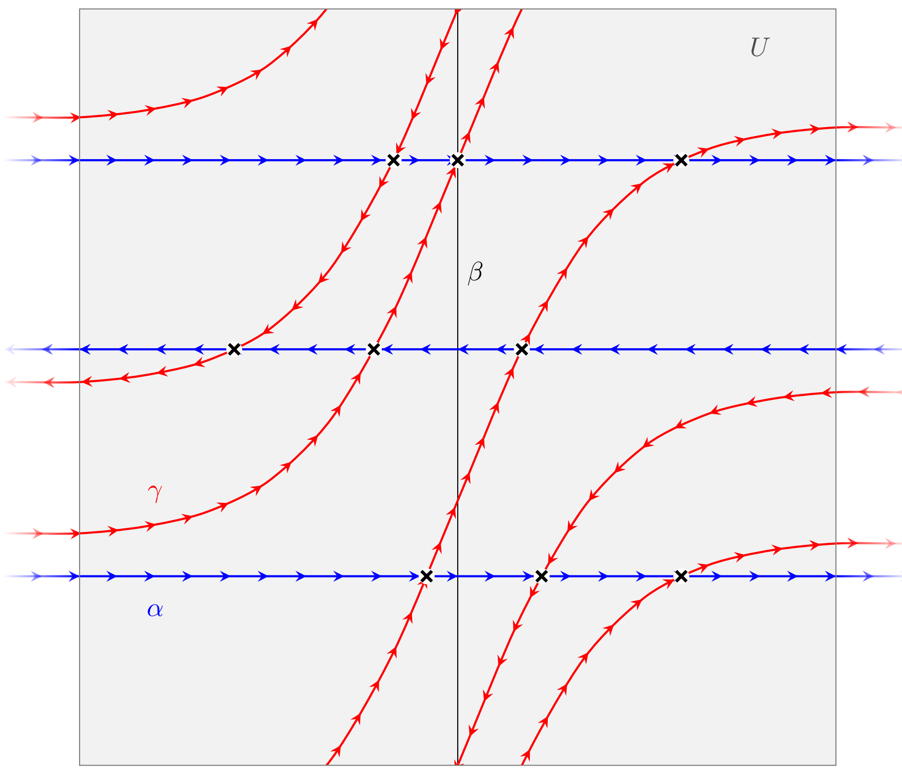
Come visto a lezione, la classe di isotopia di $T_\alpha$ non dipende dalla scelta dell'intorno regolare $\psi$ né della funzione $f$. Mostreremo inoltre nell'Esercizio 3.2 che la classe di isotopia di $T_\alpha$ non cambia invertendo l'orientazione di $\alpha$ o sostituendo $\alpha$ con una curva a lei isotopa: è dunque ben definito l'elemento $T_a \in \mathrm{MCG}(S)$ per $a \in \mathcal{S}$.

## Esercizio 3.1

**Lemma 1.** *Siano $a$, $b$ classi di isotopia di curve semplici chiuse, con $b$ non banale, e sia $k \geq 0$. Allora*

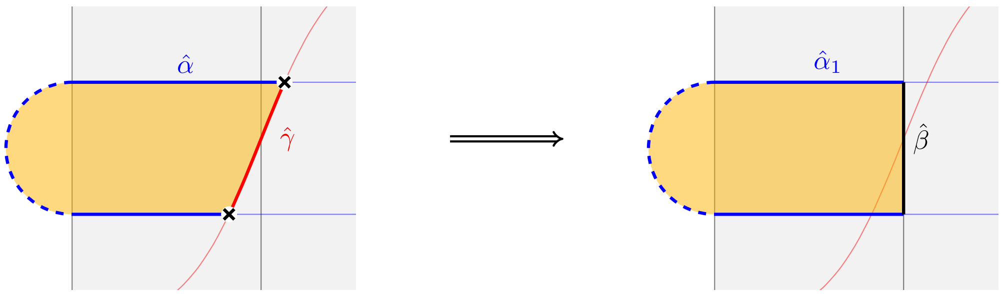
$$i(a, T_b^k(a)) = k \cdot i(a,b)^2.$$

*Dimostrazione.* Siano $\alpha$, $\beta$ rappresentanti di $a$, $b$ in posizione minimale. Se $\alpha$ e $\beta$ non si intersecano la tesi è ovvia, dunque supponiamo che si intersechino almeno in un punto. Scegliamo un intorno regolare $U$ di $\beta$ abbastanza stretto da intersecare $\alpha$ in $i(a,b)$ archi disgiunti, ciascuno dei quali interseca $\beta$ esattamente una volta. Definiamo un rappresentante $\gamma$ della classe $T_b^k(a)$ come segue: consideriamo una curva $\alpha'$ parallela a $\alpha$, ottenuta traslando $\alpha$ lungo un suo intorno regolare, e poniamo $\gamma = T_\beta^k(\alpha')$. Possiamo orientare $\alpha$ e $\gamma$ in modo che siano coorientate e che entrando in $U$ si allontanino.

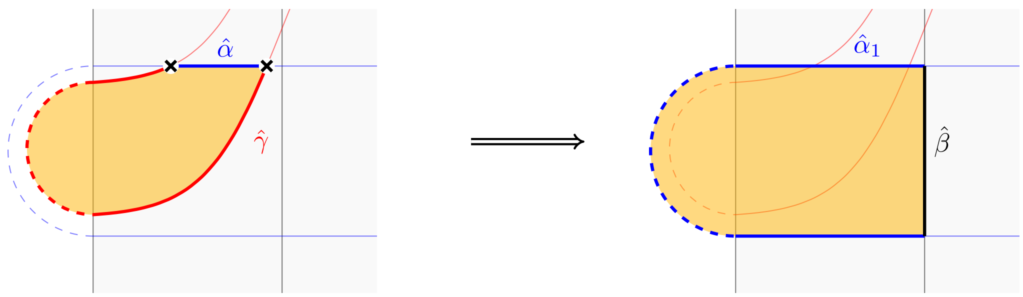



È immediato verificare che $\alpha$ e $\gamma$ si intersecano esattamente in $k \cdot i(a,b)^2$ punti. È dunque sufficiente mostrare che $\alpha$ e $\gamma$ sono in posizione minimale, ossia che non formano bigoni. Se $i(a,b) = 1$ allora $\alpha$ e $\gamma$ non possono formare bigoni (si intersecano sempre con la stessa orientazione), quindi supponiamo $i(a,b) \geq 2$. Supponiamo per assurdo che esista un bigono $D$, e siano $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ i lati di $D$ che giacciono rispettivamente su $\alpha$ e $\gamma$. Distinguiamo alcuni casi.

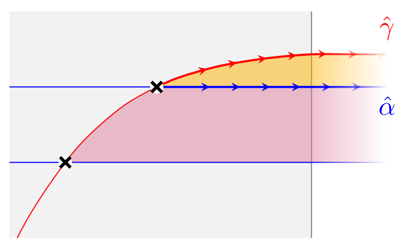
- Se $\hat{\gamma}$ è tutto contenuto in $U$, allora $\alpha$ e $\beta$ formano un bigono, ma ciò è impossibile, dato che sono in posizione minimale.



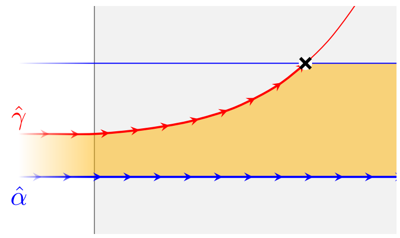

- Se $\hat{\alpha}$ è tutto contenuto in $U$, allora di nuovo $\alpha$ e $\beta$ formano un bigono (ricordiamo che $\alpha$ e $\gamma$ sono parallele fuori da $U$).




- Dunque $\hat{\alpha}$ esce da $U$ per poi rientrarvi. Analizziamo cosa succede vicino vicino al punto in cui $\hat{\alpha}$ esce da $U$.



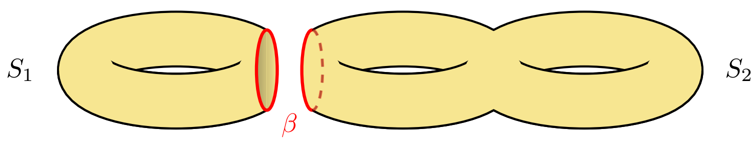

  Osserviamo che la regione in rosa non può essere un bigono, in quanto il suo lato giacente su $\gamma$ è tutto contenuto in $U$, e abbiamo già escluso questa possibilità. Dunque il bigono è necessariamente la regione arancione, e $\hat{\gamma}$ è parallelo a $\hat{\alpha}$ fuori da $U$. Analizziamo ora cosa succede vicino al punto in cui $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ rientrano in $U$.



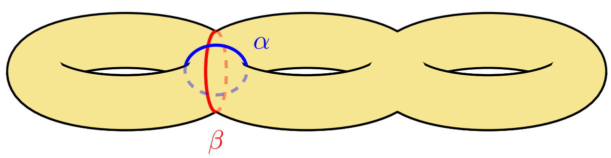

Dopo essere entrati in $U$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ si allontanano, dunque non è possibile che la prima intersezione di $\hat{\gamma}$ con $\alpha$ sia il secondo estremo di $\hat{\alpha}$; è pertanto impossibile che $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ siano lati di un bigono. □

Sia $b \in \mathcal{S}$ una classe di isotopia non banale, e $\beta\colon S^1 \to S$ una curva che la rappresenta. Mostriamo che esiste $a \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, b) \neq 0$.

- **Supponiamo che $\beta$ sia separante.** In questo caso $S \setminus\setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici $S_1$ e $S_2$, ciascuna con una componente di bordo. Naturalmente $S_1$ e $S_2$ hanno genere almeno 1, altrimenti $\beta$ sarebbe omotopicamente banale.

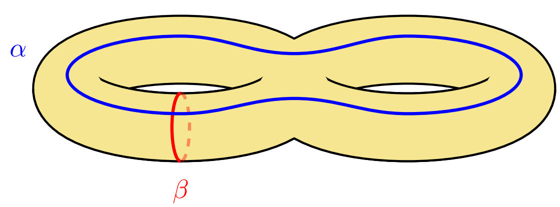



Allora possiamo prendere come $a$ la classe di isotopia della curva $\alpha$ ottenuta come in figura.




Mediante il criterio del bigono è facile vedere che $\alpha$ e $\beta$ sono in posizione minimale, dunque $i(a, b) = 2$.

- **Supponiamo che $\beta$ non sia separante**. In questo caso esiste una curva $\alpha$ che interseca $\beta$ esattamente una volta.




Prendendo come $a$ la classe di isotopia di $\alpha$, otteniamo che $i(a, b) = 1$.

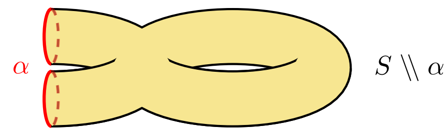
Dal Lemma 1 sappiamo che
$$i(a, T_b^k(a)) = k \cdot i(a,b)^2$$
per ogni $k > 0$, dunque in particolare $T_b^k(a) \neq a$. Pertanto l'azione di $T_b^k$ su $\mathcal{S}$ è non banale, e in particolare $T_b^k$ non è banale.

## Esercizio 3.2

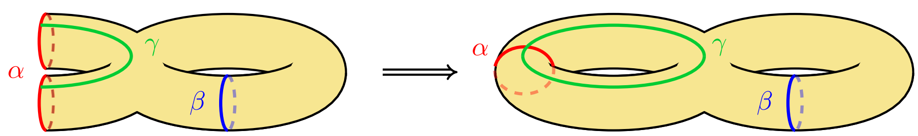
**Lemma 2.** *Siano $a, b \in \mathcal{S}$ due classi di isotopia non banali distinte. Allora esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a,c) \neq i(b,c)$.*

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che se $i(a,b) \neq 0$ allora è sufficiente scegliere $c = a$, giacché $i(a,a) = 0$. Supponiamo dunque che $i(a,b) = 0$, e siano $\alpha$, $\beta$ curve semplici chiuse in posizione minimale che rappresentano rispettivamente $a$ e $b$; in particolare, $\alpha$ e $\beta$ hanno supporti disgiunti. Distinguiamo alcuni casi.

- **Supponiamo che $\alpha$ non sia separante.** Allora $S \setminus\!\setminus \alpha$ è una superficie compatta connessa con due componenti di bordo.

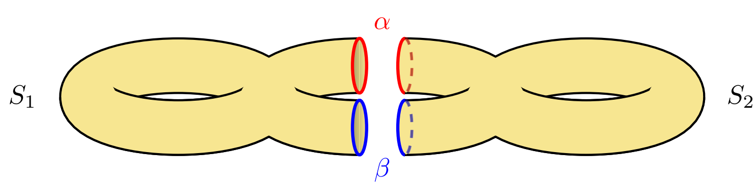



  - **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano alla stessa componente connessa di $S \setminus\!\setminus \alpha \setminus\!\setminus \beta$.** Allora esiste una curva $\gamma$ che interseca $\alpha$ esattamente una volta e non interseca $\beta$.

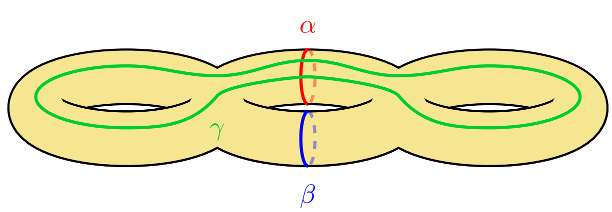



    Prendendo come $c$ la classe di isotopia di $\gamma$, otteniamo che
$$i(a,c) = 1 \neq 0 = i(b,c).$$

  - **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano a componenti connesse diverse di $S \setminus\!\setminus \alpha \setminus\!\setminus \beta$.** In questo caso $S \setminus\!\setminus \alpha \setminus\!\setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici $S_1$ e $S_2$, ciascuna con due componenti di bordo, una lungo $\alpha$ e una lungo $\beta$.



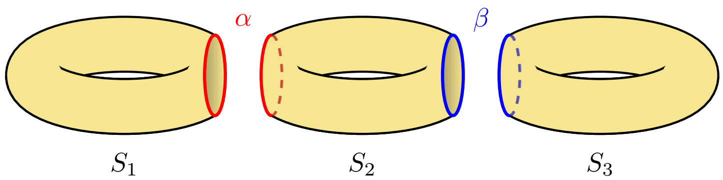

    Osserviamo che $S_1$ e $S_2$ hanno genere almeno 1, altrimenti $\alpha$ e $\beta$ coborderebbero un anello e sarebbero dunque isotope. È allora facile individuare una curva $\gamma$ la cui classe di isotopia $c$ soddisfa la tesi.



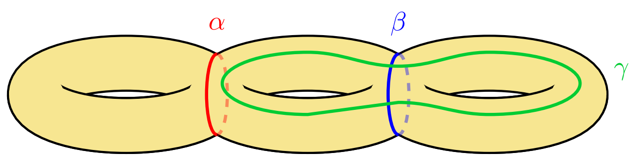
Grazie al criterio del bigono, si verifica che $\alpha$ e $\gamma$ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a,c) = 2 \neq 0 = i(b,c).$$

- **Supponiamo che $\beta$ non sia separante.** Possiamo allora ripetere il ragionamento del punto precedente, scambiando i ruoli di $\alpha$ e $\beta$, ottenendo una classe $c$ tale che $i(a,c) \neq i(b,c)$.
- **Supponiamo che $\alpha$ e $\beta$ siano separanti.** Allora $S \setminus\!\setminus \alpha \setminus\!\setminus \beta$ è unione disgiunta di tre superfici $S_1$, $S_2$ e $S_3$; $S_1$ ha una componente di bordo lungo $\alpha$, $S_3$ ha una componente di bordo lungo $\beta$, e $S_2$ ha due componenti di bordo, una lungo $\alpha$ e una lungo $\beta$.




Osserviamo che $S_1$ e $S_3$ hanno genere almeno 1, altrimenti $\alpha$ o $\beta$ sarebbero omotopicamente banali, e che anche $S_2$ ha genere almeno 1, altrimenti sarebbero isotope. È allora facile individuare una curva $\gamma$ la cui classe di isotopia $c$ soddisfa la tesi.




Grazie al criterio del bigono, si verifica che $\beta$ e $\gamma$ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a,c) = 0 \neq 2 = i(b,c).$$

$\square$

(1) - Cominciamo a mostrare che la classe di isotopia di $T_\alpha$ non dipende dall'orientazione di $\alpha$. Sia dunque $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa, e sia $\overline{\alpha}\colon S^1 \to S$ la curva inversa, ossia quella definita da $\overline{\alpha}(e^{ix}) = \alpha(e^{-ix})$. Se $\psi\colon A \to S$ è un intorno regolare orientato di $\alpha$, allora

$$\begin{aligned} \overline{\psi}: \qquad A &\longrightarrow S \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto \psi(e^{-ix}, -t) \end{aligned}$$

è un intorno regolare orientato di $\overline{\alpha}$. Poiché la classe di isotopia dei Dehn twist non dipende dalla scelta di $f$, non è restrittivo supporre che $f(-t) = 2\pi - f(t)$. Mostriamo allora che $T_\alpha(p) = T_{\overline{\alpha}}(p)$ per ogni $p \in S$ (dunque in particolare sono isotopi). La tesi è ovvia per $p \notin \psi(A)$, dunque supponiamo $p \in \psi(A)$; è sufficiente far vedere che $\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi} = \overline{\psi} \circ \theta$. Effettivamente:

$$(\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi})(e^{ix}, t) = \psi(\theta(e^{-ix}, -t)) = \psi(e^{i(-x+f(-t))}, -t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t);$$
$$(\overline{\psi} \circ \theta)(e^{ix}, t) = \overline{\psi}(e^{i(x+f(t))}, t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t).$$

- Supponiamo che le curve semplici chiuse non banali $\alpha, \beta \colon S^1 \to S$ siano due rappresentanti della stessa classe di isotopia, ossia che esista un'isotopia (ambiente) $F \colon S \times [0,1] \to S$ tale che $F_0 = \mathrm{id}_S$ e $F_1 \circ \alpha = \beta$. Osserviamo che, per quanto abbiamo dimostrato, possiamo orientare $\alpha$ e $\beta$ in modo che una tale isotopia esista. Sia $\psi \colon A \to S$ un intorno regolare orientato di $\alpha$; notiamo che $F_1 \circ \psi$ è un intorno regolare orientato di $\beta$. È allora evidente che un Dehn twist intorno a $\beta$ è dato da $T_\beta = F_1 \circ T_\alpha \circ F_1^{-1}$, che è ovviamente isotopo a $T_\alpha$. Questo mostra che $T_\beta = T_\alpha$ in $\mathrm{MCG}(S)$.
- Siano ora $\alpha, \beta \colon S^1 \to S$ due curve semplici chiuse non banali e non isotope, e siano $a, b \in \mathcal{S}$ le corrispondenti classi di isotopia. Per il Lemma 2, esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a,c) \neq i(b,c)$. Dal Lemma 1 otteniamo

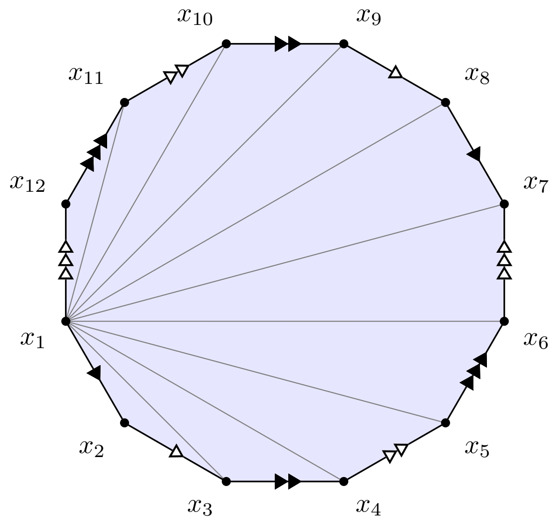
  $$i(c, T_a(c)) = i(c,a)^2 \neq i(c,b)^2 = i(c, T_b(c)),$$

  da cui $T_a \neq T_b$ come elementi di $\mathrm{MCG}(S)$.

(2) Per non creare conflitti di notazione, siano $h \in \mathrm{MCG}(S)$, $a \in \mathcal{S}$. Sia $\alpha \colon S^1 \to S$ un rappresentante di $a$, e con lieve abuso di notazione trattiamo $h$ come un diffeomorfismo di $S$. Sia $\psi \colon A \to S$ un intorno regolare di $\alpha$: notiamo che $h \circ \psi$ è un intorno regolare di $h \circ \alpha$. Ma allora è evidente che $h \circ T_\alpha \circ h^{-1}$ è un Dehn twist intorno a $h \circ \alpha$, da cui la tesi.

## Esercizio 3.5

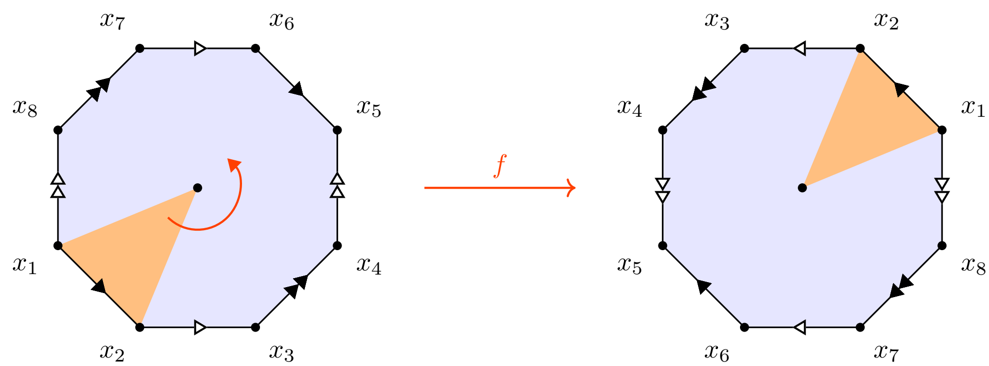
Consideriamo la superficie chiusa ottenuta incollando lati opposti di un $4g$-gono regolare con orientazioni parallele. Più precisamente, detti $x_1, \ldots, x_{4g}$ i vertici del poligono regolare, incolliamo il segmento $x_i x_{i+1}$ con il segmento $x_{2g+i+1} x_{2g+i}$. La superficie $\Sigma$ così ottenuta ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella, $2g$ 1-celle e una 2-cella.




- **$\Sigma$ è orientabile.** Questo si vede immediatamente triangolando il poligono regolare e osservando che le identificazioni fra lati invertono l'orientazione.
- **Una base per $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ è data dai segmenti $x_i x_{i+1}$ per $1 \le i < 2g$.** Questo si vede facilmente calcolando l'omologia cellulare: infatti i segmenti $x_i x_{i+1}$ sono esattamente le 1-celle, e hanno tutte bordo nullo. Al contempo, anche l'unica 2-cella ha bordo nullo, dunque $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ con base data dalle 1-celle.

In particolare, $\Sigma$ è una superficie chiusa orientabile di genere $g$.

Per ogni $1 \le i < 2g$, sia $\alpha_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ la classe rappresentata in omologia dal segmento $x_i x_{i+1}$. Consideriamo l'automorfismo $f \colon \Sigma \to \Sigma$ indotto dalla rotazione di angolo $\pi$ intorno al centro del poligono regolare.



Osserviamo che il segmento $x_i x_{i+1}$ viene mandato da $f$ nel segmento $x_{2g+i}x_{2g+i+1}$, dunque $f_*(\alpha_i) = -\alpha_i$. Poiché gli $\alpha_i$ formano una base di $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, abbiamo che $f_* = -\operatorname{id}_{H_1(\Sigma,\mathbb{Z})}$. Ovviamente $f$ ha ordine 2 e preserva l'orientazione, dunque $[f] \in \mathrm{MCG}(\Sigma)$ è l'involuzione iperellittica cercata.

# Esercizi del 2 maggio

## Esercizio 4.2

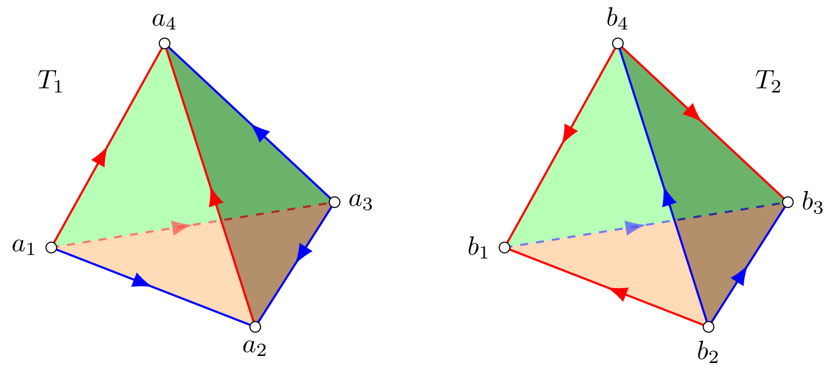
A meno di restringere $\nu K$, operazione che preserva il tipo di omotopia di $M$, possiamo supporre che la chiusura di $\nu K$ sia contenuta nella parte interna di un intorno tubolare compatto $D^2 \times S^1 \subseteq S^3$ di $K$.

- Consideriamo gli aperti $U = \operatorname{int} M$, $V = \operatorname{int}(D^2 \times S^1)$ di $S^3$. Osserviamo che $U$ è omotopicamente equivalente a $M$, $V$ è omotopicamente equivalente a $S^1$, e $U \cap V$ è omotopicamente equivalente a $T^2$. Scriviamo una parte della successione esatta di Mayer-Vietoris relativa a $U$ e $V$:
$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(M) \longrightarrow H_1(S^3),$$
da cui
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus H_1(M) \longrightarrow 0.$$
Poiché $H_1(M)$ è abeliano e finitamente generato ($M$ è compatta), segue immediatamente che $H_1(M) \simeq \mathbb{Z}$.
- Mostriamo che l'omomorfismo $H_1(T^2) \to H_1(M)$ indotto dall'inclusione è suriettivo.
  - **Vale** $H_1(S^3, \overline{\nu K}) = 0$**.** Infatti dalla successione esatta lunga in omologia relativa per la coppia $(S^3, \overline{\nu K})$ otteniamo
  $$H_1(S^3) \longrightarrow H_1(S^3, \overline{\nu K}) \longrightarrow \widetilde{H}_0(\overline{\nu K}),$$
  da cui (osservando che $H_1(S^3) = \widetilde{H}_0(\overline{\nu K}) = 0$) la tesi.
  - **Vale** $H_1(M, T^2) = 0$**.** Poiché $M = S^3 \setminus \nu K$ e $T^2 = \overline{\nu K} \setminus \nu K$, per escissione otteniamo
  $$H_1(M, T^2) = H_1(S^3 \setminus \nu K, \overline{\nu K} \setminus \nu K) \simeq H_1(S^3, \overline{\nu K}) = 0.$$
  - **L'omomorfismo** $H_1(T^2) \to H_1(M)$ **è suriettivo.** Infatti dalla successione esatta lunga della coppia $(M, T^2)$ otteniamo
  $$H_1(T^2) \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow H_1(M, T^2) = 0.$$

  Ma allora il nucleo di questo omomorfismo è un sottogruppo ciclico di $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generato da un elemento primitivo, diciamo $\alpha \in H_1(T^2)$. Sappiamo che tale $\alpha$ è rappresentato (a meno dell'orientazione) da un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse, il che permette di definire la *longitudine*.
- Si vede facilmente che l'omomorfismo $H_1(T_2) \to H_1(D^2 \times S^1)$ è suriettivo, poiché ogni curva chiusa in $D^2 \times S^1$ che rappresenta un generatore di $H_1(D^2 \times S^1)$ è omotopa a una curva con supporto contenuto in $T_2$. Allora, esattamente come nel punto precedente, il nucleo di tale omomorfismo è generato da un elemento primitivo di $H_1(T^2)$, al quale corrisponde (a meno dell'orientazione) un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse. Questo permette di definire il *meridiano*.

## Esercizio 4.3

Ricordiamo che una struttura iperbolica sul complementare del nodo figura otto è data dall'incollamento secondo il seguente schema di due tetraedri ideali regolari iperbolici (le facce dello stesso colore vengono identificate, in modo da rispettare le orientazioni e i colori rappresentati sugli spigoli).




Per fissare la notazione, siano $M$ il complementare del nodo figura otto, $T_1$, $T_2$ i due tetraedri, $\sim$ la relazione di equivalenza descritta dall'incollamento, in modo che $M = T_1 \sqcup T_2 / \sim$. Ricordiamo che, in un tetraedro ideale regolare, ogni permutazione dei vertici è indotta da un'unica isometria di $\mathbb{H}^n$. Sia allora $h_1 \colon T_1 \to T_1$ l'isometria che induce la permutazione $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ (più precisamente, $a_i \mapsto a_{\sigma(i)}$); definiamo in modo analogo $h_2 \colon T_2 \to T_2$. Sia infine $s \colon T_1 \sqcup T_2 \to T_2 \sqcup T_2$ l'applicazione che "scambia" $T_1$ e $T_2$ mediante l'identità, ossia manda $x \in T_1$ in $x \in T_2$ e viceversa.

Definiamo

$$f = (h_1 \sqcup h_2) \circ s \colon T_1 \sqcup T_2 \longrightarrow T_1 \sqcup T_2.$$

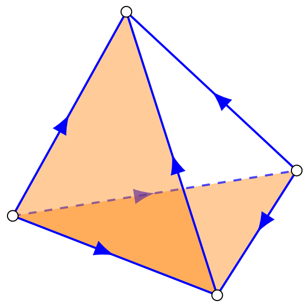
In altre parole, $f$ scambia $T_1$ e $T_2$, e poi applica su ognuno dei tetraedri l'isometria che induce la permutazione sopra descritta. In altre parole ancora, $f$ è l'unica isometria che effettua i seguenti scambi di vertici:

$$a_1 \leftrightarrow b_2 \qquad a_2 \leftrightarrow b_1 \qquad a_3 \leftrightarrow b_4 \qquad a_4 \leftrightarrow b_3.$$

È facile verificare che $f$ è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$: poiché $h_1$ e $h_2$ agiscono allo stesso modo, l'unico fatto non ovvio è la compatibilità sugli spigoli, ma si può vedere per verifica diretta che $f$ manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, preservandone l'orientazione. Segue che $f$ induce un'applicazione al quoziente $\overline{f} \colon M \to M$ che risulta essere un'isometria, in quanto composizione di isometrie. Verifichiamo che $\overline{f}$ non ha punti fissi.

- Se $x$ appartiene alla parte interna di $T_1$, allora non è un punto fisso di $\overline{f}$, poiché $f(x)$ appartiene alla parte interna di $T_2$. Lo stesso vale ovviamente per i punti della parte interna di $T_2$.
- Poiché $\sigma$ agisce senza punti fissi sull'insieme delle facce di un tetraedro, se $x$ appartiene alla parte interna di una faccia allora non può essere un punto fisso di $\overline{f}$, in quanto $f(x)$ appartiene alla parte interna di un'altra faccia.
- Come già osservato, $f$ manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, dunque non ci sono punti fissi per $\overline{f}$ sugli spigoli.

Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2. Possiamo allora definire $N = M/\langle \overline{f} \rangle$, che risulta essere una 3-varietà iperbolica completa, non compatta e di volume finito, doppiamente rivestita dal complementare del nodo figura otto. L'immagine di $T_1$ mediante la proiezione al quoziente fornisce una tassellazione di $N$ con un tetraedro ideale regolare iperbolico. Dalla costruzione che abbiamo effettuato, è facile risalire esplicitamente alla suddetta tassellazione, che riportiamo per completezza.



## Esercizio 4.4

Ricordiamo la costruzione, vista a lezione, di una 3-varietà iperbolica tassellata da quattro tetraedri ideali regolari iperbolici. Dopo aver colorato le facce degli ottaedri a scacchiera, le identifichiamo secondo il seguente schema, utilizzando come mappa di incollamento l'identità.

Seguiamo ora un approccio simile a quello dell'esercizio precedente. Siano $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ gli ottaedri, $M = O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4 / \sim$ la varietà ottenuta mediante l'incollamento. Definiamo l'applicazione

$$f\colon O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4 \longrightarrow O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4$$

che prima scambia $O_1 \leftrightarrow O_4$ e $O_2 \leftrightarrow O_3$, e poi applica a ogni ottaedro la "mappa antipodale", ossia l'isometria che scambia ogni vertice con quello diametralmente opposto. È immediato verificare che $f$ passa al quoziente, definendo un'isometria $f\colon M \to M$. Tale isometria, inoltre, non ha punti fissi: infatti l'unico punto fisso della mappa antipodale appartiene alla parte interna dell'ottaedro, ma ovviamente $f$ agisce in modo libero su $\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$, dunque nessun punto nelle parti interne degli ottaedri può essere fissato.

Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2, dunque possiamo definire la 3-varietà iperbolica $N = M/\langle \overline{f} \rangle$. Le immagini di $O_1$ e $O_2$ mediante la proiezione al quoziente forniscono una tassellazione di $N$ con due ottaedri ideali regolari iperbolici. Dalla costruzione che abbiamo effettuato, è facile risalire esplicitamente alla suddetta tassellazione, ~~che riportiamo per completezza~~.