

Esercizi del 14 marzo

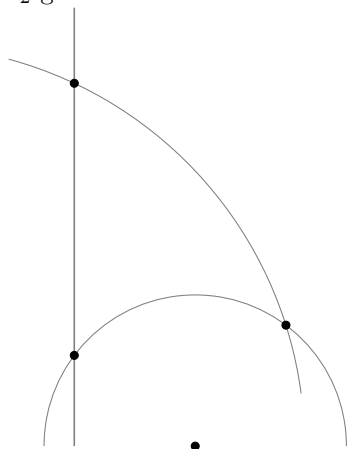
Esercizio 1.4

Sia $K > 0$ tale che le palle iperboliche di raggio K abbiano area maggiore di 2π ; mostriamo che tale K soddisfa la condizione richiesta.

Sia $\Delta \subseteq \mathbb{H}^2$ un triangolo, $p \in \Delta$ un punto giacente su un lato ℓ . Se p è un vertice la tesi è ovvia, dunque supponiamo che non lo sia. Sia \mathcal{A} il semipiano (aperto) delimitato da ℓ su cui giace il triangolo. Definiamo $B \subseteq \mathbb{H}^2$ come l'intersezione di \mathcal{A} con la palla di centro p e raggio K ; osserviamo che B ha area maggiore di $2\pi/2 = \pi$. Di conseguenza, essendo l'area di Δ al più π , necessariamente B non è contenuto in Δ . Poiché B interseca Δ ed è connesso, deve esistere un punto di $q \in B$ che giace sul bordo di Δ . Giacché \mathcal{A} e ℓ sono disgiunti, q deve appartenere a uno degli altri due lati; essendo la distanza fra p e q al più K , otteniamo la tesi.

Esercizio 1.5

Utilizziamo il modello $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ del semipiano. Siano ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 i lati del triangolo. A meno di isometria, possiamo supporre che ℓ_1 giaccia sulla circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio $r > 0$, e che ℓ_2 giaccia su una retta verticale.



Esercizio 1.9

Lemma. Siano $A \in O(n)$ una matrice ortogonale, $b \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Definiamo $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ come $\varphi(x) = Ax + b$. Supponiamo che φ non abbia punti fissi. Allora esiste una retta affine di \mathbb{R}^n che è φ -invariante.

Dimostrazione.

- Vale $\mathbb{R}^n = \ker(A - I) \oplus \text{im}(A - I)$.

Per motivi di dimensione, è sufficiente mostrare che i due sottospazi hanno intersezione banale.

Sia $v \in \ker(A - I) \cup \text{im}(A - I)$; allora $v = Aw - w$ per un qualche $w \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\langle v, v \rangle = \langle Aw - w, v \rangle = \langle Aw, v \rangle - \langle w, v \rangle = \langle w, Av, - \rangle \langle w, v \rangle = \langle w, Av - v \rangle = 0,$$

da cui $v = 0$.

■ **Vale $b \notin \text{im}(A - I)$.**

Se per assurdo $b = Aw - w$, allora $\varphi(-w) = -Aw + b = -w$, dunque φ avrebbe un punto fisso, il che è contro l'ipotesi.

■ **L'isometria φ ammette una retta invariante.**

Utilizzando la decomposizione del primo punto, scriviamo $b = v + (Aw - w)$ con $Av = v$. Poiché $b \notin \text{im}(A - I)$, necessariamente $v \neq 0$. Mostriamo che la retta affine $\ell = -w + \text{span}(v)$ è φ -invariante. Per $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\varphi(-w + tv) = -Aw + tAv + b = -Aw + tv + (v + Aw - w) = -w + (t + 1)v \in \ell,$$

da cui la tesi. □

Sia $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un'isometria parabolica. Consideriamo il modello del semispazio H^n ; possiamo supporre che ψ fissi ∞ . Allora ψ si scrive come $\psi(x, t) = (Ax + b, t)$ per opportuni $A \in O(n - 1)$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Per il Lemma, esiste una retta euclidea $\ell = w + \text{span}(v) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ invariante per la mappa $(x \mapsto Ax + b)$. È allora evidente che il piano iperbolico $\{(w + sv, t) : s \in \mathbb{R}, t > 0\} \subseteq H^n$ è ψ -invariante.

Esercizi del 28 marzo

Introduzione teorica

Definizione. Sia $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un sottogruppo. Fissiamo un punto $x \in \mathbb{H}^n$. Definiamo $L(\Gamma)$ come l'insieme dei punti limite in $\partial\mathbb{H}^n$ dell'orbita $\Gamma \cdot x$. Poniamo inoltre $O(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n \setminus L(\Gamma)$.

Mostriamo che questa definizione è ben posta (ossia non dipende dalla scelta del punto x).

Proposizione. Siano $x, x' \in \mathbb{H}^n$. Sia $y \in \partial\mathbb{H}^n$ un punto limite dell'orbita $\Gamma \cdot x$. Allora y è anche un punto limite dell'orbita $\Gamma \cdot x'$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una successione di isometrie $\{g_i\}_{i \geq 0} \subseteq \Gamma$ tali che $g_i(x) \rightarrow y$. Essendo g_i un'isometria di \mathbb{H}^n , vale $\text{dist}(g_i(x), g_i(x')) = \text{dist}(x, x')$, pertanto anche $g_i(x') \rightarrow y$. \square

È evidente che $L(\Gamma)$ è un chiuso Γ -invariante. Inoltre abbiamo la seguente.

Proposizione. Supponiamo che Γ non sia elementare. Sia $S \subseteq \partial\mathbb{H}^n$ un chiuso non vuoto Γ -invariante. Allora $L(\Gamma) \subseteq S$.

Dimostrazione. Sia $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ l'involuppo convesso di S . Poiché Γ non è elementare, S contiene almeno due punti, dunque $K \cap \mathbb{H}^n$ è non vuoto. Scegliamo un $x \in K \cap \mathbb{H}^n$; poiché S è chiuso e Γ -invariante, lo stesso vale per K . Ma allora l'insieme dei punti limite di $\Gamma \cdot x$ che giacciono in $\partial\mathbb{H}^n$ (ossia $L(\Gamma)$) è contenuto in $K \cap \partial\mathbb{H}^n = S$, da cui la tesi. \square

Definizione. Sia $K \subseteq \partial\mathbb{H}^n$ un convesso chiuso contenente almeno due punti (dunque non tutto contenuto in $\partial\mathbb{H}^n$). Definiamo l'applicazione $\rho_K: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow K$ come segue:

- se $x \in \mathbb{H}^n$, allora $\rho_K(x)$ è il punto di $K \cap \mathbb{H}^n$ di minima distanza da x ;
- se $x \in \partial\mathbb{H}^n$, allora $\rho_K(x)$ è l'unico punto di K giacente sulla minima sfera centrata in x che interseca K .

Osserviamo che questa definizione è ben posta poiché K è convesso e chiuso. Inoltre si verifica facilmente che ρ_K è continua su $\mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K)$ e soddisfa $\rho_{g(K)} \circ g = g \circ \rho_K$ per ogni isometria g di \mathbb{H}^n .

Proposizione. Supponiamo che Γ agisca in modo libero e propriamente discontinuo su \mathbb{H}^n . Allora Γ agisce allo stesso modo su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$.

Dimostrazione. Sia $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ l'involuppo convesso di $L(\Gamma)$; poiché $L(\Gamma)$ è un chiuso Γ -invariante, lo stesso vale per K . Consideriamo l'applicazione $\rho: \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^n$ definita come la restrizione a $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ di ρ_K . Per quanto abbiamo osservato, ρ è continua e soddisfa $\rho \circ g = g \circ \rho$ per ogni $g \in \Gamma$.

- **L'azione di Γ su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ è libera.** Sia $y \in O(\Gamma)$. Se $g(y) = y$ per un qualche $g \in \Gamma$, allora anche $g(\rho(y)) = \rho(g(y)) = \rho(y)$, da cui (essendo l'azione di Γ libera su \mathbb{H}^n) $g = \text{id}$.
- **L'azione di Γ su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ è propriamente discontinua.** Siano $y, y' \in \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$. Poiché l'azione di Γ su \mathbb{H}^n è propriamente discontinua, esistono intorno U, U' di $\rho(y), \rho(y')$ rispettivamente tali che $U \cap g(U') \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $g \in \Gamma$. Scegliamo $W = \rho^{-1}(U)$ e $W' = \rho^{-1}(U')$ come intorno, rispettivamente, di y e y' . Si verifica facilmente che se $U \cap g(U') = \emptyset$ allora $W \cap g(W') = \emptyset$, da cui la tesi. \square

Teorema. *Supponiamo che la varietà iperbolica completa $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ abbia volume finito. Sia*

$$S = \bigcup_{g \in \Gamma} \text{Fix}(g) \subseteq \partial\mathbb{H}^n.$$

Allora S è denso in $\partial\mathbb{H}^n$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che Γ non è elementare, altrimenti M avrebbe volume infinito. Notiamo poi che $\overline{S} \subseteq \partial\mathbb{H}^n$ è un chiuso non vuoto Γ -invariante, dunque contiene $L(\Gamma)$. Se per assurdo S non fosse denso in $\partial\mathbb{H}^n$, allora $O(\Gamma)$ sarebbe non vuoto. Sia dunque $y \in O(\Gamma)$; poiché l'azione di Γ su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ è libera e propriamente discontinua, esiste un intorno $W \subseteq \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ di y tale che $W \cap g(W) = \emptyset$ per ogni $g \in \Gamma$ diverso dall'identità. Poiché y ha un sistema fondamentale di intorni costituito da semispazi, possiamo supporre che W sia un semispazio. Ma $\pi|_{W \cap \mathbb{H}^n} : W \cap \mathbb{H}^n \rightarrow M$ è un'isometria locale iniettiva (dove $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow M$ è il rivestimento), il che è assurdo, avendo M volume finito. \square