Esercizi del 16 maggio

Esercizio 5.1

Ricordiamo che il gruppo di Coxeter Γ di P ammette la presentazione

$$\Gamma = \left\langle g_1, \dots, g_s \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i^2 \text{ per } i \in \{1, \dots, s\}, \\ (g_i g_j)^2 \text{ se } F_i \text{ e } F_j \text{ si intersecano} \end{array} \right\rangle < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n),$$

dove $F_1, \dots, F_s$ sono le $(n-1)$-facce di P, e per ogni $i \in 1, \dots, s$ l'elemento $g_i \in \Gamma$ è la riflessione rispetto al piano su cui giace F_i. Ogni colorazione

$$c \colon \{F_1, \dots, F_s\} \longrightarrow V$$

induce un morfismo di gruppi

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma &\longrightarrow V \\ g_i &\longmapsto c(F_i). \end{aligned}$$

Se la colorazione c è propria, allora $\ker \varphi < \Gamma$ è un gruppo di isometrie di $\mathbb{H}^n$ che agisce in modo libero e propriamente discontinuo.

0. Ovviamente **la varietà** $M = \mathbb{H}^n / \ker \varphi$ **è orientabile se e solo se tutti gli elementi di** $\ker \varphi$ **sono isometrie che preservano l'orientazione**.

1. Ogni elemento g di Γ può scriversi (in modo non unico) come prodotto $g = g_{i_1} \cdots g_{i_t}$; osserviamo che g preserva l'orientazione se e solo se t è pari, poiché ogni g_i inverte l'orientazione. Di conseguenza, M **è orientabile se e solo se per ogni scelta di** $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, s\}$ **con** t **dispari vale** $\varphi(g_{i_1} \cdots g_{i_t}) \neq 0$.

2. Osserviamo ora che, essendo V un $\mathbb{F}_2$-spazio vettoriale, per ogni $g, h \in \Gamma$ vale $\varphi(gh) = \varphi(hg)$. Poiché i g_i hanno ordine 2, possiamo riformulare la condizione come segue: M **è orientabile se e solo se per ogni** $T \subseteq \{1, \dots, s\}$ **di cardinalità dispari vale**

$$\sum_{t \in T} c(F_t) \neq 0.$$

Questa osservazione fornisce un algoritmo esponenziale in s per stabilire se la varietà M ottenuta dalla colorazione è orientabile (basta controllare tutti i sottoinsiemi di cardinalità dispari di $\{1, \dots, s\}$).

3. Possiamo riformulare ulteriormente il criterio, in modo da ottenere un algoritmo polinomiale in s. Notiamo infatti che la condizione che abbiamo trovato è equivalente a richiedere che ogniqualvolta una combinazione lineare dei $c(F_i)$ a coefficienti in $\mathbb{F}_2$ è nulla, il numero di coefficienti non nulli sia pari. Concludiamo pertanto che M **è orientabile se e solo se il**

seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{F}_2$ non ha soluzioni.

$$\begin{pmatrix} \boxed{c(F_1)} & \boxed{c(F_2)} & \cdots & \boxed{c(F_s)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

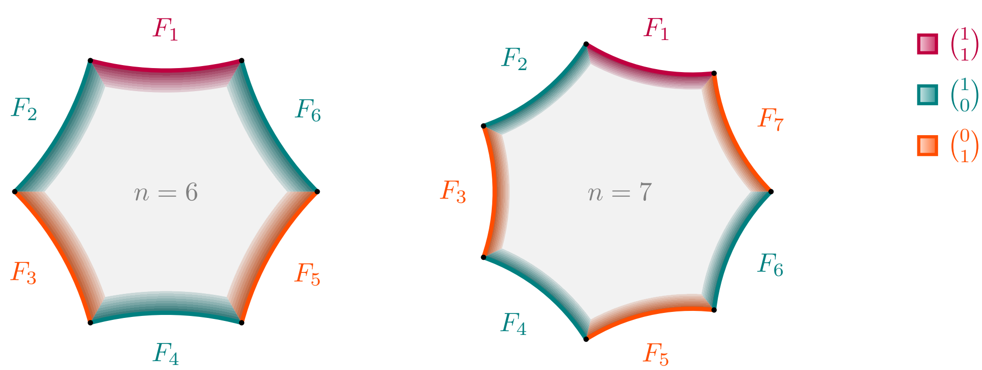
Esercizio 5.2

Ricordiamo che una *colorazione* di P_n a valori in un $\mathbb{F}_2$-spazio vettoriale V è il dato di un vettore $c(F) \in V$ per ogni 1-faccia (ossia spigolo) F di P_n. La colorazione è *propria* se per ogni vertice v di P_n vale la seguente condizione: i due vettori $c(F)$, $c(F')$ sono linearmente indipendenti, dove F e F' sono i due spigoli adiacenti a v.

È evidente che non esiste alcuna colorazione propria di P_n a valori in $\mathbb{F}_2$, poiché comunque presi due elementi di $\mathbb{F}_2$ essi sono linearmente dipendenti. Esibiamo ora esplicitamente una colorazione di P_n a valori in $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Siano $F_1, F_2, \dots, F_n$ gli spigoli di P_n, numerati in senso antiorario a partire da F_1, scelto arbitrariamente. Definiamo la colorazione come segue:

$$c(F_i) = \begin{cases} \binom{1}{1} & \text{se } i = 1, \\ \binom{1}{0} & \text{se } i > 1 \text{ e } i \text{ pari}, \\ \binom{0}{1} & \text{se } i > 1 \text{ e } i \text{ dispari}. \end{cases}$$

A seconda della parità di n, possono verificarsi i due casi illustrati in figura.



In ogni caso, poiché due elementi distinti non nulli di $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ sono sempre linearmente indipendenti, è evidente che la colorazione così definita risulta essere propria.

Esercizio 5.4

Definizione di X. Sia

$$X = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : A \text{ è simmetrica e definita positiva}\}.$$

Definiamo l'azione

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\longrightarrow X \\ (M, A) &\longmapsto MAM^t. \end{aligned}$$

Per un ben noto fatto di algebra lineare, per ogni $A \in X$ esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $MM^t = A$ (infatti A e Id hanno la stessa segnatura). A meno di sostituire M con

$$M \cdot \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

possiamo supporre che $\det M > 0$. Osserviamo poi che

$$1 = \det A = \det(MM^t) = (\det M)^2,$$

da cui $\det M = 1$. Abbiamo dunque mostrato che per ogni $A \in X$ esiste $M \in G$ tale che $\alpha(M, \mathrm{Id}) = A$, da cui segue che l'azione è transitiva. Lo stabilizzatore di $\mathrm{Id} \in X$ è l'insieme dalle matrici $M \in G$ tali che $MM^t = \mathrm{Id}$, ossia precisamente $SO(n, \mathbb{R}) = K$.

Come accade sempre per un'azione transitiva, abbiamo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} X &\longleftrightarrow G/K \\ \alpha(M, \mathrm{Id}) &\longleftarrow\!\shortmid M \cdot K, \end{aligned}$$

che permette di identificare X con G/K.

Definizione della metrica Riemanniana. Sappiamo che il tangente a X nel punto Id è dato da

$$T_{\mathrm{Id}}X = \{B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : B = B^t, \operatorname{tr} B = 0\}.$$

Il gruppo G agisce su TX mediante α come segue: se $M \in G$, $A \in X$, $B \in T_A X$ allora

$$M \cdot B = MBM^t \in T_{\alpha(M,A)}X.$$

Definiamo il prodotto scalare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_{\mathrm{Id}} : T_{\mathrm{Id}}X \times T_{\mathrm{Id}}X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (B, C) &\longmapsto \operatorname{tr}(BC). \end{aligned}$$

È evidente che si tratta di un'applicazione bilineare simmetrica; è inoltre un prodotto scalare definito positivo poiché, se B è una matrice simmetrica, allora $\operatorname{tr}(B^2)$ è la somma dei quadrati degli autovalori di B, strettamente positiva a meno che $B = 0$.

Osserviamo che questo prodotto scalare è K-invariante: per ogni $B, C \in T_{\mathrm{Id}}X$, $M \in K$ vale infatti

$$\left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} = \operatorname{tr}(MBCM^t) = \operatorname{tr}(MM^tBC) = \operatorname{tr}(BC) = \langle B, C\rangle_{\mathrm{Id}}.$$

Possiamo allora definire una metrica Riemanniana G-invariante su X come segue: per ogni $A \in X$ definiamo

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_A : T_AX \times T_AX &\longrightarrow \mathbb{R} \\ B, C &\longmapsto \langle MBM^t, MCM^t\rangle_{\mathrm{Id}}, \end{aligned}$$

dove $M \in G$ è una matrice tale che $\alpha(M, A) = \mathrm{Id}$. Svolgiamo le verifiche necessarie.

- L'applicazione è ben definita. Infatti, se due matrici $M, N \in G$ soddisfano $\alpha(M, A) = \alpha(N, A) = \mathrm{Id}$, allora NM^{-1} è un elemento dello stabilizzatore di Id, ossia è un elemento di K. Ma allora, poiché $\langle -, - \rangle_{\mathrm{Id}}$ è K-invariante, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} &= \left\langle NM^{-1}MBM^t(M^t)^{-1}N^t, NM^{-1}MCM^t(M^t)^{-1}N^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \left\langle NBN^t, NCN^t \right\rangle_{\mathrm{Id}}.
\end{aligned}
$$

- Poiché $\langle -, - \rangle_{\mathrm{Id}}$ è un prodotto scalare definito positivo, è evidente che lo stesso vale per $\langle -, - \rangle_A$.

- La metrica Riemanniana così definita è G-invariante. Siano infatti $A \in X$, $M \in G$, $B, C \in T_A X$; sia $N \in G$ tale che $\alpha(N, A) = \mathrm{Id}$. Allora NM^{-1} è tale che $\alpha(NM^{-1}, \alpha(M, A)) = \mathrm{Id}$, dunque

$$
\begin{aligned}
\left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\alpha(M,A)} &= \left\langle (NM^{-1})MBM^t(NM^{-1})^t, (NM^{-1})MCM^t(NM^{-1})^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \left\langle NBN^t, NCN^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \langle B, C \rangle_A
\end{aligned}
$$

Definizione dell'inversione. Definiamo l'inversione nel punto $\mathrm{Id} \in X$ come

$$
\begin{aligned}
\tau : X &\longrightarrow X \\
A &\longmapsto A^{-1}.
\end{aligned}
$$

È ovviamente un diffeomorfismo di ordine 2. Calcoliamo il differenziale di τ in ogni punto: se $A \in X$ e $B \in T_A B$, allora

$$
\begin{aligned}
\tau(A + tB) &= (A + tB)^{-1} \\
&= (\mathrm{Id} + tA^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\
&= A^{-1} - tA^{-1}BA^{-1} + o(t),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\mathrm{d}\tau_A(B) = -A^{-1}BA^{-1} \in T_{A^{-1}}X.
$$

Questo ci dice immediatamente che $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{Id}} = -\operatorname{id}_{T_{\mathrm{Id}}X}$. Possiamo inoltre verificare che τ è un'isometria. Siano $M \in G$, $A \in X$, $B, C \in T_A X$. Sia $M \in G$ una matrice tale che $\alpha(M, A) = \mathrm{Id}$. Allora $(M^{-1})^t$ è tale che $\alpha((M^{-1})^t, A^{-1}) = \mathrm{Id}$, dunque

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}\tau_A(B), \mathrm{d}\tau_A(C) \rangle_{A^{-1}} &= \left\langle (M^{-1})^t A^{-1}BA^{-1}M^{-1}, (M^{-1})^t A^{-1}CA^{-1}M^{-1} \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \left\langle (AM^t)^{-1}B(MA)^{-1}, (AM^t)^{-1}C(MA)^{-1} \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
\color{blue}{MAM^t = \mathrm{Id}} \qquad &= \left\langle MBM^t, MCM^t \right\rangle_{\mathrm{Id}} \\
&= \langle B, C \rangle_A.
\end{aligned}
$$

Evidentemente $\mathrm{Id} \in X$ è un punto fisso per τ; mostriamo che è anche isolato. Fissiamo una norma submoltiplicativa $\|-\|$ sullo spazio di matrici $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Sia $A \in X$ diverso dall'identità, e poniamo $B = A - \mathrm{Id} \neq 0$; mostriamo che se $\|B\| < 2$ allora $\tau(A) \neq A$. Se per assurdo $\tau(A) = A$, allora $(\mathrm{Id} + B)^2 = \mathrm{Id}$, da cui immediatamente $-2B = B^2$. Ma allora varrebbe

$$2\,\|B\| = \left\|B^2\right\| \leq \|B\|^2\,,$$

contro l'ipotesi. Segue che Id è un punto fisso isolato di τ.

Mostriamo infine che τ è compatibile con l'azione di G e σ: siano $A \in X$, $M \in G$. Allora

$$\tau(\alpha(M, A)) = (MAM^t)^{-1} = (M^t)^{-1}A^{-1}M^{-1} = \alpha((M^t)^{-1}, A) = \alpha(\sigma(M), A).$$