

Esercizi del 16 maggio

Esercizio 5.1

Ricordiamo che il gruppo di Coxeter Γ di P ammette la presentazione

$$\Gamma = \left\langle g_1, \dots, g_s \mid \begin{array}{l} g_i^2 \text{ per } i \in \{1, \dots, s\}, \\ (g_i g_j)^2 \text{ se } F_i \text{ e } F_j \text{ si intersecano} \end{array} \right\rangle < \text{Isom}(\mathbb{H}^n),$$

dove F_1, \dots, F_s sono le $(n-1)$ -facce di P , e per ogni $i \in 1, \dots, s$ l'elemento $g_i \in \Gamma$ è la riflessione rispetto al piano su cui giace F_i . Ogni colorazione

$$c: \{F_1, \dots, F_s\} \longrightarrow V$$

induce un morfismo di gruppi

$$\begin{aligned} \varphi: \Gamma &\longrightarrow V \\ g_i &\longmapsto c(F_i). \end{aligned}$$

Se la colorazione c è propria, allora $\ker \varphi < \Gamma$ è un gruppo di isometrie di \mathbb{H}^n che agisce in modo libero e propriamente discontinuo.

0. Ovviamente la varietà $M = \mathbb{H}^n / \ker \varphi$ è orientabile se e solo se tutti gli elementi di $\ker \varphi$ sono isometrie che preservano l'orientazione.
1. Ogni elemento g di Γ può scriversi (in modo non unico) come prodotto $g = g_{i_1} \cdots g_{i_t}$; osserviamo che g preserva l'orientazione se e solo se t è pari, poiché ogni g_i inverte l'orientazione. Di conseguenza, M è orientabile se e solo se per ogni scelta di $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, s\}$ con t dispari vale $\varphi(g_{i_1} \cdots g_{i_t}) \neq 0$ (ossia $g_{i_1} \cdots g_{i_t} \notin \ker \varphi$).
2. Osserviamo ora che, essendo V un \mathbb{F}_2 -spazio vettoriale, per ogni $g, h \in \Gamma$ vale $\varphi(gh) = \varphi(hg)$; poiché i g_i hanno ordine 2, è sufficiente verificare la condizione del punto 1. nel caso in cui tutti gli i_j sono distinti. Otteniamo dunque che M è orientabile se e solo se per ogni $T \subseteq \{1, \dots, s\}$ di cardinalità dispari vale

$$\sum_{t \in T} c(F_t) \neq 0.$$

Questa osservazione fornisce un algoritmo esponenziale in s per stabilire se la varietà M ottenuta dalla colorazione è orientabile (basta controllare tutti i sottoinsiemi di cardinalità dispari di $\{1, \dots, s\}$).

3. Possiamo riformulare ulteriormente il criterio, in modo da ottenere un algoritmo polinomiale in s . Notiamo infatti che la condizione che abbiamo trovato è equivalente a richiedere che ogniquale volta una combinazione lineare dei $c(F_i)$ a coefficienti in \mathbb{F}_2 è nulla, il numero di coefficienti non nulli sia pari. Concludiamo pertanto che M è orientabile se e solo se il

segunte sistema lineare a coefficienti in \mathbb{F}_2 non ha soluzioni.

$$\begin{pmatrix} \boxed{c(F_1)} & \boxed{c(F_2)} & \cdots & \boxed{c(F_s)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

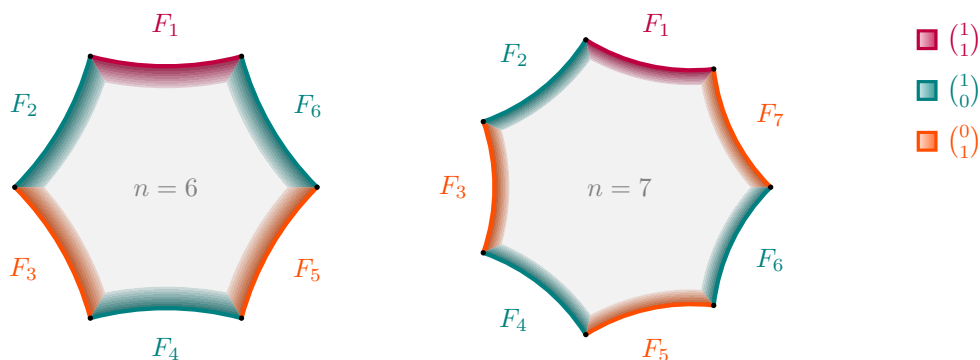
Esercizio 5.2

Ricordiamo che una *colorazione* di P_n a valori in un \mathbb{F}_2 -spazio vettoriale V è il dato di un vettore $c(F) \in V$ per ogni 1-faccia (ossia spigolo) F di P_n . La colorazione è *propria* se per ogni vertice v di P_n vale la seguente condizione: i due vettori $c(F)$, $c(F')$ sono linearmente indipendenti, dove F e F' sono i due spigoli adiacenti a v .

È evidente che non esiste alcuna colorazione propria di P_n a valori in \mathbb{F}_2 , poiché comunque presi due elementi di \mathbb{F}_2 essi sono linearmente dipendenti. Esibiamo ora esplicitamente una colorazione di P_n a valori in $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Siano F_1, F_2, \dots, F_n gli spigoli di P_n , numerati in senso antiorario a partire da F_1 , scelto arbitrariamente. Definiamo la colorazione come segue:

$$c(F_i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } i = 1, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } i > 1 \text{ e } i \text{ pari}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } i > 1 \text{ e } i \text{ dispari}. \end{cases}$$

A seconda della parità di n , possono verificarsi i due casi illustrati in figura.



In ogni caso, poiché due elementi distinti non nulli di $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$ sono sempre linearmente indipendenti, è evidente che la colorazione così definita risulta essere propria.

Esercizio 5.4

Definizione di X . Sia

$$X = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : A \text{ è simmetrica e definita positiva}\}.$$

Definiamo l'azione

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\longrightarrow X \\ (M, A) &\longmapsto MAM^t. \end{aligned}$$

Per un ben noto fatto di algebra lineare, per ogni $A \in X$ esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che $MM^t = A$ (infatti A e Id hanno la stessa segnatura). A meno di sostituire M con

$$M \cdot \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

possiamo supporre che $\det M > 0$. Osserviamo poi che

$$1 = \det A = \det(MM^t) = (\det M)^2,$$

da cui $\det M = 1$. Abbiamo dunque mostrato che per ogni $A \in X$ esiste $M \in G$ tale che $\alpha(M, \mathrm{Id}) = A$, da cui segue che l'azione è transitiva. Lo stabilizzatore di $\mathrm{Id} \in X$ è l'insieme delle matrici $M \in G$ tali che $MM^t = \mathrm{Id}$, ossia precisamente $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = K$.

Come accade sempre per un'azione transitiva, abbiamo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} X &\longleftrightarrow G/K \\ \alpha(M, \mathrm{Id}) &\longleftarrow M \cdot K, \end{aligned}$$

che permette di identificare X con G/K .

Definizione della metrica Riemanniana. Sappiamo che il tangente a X nel punto Id è dato da

$$T_{\mathrm{Id}}X = \{B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : B = B^t, \mathrm{tr} B = 0\}.$$

Il gruppo G agisce su TX mediante α come segue: se $M \in G$, $A \in X$, $B \in T_A X$ allora

$$M \cdot B = MBM^t \in T_{\alpha(M, A)}X.$$

Definiamo il prodotto scalare

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_{\mathrm{Id}} : T_{\mathrm{Id}}X \times T_{\mathrm{Id}}X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (B, C) &\longmapsto \mathrm{tr}(BC). \end{aligned}$$

È evidente che si tratta di un'applicazione bilineare simmetrica; è inoltre un prodotto scalare definito positivo poiché, se B è una matrice simmetrica, allora $\mathrm{tr}(B^2)$ è la somma dei quadrati degli autovalori di B , strettamente positiva a meno che $B = 0$.

Osserviamo che questo prodotto scalare è K -invariante: per ogni $B, C \in T_{\mathrm{Id}}X$, $M \in K$ vale infatti

$$\langle MBM^t, MCM^t \rangle_{\mathrm{Id}} = \mathrm{tr}(MBCM^t) = \mathrm{tr}(MM^t BC) = \mathrm{tr}(BC) = \langle B, C \rangle_{\mathrm{Id}}.$$

Possiamo allora definire una metrica Riemanniana G -invariante su X come segue: per ogni $A \in X$ definiamo

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle_A : T_A X \times T_A X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ B, C &\longmapsto \langle MBM^t, MCM^t \rangle_{\text{Id}}, \end{aligned}$$

dove $M \in G$ è una matrice tale che $\alpha(M, A) = \text{Id}$. Svolgiamo le verifiche necessarie.

- L'applicazione è ben definita. Infatti, se due matrici $M, N \in G$ soddisfano $\alpha(M, A) = \alpha(N, A) = \text{Id}$, allora NM^{-1} è un elemento dello stabilizzatore di Id , ossia è un elemento di K . Ma allora, poiché $\langle -, - \rangle_{\text{Id}}$ è K -invariante, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle MBM^t, MCM^t \rangle_{\text{Id}} &= \langle NM^{-1}MBM^t(M^t)^{-1}N^t, NM^{-1}MCM^t(M^t)^{-1}N^t \rangle_{\text{Id}} \\ &= \langle NBN^t, NCN^t \rangle_{\text{Id}}. \end{aligned}$$

- Poiché $\langle -, - \rangle_{\text{Id}}$ è un prodotto scalare definito positivo, è evidente che lo stesso vale per $\langle -, - \rangle_A$.
- La metrica Riemanniana così definita è G -invariante. Siano infatti $A \in X$, $M \in G$, $B, C \in T_A X$; sia $N \in G$ tale che $\alpha(N, A) = \text{Id}$. Allora NM^{-1} è tale che $\alpha(NM^{-1}, \alpha(M, A)) = \text{Id}$, dunque

$$\begin{aligned} \langle MBM^t, MCM^t \rangle_{\alpha(M, A)} &= \langle (NM^{-1})MBM^t(NM^{-1})^t, (NM^{-1})MCM^t(NM^{-1})^t \rangle_{\text{Id}} \\ &= \langle NBN^t, NCN^t \rangle_{\text{Id}} \\ &= \langle B, C \rangle_A \end{aligned}$$

Definizione dell'inversione. Definiamo l'inversione nel punto $\text{Id} \in X$ come

$$\begin{aligned} \tau : X &\longrightarrow X \\ A &\longmapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

È ovviamente un diffeomorfismo di ordine 2. Calcoliamo il differenziale di τ in ogni punto: se $A \in X$ e $B \in T_A X$, allora


$$\begin{aligned} \tau(A + tB) &= (A + tB)^{-1} \\ &= (\text{Id} + tA^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= A^{-1} - tA^{-1}BA^{-1} + o(t), \end{aligned}$$

da cui

$$d\tau_A(B) = -A^{-1}BA^{-1} \in T_{A^{-1}}X.$$

Questo ci dice immediatamente che $d\tau_{\text{Id}} = -\text{id}_{T_{\text{Id}}X}$. Possiamo inoltre verificare che τ è un'isometria. Siano $M \in G$, $A \in X$, $B, C \in T_A X$. Sia $M \in G$ una matrice tale che $\alpha(M, A) = \text{Id}$. Allora $(M^{-1})^t$ è tale che $\alpha((M^{-1})^t, A^{-1}) = \text{Id}$, dunque

$$\begin{aligned} \langle d\tau_A(B), d\tau_A(C) \rangle_{A^{-1}} &= \langle (M^{-1})^t A^{-1} B A^{-1} M^{-1}, (M^{-1})^t A^{-1} C A^{-1} M^{-1} \rangle_{\text{Id}} \\ &= \langle (AM^t)^{-1} B (MA)^{-1}, (AM^t)^{-1} C (MA)^{-1} \rangle_{\text{Id}} \\ &= \langle MBM^t, MCM^t \rangle_{\text{Id}} \\ &= \langle B, C \rangle_A. \end{aligned}$$

$MAM^t = \text{Id}$ 

Evidentemente $\text{Id} \in X$ è un punto fisso per τ ; mostriamo che è anche isolato. Fissiamo una norma submoltiplicativa $\|-\|$ sullo spazio di matrici $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Sia $A \in X$ diverso dall'identità, e poniamo $B = A - \text{Id} \neq 0$; mostriamo che se $\|B\| < 2$ allora $\tau(A) \neq A$. Se per assurdo $\tau(A) = A$, allora $(\text{Id} + B)^2 = \text{Id}$, da cui immediatamente $-2B = B^2$. Ma allora varrebbe

$$2\|B\| = \|B^2\| \leq \|B\|^2,$$

contro l'ipotesi. Segue che Id è un punto fisso isolato di τ .

Mostriamo infine che τ è compatibile con l'azione di G e σ : siano $A \in X$, $M \in G$. Allora

$$\tau(\alpha(M, A)) = (MAM^t)^{-1} = (M^t)^{-1}A^{-1}M^{-1} = \alpha((M^t)^{-1}, A) = \alpha(\sigma(M), A).$$