Esercizi dell'11 aprile

Esercizio 3.2

Per fissare la notazione, ricordiamo come si definiscono i Dehn twist. Sia $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa. Sia $A = S^1 \times [-1,1]$ con l'orientazione indotta da quelle standard di S^1 e $[0,1]$. Fissiamo un intorno regolare di α, ossia un embedding $\psi\colon A \to S$ tale che $\psi(x,0) = \alpha(x)$ per ogni $x \in S^1$; scegliamolo in modo che ψ preservi l'orientazione. Fissiamo infine una funzione $f\colon [-1,1] \to [0,2\pi]$ tale che $f(t) = 0$ per $t \leq -\frac{1}{2}$ e $f(t) = 2\pi$ per $t \geq \frac{1}{2}$, e definiamo

$$\begin{aligned} \theta\colon \qquad A &\longrightarrow A \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto (e^{i(x+f(t))}, t). \end{aligned}$$

Possiamo ora definire il Dehn twist intorno a α come il diffeomorfismo $T_\alpha\colon S \to S$ tale che

$$T_\alpha(p) = \begin{cases} p & p \notin \psi(A) \\ (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1})(p) & p \in \psi(A). \end{cases}$$

Come visto a lezione, la classe di isotopia di T_α non dipende dalla scelta dell'intorno regolare ψ né della funzione f.

(1)

- Cominciamo a mostrare che la classe di isotopia di T_α non dipende dall'orientazione di α. Sia dunque $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa, e sia $\overline{\alpha}\colon S^1 \to S$ la curva inversa, ossia quella definita da $\overline{\alpha}(e^{ix}) = \alpha(e^{-ix})$. Se $\psi\colon A \to S$ è un intorno regolare orientato di α, allora

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\colon \qquad A &\longrightarrow S \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto \psi(e^{-ix}, -t) \end{aligned}$$

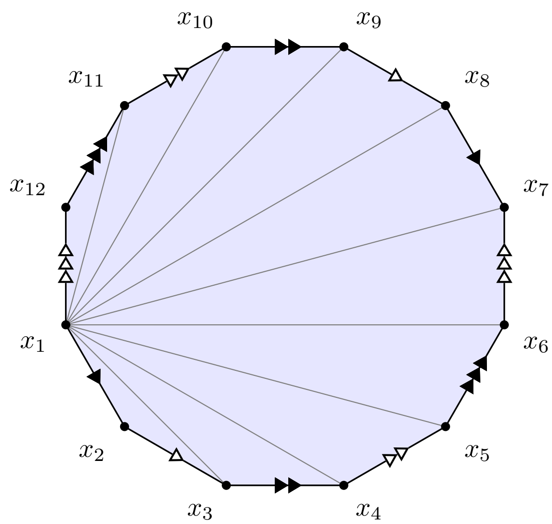
  è un intorno regolare orientato per $\overline{\alpha}$. Poiché la classe di isotopia dei Dehn twist non dipende dalla scelta di f, non è restrittivo supporre che $f(-t) = 2\pi - f(t)$. Mostriamo allora che $T_\alpha(p) = T_{\overline{\alpha}}(p)$ per ogni $p \in S$ (dunque in particolare sono isotopi). La tesi è ovvia per $p \notin \psi(A)$, dunque supponiamo $p \in \psi(A)$; è sufficiente far vedere che $\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi} = \overline{\psi} \circ \theta$. Effettivamente:

$$\begin{gathered} (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi})(e^{ix}, t) = \psi(\theta(e^{-ix}, -t)) = \psi(e^{i(-x+f(-t))}, -t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t); \\ (\overline{\psi} \circ \theta)(e^{ix}, t) = \overline{\psi}(e^{i(x+f(t))}, t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t). \end{gathered}$$

- Supponiamo che le curve semplici chiuse $\alpha, \beta\colon S^1 \to S$ siano due rappresentanti della stessa classe di isotopia, ossia che esista un'isotopia (ambiente) $F\colon S \times [0,1] \to S$ tale che $F_0 = \mathrm{id}_S$ e $F_1 \circ \alpha = \beta$. Osserviamo che, per quanto abbiamo dimostrato, possiamo orientare α e β in modo che una tale isotopia esista. Sia $\psi\colon A \to S$ un intorno regolare orientato di α; notiamo che $F_1 \circ \psi$ è un intorno regolare orientato di β. È allora evidente che un Dehn twist intorno a β è dato da $T_\beta = F_1 \circ T_\alpha \circ F_1^{-1}$, che è ovviamente isotopo a T_α. Questo mostra che $T_\beta = T_\alpha$ in $\mathrm{MCG}(S)$.

Esercizio 3.5

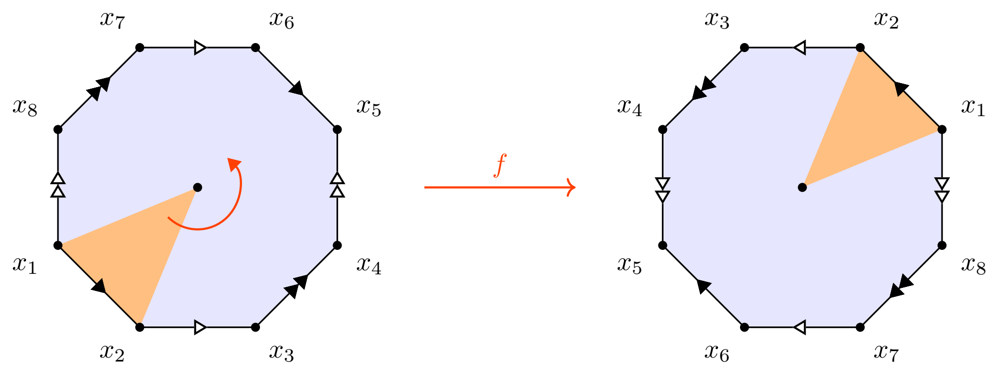
Consideriamo la superficie chiusa ottenuta incollando lati opposti di un $4g$-gono regolare con orientazioni parallele. Più precisamente, detti $x_1, \dots, x_{4g}$ i vertici del poligono regolare, incolliamo il segmento $x_i x_{i+1}$ con il segmento $x_{2g+i+1} x_{2g+i}$. La superficie Σ così ottenuta ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella, $2g$ 1-celle e una 2-cella.



- **Σ è orientabile.** Questo si vede immediatamente triangolando il poligono regolare e osservando che le identificazioni fra lati invertono l'orientazione.
- **Una base per $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ è data dai segmenti $x_i x_{i+1}$ per $1 \leq i < 2g$.** Questo si vede facilmente calcolando l'omologia cellulare: infatti i segmenti $x_i x_{i+1}$ sono esattamente le 1-celle, e hanno tutte bordo nullo. Al contempo, anche l'unica 2-cella ha bordo nullo, dunque $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ con base data dalle 1-celle.

In particolare, Σ è una superficie chiusa orientabile di genere g.

Per ogni $1 \leq i < 2g$, sia $\alpha_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ la classe rappresentata in omologia dal segmento $x_i x_{i+1}$. Consideriamo l'automorfismo $f\colon \Sigma \to \Sigma$ indotto dalla rotazione di angolo π intorno al centro del poligono regolare. Osserviamo che il segmento $x_i x_{i+1}$ viene mandato da f nel segmento $x_{2g+i} x_{2g+i+1}$, dunque $f_*(\alpha_i) = -\alpha_i$. Poiché gli α_i formano una base di $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, abbiamo che $f_* = -\operatorname{id}_{H_1(\Sigma,\mathbb{Z})}$. Ovviamente f ha ordine 2 e preserva l'orientazione, dunque $[f] \in \operatorname{MCG}(\Sigma)$ è l'involuzione iperellittica cercata.



Esercizio 3.6

Siano $[f] \in \mathrm{MCG}(S_g)$, $[m] \in \mathrm{Teich}(S_g)$ tali che $[f_* m] = [m]$. Ciò significa che esiste un diffeomorfismo h di S_g isotopo all'identità e tale che $f_* m = h_* m$. Ma allora $(h^{-1} \circ f)_* m = m$; poiché $h^{-1} \circ f$ e f sono isotopi, essi rappresentano la stessa classe in $\mathrm{MCG}(S_g)$, dunque possiamo supporre (a meno di cambiare rappresentante) che $f_* m = m$. Ciò significa precisamente che f è un'isometria per la superficie S_g con la metrica m.

I punti singolari dello spazio dei moduli sono precisamente le (classi di) metriche che sono fissate da elementi non banali di $\mathrm{MCG}(S_g)$. Come abbiamo visto, se elemento $\varphi \in \mathrm{MCG}(S_g)$ fissa una classe $[m] \in \mathrm{Teich}(S_g)$, allora esiste un rappresentante f di φ (che non sarà isotopo all'identità se φ è non banale) che è un'isometria per S_g munita della metrica m.