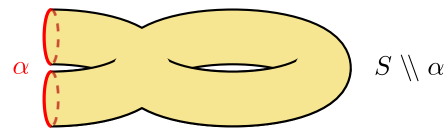
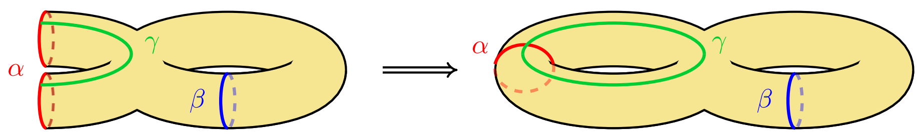
Osserviamo innanzitutto che se $i(a,b) \neq 0$ allora è sufficiente scegliere $c = a$, giacché $i(a,a) = 0$. Supponiamo dunque che $i(a,b) = 0$, e siano α, β curve semplici chiuse in posizione minimale che rappresentano rispettivamente a e b; in particolare, α e β hanno supporti disgiunti. Distinguiamo alcuni casi.

- **Supponiamo che α non sia separante.** Allora $S \setminus\setminus \alpha$ è una superficie compatta connessa con due componenti di bordo.



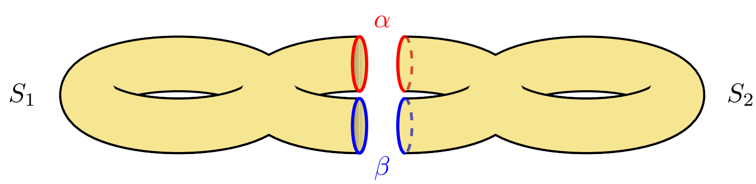
  - **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano alla stessa componente connessa di $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$.** Allora esiste una curva γ che interseca α esattamente una volta e non interseca β.



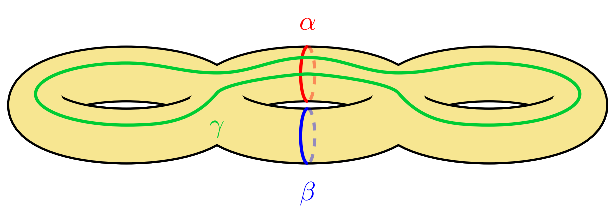
    Prendendo come c la classe di isotopia di γ, otteniamo che

$$i(a,c) = 1 \neq 0 = i(b,c).$$

  - **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano a componenti connesse diverse di $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$.** In questo caso $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici S_1 e S_2, ciascuna con due componenti di bordo, una lungo α e una lungo β.



    Osserviamo che S_1 e S_2 hanno genere almeno 1, altrimenti α e β coborderebbero un anello e sarebbero dunque isotope. È allora facile costruire una curva γ la cui classe di isotopia c soddisfa la tesi.



    Grazie al criterio del bigono, si verifica che α e γ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a,c) = 2 \neq 0 = i(b,c).$$