Esercizi del 2 maggio

Esercizio 4.2

A meno di restringere νK, operazione che preserva il tipo di omotopia di M, possiamo supporre che la chiusura di νK sia contenuta nella parte interna di un intorno tubolare compatto $D^2 \times S^1 \subseteq S^3$ di K.

- Consideriamo gli aperti $U = \operatorname{int} M$, $V = \operatorname{int}(D^2 \times S^1)$ di S^3. Osserviamo che U è omotopicamente equivalente a M, V è omotopicamente equivalente a S^1, e $U \cap V$ è omotopicamente equivalente a T^2. Scriviamo una parte della successione esatta di Mayer-Vietoris relativa a U e V:
$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(M) \longrightarrow H_1(S^3),$$
da cui
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus H_1(M) \longrightarrow 0.$$
Poiché $H_1(M)$ è abeliano e finitamente generato (M è compatta), segue immediatamente che $H_1(M) \simeq \mathbb{Z}$.

- Mostriamo che l'omomorfismo $H_1(T^2) \to H_1(M)$ indotto dall'inclusione è suriettivo.
  - **Vale** $H_1(S^3, \overline{\nu K}) = 0$**.** Infatti dalla successione esatta lunga in omologia relativa per la coppia $(S^3, \overline{\nu K})$ otteniamo
  $$H_1(S^3) \longrightarrow H_1(S^3, \overline{\nu K}) \longrightarrow \widetilde{H}_0(\overline{\nu K}),$$
  da cui (osservando che $H_1(S^3) = \widetilde{H}_0(\overline{\nu K}) = 0$) la tesi.
  - **Vale** $H_1(M, T^2) = 0$**.** Poiché $M = S^3 \setminus \nu K$ e $T^2 = \overline{\nu K} \setminus \nu K$, per escissione otteniamo
  $$H_1(M, T^2) = H_1(S^3 \setminus \nu K, \overline{\nu K} \setminus \nu K) \simeq H_1(S^3, \overline{\nu K}) = 0.$$
  - **L'omomorfismo** $H_1(T^2) \to H_1(M)$ **è suriettivo.** Infatti dalla successione esatta lunga della coppia (M, T^2) otteniamo
  $$H_1(T^2) \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow H_1(M, T^2) = 0.$$

  Ma allora il nucleo di questo omomorfismo è un sottogruppo ciclico di $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generato da un elemento primitivo, diciamo $\alpha \in H_1(T^2)$. Sappiamo che tale α è rappresentato (a meno dell'orientazione) da un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse, il che permette di definire la *longitudine*.

- Si vede facilmente che l'omomorfismo $H_1(T_2) \to H_1(D^2 \times S^1)$ è suriettivo, poiché ogni curva chiusa in $D^2 \times S^1$ che rappresenta un generatore di $H_1(D^2 \times S^1)$ è omotopa a una curva con supporto contenuto in T_2. Allora, esattamente come nel punto precedente, il nucleo di tale omomorfismo è generato da un elemento primitivo di $H_1(T^2)$, al quale corrisponde (a meno dell'orientazione) un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse. Questo permette di definire il *meridiano*.

Esercizio 4.3

Ricordiamo che una struttura iperbolica sul complementare del nodo figura otto è data dall'incollamento secondo il seguente schema di due tetraedri ideali regolari iperbolici (le facce dello stesso colore vengono identificate, in modo da rispettare le orientazioni e i colori rappresentati sugli spigoli).

Per fissare la notazione, siano M il complementare del nodo figura otto, T_1, T_2 i due tetraedri, $\sim$ la relazione di equivalenza descritta dall'incollamento, in modo che $M = T_1 \sqcup T_2/\sim$. Ricordiamo che, in un tetraedro ideale regolare, ogni permutazione dei vertici è indotta da un'unica isometria di $\mathbb{H}^n$. Sia allora $h_1 : T_1 \to T_1$ l'isometria che induce la permutazione $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ (più precisamente, $a_i \mapsto a_{\sigma(i)}$); definiamo in modo analogo $h_2 : T_2 \to T_2$. Sia infine $s : T_1 \sqcup T_2 \to T_2 \sqcup T_2$ l'applicazione che "scambia" T_1 e T_2 mediante l'identità, ossia manda $x \in T_1$ in $x \in T_2$ e viceversa.

Definiamo
$$f = (h_1 \sqcup h_2) \circ s : T_1 \sqcup T_2 \longrightarrow T_1 \sqcup T_2.$$

In altre parole, f scambia T_1 e T_2, e poi applica su ognuno dei tetraedri l'isometria che induce la permutazione sopra descritta. È facile verificare che f è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$: poiché h_1 e h_2 agiscono allo stesso modo, l'unico fatto non ovvio è la compatibilità sugli spigoli, ma si può vedere per verifica diretta che f manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, preservandone l'orientazione. Segue che f induce un'applicazione al quoziente $\overline{f} : M \to M$ che risulta essere un'isometria, in quanto composizione di isometrie. Verifichiamo che $\overline{f}$ non ha punti fissi.

- Se x appartiene alla parte interna di T_1, allora non è un punto fisso di $\overline{f}$, poiché $f(x)$ appartiene alla parte interna di T_2. Lo stesso vale ovviamente per i punti della parte interna di T_2.
- Poiché σ agisce senza punti fissi sull'insieme delle facce di un tetraedro, se x appartiene alla parte interna di una faccia allora non può essere un punto fisso di $\overline{f}$, in quanto $f(x)$ appartiene alla parte interna di un'altra faccia.
- Come già osservato, f manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, dunque non ci sono punti fissi per $\overline{f}$ sugli spigoli.

Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2. Possiamo allora definire $N = M/\langle\overline{f}\rangle$, che risulta essere una 3-varietà iperbolica completa, non compatta e di volume finito, doppiamente rivestita dal complementare del nodo figura otto. L'immagine di T_1 mediante la proiezione al quoziente fornisce una tassellazione di N con un tetraedro ideale regolare iperbolico. Dalla costruzione che abbiamo effettuato, è facile risalire esplicitamente alla suddetta tassellazione, che riportiamo per completezza.

Esercizio 4.4

Ricordiamo la costruzione, vista a lezione, di una 3-varietà iperbolica tassellata da quattro tetraedri ideali regolari iperbolici. Dopo aver colorato le facce degli ottaedri a scacchiera, le identifichiamo secondo il seguente schema, utilizzando come mappa di incollamento l'identità.

Seguiamo ora un approccio simile a quello dell'esercizio precedente. Siano O_1, O_2, O_3, O_4 gli ottaedri, $M = O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4 / \sim$ la varietà ottenuta mediante l'incollamento. Definiamo l'applicazione

$$f\colon O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4 \longrightarrow O_1 \sqcup O_2 \sqcup O_3 \sqcup O_4$$

che prima scambia $O_1 \leftrightarrow O_4$ e $O_2 \leftrightarrow O_3$, e poi applica a ogni ottaedro la "mappa antipodale", ossia l'isometria che scambia ogni vertice con quello diametralmente opposto. È immediato verificare che f passa al quoziente, definendo un'isometria $f\colon M \to M$. Tale isometria, inoltre, non ha punti fissi: infatti l'unico punto fisso della mappa antipodale appartiene alla parte interna dell'ottaedro, ma ovviamente f agisce in modo libero su $\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$, dunque nessun punto nelle parti interne degli ottaedri può essere fissato.

Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2, dunque possiamo definire la 3-varietà iperbolica $N = M/\langle \overline{f} \rangle$. Le immagini di O_1 e O_2 mediante la proiezione al quoziente forniscono una tassellazione di N con due ottaedri ideali regolari iperbolici. Dalla costruzione che abbiamo effettuato, è facile risalire esplicitamente alla suddetta tassellazione, che riportiamo per completezza.