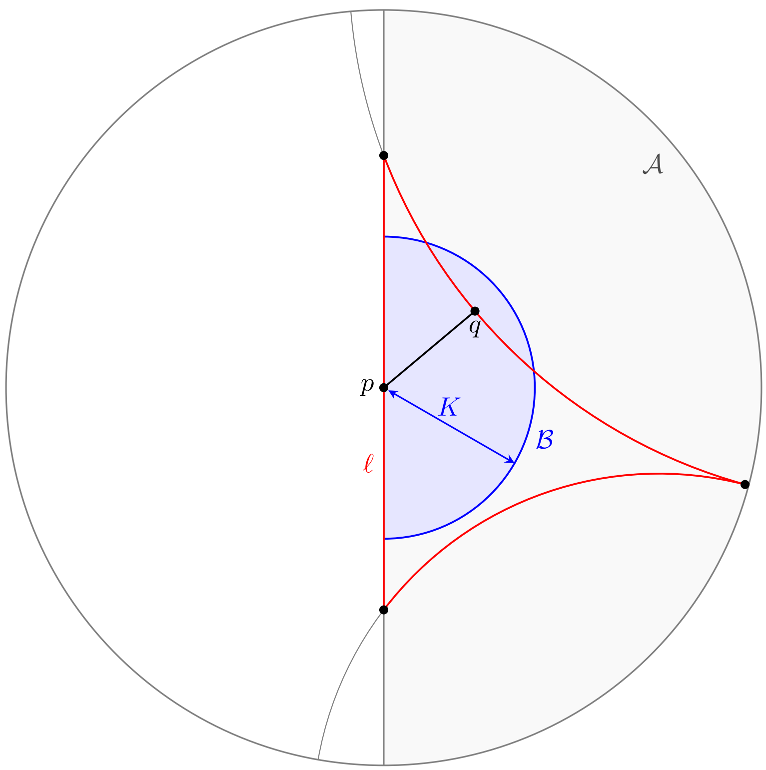
Esercizi del 14 marzo

Esercizio 1.4

Sia $K > 0$ tale che le palle iperboliche di raggio K abbiano area maggiore di 2π; mostriamo che tale K soddisfa la condizione richiesta.

Sia $\Delta \subseteq \mathbb{H}^2$ un triangolo, $p \in \Delta$ un punto giacente su un lato ℓ. Se p è un vertice la tesi è ovvia, dunque supponiamo che non lo sia. Sia $\mathcal{A}$ il semipiano (aperto) delimitato da ℓ su cui giace il triangolo. Definiamo $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{H}^2$ come l'intersezione di $\mathcal{A}$ con la palla di centro p e raggio K; osserviamo che $\mathcal{B}$ ha area maggiore di $2\pi/2 = \pi$. Di conseguenza, essendo l'area di Δ al più π, necessariamente B non è contenuto in Δ. Poiché $\mathcal{B}$ interseca Δ ed è connesso, deve esistere un punto di $q \in \mathcal{B}$ che giace sul bordo di Δ. Giacché $\mathcal{A}$ e ℓ sono disgiunti, q deve appartenere a uno degli altri due lati; essendo la distanza fra p e q al più K, otteniamo la tesi.



Esercizio 1.5

Utilizziamo il modello $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ del semipiano. Siano ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 i lati del triangolo Δ, con ℓ_1 di lunghezza l. A meno di isometria, possiamo supporre che ℓ_1 giaccia sulla circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio $r > 0$, e che ℓ_2 giaccia su una retta verticale (parallela all'asse y). Siano inoltre α, β gli angoli che le rette congiungenti $(0, 0)$ agli estremi di ℓ_1 formano con l'asse x.

Una parametrizzazione di ℓ_1 è data dalla curva

$$\begin{aligned} \gamma : [\alpha, \pi - \beta] &\longrightarrow H^2 \\ t &\longmapsto r(\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Pertanto la lunghezza di ℓ_1 si può calcolare come

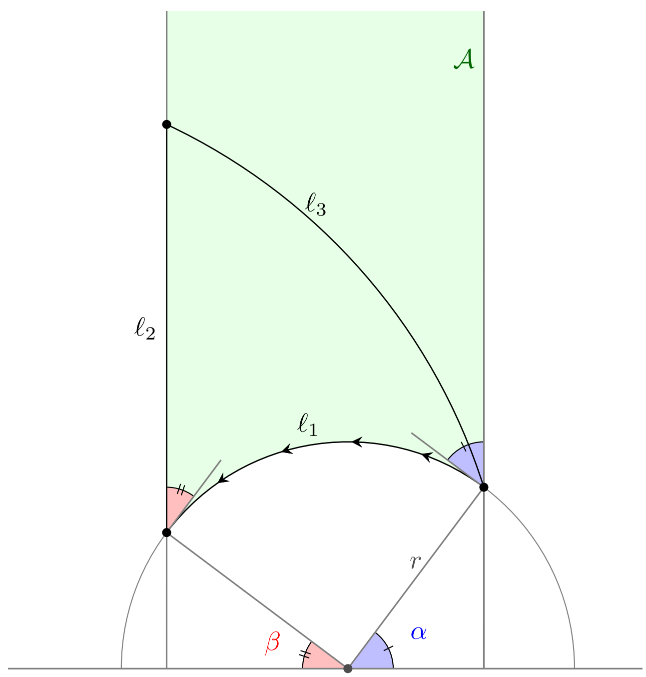
$$l = \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \frac{1}{r \sin t} \|\gamma'\|_E \, dt = \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \frac{1}{r \sin t} \cdot r dt = \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \frac{1}{\sin t} dt > \pi - \beta - \alpha,$$

dove $\|-\|_E$ indica la norma euclidea. Denotiamo con $\mathcal{A}$ il cono sopra ℓ_1 di vertice ∞, ossia

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in H^2 : -r \cos \beta \leq x \leq r \cos \alpha, x^2 + y^2 \geq r^2\}.$$

È evidente che Δ è contenuto in $\mathcal{A}$; inoltre $\mathcal{A}$ è un triangolo con angoli α, β e 0, dunque ha area $\pi - \alpha - \beta$. Ma allora

$$l > \pi - \alpha - \beta = \text{Area}(\mathcal{A}) \geq \text{Area}(\Delta).$$



Esercizio 1.9

Lemma. *Siano $A \in O(n)$ una matrice ortogonale, $b \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Definiamo $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ come $\varphi(x) = Ax + b$. Supponiamo che φ non abbia punti fissi. Allora esiste una retta affine di $\mathbb{R}^n$ che è φ-invariante.*

Dimostrazione.

- **Vale** $\mathbb{R}^n = \ker(A - I) \oplus \mathrm{im}(A - I)$.
  Per motivi di dimensione, è sufficiente mostrare che i due sottospazi hanno intersezione banale. Sia $v \in \ker(A - I) \cup \mathrm{im}(A - I)$; allora $v = Aw - w$ per un qualche $w \in \mathbb{R}^n$. Allora

  $$\langle v, v\rangle = \langle Aw - w, v\rangle = \langle Aw, v\rangle - \langle w, v\rangle = \langle w, Av, -\rangle \langle w, v\rangle = \langle w, Av - v\rangle = 0,$$

  da cui $v = 0$.

- **Vale** $b \notin \mathrm{im}(A - I)$**.**
  Se per assurdo $b = Aw - w$, allora $\varphi(-w) = -Aw + b = -w$, dunque φ avrebbe un punto fisso, il che è contro l'ipotesi.

- **L'isometria φ ammette una retta invariante.**
  Utilizzando la decomposizione del primo punto, scriviamo $b = v + (Aw - w)$ con $Av = v$. Poiché $b \notin \mathrm{im}(A - I)$, necessariamente $v \neq 0$. Mostriamo che la retta affine $\ell = -w + \mathrm{span}(v)$ è φ-invariante. Per $t \in \mathbb{R}$ vale

  $$\varphi(-w + tv) = -Aw + tAv + b = -Aw + tv + (v + Aw - w) = -w + (t + 1)v \in \ell,$$

  da cui la tesi. □

Sia $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un'isometria parabolica. Consideriamo il modello del semispazio H^n; possiamo supporre che ψ fissi ∞. Allora ψ si scrive come $\psi(x, t) = (Ax + b, t)$ per opportuni $A \in O(n-1)$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Per il Lemma, esiste una retta euclidea $\ell = w + \mathrm{span}(v) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ invariante per la mappa $(x \mapsto Ax + b)$. È allora evidente che il piano iperbolico $\{(w + sv, t) : s \in \mathbb{R}, t > 0\} \subseteq H^n$ è ψ-invariante.

Esercizi del 28 marzo

Introduzione teorica

Definizione. Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un sottogruppo. Fissiamo un punto $x \in \mathbb{H}^n$. Definiamo $L(\Gamma)$ come l'insieme dei punti limite in $\partial\mathbb{H}^n$ dell'orbita $\Gamma \cdot x$. Poniamo inoltre $O(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n \setminus L(\Gamma)$.

Mostriamo che questa definizione è ben posta (ossia non dipende dalla scelta del punto x).

Proposizione. *Siano $x, x' \in \mathbb{H}^n$. Sia $y \in \partial\mathbb{H}^n$ un punto limite dell'orbita $\Gamma \cdot x$. Allora y è anche un punto limite dell'orbita $\Gamma \cdot x'$.*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una successione di isometrie $\{g_i\}_{i\geq 0} \subseteq \Gamma$ tali che $g_i(x) \to y$. Essendo g_i un'isometria di $\mathbb{H}^n$, vale $\mathrm{dist}(g_i(x), g_i(x')) = \mathrm{dist}(x, x')$, pertanto anche $g_i(x') \to y$. $\square$

È evidente che $L(\Gamma)$ è un chiuso Γ-invariante. Inoltre abbiamo la seguente.

Proposizione. *Supponiamo che Γ non sia elementare. Sia $S \subseteq \partial\mathbb{H}^n$ un chiuso non vuoto Γ-invariante. Allora $L(\Gamma) \subseteq S$.*

Dimostrazione. Sia $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ l'inviluppo convesso di S. Poiché Γ non è elementare, S contiene almeno due punti, dunque $K \cap \mathbb{H}^n$ è non vuoto. Scegliamo un $x \in K \cap \mathbb{H}^n$; poiché S è chiuso e Γ-invariante, lo stesso vale per K. Ma allora l'insieme dei punti limite di $\Gamma \cdot x$ che giacciono in $\partial\mathbb{H}^n$ (ossia $L(\Gamma)$) è contenuto in $K \cap \partial\mathbb{H}^n = S$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione. *Supponiamo che Γ agisca su $\mathbb{H}^n$ in modo libero e propriamente discontinuo. Allora Γ agisce liberamente anche su $O(\Gamma)$.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che tutti i punti fissi di elementi di Γ giacciono in $L(\Gamma)$. Sia $g \in \Gamma$; distinguiamo due casi.

- Se g è iperbolico, considerando il modello del semispazio H^n si vede immediatamente che i due punti fissi di g sono anche punti limite di $\langle g \rangle$.
- Se g è parabolico, consideriamo una qualunque orbita $\langle g \rangle \cdot x$. Poiché $\overline{\mathbb{H}^n}$ è metrizzabile e compatto, necessariamente questa orbita ammette un punto limite, il quale risulta fissato da g; ma g ha un unico punto fisso, che dunque è anche un punto limite. $\square$

Definizione. Sia $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ un convesso chiuso contenente almeno due punti (dunque non tutto contenuto in $\partial\mathbb{H}^n$). Definiamo l'applicazione $\rho_K \colon \overline{\mathbb{H}^n} \to K$ come segue:

- se $x \in \mathbb{H}^n$, allora $\rho_K(x)$ è il punto di $K \cap \mathbb{H}^n$ di minima distanza da x;
- se $x \in \partial\mathbb{H}^n$, allora $\rho_K(x)$ è l'unico punto di K giacente sulla minima orosfera centrata in x che interseca K.

Osserviamo che questa definizione è ben posta poiché K è convesso e chiuso. Inoltre si verifica facilmente che vale l'uguaglianza $\rho_{g(K)} \circ g = g \circ \rho_K$ per ogni isometria g di $\mathbb{H}^n$.

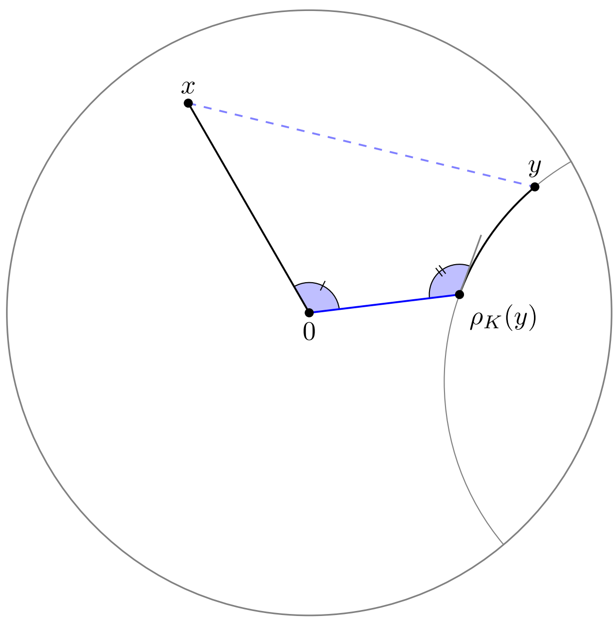
Proposizione. *La restrizione*
$$\rho_K \colon \mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K) \to \mathbb{H}^n$$
è continua.

Dimostrazione. Utilizziamo il modello del disco. Sia $x \in \mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K)$. Poiché $x \notin \partial\mathbb{H}^n \cap K$, sicuramente $\rho_K(x) \in \mathbb{H}^n$. A meno di isometria, possiamo supporre che $\rho_K(x) = 0$. Sia ora $y \in \mathbb{H}^n \cup (\partial\mathbb{H}^n \setminus K)$. Mostreremo che $\|\rho_K(y)\|_E \leq \|y - x\|_E$, dove $\|-\|_E$ indica la norma euclidea sul disco: questo sarà sufficiente per concludere.

Se $\rho_K(y) = 0$ la disuguaglianza è sicuramente verificata, dunque possiamo supporre $\rho_K(y) \neq 0$. Osserviamo che tutto il segmento euclideo (che è anche un segmento iperbolico) $[0, \rho_K(y)]$ è contenuto in K, essendo K convesso. Poiché 0 è il punto di K più vicino a x, allora necessariamente l'angolo fra $[0, \rho_K(y)]$ e $[0, x]$ è ottuso, dunque $\langle x, \rho_K(y)\rangle \leq 0$ (questa disuguaglianza è vera anche se $x = 0$, nel qual caso l'angolo citato non è ben definito). Allo stesso modo, spostando $\rho_K(y)$ in 0 e ricordando che le isometrie sono (anti)conformi, anche l'angolo fra $[\rho_K(y), 0]$ e il segmento iperbolico fra $\rho_K(y)$ e y è ottuso, dunque a maggior ragione anche l'angolo fra $[\rho_K(y), 0]$ e $[\rho_K(y), y]$ (segmento euclideo) lo è. Segue che $\langle \rho_K(y) - y, \rho_K(y)\rangle \leq 0$ (di nuovo, questa disuguaglianza è vera anche se $y = \rho_K(y)$). Combinando le due disuguaglianze trovate otteniamo che

$$\|\rho_K(y)\|_E^2 \leq \langle \rho_K(y), y - x\rangle \leq \|\rho_K(y)\|_E \cdot \|y - x\|_E \,,$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La tesi segue immediatamente. □



Proposizione. *Supponiamo che $L(\Gamma)$ contenga almeno due punti e che Γ agisca in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{H}^n$. Allora Γ agisce allo stesso modo su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Sia $K \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ l'inviluppo convesso di $L(\Gamma)$; poiché $L(\Gamma)$ è un chiuso Γ-invariante, lo stesso vale per K. Consideriamo l'applicazione $\rho \colon \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma) \to \mathbb{H}^n$ definita come la restrizione a $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ di ρ_K. Per quanto abbiamo osservato, ρ è continua e soddisfa $\rho \circ g = g \circ \rho$ per ogni $g \in \Gamma$.

Mostriamo che l'azione di Γ su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ è propriamente discontinua. Siano $y, y' \in \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$. Poiché l'azione di Γ su $\mathbb{H}^n$ è propriamente discontinua, esistono intorni U, U' di $\rho(y)$, $\rho(y')$

rispettivamente tali che $U \cap g(U') \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $g \in \Gamma$. Scegliamo $W = \rho^{-1}(U)$ e $W' = \rho^{-1}(U')$ come intorni, rispettivamente, di y e y'. Si verifica facilmente che se $U \cap g(U') = \emptyset$ allora $W \cap g(W') = \emptyset$, da cui la tesi. $\square$

Teorema. *Supponiamo che la varietà iperbolica completa $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ abbia volume finito. Sia*

$$S = \bigcup_{g \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} \mathrm{Fix}(g) \subseteq \partial \mathbb{H}^n.$$

Allora S è denso in $\partial \mathbb{H}^n$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che Γ non è elementare, altrimenti M avrebbe volume infinito. Notiamo poi che $\overline{S} \subseteq \partial \mathbb{H}^n$ è un chiuso non vuoto Γ-invariante, dunque contiene $L(\Gamma)$. Allo stesso tempo, poiché Γ agisce su $O(\Gamma)$ senza punti fissi, necessariamente $S \subseteq L(\Gamma)$; in particolare, essendo Γ non elementare, $L(\Gamma)$ contiene almeno due punti.

Supponiamo ora per assurdo che S non sia denso in $\partial \mathbb{H}^n$. Poiché $L(\Gamma) \subseteq \overline{S}$, segue che $O(\Gamma)$ è non vuoto. Sia dunque $y \in O(\Gamma)$; poiché l'azione di Γ su $\mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ è libera e propriamente discontinua, esiste un intorno $W \subseteq \mathbb{H}^n \cup O(\Gamma)$ di y tale che $W \cap g(W) = \emptyset$ per ogni $g \in \Gamma$ diverso dall'identità. Poiché y ha un sistema fondamentale di intorni costituito da semispazi, possiamo supporre che W sia un semispazio. Ma allora $\mathrm{vol}(M) \geq \mathrm{vol}(W) = \infty$, il che contraddice l'ipotesi. $\square$

Esercizio 2.1

Per assurdo, sia $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un'isometria non banale che commuta con tutti gli elementi di Γ. Distinguiamo due casi.

- Se φ è parabolica o iperbolica, per un Lemma visto a lezione segue che $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{Fix}(g)$ per ogni $g \in \Gamma$ non banale, ossia tutti gli elementi di Γ non banali hanno gli stessi punti fissi. Per un altro Lemma visto a lezione, ciò implica che Γ è elementare, il che contraddice l'ipotesi di finitezza del volume di M.

- Se φ è ellittica, denotiamo con $S \subseteq \overline{\mathbb{H}^n}$ il sottospazio dei punti fissi di φ (si tratta di un sottospazio proprio e non vuoto). Sia $g \in \Gamma$ non banale; mostriamo che $\mathrm{Fix}(g) \subseteq S$.

  - Se g è parabolica, poiché φ e g commutano abbiamo che $\varphi(\mathrm{Fix}(g)) = \mathrm{Fix}(g)$, ossia l'unico punto fisso di g è fissato da φ, da cui $\mathrm{Fix}(g) \subseteq S$.
  - Se g è iperbolica, poiché φ e g commutano abbiamo che $g(S) = S$. Consideriamo il modello del semispazio H^n, in cui i punti fissi di g siano 0 e ∞. Ricordando che φ si scrive come $(x,t) \mapsto \lambda(Ax,t)$, si vede immediatamente che S deve necessariamente essere un'iperpiano ortogonale a ∂H^n, ossia $\infty \in S$. Scambiando 0 e ∞ otteniamo che entrambi i punti fissi di g appartengono a S.

  Poiché S è un sottospazio proprio, $S \cap \partial \mathbb{H}^n$ non può essere denso in $\partial \mathbb{H}^n$, il che contraddice il Teorema.

Esercizio 2.4

La proiezione $\phi\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$ induce un omomorfismo di gruppi

$$\Phi\colon\ \mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i]) \to \mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i])$$

applicando ϕ a ogni entrata della matrice. Sia $\Gamma < \mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$ il nucleo di Φ. Poiché $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i])$ è finito, Γ ha indice finito in $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$. Osserviamo che

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix} \in \mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i]) : a,b,c,d, \in \mathbb{Z}[i] \right\}.$$

(con lieve abuso di notazione, trattiamo gli elementi di $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$ come matrici invece che come classi di equivalenza).

- Γ **non contiene elementi ellittici.** Supponiamo per assurdo che un elemento $\begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & 1+2d \end{pmatrix}$ di Γ sia ellittico, ossia abbia traccia reale minore di 2 in modulo. Allora $2+2a+2d$ è un numero reale, intero, pari e minore di 2 in modulo, dunque è necessariamente nullo. La condizione sul determinante diventa allora

$$1 = \det \begin{pmatrix} 1+2a & 2b \\ 2c & -1-2a \end{pmatrix} = -(1+4a+4a^2+4bc),$$

  ossia

$$1+2a+2a^2+2bc = 0,$$

  il che è assurdo (ad esempio guardando la parità della parte reale).

- **La varietà iperbolica $\mathbb{H}^3/\Gamma$ ha volume finito.** Dall'Esercizio 2.3 sappiamo che il gruppo $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$ ha un dominio fondamentale D di volume finito. Poiché Γ ha indice finito in $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$, allora esiste un dominio fondamentale (in senso lato) per Γ di volume finito, che si ottiene prendendo l'unione dei domini $g \cdot D$ al variare di g in un insieme di rappresentanti per $\mathbb{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])/\Gamma$.

- **La varietà iperbolica $\mathbb{H}^3/\Gamma$ non è compatta.** Basta osservare che Γ contiene l'elemento parabolico $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2.5

Poiché M è compatta, tutti gli elementi di Γ sono iperbolici. Dal Teorema segue immediatamente che S è denso in $\partial\mathbb{H}^n$.