# Esercizi dell'11 aprile

## Dehn twist

Per fissare la notazione, ricordiamo come si definiscono i Dehn twist. Siano $S$ una superficie chiusa orientabile, $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa non banale. Sia $A = S^1 \times [-1,1]$ con l'orientazione indotta da quelle standard di $S^1$ e $[-1,1]$. Fissiamo un intorno regolare di $\alpha$, ossia un embedding $\psi\colon A \to S$ tale che $\psi(x,0) = \alpha(x)$ per ogni $x \in S^1$; scegliamolo in modo che $\psi$ preservi l'orientazione. Fissiamo infine una funzione $f\colon [-1,1] \to [0,2\pi]$ tale che $f(t) = 0$ per $t \leq -\frac{1}{2}$ e $f(t) = 2\pi$ per $t \geq \frac{1}{2}$, e definiamo

$$\begin{aligned} \theta\colon \qquad A &\longrightarrow A \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto (e^{i(x+f(t))}, t). \end{aligned}$$

Possiamo ora definire il Dehn twist intorno a $\alpha$ come il diffeomorfismo $T_\alpha\colon S \to S$ tale che

$$T_\alpha(p) = \begin{cases} p & p \notin \psi(A) \\ (\psi \circ \theta \circ \psi^{-1})(p) & p \in \psi(A). \end{cases}$$

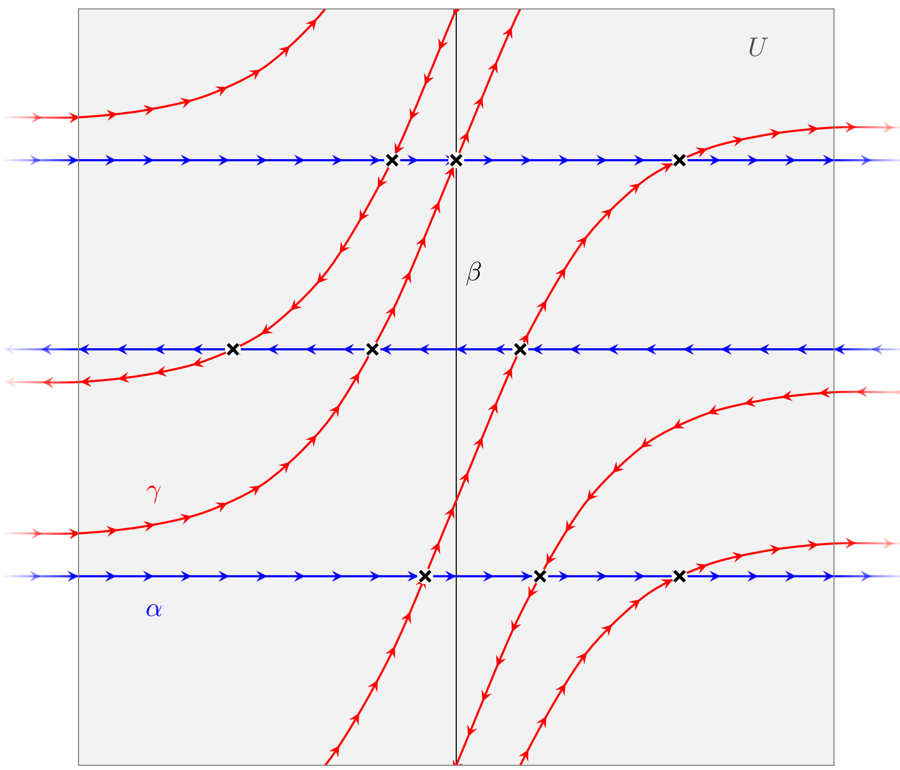
Come visto a lezione, la classe di isotopia di $T_\alpha$ non dipende dalla scelta dell'intorno regolare $\psi$ né della funzione $f$. Mostreremo inoltre nell'Esercizio 3.2 che la classe di isotopia di $T_\alpha$ non cambia invertendo l'orientazione di $\alpha$ o sostituendo $\alpha$ con una curva a lei isotopa: è dunque ben definito l'elemento $T_a \in \mathrm{MCG}(S)$ per $a \in \mathcal{S}$.

## Esercizio 3.1

**Lemma 1.** *Siano $a$, $b$ classi di isotopia di curve semplici chiuse, con $b$ non banale, e sia $k \geq 0$. Allora*

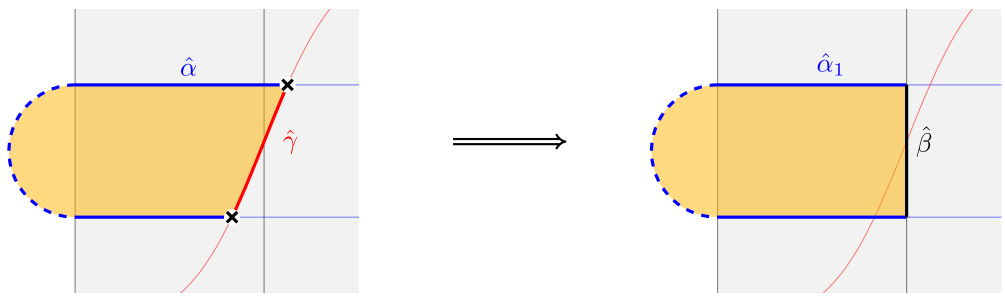
$$i(a, T_b^k(a)) = k \cdot i(a,b)^2.$$

*Dimostrazione.* Siano $\alpha$, $\beta$ rappresentanti di $a$, $b$ in posizione minimale. Se $\alpha$ e $\beta$ non si intersecano la tesi è ovvia, dunque supponiamo che si intersechino almeno in un punto. Scegliamo un intorno regolare $U$ di $\beta$ abbastanza stretto da intersecare $\alpha$ in $i(a,b)$ archi disgiunti, ciascuno dei quali interseca $\beta$ esattamente una volta. Definiamo un rappresentante $\gamma$ della classe $T_b^k(a)$ come segue: consideriamo una curva $\alpha'$ parallela a $\alpha$, ottenuta traslando $\alpha$ lungo un suo intorno regolare, e poniamo $\gamma = T_\beta^k(\alpha')$. Possiamo orientare $\alpha$ e $\gamma$ in modo che siano coorientate e che entrando in $U$ si allontanino.

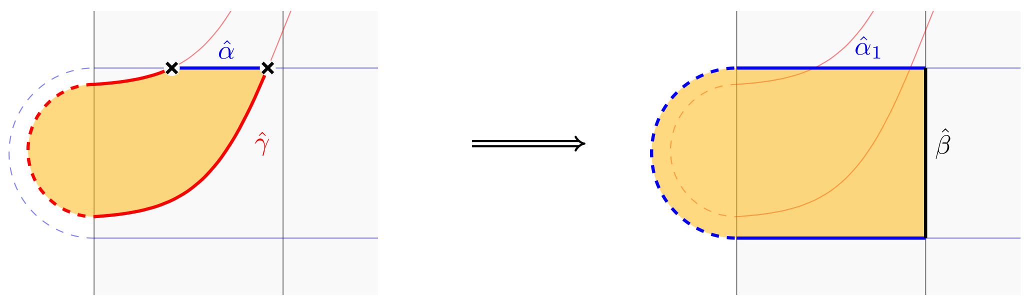



È immediato verificare che $\alpha$ e $\gamma$ si intersecano esattamente in $k \cdot i(a,b)^2$ punti. È dunque sufficiente mostrare che $\alpha$ e $\gamma$ sono in posizione minimale, ossia che non formano bigoni. Se $i(a,b) = 1$ allora $\alpha$ e $\gamma$ non possono formare bigoni (si intersecano sempre con la stessa orientazione), quindi supponiamo $i(a,b) \geq 2$. Supponiamo per assurdo che esista un bigono $D$, e siano $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ i lati di $D$ che giacciono rispettivamente su $\alpha$ e $\gamma$. Distinguiamo alcuni casi.

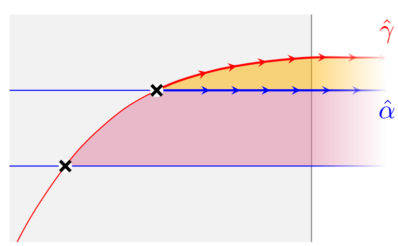
- Se $\hat{\gamma}$ è tutto contenuto in $U$, allora $\alpha$ e $\beta$ formano un bigono, ma ciò è impossibile, dato che sono in posizione minimale.



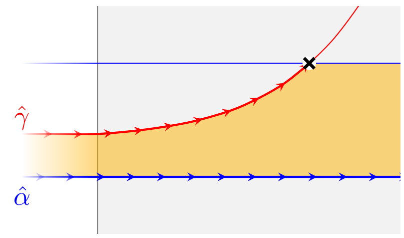

- Se $\hat{\alpha}$ è tutto contenuto in $U$, allora di nuovo $\alpha$ e $\beta$ formano un bigono (ricordiamo che $\alpha$ e $\gamma$ sono parallele fuori da $U$).




- Dunque $\hat{\alpha}$ esce da $U$ per poi rientrarvi. Analizziamo cosa succede vicino vicino al punto in cui $\hat{\alpha}$ esce da $U$.



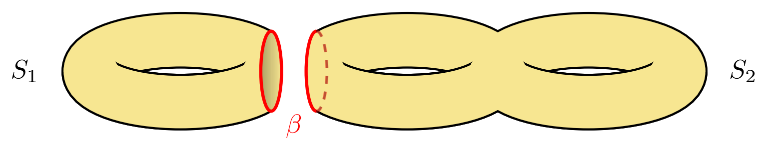

Osserviamo che la regione in rosa non può essere un bigono, in quanto il suo lato giacente su $\gamma$ è tutto contenuto in $U$, e abbiamo già escluso questa possibilità. Dunque il bigono è necessariamente la regione arancione, e $\hat{\gamma}$ è parallelo a $\hat{\alpha}$ fuori da $U$. Analizziamo ora cosa succede vicino al punto in cui $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ rientrano in $U$.



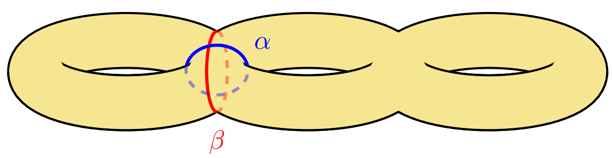

Dopo essere entrati in $U$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ si allontanano, dunque non è possibile che la prima intersezione di $\hat{\gamma}$ con $\alpha$ sia il secondo estremo di $\hat{\alpha}$; è pertanto impossibile che $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ siano lati di un bigono. $\square$

Sia $b \in \mathcal{S}$ una classe di isotopia non banale, e $\beta \colon S^1 \to S$ una curva che la rappresenta. Mostriamo che esiste $a \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, b) \neq 0$.

- **Supponiamo che $\beta$ sia separante.** In questo caso $S \setminus\setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici $S_1$ e $S_2$, ciascuna con una componente di bordo. Naturalmente $S_1$ e $S_2$ hanno genere almeno 1, altrimenti $\beta$ sarebbe omotopicamente banale.

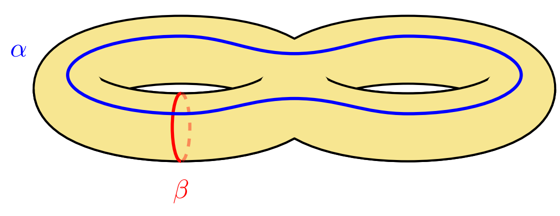



Allora possiamo prendere come $a$ la classe di isotopia della curva $\alpha$ ottenuta come in figura.




Mediante il criterio del bigono è facile vedere che $\alpha$ e $\beta$ sono in posizione minimale, dunque $i(a, b) = 2$.

- **Supponiamo che $\beta$ non sia separante**. In questo caso esiste una curva $\alpha$ che interseca $\beta$ esattamente una volta (basta collegare due punti di $S$ molto vicini a $\beta$ mediante un arco che non interseca $\beta$).



Prendendo come $a$ la classe di isotopia di $\alpha$, otteniamo che $i(a, b) = 1$.

Dal Lemma 1 sappiamo che

$$i(a, T_b^k(a)) = k \cdot i(a, b)^2 \neq 0$$

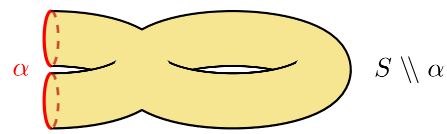
per ogni $k > 0$, dunque in particolare $T_b^k(a) \neq a$. Pertanto l'azione di $T_b^k$ su $\mathcal{S}$ è non banale, e in particolare $T_b^k$ non è banale.

## Esercizio 3.2

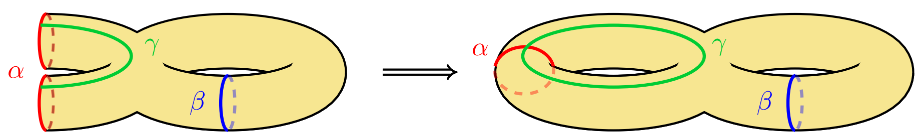
**Lemma 2.** *Siano $a, b \in \mathcal{S}$ due classi di isotopia non banali distinte. Allora esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a, c) \neq i(b, c)$.*

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che se $i(a, b) \neq 0$ allora è sufficiente scegliere $c = a$, giacché $i(a, a) = 0$. Supponiamo dunque che $i(a, b) = 0$, e siano $\alpha$, $\beta$ curve semplici chiuse in posizione minimale che rappresentano rispettivamente $a$ e $b$; in particolare, $\alpha$ e $\beta$ hanno supporti disgiunti. Distinguiamo alcuni casi.

- **Supponiamo che $\alpha$ non sia separante.** Allora $S \setminus\setminus \alpha$ è una superficie compatta connessa con due componenti di bordo.



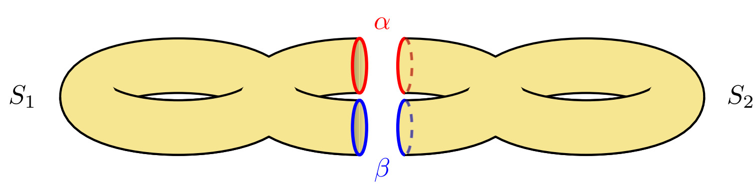

  - **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano alla stessa componente connessa di $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$.** Allora esiste una curva $\gamma$ che interseca $\alpha$ esattamente una volta e non interseca $\beta$.



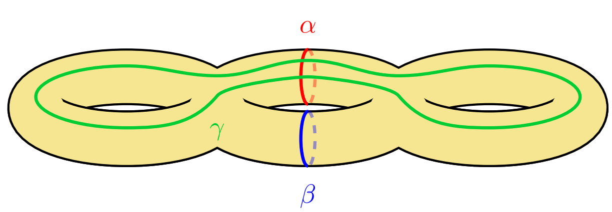

    Prendendo come $c$ la classe di isotopia di $\gamma$, otteniamo che

$$i(a, c) = 1 \neq 0 = i(b, c).$$

  - **Supponiamo che le due componenti di bordo appartengano a componenti connesse diverse di $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$.** In questo caso $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$ è unione disgiunta di due superfici $S_1$ e $S_2$, ciascuna con due componenti di bordo, una lungo $\alpha$ e una lungo $\beta$.



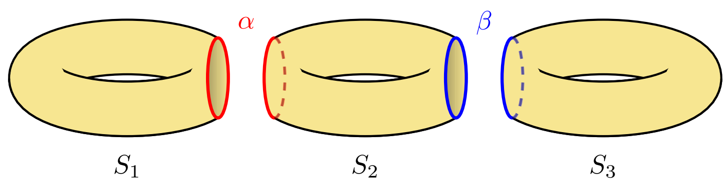

    Osserviamo che $S_1$ e $S_2$ hanno genere almeno 1, altrimenti $\alpha$ e $\beta$ coborderebbero un anello e sarebbero dunque isotope. È allora facile individuare una curva $\gamma$ la cui classe di isotopia $c$ soddisfa la tesi.



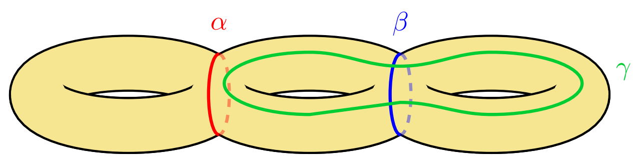
Grazie al criterio del bigono, si verifica che $\alpha$ e $\gamma$ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a,c) = 2 \neq 0 = i(b,c).$$

- **Supponiamo che $\beta$ non sia separante.** Possiamo allora ripetere il ragionamento del punto precedente, scambiando i ruoli di $\alpha$ e $\beta$, ottenendo una classe $c$ tale che $i(a,c) \neq i(b,c)$.
- **Supponiamo che $\alpha$ e $\beta$ siano separanti.** Allora $S \setminus\setminus \alpha \setminus\setminus \beta$ è unione disgiunta di tre superfici $S_1$, $S_2$ e $S_3$; $S_1$ ha una componente di bordo lungo $\alpha$, $S_3$ ha una componente di bordo lungo $\beta$, e $S_2$ ha due componenti di bordo, una lungo $\alpha$ e una lungo $\beta$.




Osserviamo che $S_1$ e $S_3$ hanno genere almeno 1, altrimenti $\alpha$ o $\beta$ sarebbero omotopicamente banali, e che anche $S_2$ ha genere almeno 1, altrimenti sarebbero isotope. È allora facile individuare una curva $\gamma$ la cui classe di isotopia $c$ soddisfa la tesi.




Grazie al criterio del bigono, si verifica che $\beta$ e $\gamma$ sono in posizione minimale, da cui

$$i(a,c) = 0 \neq 2 = i(b,c).$$

$\square$

(1)
- Cominciamo a mostrare che la classe di isotopia di $T_\alpha$ non dipende dall'orientazione di $\alpha$. Sia dunque $\alpha\colon S^1 \to S$ una curva semplice chiusa, e sia $\overline{\alpha}\colon S^1 \to S$ la curva inversa, ossia quella definita da $\overline{\alpha}(e^{ix}) = \alpha(e^{-ix})$. Se $\psi\colon A \to S$ è un intorno regolare orientato di $\alpha$, allora

$$\begin{aligned} \overline{\psi}\colon \qquad A &\longrightarrow S \\ (e^{ix}, t) &\longmapsto \psi(e^{-ix}, -t) \end{aligned}$$

è un intorno regolare orientato di $\overline{\alpha}$. Poiché la classe di isotopia dei Dehn twist non dipende dalla scelta di $f$, non è restrittivo supporre che $f(-t) = 2\pi - f(t)$. Mostriamo allora che $T_\alpha(p) = T_{\overline{\alpha}}(p)$ per ogni $p \in S$ (dunque in particolare $T_\alpha$ e $T_{\overline{\alpha}}$ sono isotopi). La tesi è ovvia per $p \notin \psi(A)$, dunque supponiamo $p \in \psi(A)$; è sufficiente far vedere che $\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi} = \overline{\psi} \circ \theta$. Effettivamente:

$$(\psi \circ \theta \circ \psi^{-1} \circ \overline{\psi})(e^{ix}, t) = \psi(\theta(e^{-ix}, -t)) = \psi(e^{i(-x+f(-t))}, -t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t);$$
$$(\overline{\psi} \circ \theta)(e^{ix}, t) = \overline{\psi}(e^{i(x+f(t))}, t) = \psi(e^{-i(x+f(t))}, -t).$$

- Supponiamo che le curve semplici chiuse non banali $\alpha, \beta\colon S^1 \to S$ siano due rappresentanti della stessa classe di isotopia, ossia che esista un'isotopia (ambiente) $F\colon S \times [0,1] \to S$ tale che $F_0 = \mathrm{id}_S$ e $F_1 \circ \alpha = \beta$. Osserviamo che, per quanto abbiamo dimostrato, possiamo orientare $\alpha$ e $\beta$ in modo che una tale isotopia esista. Sia $\psi\colon A \to S$ un intorno regolare orientato di $\alpha$; notiamo che $F_1 \circ \psi$ è un intorno regolare orientato di $\beta$. È allora evidente che un Dehn twist intorno a $\beta$ è dato da $T_\beta = F_1 \circ T_\alpha \circ F_1^{-1}$, che è ovviamente isotopo a $T_\alpha$. Questo mostra che $T_\beta = T_\alpha$ in $\mathrm{MCG}(S)$.
- Siano ora $\alpha, \beta\colon S^1 \to S$ due curve semplici chiuse non banali e non isotope, e siano $a, b \in \mathcal{S}$ le corrispondenti classi di isotopia. Per il Lemma 2, esiste una classe $c \in \mathcal{S}$ tale che $i(a,c) \neq i(b,c)$. Dal Lemma 1 otteniamo

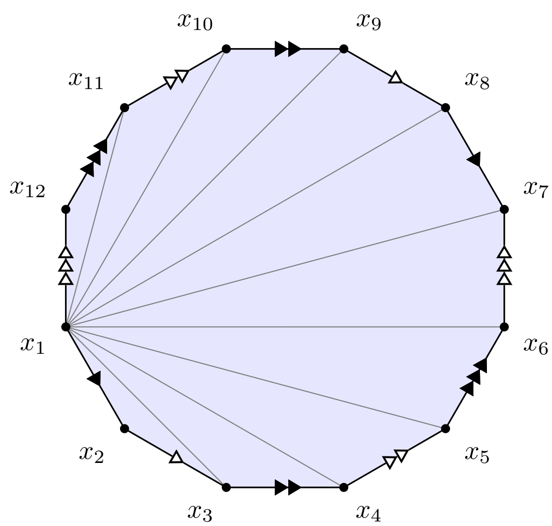
$$i(c, T_a(c)) = i(c,a)^2 \neq i(c,b)^2 = i(c, T_b(c)),$$

da cui $T_a \neq T_b$ come elementi di $\mathrm{MCG}(S)$.

(2) Per non creare conflitti di notazione, siano $h \in \mathrm{MCG}(S)$, $a \in \mathcal{S}$. Sia $\alpha\colon S^1 \to S$ un rappresentante di $a$, e con lieve abuso di notazione trattiamo $h$ come un diffeomorfismo di $S$. Sia $\psi\colon A \to S$ un intorno regolare di $\alpha$: notiamo che $h \circ \psi$ è un intorno regolare di $h \circ \alpha$. Ma allora è evidente che $h \circ T_\alpha \circ h^{-1}$ è un Dehn twist intorno a $h \circ \alpha$, ossia $T_{h(a)} = h \circ T_a \circ h^{-1}$. Segue che $h$ commuta con $T_a$ se e solo se $T_{h(a)} = T_a$, ossia (grazie al punto (1)) se e solo se $h(a) = a$.

## Esercizio 3.5

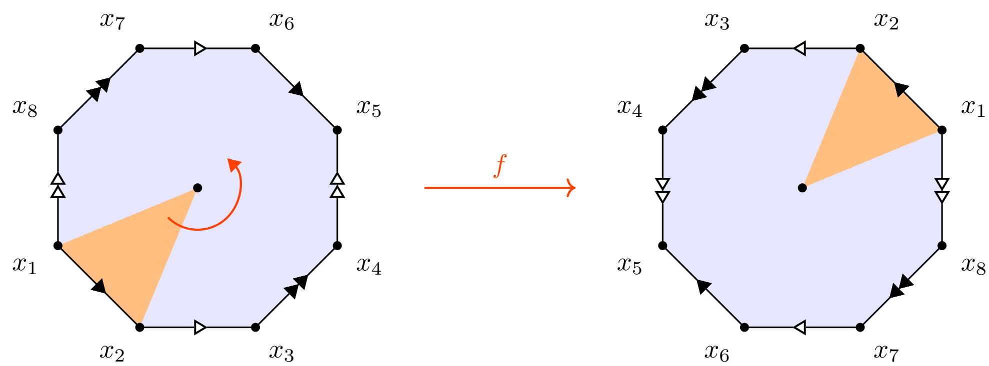
Consideriamo la superficie chiusa ottenuta incollando lati opposti di un $4g$-gono regolare con orientazioni parallele. Più precisamente, detti $x_1, \dots, x_{4g}$ i vertici del poligono regolare, incolliamo il segmento $x_i x_{i+1}$ con il segmento $x_{2g+i+1} x_{2g+i}$. La superficie $\Sigma$ così ottenuta ha una struttura di CW-complesso con una 0-cella, $2g$ 1-celle e una 2-cella.




- **$\Sigma$ è orientabile.** Questo si vede immediatamente triangolando il poligono regolare e osservando che le identificazioni fra lati invertono l'orientazione.
- **Una base per $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ è data dai segmenti $x_i x_{i+1}$ per $1 \le i \le 2g$.** Questo si vede facilmente calcolando l'omologia cellulare: infatti i segmenti $x_i x_{i+1}$ sono esattamente le 1-celle, e hanno tutte bordo nullo. Al contempo, anche l'unica 2-cella ha bordo nullo, dunque $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ con base data dalle 1-celle.

In particolare, $\Sigma$ è una superficie chiusa orientabile di genere $g$.

Per ogni $1 \le i \le 2g$, sia $\alpha_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ la classe rappresentata in omologia dal segmento $x_i x_{i+1}$. Consideriamo l'automorfismo $f \colon \Sigma \to \Sigma$ indotto dalla rotazione di angolo $\pi$ intorno al centro del poligono regolare.



Osserviamo che il segmento $x_i x_{i+1}$ viene mandato da $f$ nel segmento $x_{2g+i} x_{2g+i+1}$, dunque $f_*(\alpha_i) = -\alpha_i$. Poiché gli $\alpha_i$ formano una base di $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, abbiamo che $f_* = -\operatorname{id}_{H_1(\Sigma,\mathbb{Z})}$. Ovviamente $f$ ha ordine 2 e preserva l'orientazione, dunque $[f] \in \mathrm{MCG}(\Sigma)$ è l'involuzione iperellittica cercata.

# Esercizi del 2 maggio

## Esercizio 4.2

Siano $K \subseteq S^3$ un nodo, $\nu K$ un intorno tubolare (aperto) di $K$ tale che $\overline{\nu K}$ sia diffeomorfo a $D^2 \times S^1$. Allora $M = S^3 \setminus \nu K$ è una 3-varietà compatta il cui bordo $\partial M = \overline{\nu K} \setminus \nu K$ è diffeomorfo al 2-toro $T^2$. Per semplicità, poniamo $T^2 = \partial M$ e $D^2 \times S^2 = \nu K$.

Scriviamo una parte della successione esatta di Mayer-Vietoris[1] per $S^3 = M \cup (D^2 \times S^1)$, dove $i\colon T^2 \to M$ e $j\colon T^2 \to D^2 \times S^1$ indicano le inclusioni:

$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(T^2) \xrightarrow{(i_*,j_*)} H_1(M) \oplus H_1(D^2 \times S^1) \longrightarrow H_1(S^3).$$

Ricordando che $H_2(S^3) = H_1(S^3) = 0$ otteniamo l'isomorfismo

$$0 \longrightarrow H_1(T^2) \xrightarrow[\simeq]{(i_*,j_*)} H_1(M) \oplus H_1(D^2 \times S^1) \longrightarrow 0.$$

Poiché $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $H_1(D^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$, otteniamo immediatamente che $H_1(M) = \mathbb{Z}$.

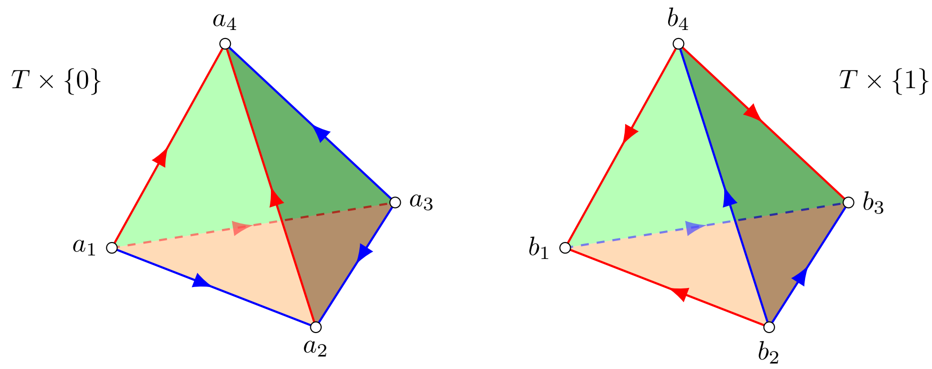
Sia ora $l \in H_1(T^2)$ la classe di omologia, ben definita a meno del segno, tale che $i_*(l) = 0 \in H_1(M)$ e $j_*(l)$ generi $H_1(D^2 \times S^1)$. Osserviamo che il nucleo dell'omomorfismo $i_*\colon H_1(T^2) \to H_1(M)$ è precisamente il sottogruppo ciclico generato da $l$, e che $l$ è primitivo, in quanto $H_1(M) = \mathbb{Z}$ non ha torsione. Sappiamo allora che esiste un'unica classe di isotopia di curve semplici chiuse non orientate che rappresenta $l$ in omologia; poiché anche $-l$ è rappresentata dalla stessa classe di isotopia, otteniamo che è ben definita la *longitudine* come l'unica curva semplice chiusa di $T^2$ (a meno di isotopia e dell'orientazione) che in omologia genera il nucleo di $i_*$.

Con un ragionamento del tutto analogo, possiamo ben definire il *meridiano* come l'unica curva semplice chiusa di $T^2$ (a meno di isotopia e dell'orientazione) che in omologia genera il nucleo dell'omomorfismo $j_*\colon H_1(T^2) \to H_1(D^2 \times S^1)$.

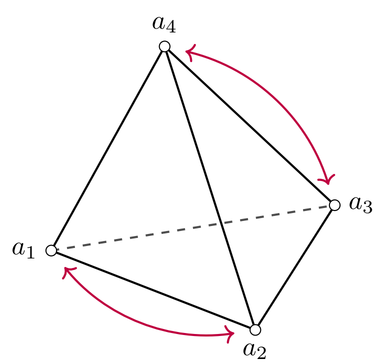
[1] Nonostante $M$ e $D^2 \times S^1$ non siano aperti in $S^3$, entrambi sono retratti per deformazione di un loro intorno aperto; inoltre tali intorni aperti si possono scegliere in modo che la loro intersezione si retragga per deformazione su $M \cap (D^2 \times S^1) = T^2$.

## Esercizio 4.3

Ricordiamo che una struttura iperbolica sul complementare del nodo figura otto è data dall'incollamento di due tetraedri ideali regolari iperbolici secondo il seguente schema (le facce dello stesso colore vengono identificate, in modo da rispettare le frecce e i colori rappresentati sugli spigoli).




Per fissare la notazione, siano $M$ il complementare del nodo figura otto, $T \times \{0,1\}$ l'unione disgiunta dei due tetraedri $T\times\{0\}$ e $T\times\{1\}$, $\sim$ la relazione di equivalenza descritta dall'incollamento, in modo che $M = T \times \{0,1\}/\sim$. Ricordiamo che, essendo $T$ un tetraedro ideale regolare iperbolico, ogni permutazione dei suoi vertici è indotta da un'isometria di $\mathbb{H}^3$. Sia allora $g\colon T \to T$ l'isometria di $T$ che induce la permutazione $\sigma = (1\,2)(3\,4)$.




Definiamo l'isometria

$$\begin{aligned} f : T \times \{0,1\} &\longrightarrow T \times \{0,1\} \\ (x,i) &\longmapsto (g(x), 1-i). \end{aligned}$$

In altre parole, $f$ scambia $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$, e poi applica a ognuno dei tetraedri l'isometria che induce la permutazione $\sigma$. In altre parole ancora, $f$ è l'unica isometria di $T \times \{0,1\}$ che effettua i seguenti scambi di vertici:

$$a_1 \leftrightarrow b_2 \qquad a_2 \leftrightarrow b_1 \qquad a_3 \leftrightarrow b_4 \qquad a_4 \leftrightarrow b_3.$$

È facile verificare che $f$ è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$.

- Per quanto riguarda le facce, consideriamo ad esempio $a_1a_2a_3$ e $b_2b_3b_1$, identificate da $\sim$. La faccia $a_1a_2a_3$ viene mandata da $f$ in $b_2b_1b_4$, mentre $b_2b_3b_1$ viene mandata in $a_1a_4a_2$; le facce $a_1a_4a_2$ e $b_2b_1b_4$ risultano identificate da $\sim$. Analogamente si mostra che $f$ è compatibile con $\sim$ sulle parti interne di tutte le altre facce.

- Per quanto riguarda gli spigoli, una verifica diretta mostra che $f$ manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa, preservando la direzione delle frecce. Pertanto $f$ risulta compatibile con $\sim$ anche sugli spigoli.

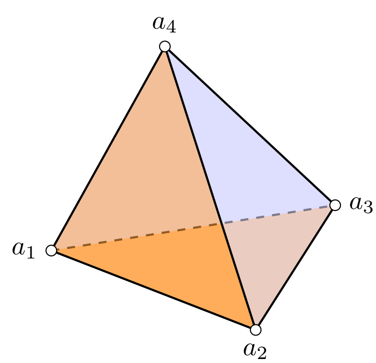
Per passaggio al quoziente otteniamo dunque un'isometria $\overline{f}\colon M \to M$. Verifichiamo che $\overline{f}$ non ha punti fissi.

- I punti delle parti interne dei tetraedri non sono fissati da $\overline{f}$, poiché $f$ scambia $T \times \{0\}$ e $T \times \{1\}$.

- I punti delle parti interne delle facce non sono fissati da $\overline{f}$, poiché $g$ agisce in modo libero sull'insieme delle facce di $T$.

- I punti degli spigoli non sono fissati da $\overline{f}$, poiché (come già osservato) $f$ manda spigoli rossi in spigoli blu e viceversa.

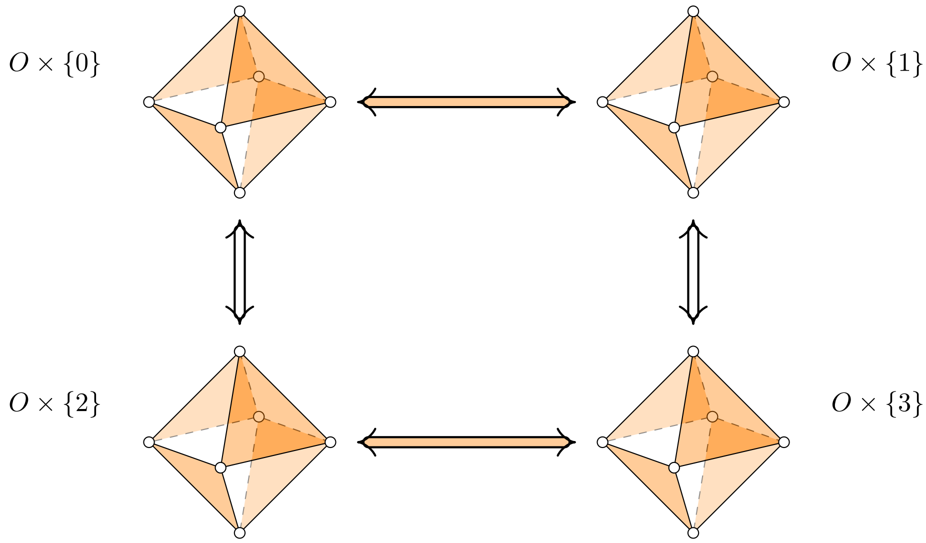
Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2. Pertanto possiamo definire $N = M/\langle \overline{f} \rangle$, che risulta essere una varietà iperbolica di volume finito, doppiamente rivestita dal complementare del nodo figura otto. La proiezione al quoziente della tassellazione di $M$ fornisce una tassellazione di $N$ con un tetraedro ideale regolare iperbolico, che riportiamo per completezza.



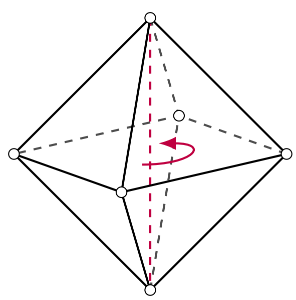

La varietà $N$ si ottiene incollando la faccia $a_1a_2a_3$ su $a_1a_4a_2$ e la faccia $a_1a_3a_4$ su $a_3a_2a_4$.

## Esercizio 4.4

Ricordiamo la costruzione, vista a lezione, di una 3-varietà iperbolica tassellata da quattro ottaedri ideali regolari iperbolici. Dopo aver colorato le facce degli ottaedri a scacchiera, le identifichiamo secondo il seguente schema, utilizzando come mappa di incollamento l'identità.




Seguiamo ora un approccio simile a quello dell'esercizio precedente. Siano $O \times \{0\}$, $O \times \{1\}$, $O \times \{2\}$, $O \times \{3\}$ gli ottaedri, $M = O \times \{0,1,2,3\}/\sim$ la varietà ottenuta mediante l'incollamento. Sia $g\colon O \to O$ l'isometria data dalla rotazione di un angolo piatto attorno alla retta che congiunge due vertici diametralmente opposti.



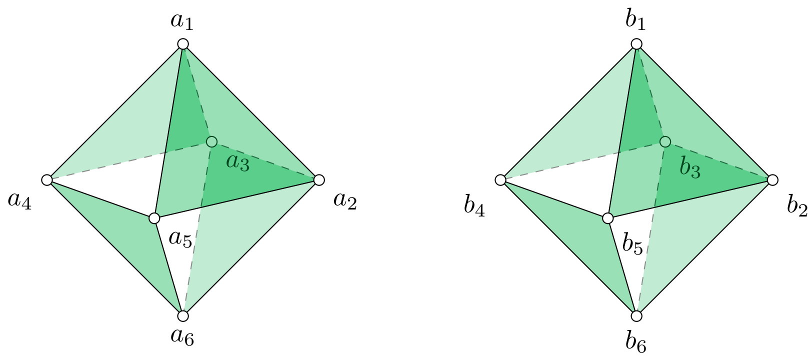
Definiamo l'isometria

$$\begin{aligned} f : O \times \{0,1,2,3\} &\longrightarrow O \times \{0,1,2,3\} \\ (x,i) &\longmapsto (g(x), 3-i). \end{aligned}$$

In altre parole, $f$ scambia $(O \times \{0\}) \leftrightarrow (O \times \{3\})$ e $(O \times \{1\}) \leftrightarrow (O \times \{2\})$, e poi applica $g$ a ciascun ottaedro. Si vede facilmente che $f$ è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$, grazie al fatto che $g$ preserva la colorazione a scacchiera (la compatibilità sugli spigoli si può verificare direttamente a parte). Per passaggio al quoziente otteniamo dunque un'isometria $\overline{f}\colon M \to M$.

Si vede immediatamente che $\overline{f}$ agisce su $M$ senza punti fissi. Infatti tutte le identificazioni in $O \times \{0,1,2,3\}$ sono del tipo $(x,i) \sim (x,i')$; se $(x,i)$ è tale che $f(x,i) \sim (x,i)$, allora necessariamente $g(x) = x$, dunque $x$ è un punto fisso per $g$ e di conseguenza appartiene alla parte interna di $O$. Poiché i punti nelle parti interne degli ottaedri non sono identificati con altri punti, dovrebbe valere che $3 - i = i$, il che è assurdo.

Osserviamo infine che $\overline{f}$ ha ordine 2. Pertanto possiamo definire $N = M/\langle \overline{f} \rangle$, che risulta essere una varietà iperbolica di volume finito, doppiamente rivestita da $M$. La proiezione al quoziente della tassellazione di $M$ fornisce una tassellazione di $N$ con due ottaedri ideali regolari iperbolici, che riportiamo per completezza.




Ogni faccia azzurra a sinistra si identifica con la corrispondente faccia azzurra a destra, usando l'identità come mappa di incollamento. Le facce bianche si identificano invece mediante il seguente schema:

$$a_1a_2a_3 \leftrightarrow b_1b_4b_5 \qquad a_1a_4a_5 \leftrightarrow b_1b_2b_3 \qquad a_6a_3a_4 \leftrightarrow b_6b_5b_2 \qquad a_6a_5a_2 \leftrightarrow b_6b_3b_4.$$