Rivestimenti ramificati
Definizione

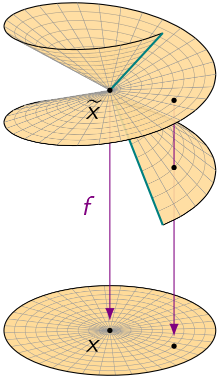
Un *rivestimento ramificato* fra due superfici (chiuse, connesse e orientabili) $\widetilde{\Sigma}$ e Σ è una funzione continua

$$f\colon \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

che localmente si comporta come

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \xi^k. \end{aligned}$$

- Il *grado locale* $k = k(\widetilde{x})$ dipende da $\widetilde{x} \in \widetilde{\Sigma}$, ed è uguale a 1 per quasi tutti i punti.
- Un punto $x \in \Sigma$ è *di ramificazione* se $k(\widetilde{x}) > 1$ per un qualche $\widetilde{x} \in f^{-1}(x)$.



Rivestimenti ramificati
Grado del rivestimento

Posto

- $\Sigma^\bullet = \Sigma \smallsetminus \{\text{punti di ramificazione}\}$,
- $\widetilde{\Sigma}^\bullet = f^{-1}(\Sigma^\bullet)$,

la restrizione $f^\bullet \colon \widetilde{\Sigma}^\bullet \to \Sigma^\bullet$ è un rivestimento di grado $d \geq 1$.

Per ogni $x \in \Sigma$ vale

$$k(\widetilde{x}_1) + \ldots + k(\widetilde{x}_r) = d,$$

dove $\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_r\} = f^{-1}(x)$.

Picture

- Possiamo associare a x la partizione di d

$$\pi(x) = [k(\widetilde{x}_1), \ldots, k(\widetilde{x}_r)].$$

Le informazioni combinatorie di f sono contenute nel *dato di ramificazione*

$$\mathcal{D}(f) = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)),$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono i punti di ramificazione.

Formula di Riemann-Hurwitz

Se $\mathcal{D}(f) = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ è un dato di ramificazione, allora

$$d \cdot \chi(\Sigma) - \chi(\widetilde{\Sigma}) = d \cdot n - \ell(\pi_1) - \ldots - \ell(\pi_n). \qquad \text{(RH)}$$

- Una tupla $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ che soddisfa la formula di Riemann-Hurwitz si dice *dato compatibile*.

Rivestimenti ramificati

Problema di esistenza di Hurwitz

- Un dato compatibile $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ si dice *realizzabile* se è il dato di ramificazione di un qualche rivestimento ramificato $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$, *eccezionale* altrimenti.
- La formula di Riemann-Hurwitz è condizione necessaria, ma non sufficiente per la realizzabilità.
  Ad esempio, il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}, \mathbb{S}; 4; [2,2], [2,2], [3,1])$ soddisfa

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 4 & \cdot & 2 & - & 2 & = & 4 & \cdot & 3 & - & 2 & - & 2 & - & 2 \\ d & \cdot & \chi(\Sigma) & - & \chi(\widetilde{\Sigma}) & = & d & \cdot & n & - & \ell(\pi_1) & - & \dots & - & \ell(\pi_n), \end{array} \tag{RH}$$

  ma è eccezionale.

Problema di esistenza di Hurwitz

Quali dati compatibili sono realizzabili?

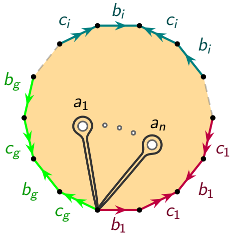
- Approcci generali: monodromia e dessins d'enfant.
- Soluzione completa nel caso $\ell(\pi_n) = 2$.

Sia Σ_g la somma connessa di $g \geq 0$ tori. Se

$$\Sigma_g^\bullet = \Sigma_g \setminus \{x_1, \dots, x_n\},$$

il gruppo fondamentale di $\Sigma_g^\bullet$ ammette la presentazione

$$\pi_1(\Sigma_g^\bullet) = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_g \mid [b_1, c_1] \cdots [b_g, c_g] \cdot a_1 \cdots a_n \rangle.$$



- Se $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma_g$ è un rivestimento ramificato, $\pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0)$ agisce sulla fibra $f^{-1}(x_0)$ (monodromia del rivestimento $f^\bullet : \widetilde{\Sigma}^\bullet \to \Sigma_g^\bullet$).
- Questa azione induce un morfismo di gruppi

$$\mathfrak{m} : \pi_1(\Sigma_g^\bullet) \longrightarrow \mathfrak{S}(f^{-1}(x_0))^{\mathrm{op}} \simeq \mathfrak{S}_d.$$

- Le lunghezze dei cicli di $\mathfrak{m}(a_i)$ corrispondono agli elementi di $\pi(x_i)$.

Un dato $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ è realizzabile se e solo se esistono permutazioni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_g \in \mathfrak{S}_d$ tali che:

- i $[\alpha_i] = \pi_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$;
- ii $[\beta_1, \gamma_1] \cdots [\beta_g, \gamma_g] \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$;
- iii $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ agisce transitivamente su $\{1, \ldots, d\}$.

Esempio. Il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}, \mathbb{S}; 4; [2,2], [2,2], [1,3])$ è eccezionale. Se non lo fosse, avremmo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathfrak{S}_4$ tali che:

- i $[\alpha_1] = [\alpha_2] = [2,2]$ e $[\alpha_3] = [1,3]$;
- ii $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$.

Ma le permutazioni di tipo $[2,2]$ generano un sottogruppo di ordine 4, che non contiene α_3.