Rivestimenti ramificati

Definizione

chiuse, connesse, orientabili

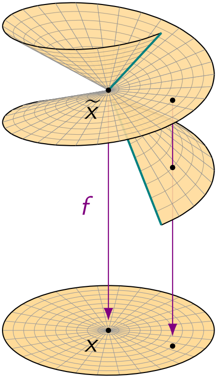
Un *rivestimento ramificato* fra due superfici $\widetilde{\Sigma}$ e Σ è una funzione continua

$$f\colon \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

che localmente si comporta come

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \xi^k. \end{aligned}$$

- Il *grado locale* $k = k(\widetilde{x})$ dipende da $\widetilde{x} \in \widetilde{\Sigma}$, ed è uguale a 1 per quasi tutti i punti.
- Un punto $x \in \Sigma$ è *di ramificazione* se $k(\widetilde{x}) > 1$ per un qualche $\widetilde{x} \in f^{-1}(x)$.



Posto

- $\Sigma^\bullet = \Sigma \setminus \{\text{punti di ramificazione}\}$,
- $\widetilde{\Sigma}^\bullet = f^{-1}(\Sigma^\bullet)$,

la restrizione $f^\bullet \colon \widetilde{\Sigma}^\bullet \to \Sigma^\bullet$ è un rivestimento di grado $d \geq 1$.

grado di f

Per ogni $x \in \Sigma$ vale

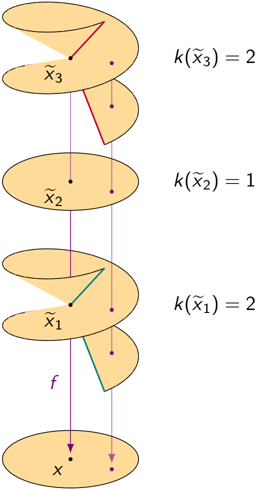
$$k(\widetilde{x}_1) + \ldots + k(\widetilde{x}_r) = d,$$

dove $\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_r\} = f^{-1}(x)$.

- Possiamo associare a x la partizione di d

$$\pi(x) = [k(\widetilde{x}_1), \ldots, k(\widetilde{x}_r)].$$

non ordinata



Le proprietà combinatorie di $f\colon \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ sono contenute nel *dato di ramificazione*

$$\mathcal{D}(f) = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)),$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono i punti di ramificazione.

Formula di Riemann-Hurwitz

Se $\mathcal{D}(f) = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ è un dato di ramificazione, allora

$$d \cdot \chi(\Sigma) - \chi(\widetilde{\Sigma}) = d \cdot n - \ell(\pi_1) - \ldots - \ell(\pi_n). \qquad \text{(RH)}$$

- Una tupla $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ che soddisfa la formula di Riemann-Hurwitz si dice *dato compatibile*.
- Per comodità, richiediamo anche che $n \geq 3$ e $\pi_i \neq [1, \ldots, 1]$.

Rivestimenti ramificati

Problema di esistenza di Hurwitz

- Un dato compatibile $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ si dice *realizzabile* se è il dato di ramificazione di un qualche rivestimento ramificato $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$, *eccezionale* altrimenti.
- La formula di Riemann-Hurwitz è condizione necessaria, ma non sufficiente per la realizzabilità.
  Ad esempio, il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}, \mathbb{S}; 4; [2,2], [2,2], [1,3])$ soddisfa

$$4 \cdot 2 - 2 = 4 \cdot 3 - 2 - 2 - 2$$

$$d \cdot \chi(\Sigma) - \chi(\widetilde{\Sigma}) = d \cdot n - \ell(\pi_1) - \ldots - \ell(\pi_n), \qquad \text{(RH)}$$

  ma è eccezionale.

Problema di esistenza di Hurwitz

Quali dati compatibili sono realizzabili?

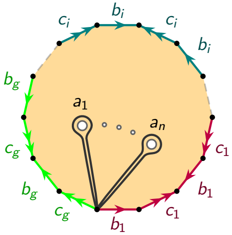
- Approcci generali: monodromia e dessins d'enfant.
- Soluzione completa nel caso $\ell(\pi_n) = 2$.

Monodromia

Gruppo fondamentale e monodromia del rivestimento

Sia Σ_g la somma connessa di $g \geq 0$ tori. Se

$$\Sigma_g^\bullet = \Sigma_g \setminus \{x_1, \dots, x_n\},$$



il gruppo fondamentale $\pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0)$ ammette la presentazione

cammino chiuso intorno a x_1

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_g \mid [b_1, c_1] \cdots [b_g, c_g] \cdot a_1 \cdots a_n \rangle.$$

in $\{x_1, \dots, x_n\}$

- Se $f \colon \widetilde{\Sigma} \to \Sigma_g$ è un rivestimento ramificato, $\pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0)$ agisce sulla fibra $f^{-1}(x_0)$ (monodromia del rivestimento $f^\bullet \colon \widetilde{\Sigma}^\bullet \to \Sigma_g^\bullet$).
- Questa azione induce un morfismo di gruppi

scriviamo $[\mathfrak{m}(a_i)] = \pi(x_i)$

$$\mathfrak{m} \colon \pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0) \longrightarrow \mathfrak{S}(f^{-1}(x_0))^{\mathrm{op}} \cong \mathfrak{S}_d.$$

- Le lunghezze dei cicli di $\mathfrak{m}(a_i)$ corrispondono agli elementi di $\pi(x_i)$.

Un dato $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ è realizzabile se e solo se esistono permutazioni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_g \in \mathfrak{S}_d$ tali che:

- i. $[\alpha_i] = \pi_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$;
- ii. $[\beta_1, \gamma_1] \cdots [\beta_g, \gamma_g] \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$;
- iii. $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ agisca transitivamente su $\{1, \ldots, d\}$.

$\widetilde{\Sigma}$ connessa

Esempio. Il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}, \mathbb{S}; 4; [2,2], [2,2], [1,3])$ è eccezionale. Se non lo fosse, esisterebbero $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathfrak{S}_4$ tali che:

- i. $[\alpha_1] = [\alpha_2] = [2,2]$ e $[\alpha_3] = [1,3]$;
- ii. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$. $\longrightarrow$ $\alpha_3 = \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$

$\alpha_1 = (\bullet, \bullet)(\bullet, \bullet)$
$\alpha_2 = (\bullet, \bullet)(\bullet, \bullet)$
$\alpha_3 = (\bullet, \bullet, \bullet)$

Ma le permutazioni di tipo $[2,2]$ generano un sottogruppo di ordine 4, che non contiene α_3.

Ogni dato compatibile $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ con $g \geq 1$ è realizzabile.

- D'ora in poi considereremo solo dati della forma

$$(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{S}; d; \pi_1, \ldots, \pi_n).$$

Ogni dato compatibile $(\widetilde{\Sigma}; d; \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, [d])$ è realizzabile.

Ogni dato compatibile $(\widetilde{\Sigma}; d; \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, [1, d-1])$ è realizzabile, eccezion fatta per:

1. $(\mathbb{S}; 2k; [2, \ldots, 2], [2, \ldots, 2], [1, 2k-1])$ con $k \geq 2$;
2. $(\Sigma_{n-3}; 4; [2, 2], \ldots, [2, 2], [1, 3])$.

Ogni dato compatibile $(\widetilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \ldots, \pi_n)$ con $g \geq 1$ è realizzabile.

- D'ora in poi considereremo solo dati della forma

$$(\widetilde{\Sigma}, \cancel{\mathbb{S}}; d; \pi_1, \ldots, \pi_n).$$

Ogni dato compatibile $(\widetilde{\Sigma}; d; \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, [d])$ è realizzabile.

Ogni dato compatibile $(\widetilde{\Sigma}; d; \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, [1, d-1])$ è realizzabile, eccezion fatta per:

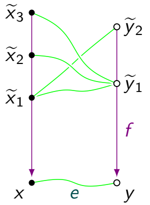
1. $(\mathbb{S}; 2k; [2, \ldots, 2], [2, \ldots, 2], [1, 2k-1])$ con $k \geq 2$;
2. $(\Sigma_{n-3}; 4; [2, 2], \ldots, [2, 2], [1, 3])$.

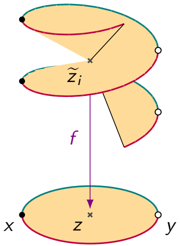
Sia $f\colon \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{S}$ un rivestimento ramificato con punti di ramificazione $x, y, z \in \mathbb{S}$.

- Tracciamo un arco e fra x e y.
- $\Gamma = f^{-1}(e)$ è un grafo su $\widetilde{\Sigma}$.
- Se coloriamo $f^{-1}(x)$ di nero e $f^{-1}(y)$ di bianco, Γ è bipartito.
- Il grado di $\widetilde{x}_i \in f^{-1}(x)$ è $k(\widetilde{x}_i)$.
- Ogni componente connessa $\widetilde{D}_i$ di $\widetilde{\Sigma} \setminus \Gamma$ contiene esattamente un punto $\widetilde{z}_i \in f^{-1}(z)$.

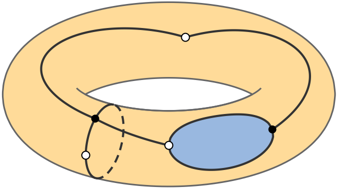
  regione complementare
- $\widetilde{D}_i$ è un disco, e ci sono $2k(\widetilde{z}_i)$ archi lungo il suo perimetro.

  contati con molteplicità





Un *dessin d'enfant* su $\widetilde{\Sigma}$ è un grafo bipartito $\Gamma \subseteq \widetilde{\Sigma}$ le cui regioni complementari sono dischi.



$\mathcal{D} = (\Sigma_1; 7; [3,4], [2,2,3], [1,6])$

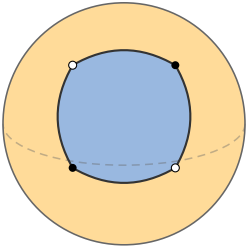
Un dato $\mathcal{D} = (\widetilde{\Sigma}; d; \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è realizzabile se e solo se esiste un dessin d'enfant $\Gamma \subseteq \widetilde{\Sigma}$ tale che:

- i. $\pi_1 \longleftrightarrow$ gradi dei vertici neri;
- ii. $\pi_2 \longleftrightarrow$ gradi dei vertici bianchi;
- iii. $\pi_3 \longleftrightarrow$ semiperimetri dei dischi complementari.

Esempio. Il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}; 4; [2,2], [2,2], [1,3])$ è eccezionale. Se non lo fosse, esisterebbe un dessin d'enfant $\Gamma \subseteq \mathbb{S}$ tale che:

- i) i due vertici neri abbiano gradi $[2,2]$;
- ii) i due vertici bianchi abbiano gradi $[2,2]$;
- iii) i due dischi complementari abbiano semiperimetri $[1,3]$.

Tuttavia esiste un unico dessin d'enfant su $\mathbb{S}$ che soddisfa le condizioni i) e ii), e i suoi dischi complementari hanno semiperimetri $[2,2]$.



Obiettivo

Classificazione completa dei dati eccezionali della forma

$$(\Sigma_g; d; \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, [s, d-s]).$$

- Approccio computazionale[1] per trattare i casi con d piccolo.
- Strategia basata sulla monodromia per ridurre il numero di partizioni a $n = 3$.
- Strategia basata sui dessins d'enfant per ridurre il genere a $g = 0$.
- Risultati già noti[2] classificano i dati eccezionali della forma

$$(\mathbb{S}; d; \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, [s, d-s]).$$

[1] Hao Zheng. *Realizability of branched coverings of S^2*. Topology Appl. 153.12 (2006), 2124–2134.

[2] Fedor Pakovich. *Solution of the Hurwitz problem for Laurent polynomials*. J. Knot Theory Ramifications 18.2 (2009), 271–302.

Dati con una partizione di lunghezza 2

Mosse combinatorie

Una *mossa combinatoria* è un'implicazione del tipo

$$\mathcal{D}' \text{ è realizzabile } \implies \mathcal{D} \text{ è realizzabile,}$$

dove $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ sono dati compatibili. Si indica con $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$.

- $\mathcal{D} = (\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s])$. $(\Sigma_{g'}; d'; \pi'_1, \pi'_2, [s', d'-s'])$
- Siamo interessati a mosse $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$ in cui $g' < g$.

Schema dimostrativo

Per dimostrare che $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$:

1. consideriamo un dessin d'enfant $\Gamma' \subseteq \Sigma_{g'}$ che realizza $\mathcal{D}'$;
2. apportiamo alcune modifiche a Γ' per ottenere un nuovo dessin d'enfant $\Gamma \subseteq \Sigma_g$;
3. verifichiamo che Γ realizza $\mathcal{D}$.

Sia $\mathcal{D} = (\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s])$ un dato compatibile con $g \geq 1$. Supponiamo che

- $3 \leq s \leq d-3$;
- $[x, y] \subseteq \pi_1$ con $x \geq 3$, $y \geq 3$;
- $[2, 2] \subseteq \pi_2$.

Consideriamo il dato compatibile

$$\mathcal{D}' = (\Sigma_{g-1}; d-4; \pi_1', \pi_2', [s-2, d-s-2]),$$

dove $\pi_1' = \pi_1 \smallsetminus [x, y] \cup [x-2, y-2]$ e $\pi_2' = \pi_2 \smallsetminus [2, 2]$. Allora $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$.

Dati con una partizione di lunghezza 2

Un esempio di mossa combinatoria

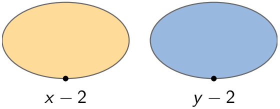
$$(\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s]) \rightsquigarrow (\Sigma_{g-1}; d-4; \pi_1', \pi_2', [s-2, d-s-2])$$

$$\pi_1' = \pi_1 \smallsetminus [x, y] \cup [x-2, y-2], \qquad \pi_2' = \pi_2 \smallsetminus [2, 2]$$

Sia $\Gamma' \subseteq \Sigma_{g-1}$ un dessin d'enfant che realizza $\mathcal{D}'$. Denotiamo con D_1 il disco complementare di perimetro $s-2$, con D_2 l'altro.

Caso 1: il vertice nero di grado $x-2$ giace sul bordo di D_1, quello di grado $y-2$ sul bordo di D_2.

1. Attacchiamo un tubo a Σ_{g-1} con un estremo in D_1 e l'altro in D_2.
2. Aggiungiamo vertici e archi.
3. Tracciamo gli archi rossi.
4. Collassiamo gli archi rossi.



Dati con una partizione di lunghezza 2

Un esempio di mossa combinatoria

$$(\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s]) \rightsquigarrow (\Sigma_{g-1}; d-4; \pi'_1, \pi'_2, [s-2, d-s-2])$$

$$\pi'_1 = \pi_1 \smallsetminus [x, y] \cup [x-2, y-2], \qquad \pi'_2 = \pi_2 \smallsetminus [2, 2]$$

Sia $\Gamma' \subseteq \Sigma_{g-1}$ un dessin d'enfant che realizza $\mathcal{D}'$. Denotiamo con D_1 il disco complementare di perimetro $s-2$, con D_2 l'altro.

Caso 2: i vertici neri di gradi $x-2$ e $y-2$ giacciono entrambi sul bordo di D_1. Sia e un arco che giace sui bordi di entrambi i dischi.

1. Aggiungiamo vertici su e.
2. Attacchiamo un tubo a Σ_{g-1} con entrambi gli estremi in in D_1.
3. Tracciamo gli archi rossi.
4. Collassiamo gli archi rossi.