

Rivestimenti ramificati

Definizione

chiuse, connesse, orientabili

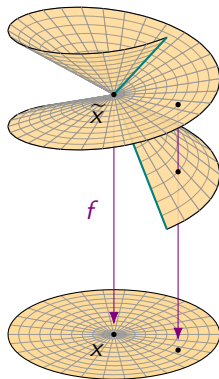
Un *rivestimento ramificato* fra due superfici $\tilde{\Sigma}$ e Σ è una funzione continua

$$f: \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$$

che localmente si comporta come

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \xi^k.\end{aligned}$$

- Il *grado locale* $k = k(\tilde{x})$ dipende da $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$, ed è uguale a 1 per quasi tutti i punti.
- Un punto $x \in \Sigma$ è *di ramificazione* se $k(\tilde{x}) > 1$ per un qualche $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$.



Rivestimenti ramificati

Grado del rivestimento

Posto

- $\Sigma^\bullet = \Sigma \setminus \{\text{punti di ramificazione}\},$
- $\tilde{\Sigma}^\bullet = f^{-1}(\Sigma^\bullet),$

la restrizione $f^\bullet: \tilde{\Sigma}^\bullet \rightarrow \Sigma^\bullet$ è un rivestimento di grado $d \geq 1$.

grado di f

Per ogni $x \in \Sigma$ vale

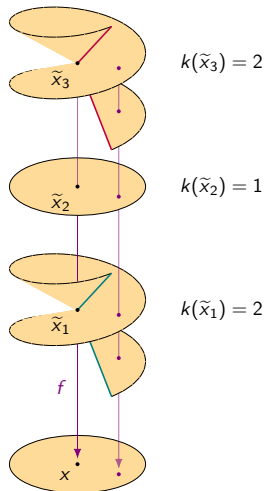
$$k(\tilde{x}_1) + \dots + k(\tilde{x}_r) = d,$$

dove $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r\} = f^{-1}(x).$

- Possiamo associare a x la **partizione** di d

$$\pi(x) = [k(\tilde{x}_1), \dots, k(\tilde{x}_r)].$$

non ordinata



Rivestimenti ramificati

Dati di ramificazione

Le proprietà combinatorie di $f: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ sono contenute nel *dato di ramificazione*

$$\mathcal{D}(f) = (\tilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi(x_1), \dots, \pi(x_n)),$$

dove x_1, \dots, x_n sono i punti di ramificazione.

Formula di Riemann-Hurwitz

Se $\mathcal{D}(f) = (\tilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ è un dato di ramificazione, allora

$$d \cdot \chi(\Sigma) - \chi(\tilde{\Sigma}) = d \cdot n - \ell(\pi_1) - \dots - \ell(\pi_n). \quad (\text{RH})$$

- Una tupla $\mathcal{D} = (\tilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ che soddisfa la formula di Riemann-Hurwitz si dice *dato compatibile*.
- Per comodità, richiediamo anche che $n \geq 3$ e $\pi_i \neq [1, \dots, 1]$.

Rivestimenti ramificati

Problema di esistenza di Hurwitz

- Un dato compatibile $\mathcal{D} = (\tilde{\Sigma}, \Sigma; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ si dice *realizzabile* se è il dato di ramificazione di un qualche rivestimento ramificato $f: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, *eccezionale* altrimenti.
- La formula di Riemann-Hurwitz è condizione necessaria, ma non sufficiente per la realizzabilità.
Ad esempio, il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}, \mathbb{S}; 4; [2, 2], [2, 2], [1, 3])$ soddisfa

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & \cdot & 2 & - & 2 & = & 4 \cdot 3 - 2 - 2 - 2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d & \cdot & \chi(\Sigma) & - & \chi(\tilde{\Sigma}) & = & d \cdot n - \ell(\pi_1) - \dots - \ell(\pi_n), \end{array} \quad (\text{RH})$$

ma è eccezionale.

Problema di esistenza di Hurwitz

Quali dati compatibili sono realizzabili?

- Approcci generali: monodromia e dessins d'enfant.
- Soluzione completa nel caso $\ell(\pi_n) = 2$.

Monodromia

Gruppo fondamentale e monodromia del rivestimento

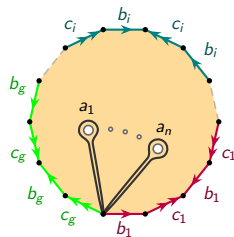
Sia Σ_g la somma connessa di $g \geq 0$ tori. Se

$$\Sigma_g^\bullet = \Sigma_g \setminus \{x_1, \dots, x_n\},$$

il gruppo fondamentale $\pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0)$ ammette la presentazione

cammino chiuso intorno a x_1

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_g \mid [b_1, c_1] \cdots [b_g, c_g] \cdot a_1 \cdots a_n \rangle.$$



- in $\{x_1, \dots, x_n\}$
- Se $f: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma_g$ è un rivestimento ramificato, $\pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0)$ agisce sulla fibra $f^{-1}(x_0)$ (monodromia del rivestimento $f^*: \tilde{\Sigma}^\bullet \rightarrow \Sigma_g^\bullet$).

- Questa azione induce un morfismo di gruppi

$$m: \pi_1(\Sigma_g^\bullet, x_0) \longrightarrow \mathfrak{S}(f^{-1}(x_0))^{\text{op}} \cong \mathfrak{S}_d.$$


scriviamo $[m(a_i)] = \pi(x_i)$

- Le lunghezze dei cicli di $m(a_i)$ corrispondono agli elementi di $\pi(x_i)$.



Monodromia

Criterio di realizzabilità

Un dato $\mathcal{D} = (\tilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ è realizzabile se e solo se esistono permutazioni $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g \in \mathfrak{S}_d$ tali che:

- i $[\alpha_i] = \pi_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$;
 - ii $[\beta_1, \gamma_1] \cdots [\beta_g, \gamma_g] \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$;
 - iii $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$ agisca transitivamente su $\{1, \dots, d\}$.
- $\tilde{\Sigma}$ connessa 

Esempio. Il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}, \mathbb{S}; 4; [2, 2], [2, 2], [1, 3])$ è eccezionale. Se non lo fosse, esisterebbero $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathfrak{S}_4$ tali che:

- i $[\alpha_1] = [\alpha_2] = [2, 2]$ e $[\alpha_3] = [1, 3]$; 
 - ii $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$. 
- $\alpha_1 = (\bullet, \bullet)(\bullet, \bullet)$
 $\alpha_2 = (\bullet, \bullet)(\bullet, \bullet)$
 $\alpha_3 = (\bullet, \bullet, \bullet)$

Ma le permutazioni di tipo $[2, 2]$ generano un sottogruppo di ordine 4, che non contiene α_3 .

Ogni dato compatibile $(\tilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ con $g \geq 1$ è realizzabile.

► D'ora in poi considereremo solo dati della forma

$$(\tilde{\Sigma}, \mathbb{S}; d; \pi_1, \dots, \pi_n).$$

Ogni dato compatibile $(\tilde{\Sigma}; d; \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, [d])$ è realizzabile.

Ogni dato compatibile $(\tilde{\Sigma}; d; \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, [1, d-1])$ è realizzabile, eccezion fatta per:

- 1 $(\mathbb{S}; 2k; [2, \dots, 2], [2, \dots, 2], [1, 2k-1])$ con $k \geq 2$;
- 2 $(\Sigma_{n-3}; 4; [2, 2], \dots, [2, 2], [1, 3])$.

Monodromia

Conseguenze

Ogni dato compatibile $(\tilde{\Sigma}, \Sigma_g; d; \pi_1, \dots, \pi_n)$ con $g \geq 1$ è realizzabile.

► D'ora in poi considereremo solo dati della forma

$$(\tilde{\Sigma}, \mathbb{S}; d; \pi_1, \dots, \pi_n).$$

Ogni dato compatibile $(\tilde{\Sigma}; d; \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, [d])$ è realizzabile.

Ogni dato compatibile $(\tilde{\Sigma}; d; \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, [1, d-1])$ è realizzabile, eccezion fatta per:

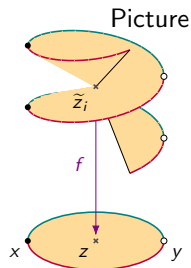
- 1 $(\mathbb{S}; 2k; [2, \dots, 2], [2, \dots, 2], [1, 2k-1])$ con $k \geq 2$;
- 2 $(\Sigma_{n-3}; 4; [2, 2], \dots, [2, 2], [1, 3])$.

Dessins d'enfant

Costruzione

Sia $f: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}$ un rivestimento ramificato con punti di ramificazione $x, y, z \in \mathbb{S}$.

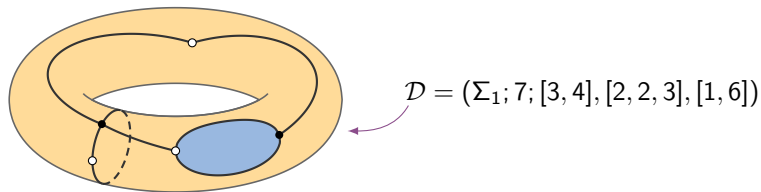
- Tracciamo un arco e fra x e y .
- $\Gamma = f^{-1}(e)$ è un grafo su $\tilde{\Sigma}$.
- Se coloriamo $f^{-1}(x)$ di nero e $f^{-1}(y)$ di bianco, Γ è bipartito. ➤ regione complementare
- Ogni componente connessa \tilde{D}_i di $\tilde{\Sigma} \setminus \Gamma$ contiene esattamente un punto $\tilde{z}_i \in f^{-1}(z)$.
- La restrizione $f: \tilde{D}_i \rightarrow \mathbb{S} \setminus e$ è un rivestimento ramificato con un solo punto di ramificazione. ➤ disco
- \tilde{D}_i è un disco, e ci sono $2k(\tilde{z}_i)$ archi lungo il suo perimetro.



Dessins d'enfant

Criterio di realizzabilità

Un *dessin d'enfant* su $\tilde{\Sigma}$ è un grafo bipartito $\Gamma \subseteq \tilde{\Sigma}$ le cui regioni complementari sono dischi.



Un dato $\mathcal{D} = (\tilde{\Sigma}; d; \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ è realizzabile se e solo se esiste un dessin d'enfant $\Gamma \subseteq \tilde{\Sigma}$ tale che:

- i $\pi_1 \longleftrightarrow$ gradi dei vertici neri;
- ii $\pi_2 \longleftrightarrow$ gradi dei vertici bianchi;
- iii $\pi_3 \longleftrightarrow$ semiperimetri dei dischi complementari.

Dessins d'enfant

Un esempio di dato eccezionale

Esempio. Il dato $\mathcal{D} = (\mathbb{S}; 4; [2, 2], [2, 2], [1, 3])$ è eccezionale. Se non lo fosse, esisterebbe un dessin d'enfant $\Gamma \subseteq \mathbb{S}$ tale che:

- i i due vertici neri abbiano gradi $[2, 2]$;
- ii i due vertici bianchi abbiano gradi $[2, 2]$;
- iii i due dischi complementari abbiano semiperimetri $[1, 3]$.

Tuttavia esiste un unico dessin d'enfant su \mathbb{S} che soddisfa le condizioni i e ii, e i suoi dischi complementari hanno semiperimetri $[2, 2]$.

Dati con una partizione di lunghezza 2

Roadmap

Obiettivo

Classificazione completa dei dati eccezionali della forma

$$(\Sigma_g; d; \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, [s, d-s]).$$

- Approccio computazionale¹ per trattare i casi con d piccolo.
- Strategia basata sulla monodromia per ridurre il numero di partizioni a $n = 3$.
- Strategia basata sui dessins d'enfant per ridurre il genere a $g = 0$.
- Risultati già noti² classificano i dati eccezionali della forma

$$(\mathbb{S}; d; \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, [s, d-s]).$$

¹Hao Zheng. *Realizability of branched coverings of S^2* . *Topology Appl.* 153.12 (2006), 2124–2134.

²Fedor Pakovich. *Solution of the Hurwitz problem for Laurent polynomials*. *J. Knot Theory Ramifications* 18.2 (2009), 271–302.

Dati con una partizione di lunghezza 2

Mosse combinatorie

Una *mossa combinatoria* è un'implicazione del tipo

$$\mathcal{D}' \text{ è realizzabile} \implies \mathcal{D} \text{ è realizzabile,}$$

dove \mathcal{D} e \mathcal{D}' sono dati compatibili. Si indica con $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$.

- $\mathcal{D} = (\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d - s])$.
- Siamo interessati a mosse $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$ in cui $g' < g$.

$$\mathcal{D}' = (\Sigma_{g'}; d'; \pi'_1, \pi'_2, [s', d' - s'])$$

Schema dimostrativo

Per dimostrare che $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$:

- ➊ consideriamo un dessin d'enfant $\Gamma' \subseteq \Sigma_{g'}$ che realizza \mathcal{D}' ;
- ➋ apportiamo alcune modifiche a Γ' per ottenere un nuovo dessin d'enfant $\Gamma \subseteq \Sigma_g$;
- ➌ verifichiamo che Γ realizza \mathcal{D} .

Dati con una partizione di lunghezza 2

Un esempio di mossa combinatoria

Sia $\mathcal{D} = (\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s])$ un dato compatibile con $g \geq 1$.
Supponiamo che

- $3 \leq s \leq d-3$;
- $[x, y] \subseteq \pi_1$ con $x \geq 3, y \geq 3$;
- $[2, 2] \subseteq \pi_2$.

Consideriamo il dato compatibile

$$\mathcal{D}' = (\Sigma_{g-1}; d-4; \pi'_1, \pi'_2, [s-2, d-s-2]),$$

dove $\pi'_1 = \pi_1 \setminus [x, y] \cup [x-2, y-2]$ e $\pi'_2 = \pi_2 \setminus [2, 2]$. Allora $\mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{D}'$.

Dati con una partizione di lunghezza 2

Un esempio di mossa combinatoria

$$(\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s]) \rightsquigarrow (\Sigma_{g-1}; d-4; \pi'_1, \pi'_2, [s-2, d-s-2])$$

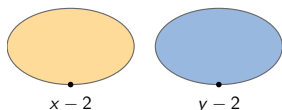
$$\pi'_1 = \pi_1 \setminus [x, y] \cup [x-2, y-2], \quad \pi'_2 = \pi_2 \setminus [2, 2]$$

⌈ ————— 3

Sia $\Gamma' \subseteq \Sigma_{g-1}$ un dessin d'enfant che realizza \mathcal{D}' . Denotiamo con D_1 il disco complementare di perimetro $s-2$, con D_2 l'altro.

Caso 1: il vertice nero di grado $x-2$ giace sul bordo di D_1 , quello di grado $y-2$ sul bordo di D_2 .

- 1 Attacciamo un tubo a Σ_{g-1} con un estremo in D_1 e l'altro in D_2 .
- 2 Aggiungiamo vertici e archi.
- 3 Tracciamo gli archi rossi.
- 4 Collassiamo gli archi rossi.



Dati con una partizione di lunghezza 2

Un esempio di mossa combinatoria

$$(\Sigma_g; d; \pi_1, \pi_2, [s, d-s]) \rightsquigarrow (\Sigma_{g-1}; d-4; \pi'_1, \pi'_2, [s-2, d-s-2])$$

$$\pi'_1 = \pi_1 \setminus [x, y] \cup [x-2, y-2], \quad \pi'_2 = \pi_2 \setminus [2, 2]$$

Sia $\Gamma' \subseteq \Sigma_{g-1}$ un dessin d'enfant che realizza \mathcal{D}' . Denotiamo con D_1 il disco complementare di perimetro $s-2$, con D_2 l'altro.

Caso 2: i vertici neri di gradi $x-2$ e $y-2$ giacciono entrambi sul bordo di D_1 . Sia e un arco che giace sui bordi di entrambi i dischi.

- 1 Aggiungiamo vertici su e .
- 2 Attacciamo un tubo a Σ_{g-1} con entrambi gli estremi in D_1 .
- 3 Tracciamo gli archi rossi.
- 4 Collasiamo gli archi rossi.

