Todo list

Capitolo 1

Successioni spettrali

1.1 Prime definizioni

Definizione 1.1. Un gruppo abeliano A si dice graduato se si scrive come somma diretta di sottogruppi

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} {}^{n}A.$$

Gli elementi non nulli di ${}^{n}A$ si dicono omogenei di grado n. Se $x \in A \setminus 0$ è omogeneo di grado n scriviamo $\deg x = n$.

Definizione 1.2. Sia A un gruppo graduato. Un'applicazione $d \colon A \to A$ si dice differenziale di grado k se $dd = 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $d({}^{n}A) \subseteq {}^{n+k}A$.

A ogni gruppo graduato A dotato di un differenziale d di grado -1 è associato in modo naturale un complesso di gruppi abeliani $A_\bullet$ dove l'n-esimo gruppo è ${}^{n}A$ e le mappe di bordo sono $d_n = d|_{{}^{n}A}$. Possiamo allora definire i gruppi di omologia di A riconducendoci al complesso associato: $H_n(A) = H_n(A_\bullet)$. In altri termini:

$$H_n(A) = \frac{\ker d \cap {}^{n}A}{\operatorname{im} d \cap {}^{n}A}.$$

Definizione 1.3. Sia A un gruppo graduato dotato di un differenziale d di grado -1. Si dice filtrazione crescente una successione di sottogruppi A^p indicizzata da $p \in \mathbb{N}$ che soddisfi le seguenti proprietà.

1. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A^p = A$.
2. Per ogni p vale $A^p \subseteq A^{p+1}$.
3. Ogni A^p è somma diretta delle sue componenti omogenee ${}^{n}A \cap A^p$.
4. Per ogni n vale ${}^{n}A \subseteq A^n$.
5. Ogni A^p è stabile per d, ossia $d(A^p) \subseteq A^p$.

In questa situazione, poniamo per comodità $A^p = 0$ per $p < 0$ e ${}^nA = 0$ per $n < 0$. Definiamo inoltre, per ogni $r \in \mathbb{Z}$, i sottogruppi di A^p:

- $C_r^p = d^{-1}(A^{p-r}) \cap A^p$;
- $B_r^p = d(A^{p+r}) \cap A^p$;
- $C_\infty^p = d^{-1}(0) \cap A^p$;
- $B_\infty^p = d(A) \cap A^p$.

Valgono le seguenti relazioni di inclusione:

$$\ldots \subseteq B_{r-1}^p \subseteq B_r^p \subseteq \ldots \subseteq B_\infty^p \subseteq C_\infty^p \subseteq \ldots \subseteq C_r^p \subseteq C_{r-1}^p \subseteq \ldots \subseteq C_0^p = A^p.$$

È facile convincersi che questi sottogruppi sono ancora gruppi graduati, ossia si scrivono come somma diretta delle loro componenti omogenee (secondo il grado di A). Per motivi che risulteranno evidenti in seguito, conviene definire, per $p, q \in \mathbb{Z}$, $A^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p$ (gli elementi omogenei di A^p di grado $p+q$). Denotiamo con $C_r^{p,q} = C_r^p \cap A^{p,q}$ gli elementi omogenei di grado $p+q$ di C_r^p; definiamo analogamente $B_r^{p,q}, C_\infty^{p,q}, B_\infty^{p,q}$.

Possiamo ora costruire la successione spettrale associata ad A. Dati $p, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ definiamo

$$E_r^{p,q} = \frac{C_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q} + C_{r-1}^{p-1,q+1}}.$$

In $E_r^{p,q}$, p è detto grado filtrante, q grado complementare, $p+q$ grado totale (quest'ultimo corrisponde al grado in A). Osserviamo che

$$\begin{aligned} d(C_r^{p,q}) &= d(d^{-1}(A^{p-r}) \cap A^{p,q}) \\ &\subseteq A^{p-r} \cap d(A^{p,q}) \\ &= A^{p-r,q+r-1} \cap d(A^p) \\ &= B_r^{p-r,q+r-1} \\ &\subseteq C_r^{p-r,q+r-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(B_{r-1}^{p,q} + C_{r-1}^{p-1,q+1}) &= d(C_{r-1}^{p-1,q+1}) \\ &\subseteq B_{r-1}^{p-r,q+r-1} \\ &\subseteq B_{r-1}^{p-r,q+r-1} + C_{r-1}^{p-r-1,q+r}, \end{aligned}$$

dunque il differenziale d passa al quoziente $d_r^{p,q} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p-r,q+r-1}$. Come si vede immediatamente, il differenziale:

- diminuisce di r il grado filtrante,
- aumenta di $r-1$ il grado complementare,

- diminuisce di 1 il grado totale.

Per concludere, definiamo i gruppi terminali

$$E_\infty^{p,q} = \frac{C_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} + C_\infty^{p-1,q+1}}.$$

Proposizione 1.1. *La successione spettrale E soddisfa le seguenti proprietà.*

1. $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q} / \operatorname{im} d_r^{p+r,q-r+1}$.
2. $E_r^{p,q} = 0$ *per* $p < 0$ *o* $q < 0$.
3. *Se* $r > p$, *allora* $E_{r+1}^{p,q}$ *è un quoziente di* $E_r^{p,q}$.
4. *Se* $r > q+1$, *allora* $E_{r+1}^{p,q}$ *è un sottogruppo di* $E_r^{p,q}$.
5. $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ *per* r *sufficientemente grande (in particolare, per* $r > \max\{p, q+1\}$*).*

Dimostrazione.

1. Fare i conti
2. Osserviamo che $E_0^{p,q} = A^{p,q}/A^{p-1,q+1}$. Se $p < 0$ chiaramente $E_0^{p,q} = 0$ (ricordiamo che abbiamo posto $A^p = 0$ per $p < 0$). Se $q < 0$, allora $A^{p,q} = {}^{p+q}A \cap A^p \subseteq {}^{p+1}A \cap A^{p-1} = A^{p-1,q+1}$, dunque $E_0^{p,q} = 0$ anche in questo caso. La proprietà è pertanto vera per $r = 0$; ma $E_{r+1}^{p,q}$ è un quoziente di un sottogruppo di $E_r^{p,q}$, da cui per induzione $E_r^{p,q} = 0$ per ogni $r \geq 0$.
3. Se $r > p$, allora $E_r^{p-r,q+r-1} = 0$, da cui $d_r^{p,q} = 0$. Segue che $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q} / \operatorname{im} d_r^{p+r,q-r+1}$ è un quoziente di $E_r^{p,q}$.
4. Se $r > q+1$, allora $E_r^{p+r,q+r-1} = 0$, da cui $d^{p+r,q+r-1} = 0$. Segue che $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q}/0$ è un sottogruppo di $E_r^{p,q}$.
5. Se $r > p$, allora $C_r^p = C_\infty^p$ e $C_{r-1}^{p-1} = C_\infty^{p-1}$. Se $r > q+1$, allora

$$\begin{aligned} B_\infty^{p,q} &= d(A) \cap A^{p,q} = d({}^{p+q+1}A) \cap A^{p,q} \\ &\subseteq d(A^{p+q+1}) \cap A^{p,q} \subseteq d(A^{p+r}) \cap A^{p,q} = B_r^{p,q}. \end{aligned}$$

   Pertanto, se $r > \max\{p, q+1\}$, allora $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

□

Capitolo 2

Omologia e coomologia degli spazi fibrati

2.1 Omologia singolare cubica

L'omologia singolare classica utilizza i simplessi singolari come oggetti fondamentali. Per la teoria degli spazi fibrati dovremo introdurre la nozione di omologia singolare cubica, che impiega cubi in luogo dei simplessi. Come è lecito aspettarsi, i cubi si prestano meglio allo studio degli spazi prodotto, e anche a quello degli spazi fibrati che, come vedremo, ne sono una generalizzazione.

Nel seguito indicheremo con I l'intervallo $[0,1]$ con l'usuale topologia euclidea. Sia inoltre X uno spazio topologico.

Definizione 2.1. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si dice cubo singolare (o più semplicemente cubo) di dimensione n un'applicazione continua $u\colon I^n \to X$. Un cubo di dimensione $n \geq 1$ si dice degenere se non dipende dall'ultima coordinata, ossia se $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n)$ per ogni $x_1, \ldots, x_n, x'_n \in I$.

Denotiamo con $Q_n(X)$ il gruppo abeliano libero avente per base l'insieme dei cubi singolari di dimensione n, con D_n il gruppo abeliano libero avente per base l'insieme dei cubi degeneri di dimensione n. Per definire il complesso $Q_\bullet(X)$ è necessario costruire mappe di bordo $d_n\colon Q_n(X) \to Q_{n-1}(X)$.

Sia u un cubo di dimensione n, $p, q \in \mathbb{N}$ con $p+q=n$, H un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ di cardinalità p, K il complementare di H, φ_K l'unica applicazione strettamente crescente da K in $\{1, \ldots, q\}$; sia inoltre $\epsilon \in \{0,1\}$. Definiamo allora il cubo singolare $\lambda_H^\epsilon u$ di dimensione q:

$$\lambda_H^\epsilon u(x_1, \ldots, x_n) = u(y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{, dove } y_i = \begin{cases} \epsilon & \text{se } i \in H \\ x_{\varphi_K(i)} & \text{se } i \in K \end{cases}.$$

Per snellire la notazione, se $H = \{i\}$ (ossia se $p = 1$), scriviamo λ_i^ϵ in luogo di $\lambda_{\{i\}}^\epsilon$. Dato un cubo u di dimensione n, definiamo dunque

$$d_n u = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i^0 u - \lambda_i^1 u),$$

estendendola per $\mathbb{Z}$-linearità a tutto $Q_n(X)$. È immediato verificare che $\lambda_i^\epsilon \lambda_j^{\epsilon'} = \lambda_{j-1}^{\epsilon'} \lambda_i^\epsilon$; un semplice conto mostra allora che $d_n d_{n+1} = 0$. Abbiamo così definito il complesso $Q_\bullet(X)$. Si vede inoltre che $D_\bullet(X)$ è un sottocomplesso di $Q_\bullet(X)$: se u è un cubo degenere di dimensione n, allora anche $\lambda_i^\epsilon u$ è degenere per $0 \leq i < n$, mentre $\lambda_n^0 u = \lambda_n^1 u$, pertanto du è degenere.

Definizione 2.2. Si dice complesso singolare (cubico) di X il complesso $C_\bullet(X) = Q_\bullet(X)/D_\bullet(X)$. I suoi gruppi di omologia e coomologia a coefficienti in un gruppo abeliano G si dicono gruppi di omologia e coomologia singolare (cubica) di X a coefficienti in G.

Poiché nel seguito faremo uso esclusivamente dell'omologia singolare cubica, impiegheremo le notazioni classiche dell'omologia singolare:

$$\begin{aligned} C_\bullet(X;G) &= C_\bullet(X) \otimes G \\ H_n(X;G) &= H_n(C_\bullet(X;G)) \\ C^\bullet(X;G) &= \mathrm{Hom}(C_\bullet, G) \\ H^n(X;G) &= H^n(C^\bullet(X;G)). \end{aligned}$$

Sia inoltre $H^*(X;G) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X;G)$. Esattamente come nel caso della teoria singolare classica, se G è un anello, $H^*(X;G)$ acquisisce una struttura di anello graduato. Si definisce il prodotto cup come segue: se u è un cubo di dimensione $p+q$ e f, g sono cocatene di dimensione p, q rispettivamente, allora

$$(f \smile g)u = \sum_H \rho_{H,K} f(\lambda_K^0 u) \cdot g(\lambda_H^1 u),$$

dove H varia fra i sottoinsiemi di $\{1, \ldots, p+q\}$ di cardinalità p, K è il complementare di H e $\rho_{H,K} = (-1)^\nu$ (ν indica il numero di coppie $(i,j) \in H \times K$ con $j < i$).

Capitolo 3

Spazi di cammini

3.1 H-spazi

Definizione 3.1. Sia G uno spazio topologico munito di un prodotto $\vee\colon G \times G \to G$ continuo. G si dice H-spazio se esiste $e \in G$ con $e \vee e = e$ tale che le applicazioni da G in G definite da $x \mapsto x \vee e$ e $x \mapsto e \vee x$ siano omotope all'identità mediante omotopie che fissano e.

Proposizione 3.1. *Sia G un H-spazio connesso, $p\colon T \to G$ un rivestimento. Allora gli automorfismi di rivestimento di T sono omotopi all'identità.*

Dimostrazione. Sia $f\colon T \to T$ un automorfismo di rivestimento, $\tilde{e}$ un elemento della fibra di e, $\tilde{e}' = f(\tilde{e})$. Sia poi $\gamma\colon I \to G$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = e$ il cui sollevamento $\tilde{\gamma}$ soddisfi $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{e}, \tilde{\gamma}(1) = \tilde{e}'$. Sia infine $h\colon I \times G \to G$ un'omotopia con $h_0(x) = x$ e $h_1(x) = e \vee x$. Definiamo l'omotopia

$$\begin{aligned} H : I \times T &\longrightarrow G \\ (x,t) &\longmapsto \begin{cases} h_{3t}(p(x)) & t \leq \frac{1}{3} \\ \gamma(3t-1) \vee p(x) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ h_{3-3t}(p(x)) & \frac{2}{3} \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

Per la proprietà di sollevamento dell'omotopia, esiste un'omotopia $\tilde{H}\colon I \times T \to T$ con $\tilde{H}_0 = \mathbb{1}$ e $p\tilde{H} = H$. Osserviamo che il cammino $t \mapsto H_t(\tilde{e})$ è omotopo a γ e $\tilde{H}_0(\tilde{e}) = \tilde{e}$, pertanto $\tilde{H}_1(\tilde{e}) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{e}'$. Ma allora $\tilde{H}_1$ è un sollevamento dell'identità di G tale che $\tilde{H}_1(\tilde{e}) = f(\tilde{e})$. Dalla connessione di G segue che $\tilde{H}_1 = f$. Ma $\tilde{H}_1 = f$ e $\tilde{H}_0 = \mathbb{1}$ sono omotope mediante H. □

Corollario 3.2. *Sia G un H-spazio connesso, T il suo rivestimento universale. Allora il gruppo fondamentale di G agisce banalmente sui gruppi di omotopia, di omologia e di coomologia di T.*

3.2 Prime proprietà degli spazi di cammini

Dati due spazi topologici X, Y, denotiamo con $C(X,Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. Riportiamo alcune nozioni di base relative alla topologia compatta-aperta.

Definizione 3.2. La topologia compatta-aperta su $C(X,Y)$ è la topologia generata da $\{V(K,U) : K \subseteq X \text{ compatto}, U \subseteq Y \text{ aperto}\}$, dove $V(K,U)$ è l'insieme delle funzioni $f \in C(X,Y)$ tali che $f(K) \subseteq U$.

D'ora in poi considereremo sempre su $C(X,Y)$ la topologia compatta-aperta.

Proposizione 3.3. *Siano X, Y, Z spazi topologici con X localmente compatto di Hausdorff.*

1. *L'applicazione di valutazione*
$$\begin{aligned} \omega : X \times C(X,Y) &\longrightarrow Y \\ (x,f) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$
è continua.

2. *Una funzione $g\colon Z \to C(X,Y)$ è continua se e solo se l'applicazione*
$$\begin{aligned} G : Z \times X &\longrightarrow Y \\ (z,x) &\longmapsto g(z)(x) \end{aligned}$$
è continua.

Dato uno spazio topologico X e due sottospazi $A, B \subseteq X$, denotiamo con $E_{A,B}$ il sottospazio di $C(I,X)$ delle funzioni f tali che $f(0) \in A$ e $f(1) \in B$. Con lieve abuso di notazione, scriveremo $E_{x,B}$ in luogo di $E_{\{x\},B}$ se $A = \{x\}$, e analogamente per B.

Proposizione 3.4. *Per ogni $x \in X$ lo spazio $E_{x,X}$ è contrattile.*

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione
$$\begin{aligned} H : I \times E_{x,X} &\longrightarrow E_{x,X} \\ (s,f) &\longmapsto H(s,f) \end{aligned}$$
dove $H(s,f)(t) = f(st)$. Per la Proposizione 3.3, H è continua. Inoltre H_1 è l'identità, mentre per ogni f $H_0(f)$ è il cammino che vale costantemente x. Dunque l'identità su $E_{x,X}$ è omotopa a un'applicazione costante, ossia $E_{x,X}$ è contrattile. □

Dati due cammini $f \in E_{x,y}, g \in E_{y,z}$ si definisce il cammino $f * g \in E_{x,z}$ come
$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$
Per ogni $x \in X$, definiamo $\Omega_x = E_{x,x}$.

Proposizione 3.5. *Ω_x, munito del prodotto $*$, è un H-spazio.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $*$ è continuo. Grazie alla Proposizione 3.3, è sufficiente dimostrare che l'applicazione da $\Omega_x \times \Omega_x \times I$ in X definita da $(f, g, t) \mapsto (f * g)(t)$ è continua, e ciò segue dalla continuità di $(f, t) \mapsto f(2t)$ e di $(g, t) \mapsto g(2t - 1)$.

Mostriamo poi che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \Omega_x &\longrightarrow \Omega_x \\ f &\longmapsto f * e \end{aligned}$$

è omotopa all'identità su Ω_x (mediante un'omotopia che fissa e), dove e è il cammino che vale costantemente x. È sufficiente considerare, per $s \in I$ e $f \in \Omega_x$,

$$\varphi_s(f)(t) = \begin{cases} f((s+1)t) & t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ x & t \geq 1 - \frac{s}{2} \end{cases}.$$

Osserviamo che $\varphi_s(f)(0) = \varphi_s(f)(1) = x$, dunque $\varphi_s(f) \in \Omega_x$; inoltre $\varphi_0(f) = f$, $\varphi_1(f) = f * e$ e $\varphi_s(e) = e$. Pertanto è sufficiente mostrare che $\varphi \colon I \times \Omega_x \to \Omega_x$ è continua, ossia, per la Proposizione 3.3, che

$$\begin{aligned} \Phi : I \times \Omega_x \times I &\longrightarrow X \\ (s, f, t) &\longmapsto \varphi_s(f)(t) \end{aligned}$$

è continua. Si vede però che $\Phi(s, f, t) = f(\theta(t, s))$, dove

$$\theta(t, s) = \begin{cases} (s+1)t & t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ 1 & t \geq 1 - \frac{s}{2} \end{cases},$$

perciò Φ è continua. In modo del tutto analogo si mostra che $f \mapsto e * f$ è omotopa all'identità. $\square$

Proposizione 3.6. *Supponiamo che A si contragga a un punto $x \in X$. Allora $E_{A,B}$ è omotopicamente equivalente a $A \times E_{x,B}$*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un'applicazione $D \colon I \times A \to X$ tale che $D(0, a) = a$ e $D(1, a) = x$ per ogni $a \in A$. Denotiamo con $f_a \in E_{a,x}$ il cammino $f_a(t) = D(t, a)$ e con $g_a \in E_{x,a}$ il cammino $g_a(t) = D(1 - t, a)$. Definiamo le applicazioni continue

$$\begin{aligned} \varphi : A \times E_{x,B} &\longrightarrow E_{A,B} \\ (a, h) &\longmapsto f_a * h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : E_{A,B} &\longrightarrow A \times E_{x,B} \\ h &\longmapsto (h(0), g_{h(0)} * h) \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi\psi(h) &= f_{h(0)} * (g_{h(0)} * h) \\ \psi\varphi(a,h) &= (a, g_a * (f_a * h)). \end{aligned}$$

□ Concludere la dimostrazione noiosa

Corollario 3.7. *Se A e B si contraggono rispettivamente a x, y, allora $E_{A,B}$ è omotopicamente equivalente a $A \times B \times E_{x,y}$.*

Corollario 3.8. *Supponiamo che X sia connesso per archi. Allora il tipo di omotopia di $E_{x,y}$ non dipende dalla scelta di x e y.*

In particolare, se X è connesso per archi il tipo di omotopia di Ω_x è indipendente da X. Indicheremo allora con ΩX (o semplicemente con Ω) lo spazio dei cammini chiusi aventi estremi in un punto $x \in X$ fissato, ma irrilevante. Dalla Proposizione 3.3 segue facilmente che Ω è connesso per archi se e solo se X è semplicemente connesso.

3.3 Fibrazione degli spazi di cammini

Proposizione 3.9. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, e siano $A, B \subseteq X$ due sottospazi. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} p : E_{A,B} &\longrightarrow A \times B \\ f &\longmapsto (f(0), f(1)) \end{aligned}$$

è una fibrazione.

Dimostrazione. Notiamo subito che p è suriettiva, in quanto X è connesso per archi. Mostreremo ora che p soddisfa la proprietà di sollevamento dell'omotopia per tutti gli spazi topologici (e non solo per i poliedri finiti). Sia Y uno spazio topologico, $f = (f_A, f_B) \colon I \times Y \to A \times B$ un'applicazione continua, $g \colon Y \to E_{A,B}$ tale che $pg(y) = f(0, y)$ per ogni $y \in Y$. Per la Proposizione 3.3, l'applicazione

$$\begin{aligned} G : Y \times I &\longrightarrow X \\ (y, t) &\longmapsto g(y)(t) \end{aligned}$$

è continua. Dobbiamo trovare una mappa continua $h \colon I \times Y \to E_{A,B}$ tale che $h(0, y) = g(y)$ e $ph = f$ o, equivalentemente, $H \colon I \times Y \times I \to X$ tale che $H(0, y, t) = G(y, t), H(s, y, 0) = f_A(s, y), H(s, y, 1) = f_B(s, y)$. Dobbiamo dunque estendere a tutto $I \times Y \times I$ una funzione definita su

$$(\{0\} \times Y \times I) \cup (I \times Y \times \{0\}) \cup (I \times Y \times \{1\}),$$

e ciò è reso possibile dal fatto che $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\})$ è un retratto di $I \times I$. □

Notiamo che le fibre di p sono spazi del tipo $E_{x,y}$, dunque sono tutte omotopicamente equivalenti a ΩX. Possiamo allora applicare i risultati del Capitolo 2 per ottenere quanto segue.

Proposizione 3.10. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso, $A, B \subseteq X$ due sottospazi connessi per archi; sia $\Omega = \Omega X$. Allora esiste una successione spettrale $E_r^{p,q}$ tale che $E_2^{p,q} = H_p(A \times B, H_q(\Omega))$, il cui gruppo terminale E_∞ è isomorfo al gruppo graduato associato a una filtrazione di $H(E_{A,B})$.*

Eventualmente giustificare l'azione banale

Naturalmente esiste la successione spettrale analoga in coomologia.

Sarà particolarmente interessante studiare il caso in cui $A = \{x\}$. Sotto questa ipotesi, infatti, $E_{A,B}$ è contrattile, dunque ha omologia e coomologia banali.

Capitolo 4

Gruppi di omotopia delle sfere

4.1 Metodo generale

Definizione 4.1. Uno spazio topologico X si dice uniformemente localmente contrattile (ULC) se esiste un intorno U della diagonale $\Delta \subseteq X \times X$ tale che le due applicazioni da U in X definite rispettivamente da $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ sono omotope mediante un'omotopia che fissa Δ.

Si può mostrare che, se X è connesso per archi e ULC, allora X ammette un rivestimento universale ULC; inoltre, se X è ULC, allora anche ΩX (lo spazio dei cammini chiusi su X) è ULC.

Sia X uno spazio connesso per archi ULC. Definiamo ricorsivamente:

- $X_0 = X$;
- T_{n+1} è il rivestimento universale di X_n per $n \geq 0$;
- $X_n = \Omega T_n$ per $n \geq 1$.

Osserviamo che si tratta di buone definizioni: X_0 è connesso per archi e ULC, dunque T_0 è ULC; inoltre T_0 è semplicemente connesso, pertanto X_1 è connesso per archi e ULC, e la costruzione si può ripetere indefinitamente.

Possiamo ora ricavare una relazione interessante fra i gruppi di omotopia di X e i gruppi di omologia di X_n.

Proposizione 4.1. *Per ogni $n \geq 0, i \geq 1$ vale $\pi_i(X_n) = \pi_{i+n}(X)$.*

Dimostrazione. La relazione è banalmente vera per $n = 0$. Ragionando per induzione, possiamo supporre che sia vera per $n-1$. Poiché T_n è il rivestimento universale di X_{n-1}, vale $\pi_1(T_n) = 0$ e $\pi_i(T_n) = \pi_i(X_{n-1}) = \pi_{i+n-1}(X)$ per

$i \geq 2$. Consideriamo la fibrazione $X_n \to E_{x,T_n} \to T_n$ e la successione esatta lunga dei gruppi di omotopia

$$\pi_{i+1}(E_{x,T_n}) \longrightarrow \pi_{i+1}(T_n) \longrightarrow \pi_i(X_n) \longrightarrow \pi_i(E_{x,T_n})$$

Ma E_{x,T_n} è contrattile, pertanto per ogni $i \geq 1$ vale $\pi_i(X_n) = \pi_{i+1}(T_n) = \pi_{i+n}(X)$. $\square$

Corollario 4.2. *Per ogni $n \geq 1$ vale $H_1(X_n) = \pi_{n+1}(X)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\pi_1(X_n) = \pi_n(X)$; in particolare $\pi_1(X_n)$ è abeliano. Per il teorema di Hurewicz, $\pi_1(X_n) = H_1(X_n)$. $\square$

Osserviamo che, per $n \geq 1$, X_n è un H-spazio, dunque il suo gruppo fondamentale, ossia $\pi_{n+1}(X)$, agisce banalmente sui gruppi di omologia e coomologia di T_n (■).

Proposizione 4.3. *Supponiamo che X sia semplicemente connesso, e che i gruppi $H_i(X)$ siano finitamente generati per ogni $i \geq 0$. Allora i gruppi $\pi_i(X)$ sono finitamente generati per ogni $i \geq 0$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 4.2 è sufficiente mostrare che i gruppi di omologia di X_n e di T_n sono finitamente generati per ogni $n \geq 0$. Ciò è sicuramente vero per X_0 per ipotesi e per T_1 poiché $T_1 = X_0$. Inoltre da ■ segue che anche i gruppi di omologia di X_1 sono fintamente generati. Ragioniamo ora per induzione, supponendo di aver dimostrato che i gruppi di omologia di T_{n-1} e X_{n-1} sono finitamente generati. Sia $\pi = \pi_1(X_{n-1})$. Consideriamo la successione spettrale $E_r^{p,q}$ associata al rivestimento $T_n \to X_{n-1}$ data da ■. Vale $E_2^{p,q} = H_p(\pi; H_q(T_n))$, e E_∞ è il gruppo graduato associato a $H(X_{n-1})$. Poiché π agisce banalmente su $H_q(T_n)$, per il teorema dei coefficienti universali vale

$$E_2^{p,q} = (H_p(\pi) \otimes H_q(T_n)) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(\pi), H_q(T_n)).$$

I gruppi di omologia di X_{n-1} sono finitamente generati per ipotesi induttiva, e π è finitamente generato poiché $\pi = H_1(X_{n-1})$. **(?)** Ripetendo il ragionamento di ■ si ottiene che i gruppi di omologia di T_n sono finitamente generati. Applicando di nuovo ■ troviamo che anche i gruppi di omologia di X_n sono finitamente generati. $\square$

Proposizione 4.4. *Supponiamo che X sia semplicemente connesso, e che i gruppi $H_i(X)$ siano finitamente generati per ogni $i \geq 0$. Sia K un campo. Supponiamo inoltre che $H_i(X;K) = 0$ per $0 < i < n$. Allora $\pi_i(X) \otimes K = H_i(X;K)$ per $2 \leq i \leq n$.*

Dimostrazione. Dimostriamo inizialmente il seguente fatto: dati $i > 0, j \leq n - i$ vale $H_i(X_j;K) = H_{i+j}(X;K)$. Mostriamolo per induzione su j. Per $j = 0$ la tesi è ovvia. Sia ora $j \geq 1$. Abbiamo $\pi_1(X_{j-1}) \otimes K = H_1(X_{j-1}) \otimes K = H_1(X_{j-1};K) = 0$. $\pi_1(X_{j-1}) = \pi_j(X)$ è un gruppo abeliano finitamente generato, dunque è in realtà finito, e il suo ordine è coprimo con la caratteristica di K. Per ■ vale $H_i(T_j; K) = H_i(X_{j-1}; K)$ per ogni $i \geq 0$. Per concludere è sufficiente ricordare che $X_j = \Omega T_j$ è applicare ■.

La tesi della proposizione segue ora banalmente. Se $2 \leq i \leq n$ vale

$$\pi_i(X) \otimes K = H_1(X_{i-1}) \otimes K = H_i(X) \otimes K = H_i(X; K).$$

□

4.2 Sfere di dimensione dispari

Lemma 4.5. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso, $\Omega = \Omega X$; sia inoltre K un campo. Supponiamo che $H^*(X; K)$ sia isomorfa a un'algebra di polinomi $K[u]$ generata da un elemento u di grado $n \geq 2$ pari. Allora $H^*(\Omega; K)$ è isomorfa a un'algebra esterna generata da un elemento v di grado $n-1$.*

Dimostrazione. □

Proposizione 4.6. *Per ogni n dispari e per ogni $i > n$, il gruppo $\pi_i(S^n)$ è finito.*