Capitolo 1

Successioni spettrali

1.1 Prime definizioni

Definizione 1.1. Un gruppo abeliano A si dice graduato se si scrive come somma diretta di sottogruppi

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \otimes * [^n]A.$$

Gli elementi non nulli di $\otimes * [^n]A$ si dicono omogenei di grado n. Se $x \in A \setminus 0$ è omogeneo di grado n scriviamo $\deg x = n$.

Definizione 1.2. Sia A un gruppo graduato. Un'applicazione $d \colon A \to A$ si dice differenziale di grado k se $dd = 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $d(\otimes * [^n]A) \subseteq \otimes * [^{n+k}]A$.

A ogni gruppo graduato A dotato di un differenziale d di grado -1 è associato in modo naturale un complesso di gruppi abeliani $A_\bullet$ dove l'n-esimo gruppo è $\otimes * [^n]A$ e le mappe di bordo sono $d_n = d|_{\otimes * [^n]A}$. Possiamo allora definire i gruppi di omologia di A riconducendoci al complesso associato: $H_n(A) = H_n(A_\bullet)$. In altri termini:

$$H_n(A) = \frac{\ker d \cap \otimes * [^n]A}{\operatorname{im} d \cap \otimes * [^n]A}.$$

Definizione 1.3. Sia A un gruppo graduato dotato di un differenziale d di grado -1. Si dice filtrazione crescente una successione di sottogruppi A^p indicizzata da $p \in \mathbb{N}$ che soddisfi le seguenti proprietà.

1. $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A^p = A$.

2. Per ogni p vale $A^p \subseteq A^{p+1}$.

3. Ogni A^p è somma diretta delle sue componenti omogenee $\otimes * [^n]A \cap A^p$.

4. Per ogni n vale $\otimes * [^n]A \subseteq A^n$.

5. Ogni A^p è stabile per d, ossia $d(A^p) \subseteq A^p$.

In questa situazione, poniamo per comodità $A^p = 0$ per $p < 0$ e $\otimes * [^n]A = 0$ per $n < 0$. Definiamo inoltre, per ogni $r \in \mathbb{Z}$, i sottogruppi di A^p:

- $C_r^p = d^{-1}(A^{p-r}) \cap A^p$;
- $B_r^p = d(A^{p+r}) \cap A^p$;
- $C_\infty^p = d^{-1}(0) \cap A^p$;
- $B_\infty^p = d(A) \cap A^p$.

Valgono le seguenti relazioni di inclusione:

$$\ldots \subseteq B_{r-1}^p \subseteq B_r^p \subseteq \ldots \subseteq B_\infty^p \subseteq C_\infty^p \subseteq \ldots \subseteq C_r^p \subseteq C_{r-1}^p \subseteq \ldots \subseteq C_0^p = A^p.$$

È facile convincersi che questi sottogruppi sono ancora gruppi graduati, ossia si scrivono come somma diretta delle loro componenti omogenee (secondo il grado di A). Per motivi che risulteranno evidenti in seguito, conviene definire, per $p, q \in \mathbb{Z}$, $A^{p,q} = \otimes * [^{p+q}]A \cap A^p$ (gli elementi omogenei di A^p di grado $p+q$). Denotiamo con $C_r^{p,q} = C_r^p \cap A^{p,q}$ gli elementi omogenei di grado $p+q$ di C_r^p; definiamo analogamente $B_r^{p,q}, C_\infty^{p,q}, B_\infty^{p,q}$.

Possiamo ora costruire la successione spettrale associata ad A. Dati $p, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ definiamo

$$E_r^{p,q} = \frac{C_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q} + C_{r-1}^{p-1,q+1}}.$$

In $E_r^{p,q}$, p è detto grado filtrante, q grado complementare, $p+q$ grado totale (quest'ultimo corrisponde al grado in A). Osserviamo che

$$\begin{aligned} d(C_r^{p,q}) &= d(d^{-1}(A^{p-r}) \cap A^{p,q}) \\ &\subseteq A^{p-r} \cap d(A^{p,q}) \\ &= A^{p-r,q+r-1} \cap d(A^p) \\ &= B_r^{p-r,q+r-1} \\ &\subseteq C_r^{p-r,q+r-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(B_{r-1}^{p,q} + C_{r-1}^{p-1,q+1}) &= d(C_{r-1}^{p-1,q+1}) \\ &\subseteq B_{r-1}^{p-r,q+r-1} \\ &\subseteq B_{r-1}^{p-r,q+r-1} + C_{r-1}^{p-r-1,q+r}, \end{aligned}$$

dunque il differenziale d passa al quoziente $d_r^{p,q} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p-r,q+r-1}$. Come si vede immediatamente, il differenziale:

- diminuisce di r il grado filtrante,

- aumenta di $r-1$ il grado complementare,
- diminuisce di 1 il grado totale.

Per concludere, definiamo i gruppi terminali

$$E_\infty^{p,q} = \frac{C_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} + C_\infty^{p-1,q+1}}.$$

Proposizione 1.1. *La successione spettrale E soddisfa le seguenti proprietà.*

1. $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q} / \operatorname{im} d_r^{p+r,q-r+1}$.
2. $E_r^{p,q} = 0$ *per* $p < 0$ *o* $q < 0$.
3. *Se* $r > p$, *allora* $E_{r+1}^{p,q}$ *è un quoziente di* $E_r^{p,q}$.
4. *Se* $r > q+1$, *allora* $E_{r+1}^{p,q}$ *è un sottogruppo di* $E_r^{p,q}$.
5. $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ *per* r *sufficientemente grande (in particolare, per* $r > \max\{p, q+1\}$*).*

Dimostrazione.

1. BOH
2. Osserviamo che $E_0^{p,q} = A^{p,q}/A^{p-1,q+1}$. Se $p < 0$ chiaramente $E_0^{p,q} = 0$ (ricordiamo che abbiamo posto $A^p = 0$ per $p < 0$). Se $q < 0$, allora $A^{p,q} = \otimes * [^{p+q}]A \cap A^p \subseteq \otimes * [^{p+1}]A \cap A^{p-1} = A^{p-1,q+1}$, dunque $E_0^{p,q} = 0$ anche in questo caso. La proprietà è pertanto vera per $r = 0$; ma $E_{r+1}^{p,q}$ è un quoziente di un sottogruppo di $E_r^{p,q}$, da cui per induzione $E_r^{p,q} = 0$ per ogni $r \geq 0$.
3. Se $r > p$, allora $E_r^{p-r,q+r-1} = 0$, da cui $d_r^{p,q} = 0$. Segue che $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q} / \operatorname{im} d_r^{p+r,q-r+1}$ è un quoziente di $E_r^{p,q}$.
4. Se $r > q+1$, allora $E_r^{p+r,q+r-1} = 0$, da cui $d^{p+r,q+r-1} = 0$. Segue che $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q}/0$ è un sottogruppo di $E_r^{p,q}$.
5. Se $r > p$, allora $C_r^p = C_\infty^p$ e $C_{r-1}^{p-1} = C_\infty^{p-1}$. Se $r > q+1$, allora

$$\begin{aligned} B_\infty^{p,q} &= d(A) \cap A^{p,q} = d(\otimes * [^{p+q+1}]A) \cap A^{p,q} \\ &\subseteq d(A^{p+q+1}) \cap A^{p,q} \subseteq d(A^{p+r}) \cap A^{p,q} = B_r^{p,q}. \end{aligned}$$

   Pertanto, se $r > \max\{p, q+1\}$, allora $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

□

Capitolo 2

Omologia e coomologia degli spazi fibrati

2.1 Omologia singolare cubica

L'omologia singolare classica utilizza i simplessi singolari come oggetti fondamentali. Per la teoria degli spazi fibrati dovremo introdurre la nozione di omologia singolare cubica, che impiega cubi in luogo dei simplessi. Come è lecito aspettarsi, i cubi si prestano meglio allo studio degli spazi prodotto, e anche a quello degli spazi fibrati che, come vedremo, ne sono una generalizzazione.

Nel seguito indicheremo con I l'intervallo $[0,1]$ con l'usuale topologia euclidea. Sia inoltre X uno spazio topologico.

Definizione 2.1. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si dice cubo singolare (o più semplicemente cubo) di dimensione n un'applicazione continua $u\colon I^n \to X$. Un cubo di dimensione $n \geq 1$ si dice degenere se non dipende dall'ultima coordinata, ossia se $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n)$ per ogni $x_1, \ldots, x_n, x'_n \in I$.

Denotiamo con $Q_n(X)$ il gruppo abeliano libero avente per base l'insieme dei cubi singolari di dimensione n, con D_n il gruppo abeliano libero avente per base l'insieme dei cubi degeneri di dimensione n. Per definire il complesso $Q_\bullet(X)$ è necessario costruire mappe di bordo $d_n\colon Q_n(X) \to Q_{n-1}(X)$.

Sia u un cubo di dimensione n, $p, q \in \mathbb{N}$ con $p+q = n$, H un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ di cardinalità p, K il complementare di H, φ_K l'unica applicazione strettamente crescente da K in $\{1, \ldots, q\}$; sia inoltre $\epsilon \in \{0,1\}$. Definiamo allora il cubo singolare $\lambda_H^\epsilon u$ di dimensione q:

$$\lambda_H^\epsilon u(x_1, \ldots, x_n) = u(y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{, dove } y_i = \begin{cases} \epsilon & \text{se } i \in H \\ x_{\varphi_K(i)} & \text{se } i \in K \end{cases}.$$

Per snellire la notazione, se $H = \{i\}$ (ossia se $p = 1$), scriviamo λ_i^ϵ in luogo di $\lambda_{\{i\}}^\epsilon$. Dato un cubo u di dimensione n, definiamo dunque

$$d_n u = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i^0 u - \lambda_i^1 u),$$

estendendola per $\mathbb{Z}$-linearità a tutto $Q_n(X)$. È immediato verificare che $\lambda_i^\epsilon \lambda_j^{\epsilon'} = \lambda_{j-1}^{\epsilon'} \lambda_i^\epsilon$; un semplice conto mostra allora che $d_n d_{n+1} = 0$. Abbiamo così definito il complesso $Q_\bullet(X)$. Si vede inoltre che $D_\bullet(X)$ è un sottocomplesso di $Q_\bullet(X)$: se u è un cubo degenere di dimensione n, allora anche $\lambda_i^\epsilon u$ è degenere per $0 \leq i < n$, mentre $\lambda_n^0 u = \lambda_n^1 u$, pertanto du è degenere.

Definizione 2.2. Si dice complesso singolare (cubico) di X il complesso $C_\bullet(X) = Q_\bullet(X)/D_\bullet(X)$. I suoi gruppi di omologia e coomologia a coefficienti in un gruppo abeliano G si dicono gruppi di omologia e coomologia singolare (cubica) di X a coefficienti in G.

Poiché nel seguito faremo uso esclusivamente dell'omologia singolare cubica, impiegheremo le notazioni classiche dell'omologia singolare:

$$\begin{aligned} C_\bullet(X; G) &= C_\bullet(X) \otimes G \\ H_n(X; G) &= H_n(C_\bullet(X; G)) \\ C^\bullet(X; G) &= \mathrm{Hom}(C_\bullet, G) \\ H^n(X; G) &= H^n(C^\bullet(X; G)). \end{aligned}$$

Sia inoltre $H^*(X; G) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; G)$. Esattamente come nel caso della teoria singolare classica, se G è un anello, $H^*(X; G)$ acquisisce una struttura di anello graduato. Si definisce il prodotto cupcome segue: se u è un cubo di dimensione $p + q$ e f, g sono cocatene di dimensione p, q rispettivamente, allora

$$(f \smile g)u = \sum_H \rho_{H,K} f(\lambda_K^0 u) \cdot g(\lambda_H^1 u),$$

dove H varia fra i sottoinsiemi di $\{1, \ldots, p + q\}$ di cardinalità p, K è il complementare di H e $\rho_{H,K} = (-1)^\nu$ (ν indica il numero di coppie $(i, j) \in H \times K$ con $j < i$).