Todo list

Utile disegnino illustrativo e descrizione a parole. 2
Serre lo fa però. 9
Rendere questo capitolo un po' più serio (o inglobarlo altrove) 11
Tor di moduli f.g. è f.g.? Sì, se A è PID 11
Rivedere dopo aver fatto il diagramma del capitolo 1. 12
Nella proposizione serve dire che la mappa è il differenziale. 13
Spiegare come funziona il prodotto (i segni in particolare). 13
Concludere la dimostrazione noiosa 17
Introdurre questa notazione 19
Farla (dopo averla capita). 22

Capitolo 1

Successioni spettrali

1.1 Definizioni

Definizione 1.1. Si dice successione spettrale (omologica) una famiglia di gruppi abeliani $E_r^{p,q}$ indicizzata da $p, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ dotata di omomorfismi $d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p-r,q+r-1}$ (detti mappe di bordo) che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $E_r^{p,q} = 0$ per $p < 0$ o $q < 0$;
2. $d_r^{p-r,q+r-1} \circ d_r^{p,q} = 0$;
3. $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q} / \operatorname{im} d_r^{p+r,q-r+1}$.

Fissati $p, q \geq 0$, per r sufficientemente grande (in particolare $r > p$ e $r > q+1$) i morfismi di bordo $d_r^{p,q}$ sono nulli, in quanto uno fra dominio e codominio è nullo, dunque $E_r^{p,q}$ è definitivamente uguale a un certo gruppo abeliano $E_\infty^{p,q}$.

Utile disegnino illustrativo e descrizione a parole.

Definizione 1.2. Si dice che una successione spettrale $E_r^{p,q}$ converge a una famiglia di gruppi abeliani H_n (e si scrive $E_r^{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$) se esistono filtrazioni

$$0 = H_n^{-1} \subseteq H_n^0 \subseteq H_n^1 \subseteq \ldots \subseteq H_n^{n-2} \subseteq H_n^{n-1} \subseteq H_n^n = H_n$$

tali che $E_\infty^{p,q} = H_{p+q}^p / H_{p+q}^{p-1}$.

1.2 Una successione esatta

Proposizione 1.1. *Sia $E_r^{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ una successione spettrale, $i, j, r > 0$ con $i \leq j$. Per ogni $i \leq n \leq j$ siano date due coppie di interi $(a_n', b_n'), (a_n'', b_n'')$ con $a_n' + b_n' = a_n'' + b_n'' = n$ e $a_n' < a_n''$. Supponiamo che per ogni $i \leq n \leq j$ valga $E_r^{p,q} = 0$ ogniqualvolta:*

- *$p + q = n$ e $(p, q) \neq (a_n', b_n'), (a_n'', b_n'')$;*

- *$p+q=n-1$ e $p \leq a'_n - r$;*
- *$p+q=n+1$ e $p \geq a''_n + r$.*

Denotiamo con ${}^nE'_r$ il gruppo $E_r^{p,q}$ con $p=a'_n, q=b'_n$, e analogamente sia ${}^nE''_r$ il gruppo $E_r^{p,q}$ con $p=a''_n, q=b''_n$. Denotiamo inoltre con nd l'applicazione $d_s^{p,q}\colon {}^nE''_r \to {}^{n-1}E'_r$ corrispondente a $p=a''_n, q=b''_n, s=a''_n-a'_{n-1}$ oppure l'applicazione nulla se $s<r$. Allora nd è ben definita per ogni $i \leq n < j$ ed esiste una successione esatta

$$ {}^jE'_r \longrightarrow H_j \longrightarrow {}^jE''_r \xrightarrow{\ {}^jd\ } {}^{j-1}E'_r \longrightarrow \dots \xrightarrow{\ {}^{i+1}d\ } {}^iE'_r \longrightarrow H_i \longrightarrow {}^iE''_r $$

Dimostrazione. Siano $i \leq n \leq j$, p,q interi con $p+q=n$ e $p \neq a'_n, a''_n$. Poiché $E_r^{p,q}=0$, anche $E_s^{p,q}=0$ per $s \geq r$, e dunque $E_\infty^{p,q}=0$. Dalla definizione di convergenza segue che ${}^nE'_\infty = H'_n$ e ${}^nE''_\infty = H''_n/H'_n = H_n/{}^nE'_\infty$, dove H'_n è il termine della filtrazione H_n^p corrispondente a $p=a'_n$ e H''_n quello corrispondente a $p=a''_n$. Abbiamo dunque la successione esatta

$$ 0 \longrightarrow {}^nE'_\infty \longrightarrow H_n \longrightarrow {}^nE''_\infty \longrightarrow 0 \qquad (\star) $$

Mostriamo ora i seguenti fatti.

- Per $i \leq n \leq j$ e $s \geq r$ le mappe di bordo $d_s^{p,q}\colon {}^nE'_s \to E_s^{p-s,q+s-1}$ sono nulle, dove $p=a'_n, q=b'_n$. Infatti $E_r^{p-s,q+s-1}$ è nullo per ipotesi, dunque anche $E_s^{p-s,q+s-1}$ è nullo.
- Per $i \leq n \leq j$ e $s \geq r$ le mappe di bordo $d_s^{p+s,q-s+1}\colon E_s^{p+s,q-s+1} \to {}^nE''_s$ sono nulle, dove $p=a''_n, q=b''_n$. Infatti $E_r^{p+s,q-s+1}$ è nullo per ipotesi, dunque anche $E_s^{p+s,q-s+1}$ è nullo.
- Per $i \leq n < j$ e $s \geq r$ le mappe di bordo $d_s^{p+s,q-s+1}\colon E_s^{p+s,q-s+1} \to {}^nE'_s$ sono nulle, dove $p=a'_n, q=b'_n$, con l'unica eventuale eccezione di $s=a''_{n+1}-a'_n$ (almeno se questo valore è $\geq r$). Infatti gli unici valori di s per cui la mappa di bordo può essere non nulla sono $s=a'_{n+1}-a'_n$ e $s=a''_{n+1}-a'_n$, ma abbiamo già visto che le mappe di bordo uscenti da ${}^{n+1}E'_s$ sono nulle per ogni $s \geq r$, dunque l'unica possibilità è $s=a''_{n+1}-a'_n$.
- Per $i < n \leq j$ e $s \geq r$ le mappe di bordo $d_s^{p,q}\colon {}^nE''_s \to E^{p-s,q+s-1}$ sono nulle, dove $p=a''_n, q=b''_n$, con l'unica eventuale eccezione di $s=a''_n-a'_{n-1}$. La dimostrazione è analoga a quella del punto precedente.

Risulta evidente da questi fatti che, fissato $i < n \leq j$, l'applicazione nd dell'enunciato è ben definita: infatti se $s=a''_n-a_{n-1} \geq r$ vale

$$ {}^nE''_r = {}^nE''_{r+1} = \dots = {}^nE''_s, \qquad {}^{n-1}E'_r = {}^{n-1}E'_{r+1} = \dots = {}^{n-1}E'_s. $$

Inoltre vale in ogni caso

$$ {}^nE''_\infty = \ker {}^nd \subseteq {}^nE''_r, \qquad {}^{n-1}E'_\infty = {}^{n-1}E'_r/\operatorname{im}{}^nd. $$

Partendo dalla $(\star)$ possiamo così scrivere le successioni esatte

$$^{n+1}E''_r \xrightarrow{^{n+1}d} {}^{n}E'_r \longrightarrow H_n \longrightarrow {}^{n}E''_r$$

$$^{n}E'_r \longrightarrow H_n \longrightarrow {}^{n}E''_r \xrightarrow{^{n}d} {}^{n-1}E'_r$$

la prima valida per $i \leq n < j$ e la seconda per $i < n \leq j$. Sovrapponendole si ottiene la successione esatta della tesi. $\square$

Capitolo 2

Omologia e coomologia degli spazi fibrati

2.1 Omologia singolare cubica

L'omologia singolare classica utilizza i simplessi singolari come oggetti fondamentali. Per la teoria degli spazi fibrati dovremo introdurre la nozione di omologia singolare cubica, che impiega cubi in luogo dei simplessi. Come è lecito aspettarsi, i cubi si prestano meglio allo studio degli spazi prodotto, e anche a quello degli spazi fibrati che, come vedremo, ne sono una generalizzazione.

Nel seguito indicheremo con I l'intervallo $[0, 1]$ con l'usuale topologia euclidea. Sia inoltre X uno spazio topologico.

Definizione 2.1. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si dice cubo singolare (o più semplicemente cubo) di dimensione n un'applicazione continua $u\colon I^n \to X$. Un cubo di dimensione $n \geq 1$ si dice degenere se non dipende dall'ultima coordinata, ossia se $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n)$ per ogni $x_1, \ldots, x_n, x'_n \in I$.

Denotiamo con $Q_n(X)$ il gruppo abeliano libero avente per base l'insieme dei cubi singolari di dimensione n, con D_n il gruppo abeliano libero avente per base l'insieme dei cubi degeneri di dimensione n. Per definire il complesso $Q_\bullet(X)$ è necessario costruire mappe di bordo $d_n\colon Q_n(X) \to Q_{n-1}(X)$.

Sia u un cubo di dimensione n, $p, q \in \mathbb{N}$ con $p + q = n$, H un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ di cardinalità p, K il complementare di H, φ_K l'unica applicazione strettamente crescente da K in $\{1, \ldots, q\}$; sia inoltre $\epsilon \in \{0, 1\}$. Definiamo allora il cubo singolare $\lambda_H^\epsilon u$ di dimensione q:

$$\lambda_H^\epsilon u(x_1, \ldots, x_n) = u(y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{, dove } y_i = \begin{cases} \epsilon & \text{se } i \in H \\ x_{\varphi_K(i)} & \text{se } i \in K \end{cases}.$$

Per snellire la notazione, se $H = \{i\}$ (ossia se $p = 1$), scriviamo λ_i^ϵ in luogo di $\lambda_{\{i\}}^\epsilon$. Dato un cubo u di dimensione n, definiamo dunque

$$d_n u = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i^0 u - \lambda_i^1 u),$$

estendendola per $\mathbb{Z}$-linearità a tutto $Q_n(X)$. È immediato verificare che $\lambda_i^\epsilon \lambda_j^{\epsilon'} = \lambda_{j-1}^{\epsilon'} \lambda_i^\epsilon$; un semplice conto mostra allora che $d_n d_{n+1} = 0$. Abbiamo così definito il complesso $Q_\bullet(X)$. Si vede inoltre che $D_\bullet(X)$ è un sottocomplesso di $Q_\bullet(X)$: se u è un cubo degenere di dimensione n, allora anche $\lambda_i^\epsilon u$ è degenere per $0 \leq i < n$, mentre $\lambda_n^0 u = \lambda_n^1 u$, pertanto du è degenere.

Definizione 2.2. Si dice complesso singolare (cubico) di X il complesso $C_\bullet(X) = Q_\bullet(X)/D_\bullet(X)$. I suoi gruppi di omologia e coomologia a coefficienti in un gruppo abeliano G si dicono gruppi di omologia e coomologia singolare (cubica) di X a coefficienti in G.

Poiché nel seguito faremo uso esclusivamente dell'omologia singolare cubica, impiegheremo le notazioni classiche dell'omologia singolare:

$$\begin{aligned} C_\bullet(X;G) &= C_\bullet(X) \otimes G \\ H_n(X;G) &= H_n(C_\bullet(X;G)) \\ C^\bullet(X;G) &= \mathrm{Hom}(C_\bullet(X), G) \\ H^n(X;G) &= H^n(C^\bullet(X;G)). \end{aligned}$$

Osserviamo che $C^n(X;G)$ può essere interpretato come il gruppo delle funzioni dai cubi di dimensione n in G che sono nulle sui cubi degeneri.

Siano inoltre $H(X;G) = \bigoplus_{n\geq 0} H_n(X;G)$, $H^*(X;G) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n(X;G)$. Esattamente come nel caso della teoria singolare classica, se G è un anello, $H^*(X;G)$ acquisisce una struttura di anello graduato. Si definisce il prodotto cup come segue: se u è un cubo di dimensione $p+q$ e f, g sono cocatene di dimensione p, q rispettivamente, allora

$$(f \smile g)u = \sum_H \rho_{H,K} f(\lambda_K^0 u) \cdot g(\lambda_H^1 u),$$

dove H varia fra i sottoinsiemi di $\{1, \ldots, p+q\}$ di cardinalità p, K è il complementare di H e $\rho_{H,K} = (-1)^\nu$ (ν indica il numero di coppie $(i,j) \in H \times K$ con $j < i$). Il prodotto cup è ben definito: poiché f e g sono nulle sui cubi degeneri, si vede anche $f \smile g$ soddisfa la stessa proprietà (se u è degenere, allora anche uno fra $\lambda_K^0 u$ e $\lambda_H^1 u$ lo è). Si verifica poi che $\smile$ è associativo, e che

$$d(f \smile g) = df \smile g + (-1)^p f \smile dg,$$

da cui segue che il prodotto cup passa al quoziente, definendo un prodotto in coomologia $\smile : H^*(X;G) \times H^*(X;G) \to H^*(X;G)$.

Si può dimostrare che l'approccio dell'omologia cubica conduce ai medesimi risultati dell'omologia singolare classica.

Proposizione 2.1. *Denotiamo con $H_\Delta(X;G), H^*_\Delta(X;G)$ l'omologia e la coomologia singolare standard. Allora $H(X;G) \simeq H_\Delta(X;G)$ come gruppi graduati, e $H^*(X;G) \simeq H^*_\Delta(X;G)$ come anelli graduati.*

Corollario 2.2. *Siano $f, g \in H^*(X;G)$ rispettivamente di grado p e q. Allora $f \smile g = (-1)^{pq} g \smile f$.*

Studiando più esplicitamente l'isomorfismo fra l'omologia (e la coomologia) cubica e quella singolare classica si può dimostrare quanto segue.

Proposizione 2.3. *Supponiamo che X sia connesso per archi; sia $x \in X$ un punto fissato. Allora i gruppi di omologia e coomologia (cubica) di X rimangono inalterati se ci si limita a considerare cubi singolari aventi tutti i vertici in x.*

2.2 Spazi fibrati

Definizione 2.3. Un'applicazione continua suriettiva $p\colon E \to B$ si dice fibrazione se soddisfa la seguente proprietà (sollevamento dell'omotopia per poliedri finiti): dati un poliedro finito P e due applicazioni continue $f\colon I \times P \to B, g\colon P \to E$ tali che $pg = fi$ (dove i denota l'inclusione $i\colon P \to I \times P$ definita da $i(x) = (0, x)$), esiste un'applicazione continua $h\colon I \times P \to E$ tale che $ph = f$ e $hi = g$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times P \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Se $p\colon E \to B$ è una fibrazione, chiameremo E spazio totale e B spazio base. In realtà il sollevamento dell'omotopia per poliedri finiti implica una proprietà più forte.

Proposizione 2.4. *Sia $p\colon E \to B$ una fibrazione, $A \subseteq X$ due poliedri finiti; indichiamo con $i\colon A \to X$ l'inclusione. Siano $f\colon X \to B, g\colon A \to E$ applicazioni continue tali che $pg = fi$. Allora esiste un'applicazione continua $h\colon X \to E$ tale che $ph = f$ e $hi = g$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

Lemma 2.5. *La proposizione è vera se $X = A \times I^n$ per un qualche $n \geq 0$ e $i(x) = (x, 0)$.*

Dimostrazione. □

□

Proposizione 2.6. *Sia $p\colon E \to B$ una fibrazione, $e \in E, b = p(e), F = p^{-1}(e)$.*

1. *La mappa p induce un isomorfismo $p_*\colon \pi_i(E, F, e) \to \pi_i(B, b)$ per ogni $i \geq 1$.*

2. *Esiste una successione esatta lunga di gruppi*

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(E,e) \longrightarrow \pi_{i+1}(B,b) \longrightarrow \pi_i(F,e) \longrightarrow \pi_i(E,e) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_1(E,e) \longrightarrow \pi$$

Dimostrazione. □

Proposizione 2.7. *Sia $p\colon E \to B$ una fibrazione, $e \in E, b = p(e), F = p^{-1}(e)$. Supponiamo che B e F siano connesse per archi. Allora anche E e tutte le altre fibre sono connesse per archi.*

Dimostrazione. □

D'ora in poi considereremo solo fibrazioni con spazio base e fibre connessi per archi. Per la Proposizione 2.3 possiamo limitarci a considerare cubi con vertici in un singolo punto fissato nello studio dell'omologia e della coomologia. Nel seguito supporremo dunque implicitamente che i cubi in F ed E abbiano tutti i vertici in un punto fissato e, e che i cubi in B abbiano tutti i vertici in $b = p(e)$.

2.3 Azione di $\pi_1(B)$ sull'omologia della fibra

Ci proponiamo ora di mostrare come il gruppo fondamentale di B agisca sui gruppi di omologia e coomologia di F.

Definizione 2.4. Sia γ un cammino chiuso in B con estremi in b, T un'applicazione che a ogni cubo u di dimensione n di F ne associa uno Tu di dimensione $n+1$. T si dice costruzione subordinata a γ se soddisfa le seguenti proprietà per ogni cubo u di dimensione n:

1. $\lambda_1^0 Tu = u$;
2. $(p \circ Tu)(t, t_1, \dots, t_n) = \gamma(t)$ per ogni $t_1, \dots, t_n \in I$;
3. $T\lambda_i^\epsilon u = \lambda_{i+1}^\epsilon Tu$ per $0 \leq i \leq n, \epsilon \in \{0, 1\}$;
4. se u è degenere, allora anche Tu lo è.

Ogni costruzione T induce un morfismo di complessi $S_T\colon C_\bullet(F) \to C_\bullet(F)$ definito da $(S_T u)(t) = (Tu)(1, t)$. Le proprietà delle costruzioni garantiscono che $S_T u$ è effettivamente un cubo di F, che cubi degeneri vengono mandati in cubi degeneri e che S_T commuta con la mappa di bordo. A sua volta, S_T induce endomorfismi dei gruppi di omologia e coomologia di F.

Proposizione 2.8. *Siano γ_1, γ_2 cammini chiusi in B con estremi in b, T_1, T_2 costruzioni subordinate rispettivamente a γ_1, γ_2. Supponiamo che γ_1, γ_2 rappresentino lo stesso elemento del gruppo fondamentale. Allora i morfismi di complessi S_{T_1} e S_{T_2} sono omotopi.*

Dimostrazione. □

Si potrebbe dimostrare che per ogni cammino γ esiste una costruzione subordinata a γ, e che l'applicazione $\pi_1(B, b) \to \mathrm{Aut}(H_n(F))$ è un omomorfismo di gruppi, ma non utilizzeremo questi risultati. Ci limitiamo a dimostrare quanto segue.

Serre lo fa però.

Proposizione 2.9. *Sia γ un cammino chiuso in B con estremi in b, T una costruzione subordinata a γ. Supponiamo che γ sia omotopicamente banale. Allora S_T induce l'identità in omologia e in coomologia.*

Dimostrazione. □

Motivati dalla proposizione precedente, ci limiteremo spesso a studiare fibrazioni in cui l'azione di $\pi_1(B)$ sui gruppi di omologia e coomologia di F è banale (con questa espressione intendiamo che per ogni costruzione T subordinata a un qualche cammino il morfismo S_T induce l'identità in omologia e in coomologia).

Corollario 2.10. *Se B è semplicemente connesso, allora $\pi_1(B)$ agisce banalmente sui gruppi di omologia e coomologia di F.*

2.4 Successione spettrale di uno spazio fibrato

Per applicare i risultati di ■, è necessario definire una filtrazione crescente sul complesso singolare $C_\bullet(E)$ (d'ora in poi ometteremo la E dell'argomento). Ciò che faremo sarà filtrare il complesso $Q_\bullet$ con dei sottocomplessi $Q^p_\bullet$ e prenderne le immagini nel quoziente $C_\bullet$. Sia dunque Q^p_n il sottogruppo di Q_n generato dai cubi $u \in Q_n$ tali che $p \circ u$ dipende solo dalle prime p coordinate (e $Q^p_n = Q_n$ se $p > n$). Si vede immediatamente che i $Q^p_\bullet$ sono sottocomplessi di $Q_\bullet$ e che soddisfano le proprietà di una filtrazione crescente. Dunque lo stesso vale per $C^p_\bullet = (Q^p_\bullet + D_\bullet)/D_\bullet$, che definiscono una filtrazione crescente per $C_\bullet$. Applicando ■ otteniamo una successione spettrale $E^{p,q}_r$ il cui gruppo terminale E_∞ è isomorfo al gruppo graduato associato a una filtrazione di $H(E)$. Come vedremo, è possibile calcolare esplicitamente i termini $E^{p,q}_2$ della successione spettrale in funzione dei gruppi di omologia di B e di F.

Costruiamo due applicazioni B^p e F^p definite sui cubi di $Q^p_\bullet$. Se $u \in Q^p_n$ è un cubo di dimensione n con $n \geq p$, posto $q = n - p$, definiamo

$$(B^p u)(t_1, \dots, t_p) = pu(t_1, \dots, t_p, 0, \dots, 0);$$
$$(F^p u)(t_1, \dots, t_q) = u(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_q).$$

$B^p u$ è un cubo di B di dimensione p; notiamo che, poiché $u \in Q^p_n$, possiamo sostituire gli zeri nella definizione con qualunque altra q-upla di numeri fra 0 e

1. $F^p u$ è invece un cubo di F di dimensione q; la sua immagine è contenuta in F poiché

$$p(F^p u)(t_1, \ldots, t_q) = pu(0, \ldots, 0, t_1, \ldots, t_q) = pu(0, \ldots, 0) = b.$$

Le seguenti proprietà sono di verifica immediata.

1. Se $u \in Q_n^{p-1}$ allora $B^p u$ è degenere.
2. Se u è degenere e $q > 0$ allora $F^p u$ è degenere; se u è degenere e $q = 0$ allora $B^p u$ è degenere.
3. Se $i > p, \epsilon \in \{0, 1\}$ allora $B^p \lambda_i^\epsilon u = B^p u$ e $F^p \lambda_i^\epsilon u = \lambda_{i-p}^\epsilon F^p u$.

Ricordiamo che $E_0^{p,q} = C_{p+q}^p / C_{p+q}^{p-1}$ e che il differenziale $d_0^{p,q} \colon E_0^{p,q} \to E_0^{p,q-1}$ si ottiene dalla mappa di bordo di $C_\bullet$ per passaggio al quoziente.

Capitolo 3

Lemmi a caso

Rendere questo capitolo un po' più serio (o inglobarlo altrove)

3.1 Primo lemma

Proposizione 3.1. *Sia A un PID, $F \hookrightarrow E \to B$ una fibrazione in cui $\pi_1(B)$ agisce banalmente sui moduli di omologia di F. Supponiamo che tutti i moduli di omologia di E e di B a coefficienti in A siano A-moduli finitamente generati. Allora lo stesso vale per F.*

Dimostrazione. Sia $E_r^{p,q}$ la successione spettrale associata alla fibrazione. Mostriamo per induzione su i che $H_i(F; A)$ è un A-modulo finitamente generato. Per $i = 0$ è ovvio, essendo F connesso per archi. Sia ora $i > 0$. Supponiamo per assurdo che $H_i(F; A) = E_2^{0,i}$ non sia finitamente generato. Allora nemmeno $E_3^{0,i}$ è finitamente generato: infatti $E_3^{0,i}$ è il quoziente di $E_2^{0,i}$ per l'immagine del differenziale $d_2^{2,i-1} \colon E_2^{2,i-1} \to E_2^{0,i}$, la quale è finitamente generata in quanto

$$E_2^{2,i-1} = (H_2(B; A) \otimes H_{i-1}(F; A)) \oplus \mathrm{Tor}(H_1(B; A), H_{i-1}(F; A))$$

è finitamente generato per ipotesi induttiva. Procedendo allo stesso modo si trova che $E_r^{0,i}$ non è finitamente generato per alcun $r \geq 2$. Ma ciò è assurdo, poiché per r sufficientemente grande $E_r^{0,i} = E_\infty^{0,i}$ è un sottomodulo del modulo graduato associato a $H_i(E; A)$, e quest'ultimo è finitamente generato per ipotesi. □

Tor di moduli f.g. è f.g.? Sì, se A è PID

3.2 Una successione esatta

Proposizione 3.2. *Sia A un PID, $F \hookrightarrow E \to B$ una fibrazione in cui $\pi_1(B)$ agisce banalmente sui moduli di omologia di F. Supponiamo che $H_i(B; A) = 0$ per $0 < i < p$ e che $H_i(F; A) = 0$ per $0 < i < q$.*

1. *Esiste una successione esatta*

$$H_{p+q-1}(F;A) \longrightarrow H_{p+q-1}(E;A) \longrightarrow H_{p+q-1}(B;A) \xrightarrow{d_{p+q-1}} H_{p+q-2}(F;A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_2(B;$$

2. *L'applicazione* $p_* \colon H_i(E,F;A) \to H_i(B;A)$ *indotta da* p *è un isomorfismo per* $2 \leq i < p+q$ *ed è suriettiva per* $i = p+q$.

Dimostrazione.

1. Per il teorema dei coefficienti universali vale
$$E_2^{i,j} = (H_i(B;A) \otimes H_j(F;A)) \oplus \mathrm{Tor}(H_{i-1}(B;A), H_j(F;A)),$$
da cui $E_2^{i,j} = 0$ se $i,j > 0$ e $i+j \leq p+q-1$. Pertanto, se $0 \leq n \leq p+q-1$, ci sono al più due termini $E_2^{i,j}$ non nulli con $i+j=n$ (ossia $(i,j) = (0,n)$ e $(i,j) = (n,0)$); è inoltre evidente che le altre condizioni di ■ sono soddisfatte, dunque possiamo applicarl* (ricordando che $E_2^{0,n} = H_n(F;A)$ e $E^{n,0} = H_n(B;A)$) ottenendo la successione esatta della tesi.

2. Sia $2 \leq i \leq p+q$. Abbiamo visto (■) che l'immagine di p_* in $H_i(B;A)$ è $E_i^{i,0}$. Notiamo che per $2 \leq r < i$ il differenziale $d_r^{i,0} \colon E_r^{i,0} \to E_r^{i-r,r-1}$ è nullo, in quanto $E_r^{i-r,r-1}$ è nullo (infatti $i-r > 0, r-1 > 0$ e $i-r+r-1 = i-1 < p+q$). Deduciamo che
$$H_i(B;A) = E_2^{i,0} = E_3^{i,0} = \ldots = E_i^{i,0} = \operatorname{im} p_*,$$
pertanto p_* è suriettiva. Sia ora $2 \leq i < p+q$; consideriamo il diagramma commutativo
$$\begin{tikzcd}
H_i(F;A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}"] & H_i(E;A) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & H_i(E,F;A) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & H_{i-1}(F;A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}"] & H_{i-1}(E;A) \arrow[d, "\mathbb{1}"] \\
H_i(F;A) \arrow[r] & H_i(E;A) \arrow[r] & H_i(B;A) \arrow[r] & H_{i-1}(F;A) \arrow[r] & H_{i-1}(E;A)
\end{tikzcd}$$
La prima riga è la successione esatta lunga della coppia (E,F), la seconda deriva dalla prima parte della proposizione ed è esatta, e la commutatività segue da ■. La tesi segue allora dal lemma dei cinque.

Rivedere dopo aver fatto il diagramma del capitolo 1.

□

Naturalmente vale un teorema analogo per i moduli di coomologia.

Corollario 3.3. *Supponiamo che* $H_i(E;A) = 0$ *per ogni* $i > 0$ *e che* $H_i(B;A) = 0$ *per* $0 < i < p$. *Allora la sospensione* $\Sigma \colon H_i(F;A) \to H_{i+1}(B;A)$ *è un isomorfismo per* $0 < i < 2p-2$ *ed è suriettiva per* $i = 2p-2$.

Dimostrazione. Dalla prima parte della Proposizione 3.2 (applicata con $q = 1$) segue che $H_i(F;A) = 0$ per $0 < i < p-1$. Dalla seconda parte (applicata con $q = p-1$) segue immediatamente la tesi, ricordando che $\Sigma = p_* \partial^{-1}$ (dove $\partial \colon H_{i+1}(E,F;A) \to H_i(F;A)$ denota il morfismo di bordo). □

Notiamo in particolare che, nelle ipotesi del corollario, $H_i(F;A) = 0$ per $0 < i < p-1$.

3.3 Successione esatta di Wang

Proposizione 3.4. *Sia A un PID, $F \hookrightarrow E \to B$ una fibrazione in cui $\pi_1(B)$ agisce banalmente sui moduli di coomologia di F. Supponiamo che B sia semplicemente connesso e abbia la stessa A-algebra di coomologia della sfera S^k con $k \geq 2$. Allora esiste una successione esatta*

$$\dots \longrightarrow H^n(E;A) \longrightarrow H^n(F;A) \xrightarrow{\theta} H^{n-k+1}(F;A) \longrightarrow H^{n+1}(E;A) \longrightarrow \dots$$

Inoltre θ è una derivazione se k è dispari e un'antiderivazione se k è pari, ossia

$$\theta(x \cdot y) = \theta x \cdot y + (-1)^{(k+1)\deg x} x \cdot \theta y.$$

Dimostrazione. Denotiamo con E_r la successione spettrale in coomologia associata alla fibrazione. Per ipotesi $H^i(B;A)$ è un A-modulo libero finitamente generato per ogni i, dunque per ■ E_2 è isomorfo come A-algebra a $H^*(B;A) \otimes H^*(F;A)$. Pertanto, per ogni grado totale n, E_2 ha al più due termini $E_2^{i,j}$ non nulli, corrispondenti a $i = 0$ e $i = k$. Applicando ■otteniamo la successione esatta

Nella proposizione serve dire che la mappa è il differenziale.

$$\dots \longrightarrow H^n(E;A) \longrightarrow E_2^{0,n} \xrightarrow{d_k} E_2^{k,n-k+1} \longrightarrow H^{n+1}(E;A) \longrightarrow \dots$$

Ricordiamo che $E_2^{0,n} = H^n(F;A)$ e che

$$E_2^{k,n-k+1} = H^k(B;A) \otimes H^{n-k+1}(F;A).$$

Sia s un generatore di $H^k(B;A)$; consideriamo l'isomorfismo

$$\begin{aligned} g : H^{n-k+1}(F;A) &\longrightarrow H^k(B;A) \otimes H^{n-k+1}(F;A) \\ x &\longmapsto s \otimes x \end{aligned}$$

Posto $\theta = g^{-1} d_k$, otteniamo la successione esatta della tesi. Per mostrare la seconda parte, calcoliamo

$$\begin{aligned} d_k(x \cdot y) &= d_k x \cdot y + (-1)^{\deg x} x \cdot d_k y \\ &= (s \otimes \theta x) \cdot (1 \otimes y) + (-1)^{\deg x} (1 \otimes x) \cdot (s \otimes \theta y) \\ &= s \otimes (\theta x \cdot y + (-1)^{(k+1)\deg x} x \cdot \theta y), \end{aligned}$$

ma anche $d_k(x \cdot y) = s \otimes \theta(x \cdot y)$, da cui la tesi. □

Spiegare come funziona il prodotto (i segni in particolare).

Ripetendo la prima parte della dimostrazione, si vede facilmente che esiste una successione esatta duale in omologia.

Capitolo 4

Spazi di cammini

4.1 H-spazi

Definizione 4.1. Sia G uno spazio topologico munito di un prodotto $\vee\colon G \times G \to G$ continuo. G si dice H-spazio se esiste $e \in G$ con $e \vee e = e$ tale che le applicazioni da G in G definite da $x \mapsto x \vee e$ e $x \mapsto e \vee x$ siano omotope all'identità mediante omotopie che fissano e.

Proposizione 4.1. *Sia G un H-spazio connesso, $p\colon T \to G$ un rivestimento. Allora gli automorfismi di rivestimento di T sono omotopi all'identità.*

Dimostrazione. Sia $f\colon T \to T$ un automorfismo di rivestimento, $\tilde{e}$ un elemento della fibra di e, $\tilde{e}' = f(\tilde{e})$. Sia poi $\gamma\colon I \to G$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = e$ il cui sollevamento $\tilde{\gamma}$ soddisfi $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{e}, \tilde{\gamma}(1) = \tilde{e}'$. Sia infine $h\colon I \times G \to G$ un'omotopia con $h_0(x) = x$ e $h_1(x) = e \vee x$. Definiamo l'omotopia

$$\begin{aligned} H : I \times T &\longrightarrow G \\ (x,t) &\longmapsto \begin{cases} h_{3t}(p(x)) & t \leq \frac{1}{3} \\ \gamma(3t-1) \vee p(x) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ h_{3-3t}(p(x)) & \frac{2}{3} \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

Per la proprietà di sollevamento dell'omotopia, esiste un'omotopia $\tilde{H}\colon I \times T \to T$ con $\tilde{H}_0 = \mathbb{1}$ e $p\tilde{H} = H$. Osserviamo che il cammino $t \mapsto H_t(\tilde{e})$ è omotopo a γ e $\tilde{H}_0(\tilde{e}) = \tilde{e}$, pertanto $\tilde{H}_1(\tilde{e}) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{e}'$. Ma allora $\tilde{H}_1$ è un sollevamento dell'identità di G tale che $\tilde{H}_1(\tilde{e}) = f(\tilde{e})$. Dalla connessione di G segue che $\tilde{H}_1 = f$. Ma $\tilde{H}_1 = f$ e $\tilde{H}_0 = \mathbb{1}$ sono omotope mediante H. □

Corollario 4.2. *Sia G un H-spazio connesso, T il suo rivestimento universale. Allora il gruppo fondamentale di G agisce banalmente sui gruppi di omotopia, di omologia e di coomologia di T.*

4.2 Prime proprietà degli spazi di cammini

Dati due spazi topologici X, Y, denotiamo con $C(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y. Riportiamo alcune nozioni di base relative alla topologia compatta-aperta.

Definizione 4.2. La topologia compatta-aperta su $C(X, Y)$ è la topologia generata da $\{V(K, U) : K \subseteq X \text{ compatto}, U \subseteq Y \text{ aperto}\}$, dove $V(K, U)$ è l'insieme delle funzioni $f \in C(X, Y)$ tali che $f(K) \subseteq U$.

D'ora in poi considereremo sempre su $C(X, Y)$ la topologia compatta-aperta.

Proposizione 4.3. *Siano X, Y, Z spazi topologici con X localmente compatto di Hausdorff.*

1. *L'applicazione di valutazione*

$$\begin{aligned} \omega : X \times C(X, Y) &\longrightarrow Y \\ (x, f) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

   è continua.

2. *Una funzione $g \colon Z \to C(X, Y)$ è continua se e solo se l'applicazione*

$$\begin{aligned} G : Z \times X &\longrightarrow Y \\ (z, x) &\longmapsto g(z)(x) \end{aligned}$$

   è continua.

Dato uno spazio topologico X e due sottospazi $A, B \subseteq X$, denotiamo con $E_{A,B}$ il sottospazio di $C(I, X)$ delle funzioni f tali che $f(0) \in A$ e $f(1) \in B$. Con lieve abuso di notazione, scriveremo $E_{x,B}$ in luogo di $E_{\{x\},B}$ se $A = \{x\}$, e analogamente per B.

Proposizione 4.4. *Per ogni $x \in X$ lo spazio $E_{x,X}$ è contrattile.*

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} H : I \times E_{x,X} &\longrightarrow E_{x,X} \\ (s, f) &\longmapsto H(s, f) \end{aligned}$$

dove $H(s, f)(t) = f(st)$. Per la Proposizione 4.3, H è continua. Inoltre H_1 è l'identità, mentre per ogni f $H_0(f)$ è il cammino che vale costantemente x. Dunque l'identità su $E_{x,X}$ è omotopa a un'applicazione costante, ossia $E_{x,X}$ è contrattile. $\square$

Dati due cammini $f \in E_{x,y}, g \in E_{y,z}$ si definisce il cammino $f * g \in E_{x,z}$ come

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Per ogni $x \in X$, definiamo $\Omega_x = E_{x,x}$.

Proposizione 4.5. *Ω_x, munito del prodotto $*$, è un H-spazio.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $*$ è continuo. Grazie alla Proposizione 4.3, è sufficiente dimostrare che l'applicazione da $\Omega_x \times \Omega_x \times I$ in X definita da $(f, g, t) \mapsto (f * g)(t)$ è continua, e ciò segue dalla continuità di $(f, t) \mapsto f(2t)$ e di $(g, t) \mapsto g(2t - 1)$.

Mostriamo poi che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \Omega_x &\longrightarrow \Omega_x \\ f &\longmapsto f * e \end{aligned}$$

è omotopa all'identità su Ω_x (mediante un'omotopia che fissa e), dove e è il cammino che vale costantemente x (è evidente che $e * e = e$). È sufficiente considerare, per $s \in I$ e $f \in \Omega_x$,

$$\varphi_s(f)(t) = \begin{cases} f((s+1)t) & t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ x & t \geq 1 - \frac{s}{2} \end{cases}.$$

Osserviamo che $\varphi_s(f)(0) = \varphi_s(f)(1) = x$, dunque $\varphi_s(f) \in \Omega_x$; inoltre $\varphi_0(f) = f$, $\varphi_1(f) = f * e$ e $\varphi_s(e) = e$. Pertanto è sufficiente mostrare che $\varphi \colon I \times \Omega_x \to \Omega_x$ è continua, ossia, per la Proposizione 4.3, che

$$\begin{aligned} \Phi : I \times \Omega_x \times I &\longrightarrow X \\ (s, f, t) &\longmapsto \varphi_s(f)(t) \end{aligned}$$

è continua. Si vede però che $\Phi(s, f, t) = f(\theta(t, s))$, dove

$$\theta(t, s) = \begin{cases} (s+1)t & t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ 1 & t \geq 1 - \frac{s}{2} \end{cases},$$

perciò Φ è continua. In modo del tutto analogo si mostra che $f \mapsto e * f$ è omotopa all'identità. $\square$

Proposizione 4.6. *Supponiamo che A si contragga a un punto $x \in X$. Allora $E_{A,B}$ è omotopicamente equivalente a $A \times E_{x,B}$*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un'applicazione $D \colon I \times A \to X$ tale che $D(0, a) = a$ e $D(1, a) = x$ per ogni $a \in A$. Denotiamo con $f_a \in E_{a,x}$ il cammino $f_a(t) = D(t, a)$ e con $g_a \in E_{x,a}$ il cammino $g_a(t) = D(1 - t, a)$. Definiamo le applicazioni continue

$$\begin{aligned} \varphi : A \times E_{x,B} &\longrightarrow E_{A,B} \\ (a, h) &\longmapsto f_a * h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : E_{A,B} &\longrightarrow A \times E_{x,B} \\ h &\longmapsto (h(0), g_{h(0)} * h) \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\varphi\psi(h) = f_{h(0)} * (g_{h(0)} * h)$$
$$\psi\varphi(a, h) = (a, g_a * (f_a * h)).$$

□

Concludere la dimostrazione noiosa

Corollario 4.7. *Se A e B si contraggono rispettivamente a x, y, allora $E_{A,B}$ è omotopicamente equivalente a $A \times B \times E_{x,y}$.*

Corollario 4.8. *Supponiamo che X sia connesso per archi. Allora il tipo di omotopia di $E_{x,y}$ non dipende dalla scelta di x e y.*

In particolare, se X è connesso per archi il tipo di omotopia di Ω_x è indipendente da x. Indicheremo allora con ΩX (o semplicemente con Ω) lo spazio dei cammini chiusi aventi estremi in un punto $x \in X$ fissato, ma irrilevante. Dalla Proposizione 4.3 segue facilmente che Ω è connesso per archi se e solo se X è semplicemente connesso.

4.3 Fibrazione degli spazi di cammini

Proposizione 4.9. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, e siano $A, B \subseteq X$ due sottospazi. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} p : E_{A,B} &\longrightarrow A \times B \\ f &\longmapsto (f(0), f(1)) \end{aligned}$$

è una fibrazione.

Dimostrazione. Notiamo subito che p è suriettiva, in quanto X è connesso per archi. Mostreremo ora che p soddisfa la proprietà di sollevamento dell'omotopia per tutti gli spazi topologici (e non solo per i poliedri finiti). Sia Y uno spazio topologico, $f = (f_A, f_B)\colon I \times Y \to A \times B$ un'applicazione continua, $g\colon Y \to E_{A,B}$ tale che $pg(y) = f(0, y)$ per ogni $y \in Y$. Per la Proposizione 4.3, l'applicazione

$$\begin{aligned} G : Y \times I &\longrightarrow X \\ (y, t) &\longmapsto g(y)(t) \end{aligned}$$

è continua. Dobbiamo trovare una mappa continua $h\colon I \times Y \to E_{A,B}$ tale che $h(0, y) = g(y)$ e $ph = f$ o, equivalentemente, $H\colon I \times Y \times I \to X$ tale che $H(0, y, t) = G(y, t), H(s, y, 0) = f_A(s, y), H(s, y, 1) = f_B(s, y)$. Dobbiamo dunque estendere a tutto $I \times Y \times I$ una funzione definita su

$$(\{0\} \times Y \times I) \cup (I \times Y \times \{0\}) \cup (I \times Y \times \{1\}),$$

e ciò è reso possibile dal fatto che $(\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\})$ è un retratto di $I \times I$. □

Proposizione 4.10. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso, $x \in X$. Allora esiste una successione spettrale $E_r^{p,q}$ tale che $E_2^{p,q} = H_p(X, H_q(\Omega))$, il cui gruppo terminale E_∞ è isomorfo al gruppo graduato associato a una filtrazione di $H(E_{x,X})$.*

Dimostrazione. Consideriamo la fibrazione $E_{x,X} \to X$ della Proposizione 4.9 (dove abbiamo identificato $\{x\} \times X$ con X). Le fibre sono spazi del tipo $E_{x,y}$, dunque omotopicamente equivalenti a Ω. Poiché X è semplicemente connesso, Ω è connesso per archi, e inoltre l'azione di $\pi_1(X)$ sui gruppi di omologia di Ω è banale. Siamo dunque nelle condizioni di applicare $\blacksquare$, da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Naturalmente esiste la successione spettrale duale in coomologia.

Proposizione 4.11. *Siano A un PID, X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso. Supponiamo che tutti i moduli di omologia di X a coefficienti in A siano finitamente generati. Allora vale lo stesso per Ω.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ un punto. Poiché $E_{x,X}$ è contrattile, tutti i suoi moduli di omologia sono finitamente generati (in particolare $H_0(E_{x,X}; A) = 0$ e $H_i(E_{x,X}; A) = A$ per $i > 0$). Applicando la Proposizione 3.1 alla fibrazione $\Omega \hookrightarrow E_{x,X} \to X$ si ottiene immediatamente la tesi. $\square$

Proposizione 4.12. *Sia A un PID, X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso. Supponiamo che $H_i(X; A) = 0$ per $0 < i < p$. Allora la sospensione $\Sigma\colon H_i(\Omega; A) \to H_{i+1}(X; A)$ è un isomorfismo per $0 < i < 2p-2$ ed è suriettiva per $i = 2p-2$.*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal Corollario 3.3 applicato alla fibrazione $\Omega \hookrightarrow E_{x,X} \to X$, ricordando che $E_{x,X}$ è contrattile. $\square$

Capitolo 5

Gruppi di omotopia delle sfere

5.1 Metodo generale

Definizione 5.1. Uno spazio topologico X si dice uniformemente localmente contrattile (ULC) se esiste un intorno U della diagonale $\Delta \subseteq X \times X$ tale che le due applicazioni da U in X definite rispettivamente da $(x, y) \mapsto x$ e $(x, y) \mapsto y$ sono omotope mediante un'omotopia che fissa Δ.

Si può mostrare che, se X è connesso per archi e ULC, allora X ammette un rivestimento universale ULC; inoltre, se X è ULC, allora anche ΩX (lo spazio dei cammini chiusi su X) è ULC.

Sia X uno spazio connesso per archi ULC. Definiamo ricorsivamente:

- $X_0 = X$;
- T_{n+1} è il rivestimento universale di X_n per $n \geq 0$;
- $X_n = \Omega T_n$ per $n \geq 1$.

Osserviamo che si tratta di buone definizioni: X_0 è connesso per archi e ULC, dunque T_0 è ULC; inoltre T_0 è semplicemente connesso, pertanto X_1 è connesso per archi e ULC, e la costruzione si può ripetere indefinitamente.

Possiamo ora ricavare una relazione interessante fra i gruppi di omotopia di X e i gruppi di omologia di X_n.

Proposizione 5.1. *Per ogni $n \geq 0, i \geq 1$ vale $\pi_i(X_n) = \pi_{i+n}(X)$.*

Dimostrazione. La relazione è banalmente vera per $n = 0$. Ragionando per induzione, possiamo supporre che sia vera per $n-1$. Poiché T_n è il rivestimento universale di X_{n-1}, vale $\pi_1(T_n) = 0$ e $\pi_i(T_n) = \pi_i(X_{n-1}) = \pi_{i+n-1}(X)$ per $i \geq 2$. Consideriamo la fibrazione $X_n \to E_{x,T_n} \to T_n$e la successione esatta

Introdurre questa notazione

lunga dei gruppi di omotopia

$$\pi_{i+1}(E_{x,T_n}) \longrightarrow \pi_{i+1}(T_n) \longrightarrow \pi_i(X_n) \longrightarrow \pi_i(E_{x,T_n})$$

Ma E_{x,T_n} è contrattile, pertanto per ogni $i \geq 1$ vale $\pi_i(X_n) = \pi_{i+1}(T_n) = \pi_{i+n}(X)$. $\square$

Corollario 5.2. *Per ogni $n \geq 1$ vale $H_1(X_n) = \pi_{n+1}(X)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\pi_1(X_n) = \pi_{n+1}(X)$; in particolare $\pi_1(X_n)$ è abeliano. Per il teorema di Hurewicz, $\pi_1(X_n) = H_1(X_n)$. $\square$

Osserviamo che, per $n \geq 1$, X_n è un H-spazio, dunque il suo gruppo fondamentale, ossia $\pi_{n+1}(X)$, agisce banalmente sui gruppi di omologia e coomologia di T_n (Corollario 4.2).

Proposizione 5.3. *Supponiamo che X sia semplicemente connesso, e che i gruppi $H_i(X)$ siano finitamente generati per ogni $i \geq 0$. Allora i gruppi di omologia di X_i e di T_i sono finitamente generati per ogni $i \geq 0$.*

Dimostrazione. La tesi è sicuramente vera per X_0 per ipotesi e per T_1 poiché $T_1 = X_0$. Inoltre dalla Proposizione 4.11 segue che anche i gruppi di omologia di X_1 sono fintamente generati. Ragioniamo ora per induzione, supponendo di aver dimostrato che i gruppi di omologia di T_{n-1} e X_{n-1} sono finitamente generati. Sia $\pi = \pi_1(X_{n-1})$. Consideriamo la successione spettrale E_r associata al rivestimento $T_n \to X_{n-1}$ data da $\blacksquare$ (ricordiamo che π agisce banalmente sui gruppi di omologia di T_n). Vale $E_2^{p,q} = H_p(\pi; H_q(T_n))$, e E_∞ è il gruppo graduato associato a $H(X_{n-1})$. Dal il teorema dei coefficienti universali otteniamo

$$E_2^{p,q} = (H_p(\pi) \otimes H_q(T_n)) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(\pi), H_q(T_n)).$$

I gruppi di omologia di X_{n-1} sono finitamente generati per ipotesi induttiva, e π è finitamente generato poiché $\pi = H_1(X_{n-1})$. **(?)** Ripetendo la dimostrazione della Proposizione 3.1 si ottiene che i gruppi di omologia di T_n sono finitamente generati. Applicando di nuovo Proposizione 4.11 troviamo che anche i gruppi di omologia di X_n sono finitamente generati. $\square$

Corollario 5.4. *Supponiamo che X sia semplicemente connesso, e che i gruppi $H_i(X)$ siano finitamente generati per ogni $i \geq 0$. Allora i gruppi $\pi_i(X)$ sono finitamente generati per ogni $i \geq 0$.*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal Corollario 5.2 e dalla Proposizione 5.3 $\square$

Proposizione 5.5. *Supponiamo che X sia semplicemente connesso, e che i gruppi $H_i(X)$ siano finitamente generati per ogni $i \geq 0$. Sia K un campo. Supponiamo inoltre che $H_i(X; K) = 0$ per $0 < i < n$. Allora $\pi_i(X) \otimes K = H_i(X; K)$ per $2 \leq i \leq n$.*

Dimostrazione. Dimostriamo inizialmente il seguente fatto: dati $i > 0, 0 \leq j \leq n-i$ vale $H_i(X_j; K) = H_{i+j}(X; K)$. Mostriamolo per induzione su j. Per $j = 0$ la tesi è ovvia. Sia ora $j \geq 1$. Abbiamo

$$\pi_1(X_{j-1}) \otimes K = H_1(X_{j-1}) \otimes K = H_1(X_{j-1}; K) = H_j(X; K) = 0.$$

Il gruppo abeliano $\pi_1(X_{j-1})$ è finitamente generato, dunque è in realtà finito, e il suo ordine è coprimo con la caratteristica di K. Per ■ vale $H_i(T_j; K) = H_i(X_{j-1}; K)$ per ogni $i \geq 0$. Per concludere è sufficiente ricordare che $X_j = \Omega T_j$ e applicare la Proposizione 4.12.

La tesi della proposizione segue ora banalmente: se $2 \leq i \leq n$ vale

$$\pi_i(X) \otimes K = H_1(X_{i-1}) \otimes K = H_1(X_{i-1}; K) = H_i(X; K).$$

□

5.2 Sfere di dimensione dispari

Lemma 5.6. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso; sia inoltre K un campo di caratteristica nulla. Supponiamo che $H^*(X; K)$ sia l'algebra esterna generata da un elemento di grado $n \geq 3$ dispari. Allora $H^*(\Omega; K)$ è l'algebra di polinomi generata da un elemento di grado $n-1$.*

Dimostrazione. Osserviamo che X ha la stessa algebra di coomologia della sfera S^n, dunque possiamo scrivere la successione esatta di Wang associata alla fibrazione $\Omega \hookrightarrow E_{x,X} \to X$:

$$H^i(E_{x,X}; K) \longrightarrow H^i(\Omega; K) \xrightarrow{\theta} H^{i-k+1}(\Omega K) \longrightarrow H^{i+1}(E_{x,X}; K)$$

Poiché $E_{x,X}$ è contrattile, $H^i(E_{x,X}; K) = 0$ per $i > 0$, dunque θ è un isomorfismo e $H^i(\Omega; K) = H^{i+(k-1)}(\Omega; K)$ per ogni $i \geq 0$, ossia

$$H^i(\Omega; K) = \begin{cases} K & \text{se } i \equiv 0 \pmod{k-1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Definiamo per ogni $i \geq 0$ un elemento $e_i \in H^{(k-1)i}(\Omega; K)$ per ricorsione: $e_0 = 1 \in H^0(\Omega; K)$ e $e_i = i\theta^{-1}e_{i-1}$. È evidente che gli e_i formano una base di $H^*(\Omega; K)$ come K-modulo; basta allora dimostrare che $e_i \cdot e_j = e_{i+j}$ per concludere che $H^*(\Omega; K)$ è l'algebra di polinomi generata da e_1. Dalla successione esatta di Wang sappiamo che θ è una derivazione, in quanto n è dispari. Per induzione su $i + j$ si vede che

$$\begin{aligned} \theta(e_i \cdot e_j) &= \theta e_i \cdot e_j + e_i \cdot \theta e_j \\ &= ie_{i-1} \cdot e_j + e_i \cdot je_{j-1} \\ &= (i+j)e_{i+j-1} \\ &= \theta e_{i+j} \end{aligned}$$

da cui (essendo θ un isomorfismo) $e_i \cdot e_j = e_{i+j}$. □

Lemma 5.7. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e semplicemente connesso; sia inoltre K un campo. Supponiamo che $H^*(X;K)$ sia l'algebra di polinomi generata da un elemento u di grado $n \geq 2$ pari. Allora $H^*(\Omega;K)$ è l'algebra esterna generata da un elemento v di grado $n-1$.*

Dimostrazione. □

Farla (dopo averla capita).

Proposizione 5.8. *Per ogni $n \geq 3$ dispari e per ogni $i > n$, il gruppo $\pi_i(S^n)$ è finito.*

Dimostrazione. Sia $X = S^n$, e siano X_i, T_i gli spazi costruiti secondo il metodo generale della sezione precedente. Sia K un campo di caratteristica nulla; calcoliamo le algebre di coomologia degli spazi X_i e T_i a coefficienti in K. Abbiamo che $T_1 = X$, dunque la sua algebra di coomologia è l'algebra esterna generata da un elemento di grado n. Per il Lemma 5.6, l'algebra di coomologia di X_1 è l'algebra di polinomi generata da un elemento di grado $n-1$. Dalla Proposizione 5.1 deduciamo che $\pi_1(X_1) = \pi_2(X) = 0$, ossia X_1 è semplicemente connesso, da cui $T_2 = X_1$. Applicando il Lemma 5.7 otteniamo che l'algebra di coomologia di X_2 è l'algebra esterna generata da un elemento di grado $n-2$. Proseguendo in questo modo risulta che l'algebra di coomologia di X_{n-1} è l'algebra esterna generata da un elemento di grado 1; in particolare $H^i(X_{n-1};K) = 0$ per $i \geq 2$. Dal teorema dei coefficienti universali si deduce immediatamente che $H_i(X_{n-1};K) = 0$ per $i \geq 2$. Essendo $\pi_1(X_{n-1}) = \pi_n(X) = \mathbb{Z}$, da ■ segue che $H_i(T_n;K) = 0$ per $i > 0$. Ma T_n è semplicemente connesso e i suoi gruppi di omologia sono finitamente generati, dunque possiamo applicare la Proposizione 5.5 e dedurre che $\pi_i(T_n) \otimes K = 0$ per ogni $i \geq 2$. Sfruttando la Proposizione 5.1 e il fatto che T_n è il rivestimento universale di X_{n-1} otteniamo infine che

$$\pi_{n+i-1}(X) \otimes K = \pi_i(X_{n-1}) \otimes K = \pi_i(T_n) \otimes K = 0$$

per ogni $i \geq 2$, ossia che $\pi_i(X) \otimes K = 0$ per $i > n$. Ricordando che i gruppi di omotopia di X sono finitamente generati (Corollario 5.4) possiamo concludere che $\pi_i(S^n)$ è un gruppo abeliano finito per $i > n$. □